TABLE DES MATIÈRES

1 OPÉRATIONS

Avertissement. — Les définitions données dans les chapitres relatifs aux opéra… exemples utilisant les propriétés des ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$.
L'emploi de ces ensembles ne restreint en rien la généralité des définitions.

1.1 OPÉRATION INTERNE (OU LOI DE COMPOSITION INTERNE) DA…

Définition. — On appelle opération interne dans un ensemble E toute correspondan… dans cet ordre, fait correspondre un élément et un seul c de E. L'élément c est dit *com…*
Certains couples (a, b) peuvent ne pas admettre de composé.
(*Exemple* : la différence $2 - 5$ n'existe pas dans $\mathbb{N}$).

Définition équivalente. — On appelle **opération interne dans un ensemble E toute a…**
Si $A = E \times E$, on dit que l'opération est *partout définie* sur E.
Si l'opération est notée ★, symbole qui se lit *étoile* ou *star* (ou *aster*)
on écrit : $a \bigstar b = c$
on lit : a star b égale c.
Exemples. L'addition $(+)$, la soustraction $(-)$, la multiplication $(\times)$ sont des c… nous supposons connues leurs propriétés (communauté, associativité, distributivit…
Table d'opération. — Lorsque E est fini, une opération peut être déterminée p…
(*Exemple* : table de multiplication des entiers naturels inférieurs à 10.)
Notation. — Un ensemble E muni des opérations ★, +, peut se noter $(E, +,$ …

1.2 PROPRIÉTÉS. — Nous considérons une opération ★ partout définie sur E.

1.2.1 Associativité. — L'opération ★ est dite **associative** si, et seulement si :

$$\forall (a, b, c) \in E^3 \quad , \quad \boxed{(a \bigstar b) \bigstar c = a \bigstar (b \ldots}$$

Dans ce cas le composé est encore noté $a \bigstar b \bigstar c$.
Si d est élément de E on peut définir le composé des éléments a, b, c, d soit :

$$[(a \bigstar b) \bigstar c] \bigstar d$$

On définit, de proche en proche, le composé d'un nombre quelconque d'éléments d…

● **Théorème. — Dans toute opération interne** $\boxed{\textbf{associative,}}$ **on peut remplacer un … par leur composé.**
Ce théorème conduit à poser $[(a \bigstar b) \bigstar c] \bigstar d = a \bigstar b \bigstar c \bigstar d$.

1.2.2 Commutativité. — L'opération ★ est dite **commutative** si, et seulement si :

$$\forall (a, b) \in E^2 \quad \boxed{a \bigstar b = b \bigstar a}$$

La table d'opération est alors symétrique par rapport à la diagonale descendant… principale).

Exemples.

L'addition dans $\mathbb{N}$ dont nous donnons un extrait de la table :

1er élément \ 2e élément	0	1	2	3	…
0	0	1	2	3	…
1	1	2	3	4	…
2	2	3	4	5	…
3	3	4	5	6	…
.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	

L'opération intern… de la multiplicatio…

1er élément