

TABLE DES MATIÈRES

N° des leçons	Pages
1. Opérations	3
2. Groupes	9
3. Sous-groupes	12
4. Groupe quotient. Sous-groupe distingué	15
5. Homomorphismes, isomorphismes	18
6. Anneaux	22
7. Idéal. Homomorphismes d'anneaux	27
8. Corps	30
9. Treillis	33
10. Loi externe. Espaces vectoriels	36
11. Sous-espaces vectoriels	38
12. Dépendance linéaire et indépendance linéaire	43
13. Bases d'un espace vectoriel	46
14. Anneau \mathbb{Z} . Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	50
15. Le corps \mathbb{R} des réels	54
16. Le corps \mathbb{C} des nombres complexes	58
17. Forme trigonométrique d'un nombre complexe	61
18. Représentation géométrique des nombres complexes	63
19. Application de la formule de Moivre à la trigonométrie	68
20. Racines d'un nombre complexe	71
21. Équation du second degré	74
22. Forme exponentielle d'un nombre complexe	78
23. Division des polynômes	80
24. Polynômes de $\mathbb{C}(X)$ et de $\mathbb{R}(X)$	84
25. Équations algébriques	87
26. Fractions rationnelles	89
27. Matrices	95
28. Opérations sur les matrices	97
29. Applications linéaires	102
30. Applications linéaires et matrices	109
31. Déterminants	118
32. Systèmes d'équations linéaires	124
33. Inversion des matrices carrées	130
34. Changement de base	136
35. Vecteurs propres. Valeurs propres	142
36. Diagonalisation des matrices	148

© LIBRAIRIE ARMAND COLIN, PARIS 1971

« La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants-droit ou ayants-cause, est illicite » (alinéa 1^{er} de l'article 40). « Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code Pénal. »

1

OPÉRATIONS

Avertissement. — Les définitions données dans les chapitres relatifs aux opérations utilisent les propriétés des ensembles \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} . L'emploi de ces ensembles ne restreint en rien la généralité des définitions.

1.1 OPÉRATION INTERNE (OU LOI DE COMPOSITION INTERNE) DANS UN ENSEMBLE

Définition. — On appelle opération interne dans un ensemble E toute correspondance dans cet ordre, fait correspondre un élément et un seul c de E . L'élément c est dit composé. Certains couples (a, b) peuvent ne pas admettre de composé.

(Exemple : la différence $2 - 5$ n'existe pas dans \mathbb{N}).

Définition équivalente. — On appelle opération interne dans un ensemble E toute application f de $E \times E$ dans E . Si $A = E \times E$, on dit que l'opération est partout définie sur E .

Si l'opération est notée \star , symbole qui se lit étoile ou star (ou aster) on écrit : $a \star b = c$

ou lit : a star b égale c .

Exemples. L'addition (+), la soustraction (-), la multiplication (\times) sont des opérations internes dans \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} . Nous supposons connues leurs propriétés (communauté, associativité, distributivité).

TABLE D'OPÉRATION. — Lorsque E est fini, une opération peut être déterminée par sa table d'opération. (Exemple : table de multiplication des entiers naturels inférieurs à 10.)

NOTATION. — Un ensemble E muni des opérations $\star, +$, peut se noter $(E, +, \star)$.

1.2 PROPRIÉTÉS. — Nous considérons une opération \star partout définie sur E .

1.2.1 Associativité. — L'opération \star est dite associative si, et seulement si :

$$\forall (a, b, c) \in E^3, (a \star b) \star c = a \star (b \star c)$$

Dans ce cas le composé est encore noté $a \star b \star c$.

Si d est élément de E on peut définir le composé des éléments a, b, c, d soit :

$$[(a \star b) \star c] \star d$$

On définit, de proche en proche, le composé d'un nombre quelconque d'éléments de E .

● **Théorème.** — Dans toute opération interne associative, on peut remplacer un élément par son composé.

Ce théorème conduit à poser $[(a \star b) \star c] \star d = a \star b \star c \star d$.

1.2.2 Commutativité. — L'opération \star est dite commutative si, et seulement si :

$$\forall (a, b) \in E^2, a \star b = b \star a$$

La table d'opération est alors symétrique par rapport à la diagonale descendante principale.

Exemples.

L'addition dans \mathbb{N} dont nous donnons un extrait de la table :

	2 ^e élément	0	1	2	3	...
1 ^{er} élément	0	0	1	2	3	...
1	1	2	3	4	5	...
2	2	3	4	5	6	...
3	3	4	5	6	7	...
...

L'opération interne de la multiplication

1^{er} élément