Université des Sciences et de la Technologie d'Oran
Faculté des Sciences, Département de mathématiques,
L2, Equations différentielles 1.

Fiche TD N°3

Exercice 1: Résoudre les équations différentielles suivante où $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2 fois dérivables su

Exercice 2: **1)** Montrer que pour tout $m \in \,]0, 2[$ l'équation différentielle:r $\mathbb{R}$ à variables x,

1) $y'' - 2y + y = 2shx$; 2) $y'' + 4y' - 5y = 2e^x$;
3) $y'' + 2y' + y = \sin^2 x$; 4) $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + 1)e^x$.

$$y'' + (1 - 2m)y' - 2my = e^x \qquad (\mathrm{E}_m)$$

admet une solution et une seule telle que $y_m(0) = y'_m(0) = 0$.

2) Etablir $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{m \to 1} y_m(x) = y_1(x)$.

Exercice 3: (Equations d'Euler)

a) Soient (a,b)$\in \mathbb{R}^2$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, telque $I \subset \mathbb{R}_+^*$ *ou* $I \subset \mathbb{R}_-^*$, $K : I \to \mathbb{R}$, une application continue,montrer que l'équation différentielle $x^2y'' + axy' + by = K$, se ramène par le changement de variable $t = \ln|x|$, a une équation différentielle linéaires du second ordre à coefficients constants.

b) Résoudre sur tout intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ les équations différentielles d'Euler suivantes:

1) $x^2y'' - 2y = x$, 2) $x^2y'' + 3xy' + y = 1 + x^2$.

Exercice 4: Résoudre l'équation différentielle suivantes:

$$(1 - x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$$

d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exercice 5: On donne l'équation différentielle $(E) : (x^2+x)y'' - 2xy' + 2y = 0$.

1) Chercher une solution polynomiale pour résoudre (E).

2) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ Quelle est la dimension de l'espace des solutions de (E).

Exercice 6: Soit l'équa diff $(E) : x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$.

1) Montrer qu'il existe une et seule fonction $v(x)$ développable en série entière de (E)

2) Montrer que la fonction $w(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}^*$, en déduire une solution de

$(E_0) : x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 0.$

3) Si $y(x) = \dfrac{u(x)}{x^2}$ est solution de (E_0) que doit vérifier $u(x)$?, en déduire une deuxième solution de(E_0).Donner la solution générale de(E).

Exercice 7: Soit y une solution maximale de $y' = \dfrac{1+x^2}{1+x^2+y^2}$, montrer que l'intervalle de définition de yn'est pas majoré.

Exercice 8: On considère l'équation différentielle : $y' = \exp(-xy)$,dont on désigne par (I, φ) la solution maximale vérifiant

$\varphi(0) = 0.$