Chapitre 01 : introduction aux transferts thermique

I. Généralités :

Le transfert de chaleur est l'un des modes, les plus connusd'échange d'énergie. Lorsqu'il existe une différence de température entre deux points d'un système à des températures différentes sont mises en contact, on constate une tendance à l'égalisation des températures. On dit qu'il y'a transfert de chaleur.

Le transfert de chaleur obéit aux principes fondamentaux de la thermodynamique, mais les lois de la thermodynamique ne suffisent pas pour expliquer de quelle manière s'effectue le transfert de chaleur ou pour prévoir la vitesse de ce transfert. Le transfert de chaleur est donc régit par d'autres pois, très importantes dans différentes branches de l'industrie. Citons par exemple pour le génie chimique.

La conception et le fonctionnement des évaporateurs, des condenseurs, des échangeurs entre fluide chaud et froid, des colonnes a distillation, des réacteurs, etc…

Pour l'ingénieur de génie chimique les problèmes des transferts thermiques se ramènent généralement à l'une ou l'autre de ces deux formes :

1- Rechercher la manière la plus efficace de transmettre une quantité de donné de chaleur entre deux systèmes par unités de temps.
2- Rechercher comment limiter les déperditions (ou les gains) calorifiques à travers une surface.

La résolution de ces problèmes est souvent complexe car le transfert de chaleur peut résulter de trois mécanismes de propagation obéissant à des lois bien différente et mis en jeu parfois simultanément.

- La conduction.
- La correction.
- Le rayonnement.

Toutefois, le développement de l'un quelconque de ces mécanismes nécessite l'existence d'une différence de température qui joue le rôle de différence de potentiel pour l'échange de chaleur.

II. Définition et mutations :

Quelque définition primaire :

1. Régime permanent et régime transitoire.

La température eu un point d'un système à un instant donné dépend de la position de ce point par rapport à un repaire fixe de cordonnées

$Ø= Ø (x,y,z)$ Ø en °c

$T= T (x,y,z)$ Ten °k

Si la température de tous les points est indépendante du temps on dit que le régime est permanent, si la température dépend du temps on dit que le régime est transitaire. Dans ce cas on peut écrire :

$Ø= Ø (x,y,z,t)$ ou $T= T(x,y,z,t)$

2. Surface isotherme :

On appel surface isotherme $Ø_0$, la représentation dans l'espace de l'équation $Ø_0=Ø (x,y,z)$ a un instant donné.

En régime permanant les surfaces isothermes restent fixes.

En régime transitoire les surfaces peuvent se déplacer et se déformer.

3. Gradient de température :

On appel gradient de température en un point M(x,y,z) d'un système à l'instant donné le vecteur de composantes $\frac{\partial \emptyset}{\partial x}, \frac{\partial \emptyset}{\partial y}, \frac{\partial \emptyset}{\partial z}$. Ce vecteur est normal à la surface isotherme passant par le point M.

4. Flux de chaleur :

On appelle flux de chaleur Φ à travers une surface la quantité de chaleurs qui traverse cette surface par unité de temps. Le flux de chaleur est un scalaire qui représente le débit de chaleur à travers la surface.

$\Phi = \frac{Q}{T}$

5. Densité de flux :

On appelle densité de flux de chaleur D en un point d'une surface le flux de chaleur ramené à l'unité d'aire qui pré coule à travers un élément différentiel de surface situe autour de ce point.

La densité de flux est un vecteur qui caractérise la vitesse d'écoulement de la chaleur en point particulier.

$D = \frac{\Phi}{S}$ $dD = \frac{d\Phi}{dS}$

III. Le mécanisme de propagation de la chaleur :

1. La conduction :

Considérons par exemple un corps solide et à l'intérieur de ce solide deux points M_0 et M_1 dont les températures sont respectivement T_0 et T_1 tels que ($T_0 > T_1$). Il y'a propagation de la chaleur de M_2 vers M_1 par l'intermédiaire de tous les points du solide situées entre eux et tels que $\frac{dT}{dl} < 0$.

On dit que la chaleur est transmise par conduction. Ce type de transfert suppose l'immobilité du milieu mais il peut se développé dans un fluide en mouvement par référence à un repère mobile se déplaçant à la vitesse de ce fluide. La loi fondamentale de la conduction est la loi de Fourier

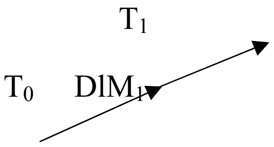
$d\Phi = -\lambda\, s \frac{dT}{dl} \longrightarrow dq = -\lambda \frac{dT}{dl}$ (loi de Fourier)

Et plus généralement la densité du flux $\vec{D} = -\lambda\, \overrightarrow{grad}\, T$

Le signe (-) : la propagation de la chaleur s'effectue dans le sens opposé du gradient de température.

λ : est la conductivité thermique.

λ en w/m °K ou kcal/hm °c ou Btu/hrft °F



M_0

2. La convection :

Le transfert de chaleur par convection est lié au mouvement des particules du milieu à travers lequel se propage la chaleur. Ce type de transfert ne peut donc se réaliser que dans un fluide. On distingue deux types de convection.

a- La convection naturelle ou le mouvement des particules est due au différence de température qui peut imposer au fluide.

Différence de température   différence de masse volumique (l). Exemple : chauffage de l'eau dans un bécher.

b- La convection naturelle ou le mouvement des particules résulte d'une différence de pression appliquée au fluide (par l'intermédiaire d'une pompe par exemple).

Dans tous les cas, le mouvement du fluide favorise l'intensité du transfert. La loi fondamentale de la convection est la loi de Menton

$d\Phi = h\, ds(T_{chaud} - T_{froid})$ h est le coefficient superficiel d'échange thermique.

h a pour unité (w/m^2 °k) ou ($kcal/hm^2$°c) ou ($Btu/hrft^2$ °F).

Remarque : h n'est pas une entité mesurable en soit même c'est l'aboutissement d'un calcul au préalable.

3- Le rayonnement :

Tous corps opaque ou partiellement opaqueporté à une température T > 0 °K rayonne de l'énergie dans toutes les directions, cette énergie est transportée sous forme d'une onde électromagnétique dont la propagation n'exige pas de support matériel. Ce rayonnement n'est pas chaud en lui-même mais lorsqu'il est absorbé par un corps opaque ou partiellement opaque, son énergie peut se transformer totalement ou partiellement en chaleur. La loi fondamentale du rayonnement est la loi de StephanBoltzman.

$d\Phi_{emis} = \sum \sigma\, T^4\, dS$

σ : est la constante de Stephan Boltzman.

$\sigma = 4.92 * 10^{-8}$ $kcal/hm^2 k^4$

∑ : l'émissivité de la surface.

T : sa température en °k

Et dS est la surface à travers laquelle s'effectue l'échange.

Contrairement aux autres mécanismes de propagation de la chaleur qui ne peuvent s'effectuer que dans un milieu matériel, le rayonnement s'effectue avec un maximum d'efficacité dans le vide. Ce pendant le problème de rayonnement sont généralement très complexe.

Chapitre 02 : condition dans les solides

I. Introduction :

La conduction dans les solides est couramment rencontrée dans la pratique (calorifugeage, des surface, transfert de chaleur à travers les tubes des échangeurs, dégagement de chaleur par effet joule dans les conducteurs, etc…).

Les équations de conduction dans les solides pourraient être obtenues à partir des équations générale toutefois ces équation sont considérablement simplifiées par l'immobilité du milieu.

II. Bilan d'énergie thermique et conditions limités :

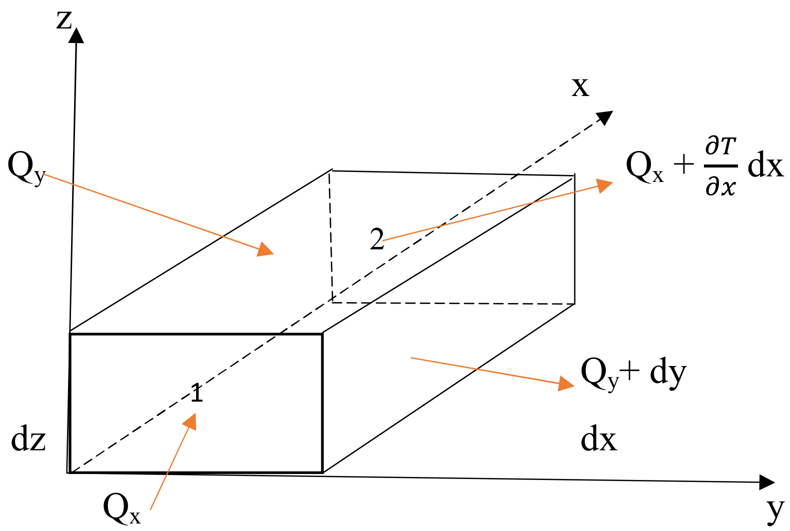
Considérons un élément de volume d'un matériel isotrope à travers lequel se propage de la chaleur par conduction.

Milieu isotrope : la conductivité thermique conserve la même valeur dans toutes les directions. De même on considère la masse volumique « l » est la C_p constante dans toute les directions.

Le bilan énergétique est limité au bilan thermique, il s'erraitsans la forme.

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Vitesse d'accumulation}\\ \text{d'énergie dans l'élément.}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\text{flux d'énergie thermique}\\ \text{entrant dans l'élément}\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{l}\text{flux d'énergie thermique}\\ \text{sortant de l'élément}\end{array}\right\}$$

$$+ \left\{\begin{array}{l}\text{débit de chaleur générée}\\ \text{dans l'élément}\end{array}\right\}$$



$$\Phi = -\lambda\, s\, \frac{dT}{dl} \Longrightarrow Q = -\lambda\, s\, \frac{dT}{dl}\, dt$$

Selon la direction des x.

- La quantité de chaleur entrant par (1) :
  $Q_x = -\lambda\, dy\, dz\, dt\, .\frac{\partial T}{\partial x}$
- La quantité de chaleur sortant par (2) :
  $Q_{x+dx} = -\lambda\, dy\, dz\, dt\, .\frac{\partial}{\partial x}(T + \frac{\partial T}{\partial x}\, dx)$
  $= -\lambda\, dy\, dz\, dt\, .\frac{\partial}{\partial x} - \lambda\, dydz\, dx\, dt.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$
- La quantitéd'énergie restante :
  $Q_x - Q_{x+dx} = \lambda\, dx\, dydzdt\, .\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \lambda\, dv\, dt\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

Selon la direction des y :

- $Q_y - Q_{y+dy} = \lambda\, dv\, dt\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$

Selon la direction des z :

- $Q_z - Q_{z+dz} = \lambda\, dv\, dt\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$
- ✓ On définit la quantité de chaleur restante Q_R dans la valeur dv :

$Q_R = \lambda \, dv \, dt \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$

On définit la quantité de chaleur produite Q_P :

Soit q la quantité de chaleur produite par unité de temps et par unité de volume.

$Q_p = q \, dt \, dv$

- Exemple :

- réaction chimique.

- dégradation d'énergie électrique par effet joule.

- ✓ L'accumulation Q_a est définit par :

$$Q_a = m \, C_p dT = C_p \, (\zeta \, dv) \, \frac{\partial T}{\partial t} \partial t = \zeta \, C_p \, dv \, dt \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$Q_{acc} = Q_{eut} - Q_{sar} + Q_{pro}$$

$$\zeta \, \cancel{C_p} \, \cancel{dv} \, dt \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \, \cancel{dv} \, \cancel{dt} \nabla^2 T + q \, dt \, \cancel{dv}$$

$$\frac{\zeta C p}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{q}{\lambda} + \nabla^2 T$$

On pose $\alpha = \frac{\lambda}{\zeta C p}$ α est appelée diffusivité thermique son unité est le m^2/s

$\boxed{\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{q}{\lambda} + \nabla^2 T}$ l'équation générale de la chaleur

L'intégration de cette équation donne la distribution du flux de chaleur (ou de la densité du flux).

Une deuxième intégration permet d'obtenir la distribution des températures.

Les constantes d'intégration sont déterminées en vérifiant les conditions aux limites. Les types les plus courants de condition limites sont les suivants :

- ✓ Spécification de la température sur une face (condition de Dirichlet).
- ✓ Spécification du flux de chaleur à travers une face, ceci revient à imposer le gradient de température sur cette face (condition de Newman).
- ✓ Spécification de la température du milieu fluide en contact avec la surface. La densité de flux à travers la surface est alors donnée par :
  $D = h(O_{surface} - O_{fluide})$. (Condition mixte ou de Fourier)

III. Cas particulier :

1- Milieu avec source interne en régime permanent, l'équation devient :

$\boxed{\frac{q}{\lambda} + \nabla^2 T = 0}$ équation de poisson.

2- Milieu sans source interne en régime permanant :

$\boxed{\nabla^2 T = 0}$ équation de Haplace

3- Milieu sans source interne en régime variable :

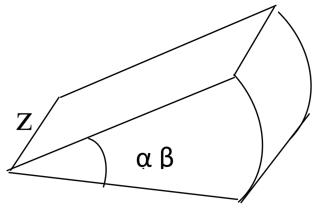
$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T$ équation de Fourier

On peut voir que le terme accumulation est responsable du régime.

IV. Expression de l'équation générale de la chaleur en différent coordonnées.

1- Coordonnées cylindriques :

x= r cos β
y= r sin β
z=Z



$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} . \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} . \frac{\partial^2 T}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q}{\lambda} = \frac{1}{\propto} . \frac{\partial T}{\partial r}$$

2- Coordonnées sphérique :

X= r sin β cosρ
Y=r sin β sin ρ
Z= r cos β

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} . \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \beta} . \frac{\partial}{\partial \beta} (\sin \beta . \frac{\partial T}{\partial \beta}) + \frac{1}{r^2 sin^2 \beta} . \frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} + \frac{q}{\lambda} = \frac{1}{\propto} . \frac{\partial T}{\partial r}$$

3- Cas d'un élément non isotrope :

$$\zeta \, C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(\lambda \, \nabla T) = q + \nabla\lambda \, \nabla T + \lambda \, {}^2 T \quad \nabla$$

Chapitre 03 : conduction dans les solides en régime permanant

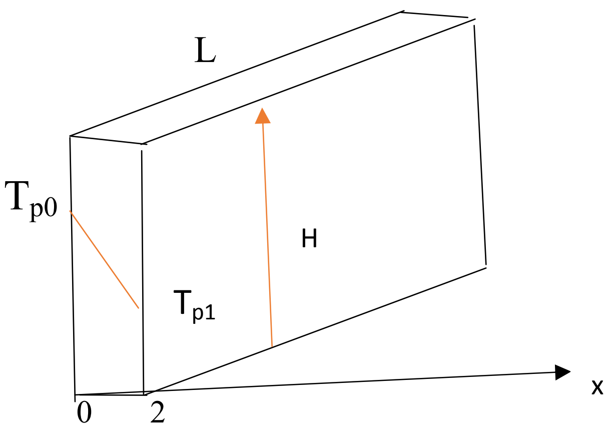
Rappel : $\frac{q}{\lambda} + \nabla^2 T = 0$ équation de poisson.

I- Conduction dans les murs ou plaques sans génération de chaleur.

1- Mur simple :

On appel mur simple un matériau limité par deux plans parallèles de grande dimension par rapport à leur distance.

Soit S l'aire du face du mur et e l'épaisseur. Supposons que les faces sont respectivement aux températures T_{p0} et T_{p1}.



L et H >> e

Les surfaces isothermesont des plans parallèle aux faces et la chaleur se propage donc perpendiculairement aux faces (direction de x).

$$\frac{q}{\lambda} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \begin{cases} T = T_{p0} \text{ pour } x = 0 \\ T = T_{p1} \text{ pour } x = 0 \end{cases}$$

Une 1 ère intégration

$\frac{dT}{dx} = A$ Une 2ème intégration

T = Ax+B

Pour x = 0 : $T = B = T_{P0}$

Pour x = e : $A.e + T_{P0} = T_{P1} \Longrightarrow A = \frac{Tp1 - tp0}{e}$ A est négative.

$T=\frac{Tp1-tp0}{e}\,x+T_{p0} \Longrightarrow T=-\frac{(Tp0-tp01)}{e}\,x+T_{p0}$

$\Phi=-\lambda\, s\,\frac{dT}{dx}=\lambda\, s\,\frac{Tp1-tp0}{e}=\frac{Tp1-tp0}{\frac{e}{\lambda s}}\,x+T_{p0}=\frac{\Delta T}{R}$

Avec $R=\frac{e}{\lambda s}$ R est appelée résistance thermique du mur par analogie thermo électrique

$\text{Flux}=\frac{potentiel}{résistance} \Longrightarrow \Phi=\frac{\Delta T}{R}$

I flux de courant

D'après la loi d'Ohm $I=\frac{\Delta v}{Relee}$

$R_{elee}=\zeta\frac{L}{S}$

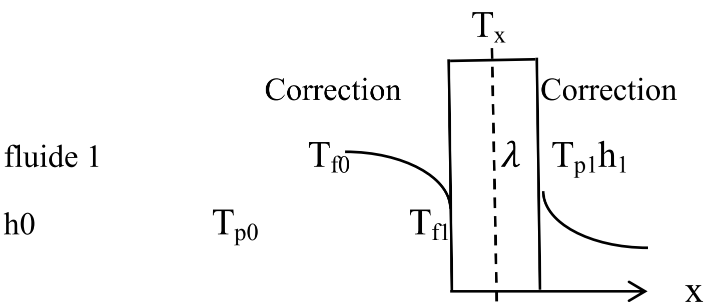
L: la langueur conducteur cares pond à e : l'épaisseur de

ζ : résistivité électrique correspond à $\frac{1}{\lambda}$ résistivité thermique.

S : l'aire de la section droite du matrice correspondant à une équipotentiel.

2- *Mur simple en contrat avec deux fluides:*

Si on choisis comme condition aux limites non plus les températures T_{p0} et T_{p1} des faces du mur, mais celle T_{f0} et T_{f1} des miles fluides ambiants baignant respectivement la face une et deux de notre mur, on est amené à considérer le flux transmis à travers chacune des faces.



soient T_{f0} et T_{f1} les températures respectifs des fluides chauds et f0 et h0, h1 leurs coefficient superficiels respectifs.

- Flux de chaleur cédé par le fluide chauds.

$$\phi=hs\left(T_{f0}-T_{p0}\right)=\frac{T_{f0}-T_{p0}}{\frac{1}{h_0 s}}$$

$$\phi=\frac{T_{f0}-T_{p0}}{R_{f0}}$$

- Le flux traversant la paroi :

$$\phi = \frac{T_{p0} - T_{p1}}{\frac{e}{\lambda s}}$$

$$\phi = \frac{T_{p0} - T_{p1}}{R}$$

- Le flux gagné par le fluide froid :

$$\phi = \frac{T_{p1} - T_{f1}}{\frac{1}{h_1 s}} = \frac{T_{p1} - T_{f1}}{R_{f1}}$$

Conservation d'énergie calorifique (pas d'accumulation ni de source).

$$\phi = \frac{T_{f0} - T_{p0}}{R_{f0}} = \frac{T_{p0} - T_{p1}}{R} = \frac{T_{p1} - T_{f1}}{R_{f1}}$$

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_3}{B_3} = \frac{A_1 + A_2 + A_3}{B_1 + B_2 + B_3}$$

$$\phi = \frac{T_{f0} - T_{p0} + T_{p0} - T_{p1} + T_{p1} - T_{f1}}{R_{f0} + R + R_{f1}} = \frac{T_{f0} - T_{f1}}{R_{f0} + R + R_{f1}}$$

On remarque l'additivité des résistances thermiques en série par analogie thermoélectrique.

$$\phi = \frac{T_{f0} - T_x}{\frac{1}{h_0 s} + \frac{x}{\lambda s}} \Longrightarrow T_{f0} - T_x = (\frac{1}{h_1 s} + \frac{x}{\lambda s})\phi$$

$$T_x = T_{f0} - (R_{f0} + R_x)\frac{T_{f0} - T_{f1}}{R_{f0} + R + R_{f1}}$$

3- *Mur composite en contact avec deux fluides :*

On appel mur composite, la juxta position de plusieurs murs simples constitues de matériaux différents limités par des plans parcelles et un contacte parfait les uns avec les autres.

Considérons par exemple plusieurs composites formés par la juxta position de « n ».

Murs simples d'épaisseurs respectives « e_i » et de conductivités thermiques respectives (supposés indépendantes de température).

En utilisant le même raisonnement que précédemment on aura :

$$\phi = \frac{T_{f0} - T_{f1}}{R_{f0} + \sum_{i=1}^{n} Ri + R_{f1}}$$

$$Ri = \frac{e_i}{\lambda_i S}$$

$$R_{f0} = \frac{1}{h_0 S}$$

$$R_{f1} = \frac{1}{h_1 S}$$

Remarque : plus on augmente le nombre de résistances thermiques plus le flux diminue.

$$\boxed{T_x = T_{f0} - (R_{f0} + \sum_{i=1}^{n} R_i + \frac{x}{\lambda_m S}) \frac{T_{f0} - T_{f1}}{R_{f0} + \sum_{i=1}^{n} Ri + R_{f1}}}$$

4- *Cas ou la conductivité thermique dépend de la température :*

Prenais à nouveau l'exemple du mur simple considéré dans le paragraphe I.1, on supposons que la conductivité thermique du matériaux varie avec la température suivant la loi $\lambda = \lambda_0(1 + aT)$. Dans le cas d'un régime permanent sans flux de production de chaleur.

Le flux entrant est égal aux flux sortant.

$$\frac{d\phi_x}{dx} = \phi_{x+dx} - \phi_x = 0 \quad \Longrightarrow \quad \phi = A$$

$$\phi = -\lambda_0 S\,(1 + aT)\frac{dT}{dx} = A$$

L'intégration de cette équation aboutit.

$$(1 + aT)\frac{dT}{dx} = \frac{-A}{\lambda_0 S} \Longrightarrow \int(1 + aT)dT = \int \frac{-A}{\lambda_0 S} dx$$

$$\Longrightarrow T + \frac{a}{2}T^2 = \frac{-A}{\lambda_0 S} x + B$$

$$x = 0 \Longrightarrow T = T_{p0} \Longrightarrow T_{p0} + \frac{a}{2}(T_{p0})^2 = B$$

$$x = e \Longrightarrow T = T_{p1} \Longrightarrow T_{p1} + \frac{a}{2}(T_{p1})^2 = \frac{-A}{\lambda_0 S} e + B$$

$$A = \frac{\lambda_0 S}{e}\left(T_{p0} - T_{p1}\right)\left[1 + a\frac{T_{p0} + T_{p1}}{2}\right]$$

$$\phi = A = \lambda_0 \left[1 + a\frac{T_{p0} + T_{p1}}{2}\right] S \frac{T_{p0} + T_{p1}}{e}$$

$\lambda_0 \left[1 + a\frac{T_{p0}+T_{p1}}{2}\right]$n'est autre que la conductivité thermique λ_m du matériaux prises à la température moyenne $\frac{T_{p0}+T_{p1}}{2}$,ainsi on peut écrire :

$\phi = \lambda_m\, S\frac{T_{p0}+T_{p1}}{e}$vous pouvez ainsi en déduire la densité des flux $D = \lambda_m\, S\frac{T_{p0}+T_{p1}}{e}$

Le profit de température peut être déterminé à partir de l'équation suivante pour $x = x$ et $T = T$ alors $T + \frac{a}{2}T^2 = \frac{-A}{\lambda_0 S}x + B$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\frac{-x}{e} = \frac{\left(T - T_{p1}\right)\left[1 + \frac{a}{2}(T + T_{p0})\right]}{\left(T_{p0} - T_{p1}\right)\left[1 + \frac{a}{2}(T_{p0} + T_{p1})\right]}}$$

II- Conductions dans les couches cylindriques sans génération de chaleur :

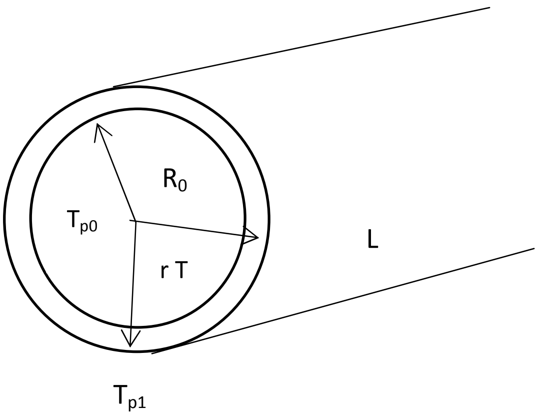
1- Couche cylindrique simple :

Considérons une couche d'un matériau solide limité par deux surfaces cylindriques coaxiales de rayons respectifs r_0 et r_1 et de longueur L supposée

très grande par rapport a r_1 ($L >> r_1$)

Soit T_{p0} et T_{p1} les températures des deux surfaces $\left(T_{p0} > T_{p1} par\ exemple\right)$

Supposons la conductivité thermique indépendante de la température par raison de symétrie, les surfaces isothermes sont des surfaces cylindriques Coaxiales.



$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} + \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q}{\lambda} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial \beta} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} + \frac{\partial T}{\partial r}$$

$$\begin{cases} T = T_{p0} \text{ pour } r = r_0 \\ T = T_{p1} \text{ pour } r = r_1 \end{cases}$$

On pose $\frac{dT}{dr} = U \Longrightarrow \frac{dU}{dr} + \frac{U}{r} = 0$on multiple $\frac{dr}{U} \Longrightarrow \frac{dU}{U} + \frac{dr}{r} = 0$

$\Longrightarrow Ln\, U + Ln\, r = A' \Longrightarrow Ur = A$

Donc $\frac{dT}{dr} r = A \Longrightarrow dT = A\frac{dr}{r} \Longrightarrow T = A\, ln\, r + B$

$T = T_{p0} = A \ln r_0 + B$

$T = T_{p1} = A \ln r_1 + B$

$\Rightarrow A = \dfrac{T_{p0} - T_{p1}}{ln\frac{r_0}{r_1}}\ et\ B = \dfrac{T_{p0}\ ln\, r_1 - T_{p1}\ ln\, r_0}{ln\frac{r_0}{r_1}}$

$T = A \ln r + B \qquad \Longrightarrow T_{p0} = A \ln r_0 + B \qquad \Rightarrow B = T_{p0} - A \ln r_0$

$T = A \ln r + (T_{p0} - A \ln r_0)$

$$T = T_{p0} + A \ln \frac{r}{r_0} \Longrightarrow \boxed{T = T_{p0} + \frac{T_{p0} - T_{p1}}{\ln\frac{r_0}{r_1}} \ln \frac{r}{r_0}}$$

La densité du flux de chaleur :

$D_r = \dfrac{\phi}{S} = -\lambda \dfrac{dT}{dr} \quad avec\ \ S = 2\pi r L$

$\dfrac{dT}{dr} = \dfrac{A}{r} \Longrightarrow D_r = \lambda \dfrac{T_{p0} - T_{p1}}{\ln\frac{r_1}{r_0}} . \dfrac{1}{r}$

$\phi = -\lambda\, s\, \dfrac{dT}{dr} = -\lambda\, 2\, \pi\, r\, L\, A$

$$\Longrightarrow \boxed{\phi = 2\,\pi\, L\, \lambda \frac{T_{p0} - T_{p1}}{\ln\frac{r_1}{r_0}}}$$

Remarque : nous venons de calculer le flux ϕ à travers une surface de rayon r et l'équation ne dépend de r.

$$\phi = \frac{T_{p0} - T_{p1}}{\frac{ln\frac{r_0}{r_1}}{2\,\pi\, L\, \lambda}}$$

Le terme $\frac{ln\frac{r_0}{r_1}}{2\,\pi\, L\,\lambda}$ exprime la résistance thermique de la couche cylindrique.

Peut-on exprimer ce flux par une forme analogue à celle des mur plan CAD.

$$\phi = \lambda\, Seq\,\frac{T_{p0}-T_{p1}}{e} \text{avec } e = r_1 - r_0$$

Posons Seq comme étant la moyenne logarithmique des aires de surface S_0 et S_1

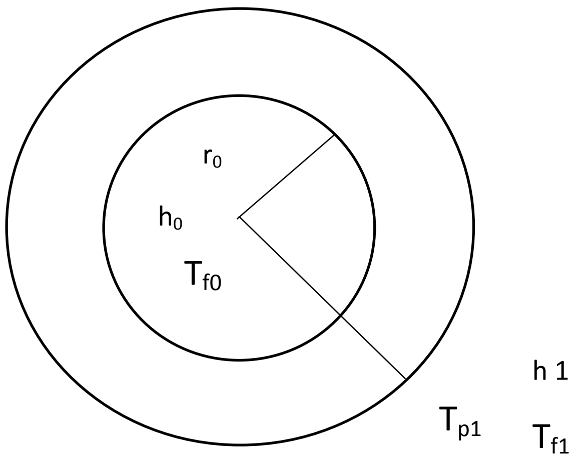
$$S = \frac{S_1 - S_0}{\ln\frac{S_1}{S_0}} \quad avec \quad S_1 = 2\,\pi\, r_1\, L \quad et\, S_0 = 2\,\pi\, r_0\, L$$

$$Seq = \frac{2\,\pi\, L(r_1 - r_0)}{\ln\frac{2\,\pi\, r_1\, L}{2\,\pi\, r_0\, L}} = \frac{2\,\pi\, L\, e}{ln\frac{r_1}{r_0}} \Rightarrow \frac{2\,\pi\, L}{ln\frac{r_1}{r_0}} = \frac{Seq}{e}$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{T_{p0} - T_{p1}}{\frac{ln\frac{r_0}{r_1}}{2\,\pi\, L\,\lambda}} = \frac{T_{p0} - T_{p1}}{\frac{e}{\lambda\, Seq}}$$

Ou $\frac{e}{\lambda\, Seq}$ exprime aussi la résistance thermique de la couche cylindrique.

2- *Couche cylindrique simple en contact avec deux fluides*



Si l'on impose comme conditions aux limites les températures des milieux ambiants saignants les surfaces de la couche cylindrique on pourra écrire par suite de l'additivité des résistances thermiques en série.

$$\boxed{\phi = \frac{T_{f0} - T_{f1}}{\frac{1}{h_0 S_0} + \frac{\ln\frac{r_1}{r_0}}{2\,\pi\, L\,\lambda} + \frac{1}{h_1 S_1}} = \frac{T_{f0} - T_{f1}}{\frac{1}{h_0 S_0} + \frac{e}{\lambda\, Seq} + \frac{1}{h_1 S_1}} = \frac{2\,\pi\, L\,(T_{f0} - T_{f1})}{\frac{1}{h_0 r_0} + \frac{ln\frac{r_1}{r_0}}{\lambda} + \frac{1}{h_1 r_1}}}$$

3- *Couche cylindrique composite en contact avec deux fluides :*

Considérons une couche cylindrique fermée par la juxtaposition de « n » couches élémentaires de matériaux de conductivités thermiques respectives $\lambda_1, \lambda_2, \dots . \lambda_n$et dont les faces internes et externes sont en contact de milieux ambiants de températures respectives T_{f0}et T_{f1}.

$$\boxed{\phi = \frac{2\,\pi\,L\,(T_{f0} - T_{f1})}{\frac{1}{h_0 r_0} + \sum_{i=1}^{n} \frac{ln\frac{r_i}{r_{i-1}}}{\lambda_i} + \frac{1}{h_1 r_1}}}$$

r_0, r_1,…..$r_n$étant les rayons des faces ou interfaces successives à titre d'exercice donné l'expression de la température.

4- *Calorifugeage des surfaces et épaisseur critique d'un calorifuge :*

On pourrait penser qu'il suffit de recouvrir une surface par une couche de matériau peu conducteur pour réduire les pertes thermiques et que plus l'épaisseur du revêtement est importante, plus les pertes sont faibles. Ceci est exact pour des surfaces planes mais ne l'est pas toujours pour des surfaces courbes.

Considérons par exemple le cas d'une couche cylindrique dont les surfaces internes et externes baignent dans deux fluides de températures respectives T_{f0} et T_{f1} avec ($T_{f0}>T_{f1}$).

$$\phi = \frac{2\,\pi\,L\,(T_{f0} - T_{f1})}{\frac{1}{h_0 r_0} + \frac{ln\frac{r_1}{r_0}}{\lambda} + \frac{1}{h_1 r_1}}$$

Plaçons autour de la surface externe une couche de calorifuge de conductivité thermique λ_c(supposée indépendante de la température) et d'épaisseur 'e'.

Posons $r = r_1 + e$

En admettant que le coefficient superficiel d'échange entre le calorifuge et le milieu ambiant reste égal à h1, le flux de chaleur qui se propage à travers la surface est :

$$\phi = \frac{2\,\pi\,L\,(T_{f0} - T_{f1})}{\frac{1}{h_0 r_0} + \frac{ln\frac{r_1}{r_0}}{\lambda} + \frac{ln\frac{r}{r_2}}{\lambda_c} + \frac{1}{h_2 r}}$$

Examinons les variations du flux ϕ avec l'épaisseur 'e' de calorifuge ou encore avec le rayon externe 'r' de la couche de calorifuge ϕ varie comme l'inverse de la résistance thermique totale.

$$R_{total} = \frac{1}{2\,\pi\,L\,r_0 h_0} + \frac{ln\frac{r_1}{r_0}}{2\,\pi\,L\lambda_0} + \frac{ln\frac{r_1}{r_0}}{2\,\pi\,L\lambda_c} + \frac{1}{2\,\pi\,L\,r\,h_1}$$

En dérivant par rapport à 'r' on peut écrire :

$$\frac{dR_{total}}{dr} = \frac{1}{2\,\pi\,L}\left(\frac{1}{\lambda_c r} - \frac{1}{h_1 r^2}\right) = \frac{1}{2\,\pi\,L}\left(\frac{h_1 r - \lambda_c}{h_1 \lambda_c . r^2}\right)$$

$\frac{dR_{total}}{dr}$ S'annule donc pour la valeur $r = r_0 = \frac{\lambda_c}{h_1}$du rayon.

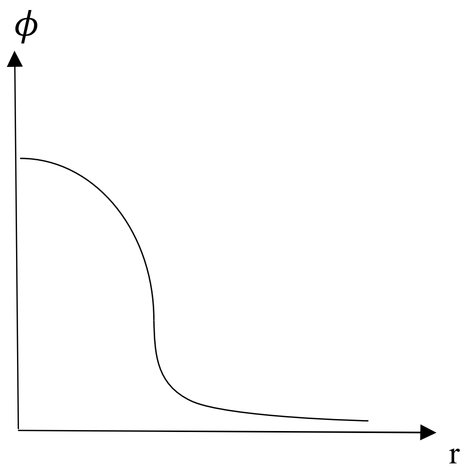
r_c est appelé rayon critique du calorifuge. Il lui correspond une valeur critique. Il lui correspond une valeur critique$e_c = r_c - r_1$de l'épaisseur de calorifuge.

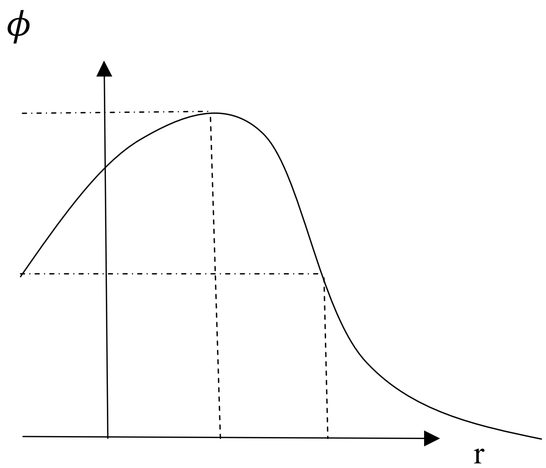
Nous allons maintenant examiner l’évolution du flux de fonction du rayon.

	$r < r_c$	$r = r_c$	$r > r_c$
$\frac{dR_{total}}{dr}$	-	$\boxed{0}$	+
R_{total}	↘		↗
ϕ	↗		↘

ϕvarie comme l’inverse de la résistance totale.

Examinons alors le problème dans la pratique, on doit distinguer deux cas





dans ce cas le flux thermique ϕaugmente avec l’épaisseur du calorifuge jusqu’à ce que e = e_c puis diminue lorsque e>e_c.

le calorifuge se devient efficace que si son épaisseur est supérieur à l’épaisseur e = e* pour laquelle ϕretrouve la valeur ϕ_0.

Seul le premier cas est intéressant, dans la pratique la conductivité thermique d’un calorifuge efficace doit donc être telle que r1 >$\frac{\lambda_c}{h_1}$ soit $\lambda_c < h_1\, r_1$

L’efficacité d’un isolant s’exprime.

$$\xi\ cal = \frac{\phi\ sans\ isolation - \phi\ avec\ isolation}{\phi\ sans\ isolation}$$

5- *Cas ou la conductivité thermique varie avec la température :*

Reprenons l'exemple traité au paragraphe (III/1) et supposons que la conductivité thermique λ du matériau varie avec la température suivant la loi $\lambda = \lambda_0(1 + aT)$

On se propose de calculer le flux de chaleur qui traverse la couche en régime permanent et de déterminer le profit de température dans cette couche.

$$\phi = -\lambda\, s\, \frac{dt}{dr} = A$$

$$\phi = -\lambda_0(1 + aT)\, 2\pi\, r\, L\, \frac{dT}{dr} = A$$

$$(1 + aT)dT = \frac{-A}{2\pi\lambda_0 L}\frac{dr}{r}$$

$$T + \frac{a}{2}T^2 = \frac{-A}{2\pi\lambda_0 L}\ln r + B$$

Les constantes A et B peuvent être déterminées en explicitant la condition limites

r = r0 et T=Tp0 $\quad T_{p0} + \frac{a}{2}T_{p0}^2 = \frac{-A}{2\pi\lambda_0 L}\ln r_0 + B$

r = r1 et T=Tp1 $\quad T_{p1} + \frac{a}{2}T_{p1}^2 = \frac{-A}{2\pi\lambda_0 L}\ln r_1 + B$

d'où l'on tire :

$$A = \frac{2\pi\lambda_0 L\left(T_{p0} - T_{p1}\right) + \frac{a}{2}\left(T_{p0}^2 - T_{p1}^2\right)}{\ln\frac{r_1}{r_0}}$$

Il vient alors :

$$\phi = 2\pi\lambda_0 L\left(1 + a\frac{T_{p0} + T_{p1}}{2}\right)\frac{T_{p0} - T_{p1}}{\ln\frac{r_1}{r_0}}$$

Soit on pose

$$\lambda_m = \lambda_0(1 + a\frac{T_{p0} + T_{p1}}{2})$$

$$\phi = 2\pi\lambda_m L\, \frac{T_{p0} - T_{p1}}{\ln\frac{r_1}{r_0}}$$

Pour le profit de température

$$\frac{T - T_{p0}}{T_{p1} - T_{p0}}\frac{1 + \frac{a}{2}(T + T_{p0})}{1 + \frac{a}{2}(T_{p1} + T_{p0})} = \frac{\ln r - ln\, r_0}{\ln r_1 - ln\, r_0}$$

III- Conduction dans les couches sphériques sans génération de chaleur :

Considérons une couche de matériau solide limitée par deux surfaces sphérique concentrique de rayons respectifs r0 et r1 dont les températures sont respectivement tp0 et tp1. Supposons ƛ la conductivité thermique de matériau indépendant de la température.

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dT}{dr} = 0$$

$$T = T_{p0} \; pour \; r = r_0$$

$$T = T_{p1} \; pour \; r = r_1$$

- On pose $U = \frac{dT}{dr}$

$$\frac{dU}{dr} + \frac{2}{r}U = 0$$

$$\frac{dU}{U} + 2\frac{dr}{r} = 0 \qquad \ggg \qquad \ln U + 2\ln r = A'$$

$$Ur^2 = A \quad \ggg \quad \frac{dT}{dr}r^2 = A \quad \ggg \quad dT = A\frac{dr}{r^2}$$

$$T = \frac{-A}{r} + B$$

$$\boxed{A = \frac{T_{p0} - T_{p1}}{(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0})} = \frac{r_0 r_1}{r_0 - r_1}(T_{p0} - T_{p1})}$$

$$\boxed{B = \frac{r_1\, T_{p1} - r_0\, T_{p0}}{r_1 - r_0}}$$

$$\frac{-A}{r} + B \; et \; B = T_{p0} + \frac{A}{r_0}$$

$$= A\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) + T_{p0}$$

$$\boxed{T = T_{p0} - \frac{\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}}(T_{p0} - T_{p1})}$$

$$\phi = -\lambda\, s\, \frac{dt}{dr} \quad avec \quad S = 4\pi r^2 \; et \; \frac{dT}{dr} = \frac{A}{r^2}$$

$$\phi = -\lambda\, 4\pi r^2 \frac{A}{r^2} \quad \ggg \quad \boxed{\phi = -\lambda\, 4\pi r^2 \frac{r_0\, r_1}{r_1 - r_0}(T_{p0} - T_{p1})}$$

Remarque : l'expression du flux peut se mettre sous la forme :

$$\phi = -\lambda\, Seq\, \frac{T_{p0} - T_{p1}}{e}$$

$$Seq = (S_0 S_1)^{\frac{1}{2}} \quad avec \quad S_0 = 4\pi\, r_0^2 \; et \; S_1 = 4\pi\, r_1^2 \quad e = r_1 - r_0$$

$$R = \frac{r_1 - r_0}{4\pi\lambda r_0 r_1} = \frac{e}{\lambda\, Seq}$$

Exprime la résistance thermique d'une couche sphérique.

$$D_r = \frac{\phi}{S} = \lambda \frac{r_0 r_1}{(r_1 - r_0)r^2}\,(T_{p0} - T_{p1})$$

En utilisant des méthodes analogues, on peut déduire des résultats semblables à ceux obtenus dans les paragraphe 2,3,4 et 5. On notera toutefois que le rayon critique d'un calorifuge sphérique est $r_e = \frac{2\lambda_c}{h_1}$

Si on considère l'exemple de la couche sphérique composite en contact avec deux fluides.

$$\Phi = \frac{T_{f0} - T_{f1}}{R_{f0} + \sum_{i=1}^{n} R + R_{f1}}$$

$$R_{f0} = \frac{T_{f0} - T_{f1}}{4\pi h_0 r_0^2},\ R_{f1} = \frac{1}{4\pi h_1 r_n^2}, R_{f0} = \frac{r_1 - r_{i-1}}{4\pi h_i r_1 r_{i-1}},$$

IV- <u>motion de surface exivaleur</u>

1* paroi plane

$\Phi = \frac{\lambda s}{e}\ (T_{p0} - Tp_1)\ et\ s\ zt\ constonts$

2* paroi cylindrique

$\Phi = \frac{\lambda s_{eq}}{e}\ (T_{p0} - Tp_1)$ avec $s_{eq} = \frac{s_1 - s_0}{Ln\frac{s_1}{s_0}}$ s vraie entre s_0 et s_1 se l'on la loi

S=2 π rl

S est proportionnel à r (s ,kr)

3*paroi sphérique

$\Phi = \frac{\lambda\, s_{eq}}{e}\ (T_{p0} - Tp_1)$ avec $s_{eq} = \sqrt{s_0} s_1$ s vraie entre s_0 et s_1 se l'on la loi

S=4 π r²

S est proportionnel à r (s ,kr²)

Exemple un cone en fer de conductivité $\lambda = 45$ x=0 $T_p = 60°C$

X=H=8cm $T_1 = 30°c$ $D_1 = 4cm$ $D_2 = 9cm$ calculer le Φ ?

$\Phi = \lambda s_{eq} \frac{T_C - T_1}{e}$

Il fau connaitre comment évolue la surface du Coué entre $s_0 et\ s_1$

$$s_0 = \pi r^2{}_0$$

$$s_{1=}\pi r^2{}_1$$

S vraie en r² par se quant on applique la loi d'une

$\Phi = \lambda\sqrt{s_0}s_1 \frac{T_0 - T_1}{e} = \lambda\pi r_0 r_1 \frac{T_0 - T_1}{H}$

Φ=47.7 kcul/h

V- exemple de propagation de chaleur avec génération d'énergie thermique

Considérons un fil électrique de sèchent cimentaire de rayon R et de conductivité électrique que vie a travers lequel passe au constant d'intenté

Il y a génération de chaleur à l'intérieur du fil et la puissance thermique générée par unité de volume :

$q = \frac{1}{k_e}\frac{I^2}{S^2} \quad q = \frac{RI^2}{SL} = \left(\frac{1}{k_e}\frac{L}{S}I^2\right) / \ sl$

L étant la longueur du fil et S sa section droite (s= πR²) on suppose se que l'évasion de la température dans le fil n'a pas d'influence sur sa conductivité électriquek_e et sa conductivité thermique λ et que la surface extérieure du fil est maintienneà la température T_0 l'équation de la chaleur s'écrit

$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} + \frac{q}{N} = 0$

$r\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} = - + \frac{q}{N}r$

$\int \frac{d}{dr}\left(r + \frac{dT}{dr}\right) = -\frac{q}{N}$

$r\frac{dt}{dr} = -\frac{q}{2N}r^2 + B\ \frac{dT}{d}$

$T = \frac{-q}{4\lambda}r^2 + BL_{nr} \ \ + c$

Les constantes d'intégration B et C peuvent être déterminées en écrivant les conditions limités suivantes :

- la températures a nécessairement une valeur finie en tout point du conducteur (r=0 n'est pas défini car ln $r \longrightarrow \ -\infty$

le profit radial de températures dans le fil est donc donné par l'équation :

$T = \frac{-q}{\pi}r^2 + BL_{nr} + c$

Les constantes d'intégrations B et c peuvent être déterminée écrivant les conditions limites suivantes.

1-la température nécessaire entent une valeur finie entant point du conducteur (or r=0 T n'est pas défini cardeur -∞ B=0 $\longrightarrow$

2- r=R $\longrightarrow$ T=T_0 et $T_0 = \frac{-q}{4\lambda}R^2 + c$ $\quad c = T_0 + \frac{q}{4\lambda}R^2$

Le profil radial de température dans le fil est donc donné par l'équation

T= $T_0 + \frac{q}{4\lambda}R^2(1 - \frac{r^2}{R^2})$

La température est raciale sur l'axe et sa valeur est

$$T_{max} = T_0 + \frac{q}{4\lambda}R^2$$

La température moyenne par une sanction droite du fil est

$$T_{moy} = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R 2\pi r T dr = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R 2\pi r(\frac{-q}{4\lambda}r^2 + \frac{q}{4\lambda}R^2 + T_0)dr$$

$$T_{moy} = \frac{1}{R^2}[\frac{-q}{8\lambda}r^4 + \frac{qR^2r^2}{4\lambda} + T_0r^2]$$

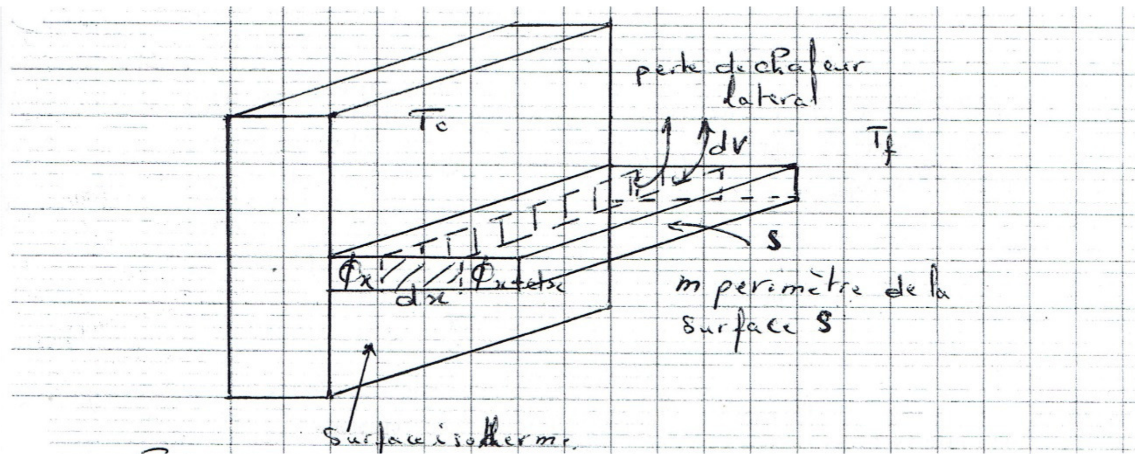
$$T_{moy} = \frac{1}{R^2}[\frac{-qR^4}{8\lambda} + \frac{qR^4}{4\lambda} + T_0r^2]$$

$$T_{moy} = T_0 + \frac{qR^2}{8\lambda}$$

VI- Conduction dans les surfaces alitées sans génération de chaleur

Considérons une barre conduction son forme d'une parallepipade

De section droit s et de longueur L , reliée par la base à un mur dont la surface est à la température T_0 nous supposons que la section droit de la barre est assez petite pour que lourd puisse considérer la température comme uniforme dans chaque section droite .cette barra se trouve dans un milieu ambiant de température T_f et le coefficient superficiel d'échange entre la surface latérale de la barre et le milieu ambiant est h



Bilan

$$\varphi_{entrant} = \varphi_{sortant}$$

$\varphi_x = \varphi_{x+dx} + \varphi_{lateral}$ $\quad \varphi_x - \varphi_{x+dx} - \varphi_{lateral}$=0 –λs$\frac{dt}{dx} - \left[-\lambda s\frac{d}{dx}\left(T + \frac{dT}{dx}dx\right) - hmdx\left(T - T_f\right)\right]$=0

λs$\frac{d^2T}{dx^2}dx - hmdx\left(T - T_f\right) = 0$ $\quad$ / λsdx

$\Rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hm}{\lambda s}\left(T - T_f\right) = 0$

On pose $k^2 = \frac{hm}{\lambda s}$ et $T^2 = T - \left(T - T_f\right)$

L'équation devient $\frac{d^2T}{dx^2} - k^2\, T * = 0$

La résolution de cette équation différente peut s'écrire sous la forme $T^* = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}$ ou bien T*= A ch kx + B sh kx

Condition aux limites

Pour x=0 ⇒ T=T*

Pour la se coude condition aux limites ou penta voire plusieurs cas listings, on en citera que trois

a- <u>Cas d'une barre de longueur infini</u>

X=0 ⇒T*= $T_0^* + T_0 - T_f$ quand x $\longrightarrow \infty \Rightarrow$ T=$T_f \Rightarrow T_0 - T_f \Rightarrow c_1 = 0$

X=0 ⇒ T*=$c_2 \Rightarrow$T*=$T_0 e^{-kx}$ la solution démontre équation devient

$\Rightarrow T - T_f = \left(T_0 - T_f\right) e^{-kx}$

Ou $\frac{T-T_f}{T_0-T_f} = e^{-kx}$ solution de notre problème ou pose $T_{Ad} = \frac{T-T_f}{T_0-T_f}$ T_{Ad}est une température adimensionnelle

b- <u>Cas d'une barre très logue</u>

Conditions aux limites

X=0 ⇒T= $T_0 \Rightarrow$ T*= $T_0^* = T_0 - T_f$

X=L T=$T_f \Rightarrow$ T*=0

X=0 $\Rightarrow T_0^* = c_1 + c_2$

X=L ⇒ T*=$c_1 e^{kl} + c_2 e^{-kl} = 0$

$\Rightarrow c_2 = T * \frac{e^{kl}}{e^{kl} - e^{-kl}}$ et $c_1 = \frac{e^{-kl} e^{kx}}{e^{kl} - e^{-kl}} + T_0^* \frac{e^{-kl} e^{kx}}{e^{kl} - e^{-kl}}$

T*=$T_0^* \frac{e^{-k(l-x)} - e^{-k(L-x)}}{e^{kl} - e^{-kl}} = T_0^* \frac{shk(L-x)}{shkL}$

⇒T- $T_f = (T_0 - T_f)\frac{shk(L-x)}{shkL}$ c'est l'équation de répartition de la température dans l'ailette

$$T_{Ad} = \frac{T - T_f}{T_0 - T_f} = \frac{shk(L - x)}{shkL}$$

c- <u>Cas d'une barre courte</u>

Les conditions aux limites

X=0 ⇒T= $T_0 \Rightarrow$ T*= T_0^*

X=L T=$T_f \Rightarrow T_L \neq T_f$

- Il faut donc penser aux flux à l'extrémité de l'ailette

$\Rightarrow -\lambda s \frac{dT}{dx} = hs\,(T_{lx=L} - T_f)$ $\Rightarrow -\lambda s \frac{dT*}{dx} = hsT*$

X=0 $\quad T_0^* = c_1 + c_2$

X=L $-\lambda(c_1 k e^{kl} - c_2\, e^{-kl}) = h\,(c_1 e^{kl} - c_2\, e^{-kl})$

$$C1= -T_0^* \frac{e^{-kl}(1-\frac{\lambda k)}{h}}{e^{kl}(1+\frac{\lambda k}{h})-e^{-kl}(1-\frac{\lambda k}{h})}$$

$$C2= T_0^* \frac{e^{kl}(1+\frac{\lambda k)}{h}}{e^{kl}(1+\frac{\lambda k}{h})-e^{-kl}(1-\frac{\lambda k}{h})}$$

$$T^* = T0^* \ \frac{\left(1+\frac{\lambda k}{h}\right)e^{k(l-x)}-(1-\frac{\lambda k)}{h}\ e^{-k(l-x)}}{\left(1+\frac{\lambda k}{h}\right)e^{kl}-(1-\frac{\lambda k}{h})e^{-kl}}$$

$$T-Tf=(T0-Tf)\frac{sh[k(l-x)]+\frac{\lambda k}{h}ch\ [k(l-x)]}{sh\ kl+\frac{\lambda k}{h}\ ch\ kl}$$

remarque

1 T=TL pour x=L

$$TL=(T0-Tf)\frac{sh[k(l-x)]+\frac{\lambda k}{h}ch\ [k(l-x)]}{shkl+\frac{\lambda k}{h}chkl}$$

- on a deux façons de calculer φL

$$\varphi_L = h\ s\ (T_L-T_f)=(T_0-T_f)\frac{\lambda ks}{shkl+\frac{\lambda k}{h}ch\ kl}$$

- on vérifier que

$$\underbrace{-\lambda s\frac{dt}{dx}}_{\text{FLUX entrant pars}} = \underbrace{\int_0^l hm(T-Tf)}_{\text{latéralement}}\underbrace{dx + \frac{\lambda hs(T0-Tf)}{shkl+\frac{\lambda k}{h}chkl}}_{\varphi\text{ perdu au bout difficile}}$$

- efficacité d'une ailette

$$\varepsilon=\frac{\varphi\ avec\ \text{ailette}}{\varphi\ \text{sons ailette}} = \frac{-hs\frac{dt}{dx}}{hs\ (T0-Tf)}$$

$$\frac{dt}{dx} = (T0-Tf)\,\frac{-k(chk(L-x)+\frac{\lambda k}{h}shk\ (L-x)}{shk\ l+\frac{\lambda k}{h}chkl}$$

$$\frac{dt}{dx} = -k(T0-Tf)\,\frac{chk(L)+\frac{\lambda k}{h}shk}{shk\ l+\frac{\lambda k}{h}chkl}$$

$=-k(T0-Tf)\frac{1+\frac{\lambda k}{h}thkl}{\frac{\lambda k}{h}+thkl}$

$\sum=\frac{\lambda k}{h}\frac{1+\frac{\lambda k}{h}thkl}{\frac{\lambda k}{h}+thkl}$ formule de l'efficacité d'une ailette $k=\sqrt{\frac{hm}{\lambda s}}$

Quand kl $\to 0$ $\to$ t h l $\to 0$ $\to$ ع=1 (éfficacité minimum)

Quand kl $\to 0$ $\to$ t h l $\to$ 1 ع= $\frac{\lambda k}{h}$ (éfficacité maximum)

Pour que $\sum\sum$max $\begin{cases} \text{L doit vers le max} \\ \text{K le max} \end{cases}$

$K_{max}\frac{hm}{s\lambda}\to \alpha\ x$ $\frac{m}{s}\to max$

Il faut donc faire des ailettes de $\frac{m}{s}$ maximums

Conclusion : il faut prendre des ailettes les plus fines possibles de formules approchées

$$T-Tf=(T0-Tf)\frac{sh[k(L-x)+\frac{\lambda k}{h}ch[k\ (L-x)]}{shk\ l+\frac{\lambda k}{h}chkl}$$

Sh < e h $\longrightarrow$ sh <<$\frac{\lambda k}{h}$ ch a coundtion que le soit grand ou peunt donc neglegable les sh devant les ch

$T-T_f=(T0-Tf)\frac{ch[k(L-x)]}{ch\ k\ L}$

$\Phi=-\lambda s\frac{dt}{dx}$ or $\frac{dt}{dx}=-k(t0-Tf)\frac{sh\ kl}{ch\ kl}$

ع= $=\frac{\varphi \text{ avec ailette}}{\varphi \text{ sons ailette}}=\frac{-hs\frac{dt}{dx}Nsh\ 5T0-Tf-thkl}{hs\ (T0-Tf)}$

$\Rightarrow$ع$=\frac{N\ k}{h}thkl$

VII- problème de conduction bidimensionnelle :

En supposant la conduction thermique indépendante de la température et de la direction de probation de la chaleur, l'équation différentielle de conduction dans un espace a deux dimension s'écrit

$\frac{\partial^2T}{\partial X^2}+\frac{\partial^2T}{\partial Y^2}=0$ 1

Il existe des solution analytique de cette équation dans quelques cas particulier correspondant à des condition limites simples cependant les solutions les plus utiliser sont des solutions numérique basés sur des méthodes des relaxations

1- méthode analytique

Ou utilise la méthode de séparation des variables qui permet l'intégration complète de l'équation de Laplace dans les cas oule température dépend de plus d'une variable mais ou la symétrie du problème reste levée par exemple plaque plane parallèle pipée

On recherche une solution particulière de la forme T=f(x) g(y)

Il oint $\frac{\partial T}{\partial X^2} = f'tet\ \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} = f''get\ \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} = fg''$en remplaçant dans l'équation 1 et en divisant par T=f g on aura$\frac{f''}{f} + \frac{g''}{g} = 0$ 2

Le 1[er] membre est uniquement fonction des x ; le dixième membre est uniquement fonction de y légalité ne peut être vérifier que si chacun d'eaux est égale a une constante, il vient

$\frac{f''}{f} = k^2\ et\ \frac{g''}{g} = -k^2$d'où f= A $e^{-kx} + Be^{k}$ et g= c cos k y + D sin k y

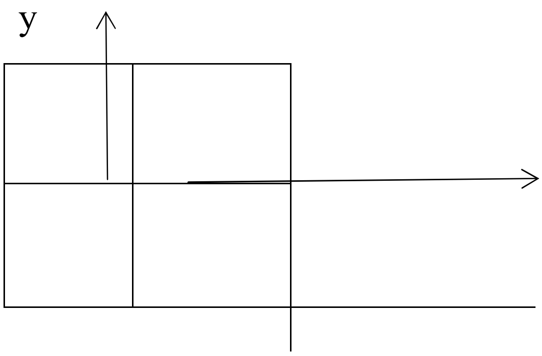
Des solutions particulière de 2 son alors donnes par T=f g = (A $e^{-kx} + Be^{k}$) (c cos k y + D sin k y)

A , B, C, D et k sont des constants que conques que l'on détermine e avec les condition aux limites du problème .

2- *méthode numérique :*

Nous ne décrierons ici que la méthode des différences finies

Principe : ont transformé en tout point l'équation de la place et les conditions aux limites par des équations algébrique qui donne une approximation du problème. On obtient ce résultat en remplaçant le domaine continu par un modèle discontinuité point et les dérivées partielles par des différences finies nous traitons ici l'établissement dimension du système d'équations linéaire relatifs a au système à deux dimension sous T(x,y)



on prend Δx =Δy= b

A l'intérieur du réseau considérons un nœud numérales et ses voisins immédiats numérales 2,3,4,5 soit b la distance de ces points au nœud centre utilisons les développements limités pour calculer en fonction de T1 (temps rature du nœud 1) les températures T2,T3,T4, etT5 on

$T_2=T_1+ b(\frac{\partial T}{\partial X^2}) + \frac{b^2}{2}(\frac{\partial^2 T}{\partial X^2}) + \cdots$

$T_3=T_1+ b(\frac{\partial T}{\partial X^2}) + \frac{b^2}{2}(\frac{\partial^2 T}{\partial Y^2}) + \cdots$

$T_4=T_1- b(\frac{\partial T}{\partial X^2}) + \frac{b^2}{2}(\frac{\partial^2 T}{\partial X^2}) + \cdots$

$T_5=T_1- b(\frac{\partial T}{\partial X^2}) + \frac{b^2}{2}(\frac{\partial^2 T}{\partial Y^2}) + \cdots$

On éditionnant les 4 équations il orient

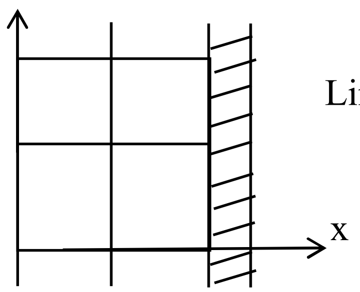
$T_2+T_3+T_4+T_5=4T_1+ (\frac{\partial^2 T}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial X^2})"b^2$

D'où $T_2+T_3+T_4+T_5\ \ -4T_1=0$

On pourra écrire en chaque nœud du réseau une relation de ce type on aura donc remplacé l'équation de Laplace par un système d'équation algébriques

Etablissement des conditions aux limites

a- dans les conditions aux limites de Dirichlet (températures comme par la frontière) il n'y a pas de problème particulières des tous les équations algébrique ou apparaissent des nœuds cites sur une limite, les températures de ces nœud seront des connexes du problème
b- dans le cas de conditions aux limites e type fourrier on procède come suite



Limite de problème T_0

$-\lambda\left(\frac{T}{X}\right)2 = h(T2-T0)$ avec $T1=T2-b(\left(\frac{T}{X}\right)2+\cdots$ d'où $(\left(\frac{T}{X}\right)2 = \left(\frac{T2-T1}{B}\right)$

$$\left(\frac{\lambda}{b}\right)T1-\left(\frac{\lambda}{b}+h\right)T2 = -hT0$$

Chapitre 04 : conduction dans les solides en régime transitoire

Introduction :

Dans se chapitre nous traiterons de méthodes de résolution de l'équation de la chaleur en régime variable, nous n'étudierons que le cas ou le coefficient de conductivité du mater au peut être consolidé comme constant et ou il n'y a pas de pouce de chaleur interne l'équation de la chaleur peut s'écrire donc :

$\frac{T}{t}=\alpha$avec $\alpha=\frac{\lambda}{e\,c\,p}$ 1

De plus nous ne traiteurs que la résolution de l'équation de la chaleur unidimensionnelle CAD le cas ou la température n'est fonction que d'une pente variable T=f(x,t)

Ce type d'équation adret une infinité de solution particulières sais grâce aux conditions aux licite en plus de la condition au problème posé.

I- Méthode de résolution :

Ii existe une multitude de méthode de résolution de l'équation de la chaleur, bien sur comme pour l'équation de Laplace , les méthodes numérique sont les plus utilisées.

1- Méthode analytique :

Parure toute les méthodes analytiques qui existent, nous allons choisir les méthodes de séparation de variable. On cherche une solution particulière de la forme T=f(t) g(x)

En remplacent dans 1 T par son expression puis en divisant par T ou obtient

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \alpha \frac{g''(x)}{g(x)} \frac{\Delta}{\alpha} \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{g''(x)}{g(x)} = -k^2$$

Le choix d'une eau chute négative au lieu d'une constants positive est diète par le fait que la température tendrait vers l'infini si le tems tend vers l'infini dans le choix d'une constante positive c qui est physiquement inacceptable

h_a f(t)= $-k^2$ α t+c f(t) = C $e^{-\alpha k^2 t}$

$\frac{g''(x)}{g(x)} = -k^2$g(x)= B cos k_x + D sin k_x

D'ou (x,t)= $ce^{-\alpha k^2 t}$ [B cos k_x + D sin k_x]

B ,C,D et k son des constantes quelconques que l'on déterminer grâce aux conditions limites et la condition initiale du problème.

2- Méthode graphique

Nous ne décrirons ici que la méthode graphique détruire de Schmidt cette méthode est très simple et sa précision dépend du nombre d'approximations utilisées .nous l'illustrerons sur un cas très simple

$\frac{T}{T} = \alpha \frac{T}{x^2}$

T<0 T=T_0 (condition initiale)

T≥0 T=T_S pourx=0 (condition aux limites)

Po sons T*=$\frac{T-T0}{TS-T0}$

NOTRE problème devient

$\frac{T*}{t} = \alpha \frac{T*}{x^2}$

T<0 T*=0

T≥0 T*=1 pourx=0

T*(x- α xn,t)=T(xt)- α x $\frac{T}{x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{T}{x^2}$

$$\frac{T(x,t)}{Dx^2} = \frac{T(x+\Delta x\ ,\ t\ ) + T\ (x, -\Delta x\ ,\ t\ ) - 2T(x,t)}{\Delta \mathrm{x}^2}$$

$$\frac{T(x,t)}{t} = \frac{T(x, t + +\Delta,\ t\ ) - T\ (x,\ t\ )}{\Delta \mathrm{t}}$$

$$\frac{T(x,t++\Delta,t\ ) - T\ (x,t\ )}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{\alpha}{\Delta x^2}\ [T(x+\Delta x, t) + T(x-\Delta x, t) - 2T(x,t)]$$

$$\mathrm{T(x,t\ x\Delta t) - T(x,t)} = \frac{\alpha \Delta \mathrm{t}}{\Delta x^2}[T(x+\Delta x, t) + T(x-\Delta x, t) - 2T(x,t)]$$

Poussons M= $\frac{\alpha \Delta \mathrm{t}}{\Delta x^2}$

Si je connais la répartition de la température dans l'espace, on peut connaitre la température d »un de ces points dans un temps ultérieur

$$\mathrm{T(x,t\ x\Delta t)} = [T(x+\Delta x, t) + T(x-\Delta x, t) - \left(2 - \frac{1}{M}\right)T(x,t)]M$$

On se deborouille de tel façon que 2- $\frac{1}{M}$ =0 M= $\frac{1}{2}$par consequent le choix se porte sur Δt et Δx

$$\mathrm{T(x,\ t\ \Delta t)} = \frac{[T(x+\Delta x,t) + T(x-\Delta x,t)}{2}$$

T<0 T=0 et t≥0 T=1 pour x=0

On a T(0,0)= 1 et T(0, Δt) = 1 T(0,2Δt) = 1

$$\boxed{1\Delta \mathrm{t}} \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{T}(\Delta \mathrm{x}, \Delta \mathrm{t}) = \frac{[T(2\Delta x,0) + T(0,0)}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} \\ \mathrm{T}(2\Delta \mathrm{x}, \Delta \mathrm{t}) = \frac{[T(3\Delta x,0) + T(\Delta x,0)}{2} = \frac{0+0}{2} = \frac{0}{2} = 0 \\ \mathrm{T}(3\ \Delta x, \Delta t) = 0 \end{array} \right.$$

$$\boxed{2\ \Delta \mathrm{t}} \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{T}(\Delta \mathrm{x}, 2\Delta \mathrm{t}) = \frac{[T(2\Delta x,\Delta \mathrm{t}) + T(0,\Delta \mathrm{t})}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} \\ \mathrm{T}(2\Delta \mathrm{x}, 2\Delta \mathrm{t}) = \frac{[T(3\Delta x,\Delta \mathrm{t}) + T(\Delta x,\Delta \mathrm{t})}{2} = \frac{0+1/2}{2} = \frac{1}{4} \\ \mathrm{T}(3\Delta \mathrm{x}, 2\Delta \mathrm{t}) = \frac{[T(4\Delta x,\Delta \mathrm{t}) + T(2\Delta x,\Delta \mathrm{t})}{2} = 0 \end{array} \right.$$

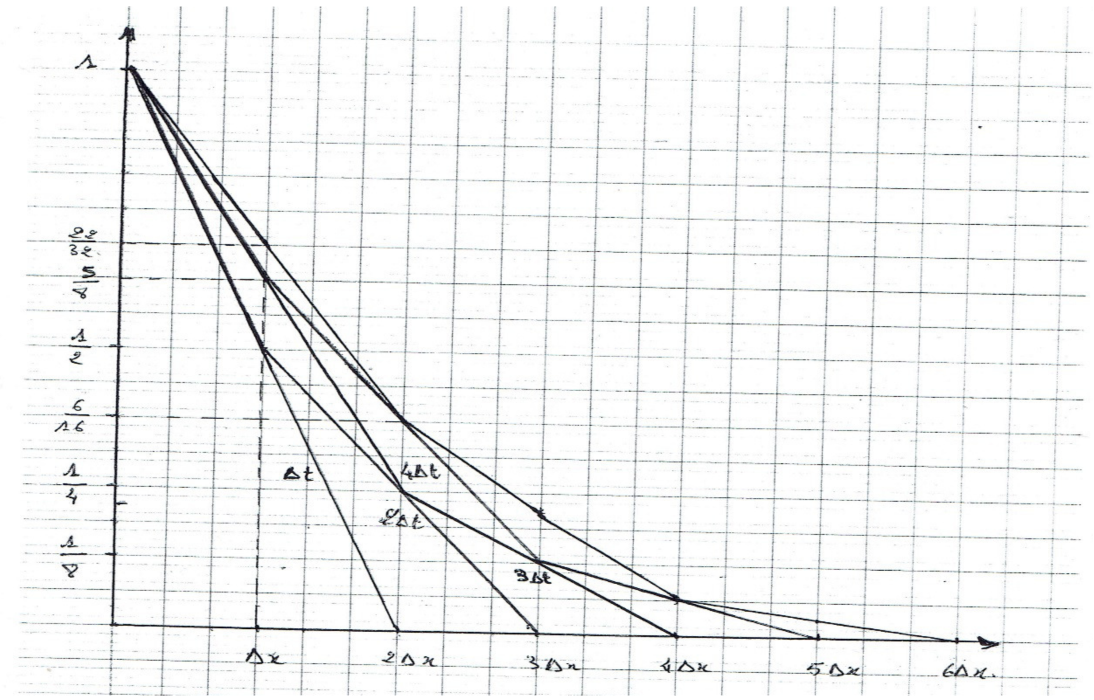
$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{T}(\Delta \mathrm{x}, 3) = \frac{[T(2\Delta x,2\Delta \mathrm{t}) + T(0,2\Delta \mathrm{t})}{2} = \frac{1/2+1}{2} = 8 \end{array} \right.$$

$$T(2\Delta x, 3\Delta t) = \frac{[T(3\Delta x,2\Delta t)+T(\Delta x,2\Delta t)}{2} = \frac{0+1/2}{2} = \frac{1}{4}$$

3 Δt

$$T(3\Delta x, 3\Delta t) = \frac{[T(4\Delta x,2\Delta t)+T(2\Delta x2,\Delta t)}{2} = \frac{0+1/4}{2} = \frac{1}{8}$$

$$T(4\Delta x, 3\Delta t) = \frac{[T(5\Delta x,2\Delta t)+T(3\Delta x,2\Delta t)}{2} = 0$$



Chapitre V : la convection

I-Introduction :

Le transfert de chaleur à l'intérieur d'un fluide en mouvement résulte non seulement de propagation du flux conductif mais encore du transport d'énergie interne par le fluide. Ce transport d'énergie est étroitement lié à la distribution des vitesses du fluide de sorte que la détermination de la distribution des densités de flux et des températures s'appuie simultanément sur les équations :

-de continuité

-de mouvement

-Et d'énergie

Nous allons d'abord établir les équations générales de bilan d'énergie qui seront combinées aux équations générales de continuité et de bilan de quantité de mouvement établies dans le cours de mécanique de fluide.

II-Etablissement des équations :

1- équation de continuité :

Qui s'écrit : $\frac{\partial l}{\partial t} = -div\, l\vec{v}$ ou bien $\frac{\partial l}{\partial t} = -l\, div\vec{v}$

Dans le cas de régime permanent, l'équation devient $div\, l\vec{v} = 0$ et si *l* est constante on a $\vec{v} = 0$.

Remarque :

On ne peut faire sortir *l* de l'opérateur divergence si le fluide est compressible (exemple : gaz)

Ou bien fluide non homogène, même chose di le fluide est incompressible mais avec des variations de la température dans le temps.

2- équation de conservation de quantité de mouvement :

L'équation dynamique d'un fluide réel sous forme vectorielle

$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} + \frac{1}{l} div\vec{\vec{T}}$ avec $\vec{\vec{T}}$:tenseur des contraintes { contrainte tangentielle ou visqueuse, force normale (exemple presse….)}

Dans le cas d'un fluide newtonien incompressible.

$$div\vec{v} = 0$$

$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{l}\overrightarrow{grad}P + \sigma\Delta\vec{v} + \vec{f}$: Équation de Navier Stokees en cordonnées cartésiennes pour un fluide isochore sous l'action de pesanteur.

$$div\vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{l}\frac{\partial P}{\partial x} + \sigma\Delta u$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{l}\frac{\partial P}{\partial y} + \sigma\Delta v$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{l}\frac{\partial P}{\partial z} + \sigma\Delta w$$

Dans le cas de convection naturelle : l'équation de quantité de mouvement se limite.

$$\bar{l}\frac{D\vec{v}}{Dt} = -div\,\vec{\vec{\tau}} - \overline{l\beta}(T - \overline{T})\vec{g}$$

$\bar{l}$: masse volumique du fluide à la température$\overline{T}$.

$\overline{\beta}$: coefficient de dilatation volumique du fluide.

$\vec{\vec{\tau}}$: tenseur des contraintes tangentielles.

3- <u>équation du bilan thermique :</u>

Pour un fluide Newtonien visqueux à pression constante.

$$lc_p\frac{DT}{Dt} = \lambda\nabla^2 T + \mu\emptyset$$

Φ : fonction de dissipation visqueuse.

$$\emptyset = 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \frac{2}{3}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right]^2$$

$\frac{DT}{Dt}$: est la dérivée particulaire de la température.

$$\frac{Dt}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z}$$

Pour un gaz idéal à pression constante ou un fluide dont la masse volumique est indépendante de la température.

$$lc_p\frac{DT}{Dt} = \lambda\nabla^2 T$$

III. couche limite :

Considérons un fluide visqueux en écoulement laminaire à l'intérieur d'un tube cylindrique de rayon intérieur R supposons qu'à l'entrée du tube la température du fluide soit uniforme et égale à T_{f0} et que la paroi du tube soit soumise à un flux de chaleur constant de densité ϕ_p sur toute sa surface d'échange. On se propose de déterminer la température du fluide en tout point de celui-ci dans le tube et supposons propriétés physique de ce fluide (l, C_p, μ, λ) indépendante de la température. La distribution des vitesses du fluide sur une section droite du tube est indépendante de la température et les équations de continuité et de qualité de mouvement peuvent être résolues indépendamment de celles du bilan d'énergie thermique. On suppose aussi que le régime est établit thermiquement le problème peut être traité en coordonnées cylindrique, on note en particulier.

$V_r = V_\beta = 0$

q_β : La composante selon β de la densité du flux de chaleur ainsi à cause de la symétrie axiale, le problème se traite par rapport aux coordonnées Z, r.

$\frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$: Équation de continuité.

L'équation de quantité de mouvement s'écrit :

$$l\, V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_z}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

En tenant compte des conditions limites

V_z V_F V_z finie

V_z et $r = R \Longrightarrow V_z = 0$

L'équation (1) se réduit

$$\mu \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_z}{\partial r}\right) = r\frac{\partial P}{\partial z}$$

$r\frac{\partial V_z}{\partial r} \Longrightarrow \frac{r^2}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial z} + A$

$$V_z = \frac{r^2}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial z} + A\, Lur\ + B$$

$r = 0$, V_z finie $\Longrightarrow A = 0$

$r = R \Longrightarrow V_z = 0 \Longrightarrow B = -\frac{R^2}{4\mu}\frac{\partial P}{\partial z}$

$V_z \Longrightarrow \frac{1}{4\mu}\frac{\partial P}{\partial z}(R^2 - r^2)$

$V_z = V_{z\,max}\ \frac{\partial V_z}{\partial r} = 0 \Longrightarrow$ $r = 0 \Longrightarrow$ $V_{z\,max} = B$

$$V_{max} = V_z(r = 0) = -\frac{1}{4\mu}\frac{\partial P}{\partial z} R^2$$

Débit : $Q = \frac{volume}{temps} = S\, V_m = \pi\, R^2 V_m$

V_m étant la vitesse moyenne.

$$Q = \int_0^R 2\pi r\, V_z\ dr = \int_0^R 2\pi r \left[\frac{1}{4\mu}\frac{\partial P}{\partial z}(R^2 - r^2)\right] dr$$

$Q = -\frac{\pi}{8\mu}\frac{\partial P}{\partial z} R^4 = \pi\, R^2 V_m\ \frac{\partial P}{\partial z} \Longrightarrow \frac{8 V_m \mu}{R^2}$

$\Rightarrow V_z = 2\, V_m\left(1-\frac{V^2}{R^2}\right)$

L'équation d'énergie thermique s'écrit :

$$l\, C_p V_z \frac{\partial T}{\partial z} = \lambda \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]$$

En général le flux de chaleur par conduction dans la direction axiale peut être negligé par rapport au flux de chaleur véhiculé par convection.

$\frac{d^2T}{dz^2} = 0$ 1ère hypothèse

$\Rightarrow V_z \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)\right]$

Conditions aux limites :

$\forall z \ \forall r$ T = finie

$$\forall r \ et \ z = 0 \ \rightarrow T = T_{f0}$$

$$\forall z \ \ et \ r = R \rightarrow T = T_p(z)$$

Soit $T_m(z)$ la température moyenne du fluide dans chaque section droite du tube.

$$T_m(z) = \frac{1}{\pi R^2 V_m}\int_0^R 2\pi V_z\, T(z,r) r\, dr$$

Passons à la température dimensionnelle et posons :

$$\theta(z,r) = \frac{T(z,r) - T_p(z)}{T_m(z) - T_p(z)}$$

La température de la paroi T_p varie selon z et le régime est établit thermiquement

Remarque : le régime est établit thermiquement lorsque θ(z,r) ne varie pas suivant z.

c.à.d :$\theta(z,r) = \theta(r) \rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$

D'autre part

$\emptyset_p = h\left[T_p(z) - T_m(z)\right] = cste$ (Constante déjà imposée), h dépend de la nature et la vitesse du fluide, celle-ci est constante par rapport à z ainsi que les propriétés physiques par conséquent h est constante.

$T_p(z) \Rightarrow T_m(z) = cste$

$\frac{d}{dz}\left[T_p(z) - T_m(z)\right] = 0 \Rightarrow \frac{dT_p(z)}{dz} = \frac{dT_m(z)}{dz}$

$\frac{d}{dz}\left[T(z,r) - T_p(z)\right]$

$\Longrightarrow \frac{dT(z,r)}{dz} = \frac{dT_p(z)}{dz}$

D'où : $\frac{dT(z,r)}{dz} = \frac{dT_m(z)}{dz} = \frac{dT_p(z)}{dz}$

N.B : pourquoi $\theta = \frac{U}{V}$ $\rightarrow$ $\acute{\theta} = \acute{U}\frac{1}{V} + (-1)\acute{V}V^{-2}U = 0 tel\ que\ (V \acute{=} 0)$

$$\rightarrow \acute{U}\frac{1}{V} + 0 \rightarrow \acute{U} = 0$$

Considérons maintenant l'élément.

Le volume

P_p sert à chauffer la quantité du fluide traversant dz.

$$2\pi R\emptyset_p dz = wC_p dT = l\, S\, V_m C_p\, dT_m = l\pi^2 R^2 V_m C_p dT_m$$

$\frac{dT_m}{dz} \Longrightarrow \frac{2\emptyset_p}{lRV_mC_p}$

Donc $\frac{dT_m}{dz} = cste$ $\Longrightarrow$ la température moyenne de l'eau varie linéairement

CAD : sinon double la longueur du tube, la température moyenne du fluide sera deux fois plus grande.

$$\frac{dT(z,r)}{dz} = \frac{dT_p(z)}{dz} = \frac{dT_m(z)}{dz} = \frac{2\emptyset_p}{l\, RV_mC_p}$$

Donc $T_m(z) = \frac{2\emptyset_p}{lC_pV_mR}z + A$

CL $z = 0 \rightarrow T_m(z) = T_m(0) = T_{f0}$

D'où $T_m(z) = \frac{2\emptyset_p}{lC_pV_{mR}}z + T_{f0}$

$$V_z\frac{\partial T}{\partial z} = \alpha\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)$$

$V_z\frac{\partial T}{\partial z} = 2V_m\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\frac{2\emptyset_p}{lRV_mC_p} = \frac{4\emptyset_p}{lC_p}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)or\alpha = \frac{\lambda}{lC_p}$

$$\frac{4\emptyset_p}{lC_p}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\frac{1}{R} = \frac{\lambda}{lC_p}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)$$

$$\frac{4\emptyset_p}{\lambda}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\frac{1}{R} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)$$

$$r\frac{\partial T}{\partial r}=\int\frac{4\emptyset_p}{\lambda R}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)r\,dr+A$$

$$r\frac{\partial T}{\partial r}=\frac{4\emptyset_p}{\lambda R}\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4R^2}\right]+A$$

$$\frac{\partial T}{\partial r}=\frac{4\emptyset_p}{\lambda R}\left[\frac{r}{2}-\frac{r^3}{4R^2}\right]+\frac{A}{r}$$

$$\rightarrow T=\frac{4\emptyset_p}{\lambda R}\left[\frac{r^2}{4}-\frac{r^4}{16R^2}\right]+ALnr+B$$

CL $\quad r=0\rightarrow T=infinie\rightarrow A=0$

$$r=R\rightarrow T(z,r)=T_p(z)$$

$$\rightarrow B=T_p(z)-\frac{3}{4}R\frac{\emptyset_p}{\lambda}$$

$\rightarrow T(z,r)=\frac{4\emptyset_p}{\lambda R}\left[\frac{r^2}{4}-\frac{r^4}{16R^2}\right]+T_p(z)-\frac{3R\emptyset_p}{4\lambda}$ ……………..(1)

D'autre part $T_m(z)=\frac{1}{V_m\pi R^2}\int_0^R 2\pi V_z\,T(z,r)r\,dr$

$$T_m(z)R^2V_m=\int_0^R 4V_m\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)\left[\frac{4\emptyset_p}{\lambda R}\left(\frac{r^2}{4}-\frac{r^4}{16R^2}\right)+T_p(z)-\frac{3R\emptyset_p}{4\lambda}\right]r\,dr$$

$$\frac{R^2T_m(z)}{4}=\int_0^R\left(r-\frac{r^3}{R^2}\right)\left[\frac{\emptyset_p}{\lambda R}\left(r^2-\frac{r^4}{4R^2}\right)+T_p(z)-\frac{3R\emptyset_p}{4\lambda}\right]dr$$

$$=\int_0^R\left[\frac{\emptyset_p}{\lambda R}\left(r^3-\frac{r^5}{4R^2}\right)-\frac{3R\emptyset_p}{4\lambda}r+T_p(z)r\right]dr-\int_0^R\left[\frac{\emptyset_p}{\lambda R}\left(\frac{r^5}{R^2}-\frac{r^7}{4R^4}\right)-\frac{3R\emptyset_p}{4\lambda}\frac{r^3}{R^2}+T_p(z)\frac{r^3}{R^2}\right]dr$$

$=[\frac{\varphi}{\lambda R}\left(\frac{r^4}{4}-\frac{r^6}{24R^2}\right)-\frac{3}{8}\frac{R\varphi}{N}r^2+t(z)\frac{r^2}{2}]-[\frac{\varphi}{NR}\left(\frac{r^4}{4}-\frac{r^8}{32}\right)-\frac{3}{16}\frac{R\varphi}{N}r^3+t(z)\frac{r^2}{2}]-$
$\frac{\varphi}{\lambda R}\left(\frac{r^4}{4}-\frac{r^4}{24R^2}\right)-\frac{3}{8}R\varphi\,r^2+t(z)\frac{r^2}{4}]$-[$\frac{\varphi}{\lambda R}\left(\frac{r^4}{4}-\frac{r^4}{32}\right)-\frac{3}{16}\frac{R\varphi}{\lambda}r^3+t(z)\frac{r^2}{4}]$ =[$\frac{\varphi}{\lambda R}\left(\frac{5r^4}{24}\right)-\frac{3}{8}r^3+$
$t(z)\frac{r^2}{4}]$-[$\frac{\varphi}{\lambda R}\left(\frac{13r^4}{96}\right)-\frac{8}{16}\frac{\varphi}{\lambda}r^3+t(z)\frac{r^2}{4}]$

$\frac{r^2T(z)}{4}=\frac{\varphi}{\lambda}\left(\frac{7r^3}{96}\right)-\frac{8}{16}\frac{\varphi}{\lambda}r^3+t(z)\frac{r^2}{4}$

$=-\frac{11\varphi}{96\lambda}r^3++t(z)\frac{r^2}{4}$

$=\frac{11\varphi r}{24\lambda}++t(z)$

T(g)=$\frac{11\varphi r}{24\lambda}++t(z)$

On remplace T(z) dans l'expression t(z,r) de l'équation 1

T(z,r)= $\frac{\varphi}{\lambda r}\left(r^2 - \frac{r^4}{4r^2}\right) + T(z) + \frac{11r}{24\lambda}\varphi - \frac{3}{4\lambda}\ \varphi$

T(z,r)= $\frac{\varphi}{\lambda r}\left(r^2 - \frac{r^4}{4r^2}\right) + T(z) - \frac{7r}{24\lambda}\ \varphi$

Or T(g)= T(z,r)= $\frac{2\varphi}{e\ c\ v\ r}z + T(f)$

T(z,r)= $\frac{\varphi}{\lambda r}\left(r^2 - \frac{r^4}{4r^2}\right) + T(z) - \frac{2\varphi}{e\ c\ v\ r}z - \frac{7r}{24\lambda}\ \varphi$+ T(f)

IV. analyse dimensionnelle et théorie des groupe :

1- __introduction :__

$\varphi = h\ s\ (T - T)$loi de merton r=1/Ϭ

Remarque le flux de chaleur convectif serait équivalent a un flux convectif a travers une paroi dont l'épaisseur serait d'un flux laminaire et qui possède les mémés Caractéristiques du fluide

h dépond de deux la méthode avec du flux

De la paroi avec laquelle il est en contact

h dépend de la nature du fluide propriétés physique du fluide

vitesse d'écoulement

h dépend de parier lin collision

L'état de surface

Le problème majeur préalable avant le calcul du flux de chaleur par convection consiste a déterminer le coefficient h qui dépond d'un nombre important de paramètre : caractéristique du fluide, de l'écoulement de la température et de la forme de la surface d'échange.

Il est avoir ne ce Césaire d'utiliser les variables réduites et faires apparaitre entre celles-ci les corrélation théoriques qui existent en vue d'une détermination (essentiellement expérimentale)

De la forme mathématique et des coefficients numérique qui relient ces nombres sans dimensions c'est le but remet de l'analyse dimensionnelle .

2- Méthode de Buckingham

2.1- Convection forcée

Le but principale de cette étude étant de faire apparaitre les relations qui serrant à la base des calculs a effectuer pour résoudre des problèmes d'échangeur .le plus important du point de vu pratique est celui d'un fluide en relation dans une canalisation pour que on se propose de chaleur fluide paroi qui correspond a une convection forcée h dépond

-des propriétés physique : l,λ,μ,c_p

-des caractéristique de l'écoulement ; vitesse moyenne v

-des caractéristique de la canalisation ; L , D

On peut donc écrire

H=f(l,λ,μ,c_p ,v ,D ,L)

Ou encourg(h,l, λ,μ,c_p ,v ,D ,L)=0

On a donc 8 grandeurs physiques dont les dimension sous fondamentales sont :

H	M$T^{3-}\theta^{1-}$
c_p	L²$T^{2-}\theta^{1-}$
D	L
L	L
μ	M$LT^{3-}T^{1-}$
l	ML^{3-}
V	LT^{3-}
λ	M$LT^{3-}\theta^{1-}$

avec les dimensions fondamentaux , cette relation entre 8 grandeurs physique peut sera a une relation entre 8-4=4 rapports sans dimensions nouets

π_1,$\pi_2, \pi_3, et\pi_4$du grue

f₁(π_1,π_2, π_3, π_4)=0 on alons f_1=(π_2, π_3, π_4)

il faut choisir 4 grandeurs de base. Prenons par exemple :

$$\pi_1 = \frac{h}{\mu^{a1}\lambda^{b1}D^{C1}V^{d1}}$$

$$\pi_2 = \frac{l}{\mu^{a2}\lambda^{b2}D^{c2}v^{d2}}$$

$$\pi_3 = \frac{c_p}{\mu^{a3}\lambda^{b3}D^{c3}v^{d3}}$$

$$\pi_4 = \frac{L}{\mu^{a4}\lambda^{b2}d^{c4}v^{d4}}$$

Pour chaque π on remplace les grandeur physiques parleurs dimensension fondamentales pour π on écriera

$$\pi_1 = \frac{MT^{-3}\phi^{-1}}{[ML^{-1}T^{-1}]^{a1}[MLT^{-3}\phi^{-1}]^{b1}[L]^{c1}[LT^{-1}]^{d1}}$$

Pour chaque dimensionnions on identifie les exposants de puissances entre numérateur et dénominateur relatifs à une même dimension ce que donne le system suivant à résoudre

[M] 1=$a_1 + b_1$

[L] 0=$-a_1 + b_1 + c_1 + d_1$

[T] -3=$-a_1 - 3b_{1-}d_1$

[ϕ] -1=$-b_1$

Ce qui donne a prés résolution du système $a_1 = 0, b_1 = 1, c_1 = -1\,, d_1 = 0$

$$\pi_1 = \frac{hD}{\lambda}$$

Ce rapport sons dimensions est appelé nombre de nuassent et noté nu

Il peut être considéré comme le rapport du flux de chaleur globalement transféré dans le fluide au flux de chaleur transféré par conduction pour le rapport π_2 le numérateur ayant pour dimensions fondamentale ML^{-3} le système a résoudre est positivant

[M] 1=$a_2 + b_2$

[L] -3=$-a_2 + b_2 + c_2 + d_2$

[T] 0=$-a_2 - 3b_2 - d_2$

[ϕ] 0=$-b_2$

Ce qui donne a prés résolution

$$a_2 = 1, b_2 = 0, c_2 = -1\,, d_2 = -1$$

Le rapport π_2 s'écrit alors

$$\pi_2 = \frac{e\ v\ d}{\mu}$$

Ce rapport est appelé nombre de Reynolds et noté Re il mesure le rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité pour la convection forcée pour la détermination de $\pi_3$le numérateur a pour dimensions $L^{-2}T^{-2}\phi^{-1}$ le système a

résoudre est

[M] 0=$a_3 + b_{31}$

[L] 2=$-a_3 + b_3 + c_3 + d_3$

[T] 2=$-a_3 - 3b_3 - d_3$

[ϕ] -1=$-b_3$

$$a_1 = -1, b_3 = 1, c_0 = -1 , d_3 = 0$$

Ce rapport est appelé nombre de Préault et noté pour que l'on peut écrire

$\frac{e\,c_p}{\lambda}\frac{\mu}{l} = \frac{\theta}{\alpha}$et qui est le rapport de viscosité cinématique Θ(diffusive pour le transfert de quantité de mouvement) à la diffusivité thermique pour les gaz pr<1 et ne vrai par avec la température , pour les liquides classique Pr>1 et vraie beaucoup .pour les liquides métalliques Pr est très petit.

Le rapport

$$\pi_4 = \frac{L}{D}$$

Pour un fluide en écoulement turbulent. l a pas d'influence si $\frac{L}{D} > 60$ ce qui est le cas de tous les échangeurs

PAR CONSEQUENTT L'EXPEIENCE DOIT NOUS PERMETTRE DE PRECISER la relation :

N_u=(L R, Pr, $\frac{L}{D}$) pour le cas d'une convection forcée

Remarque importante : changement de grandeur de base si comme grandeurs de base on avait choisi l, c_p ,D et v il faut alors écrire les rapport sans dimensions pour h,µ ,λ

et L, un traitement analogue nous aurais permis d'établir

$\pi_1 = \frac{h}{l\,VC_p}$, $\pi_2 = \frac{1}{R_e}$, $\pi_3 = \frac{\lambda}{l\,C_pVD}$, $\pi_4 = \frac{L}{D}$

Le rapport π_1 est appelé nombre de Margoulis et noté Ma, ou dans les ouvrages Anglo-Saxons nombre de Stanton et noté St :

$$St = \frac{h}{l\,VC_p}$$

Il mesure le flux de chaleur globalement transféré dans le fluide aux flux de chaleur transporté par le fluide en mouvement.

$$\pi_3 = \frac{\lambda}{l\,C_pVD} = \frac{\mu}{l\,VD}\frac{\lambda}{C_p\mu} = \frac{1}{R_e}\frac{1}{P_r} = \frac{1}{R_eP_r}$$

Le produit des nombres adimensionnels R_e P_r est le nombre de peclet et noté P_e.

$$P_e = \frac{l\,C_pVD}{\lambda}$$

Que l'on peut considérer comme le rapport du flux d'énergie thermique transporté par le fluide en mouvement au flux d'énergie thermique transféré par conduction.

$$St = \frac{h}{l\,VC_p} = \frac{hD}{\lambda}\frac{\lambda}{l\,C_pVD}$$

$$St = \frac{M_u}{P_e} = \frac{M_u}{R_eP_r}$$

Par conséquent chercher la relation $M_u = \varphi_2(R_e, P_r, \frac{L}{D})$ est tout à fait équivalent à chercher la relation $S_t = \varphi_3(R_e, P_r, \frac{L}{D})$

2.2- Convection naturelle :

Dans le cas d'une transmission de chaleur par convection libre le long d'une paroi verticale, le coefficient de convection de pe des caractéristiques du fluide λ, l, μ, C_p, βgΔT

et L. $$h = f(\lambda, l, \mu, C_p, \beta g\Delta T, L)$$

$$\beta = \frac{1}{l}\frac{\Delta l}{\Delta T}$$

Les dimensions fondamentales de : β θ^{-1}

g LT^{-2}

ΔT θ^{1}

En choisissant comme grandeur de base λ, l, μ, et L on établit les trois rapports π suivants :

$\pi_1 = \frac{hL}{\lambda} = N_u$, $\pi_2 = \frac{C_p\mu}{\lambda} = P_r$, $\pi_3 = \frac{\beta g\Delta T l^2 L^3}{\mu^2} = 6$

(Grashof)

Ce nombre caractérise le mouvement du fluide provoqué par les variations de température pour la convection naturelle et joue donc un rôle analogue à R_e.

Pour la convection naturelle, l'analyse dimensionnelle indique une corrélation de la forme :

$$Nu = \varphi_4(G_r, P_r)$$

3- Conclusion :

L'analyse dimensionnelle nous a indiqué entre quels rapports il faut rechercher une relation et c'est la recherche expérimentale qui donnera la forme des relations mathématiques qui relie ces nombres sans dimensions.

Toutes les formules empiriques proposées résultent d'expériences dans des conditions bien particulières et par conséquent, il est impossible d'affirmer qu'elles n'appliquent rigoureusement au cas précis à traiter. Néanmoins elles permettent de déterminer des ordres de grandeurs ce qui généralement suffisant.

I- LOI EMPIRIQUEDELACONVECTIONNATURELLE

Toutelesrelationsquivontsuivre,lespropriétésphysiquessontévaluéesalatempératuredufi lm.Les nombresde**Nusselt**etde**Grashof**sontrespectivementdéfinispar

$$Nu = \frac{hL}{\lambda}$$ $$Gr = \frac{L^3 p^2 g\beta(TP - Tf)}{\mu^2}$$

L:étantladimensioncaractéristiquedusolide

·TP:latempératuredela paroi

Tf:latempératuredufluideloindelaparoi

On définît aussi le nombre de Rayleigh comme étant le produit des deux nombres précédents:

Ra=PrxGr

I.1-Relationsemi-empiriquespourdesplaquesoudescylindreverticaux:

SelonGebhart, les relations obtenus pour des surfaces surfacesplanesverticalesrestentvalablepourdescylindresverticauxsilerapport :$\frac{D}{L}$ $>\frac{35}{Gr^{0.25}}$

Pour le casdefluideconventionnelet10<Ra<10^9,**Lorenz**propose:

$$Nu=0,55(GrPr)^{0.25}$$

- etpourdesmétauxliquides

$$Nu=0,68(GrPr^2)^{0.25}$$

etpourRa>10^9,**McAdams**recommande

$$Nu=0,13(GrPr)^{1/3}$$

Ladimensioncaractéristiquepriseencomptedanslesnombres**Nusselt**etde**Grashof**estlahauteurLdelasurface.

Remarque ·Danslecasd'unesurfaceplanefaisantunangleaavecl'horizontale,lerelationsprecedentesrestentvalablesenprenantpourlenombrede**Grashof**ladéfinitionsuivante:

$$Gr = \frac{L^3 \rho^2 g\beta(T_p - T_f)}{\mu^2}$$

I.2-Relationsempiriquespourdesplaqueshorizontales:

Pourunesurfacechaudeplacée àlapartie inferieure d'uneenceinte contenant le fluide ou une surface froideplacée àlapartie supérieure d'une enceinte contenant lefluide,ona:

$Nu=0,54(GrPr)^{0.25}$ pour10^5<Gr<2$10^7$

$Nu=0,14 (GrPr)^{1/3}$ pour2$10^7$<Gr<3$10^{10}$

etpourunesurfacechaudeplacée à lapartiesupérieurd'uneenceintecontenantlefluide

$Nu=0,27(GrPr)^{0.25}$ pour PrGr<10^9

Danscesrelations,ladimensioncaractéristiquepriseencomptedans**Nusselt**et**Grasof**est:

- Lecotepouruncarré.

- L=0,9Dpourundisquedediamètre D
- L:moyennedelalongueuretdelalargeurpourunrectangle.

I.3-Relationsempiriquespourdescylindreshorizontaux:
Onaalors

.

$Nu=0,53(GrPr)^{0.25}$ valablepour $Pr>0,5$ et $10^3<Ra<10^9$

Ladimensioncaractéristiqueprisee ncomptedans**Nusselt**et**Grashof**estlediamètreextérieurdutube.

Pourlesmétauxliquidesetpour $Ra<10^9$ $Nu=0,53(GrPr^2)^{0.25}$

1.4- Autre type de surfaces:

A- Sphere: $Nu=2+0,45(GrP)^{1/3}$

$$Nu=\frac{h\,D}{\lambda} \qquad Gr=\frac{D^3\rho^2 g\beta(T_{p-}T_f)}{\mu^2} \qquad et \quad Ra<10^9$$

B- Autresurfacesverticals:

Onpeututiliser lesrelations valablespour lescylindresverticaux enchoisissantunedimensioncaractéristiqueLdéfiniepar:

$$\frac{1}{L}=\frac{1}{L_{horiz}}+\frac{1}{L_{vert}}$$

1.5-Casdesvolumeslimitéspar deuxsurfacesparallèles:

C'estle cas d'un fluide maintenu entre deux plans dontles températures sontrespectivementTp1etTP2

$$NU=\frac{C}{\left(\frac{L}{\delta}\right)^9}(Gr\ \mathrm{pr})^n$$

Ouδestladistanceentrelesdeuxplaques.

$$Nu=\frac{h8}{'A} \qquad et \qquad Gr=\frac{\delta^3\rho^2 g\beta\left(T_{p1}-T_{p2}\right)}{\mu^2}$$

A - ***pourdesplaquesverticales:***

♣ $Gr<210^{3}$	Nu=1C	
♣ $210^{3}<Gr<210^{5}$	=0,2	
♣ $210^{5}<Gr<1,110^{7}$	c=0,071	n=1/4
		n=1/3

B* - pour desplaques horizontales :(Facechaude=Faceinférieure)*

$.Gr<10^{3}$	u=l	
$10^{3}<Gr<3,210^{5}$	c=0,21	n=1/4
$3,210^{5}<Gr<10^{7}$	c=0,075	n=1/3

II-LOIEMPIRIQUEDELACONVECTIONFORCEE

1- Transfertdechaleur en régimeturbulental'iintérieurd'unecanalisation:

MCAdamseffectuantunesynthèsedenombreuxrésultatsexpérimentauxaétablilarelationsuivante :

$$Nu = 0.023\, Re^{0.8} Pr^{0.4} \qquad Nu = \frac{h\, D}{\lambda} \qquad et \qquad Re = \frac{\rho\, V\, D}{\mu}$$

AvecD:étantlediamètreintérieurdelaconduite

Dontlaprécisionestd'environ10%.Silecoefficient0,023semblesatisfaisantpourleshydrocarbures, cette valeur est beaucoup trop forte pour les gaz pour lesquels des expériencesplusmoderneontamenéaproposer 0,018,tandisqu'onprendra 0,020dansle casdel'eau.

$$Nu = A Re^{0.08} Pr^{0.04} \qquad \text{avec} \qquad A \begin{cases} 0,023 & \text{Hydrocarbures} \\ 0,020 & \text{Eau} \\ 0,018 & \text{Gaz} \end{cases}$$

Cetterelationestapplicablepour

$10^{4}<Re<1,210^{5}$ 0.6<Pr<120

L/D>60

Toute les propriétésphysiques sont évaluéesalatempératuremoyenne du fluide. Si laviscositédufluidevariedefac;:onsensibleaveclatempérature, **Colburn**aproposé

$$St = 0.0023\, Re^{-0.2} Pr^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{\mu}{\mu_p}\right)^{0.14}$$

μ_p:étantlaviscositédufluidealatempératuremoyennedelaparoi.
Cette relationest applicabledans lemême domaine de variation de **Reynolds** et de **Prandtl** quecelledeMcAdams,maistoutes lespropriétés physiquessontévaluéesalatempératuremoyennedufilmTm·

Tm=(Tp+Tf)/2

Enfinsi**L/D**<60ilexisteuneffetd'entréequi prisencomptedanslarelation

$$St = A\, Re^{-0.2} Pr^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{\mu}{\mu_p}\right)^{0.14} \left(1 + \left(\frac{D}{L}\right)^{0.7}\right)$$

- ***casdesmètauxliquides***:
  D'unpointdevueexpérimental **LubarskyetKaufman**proposent larelation:

$Nu=0{,}625Pe^{0{,}4}$ valable $200<Pe<20000$

11.2-Transfert de chaleur en regime laminaireal'inl:erieurd'unecanalisationcylindrique:Re<2300

A-RelationanalytiquedeLeveque:

Danslecasoulatempératuredelaparoiestsupposeconstante(Tp=cste)etquelatempératureduflui devarielinéairementtdepuisl'entreealasortie.**Leveque**apropose larelation:

$$Nu = 1.607 \left(\frac{D}{L}\, Re\, \mathrm{pr}\right)^{1/3}$$

B- Relation de Sieder et Tate :

Dans le cas du chauffage ou de refroidissement de liquides très visqueux Sieder et Tate ont proposé la relation :

$$Nu = 1.86 \left(\frac{D}{L}\, Re\, \mathrm{pr}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\mu}{\mu_p}\right)^{0.14}$$

Dans cette relation, toute les propriétés physiques du fluide sont évaluées à sa température moyenne entre l'entrée et la sortie de la canalisation. µp est la viscosité évaluée à la température moyenne de la paroi. Cette établie sur un grand nombre de resu1tats est à recommander.

C- Relation de Martinell i et Boelter :

Ces relations sont valables pour des tubes verticaux. Elles tiennent compte de la convection naturelle qui peut se superposer a la convection forcee lorsque la vitesse du fluide est faible.

$$Nu = 1.75F_1 \left[\frac{w\,Cp}{\lambda\,L} \pm 0.0722 \left(\frac{D}{L} Gr_i\,Pr\right)^{0.84} F_2\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$Gr_i = \frac{D^3\,\rho^2\,g\,\beta\,(\Delta T)_e}{\mu^2}$$

$\frac{w\,Cp}{\lambda\,L}$est le nombre adimensionnel appelé le nombre de **Graetz** et noté Gz

W : étant le débit massique du fluide.

$(Dt)_e$: Tf – Tp à l'entrée de la canalisation.

Toutes les propriétés physique sont prise à la température moyenne du fluide.

Gri : est le nombre de **Grashof**correspondant à la différence de température à l'entrée du tube entre la paroi et le fluide.

F1 et F2 sont les deux facteurs sans dimension qui dépend du facteur :

$$Z = \frac{T_{fe} - T_{fs}}{\Delta T_m} \qquad avec \quad \Delta T_m = \frac{(T_{fe} - T_{pe}) + (T_{fs} - T_{ps})}{2}$$

(Les indices e et s indiquent l'entrée et la sortie du fluide).

Z	0	1	0.2	0,3	0,4	0,5	1,0	1,5	1,7	1,8	1,9	2
F1	1	0,997	0,993	0,990	0,985	0,978	0,912	0,770	0,675	0,610	0,573	0
F2	1	0,952	0,910	0,869	0,828	0,787	0,588	0,403	0,320	2,272	0,212	0

I

Le signe +correspond au cas la convection naturelle se développe dans les sens del'écoulement [chauffaged'unfluideascendantourefroidissement d'unfluidedescendant],lesigne-correspondaucasinverse.

D-Relationd'Oliver:

Cette relation est valable pour des tubes horizontaux. Elle tient compte de la convection naturelle qui se superpose à la convection forcé :

$$Nu = 1.75\left[\frac{w\,Cp}{\lambda\,L} \pm 0.04\left(\frac{D}{L} Gr_i\,Pr\right)^{0.75}\right]^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\mu}{\mu_p}\right)^{0.14}$$

11.3-Transfert dechaleurenrégimeintermédiaireàl'intérieur d'unecanalisationcylindrique :

Letransfertdechaleurenrégime intermédiaireestunmodetrèspeu utilisée,c'est pourquoinousn'allonspastropentreendétaildanstypedetransfert.

11.3.1- Conduiteshorizontales :

$$Nu = 0.037\,Re^{0.75}Pr^{0.4}\left(\frac{\mu}{\mu_p}\right)^{n}$$

OU n=0,11pourleréchauffement

n=0,25pourlerefroidissement

2300<Re<10000

11.3.2-Conduitesverticales:

Si 2300<Re<3500 et PrxGri>10^9

$$Nu = 0.8\left(Pe\,\frac{D}{L}\right)^{0.4}(Gri\ \mathrm{pr})^{0.1}\left(\frac{\mu}{\mu_p}\right)^{0.14}$$

Si 3500<Re<10000

$$Nu = 0.022\,Re^{0.8}Pr^{0.4}\left(\frac{\mu}{\mu_p}\right)^{n}$$

OU

n=0,14pourleréchauffementn=0
,25pourlerefroidissement

Danstoutecesrelations lespropriétésphysiquesdufluidesontévaluéesasatempératuremoyennesauf pourµP.

II.4-Extension des résultats aux canalisations non cylindriques ou incomplètement remplis:

II.4.1-Canalisation remplies:

A- Diametre equivalent:

Dans le cas d'une canalisation de section rectangulaire, cane ou annulaire, on introduit la notion de diamètre équivalent thermique. $D_{eq} = 4A / P$

Ou A: est la section droite perpendiculaire a l'écoulement et P le périmètre intéressé par l'échange.

Pour une canalisation de section rectangulaire : $D_{eq} = 2 a . b / a + b$

Po mune canalisation de section cane:
$D_{eq} = a$