République Algérienne Démocratique et Populaire

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE MOHAMED BOUDIAF ORAN

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Polycopié de cours

ALGEBRE II

Présenté par
Mr. ANBER Ahmed

Ce cours est destiné aux étudiants 1ère ANNEE M.I
Mathématiques & Informatique

Année Universitaire : **2017 – 2018**

Table des matières

Avant-propos

Ce polycopié est destiné aux étudiants inscrit en première année système LMD, mathématiques et informatique.

Le contenu de ce polycopié, correspond au programme officiel de la matière Algèbre II enseigné en première année.

Le manuscrit contient quatre chapitres :
- Espace vectoriel
- Application linéaire
- Matrices
- Résolution de systèmes d'equations

Chapitre 1

ESPACE VECTORIEL

Dans ce chapitre, $\mathbb{k}$ désigne un corps commutatif.

1.1 Définition d'un Espace Vectoriel

Définition 1.1 *On appelle espace vectoriel sur $\mathbb{k}$ ou $\mathbb{k}$-espace vectoriel, tout ensemble non vide E muni de deux lois :*
- une loi de composition interne (notée $+$)

$$\begin{array}{rcl} + : E \times E & \rightarrow & E \\ (u, v) & \mapsto & u + v \end{array} \tag{1.1}$$

- une loi de composition externe (notée .)

$$\begin{array}{rcl} . : \mathbb{k} \times E & \rightarrow & E \\ (\lambda, u) & \mapsto & \lambda.u \end{array} \tag{1.2}$$

qui vérifient les propriétés suivantes :

1. $u + v = v + u$ *(pour tous $u, v \in E$)*

2. $u + (v + w) = (u + v) + w$ *(pour tous $u, v, w \in E$)*

3. *Il existe un élément neutre $0_E \in E$ tel que $u + 0_E = u$ (pour tout $u \in E$)*

4. *Tout $u \in E$ admet un symétrique u' tel que $u + u' = 0_E$*

5. $1.u = u$ *(pour tout $u \in E$)*

6. $\alpha. (\beta.u) = (\alpha\beta) .u$ *(pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$, $u \in E$)*

7. $(\alpha + \beta) .u = \alpha.u + \beta.u$ *(pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$, $u \in E$)*

8. $\alpha.(u+v) = \alpha.u + \alpha.v$ *(pour tous $u, v \in E$, $\alpha \in \Bbbk$)*

Définition 1.2
Les éléments d'un espace vectoriel s'appellent des vecteurs. Ceux du corps $\Bbbk$ s'appellent des scalaires.

Exemple 1.1
Soient $\Bbbk = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^2$. On définit la loi de composition interne comme suit

$$\begin{aligned} + : E \times E &\to E \\ ((x,y),(x',y')) &\mapsto (x,y) + (x',y') = (x+x', y+y') \end{aligned}$$

et la loi de composition externe par

$$\begin{aligned} . : \Bbbk \times E &\to E \\ (\lambda,(x,y)) &\mapsto \lambda.(x,y) = (\lambda x, \lambda y) \end{aligned}$$

L'élément neutre de la loi interne est $0_{\mathbb{R}^2} = (0,0)$ et le symétrique de (x,y) est $(-x,-y)$.

Exemple 1.2
Les ensembles suivants sont des $\Bbbk$-espaces vectoriels : $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{R}_n[X]$.
$\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'ensemble des fonctions polynomiale de degré inférieur ou égale à n.

1.2 Sous Espace Vectoriel

Définition 1.3
Soient E un espace vectoriel sur $\Bbbk$ et $F \subset E$. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si F est un espace vectoriel sur $\Bbbk$, pour les même lois de E.

Proposition 1.1
Soient E un espace vectoriel sur $\Bbbk$ et $F \subset E$. Alors, F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

$$\begin{aligned} &1.\ F \neq \phi \\ &2.\ \forall u, v \in E, u+v \in F \\ &3.\ \forall u \in E, \forall \alpha \in \Bbbk, \alpha.u \in F \end{aligned} \tag{1.3}$$

Exemple 1.3
Soient $E = \mathbb{R}^2, F = \mathbb{R} \times \{0\}$ et $\Bbbk = \mathbb{R}$. On a F est un s.e.v (Sous-Espace Vectoriel) de E.
Proposition 1.2
Soient E un espace vectoriel sur $\Bbbk$ et $F \subset E$. Alors, F est un sous-espace vectoriel de E si

et seulement si

$$\begin{aligned} &1.\ F \neq \phi \\ &2.\ \forall u, v \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{k}, \alpha u + \beta v \in F \end{aligned} \tag{1.4}$$

Exemple 1.4
Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - 2z = 0 \ \}$ un sous ensemble de $\mathbb{R}^3$.
Montrer que E est un sous espaces vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
(i)- $\underline{F \neq \phi, \text{ car } 0_{\mathbb{R}^3} \in E}$
On a : $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \in E$, car $0 + 0 - 2 \times 0 = 0$.
(ii)- $\underline{\alpha u + \beta v \in E}$
Soient $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$ deux vecteurs de E et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ donc,

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y - 2z = 0 \\ x' + y' - 2z' = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha (x + y - 2z) = 0 \\ \beta (x' + y' - 2z') = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow (\alpha x + \beta x') + (\alpha y + \beta y') - 2 (\alpha z + \beta z') = 0$$

$$\Rightarrow \alpha u + \beta v = (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z') \in E$$

de (i) et (ii) on déduit que E est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 1.3
Soient E un $\mathbb{k}-$espace vectoriel et $(F_i)_{i \in I}$ une famille de s.e.v de E. *Alors,*
a. $\underset{i \in I}{\cap} F_i$ *est un sous-espace vectoriel de E.*
b. En générale, on n'a pas toujour $\underset{i \in I}{\cup} F_i$ *est un sous-espace vectoriel de E.*

Preuve :
a. Notons $F = \underset{i \in I}{\cap} F_i$.
1- $F \neq \phi$. En effet, $0_E \in F$ (puisque $\forall i \in I, 0_E \in F_i$).
2- Soit $(u, v) \in F^2$. Donc,

$$\forall i \in I, u \in F_i \quad et \quad v \in F_i.$$

Alors,

$$\forall i \in I, u + v \in F_i,$$

d'où

$$u + v \in F.$$

3- Soit $(\lambda, u) \in \mathbb{k} \times F$. Donc,

$$\forall i \in I, \lambda u \in F_i.$$

Alors,

$$\forall i \in I, \lambda u \in F_i,$$

d'où

$$\lambda u \in F.$$

D'aprés (1) ,(2) et (3) on déduit que $\underset{i \in I}{\cap} F_i$ *est un sous-espace vectoriel de E.*

b. Si on prend :

$$F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0 \quad ou \quad y = 0\}$$

et

$$F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0 \quad ou \quad z = 0\}$$

on a : F_1 et F_2 sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ mais $F_1 \cup F_2$ n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
En effet, pour $u = (0, 1, 0)$ et $v = (0, 0, 1)$ on a : $u, v \in F_1 \cup F_2$ mais $u + v \notin F_1 \cup F_2$.

1.3 Somme de sous espaces vectoriels

Définition 1.4
Soient E un $\Bbbk-$espace vectoriel et F_1, F_2 deux s.e.v de E. On définit l'ensemble $F_1 + F_2$ comme suit

$$F_1 + F_2 = \{x_1 + x_2 / (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2\}$$

Proposition 1.4
Soient E un $\Bbbk-$espace vectoriel et F_1, F_2 deux s.e.v de E. *Alors, $F_1 + F_2$ est un sous-espace vectoriel de E.*
Preuve :
Notons

$$F = F_1 + F_2 = \{x_1 + x_2; (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2\}$$

1- $F_1 + F_2 \neq \phi$. En effet,

$$0_E = 0_E + 0_E \in F_1 + F_2$$

2- Soient $u, v \in F_1 + F_2$. Donc, $\exists\, (x_1, x_2) \in F_1 + F_2$ et $\exists\, (y_1, y_2) \in F_1 + F_2$ tels que

$$u = x_1 + x_2 \quad et \quad v = y_1 + y_2.$$

On a alors :

$$u + v = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)$$

$$= (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \in F_1 + F_2,$$

d'où $u + v \in F_1 + F_2$.
3- Soient $\lambda \in \Bbbk$ et $u \in F_1 + F_2$. Donc, $\exists\, (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2$ tel que

$$u = x_1 + x_2.$$

Alors,

$$\lambda u = \lambda\, (x_1 + x_2)$$

$$= (\lambda x_1) + (\lambda x_2) \in F_1 + F_2,$$

d'où $\lambda u \in F$.
D'aprés (1) ,(2) et (3) on déduit que $\underset{i\in I}{\cap} F_i$ *est un sous-espace vectoriel de* E.

Proposition 1.5
Soient F_1, F_2 *deux s.e.v d'un* $\mathbb{k}-$*espace vectoriel* E. *On dit que* F_1 *et* F_2 *sont en somme directe et on le note* $F_1 \oplus F_2$ *si* $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.

Proposition 1.6
Soient F_1, F_2 *deux s.e.v d'un* $\mathbb{k}-$*espace vectoriel* E. *On dit que* F_1 *et* F_2 *sont supplémentaires dans* E si $F_1 \oplus F_2 = E$ *, c'est à dire* $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$ et $F_1 + F_2 = E$.

Exemple 1.5
Soient F et G deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ tels que :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0 \}$$

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = 0 \}$$

On a :
(a) $\underline{E \cap F = 0_{\mathbb{R}^3}}$: Soit $k = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$k = (x, y, z) \in F \cap G \Leftrightarrow (k = (x, y, z) \in F \quad \text{et} \quad k = (x, y, z) \in G)$$

$$\Leftrightarrow (x + y + z = 0 \text{ et } x = y = 0 \ )$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ \\ x = y = 0 \end{cases}$$

On obtient :

$$z = x = y = 0$$

Alors, le seul vecteur de $E \cap F$ est le vecteur nul, donc $E \cap F = 0_{\mathbb{R}^3}$.
(b) $\underline{F + G = \mathbb{R}^3}$: il faut montrer que n'importe quel vecteur $u_3 = (x_3, y_3, z_3)$ de $\mathbb{R}^3$ s'écrit sous la forme : $u_3 = (x_3, y_3, z_3) = u_1 + u_2 = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)$ où $u_1 = (x_1, y_1, z_1) \in F$ et $u_2 = (x_2, y_2, z_2) \in G$. On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} x_3 = x_1 + x_2 \\ y_3 = y_1 + y_2 \\ z_3 = z_1 + z_2 \\ x_1 + y_1 + z_1 = 0 \\ x_2 = y_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = x_1 + x_2 \\ y_3 = y_1 + y_2 \\ z_3 = z_1 + z_2 \\ z_1 = -x_1 - y_1 \\ x_2 = y_2 = 0 \end{cases}$$

on obtient :

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ y_1 = y_3 \\ z_1 = -x_3 - y_3 \\ x_2 = y_2 = 0 \\ z_2 = x_3 + y_3 + z_3 \end{cases}$$

De (a) et (b) on déduit que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

1.4 Familles Libres, Génératrices

1.4.1 Combinaison linéaire

Définition 1.4
Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. I est un ensemble d'indice fini ou infini. On appelle combinaison linéaire des vecteurs u_i, tout vecteur $w \in E$ de la forme :

$$w = \sum_{i \in J} \alpha_i u_i \tag{1.5}$$

où J est une partie finie de I et $\alpha_i \in \mathbb{k}$.
Exemple 1.5
Soient $u = (1, 2, 1)$, $v = (1, -3, 1)$, $w = (0, 1, 5)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On a :

$$2u - 3v + w = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 14 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On dit que le vecteur $X = (-1, 14, 4)$ est une combinaison linéaire des vecteurs u, v et w.

1.4.2 Famille génératrice

Définition 1.5
Soit $F = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel E. On dit que la famille F est génératrice de E ou que F engendre E si tout élément u de E est une combinaison linéaire des vecteurs de la famille F.
Exemple 1.6
Montrer que la famille $B = \{u = (2, 0) , v = (1, -3)\}$ engendre l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.
Soit $w = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Est ce qu'il existe deux réels a et b tels que : $w = au + bv$?
on a :

$$w = au + bv \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a + b \\ \\ y = -3b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{3}y\right) \\ \\ b = -\frac{1}{3}y \end{cases}$$

Donc, pour tout vecteur $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on peut trouver deux scalaires $a = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{3}y\right)$ et $b = -\frac{1}{3}y$ tels que : $w = au + bv$.
Ce qui montre que B est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

1.4.3 Famille libre

Définition 1.6
Soit $F = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel E. On dit que la famille F est libre ou que les vecteurs $(u_i)_{i\in\{1,2,...,n\}}$ *sont linéairement indépendants si et seulement si :*

$$\forall \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{k},$$
$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n = 0_E \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$$

Dans le cas contraire, on dit que la famille est liée (les vecteurs $(u_i)_{i\in\{1,2,...,n\}}$ sont linéairement dépendants). C'est à dire

$$\exists\,(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{k}^n - \{(0, 0, ..., 0)\}\,,$$
$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n = 0_E$$

Exemple 1.7
1. Montrer que la famille $B = \{u = (2, 0)\,, v = (1, -3)\}$ est libre.
Soient α et β deux réels

$$\alpha u + \beta v = 0_{\mathbb{R}^2} \Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2\alpha + \beta \\ \\ -\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}\beta \\ \\ \beta = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

donc, B est une famille libre.
2. Montrer que la famille $B' = \{u_1 = (2, 0, 1)\,, u_2 = (1, -3, 2)\,, u_3 = (5, -3, 4)\}$ est liée.
On cherche trois scalaires α_1, α_2 et α_3 tels que :

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\} \quad \text{et } \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$$

Alors, on a :

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2\alpha_1 + \alpha_2 + 5\alpha_3 \\ -3\alpha_2 - 3\alpha_3 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + 5\alpha_3 = 0.......(1) \\ -3\alpha_2 - 3\alpha_3 = 0...........(2) \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0.......(3) \end{cases}$$

De l'équation (2), on trouve

$$\alpha_2 = -\alpha_3$$

On remplace α_2 dans l'équation (3), on obtient

$$\alpha_1 - 2\alpha_3 + 4\alpha_3 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = -2\alpha_3$$

Maintenant, si on remplace α_1 et α_2 dans l'équation (1), on obtient $(0 = 0)$.
Alors, on peut choisir $\alpha_3 = 1$ (pour éviter $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \{(0,0,0)\}$). Donc on trouve $\alpha_1 = -2$ et $\alpha_2 = -1$.
Ce qui donne :

$$-2u_1 - u_2 + u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$$

cette relation est appelée relation de dépendance.

1.5 Base

Définition 1.7
Soit $F = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel E. On dit que la famille F forme une base de E si elle est à la fois génératrice et libre.

Exemple 1.8
1. Montrer que la famille $B_0 = \{P_1 = 1 + X, P_2 = 2X, P_3 = X - X^2\}$ forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
B_0 est-elle libre ?
Soient α_1, α_2 et α_3 des réels

$$\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \Rightarrow \alpha_1 (1+X) + \alpha_2 (2X) + \alpha_3 (X - X^2) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 + (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3) X + (-\alpha_3) X^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

donc, B_0 est une famille libre.
B_0 est-elle génératrice ?
Soit $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$ où $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Est ce qu'il existe trois réels a, b et c tels que : $P = aP_1 + bP_2 + cP_3$?
On a :

$$P = aP_1 + bP_2 + cP_3 \Leftrightarrow a_0 + a_1 X + a_2 X^2 = a(1+X) + b(2X) + c(X - X^2)$$

$$\Leftrightarrow a_0 + a_1 X + a_2 X^2 = a + (a + 2b + c) X + (-c) X^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = a_0 \\ a + 2b + c = a_1 \\ -c = a_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = a_0 \\ b = \frac{-a_0 + a_1 + a_2}{2} \\ c = -a_2 \end{cases}$$

Donc, pour tout $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$, on peut trouver trois scalaires $a = a_0, b = \frac{-a_0 + a_1 + a_2}{2}$ et $c = -a_2$ tels que : $P = aP_1 + bP_2 + cP_3$.
Ce qui montre que B' est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.
Alors B' forme une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Soit le sous espace vectoriel E de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y - z = 0\}$$

Déterminer une base de E.
Soit $k = (x, y, z) \in E$, alors :

$$x + 2y - z = 0 \Rightarrow z = x + 2y$$

donc

$$k = (x, y, z) = (x, y, x + 2y) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 2)$$

$$= xu + yv,$$

avec $u = (1, 0, 1) \in E$ et $v = (0, 1, 2) \in E$.
E est engendré par la famille $\{u = (1, 0, 1), v = (0, 1, 2)\}$

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\alpha u + \beta v = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

alors la famille $\{u = (1,0,1), v = (0,1,2)\}$ est libre.
Donc, elle forme une base de E.

1.6 Espace Vectoriel de Dimension Finie

1.6.1 Dimension d'un espace vectoriel

Définition 1.8
On dit qu'un espace vectoriel E est de dimension fini s'il possède une famille génératrice finie. Dans le cas contraire, on dit qu'il est de dimension infinie.

Théorème 1.1
Soit E un $\mathbb{k}$ espace vectoriel de dimension finie. Toutes les bases de E ont même cardinal, n.

Définition 1.9
Ce cardinal n est la dimension de l'espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{k}$, on le note $\dim E$.
Par convention, si $E = \{0_E\}$, on note $\dim E = 0$.

Si F est un sous espace vectoriel d'un $\mathbb{k}$ espace vectoriel E, alors

$$\dim F \leq \dim E.$$

Exemple 1.9
♦ Soient $E = \mathbb{R}^n$ et $\mathbb{k} = \mathbb{R}$

$$\dim E = n.$$

En effet,
Soit $u = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

On a :

$$u = (x_1, ..., x_n)$$

$$= (x_1, 0, ..., 0) + (0, x_2, ..., 0) + ... + (0, ..., 0, x_n)$$

$$= x_1 (1, 0, ..., 0) + x_2 (0, 1, ..., 0) + ... + x_n (0, ..., 0, 1)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,$$

où $x_i \in \mathbb{R}$ et $e_i = \left(0, 0, ..., \underbrace{1}_{i^{eme} coordonnée}, ..., 0\right) \in \mathbb{R}^n$ avec $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Donc, E est engendré par les vecteurs $e_1, e_2, ..., e_n$ qui sont linéairement indépendants. Ce qui montre que la famille $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ forme une base de E.

Alors,

$$\dim E = Card\left(\{e_1, e_2, ..., e_n\}\right) = n.$$

♦ Soient $E = \mathbb{C}$ et $\mathbb{k} = \mathbb{R}$

$$\dim E = 2.$$

En effet,

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}, \ \ x, y \in \mathbb{R}$.

On a :

$$z = x + iy$$

$$= x \times \left(\underbrace{1}_{u_1}\right) + y \times \left(\underbrace{i}_{u_2}\right)$$

Donc, la famille $\{u_1, u_2\}$ est génératrice de E et comme elle est libre, alors elle forme une base de E.

Alors,

$$\dim E = Card\left(\{u_1, u_2\}\right) = 2.$$

♦ Soient $E = \mathbb{C}$ et $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, avec même raisonnement que précédent, on trouve :

$$\dim E = 1$$

♦ Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{k} = \mathbb{R}$

$$\dim E = n + 1.$$

En effet,

Soit $P = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n \in \mathbb{R}_n[X]$. $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$.

On a :

$$P = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n$$

$$= a_0 \times 1 + a_1 \times X + ... + a_n \times X^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i P_i,$$

où $a_i \in \mathbb{R}$ et $P_i = X^i \in \mathbb{R}_n[X]$ avec $i \in \{1, 2, ..., n\}$.
Donc, E est engendré par $P_0, P_1, ..., P_n$ qui sont linéairement indépendants. Ce qui montre que la famille $\{P_0, P_1, ..., P_n\}$ forme une base de E.
Alors,
$$\dim E = Card(\{P_0, P_1, ..., P_n\}) = n + 1.$$

Proposition 1.7
Soit E un $\Bbbk$ espace vectoriel de dimension finie n.
- Toute famille libre de n vecteurs de E est une base de E.
- Toute famille génératrice de n vecteurs de E est une base de E.
Cette proposition permet de prouver qu'une famille est une base sans avoir à vérifier les deux axiomes (libre et génératrice).

Exemple 1.10
Soit $B = \{u_1 = (1, 2, 3), u_2 = (0, 0, 3), u_3 = (1, 0, 5)\}$ une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
On a :
(i) Le cardinal de B égale à la dimension de $\mathbb{R}^3$
$$Card(B) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$$

(ii) La famille B est libre, car pour tout $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ on a
$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 = 0 \\ 3\alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3 = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$
Alors, d'aprés (i) et (ii) on déduit que la famille B forme une base de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 1.8
Soit E un $\Bbbk$ espace vectoriel de dimension finie n.
★ *Toute famille libre de E possède au maximum n éléments.*
★ *Toute famille génératrice de E possède au minimum n éléments.*

Exemple 1.11
Soient les familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivantes
$$B_1 = \{u_1 = (1, 0, 3), u_2 = (0, 4, 1)\}$$
$$B_2 = \{v_1 = (1, 2, 0), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (1, 3, -2), v_4 = (3, 1, 1)\}$$
On a :
La famille B_1 n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$, car B_1 a deux éléments est on sait que la famille

génératrice de $\mathbb{R}^3$ doit contenir au minimum trois éléments.
La famille B_2 n'est pas libre, car B_2 a quatre éléments est on sait que une partie libre de $\mathbb{R}^3$ doit contenir au maximum trois éléments.

Théorème 1.2
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous espace vectoriel de E ($F \subset E$). Alors F est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$.
De plus

$$E = F \Leftrightarrow \dim E = \dim F$$

Théorème 1.3
Soient F_1, F_2 deux sous espaces vectoriels de dimension finies d'un espace vectoriel E. Alors $F_1 + F_2$ et $F_1 \cap F_2$ sont de dimension finie et

$$\dim (F_1 + F_2) + \dim (F_1 \cap F_2) = \dim F_1 + \dim F_2$$

Proposition 1.9
Soient F_1, F_2 sont deux sous espaces vectoriels de dimension finies d'un espace vectoriel E de dimension finie.
Si F_1 et F_2 sont supplémentaire dans E, alors $\dim (F_1 + F_2) = \dim E$.

1.6.2 Coordonnées d'un vecteur dans une base

Soient E un espace vectoriel, $\mathcal{F} = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ une base de E et u un vecteur de E. Ce vecteur s'écrit de manière unique sous la forme

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$$

Les nombres λ_i sont appelés les coordonnées du vecteur u dans la base $\mathcal{F}$.

Exemple 1.12
On considère la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivante :

$$B = \{u_1 = (1, 1, 3)\,, u_2 = (0, 2, 1)\,, u_3 = (-1, 4, 0)\}$$

Cette famille forme une base de $\mathbb{R}^3$, car elle est libre et de plus $CardB = \dim \mathbb{R}^3$.
On cherche les coordonnées du vecteur $X = (4, 7, 11)$ dans la base B. Donc il faut résoudre l'équation vectorielle suivante

$$X = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i u_i$$

où λ_1, λ_2 et λ_3 sont des scalaires.
Alors, on obtient le système suivant

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_3 = 4 & .... (1) \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 7 & ...... (2) \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 = 11 & .... (3) \end{cases}$$

De l'équation (1), on trouve

$$\lambda_3 = \lambda_1 - 4$$

et de l'équation (3), on trouve

$$\lambda_2 = -3\lambda_1 + 11$$

On remplace λ_2 et λ_3 dans l'équation (2), on obtient

$$\lambda_1 - 6\lambda_1 + 22 + 4\lambda_1 - 16 = 7$$

ce qui donne

$$\lambda_1 = -1$$

Alors,

$$\lambda_2 = 14 \quad \text{et} \quad \lambda_3 = -5$$

Donc, les coordonnées du vecteur X dans la base B sont $-1, 14$ et -5.

1.7 Rang

1.7.1 Rang d'une famille finie de vecteurs

Définition 1.9
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{F} = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ une famille finie de vecteurs de E.
On appelle rang de cette famille et on note $rg(\mathcal{F})$ la dimension de $Vect(u_1, u_2, ..., u_n)$.

Exemple 1.13
Soit $\mathcal{F} = \{u_1 = (1,2,3), u_2 = (0,0,3), u_3 = (1,-4,2), u_4 = (2,-2,2)\}$ une famille de quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
On a

$$rg(\mathcal{F}) = 3$$

En effet,

$$Vect(u_1, u_2, u_3, u_4) = Vect(u_1, u_2, u_3)$$

car

$$u_4 = u_1 - u_2 + u_3$$

et on a $\{u_1 = (1,2,3), u_2 = (0,0,3), u_3 = (1,-4,2)\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 1.10
1. La famille $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si $rg(\mathcal{F}) = n = Card(\mathcal{F})$.
2. La famille $\mathcal{F}$ est génératrice de E si et seulement si $rg(\mathcal{F}) = \dim E$.
Preuve :
Notons $F = Vect(u_1, u_2, ..., u_n)$, alors $rg(\mathcal{F}) = \dim F$
1. Si la famille $(u_1, u_2, ..., u_n)$ est libre, comme elle est génératrice de F, c'est une base de F donc son cardinal n est la dimension de F : $n = rg(\mathcal{F})$.
Riciproquement, si $n = rg(\mathcal{F})$, alors $n = \dim F$ donc la famille $(u_1, u_2, ..., u_n)$ est génératrice de F. Alors elle forme une base ce qui montre que la famille $(u_1, u_2, ..., u_n)$ est libre.

2. Si la famille est génératrice de E, alors $E = F$ d'où $\dim E = \dim F$ et $rg\,(\mathcal{F}) = \dim E$.
Si $rg\,(\mathcal{F}) = \dim E$, alors $\dim E = \dim F$ et comme de plus, on sait que $F \subset E$, on obtient $E = F$, donc $E = Vect\,(u_1, u_2, ..., u_n)$, alors la famille $(u_1, u_2, ..., u_n)$ est génératrice de E.

1.8 Exercices

Exercice n°1 :

Déterminer lesquels des ensembles F_1, F_2 et F_3 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$

$$F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 3y - 2z = 0 \}$$

$$F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$$

$$F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x (y^2 - z^2) = 0 \}$$

Exercice n°2 :

On considère les familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivantes :
$F_1 = \{u_1 = (1, 1, 3), u_2 = (1, 2, 0)\}$, $F_2 = \{v_1 = (1, 0, -1), v_2 = (2, 1, 1), v_3 = (3, 0, 0)\}$ et $F_3 = \{w_1 = (1, 1, 2), w_2 = (1, 3, 1), w_3 = (0, 0, 1), w_4 = (2, 4, 0)\}$
Déterminer les familles libres, les familles génératrices de $\mathbb{R}^3$ et les bases de $\mathbb{R}^3$.

Exercice n°3 :

Dans $\mathbb{R}^3$, Soient $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - 2z = 0 \text{ } et \text{ } y - z = 0\}$ et F le sous espace engendré par : $u = (1, 2, 3)$, $v = (1, 0, -2)$ et $w = (0, 4, 1)$.
1. Montrer que E est un sous espaces vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base et la dimension de E.
3. Déterminer une base et la dimension de $F \cap E$.

Exercice n°4 :

Soient $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - 2z = 0 \text{ } et \text{ } 2x - y - z = 0\}$,
$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\}$ deux sous ensembles de $\mathbb{R}^3$ et $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 0, 1)$, $w = (0, 1, 1)$.
1. Montrer que E et F sont deux sous espaces vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Determiner une famille génératrice de E et montrer que cette famille est une base.
3. Montrer que $\{v, w\}$ est une base de F.
4. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.
5. Soit $X = (x, y, z)$, exprimer X dans la base $\{u, v, w\}$.

Exercice n°5 :

Considérons le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par :
$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - 2z = 0 \quad et \quad x - 3z = 0\}$
1. Déterminer une base de E et préciser la dimension de E.
2. Déterminer $dimF$ où F est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $u_1 = (1, 2, 2), u_2 = (0, 6, -2), u_3 = (1, 5, 1)$
3. Déterminer $E \cap F$.
4. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^3$?

Chapitre 2

APPLICATION LINEAIRE

2.1 Définitions et Propriétés

Dans cette section, E et F sont des $\mathbb{k}-$espaces vectoriels.

Définition 2.1
1. *Une application linéaire de E dans F (ou morphisme de* $\mathbb{k}$-ev) *est une application $f : E \to F$ telle que :*

$$\begin{aligned} &1. \qquad f(u+v) = f(u) + f(v) \\ &2. \qquad f(\alpha u) = \alpha f(u) \end{aligned} \tag{2.1}$$

pour tous les éléments $u, v \in E$ et tout $\alpha \in \mathbb{k}$.
On note $L(E,F)$ (ou $L_{\mathbb{k}}(E,F)$) l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

***2.** On dit que $f : E \to E$ est un endomorphisme de E si et seulement si f est linéaire.*
On note $L(E)$ (ou $L_{\mathbb{k}}(E)$) l'ensemble des endomorphismes de E.

Exemple 2.1 Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ telle que :

$$f(x,y) = (x-y, 2x, -x+3y) \tag{2.2}$$

Pour tous $u = (x,y), v = (x', y') \in \mathbb{R}^2$ *et tout* $\alpha \in \mathbb{k} = \mathbb{R}$ on a :

$$f(u+v) = f(x+x', y+y')$$

$$= ((x+x') - (y+y'), 2(x+x'), -(x+x') + 3(y+y'))$$

$$= (x-y, 2x, -x+3y) + (x'-y', 2x', -x'+3y')$$

$$= f(x,y) + f(x',y')$$

$$= f(u) + f(v)$$

et

$$\begin{aligned}f(\alpha u) &= f(\alpha x, \alpha y)\\ &= (\alpha x - \alpha y, 2\alpha x, -\alpha x + 3\alpha y)\\ &= \alpha (x - y, 2x, -x + 3y)\\ &= \alpha f(x, y)\\ &= \alpha f(u)\end{aligned}$$

D'où f est une application linéaire.

Exemple 2.2 Soit l'application $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que :

$$g(x, y) = (x - y, xy) \tag{2.3}$$

On vérifie que cette applications n'est pas linéaire. (c'est à dire l'une des deux conditions n'est pas vérifiée ou les deux conditions ne sont pas vérifiées).
Par exemple si on prend les deux vecteurs suivant $u = (1, 2)$ et $v = (3, -5)$, on a :

$$g(u + v) = g(4, -3) = (7, -12)$$

et

$$g(u) + g(v) = (-1, 2) + (8, -15) = (7, -13)$$

ce qui montre que l'application g n'est pas linéaire.
On remarque aussi que la deuxième condition n'est pas vérifié. (On peut prendre $u = (5, 2)$ et $\alpha = 3$).

Définition 2.2
1. *On dit que $f : E \to F$ est un isomorphisme de E* sur *F si et seulement si f est linéaire et bijective.*

2. *On dit que $f : E \to E$ est un automorphisme de E si et seulement si f est linéaire et bijective.*

3. *Si $F = \mathbb{k}$* et *$f : E \to F$ linéaire, alors on dit que f est une forme linéaire sur E.*

Remarque 2.1 *Si on prend $\alpha = 0$ dans* (2.1)*, alors on trouve $f(0_E) = 0_F$. Donc si $f(0_E) \neq 0_F$, alors l'application f n'est pas linéaire.*

Exemple 2.3 Soit l'application $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que :

$$h(x, y) = (x - y, y + 2) \tag{2.4}$$

On a :

$$h(0_E) = h(0, 0) = (0, 2) \neq 0_F$$

Donc, l'application h n'est pas linéaire.

Propriété 2.1
On dit que l'application $f : E \to F$ est linéaire si et seulement si pour tous les éléments $u, v \in E$ et tous les scalaires $\alpha, \beta \in \Bbbk$, on a :

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v) \tag{2.5}$$

Propriété 2.2
Soient f, g deux applications linéaires de E dans F et $\lambda \in \Bbbk$. Les applications $f + g$ et λf définies par $(f+g)(u) = f(u) + g(u)$ et $(\lambda f)(u) = \lambda f(u)$ sont linéaires.

Preuve :
Soient u, v des vecteurs de E et α, β des scalaires de $\Bbbk$. On a alors :

$$(f+g)(\alpha u + \beta v) = f(\alpha u + \beta v) + g(\alpha u + \beta v)$$

$$= \alpha f(u) + \beta f(v) + \alpha g(u) + \beta g(v)$$

$$= \alpha (f(u) + g(u)) + \beta (f(v) + g(v))$$

$$= \alpha (f+g)(u) + \beta (f+g)(v)$$

d'où l'application $f + g$ est linéaire.
On a aussi :

$$(\lambda f)(\alpha u + \beta v) = \lambda f(\alpha u + \beta v)$$

$$= \lambda (\alpha f(u) + \beta f(v))$$

$$= \alpha (\lambda f(u)) + \beta (\lambda f(v))$$

$$= \alpha (\lambda f)(u) + \beta (\lambda f)(v)$$

ce qui montre que λf est linéaire.

Propriété 2.3
Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires. L'applications $g \circ f$ est linéaire.

Preuve :
Soient u, v des vecteurs de E et α, β des scalaires de $\Bbbk$. On a alors :

$$(g \circ f)(\alpha u + \beta v) = g(f(\alpha u + \beta v))$$

$$= g(\alpha f(u) + \beta f(v))$$

$$= \alpha g(f(u)) + \beta g(f(v))$$

$$= \alpha (g \circ f)(u) + \beta (g \circ f)(v)$$

d'où l'application $g \circ f$ est linéaire.
Proposition 2.1
Supposons E de dimension $n \geq 1$. Soit $(e_{1,\ldots}, e_n)$ une base de E et soit $f : E \to F$ une application linéaire bijective (f est un isomorphisme). Alors, $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base de F.

2.2 Image et Noyau

Proposition 2.2
Soient E, F deux $\Bbbk$-ev et $f \in L(E, F)$.
1. Pour tout sev F_1 de F, l'image réciproque $f^{-1}(F_1)$ est un sev de E.
2. Pour tout sev E_1 de E, l'image directe $f(E_1)$ est un sev de F.
Preuve
1) (1.a) $f^{-1}(F_1) \neq \emptyset$: $f(0_E) = 0_F$ donc $0_E \in f^{-1}(F_1)$
(1.b) Soient $\alpha, \beta \in \Bbbk$ et $(u, v) \in (f^{-1}(F_1))^2$. On a :

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v) \in F_1$$

et donc

$$\alpha u + \beta v \in f^{-1}(F_1)$$

D'aprés (1.a) et (1.b) on déduit que $f^{-1}(F_1)$ est un sev de E.
2) (2.a) $f(E_1) \neq \emptyset$: $f(0_E) = 0_F$ donc $0_F \in f(E_1)$
(2.b) Soient $\alpha, \beta \in \Bbbk$ et $(X, Y) \in (f(E_1))^2$. Il existe $(x, y) \in (E_1)^2$ tel que :

$$X = f(x) \quad \text{et} \quad Y = f(y)$$

On a :

$$\alpha X + \beta Y = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

$$= f(\alpha x + \beta y) \in f(E_1)$$

D'aprés (2.a) et (2.b) on déduit que $f(E_1)$ est un sev de F.

Définition 2.3
Soient E, F deux $\Bbbk$-ev et $f \in L(E, F)$.
On appelle image de f et on note $\mathrm{Im}(f)$, le sous espace vectoriel de F défini par :

$$\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{y \in F; \exists x \in E, y = f(x)\}$$

Définition 2.4
Soient E, F deux $\Bbbk$-ev et $f \in L(E, F)$.
On appelle noyau de f et on note $\ker(f)$, le sous espace vectoriel de E défini par :

$$\ker f = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E / f(x) = 0_F\}$$

Exemple 2.4
On considère l'application linéaire

$$f: \quad \mathbb{R}^3 \quad \to \quad \mathbb{R}^2$$

$$(x,y,z) \longmapsto (x+y, y-2z)$$

Déterminons l'image de f et le noyau de f.

Noyau de f :
Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tel que $f(u)=0_{\mathbb{R}^2}$
On a :

$$f(u)=0_{\mathbb{R}^2} \Longleftrightarrow (x+y, y-2z)=(0,0)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ y-2z=0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x=-2z \\ y=2z \end{cases}$$

Alors,

$$u=(x,y,z)=(-2z,2z,z)=z(-2,2,1)$$

Donc, $\ker(f)$ est le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $X=(-2,2,1)$.

$$\ker(f)=Vect(X=(-2,2,1))$$

Image de f :
Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On a :

$$f(u)=(x+y,y-2z)$$

$$=(x,0)+(y,y)+(0,-2z)$$

$$=x(1,0)+y(1,1)+z(0,-2)$$

Donc, $\mathrm{Im}(f)$ est le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ engendré par les vecteurs $Y=(1,0)$, $Z=(1,1)$ et $T=(0,-2)$.

$$\mathrm{Im}(f)=Vect(Y=(1,0), Z=(1,1), T=(0,-2)).$$

On remerque que $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^2$.
Proposition 2.3
Soient E, F *deux* $\Bbbk$-*ev et* $f\in L(E,F)$.
1. f *est injective si et seulement si* $\ker(f)=\{0_E\}$
2. f *est surjective si et seulement si* $\mathrm{Im}(f)=F$

Preuve
1) $(\Rightarrow)$ Supposons que f est injective. Soit $u \in \ker(f)$. Alors

$$f(u) = 0_F = f(0_E)$$

d'où puisque f est injective, alors $u = 0_E$. Ainsi $\ker(f) = \{0_E\}$.
$(\Leftarrow)$ Supposons que $\ker(f) = \{0_E\}$. Soient $u, v \in E$ tel que $f(u) = f(v)$. Alors,

$$f(u) = f(v) \Longleftrightarrow f(u) - f(v) = 0_F$$

$$\Longleftrightarrow f(u - v) = 0_F$$

et donc

$$u - v \in \ker(f) = \{0_E\}$$

D'où

$$u = v$$

2)

$$f \text{ est surjective } \Longleftrightarrow \forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$$

$$\Longleftrightarrow f(E) = F$$

$$\Longleftrightarrow \mathrm{Im}(f) = F$$

2.3 Rang d'une Application Linéaire

Définition 2.5
Soient E, F deux $\mathbb{k}$-ev de dimension finie et $f \in L(E, F)$.
On appelle rang de f et on note $rg(f)$, l'entier naturel défini par :

$$rg(f) = \dim(\mathrm{Im}\, f)$$

Théorème 2.1 (Théorème du rang)
Soient E, F deux $\mathbb{k}$-ev de dimension finie et $f \in L(E, F)$.
On a :

$$rg(f) = \dim E - \dim(\ker f)$$

Exemple 2.5
On considère l'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ & P & \longmapsto & (2 - X) P' - P \end{array}$$

Déterminons le rang de f.
On a :

$$rg(f) = \dim(\mathrm{Im}\, f)$$

Image de f :
Soit $P = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[X]$. On a :

$$f(P) = (2-x)P' - P$$

$$= (2-x)(a_1 + 2a_2x) - (a_0 + a_1x + a_2x^2)$$

$$= 2a_1 - a_0 + (-2a_1 + 4a_2)x - 3a_2x^2$$

$$= (-a_0) \times 1 + (2a_1) \times (1-x) + (-3a_2) \times x^2$$

Donc, $\mathrm{Im}(f)$ est le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ engendré par $P_0 = 1, P_1 = 1-x$ et $P_2 = x^2$.

$$\mathrm{Im}(f) = Vect(P_0, P_1, P_2)$$

Comme la famille $\{P_0 = 1, P_1 = 1-x, P_2 = x^2\}$ est libre, car pour tout $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{k} = \mathbb{R}$ on a

$$\alpha P_0 + \beta P_1 + \gamma P_2 = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \Longrightarrow \alpha(1) + \beta(1-x) + \gamma(x^2) = 0$$

$$\Longrightarrow (\alpha+\beta) - \beta x + \gamma x^2 = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Alors, cette famille forme une base de $\mathrm{Im}(f)$ et de plus $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$. Ce qui donne $rg(f) = 3$.

2.4 Inverse d'une Application Linéaire

Définition 2.6
Soient E, F deux $\mathbb{k}$-ev et $f \in L(E,F)$.
L'application $f : E \to F$ est dite inversible si, pour tout $Y \in F$, l'équation $Y = f(X)$ admet une unique solution $X \in E$.

Exemple 2.6
- L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ telle que $f(x,y) = (x-2y, 2x-4y, 3x-6y)$ n'est pas inversible, car il existe $Y = (0,4,5) \in F = \mathbb{R}^3$ tel que l'équation $f(x,y) = (0,4,5)$ n'admet pas des solutions dans $\mathbb{R}^2$.
- L'application $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $g(x,y) = (x+2y, 0)$ n'est pas inversible, car il existe $Y = (3,0) \in F = \mathbb{R}^2$ tel que l'équation $g(x,y) = (3,0)$ admet au moins deux solutions dans $\mathbb{R}^2$.
- L'application $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que $h(x,y,z) = (x+y, y, x-2z)$ est inversible, car *pour tout $Y = (x', y', z') \in F = \mathbb{R}^3$, l'équation $Y = f(X)$ admet une unique solution $X \in E = \mathbb{R}^3$* de la forme :

$$X = \left(x' - y', y', \tfrac{1}{2}(x' - y' - z')\right).$$

Définition 2.7
Soient E, F *deux* $\mathbb{k}$*-ev et* $f \in L(E,F)$ inversible. Alors sa réciproque $f^{-1} : F \to E$ est définie par

$$f^{-1}(Y) = (\text{l'unique } X \in E \text{ tel que } Y = f(X)\ \ )$$

et on a ;

$$\forall X \in E : f^{-1}(f(X)) = X$$

et

$$\forall Y \in F : f(f^{-1}(Y)) = Y$$

c'est à dire

$$f^{-1} \circ f = Id_E \quad \text{ et } \quad f \circ f^{-1} = Id_F$$

Exemple 2.6
On considère l'application linéaire suivante :

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, y, x-2z) \end{array}$$

Soit $Y = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ tel que $Y = f(X)$.
On a :

$$Y = f(X) \Leftrightarrow (x', y', z') = f(x,y,z) = (x+y, y, x-2z)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = x' \\ y = y' \\ x - 2z = z' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - y = x' - y' \\ y = y' \\ z = \frac{1}{2}(x - z') = \frac{1}{2}(x' - y' - z') \end{cases}$$

Donc, pour tout vecteur $Y = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, il existe un unique élément $X = \left(x' - y', y', \frac{1}{2}(x' - y' - z')\right) \in \mathbb{R}^3$ tel que $Y = f(X)$.
Alors l'application f est inversible et sa réciproque est définie par :

$$\begin{array}{llll} f^{-1}: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x', y', z') & \longmapsto & \left(x' - y', y', \frac{1}{2}(x' - y' - z')\right) \end{array}$$

2.5 Exercices

Exercice 1
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une application définie pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$f(x, y, z) = (x + 2y - z, x + y + z)$$

1. Montrer que f est linéaire
2. Déterminer $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.

Exercice 2
Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont l'image de la base canonique $B_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ est

$$f(e_1) = e_1 - 3e_2 + e_3$$

$$f(e_2) = 4e_1 - 2e_2 + 5e_3$$

$$f(e_3) = e_1 + e_2 + 3e_3$$

1. Pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $f(u)$.
2. Déterminer le noyau de f.
3. Donner une base de l'image de f.

Exercice 3
On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + x_2 - x_4, x_1 + 3x_2, x_3 - 4x_4)$$

Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 4
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire vérifiant :

$$f(1, 2, 4) = (3, -2, 1)$$

$$f(3, 0, 1) = (1, 4, 2)$$

$$f(0, 0, 2) = (0, -3, 5)$$

1. Calculer $f(5, 3, 7)$.
2. Déterminer $f(x, y, z)$ où $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 5
Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel de polynômes de degré inférieur ou égale à n et $f : E \to E$ définie par :

$$f(P) = P + (1 - X) P'$$

Montrer que f est une application linéaire et donner une base de $\ker f$ et une base de $\operatorname{Im} f$.

Chapitre 3

MATRICES

3.1 Définitions

3.1.1 Matrice

Définition 3.1 *Soient n, m deux entiers strictement positifs. Une matrice $n \times m$ à coefficients dans $\Bbbk$ est un tableau d'éléments de $\Bbbk$ à n lignes et m colonnes, que l'on note*

$$(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{2m} \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{nm} \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Les a_{ij} sont appelés les coefficients de la matrice.
L'ensemble des matrices à n lignes et m colonnes à coefficients dans $\Bbbk$ est noté par $M_{n,m}(\Bbbk)$.

Exemple 3.1 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

A est une matrice à 3 lignes et 2 colonnes à coéfficients dans $\mathbb{R}$, donc $A \in M_{3,2}(\mathbb{R})$.
L'élément a_{32} se trouve dans la troisième ligne et la deuxième colonne, donc $a_{32} = 4$.

Définition 3.2
Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ une matrice de $M_{n,m}(\Bbbk)$.
Si $n = m$, la matrice A est dite matrice carrée. L'ensemble des matrices carrées d'ordre n

est noté par $M_n(\mathbb{k})$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & & . & & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Si $n = 1$, *la matrice* A *est dite matrice ligne.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1m} \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Si $m = 1$, *la matrice* A *est dite matrice colonne.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ . \\ . \\ . \\ a_{n1} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

Définition 3.3
Une matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ *dont tous les éléments sont nul est appelée matrice nulle.*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 \end{pmatrix} = (0) \tag{3.5}$$

Définition 3.3
Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ *une matrice carrée. Les éléments* a_{ii} *s'appellent les coefficients diagonaux de* A.

Définition 3.4
On dit qu'une matrice est diagonale lorsquelle est carrée et que ses coefficients non diagonaux sont nuls. Elle est de la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & 0 \\ . & . & & & & \\ 0 & 0 & . & . & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

Définition 3.5
On dit qu'une matrice A est triangulaire supérieure (respectivement : inférieure) lorsquelle est carrée et que ses coefficients non diagonaux en dessous (respectivement : au dessus) de la diagonal sont nuls.
Matrice triangulaire supérieure : $a_{ij} = 0$ *pour tout* $i > j$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & . & . & . \\ 0 & 0 & a_{33} & . & . & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ 0 & . & & . & . \ 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

Matrice triangulaire inférieure : $a_{ij} = 0$ *pour tout* $i < j$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & . & . \\ a_{31} & a_{11} & a_{33} & 0 & . & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & 0 \\ a_{n1} & . & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

Définition 3.6
On appelle matrice identité d'ordre n, la matrice carrée d'ordre n dont les éléments de la diagonale sont égaux à 1 et tous les autres sont égaux à 0. On la note I_n.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

3.1.2 Egalité de deux matrices

Définition 3.7
Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}}$ *et* $A = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}}$ *deux matrices de* $M_{n,m}(\mathbb{k})$. *On dit que* $A = B$ *si tous les éléments de A sont égaux au éléments correspondants de B.*

Exemple 3.2
Soient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & x & 3 \\ 0 & y+x & 7 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Déterminons x et y pour que les deux matrices soient égales.

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ \\ x + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ \\ y = -5 \end{cases}$$

3.1.3 Transposée d'une matrice

Définition 3.8
Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}}$ *une matrice de* $M_{n,m}(\mathbb{k})$. *On appelle transposée de* A *la matrice* $(a_{ji})_{\substack{1\leq j\leq m\\1\leq i\leq n}}$ *de* $M_{m,n}(\mathbb{k})$ *et on note* ${}^tA$

$$
{}^tA = (a_{ji})_{\substack{1\leq j\leq m\\1\leq i\leq n}} \tag{3.10}
$$

Exemple 3.3
Soit

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Alors,

$$
{}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.
$$

3.2 Opérations sur les Matrices

3.2.1 Multiplication par un scalaire

Définition 3.9
Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}}$ *une matrice de* $M_{n,m}(\mathbb{k})$ *et* $\lambda \in \mathbb{k}$. Le produit de A par λ est la matrice λA *de* $M_{n,m}(\mathbb{k})$ définie par

$$
\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}}. \tag{3.11}
$$

Exemple 3.4
Soit la matrice

$$
A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix}
$$

alors,

$$
3A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 9 \\ 9 & 15 & -12 \end{pmatrix}
$$

3.2.2 Somme de deux matrices

Définition 3.10
Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}}$ *et* $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}}$ *deux matrices de* $M_{n,m}(\mathbb{k})$. *La somme des matrices* A *et* B *est la matrice* $A + B$ *de* $M_{n,m}(\mathbb{k})$ *définie par*

$$
A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}}. \tag{3.12}
$$

Exemple 3.5
Soient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad et \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

alors, on a :

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

et

$$A - B = A + (-1) \times B = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 7 & 0 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$$

Propriété 3.1
Soient A et B deux matrices de $M_{n,m}(\Bbbk)$. Soit $\lambda \in \Bbbk$. Alors, on a :

$$^t\left(^tA\right) = A \quad , \quad ^t(\lambda A) = \lambda^t A \qquad \text{et} \qquad ^t(A+B) =^t A +^t B. \tag{3.13}$$

Propriété 3.2
Soient A une matrice de $M_{n,m}(\Bbbk)$ et B une matrice de $M_{m,p}(\Bbbk)$. Alors, on a :

$$^t(AB) = \left(^tB\right)\left(^tA\right) \tag{3.14}$$

Propriété 3.3
Soient A, B et C trois matrices ayant la même dimension, α et β deux scalaires.
1. $A + B = B + A$ qui caractérise la commutativité de l'addition matricielle.
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ qui caractérise l'associativité de l'addition matricielle.
3. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
4. $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$
5. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta) A$

3.2.3 Produit de deux matrices

Définition 3.11
Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le m}}$ une matrice de $M_{n,m}(\Bbbk)$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le p}}$ une matrice de $M_{m,p}(\Bbbk)$. Le produit des matrices A et B est la matrice $A \times B$ de $M_{n,p}(\Bbbk)$ définie par

$$A \times B = (c_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}} \tag{3.15}$$

avec

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \times b_{kj} \tag{3.16}$$

Exemple 3.6
Soient
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad et \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$
alors, on a :
$$A \times B = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}}$$
Donc,
$$c_{11} = \sum_{k=1}^{2} a_{1k} \times b_{k1} = 0 \quad , \quad c_{12} = \sum_{k=1}^{2} a_{1k} \times b_{k2} = -1 \quad , \quad c_{13} = \sum_{k=1}^{2} a_{1k} \times b_{k3} = 3$$
$$c_{21} = \sum_{k=1}^{2} a_{2k} \times b_{k1} = 3 \quad , \quad c_{22} = \sum_{k=1}^{2} a_{2k} \times b_{k2} = 4 \quad , \quad c_{23} = \sum_{k=1}^{2} a_{2k} \times b_{k3} = 3$$
$$c_{31} = \sum_{k=1}^{2} a_{3k} \times b_{k1} = 7 \quad , \quad c_{32} = \sum_{k=1}^{2} a_{3k} \times b_{k2} = 9 \quad , \quad c_{33} = \sum_{k=1}^{2} a_{3k} \times b_{k3} = 8$$
Alors,
$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

Remarque 3.1
Le produit matriciel n'est pas commutatif.

Exemple 3.7
Soient
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad et \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$
alors, on a :
$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad et \qquad BA = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$
Nous voyons bien que le produit matriciel n'est pas commutatif : $AB \neq BA$.

Propriété 3.4
Soient A, B et C trois matrices. Si les opérations indiquées existent, alors on admettra les égalités suivantes :
1. $A + B = B + A$
2. $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$
3. $(A + B) \times C = (A \times C) + (B \times C)$
4. $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

Définition 3.12
Soient $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ *une matrice carrée d'ordre* n *et* k *un entier naturel non nul. On définit la puissance* k*-ème de* A *comme suit :*

$$\begin{aligned} A^k &= \underbrace{A \times A \times A \times ...... \times A}_{k \text{ fois la matrice } A} \\ A^0 &= I_n \end{aligned} \tag{3.17}$$

Exemple 3.8
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

alors, on a :

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 16 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$$

et

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 17 & 16 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 83 & 84 \\ 42 & 41 \end{pmatrix}$$

3.2.4 Inversion d'une matrice

Définition 3.13
Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ *une matrice de* $M_n(\mathbb{k})$. *On dit que* A *est inversible s'il existe une matrice* B *de* $M_n(\mathbb{k})$ *telle que* $AB = BA = I_n$. On note $A^{-1} = B$.

Exemple 3.9
Soient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad et \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On a :

$$AB = \begin{pmatrix} 2\times 3 + 5\times(-1) & 2\times(-5) + 5\times 2 \\ 1\times 3 + 3\times(-1) & 1\times(-5) + 3\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$BA = \begin{pmatrix} 3\times 2 + (-5)\times 1 & 3\times 5 + (-5)\times 3 \\ (-1)\times 2 + 2\times 2 & (-1)\times 5 + 2\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice A est donc inversible d'inverse B. $A^{-1} = B$.

Propriété 3.5
Soit A *une matrice carrée inversible. Alors,*

$$\begin{aligned} ({}^tA)^{-1} &= {}^t(A^{-1}) \\ (A^{-1})^{-1} &= A \end{aligned} \tag{3.18}$$

Proposition 3.2
Soient A et B deux matrices carrées inversibles de même dimension. Alors,

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Preuve
Il suffit de montrer que $\left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) = (AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = I.$
On a :

$$\left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) = B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

et

$$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

Proposition 3.3
Soit A une matrice carrée d'ordre deux définie par

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

avec $ad - cb \neq 0$.
Alors, A est inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-cb} & -\frac{b}{ad-cb} \\ -\frac{c}{ad-cb} & \frac{a}{ad-cb} \end{pmatrix}$$

Preuve
On vérifie que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$.

Méthode de Gauss pour inverser une matrice
Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice de $M_n(\mathbb{k})$. Cette méthode consiste à faire des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice A jusqu'à la transformer en la matrice identité I_n. Ces opérations élémentaires sur les lignes de la matrice A sont :

$$L_i \leftarrow \lambda L_i \quad , \quad \lambda \neq 0$$

$$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j \quad , \quad \lambda \in \mathbb{k} \text{ et } j \neq i$$

Donc pour appliquer cette méthode, à coté de la matrice A, on rajoute la matrice identité pour former le tableau suivant :

$$(A|I_n) : \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} & 1 & 0 & . & . & 0 \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & 0 & 1 & . & . & . \\ . & & . & & . & . & & & . & . \\ . & & & . & . & . & & & . & . \\ a_{n1} & & . & . & a_{nn} & 0 & 0 & . & . & 1 \end{array}\right)$$

Sur les lignes de cette matrice (appelée matrice augmentée), on effectue des opérations élémentaires jusqu'à obtenir le tableau

$$(I_n|B):\begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 & | & b_{11} & b_{12} & . & . & b_{1n} \\ 0 & 1 & . & . & . & | & b_{21} & b_{22} & . & . & . \\ . & & . & & . & | & . & & . & & . \\ . & & & . & . & | & . & & & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 1 & | & b_{n1} & & . & . & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Alors, $A^{-1}=B$.

Exemple 3.9
Soit

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Voici la matrice augmentée

$$(A|I_2):\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

On effectue les opérations élémentaires suivantes $L_2 \leftarrow L_2-3L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3-2L_1$, alors, on touve la nouvelle matrice augmentée suivante

$$\left(A^{(1)}|B^{(1)}\right):\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & | & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & | & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} L_1^{(1)} \\ L_2^{(1)} \\ L_3^{(1)} \end{matrix}$$

On multiplie la ligne $L_2^{(1)}$ par $\left(-\frac{1}{5}\right)$ (c'est à dire $L_2^{(1)} \leftarrow \left(-\frac{1}{5}\right)L_2^{(1)}$, on obtient

$$\left(A^{(2)}|B^{(2)}\right):\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ & & & | & & & \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & | & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ & & & | & & & \\ 0 & -3 & -1 & | & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} L_1^{(2)} \\ \\ L_2^{(2)} \\ \\ L_3^{(2)} \end{matrix}$$

on effectue l'opération élémentaire suivante $L_3^{(2)} \leftarrow L_3^{(2)}+3L_2^{(2)}$, alors, on touve

$$\left(A^{(3)}|B^{(3)}\right):\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ & & & | & & & \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & | & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ & & & | & & & \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} & | & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} L_1^{(3)} \\ \\ L_2^{(3)} \\ \\ L_3^{(3)} \end{matrix}$$

On multiplie la ligne $L_3^{(3)}$ par $\left(-\frac{5}{2}\right)$ (c'est à dire $L_3^{(3)} \leftarrow \frac{5}{2}L_3^{(3)}$, on obtient

$$\left(A^{(4)}|B^{(4)}\right) : \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1^{(4)} \\ L_2^{(4)} \\ L_3^{(4)} \end{array}$$

on effectue les opérations élémentaires suivantes $L_2^{(4)} \leftarrow L_2^{(4)} - \frac{1}{5}L_3^{(4)}$ et $L_1^{(4)} \leftarrow L_1^{(4)} - L_3^{(4)}$, alors, on touve

$$\left(A^{(5)}|B^{(5)}\right) : \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1^{(5)} \\ L_2^{(5)} \\ L_3^{(5)} \end{array}$$

on effectue l'opération élémentaire suivante $L_1^{(5)} \leftarrow L_1^{(5)} - 2L_2^{(5)}$, alors, on touve

$$\left(A^{(6)}|B^{(6)}\right) : \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1^{(6)} \\ L_2^{(6)} \\ L_3^{(6)} \end{array}$$

Par cnséquent,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

3.3 Déterminant

3.3.1 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2

Définition 3.14
Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2}$ *une matrice de* $M_2(\mathbb{k})$. *On appelle déterminant de* A, *le nombre noté* $\det A$ *ou* $|A|$

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \tag{3.19}$$

Exemple 3.10 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 3 \times 7 - 5 \times 4 = 1.$$

3.3.2 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre n

Définition 3.15
Soit $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice de $M_n(\mathbb{k})$. On définit le déterminant de A comme suit :

$$\det A=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\,a_{ij}\times|A_{ij}|\,,\quad \forall i\in\{1,...,n\}\,. \tag{3.20}$$

où A_{ij} est la matrice obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne. Son déterminant $|A_{ij}|$ s'appelle le mineur de a_{ij} dans A et le nombre $(-1)^{i+j}\times|A_{ij}|$ est appelé cofacteur de a_{ij} dans A.

Remarque 3.2
Pour calculer $\det A$. On peut développer suivant la j-ème colonne

$$\det A=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\,a_{ij}\times|A_{ij}|\,,\quad \forall j\in\{1,...,n\} \tag{3.21}$$

Exemple 3.11
Soit

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}.$$

Pour calculer $\det A$ on développe suivant la première ligne. Alors, on a :

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\sum_{j=1}^{3}(-1)^{1+j}\,a_{1j}\times|A_{1j}|$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22})$$

On peut développer suivant la 2-ème colonne

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{3}(-1)^{i+2}\,a_{i2}\times|A_{i2}|$$

$$=-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix}$$

$$=-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23})+a_{22}(a_{11}a_{33}-a_{31}a_{13})-a_{32}(a_{11}a_{23}-a_{21}a_{13})$$

Exemple 3.12 Soit

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1\\ 3 & -1 & 2\\ 4 & 5 & -3\end{pmatrix}.$$

On peut développer suivant les lignes ou les colonnes. Développons selon la première ligne

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -3 \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} a_{1j} \times |A_{1j}|$$

$$= 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= ((-1)(-3) - 5 \times 2) - 2(3(-3) - 4 \times 2) + (3 \times 5 - 4(-1)) = 46$$

On peut vérifier le résultat si on développe suivant la 2-ème ligne ou la 3-ème ligne. Développons suivant la 3-ème ligne

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -3 \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{3+j} a_{3j} \times |A_{3j}|$$

$$= 4 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 5 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-3) \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 4(2 \times 2 - (-1) \times 1) - 5(1 \times 2 - 3 \times 1) - 3(1 \times (-1) - 3 \times 2) = 46$$

Développons selon la première colonne

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -3 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+1} a_{i1} \times |A_{i1}|$$

$$= 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 4 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= ((-1)(-3) - 5 \times 2) - 3(2(-3) - 5 \times 1) + 4(2 \times 2 - (-1) \times 1) = 46$$

On peut vérifier le résultat si on développe suivant la 2-ème colonne ou la 3-ème colonne. Développons suivant la 3-ème colonne

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -3 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+3} a_{i3} \times |A_{i3}|$$

$$= 1 \times \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + (-3) \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(3 \times 5 - 4 \times (-1)) - 2(1 \times 5 - 4 \times 2) - 3(1 \times (-1) - 3 \times 2) = 46$$

3.3.3 Les propriétes des déterminants

Propriété 3.6
Soient A et B deux matrices carrée d'ordre n. Alors, on a :

$$1.\det(AB) = \det A \times \det B$$

$$2.\det A = \det({}^tA)$$

$$3.\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \quad \text{dans le cas où } A \text{ est inversible}$$

Propriété 3.7
Le déterminant d'une matrice est nul si et seulement si les vecteurs lignes ou vecteurs colonnes sont liée.

Exemple 3.13
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 3 & 15 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$$

On a : $\det A = 0$ car la deuxième colonne est égale à 5 fois la première colonne. $\det B = 0$ car la deuxième ligne est le double de la première ligne.

Propriété 3.8
Si l'on échange deux lignes ou deux colonnes d'un déterminant, celui-ci change de signe en gardant la même valeur absolue.

Exemple 3.14
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

On a :

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -3 \quad , \quad \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

Propriété 3.9
Si on multiplie une ligne (ou colonne) d'une matrice par un réel λ, le déterminant de la nouvelle matrice est multiplié par λ.

Exemple 3.15
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

On a :

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 9 = 3 \times \det A$$

Propriété 3.10
Si on ajoute à une ligne (ou colonne) un multiple d'une ligne (ou colonne), le déterminant ne change pas.

Exemple 3.16
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 6 \\ -3 & 3 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

On a :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 6 \\ -3 & 3 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 10$$

On utilise la propriété (3.10) pour obtenir des 0 dans une ligne ou une colonne.
Si on ajoute à la deuxième ligne, la première ligne multipliée par -1 ($C_2 \longrightarrow C_2 - C_1$) et à la troisième ligne, la première ligne multipliée par -1 ($C_3 \longrightarrow C_3 - C_1$) et à la quatrième ligne, la première ligne multipliée par -1 ($C_4 \longrightarrow C_4 - C_1$). On obtient :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ -3 & 6 & 3 & 7 \\ 4 & -2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & 7 \\ -2 & -3 & 3 \end{vmatrix}$$

Si on ajoute la première colonne multipliée par $\left(-\frac{1}{3}\right)$ à la deuxième colonne ($C_2 \longrightarrow C_2 - \frac{1}{3}C_1$) et la première colonne multipliée par $\left(-\frac{4}{3}\right)$ à la troisième colonne ($C_3 \longrightarrow C_3 - \frac{4}{3}C_1$), on obtient :

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & -1 \\ -2 & -\frac{7}{3} & \frac{17}{3} \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{7}{3} & \frac{17}{3} \end{vmatrix} = 3\left(\frac{17}{3} - \frac{7}{3}\right) = 10$$

Proposition
Soit A une matrice carrée d'ordre n. On dit que A est inversible si $\det A \neq 0$. *De plus on a :*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}{}^{t}C$$

où C est la matrice de cofacteurs. $C = (c_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ *avec* $c_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$.

Exemple
Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

on a : $\det A = 8 \neq 0$, donc la matrice A est inversible et on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}{}^{t}C$$

On calcule les cofacteurs

$$c_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 1 \qquad c_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \qquad c_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 2$$

$$c_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 29 \qquad c_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -13 \qquad c_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 2$$

$$c_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -17 \qquad c_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 9 \qquad c_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2$$

Alors, la matrice C est

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 29 & -13 & 2 \\ -17 & 9 & -2 \end{pmatrix}$$

par conséquent

$$A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 29 & -17 \\ -1 & -13 & 9 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{29}{8} & -\frac{17}{2} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{13}{8} & \frac{9}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

3.4 Les Matrices et les Applications Linéaires

3.4.1 Matrice associée à une application linéaire

Dans cette section, E et F sont des $\Bbbk$-espaces vectoriels de dimension finie. On pose $m = \dim E$ et $n = \dim F$. Soit $B_E = (u_1, u_2, ..., u_m)$ (respectivement $B_F = (v_1, v_2, ..., v_n)$) une base de E (respectivement F).

Définition 3.16
Soit f une application linéaire de E dans F. La matrice de f dans les bases B_E et B_F notée $M_{B_E,B_F}(f)$ est la matrice à n ligne et m colonne à coefficients dans $\Bbbk$, dont les éléments de la j-ème colonne sont les coordonnées du vecteur $f(u_i)$ dans la base B_F.

$$M_{B_E,B_F}(f) = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}} \tag{3.22}$$

avec

$$f(u_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \times v_j \tag{3.23}$$

Exemple 3.17
Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y) = (2x + y, x + y, 3y)$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
On consédère les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. Soient $B_0 = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ une

base de $\mathbb{R}^2$ et $B_1 = \{e'_1 = (1,0,0), e'_2 = (0,1,0), e'_3 = (0,0,1)\}$ une base de $\mathbb{R}^3$.
On a :

$$f(e_1) = (2,1,0) = 2 \times e'_1 + 1 \times e'_2 + 0 \times e'_3$$

donc les éléments de la première colonne sont $2, 1$ et 0.

$$f(e_2) = (1,1,3) = 1 \times e'_1 + 1 \times e'_2 + 3 \times e'_3$$

donc les éléments de la deuxième colonne sont $1, 1$ et 3.
Alors, la matrice associée à l'application f dans les bases B_0 et B_1 est :

$$M_{B_0,B_1}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \\ 1 & 1 \\ \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Proposition 3.1
Soient f une application linéaire de E dans F et $A = M_{B_E,B_F}(f)$. Si $u = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \times u_i$ et si $f(u) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \times v_i$, où $E = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ et $F = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, alors on a :

$$Y = AX \tag{3.24}$$

avec

$$X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ . \\ . \\ \alpha_m \end{pmatrix} \quad et \quad Y = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ . \\ . \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

Exemple 3.18
Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, tous les deux munis de la base canonique $B = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ et soit A la matrice associée à f :

$$A = M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors, pour tous les réels x, y et z, on a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + 3z \\ 2x + 4y \\ 5x - 3y + z \end{pmatrix}$$

Donc,

$$f(x,y,z) = (x + y + 3z, 2x + 4y, 5x - 3y + z)$$

Proposition 3.2
Soient G un $\mathbb{k}$-espace vectoriel de dimension finie ($\dim G = p \geq 1$) et $B_G = (w_1, w_2, ..., w_p)$

une base de G.
Soient f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G. On note $A = M_{B_E,B_F}(f)$ et $B = M_{B_F,B_G}(g)$. Alors la matrice de $g \circ f$ dans les bases B_E et B_G est la matrice BA.

$$M_{B_E,B_G}(g \circ f) = B \times A \tag{3.25}$$

3.4.2 Matrice de passage

Définition 3.17
Etant donnée deux bases $B = \{u_1, u_2, u_3, ..., u_n\}$ et $B' = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$ d'un espace vectoriel E, chacun des vecteurs de la deuxième base a des coordonnées dans la première, notons p_{ij} la i-ème coordonnée de v_j dans la base B.

$$v_j = p_{1j}u_1 + p_{2j}u_2 + p_{3j}u_3 + ... + p_{nj}u_n$$

La matrice carrée P de coefficients p_{ij} est appelée matrice de passage de B à B'. On la note $P = M_{B',B}(Id)$

Exemple 3.19
Soient $B = \{u_1 = (1,2,3), u_2 = (0,1,4), u_3 = (3,0,1)\}$ et
$B' = \{v_1 = (-1,0,5), v_2 = (0,1,2), v_3 = (3,-2,1)\}$ deux bases de $\mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned} u_1 &= -\tfrac{2}{5}v_1 + \tfrac{12}{5}v_2 + \tfrac{1}{5}v_3 & \qquad & v_1 = -u_1 + 2u_2 \\ u_2 &= \tfrac{3}{10}v_1 + \tfrac{6}{5}v_2 + \tfrac{1}{10}v_3 & \text{et} \qquad & v_2 = \tfrac{3}{8}u_1 + \tfrac{1}{4}u_2 - \tfrac{1}{8}u_3 \\ u_3 &= -\tfrac{3}{5}v_1 + \tfrac{8}{5}v_2 + \tfrac{4}{5}v_3 & \qquad & v_3 = -\tfrac{3}{2}u_1 + u_2 + \tfrac{3}{2}u_3 \end{aligned}$$

Alors, la matrice de passage de B *à* B' est

$$M_{B',B}(Id) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{8} & -\frac{3}{2} \\ 2 & \frac{1}{4} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

et la matrice de passage de B' *à* B est

$$M_{B,B'}(Id) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{10} & -\frac{3}{5} \\ \frac{12}{5} & \frac{6}{5} & \frac{8}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que

$$(M_{B,B'}(Id)) \times (M_{B',B}(Id)) = I_3$$

C'est à dire

$$M_{B,B'}(Id) = (M_{B',B}(Id))^{-1}$$

3.4.3 Formule de changement de base pour une application linéaire

Soient E et F deux espaces vectoreils. E est muni de deux bases B_E et B'_E. F est muni de deux bases B_F et B'_F. On note P (respectivement Q) la matrice de passage de B_E à B'_E (respectivement B_F et B'_F). Soit f une application linéaire de E dans F. On suppose $A = M_{B_E,B_F}(f)$ et $B = M_{B'_E,B'_F}(f)$. Alors :

$$B = Q^{-1}AP \tag{3.26}$$

$$\begin{array}{ccc} (E, B_E) & \underset{A}{\overset{f}{\longrightarrow}} & (F, B_F) \\ Id_E \uparrow P & & Id_F \downarrow Q^{-1} \\ (E, B'_E) & \underset{B}{\overset{f}{\longrightarrow}} & (F, B'_F) \end{array}$$

Si $E = F$ et $B_E = B_F$ et $B'_E = B'_F$, alors on a :

$$B = P^{-1}AP \tag{3.27}$$

Exemple 3.20
Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (x - 2z, x + y + 3z)$$

pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
Soient $B_1 = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ et $B_2 = \{e'_1 = (1, 0), e'_2 = (0, 1)\}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$. On considère $B'_1 = \{u_1 = (1, 2, 3), u_2 = (0, 1, 4), u_3 = (3, 0, 1)\}$ et $B'_2 = \{v_1 = (3, 0), v_2 = (1, 2)\}$ les bases de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
Alors, on a :

$$A = M_{B_1,B_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

et

$$B = M_{B'_1,B'_2}(f) = \begin{pmatrix} -\frac{11}{3} & -\frac{29}{6} & -\frac{4}{3} \\ 6 & \frac{13}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage de B_1 *à* B'_1 est

$$P = M_{B'_1,B_1}(Id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage de B'_2 *à* B_2 est

$$Q^{-1} = M_{B_2,B'_2}(Id) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3.5 Rang d'une matrice

Définition 3.18
On définit le rang d'une matrice comme étant le rang de ces vecteurs colonnes ou ces vecteurs lignes.

Exemple 3.21
Le rang de la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$
est par définition le range de la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^2$:
$$B = \left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$
Ces vecteurs sont linéairement dépendants, car $2u_1 - u_2 = u_3$ et comme la famille
$$\left\{ u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$
est libre, alors le rang de la famille B est 2.
Donc,
$$rg\,(A) = 2$$

Proposition 3.3
Le rang d'une matrice ayant les colonnes $C_1, C_2, ..., C_n$ n'est pas modifié par les trois opérations élémentaires suivantes sur les vecteurs :
1. On peut multiplier une colonnes par un scalaire non nul. $C_i \leftarrow \lambda C_i$ avec $\lambda \neq 0$.
2. On peut ajouter à la colonne C_i un multiple d'une autre colonne C_j. $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ avec $\lambda \in \mathbb{k}$ et $i \neq j$.
3. On peut échanger deux colonnes. $C_i \leftrightarrow C_j$.

3.6 Exercices

<u>Exercice n°1 :</u>

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^3 et vérifier que $A^3 - A - 4I = 0$.
2. En déduire que A est inversible.

<u>Exercice n°2 :</u>

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par :

$$f(x, y, z) = (x - y + z, y + 2z, x - 3z)$$

1. Ecrire la matrice A de f dans la base canonique B de $\mathbb{R}^3$.
$B = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$.
2. Soit B' une famille de vecteurs définie par :
$B' = \{u_1 = (1, 1, 2), u_2 = (0, 1, -3), u_3 = (0, 0, 2)\}$. Montrer que B' forme une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Ecrire la matrice D de f dans la base B'.
4. Retrouver la matrice D à partir de A en utilisant la formule de changement de base.

<u>Exercice n°3 :</u>

Soient u_1, u_2, u_3 trois vecteurs formant une base de $\mathbb{R}^3$. On note f l'application linéaire définie par

$$f(u_1) = u_1 - u_2 + u_3$$

$$f(u_2) = u_1 + u_2$$

$$f(u_3) = u_1 - u_2 - u_3$$

1. Ecrire la matrice A de f dans la base $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$. Déterminer le noyau de cette application.
2. On pose $v_1 = u_1 + u_2 + 2u_3$, $v_2 = u_2 - u_3$, $v_3 = 3u_3$. Les vecteurs v_1, v_2, v_3 forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?
3. Calculer $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$ en fonction de v_1, v_2, v_3. Ecrire la matrice B de f dans la base $B_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$.
4. Déterminer la matrice P, matrice de passage de la base B_1 à la base B_2.
5. Vérifier que P est inversible et calculer P^{-1}.Quel relation lie Q, B, P et P^{-1}.

Exercice n°4 :
Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Notons f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ associée à la matrice A telle que $\mathbb{R}^4$ (resp $\mathbb{R}^3$) muni par la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ (resp $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$).
1. Déterminer r, le rang de A.
2. Décrire le noyau de A. Donner une base. précisser la dimension.
3. Mêmes questions pour l'image de A.

Exercice n°5 :
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui admet dans la base canonique la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le noyau et l'image de f.
2. Trouver une base où la matrice de f soit :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Chapitre 4

RESOLUTION DE SYSTEMES D'EQUATIONS

4.1 Système d'Equations

Définition 4.1
Un système de n équations linéaires à p inconnues est une liste de n équations linéaires. Il est de la forme :

$$(S):\left\{\begin{array}{llllllll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & + & \ldots & \ldots & +a_{1p}x_p & =b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & + & \ldots & .. & +a_{2p}x_p & =b_2 \\ . & . & . & . & & & . & . \\ . & . & . & . & & & . & . \\ a_{i1}x_1 & +a_{i2}x_2 & +a_{i3}x_3 & + & \ldots & .. & +a_{ip}x_p & =b_i \\ . & . & . & . & & & . & . \\ . & . & . & . & & & . & . \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +a_{n3}x_3 & + & \ldots & .. & +a_{np}x_p & =b_n \end{array}\right. \tag{4.1}$$

Les nombres a_{ij} sont les coefficients du système.
On peut écrire (S) sous forme matricielle

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots. & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots. & a_{2p} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots. & a_{np} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_p \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}}_{B} \tag{4.2}$$

On appelle $A \in M_{n,p}(\mathbb{k})$ la matrice des coefficients du système. $B \in M_{n,1}(\mathbb{k})$ est le vecteur de second membre.
Le vecteur $X \in M_{p,1}(\mathbb{k})$ est une solution du système si et seulement si

$$AX = B \tag{4.3}$$

Définition 4.1
La matrice augmentée associée au système (4.1) *est défini par*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1p} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2p} & b_2 \\ . & & & . & . \\ . & . & & . & . \\ & & . & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{np} & b_n \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

Exemple 4.1
Résoudre le système suivant :

$$(S_1) : \begin{cases} x + 2y = 1 \\ \\ x - 3y = 6 \end{cases} \tag{4.5}$$

C'est un système de deux équations à deux inconnues x et y. La forme matricielle de (S_1) est :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \\ 3 \end{pmatrix}}_{B}$$

admet la solution

$$X = \begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \\ -1 \end{pmatrix}$$

4.2 Résolution par la méthode de Gauss

Quelques soient les valeurs n et p du système, on peut déterminer ses solutions par la méthode d'élimination de Gauss, quand les solutions existent.
Le principe en est le suivant :
Par des combinaisons linéaires succéssives, on transforme le système initial, que l'on prend tel quel sans changer l'ordre des équations, en un système triangulaire supérieur (la matrice associée est triangulaire supérieur), système ensuite résolu en commençant par la dernière des équations transformées.

Exemple 4.2
Résoudre le système suivant :

$$(S_2) : \begin{cases} x + 2y + 3z = -4 \ \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(Eq1)} \\ \\ 3x - y - z = 4 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(Eq2)} \\ \\ 7x - 5y - 2z = 3 \ \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(Eq3)} \end{cases} \tag{4.6}$$

C'est un système de trois équations à trois inconnues x, y et z. La forme matricielle de (S_2) est :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ 7 & -5 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}}_{B}$$

Dans la première étape de la méthode, on élimine l'inconnue x dans les équations Eq2 et Eq3. Donc on remplaçe l'équation (Eq2) par (Eq2)-3(Eq1) et (Eq3) par (Eq3)-7(Eq1). Aprés cette première étape, on obtient le système équivalent :

$$\left(S_2'\right) : \begin{cases} x + 2y + 3z = -4 \ \text{.......... (Eq1)} \\ \quad - 7y - 10z = 16 \ \text{...... (Eq2}^{'}\text{)} \\ \quad - 19y - 23z = 31 \ \text{.... (Eq3}^{'}\text{)} \end{cases} \tag{4.7}$$

Dans la deuxième étape, la deuxième ligne qui joue le rôle de pivot si y est présent (sinon on permute (Eq2$^{'}$) par (Eq3$'$)). Pour éliminer y dans l'équation (Eq3$'$), on remplaçe celle-ci par (Eq3$'$)$-\frac{-19}{-7}$(Eq2$^{'}$). On obtient alors le systéme équivalent, triangulaire supérieur, suivant :

$$\left(S_2''\right) : \begin{cases} x + 2y + 3z = -4 \ \text{.......... (Eq1)} \\ \quad - 7y - 10z = 16 \ \text{...... (Eq2}^{'}\text{)} \\ \quad \frac{29}{7} z = -\frac{87}{7} \ \text{.... (Eq3}^{''}\text{)} \end{cases} \tag{4.8}$$

On résout le système par **"remontée"** en commençant par la dernière équation.
(Eq3$^{''}$) donne $z = -3$.
(Eq2$^{'}$) donne $y = -\frac{1}{7}(10z + 16) = 2$.
(Eq1) donne $x = -2y - 3z - 4 = 1$.
Donc, la solution du (S_2) est

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Remarque 4.1
♦ Pour n équations, il y aura $n-1$ étapes.
♦ Si on trouve, dans la deuxième étape, le coéfficient de x_2 égale à zéro, alors on permute (Eq2$^{'}$) par (Eq3$^{'}$) où le coéfficient de x_2 est différent de zéro et on va fait la même chose pour les autres étapes.

Exemple 4.3
Résoudre le système suivant :

$$(S_3) : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(Eq1)} \\ \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(Eq2)} \\ \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 = 4 \qquad \ldots\ldots\ldots \text{(Eq3)} \\ \\ x_1 + 8x_2 + 27x_3 + 64x_4 = 8 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(Eq4)} \end{cases}$$

Dans la première étape de la méthode, on élimine l'inconnue x_1 dans les équations Eq2,Eq3 et Eq4. Donc on remplaçe l'équation (Eq2) par (Eq2)$-$(Eq1) et l'équation (Eq3) par (Eq3)$-$(Eq1) et l'équation (Eq4) par (Eq4)$-$(Eq1). Aprés cette première étape, on obtient le système équivalent :

$$\left(S_3^{'}\right) : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(Eq1)} \\ \\ \qquad x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(Eq2}^{'}\text{)} \\ \\ \qquad 3x_2 + 8x_3 + 15x_4 = 4 \quad \ldots\ldots\ldots \text{(Eq3}^{'}\text{)} \\ \\ \qquad 7x_2 + 26x_3 + 63x_4 = 8 \ \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(Eq4}^{'}\text{)} \end{cases}$$

Dans la deuxième étape, la deuxième ligne joue le rôle de pivot. Pour éliminer x_2 dans les équations (Eq3$^{'}$) et (Eq4$^{'}$), on remplaçe l'équation (Eq3$^{'}$) par (Eq3$^{'}$)-3(Eq2$^{'}$) et l'équation (Eq4$^{'}$) par (Eq4$^{'}$)-7(Eq2$^{'}$) . On obtient alors le systéme équivalent, triangulaire supérieur, suivant :

$$\left(S_3^{''}\right) : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(Eq1)} \\ \\ \qquad x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(Eq2}^{'}\text{)} \\ \\ \qquad\qquad 2x_3 + 6x_4 = -2 \qquad \ldots\ldots\ldots \text{(Eq3}^{''}\text{)} \\ \\ \qquad\qquad 12x_3 + 42x_4 = -6 \quad \ldots\ldots\ldots \text{(Eq4}^{''}\text{)} \end{cases}$$

Dans la troisième étape, la troisième ligne joue le rôle de pivot. Pour éliminer x_3 dans l'équations (Eq4$^{''}$), on remplaçe celle-ci par (Eq4$^{''}$)-6(Eq3$^{''}$). On obtient alors le systéme équivalent suivant :

$$\left(S_3^{'''}\right) : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(Eq1)} \\ \\ \qquad x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(Eq2}^{'}\text{)} \\ \\ \qquad\qquad 2x_3 + 6x_4 = -2 \ \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(Eq3}^{''}\text{)} \\ \\ \qquad\qquad\qquad 6x_4 = 6 \qquad \ldots\ldots\ldots \text{(Eq4}^{'''}\text{)} \end{cases}$$

On résout le système par **"remontée"** en commençant par la dernière équation.
(Eq4$'''$) donne $x_4 = 1$
(Eq3$''$) donne $x_3 = \frac{1}{2}(-2 - 6x_4) = -4$.
(Eq2$''$) donne $x_2 = 2 - 2x_3 - 3x_4 = 7$.
(Eq1) donne $x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 = -4$.
Donc, la solution du (S_3) est

$$X = \begin{pmatrix} -4 \\ \\ 7 \\ \\ -4 \\ \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.3 Résolution par la méthode de Cramer

Soit

$$(S_2) : \left\{ \begin{array}{llllllll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & + & ... & ... & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & + & ... & .. & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ . & . & . & . & & & . & . \\ . & . & . & . & & & . & . \\ a_{i1}x_1 & +a_{i2}x_2 & +a_{i3}x_3 & + & ... & .. & +a_{in}x_n & = b_i \\ \\ . & . & . & . & & & . & . \\ . & . & . & . & & & . & . \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +a_{n3}x_3 & + & ... & .. & +a_{nn}x_n & = b_n \end{array} \right. \tag{4.9}$$

un système d'équations linéaires à n équations et n inconnues. Ce système peut aussi s'écrire

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}}_{B} \tag{4.10}$$

On définit la matrice A_j comme suit

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & .... & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & .... & a_{1n} \\ a_{11} & & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & .... & a_{2n} \\ . & & & & & & . \\ . & & & & & & . \\ . & & & & & & . \\ a_{11} & .... & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & .... & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

$$\uparrow$$
$j\grave{e}me$ colonne

Autrement dit, A_j est la matrice obtenue en remplaçant la jème colonne de A par le second membre B.

Théorème 4.1

Soit

$$AX = B$$

un système de n équations à n inconnues. Supposons que $\det A \neq 0$. *Alors l'unique solution du système est donnée par*

$$x_j = \tfrac{\det(A_j)}{\det(A)} \tag{4.12}$$

Démonstration

Nous avons supposé que

$$\det A \neq 0.$$

Donc A est inversible. Alors

$$X = A^{-1}B$$

est l'unique solution du système. D'autre part, nous avons vu que

$$A^{-1} = \tfrac{1}{\det A}{}^{t}C$$

où C est la matrice de cofacteurs. $C = (c_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $c_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$.

Donc

$$X = \tfrac{1}{\det A}{}^{t}CB$$

ce qui donne

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \tfrac{1}{\det A} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & . & . & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & . & . & c_{n2} \\ . & . & & & . \\ . & . & & & . \\ c_{1n} & c_{2n} & . & . & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$

c'est à dire

$$x_1 = \tfrac{1}{\det A}\left(c_{11}b_1 + c_{21}b_2 + ... + c_{n1}b_n\right)$$

$$x_i = \tfrac{1}{\det A}\left(c_{1i}b_1 + c_{2i}b_2 + ... + c_{ni}b_n\right)$$

$$x_n = \tfrac{1}{\det A}\left(c_{1n}b_1 + c_{2n}b_2 + ... + c_{nn}b_n\right)$$

Mais

$$c_{1i}b_1 + c_{2i}b_2 + ... + c_{ni}b_n$$

est le développement en cofacteurs de $\det(A_j)$ par rapport à sa ième colonne. Donc

$$x_j = \tfrac{\det(A_j)}{\det(A)}$$

Exemple 4.4

Résolvons le système suivant :

$$(S_3) : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -4 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 11 \end{cases} \tag{4.13}$$

La forme matricielle de (S_3) est :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}}_{B}$$

On a :

$$A_1 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 11 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

et

$$\det A = 13 \quad , \quad \det A_1 = 13$$

$$\det A_2 = 26 \quad , \quad \det A_3 = -39.$$

La solution est alors

$$x_1 = \tfrac{\det(A_1)}{\det(A)} = 1$$

$$x_2 = \tfrac{\det(A_2)}{\det(A)} = 2$$

$$x_3 = \tfrac{\det(A_3)}{\det(A)} = -3$$

4.4 Résolution par la méthode de l'inverse du matrice des coéfficients

Soit le système suivant

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}}_{B}$$

où $A \in M_n(\mathbb{k})$ est une matrice carrée inversible.
Alors, l'unique solution du système est donnée par

$$X = A^{-1}B$$

Exemple 4.5
Résolvons le système suivant :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}}_{B}$$

Le determinant de la matrice A vaut 13, donc la matrice A est inversible et son inverse est

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{13} & \frac{7}{13} & \frac{1}{13} \\ -\frac{1}{13} & -\frac{11}{13} & \frac{4}{13} \\ \frac{4}{13} & \frac{5}{13} & -\frac{3}{13} \end{pmatrix}$$

Alors, l'unique solution du système est donnée par

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{3}{13} & \frac{7}{13} & \frac{1}{13} \\ -\frac{1}{13} & -\frac{11}{13} & \frac{4}{13} \\ \frac{4}{13} & \frac{5}{13} & -\frac{3}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

4.5 Nombre de solutions

Soit (S) un système de n équations linéaires à p inconnues.
Donc, (S) équivalent à :

$$AX = B$$

où $A \in M_{n,p}(\mathbb{k})$ est la matrice des coefficients du système, $B \in M_{n,1}(\mathbb{k})$ est le vecteur de seconde membre et $X \in M_{p,1}(\mathbb{k})$.

Théorème 4.2
Si A est de rang r et si $[A/B]$ (la matrice qugmentée du système) est de rang s, alors le système

- *n'admet pas de solution lorsque $r < s$.*
- *admet une infinité de solutions lorsque $r = s$ et $r < p$.*
- *admet une solution unique lorsque $r = s = p$.*

4.5.1 Cas où n=p (A est une matrice carée)

Système homogène

Le système (S) est dit homogène si le second membre est nul $(B = 0)$.
L'ensemble des X tels que $AX = 0$ constitue le noyau de l'application associée à A. Le noyau contient toujours le vecteur nul, mais il peut contenir en plus des vecteurs non nuls.
Ce type de système a donc au moins une solution, la solution nulle.

♦ **Si** A **est inversible** $(\det A \neq 0)$
Le système a la solution unique $X = 0$, vecteur nul.

♦ **Si A n'est pas inversible** ($\det A = 0$)
Le système a une infinité de solutions (en plus de la solution nulle).
Exemple 4.6
♦ Le système

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & -4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B}$$

a la solution unique $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, le determinant de la matrice vaut -37, le rang de la matrice est 3.
♦ Le système

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B}$$

a une infinité de solutions $X = \begin{pmatrix} -x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ où $x_3 \in \mathbb{R}$,
L'ensemble de ces solutions constitue un espace vectoriel de dimension 1 engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Le determinant de la matrice vaut 0, le rang de la matrice est 2.

Système non homogène ($\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$)

♦ **Si A est inversible** ($\det A \neq 0$)
Le système a la solution unique $X = A^{-1}B$.
♦ **Si A n'est pas inversible** ($\det A = 0$)
Pour qu'il y ait au moins une solution, il faut que le rang de A soit le même que le rang de la matrice $C = [A/B]$, matrice formée par A à laquelle B est accolé.
Si X_0 est une solution particulière du système non homogène $AX = B$, on a :

$$AX_0 = B$$

Alors

$$A\left(X - X_0\right) = 0$$

On note $X^* = X - X_0$ la solution de l'équation homogène.
Donc, la solution du système non homogène est $X = X^* + X_0$.

Exemple 4.7

♦ Résolvons le système suivant :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 26 \\ 19 \\ -20 \\ -30 \end{pmatrix}}_{B}$$

Le determinant de la matrice A vaut -149, donc la matrice A est inversible et son inverse est

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{65}{149} & -\frac{59}{149} & \frac{69}{149} & -\frac{32}{149} \\ -\frac{9}{149} & -\frac{1}{149} & \frac{34}{149} & -\frac{46}{149} \\ \frac{3}{149} & \frac{50}{149} & -\frac{61}{149} & \frac{65}{149} \\ -\frac{32}{149} & \frac{13}{149} & \frac{5}{149} & \frac{2}{149} \end{pmatrix}$$

Alors, l'unique solution du système est donnée par

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{65}{149} & -\frac{59}{149} & \frac{69}{149} & -\frac{32}{149} \\ -\frac{9}{149} & -\frac{1}{149} & \frac{34}{149} & -\frac{46}{149} \\ \frac{3}{149} & \frac{50}{149} & -\frac{61}{149} & \frac{65}{149} \\ -\frac{32}{149} & \frac{13}{149} & \frac{5}{149} & \frac{2}{149} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 26 \\ 19 \\ -20 \\ -30 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

♦ Le système

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}}_{B}$$

n'a pas de solution.

On peut vérifier que le determinant de la matrice est 0 ou $rg(A) \neq rg(C)$

Le rang de la matrice A est

$$rg\,(A) = 2$$

car, son vecteurs colonnes sont linéairement dépendants et la famille

$$\left\{ c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$$

est libre.

De même manière, on trouve que le rang de la matrice C est 3, où

$$C = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix}}_{A} & \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{matrix}}_{B} \end{pmatrix}$$

4.5.2 Cas où le nombre d'équations est différent du nombre d'inconnues (n≠p)

Dans ce cas la matrice A n'est pas carrée. Pour déterminer le nombre de solutions du système, en utilisant le théorème 4.2.

n>p il y a plus d'équations que d'inconnues

Exemple 4.8
Le système

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 5 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}}_{B}$$

n'a pas de solution.
Pour le vérifier, soit on met en oeuvre la méthode de Gauss, ce qui précisera les impossibilités, soit on détermine le rang de C et on compare à celui de A.
Le rang de la matrice A est

$$rg\,(A) = 3$$

Le rang de la matrice

$$C = \left(\begin{matrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 5 \\ 2 & 6 & -3 \end{matrix}}_{A} & \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 5 \end{matrix}}_{B} \end{matrix} \right)$$

est 4.
Exemple 4.9
Le système

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}}_{B}$$

admet une unique solution. Car $rg\,(A) = rg\,(C) = p = 3$.
En effet,
On a trois inconnues x_1, x_2 et x_3, donc $p = 3$.
Le rang de la matrice A est

$$rg\,(A) = 3,$$

car les trois vecteurs colonnes de la matrice A sont linéairement indépendants.
Le rang de la matrice $C = [A/B]$

$$C = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{matrix}}_{A} & \underbrace{\begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{matrix}}_{B} \end{pmatrix},$$

est 3.
Car les quatre vecteurs colonnes de la matrice C sont linéairement dépendants, donc on peut choisir les trois premiers qui sont linéairement indépendants.

n<p il y a moins d'équations que d'inconnues

Exemple 4.10
Le système

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}}_{B}$$

a une infinité de solutions $X = \begin{pmatrix} -\frac{13}{35} + \frac{3}{7}x_3 \\ \frac{4}{5} + 2x_3 \\ x_3 \\ -\frac{4}{5} + \frac{4}{7}x_3 \end{pmatrix}$ où $x_3 \in \mathbb{R}$. Car $rg\,(A) = rg\,(C) = 3 < p$.

Exemple 4.11
Le système

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B}$$

n'admet pas de solutions, car $rg\,(A) < rg\,(C)$. $(rg\,(A) = 1$ et $rg\,(C) = 2)$.

4.6 Exercises

Exercice 1
Résoudre dans $\mathbb{R}$ de trois manières différentes le système linéaire suivant, d'inconnues x et y (par la méthode de pivot de Gauss, en inversant la matrice des coéfficients, par la formule de Cramer)

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - y = 10 \end{cases}$$

Exercice 2
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes linéaires suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} x + 2iy = i + 2 \\ ix - 3iy = -4 \end{cases} \quad , \quad (S_2) : \begin{cases} x - iy = 2 \\ ix + 2y = -1 \end{cases}$$

Exercice 3
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes linéaires suivants, d'inconnues x, y et z :

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 3x - y + 5z = 3 \\ x + y + z = -1 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 3x - 2y + z = 1 \\ 5x + y + 7z = 6 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x - y - 3z = -6 \\ x - 4y + 2z = -2 \\ x + y + 5z = 14 \end{cases}$$

Exercice 4
Déterminer les valeurs de λ pour que le système

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + \lambda z = 3 \\ x + \lambda y + 3z = 2 \end{cases}$$

- n'admette pas de solution.
- admette plus d'une solution.
- admette une solution unique.

Exercice 5
Résoudre et discuter suivant les valeurs de λ, le système

$$\begin{cases} y + \lambda z + t = 0 \\ x + y + z + t = 1 \\ x + 2y + z + 2t = 1 \\ 3x + 3y + 4z + \lambda t = 4 \end{cases}$$

Bibliographie

[1] Jean-Marie Monier : *Algèbre MPSI, Cours et 700 exercices corrigés*. DUNOD.

[2] Luc Jolivet, Rabah Labbas : *Algèbre linéaire et géométrie*. Lavoisier.

[3] Jean-Jacques Colin, Jean-Marie Morvan : *Espaces vectoriels, Applications linéaires*. Cépaduès.

[4] Damien Etienne. *Exercices corrigés d'algèbre linéaire, Tome 1.*

[5] Lay : *Algèbre linéaire, théorème, Exercices & Application.*

[6] Jean-Pierre Escofier : *Toute l'Algèbre de la licence*, 2e édition, Dunod.

[7] Camille Debieve, Yves Felix : *Algèbre Linéaire.*