

# **Introduction à l'hydrodynamique**

**Cours et exercices**

▪ **Licence 2**

**S.E. Belhenniche**





# Préface

*Ce Cours est destiné aux étudiants de la deuxième année universitaire filière génie maritime. Parmi les objectifs du cours est de permettre à l'étudiant d'acquérir les notions de base de la dynamique des fluides qui seront utiles à résoudre des problèmes liés à l'hydrodynamique navale au cours de leurs cursus.*

*En commençant avec des définitions et propriétés des fluides et allant jusqu'à la démonstration des équations de d'Euler et de Navier Stokes instantanées et moyennées. Ce cours est consacré aussi à l'utilité de l'analyse dimensionnelle, la tension superficielle et acquérir des notions fondamentales sur la couche limite et ces grandeurs caractéristiques, ainsi que les écoulements autour des obstacles. Les équations moyennées sont développées dans le chapitre turbulence ; les méthodes de modélisations des tenseurs de Reynolds sont mentionnées.*

*A la fin de chaque chapitre, des exercices sont proposés avec des réponses permettant de tester les connaissances des étudiants et de se préparer aux examens.*

# Sommaire

<b>I</b>	<b>DEFINITIONS ET PROPRIETES DES FLUIDES</b> .....	01
I.1	Introduction .....	02
I.2	Analyse dimensionnelle .....	02
I.2.1	Equation aux dimensions .....	03
I.2.2	Système international (SI) .....	03
I.2.3	Système CGS .....	04
I.3	Définition d'un fluide .....	05
I.4	Fluide parfait et fluide réel .....	06
I.5	Fluide Compressible et incompressible .....	06
I.6	Les caractéristiques d'un fluide .....	06
I.6.1	La viscosité .....	06
I.6.2	La masse volumique .....	07
I.7	Calcul du couple des disques en fonction de la contrainte de cisaillement .....	08
I.8	Ecoulements laminaires et turbulents .....	09
I.9	Ecoulements internes et externes .....	10
I.9.1	Ecoulements internes .....	10
I.9.2	Ecoulements externes .....	11
I.10	Exemples évolution de la forme géométrique (aérodynamique) .....	11
I.10.1	Forme géométrique d'une voiture .....	11
I.10.2	Forme géométrique d'une balle .....	12
I.11	Etude des écoulements externes .....	13
I.11.1	Etude expérimentale et visuel : Moyens expérimentaux .....	13
I.11.2	Etude théorique .....	13
I.12	Exercices avec réponses .....	14
<b>II</b>	<b>TENSION SUPERFICIELLE</b> .....	16
II.1	Introduction .....	17
II.2	Forces de cohésion et d'adhésion .....	17
II.3	La loi de <i>Young Laplace</i> .....	20
II.4	Angles de contact et capillarité .....	21
II.5	Phénomène de mouillabilité .....	23
II.6	Exercices avec réponses .....	25
<b>III</b>	<b>LES EQUATIONS DE CONSERVATION</b> .....	26
III.1	Conservation de la masse (Equation de continuité) .....	27
III.1.1	Le Théorème de Transport de <i>Reynolds</i> .....	27
III.1.2	Forme intégrale de l'équation de continuité .....	27
III.1.3	Forme différentielle de l'équation de continuité .....	28
III.1.4	Forme vectorielle de l'équation de continuité .....	30

III.2	Conservation de la quantité de mouvement (Equations d' <i>Euler</i> ) .....	31
III.2.1	La 2 <sup>ème</sup> loi de <i>Newton</i> .....	32
III.2.2	Forme vectorielle de l'équation d' <i>Euler</i> .....	35
III.3	Conservation de la quantité de mouvement (Equations de <i>Navier Stokes</i> ) .....	36
III.3.1	Le tenseur de contraintes total .....	36
III.3.2	Les contraintes normales et les contraintes tangentielles .....	36
III.3.3	Forme vectorielle de l'équation de <i>Navier Stokes</i> .....	38
III.4	Exercices avec réponses .....	40
<b>IV</b>	<b>LA COUCHE LIMITE</b> .....	<b>42</b>
IV.1	Introduction .....	43
IV.2	Grandeurs caractéristiques de la couche limite .....	44
IV.2.1	Epaisseur .....	44
IV.2.2	Epaisseur de déplacement .....	45
IV.2.3	Epaisseur de la quantité de mouvement .....	46
IV.2.4	Autres facteurs et coefficients .....	46
IV.3	Evolution de la couche limite .....	47
IV.3.1	Plaque plane .....	47
IV.3.2	Une forme arrondie (profil, cylindre....) .....	48
IV.4	Formules utilisées pour le calcul des paramètres de la couche limite (cas d'une plaque plane) .....	50
IV.5	Exercices avec réponses .....	51
<b>V</b>	<b>ÉCOULEMENTS AUTOUR DES OBSTACLES</b> .....	<b>53</b>
V.1	Introduction .....	54
V.2	Evolution expérimentale de $C_x(R_e)$ et description de l'écoulement autour d'une sphère lisse .....	56
V.2.1	Evolution expérimentale de $C_x(R_e)$ .....	56
V.2.2	Description de l'écoulement .....	57
V.3	Evolution expérimentale de $C_x(R_e)$ et description de l'écoulement autour d'un cylindre .....	59
V.3.1	Evolution expérimentale de $C_x(R_e)$ .....	59
V.3.2	Description de l'écoulement .....	60
V.4	Écoulement autour d'un hydrofoil .....	61
V.5	Écoulement autour d'une hélice .....	62
V.6	Écoulement autour d'une plaque plane (calcul du $C_x$ ) .....	63
V.7	Quelques paramètres influents sur le coefficient de Trainée $C_x$ .....	65
V.7.1	Position de la plaque .....	65
V.7.2	La surface .....	65

V.8	Optimisation des formes géométriques .....	65
V.9	Exercices avec réponses .....	67
<b>VI</b>	<b>TURBULENCE</b> .....	<b>69</b>
VI.1	Introduction .....	70
VI.2	Les equations moyennées .....	70
VI.2.1	Principe .....	70
VI.3	Rappel des equations instantanées .....	71
VI.3.1	Equations principales .....	71
VI.4	Critère de choix et classification .....	74
	<b>ANNEXES</b> .....	<b>75</b>
	<b>REFERENCES</b> .....	<b>78</b>

# Liste des figures

Fig (I.1)	Branches de la mécanique des fluides .....	02
Fig (I.2)	Etapas à suivre pour le calcul de la puissance du moteur à bord .....	04
Fig (I.3)	Profil de vitesse (écoulement autour d'une plaque plane) .....	06
Fig (I.4)	Cylindre mobile autour d'un cylindre fixe .....	08
Fig (I.5)	(a) écoulement laminaire (b) écoulement turbulent .....	09
Fig (I.6)	Écoulement dans une conduite (écoulement interne) .....	10
Fig (I.7)	Expérience de <i>Reynolds</i> (différents régimes d'écoulements) .....	11
Fig (I.8)	Écoulement autour d'un cylindre (écoulement externe) .....	11
Fig (I.9)	Evolution des formes géométriques des voitures .....	12
Fig (I.10)	(a) écoulement autour d'une balle lisse (b) écoulement autour d'une balle de golf .....	12
Fig (II.1)	Efforts intermoléculaires des différentes molécules dans un liquide avec une surface libre .....	17
Fig (II.2)	Exemples de la tension superficielle .....	18
Fig (II.3)	Expérience d'un film de savon entre 02 tiges .....	18
Fig (II.4)	L'expérience de l'anneau .....	20
Fig (II.5)	Bulle sphérique d'eau .....	20
Fig (II.6)	Bulle d'eau savonneuse .....	21
Fig (II.7)	Formation d'un ménisque dans un tube de verre plongé dans un liquide mouillant .....	22
Fig (II.8)	Ascension et dépression capillaires .....	23
Fig (II.9)	Mouillabilité d'une goutte d'eau sur différents matériaux .....	24
Fig (II.10)	Goutte d'eau sur une feuille de cactus .....	24
Fig (III.1)	Vecteur normal et vitesse sur une surface élémentaire $dA$ .....	27
Fig (III.2)	Débit entrant et sortant pour un petit élément $dv$ .....	29
Fig (III.3)	Vecteur normal et vitesse sur une surface élémentaire $dA$ .....	31
Fig (III.4)	La Contrainte normale et les contraintes tangentiels sur une surface élémentaire $dA$ .....	33
Fig (III.5)	La Contrainte normale et les contraintes tangentiels sur le plan $X$	34
Fig (IV.1)	Schéma descriptif de la couche limite .....	43
Fig (IV.2)	Formation d'une couche limite sur une plaque plane .....	43
Fig (IV.3)	Décollement de la couche limite .....	44
Fig (IV.4)	Épaisseur de la couche limite .....	44
Fig (IV.5)	Épaisseur de déplacement .....	45
Fig (IV.6)	Épaisseur de quantité de mouvement .....	46
Fig (IV.7)	Structure de l'écoulement dans la couche limite .....	47

Fig (IV.8)	Evolution du profil de vitesse .....	48
Fig (IV.9)	Décollement de la couche limite (écoulement autour d'un cylindre)	49
Fig (V.1)	Les forces de pression et les forces de frottement exercées sur un profil.....	54
Fig (V.2)	La force de trainée et la force de portance exercées sur un profil .....	55
Fig (V.3)	Influence de la forme géométrique sur le coefficient de trainée .....	55
Fig (V.4)	L'évolution du coefficient de trainée en fonction du nombre de <i>Reynolds</i> $R_e$ (cas d'une sphère lisse) .....	56
Fig (V.5)	Description de l'écoulement en fonction du nombre de <i>Reynolds</i> $R_e$ (cas d'une sphère lisse) .....	59
Fig (V.6)	L'évolution du coefficient de trainée en fonction du nombre de <i>Reynolds</i> $R_e$ (cas d'un cylindre) .....	59
Fig (V.7)	Description de l'écoulement en fonction du nombre de <i>Reynolds</i> $R_e$ (cas d'un cylindre) .....	61
Fig (V.8)	Coefficient de portance $C_z$ en fonction de l'angle d'incidence (cas d'un hydrofoil) .....	62
Fig (V.9)	Cas de l'écoulement autour d'une hélice marine .....	63
Fig (V.10)	Coefficient de trainée $C_x$ en fonction de nombre de <i>Reynolds</i> $R_e$ (cas d'une plaque plane à différents coefficient de rugosité) .....	64
Fig (V.11)	Écoulement autour d'une plaque plane.	65
Fig (V.12)	Choix de la surface pour le calcul du Coefficient de trainée $C_x$ (différentes formes géométriques) .....	65
Fig (V.13)	Coefficient de trainée $C_x$ en fonction du nombre de <i>Froude</i> $F_r$ (une coque avec et sans un bulbe) .....	66
Fig (VI.1)	Champs de vitesse en un point dans un régime turbulent .....	70
Fig (VI.2)	Structure de l'écoulement laminaire et turbulent (cas d'une fumée de cigarette) .....	70

# Liste des tableaux

Tab (I.1)	Unités fondamentales du système international (SI) .....	03
Tab (I.2)	Dimensions et unités en système international (SI) et anglo-saxon .....	04
Tab (II.1)	Angle de contact et capillarité entre 02 matériaux différents .....	23
Tab (IV.1)	Les formules de <i>Blasius</i> et <i>Prandtl</i> pour le calcul des paramètres de la couche limite (cas d'une plaque plane) .....	50
Tab (V.1)	Valeurs numériques du coefficient de trainée en fonction du nombre de <i>Reynolds</i> $R_e$ (cas d'une sphère lisse) .....	56
Tab (V.2)	Description des zones caractéristiques de la courbe du coefficient de trainée (cas d'une sphère lisse) .....	56
Tab (V.3)	Valeurs numériques du coefficient de trainée en fonction du nombre de <i>Reynolds</i> $R_e$ (cas d'un cylindre) .....	60
Tab (VI.1)	Inconnus à calculer pour le cas des équations instantanées et moyennées .....	74

# Liste des symboles

## SYMBOLES LATINS

$C_L, C_z$	Coefficient de portance	[–]
$C_D, C_x$	Coefficient de trainée	[–]
$C_f$	Coefficient de frottement local	[–]
$C_F$	Coefficient de frottement global	[–]
$dT$	Poussée élémentaire	[N]
$dQ$	Couple élémentaire	[N.m]
$d, D$	Diamètre	[m]
$\vec{D}, F_x$	La force de trainée	[N]
$E$	Energie	[N.m] ou <i>Joule</i>
$F$	Force	[kg.m/s <sup>2</sup> ]
$F_a$	Force d'adhésion	[kg.m/s <sup>2</sup> ]
$F_c$	Force de cohésion	[kg.m/s <sup>2</sup> ]
$f$	Fréquence	[s <sup>-1</sup> ]
$F_r$	Nombre de <i>Froude</i>	[–]
$g$	Accélération de pesanteur	[m/s <sup>2</sup> ]
$h$	Hauteur de capillarité	<i>m</i>
$H$	Facteur de forme	[–]
$I$	Intensité du courant électrique	[A]
$i$	Angle d'incidence	[°]
$L$	Longueur	[m]
$\vec{L}$	La force de portance	[N]
$m$	Masse	[kg]
$P$	Pression	[N/m <sup>2</sup> ] ou <i>Pascal</i>
$P_i$	Pression intérieur	[N/m <sup>2</sup> ] ou <i>Pascal</i>
$P_o, P_{out}$	Pression extérieur	[N/m <sup>2</sup> ] ou <i>Pascal</i>
$\bar{P}$	Pression moyenne	[N/m <sup>2</sup> ] ou <i>Pascal</i>
$P'$	Fluctuation de la pression	[N/m <sup>2</sup> ] ou <i>Pascal</i>
$P_E$	Puissance de remorquage	[N]
$q_m$	Débit massique	[kg/s]
$q_v$	Débit volumique	[m <sup>3</sup> /s]
$r, R$	Rayon	[m]
$Re$	Nombre de <i>Reynolds</i>	[–]
$Re_x$	Nombre de <i>Reynolds</i> local	[–]
$Re_c$	Nombre de <i>Reynolds</i> critique	[–]
$R_T$	Résistance totale	[N]
$S$	Surface	[m <sup>2</sup> ]
$T$	Couple	[N.m]
$U, \vec{V}$	Vitesse	[m/s]
$u$	Vitesse suivant <i>X</i>	[m/s]
$\bar{u}$	Vitesse moyenne	[m/s]
$\acute{u}$	Fluctuation de la vitesse	[m/s]

$v$	Vitesse suivant $Y$	$[m/s]$
$w$	Vitesse suivant $Z$	$[m/s]$
$W$	Travail	$[N.m]$ ou <i>Joule</i>

## SYMBOLES GRECS

$\tau$	Contrainte de cisaillement	$[N/m^2]$ ou <i>Pascal</i>
$\sigma$	Tension superficielle	$[N/m]$
$\sigma_{sl}$	Tension superficielle solide/liquide	$[N/m]$
$\sigma_{lv}$	Tension superficielle liquide/vapeur	$[N/m]$
$\sigma_{sv}$	Tension superficielle solide/vapeur	$[N/m]$
$\rho$	Densité	$[kg/m^3]$
$\gamma$	Poids spécifique	$[N/m^3]$
$\mu$	Viscosité dynamique	$[Kg/m.s]$
$\delta_{ij}$	Symbole de Kronecker	$[-]$
$\delta$	Epaisseur de la couche limite	$[m]$
$\delta^*$	Epaisseur de déplacement	$[m]$
$\theta$	Epaisseur de la quantité de mouvement	$[m]$
$\nabla$	Volume	$[m^3]$
$\Omega$	Vitesse angulaire	$[s^{-1}]$
$\varepsilon$	Rugosité	$[m]$



# Chapitre I

## DEFINITIONS ET PROPRIETES DES FLUIDES

<b>I</b>	<b>DEFINITIONS ET PROPRIETES DES FLUIDES .....</b>	<b>01</b>
I.1	Introduction .....	02
I.2	Analyse dimensionnelle .....	02
I.2.1	Equation aux dimensions .....	02
I.2.2	Système international (SI) .....	03
I.2.3	Système CGS .....	04
I.3	Définition d'un fluide .....	05
I.4	Fluide parfait et fluide réel .....	06
I.5	Fluide Compressible et incompressible .....	06
I.6	Les caractéristiques d'un fluide .....	06
I.2.6	La viscosité .....	06
I.2.6	La masse volumique .....	07
I.7	Calcul du couple des disques en fonction de la contrainte de cisaillement .....	08
I.8	Ecoulements laminaires et turbulents .....	09
I.9	Ecoulements internes et externes .....	10
I.9.1	Ecoulements internes .....	10
I.9.2	Ecoulements externes .....	11
I.10	Exemples évolution de la forme géométrique (aérodynamique) .....	11
I.10.1	Forme géométrique d'une voiture .....	11
I.10.2	Forme géométrique d'une balle .....	12
I.11	Etude des écoulements externes .....	13
I.11.1	Etude expérimentale et visuel : Moyens expérimentaux .....	13
I.11.2	Etude théorique .....	13
I.12	Exercices avec réponses .....	14

## I.1 Introduction :

La mécanique des fluides est la science des lois de l'écoulement des fluides. Elle est la base du dimensionnement des conduites de fluides et des mécanismes de transfert des fluides. C'est une branche de la physique qui étudie les écoulements de fluides c'est-à-dire des liquides et des gaz lorsque ceux-ci subissent des forces ou des contraintes. Elle comprend deux grandes sous branches:

- La statique des fluides, ou hydrostatique qui étudie les fluides au repos. C'est historiquement le début de la mécanique des fluides, avec la poussée d'Archimède et l'étude de la pression.
- La dynamique des fluides qui étudie les fluides en mouvement. Comme autres branches de la mécanique des fluides.

On distingue également d'autres branches liées à la mécanique des fluides :

L'hydraulique, l'hydrodynamique, l'aérodynamique, ... Une nouvelle approche a vu le jour depuis quelques décennies: la mécanique des fluides numérique (CFD ou Computational Fluid Dynamics en anglais), qui simule l'écoulement des fluides en résolvant les équations qui les régissent à l'aide d'ordinateurs.

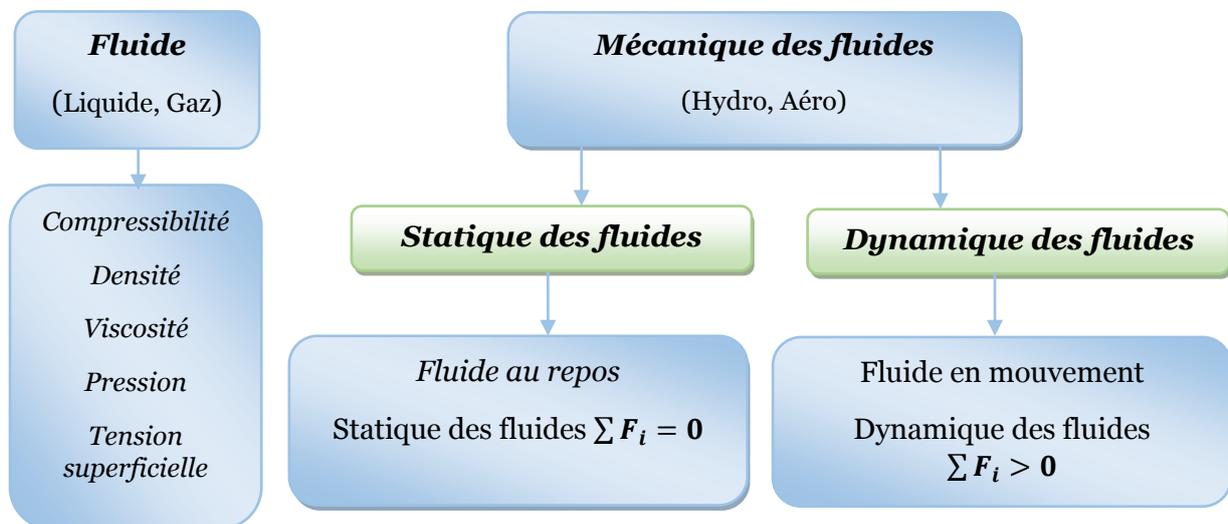


Fig (I.1) Branches de la mécanique des fluides.

## I.2 Analyse dimensionnelle :

L'utilisation des dimensions permet de savoir si une expression littérale est homogène ou non. Cela permet de rechercher d'éventuelles erreurs. Mais l'analyse des dimensions ou analyse dimensionnelle permet de retrouver, de deviner des lois physiques lorsque la résolution théorique est trop complexe.

**I.2.1 Equation aux dimensions :**

On appelle équation aux dimensions une équation reliant la dimension d'une grandeur  $G$  a celles des grandeurs de base.

$$[G] = T^\alpha . L^\beta . M^\gamma . I^\delta . \Theta^\epsilon . J^\zeta . N^\eta$$

Ces grandeurs sont respectivement : temps, longueur est le mètre, masse, intensité de courant, température, intensité lumineuse, quantité de matière.

**Exemple :** Conversion d'unité :

Pression :  $P = F/S = M . L . T^{-2} . L^{-2} = M . L^{-1} . T^{-2}$

Pour les unités mécaniques le choix le plus courant est de prendre la longueur, la masse et le temps. Il existe 2 systèmes d'unités :

**I.2.2 Système international (SI) :**

Le SI est fondé sur un choix de sept unités de base bien définies et considérées par convention comme indépendantes du point de vue dimensionnel : le mètre, le kilogramme, la seconde, l'ampère, le kelvin, la mole et la candela. Les unités dérivées sont formées en combinant les unités de base d'après les relations algébriques qui lient les grandeurs correspondantes

**Tab (I.1)** Unités fondamentales du système international (SI).

<b>Grandeur</b>	<b>Nom</b>	<b>Symbole</b>	<b>Dimension</b>
Longueur	Mètre	<i>m</i>	<i>L</i>
Masse	Kilogramme	<i>kg</i>	<i>M</i>
Temps	Seconde	<i>s</i>	<i>s</i>
Intensité du courant électrique	Ampère	<i>A</i>	<i>I</i>
Température thermodynamique	Kelvin	<i>K</i>	$\Theta$
Quantité de matière	Mole	<i>mol</i>	<i>N</i>
Intensité lumineuse	Candela	<i>cd</i>	<i>J</i>

Le tableau I.2 montre les dimensions et les unités en système internationale et anglo-saxon de quelques grandeurs physiques.

## Définitions et propriétés des fluides

**Tab (I.2)** Dimensions et unités en système international (SI) et anglo-saxon.

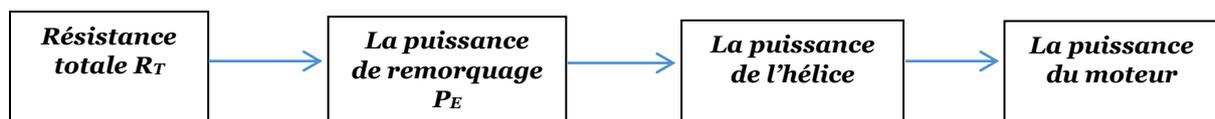
<b>Grandeur</b>	<b>Symbole</b>	<b>Dimension</b>	<b>S.I</b>	<b>Anglo-Saxon</b>
Surface	$A$	$L^2$	$m^2$	$ft^2$
Volume	$\nabla$	$L^3$	$m^3$	$ft^3$
Vitesse	$v$	$L/T$	$m/s$	$ft/sec$
Accélération	$a$	$L/T^2$	$m/s^2$	$ft/sec^2$
Vitesse angulaire	$\Omega$	$T^{-1}$	$s^{-1}$	$sec^{-1}$
Force	$F$	$ML/T^2$	$kg.m/s^2$	$slug.ft/sec^2$ ou $lb$
Densité	$\rho$	$M/L^3$	$kg/m^3$	$slug/ft^3$
Poids spécifique	$\gamma$	$M/L^2T^2$	$N/m^3$	$lb/ft^3$
Fréquence	$f$	$T^{-1}$	$s^{-1}$	$sec^{-1}$
Pression	$p$	$M/LT^2$	$N/m^2$ ou Pascal	$lb/ft^2$
Contrainte	$\tau$	$M/LT^2$	$N/m^2$ ou Pascal	$lb/ft^2$
Tension superficielle	$\sigma$	$M/T^2$	$N/m$	$lb/ft$
Travail	$W$	$ML^2/T^2$	$N.m$ ou Joule	$ft.lb$
Energie	$E$	$ML^2/T^2$	$N.m$ ou Joule	$ft.lb$
Taux de chaleur	$\dot{Q}$	$ML^2/T^3$	$J/s$	$Btu/sec$

### I.2.3 Système CGS :

Système CGS Le système centimètre-gramme-seconde (CGS abrégé ou CGS) est un système métrique d'unités physiques basées sur le centimètre comme unité de longueur, le gramme comme unité de masse, et la seconde comme unité de temps. Il permet d'exprimer toutes les grandeurs de la mécanique.

### Exemple : Résistance à l'avancement d'un navire : $R_T$

Les Concepts résistance et propulsion sont indissociable et étroitement liés entre eux car pour déterminer la puissance, il faut en premier connaître la résistance à l'avancement du navire qui est un sujet très important de l'hydrodynamique navale car il s'agit de déterminer l'effort à vaincre pour déplacer un engin maritime, et par conséquent la motorisation requise pour propulser le navire à une vitesse déterminée.



**Fig (I.2)** Etapes à suivre pour le calcul de la puissance du moteur à bord.

D'après les hypothèses faites sur les paramètres les plus influents pour décrire un phénomène physique, l'analyse dimensionnelle, permet de déterminer les nombre sans dimensions indépendants.

## Définitions et propriétés des fluides

Donc, la première étape pour étudier un phénomène physique est l'identification des variables importantes. La relation mathématique entre ces variables constitue une loi de la physique.

Pour des systèmes complexes ceci peut être difficile. Dans ce cas une méthode de modélisation telle que l'analyse dimensionnelle est indispensable.

Les propriétés physiques (les paramètres) qui influent sur la résistance à l'avancement  $R_T$  doivent être au minimum:

$\rho$	Masse volumique de l'eau ( $kg/m^3$ )
$U$	Vitesse d'avance ( $m/s$ )
$L$	Longueur caractéristique du navire ( $m$ )
$\mu$	Viscosité de l'eau ( $kg/m.s$ )
$g$	Accélération de la pesanteur ( $m/s^2$ )
$P$	Pression ( $kg/m.s^{-2}$ )

On peut donc supposer que la résistance à l'avancement  $R_T$  est en fonction des paramètres cités ci-dessus :

$$R_T = f(\rho, U, L, \mu, g, P)$$

L'équation peut être réécrite comme une relation entre nombre adimensionnels à partir des paramètres intervenants dans cette équation (6 paramètres), cette homogénéité est connue sous le nom de *Vaschy-Buckingham* ou théorème Pi, est un des théorèmes de base de l'analyse dimensionnelle, qui suppose que si une équation physique met en jeu  $n$  variables physiques, celles-ci dépendant de ( $k$ ) unités fondamentales alors il existe une équation équivalente mettant en jeu ( $n - k$ ) variables sans dimensions construites à partir des variables originelles.

Comme le nombre de grandeurs fondamentales est égal à 3, les nombres adimensionnelles entrant dans la relation finale doivent être égal à  $6-3=3$ .

### **Application :**

La formule de Stokes-Oseen pour le calcul de la force de trainée  $F$  d'une sphère de diamètre  $d$  et pour un écoulement de faible vitesse  $v$ , est donnée par  $F = 3\pi\mu d v + (9\pi/16)(\rho v^2 d^2)$ . La formule est-elle valide dimensionnellement ?

### **Réponse :**

1.  $[ML.T^{-2}] = [ML.T^{-2}]$  la formule est valide dimensionnellement.

### **I.3 Définition d'un fluide :**

Un fluide peut être considéré comme étant une substance formé d'un grand nombre de particules matérielles, très petites et libres de se déplacer les unes par rapport aux autres. C'est donc un milieu matériel continu, déformable, sans rigidité et qui peut s'écouler. Les forces de cohésion entres particules élémentaires sont très faibles de sorte que le fluide est un corps sans forme propre qui prend la forme du récipient qui

le contient, par exemple: les métaux en fusion sont des fluides qui permettent par moulage d'obtenir des pièces brutes de formes complexes.

### I.4 Fluide parfait et fluide réel :

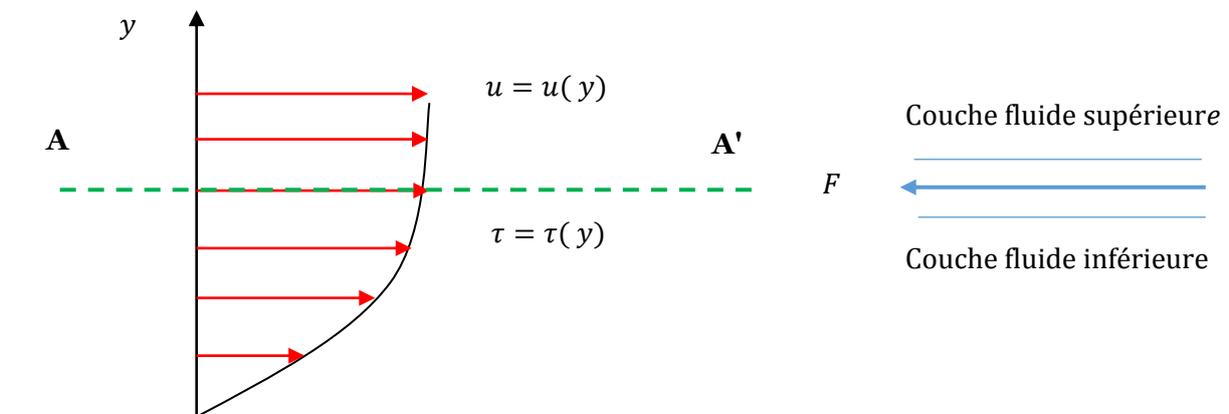
Un fluide est dit parfait s'il est possible de décrire son mouvement sans prendre en compte les effets de frottement. Contrairement à un fluide parfait, qui n'est qu'un modèle pour simplifier les calculs, pratiquement inexistant dans la nature, dans un fluide réel les forces tangentielles de frottement interne qui s'opposent au glissement relatif des couches fluides sont prises en considération.

### I.5 Fluide Compressible et incompressible:

Un fluide est dit incompressible lorsque le volume occupé par une masse donnée ne varie pas en fonction de la pression extérieure. Les liquides peuvent être considérés comme des fluides incompressibles (eau, huile, etc.). Un fluide est dit compressible lorsque le volume occupé par une masse donnée varie en fonction de la pression extérieure. Les gaz sont des fluides compressibles. Par exemple, l'air, l'hydrogène, le méthane à l'état gazeux, sont considérés comme des fluides compressibles.

### I.6 Les caractéristiques d'un fluide :

#### I.6.1 La viscosité :



**Fig (I.3)** Profil de vitesse (écoulement autour d'une plaque plane).

La viscosité est une propriété du fluide, elle se manifeste quand le fluide est en mouvement. On considère un écoulement avec un profil de vitesse montré ci-dessus. Prenant une section adimensionnelle  $AA'$ , Les particules de la couche fluide avec une vitesse supérieure se glissent sur les particules fluides de la couche inférieure, ces dernières et avec le frottement freinent les particules de la couche supérieurs (Force  $F$  exercée entre les 2 couches due aux frottements).

La force de frottement  $F$  qui s'exerce à la surface de séparation de ces deux couches s'oppose au glissement d'une couche sur l'autre. Chaque couche fluide ne s'écoule pas à la même vitesse.

$$F = -A\mu \frac{du}{dy}$$

Relation proportionnelle :

$$\tau \propto \frac{du}{dy}$$

La loi de *Newton* sur la viscosité :

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

$\mu$ : Coefficient de viscosité ou viscosité dynamique.

$du/dy$  : Taux de cisaillement.

$\tau$ : Contrainte de cisaillement.

Unité : Dans le système international (SI), l'unité de viscosité est le Poiseuille (Pl) :

$$1 \text{ Pl} = 1 \text{ kg/m.s}$$

On trouve encore les tables de valeurs numériques le coefficient de viscosité dans un ancien système d'unités (CGS) :

L'unité est le Poise (Po);  $1 \text{ Pl} = 10 \text{ Po}$

Dans de nombreuses formules apparaît le rapport de la viscosité dynamique  $\mu$  et de la masse volumique  $\rho$ , ce rapport est appelé viscosité cinématique.

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

**Unité SI** :  $\text{m}^2/\text{s}$

**Système CGS** : le Stoke (St)  $1\text{m}^2/\text{s} = 10^6 \text{ cSt}$ .

La viscosité cinématique caractérise le temps d'écoulement d'un liquide. Par contre, la viscosité dynamique correspond à la réalité physique du comportement d'un fluide soumis à une sollicitation (effort). En d'autre terme, cette dernière exprime la « rigidité » d'un fluide à une vitesse de déformation en cisaillement.

### I.6.2 La masse volumique :

C'est le rapport de la masse ( $m$ ) sur le volume ( $\nabla$ ) du corps considéré :

$$\rho = \frac{m}{\nabla}$$

**Unité SI** :  $\text{kg}/\text{m}^3$

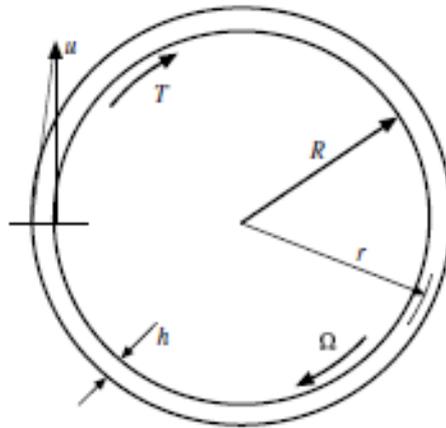
Comme les solides et liquides sont incompressibles, le volume peu dépendre de la température et pas du tout de la pression.  $\rho$  diminue un peu si la température augmente.

Les gaz sont compressibles :  $\nabla$  augmente si  $T$  augmente et  $\nabla$  diminue si  $P$  augmente.  
 $\rho$  varie d'un fluide à un autre.

**Exemple :**  $\rho_{H_2O} = 1000 \text{ kg/m}^3$   
 $\rho_{Air} = 1.225 \text{ kg/m}^3$

### I.7 Calcul du couple des disques en fonction de la contrainte de cisaillement :

Pour mesurer la viscosité, on considère un cylindre long tournant à l'intérieur d'un deuxième cylindre, comme le montre la figure I.4. Afin de faire tourner le cylindre intérieur avec la vitesse de rotation  $\Omega$ , un couple  $T$  doit être appliqué.  
 La vitesse du cylindre interne est  $R\Omega$  et la vitesse du cylindre extérieur est nulle. La distribution de vitesse dans l'intervalle  $h$  entre les cylindres est une distribution linéaire telle que représentée, de sorte que :



**Fig (I.4)** Cylindre mobile autour d'un cylindre fixe.

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \mu \frac{R\Omega}{h}$$

Le couple  $T$  est calculé comme suit :

$$T = r \cdot \tau \cdot A$$

$$T = R \cdot \tau \cdot 2\pi RL$$

$$T = R \cdot \mu \frac{R\Omega}{h} \cdot 2\pi RL = 2\pi \frac{R^3 \Omega L \mu}{h}$$

### I.8 Ecoulements laminaires et turbulents :

La résistance interne dans un fluide à s'écouler est appelée viscosité cinématique (qui fait référence à la vitesse et au mouvement). Cette viscosité est la cause de la

## Définitions et propriétés des fluides

résistance hydrodynamique de l'eau sur la surface d'un bateau. En 1883, le physicien *Reynolds* a réalisé des expériences sur l'écoulement d'un fluide dans une conduite cylindrique, en augmentant progressivement la vitesse du fluide et en mettant l'évidence de 02 régimes d'écoulement laminaire et turbulent.

Reynolds a montré que le paramètre qui permettait de déterminer si l'écoulement est laminaire ou turbulent est un nombre sans dimension appelé nombre de Reynolds.

$$Re = \frac{\rho VL}{\mu}$$

$\rho$ : La masse volumique.

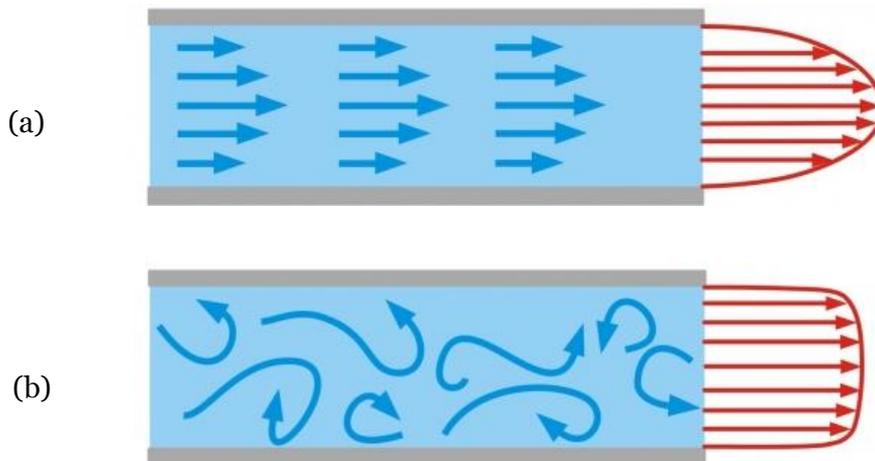
$U$ : La vitesse du fluide.

$L$ : Longueur du navire.

$\mu$ : La viscosité dynamique.

Le nombre de *Reynolds* mesure l'importance relative des forces d'inerties et les forces visqueuses. Pour n'importe quel écoulement laminaire, il existe une valeur bien déterminée du nombre de *Reynolds* pour laquelle l'existence de ce régime d'écoulement est menacée, et pour des valeurs inférieures à ce nombre critique de *Reynolds* l'écoulement est stable et il est décrit comme un ensemble de lames (couches) glissant les unes sur les autres d'une manière ordonnée.

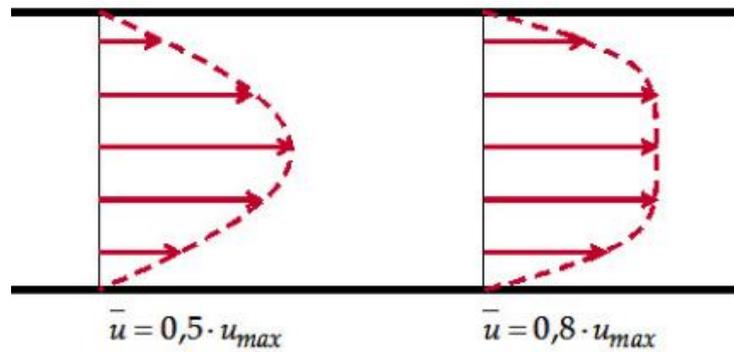
Les particules suivent des trajectoires parallèles et le fluide se comporte comme s'il était constitué de lames superposées glissant parfaitement les unes sur les autres. Au voisinage d'une surface solide, la vitesse de l'écoulement ralentit au fur et à mesure que l'on s'en approche pour finalement s'annuler au contact de celle-ci. Cette couche d'air freinée s'appelle " la couche limite ". Pour un nombre de *Reynolds* élevé, l'écoulement est toujours turbulent c.-à-d aléatoire et désordonné, et impossible d'analyser mais aménageables pour étudier des valeurs moyennes. La figure ci-dessus montre les lignes de courant dans une conduite pour 02 régimes différents.



**Fig (I.5)** (a) écoulement laminaire (b) écoulement turbulent.

### I.9 Ecoulements internes et externes :

#### I.9.1 Ecoulements internes : Exemple : écoulement dans une conduite.

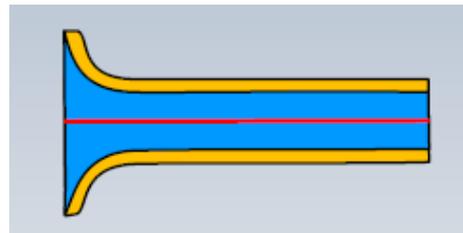


**Fig (I.6)** Ecoulement dans une conduite (écoulement interne).

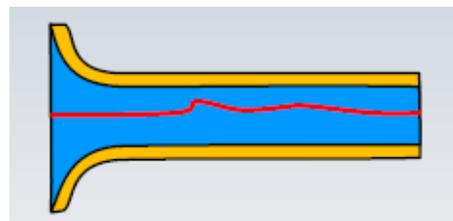
- La force de viscosité est dominante sur tout le champ de l'écoulement.
- L'influence de la viscosité (force de viscosité) s'étend du premier point jusqu'au dernier point de l'écoulement.
- Gradient de vitesse sur tout le champ de l'écoulement.

L'expérience de *Reynolds* a montré que si le nombre de *Reynolds*  $R_e < 2300$ , l'écoulement est considéré laminaire, et  $R_e > 2300$  il devient facilement turbulent.

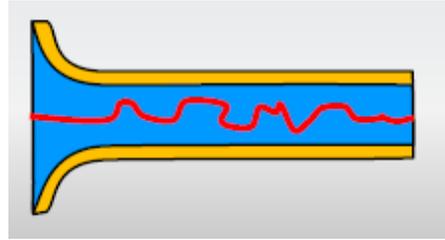
**Laminaire :**  $R_e < 2300$



**Transitoire:**  $2300 < R_e < 4200$



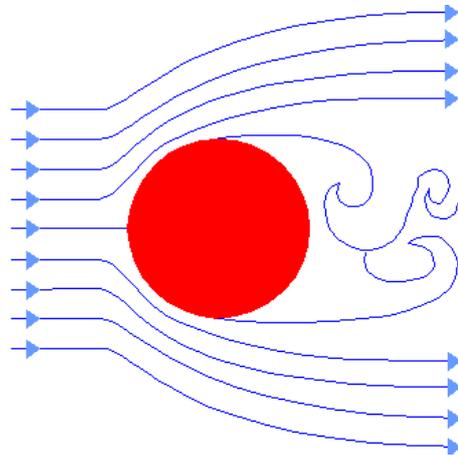
**Turbulent :**  $Re < 4200$



**Fig (I.7)** Expérience de *Reynolds* (différents régimes d'écoulements).

### **I.9.2 Écoulements externes :**

Pour les écoulements externes, la zone proche des parois, la force de viscosité est dominante, loin des parois, les forces de viscosité sont négligeables.



**Fig (I.8)** Écoulement autour d'un cylindre (écoulement externe).

On peut diviser l'écoulement externe en zones :

**Zone 1 :** Couche limite (influence de la viscosité).

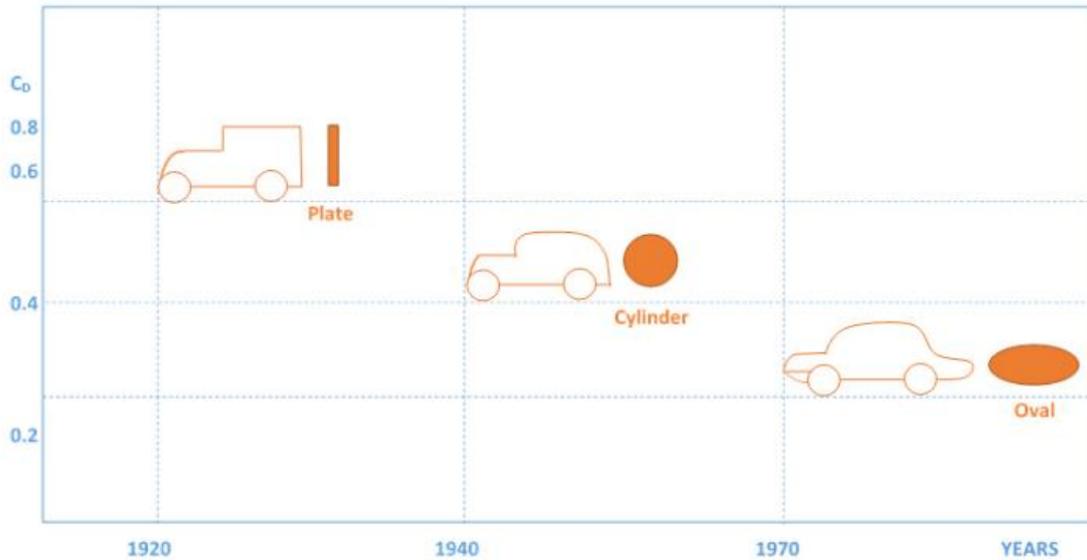
**Zone 2 :** Région inviscide (les forces de viscosité sont négligeables).

Pour les écoulements externes si :  $Re < 5 \cdot 10^5$  l'écoulement est considéré laminaire. Il est dit turbulent lorsque le nombre de *Reynolds*  $Re > 5 \cdot 10^5$ .

## **I.10 Exemples évolution de la forme géométrique (aérodynamique)**

### **I.10.1 Forme géométrique d'une voiture :**

Le but d'étudier l'écoulement externe, est de l'utiliser en design. La forme s'est développée entre 1920 jusqu'à maintenant, on remarque la réduction du coefficient de traînée ( $C_d$ ), synonyme d'une économie de fuel, réduire les émissions...

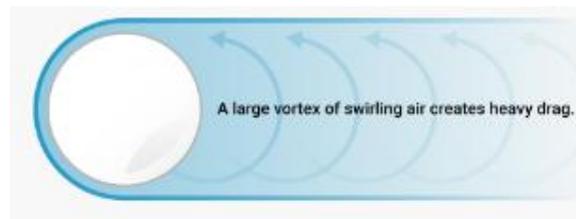


**Fig (I.9)** Evolution des formes géométriques des voitures.

### **I.10.2** Forme géométrique d'une balle :

La balle de golf génère une traînée moins importante par rapport à une balle lisse grâce à sa forme géométrique constituée des alvéoles sur toute la surface de la balle, lorsque l'écoulement est généré autour de la balle de golf, les alvéoles se remplissent d'air ce qui permet de retarder le point de décollement, synonyme d'une réduction de traînée.

(a) Vortex géants générant une traînée supérieure.



(b) Vortex petits générant une traînée inférieure.



**Fig (I.10)** (a) écoulement autour d'une balle lisse (b) écoulement autour d'une balle de golf.

La même chose pour les carènes des navires, on étudie l'écoulement externe pour réduire le coefficient de résistance total, en jouant sur la conception géométrique.

## **I.11 Etude des écoulements externes :**

Il existe 2 approches :

### **I.11.1 Etude expérimentale et visuel : Moyens expérimentaux**

#### **Exemples :**

- Bassin d'essais des carènes pour les maquettes navires.
- Tunnel hydrodynamique pour les hélices.
- Soufflerie.

**But :** Les mesures des champs de vitesse, la pression, le coefficient de la résistante totale, la poussée et le couple des hélices...

### **I.11.2 Etude théorique :**

Résoudre les équations gouvernantes l'écoulement (purement théorique).

- Conservation de masse.
- Conservation de quantité de mouvement.
- Conservation d'énergie (Première loi de la thermodynamique).
- 2 ème loi de la thermodynamique.

Numérique : CFD (Computational Fluid Dynamics).

**I.12 Exercices avec réponses :**

**Exercice 01 :**

Un fluide Newtonien ayant une densité  $d = 0.92$  et une viscosité cinématique  $\nu = 4.10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$  s'écoule sur une plaque plane en régime permanent. Le profil de vitesse près de la surface (voir annexe I.1), et suit la loi  $u(y)/U = \sin(\pi y/2\delta)$ . Déterminer l'amplitude et la direction de la contrainte de cisaillement développée sur la plaque en fonction de  $U$  et  $\delta$ .

**Réponse :**

1.  $\tau = 0,578 \frac{U}{\delta} \text{ N.m}^{-2}$

**Exercice 02 :**

Un fluide à une viscosité absolue de  $0.048 \text{ Pa.s}$  et une densité de  $0,913$  (voir annexe I.2). Calculer le gradient des vitesses et l'intensité de la contrainte tangentielle à la paroi et aux points situés à  $25 \text{ mm}$ ,  $50 \text{ mm}$ , et  $75 \text{ mm}$  et de celle-ci, en admettant (a) une distribution de vitesse linéaire, (b) une distribution de vitesse parabolique. La parabole de la figure a son sommet en (A). L'origine est en (B).

**Réponse :**

1.  $\frac{dU}{dy} = 15$

2.  $\tau = 0,72 \text{ Pa}$

**Exercice 03 :**

Une plaque plane de dimensions  $0,5 \text{ m} \times 2 \text{ m}$  est remorquée horizontalement sur une paroi à une vitesse de  $5 \text{ m/s}$ . Sachant que l'huile *SAE - 30* à  $38^\circ\text{C}$  sépare la plaque plane et la paroi d'une couche de  $2 \text{ mm}$ , et supposant que le profil de vitesse est linéaire, déterminer la force de frottement  $F$ . ( $F = \tau \cdot A$ ) (voir annexe I.3).

**Réponse :**

1.  $F = 250 \text{ N}$

**Exercice 04 :**

De l'huile ayant une viscosité remplit l'espace  $Y$  situé entre un cône rotatif et la base stationnaire (voir annexe I.4), le cône tourne à une vitesse angulaire  $\Omega$ . On négligeant les contraintes sur le fond du cône et on suppose que la distribution de la vitesse est linéaire. Donner l'expression de : la contrainte de cisaillement  $\tau$  en fonction de  $\alpha$  et  $Y$ ; la surface élémentaire  $dA$  en fonction de  $\alpha$  et  $y$ , la force élémentaire  $dF$  en fonction de  $\alpha, \mu$  et  $Y$ ; le couple élémentaire  $dT$  en fonction de  $\alpha, \mu$  et  $Y$  et le couple  $T$  en fonction de  $a$  et  $b$ . On donne :  $dy = ds \cos \alpha$ .

**Réponse :**

1.  $\frac{dv}{dy} = \frac{\mu \cdot y \cdot \text{tg} \alpha \cdot \Omega}{Y}$       2.  $dA = 2\pi y \cdot \left(\frac{\text{tg} \alpha}{\cos \alpha}\right) dy$       3.  $dF = \left(\frac{2\pi \cdot \mu \cdot \Omega \cdot \text{tg}^2 \alpha}{Y \cdot \cos \alpha}\right) y^2 dy$

4.  $dT = \left(\frac{2\pi \cdot \mu \cdot \Omega \cdot \text{tg}^3 \alpha}{Y \cdot \cos \alpha}\right) y^3 dy$       5.  $T = \frac{2\pi \cdot \mu \cdot \Omega \cdot \text{tg}^3 \alpha}{Y \cdot \cos \alpha} [(a + b)^4 - a^4]$

**Exercice 05 :**

Un pivot de palier utilisé sur l'arbre d'un instrument électrique est indiqué sur la figure en annexe (voir anx I.5). De l'huile ayant une viscosité remplit l'espace  $b$  situé entre l'arbre rotatif et la base stationnaire. Donner l'expression du couple visqueux sur l'arbre en fonction de  $\mu, \Omega, \theta, R$  et  $b$  (On suppose que la distribution de la vitesse est linéaire).

**Réponse :**

1.  $T = \frac{\pi\mu\Omega}{2b\sin\theta} R^4$

# Chapitre II

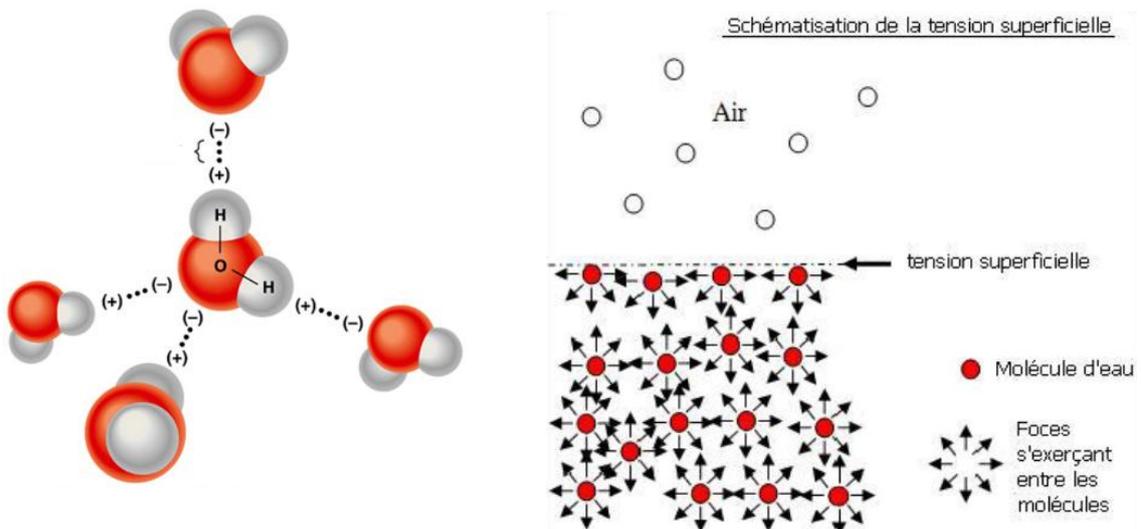
## TENSION SUPERFICIELLE

<b>II</b>	<b>TENSION SUPERFICIELLE .....</b>	<b>16</b>
II.1	Introduction .....	17
II.2	Forces de cohésion et d'adhésion .....	17
II.3	La loi de <i>Young Laplace</i> .....	20
II.4	Angles de contact et capillarité .....	21
II.5	Phénomène de mouillabilité .....	23
II.6	Exercices avec réponses .....	25

## II.1 Introduction:

L'interface entre le liquide et le gaz est caractérisé par un paramètre qui dépend de la nature physico-chimique du fluide et du gaz ainsi que la température et de la pression dans le gaz. Ce paramètre est appelé tension superficielle. Ce paramètre est lié aux interactions moléculaires d'un fluide (IMA- *Intermolecular attraction*). La molécule d'eau a des charges (+) et (-), les charges différentes créés une attraction intermoléculaire.

La figure ci-dessous représente qualitativement les efforts intermoléculaires des différentes molécules dans un liquide avec une surface libre. On peut remarquer que lorsque la molécule est totalement immergée dans le liquide, cette dernière est en équilibre puisque les efforts s'annulent deux à deux dans les deux directions du repère cartésien (attraction est dans tous les directions). En revanche lorsque la molécule s'approche de plus en plus de la surface libre, il y a alors un déséquilibre des forces dû à la tension de surface (les deux forces horizontales s'annulent) et par conséquent la molécule est tirée vers le bas.



**Fig (II.1)** Efforts intermoléculaires des différentes molécules dans un liquide avec une surface libre.

## II.2 Forces de cohésion et d'adhésion :

Le phénomène de tension de surface provient de deux forces intermoléculaires :

- **Forces de cohésion** : ce sont les forces d'attraction entre les molécules du liquide ;

- **Forces d'adhésion** : ce sont les forces entre les molécules de différents liquides ou entre un liquide et un solide.

**Exemples :**



(a.1)



(a.2)



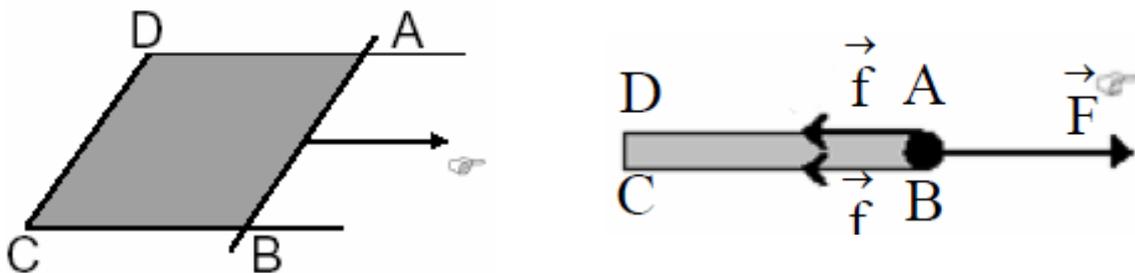
(b)

**Fig (II.2)** Exemples de la tension superficielle.

(a.1) et (a.2) la pièce d'aluminium et l'aiguille ne coulent pas au fond du verre.

(b) l'insecte peut se déplacer.

Pour en comprendre la signification physique considérons l'expérience représentée sur la figure (II.3). Elle consiste à étirer un film de savon entre deux tiges, distantes de  $b$ , en venant exercer un effort  $F$  dans la direction horizontale. Notons bien que cette force ne sert pas seulement à étirer le film mais aussi à maintenir le film avec une aire constante. En effet sans l'action de cette force, le film tendra à se rétracter pour retrouver une surface minimale.



**Fig (II.3)** Expérience d'un film de savon entre 02 tiges.

Pour déplacer le coté  $AB$  d'une distance  $\delta x$ , il faut fournir un travail :

$$\delta W = F \delta x$$

## Tension superficielle

Dans ce cas l'aire de la surface du fil va être augmentée de la quantité (en tenant compte les 2 faces du film).

$$\delta A = 2L \delta x$$

La tension superficielle est définie comme le travail produit par unité de surface (c'est une force de traction par unité de longueur agissant sur un élément de surface) :

$$\sigma = \frac{\delta W}{\delta A}$$

On voit que pour l'étirage du film de savon on a alors :

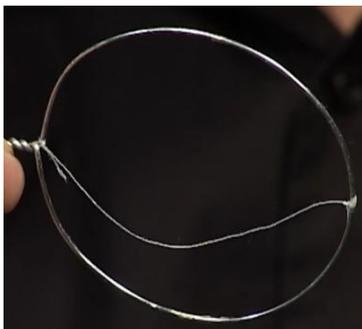
$$\sigma = \frac{F}{2L}$$

L'unité de mesure de la tension superficielle est  $N/m$ .

On notera que la tension superficielle diminue lorsque la température augmente : cela s'explique par le fait que les forces de cohésion intermoléculaires sont réduites par l'agitation thermique.

### Exemple :

- (a) Avec la fibre de verre fabriquant un anneau sur lequel on fixe un fil de coton, le fil ne doit pas être tendu mais au contraire, il tendra assez librement.
- (b) Plongeant l'anneau dans de l'eau additionnée de produit vaisselle, lorsqu'on le ressort, un film de savon apparait de chaque côté du fil qui reste non tendu.
- (c) Crevant alors l'une des surfaces savonneuse cette fois le fil se tend en formant un arc de cercle, en effet le film savonneux restant tire sur le fil pour pouvoir diminuer sa surface.
- (d) Si on creve ce film, le fil de coton le plus soumis à la tension superficielle créé par l'eau savonneuse épand de nouveau librement.



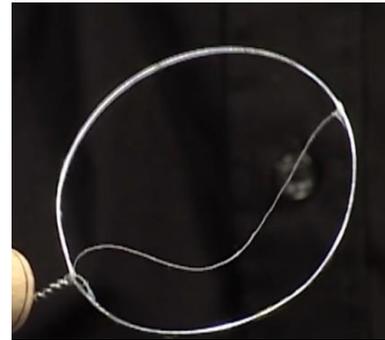
(a)



(b)



(c)

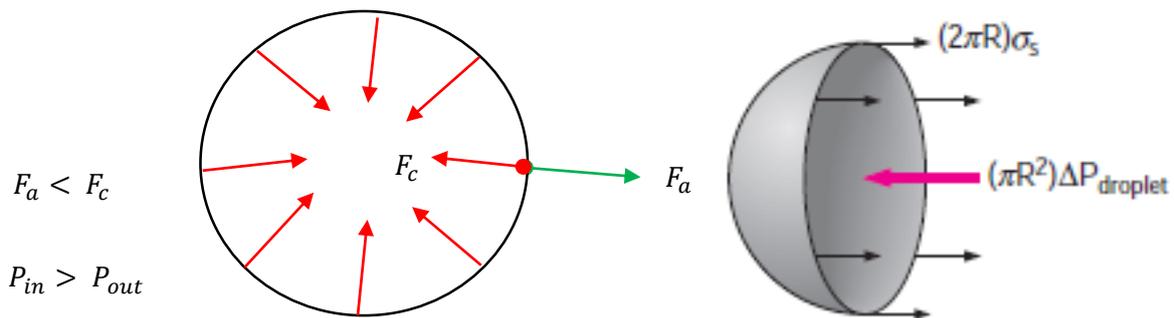


(d)

**Fig (II.4)** L'expérience de l'anneau.

**II.3 La loi de Young Laplace :**

On considère le cas d'une bulle sphérique de diamètre  $D$ , les forces de tension superficielle, qui sont dirigées vers l'intérieur de la goutte, exercent une compression à l'intérieur de celle-ci. La pression  $P_{in}$  dans la goutte est donc supérieure à celle du milieu extérieur  $P_0$ .



**Fig (II.5)** Bulle sphérique d'eau.

**Les forces de tension superficielle :**

$$F_c = F = \sigma \cdot L = \sigma \cdot (2\pi R)$$

**Les forces de pression :**

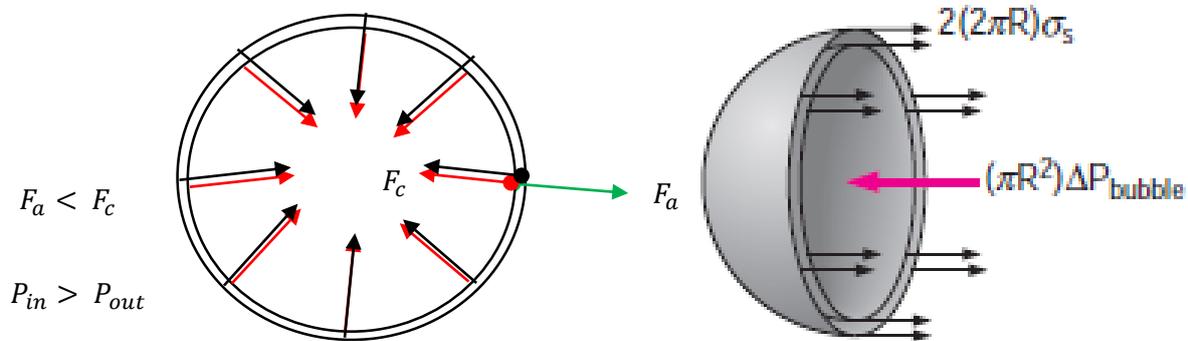
$$\Delta P(\pi R^2) = (P_{in} - P_{out})(\pi R^2)$$

$$P_{in} - P_{out} = \frac{2\sigma}{R}$$

Cette dernière relation est appelé la loi de *Young-Laplace* et elle montre que la pression à l'intérieur d'une goutte liquide est donc d'autant plus grande que la goutte est petite.

**Remarque :**

Une bulle est formée d'une membrane comportant deux surfaces (interne et externe) supposées de même rayon  $R$ , chacune d'elles étant le siège d'une tension superficielle. Les forces de pression qui ont globalement tendance à faire dilater la bulle, doivent donc compenser les forces de tension superficielle sur les deux interfaces.



**Fig (II.6)** Bulle d'eau savonneuse.

**Les forces de tension superficielle :**

$$F_c = F = \sigma \cdot L = 2\sigma \cdot (2\pi R)$$

**Les forces de pression :**

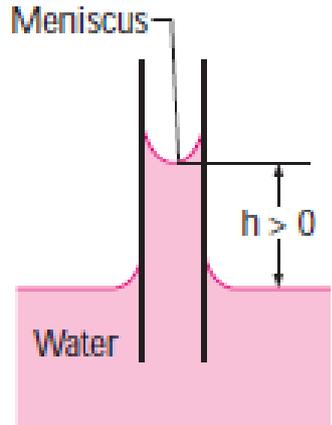
$$\Delta P(\pi R^2) = (P_{in} - P_{out})(\pi R^2)$$

$$P_{in} - P_{out} = \frac{4\sigma}{R}$$

**II.4 Angles de contact et capillarité :**

Un tube de verre de faible diamètre est plongé dans un liquide mouillant, de l'eau par exemple. Dans le tube, le niveau du liquide est supérieur au niveau de la surface libre du récipient. Le ménisque concave fait un angle  $\theta$  avec la surface du tube.

L'ascension capillaire est due aux forces superficielles appliquées en tout point du contour du ménisque. La résultante  $F$  de ces forces équilibre le poids  $P$  du liquide soulevé. L'élévation du liquide dans le tube compense la différence de pression entre les deux côtés de la paroi (*loi de Laplace*).



**Fig (II.7)** Formation d'un ménisque dans un tube de verre plongé dans un liquide mouillant.

Le poids de la colonne de liquide dans le tube :

$$P = mg = \pi R^2 h \rho g$$

Equilibré par la force de tension superficielle :

$$F = 2\pi R \sigma \cos\theta$$

S'exerçant sur la ligne de raccordement entre le liquide et la paroi du tube. Et on obtient ainsi la relation que l'on appelle *Loi de Jurin* :

$$h = \frac{2 \sigma \cos\theta}{R \rho g}$$

$R$ : Rayon intérieur du tube.

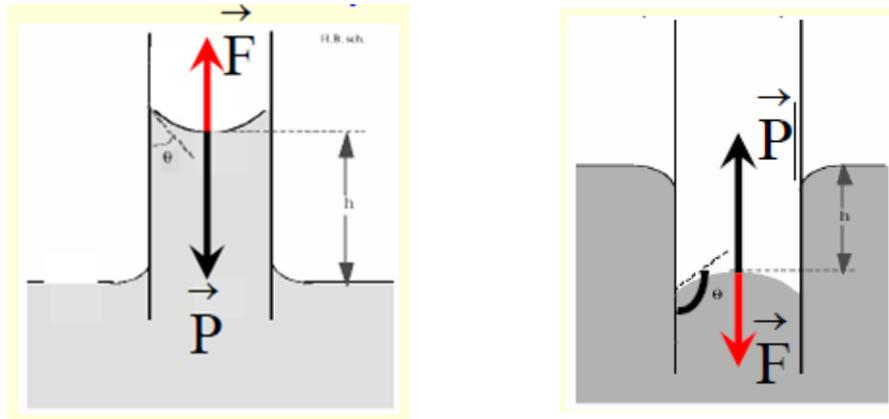
$\rho$ : Masse volumique du fluide.

$g$ : Accélération de la pesanteur.

$\theta$ : Angle de raccordement liquide/solide.

Dans le cas du mouillage parfait  $\cos\theta = 1$

Si l'angle  $\theta$  dépasse  $90^\circ$ , la *loi de Jurin* donne  $h$  négatif. On parle alors de dépression capillaire. C'est le cas du mercure au contact du verre. Cette fois les forces de cohésion sont supérieures aux forces d'adhésion, le liquide ne mouille pas les parois du tube. Le niveau du liquide s'abaisse dans le tube au-dessous du niveau de la surface libre du récipient. Le ménisque est convexe et forme l'angle  $\theta > 90^\circ$  avec la paroi du tube.



**Fig (II.8)** Ascension et dépression capillaires.

**Tab (II.1)** Angle de contact et capillarité entre 02 matériaux différents.

Interface dans l'air	Angle de contact	Ascension capillaire
Eau-verre	0	↑
Alcool-verre	0	↑
Mercure-verre	140	↓
Kérosène-verre	26	↑
Eau- acier	90	Nulle
Eau-bois	0	↑

**Application:**

Trouver la hauteur de capillarité d'un tube de verre de 1 mm rayon à une température de 20°C, le tube est immergé dans un récipient d'eau. L'angle d'interface formé entre le liquide/air/verre est 0°, calculer la hauteur h pour le cas du mercure si l'angle d'interface est 130°.

$\sigma_{\text{eau}} = 0.0728 \text{ N/m}$

$\sigma_{\text{mercure}} = 0.514 \text{ N/m}$

**Réponse :**

1.  $h_{\text{eau}} = 14,84 \text{ mm}$

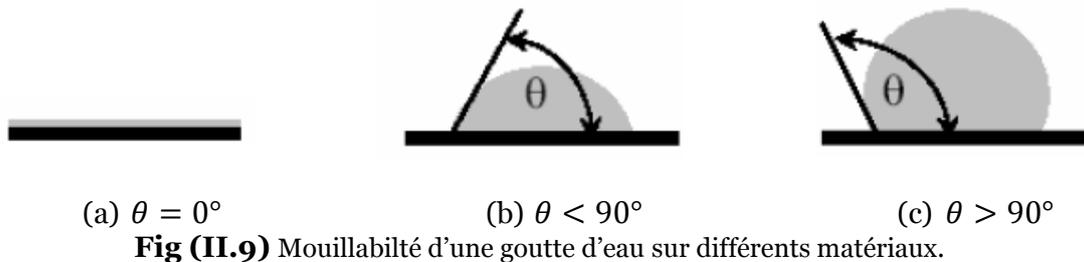
2.  $h_{\text{mercure}} = -5 \text{ mm}$

**II.5 Phénomène de mouillabilité :**

Lorsque l'on dépose une goutte d'eau sur une plaque en téflon puis sur une plaque en verre, on constate que la goutte ne s'étale pas du tout de la même façon. Dans le cas du téflon, la goutte a tendance à avoir une conformation sphérique pour limiter au maximum la surface de contact entre le domaine fluide et le domaine solide. Dans le cas du verre la goutte a tendance à s'étaler. On appelle ce phénomène la mouillabilité d'une surface solide par un fluide. On dira donc que le verre est mouillable à l'eau, alors que le téflon ne l'est pas. On se reportant sur la configuration représentée sur la

figure, on nommera  $\theta$  l'angle de contact (ou angle de mouillabilité). On distingue alors les configurations suivantes :

- Soit s'étaler, on dit que le liquide mouille parfaitement le solide  $\theta = 0^\circ$
- Soit forme une lentille avec deux cas de figure :
  - 1) Le liquide mouille imparfaitement le solide  $\theta < 90^\circ$
  - 2) Le liquide ne mouille pas le solide  $\theta > 90^\circ$



La ligne de raccordement caractérise le périmètre de la surface de contact entre fluide et solide. Sur cette ligne nous avons coexistence des trois phases : liquide ( $l$ ), solide ( $s$ ) et vapeur ( $v$ ).

Trois paramètres sont donc à prendre en compte :

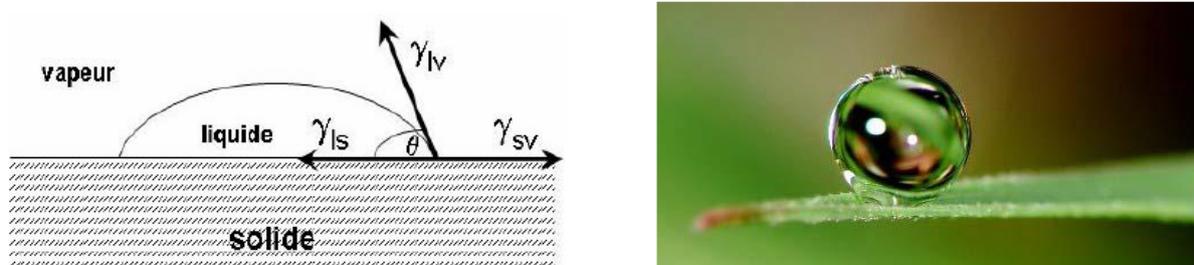
- La tension superficielle  $\sigma_{sl}$  entre le solide et le liquide ;
- La tension superficielle  $\sigma_{lv}$  entre le liquide et sa phase vapeur ;
- La tension superficielle  $\sigma_{sv}$  entre le solide et la vapeur.

L'équilibre de la goutte se traduit par :

$$\sigma_{sv} = \sigma_{sl} + \sigma_{lv} \cos\theta$$

Soit :

$$\cos\theta = \frac{\sigma_{sv} - \sigma_{sl}}{\sigma_{lv}}$$



**Fig (II.10)** Goutte d'eau sur une feuille de cactus.

**II.6 Exercices avec réponses:**

**Exercice 01:**

Un tube de verre immergé dans un récipient contenant du mercure (voir annexe II.1). Calculer la force de tension superficielle?

On donne:

$$\sigma = 0.514 \text{ N/m}$$

**Réponse :**

1.  $F = 0,0623 \text{ N}$

**Exercice 02:**

Quelle est la différence de pression  $\Delta P$  entre l'intérieur et l'extérieur d'une gouttelette d'eau ayant une tension superficielle  $\sigma_{eau} = 0.0728 \text{ N/m}$  et un diamètre  $d = 7.6 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$ .

Calculer la tension superficielle pour le cas d'une bulle de savon sachant que son rayon est de  $d = 4 \text{ cm}$  et la différence de pression  $\Delta P = 2,5 \text{ Pa}$ .

**Réponse :**

1.  $\Delta P = 3831,6 \text{ Pa}$

2.  $\sigma = 0.025 \text{ N/m}$

**Exercice 03:**

Développer une formule de remontée capillaire entre deux tubes de verre concentriques de rayon  $r_0$  et  $r_1$  en fonction de l'angle de capillarité et le poids spécifique  $\gamma$  (voir annexe II.2).

**Réponse :**

1.  $h = \frac{2\sigma \cdot \cos\theta}{\gamma(r_0 - r_1)}$

**Exercice 04:**

Quelle est la force nécessaire pour soulever un mince anneau de fil de  $6 \text{ cm}$  de diamètre à partir d'une surface d'eau à  $20^\circ\text{C}$ .

**Réponse :**

1.  $F = 0,0274 \text{ N}$

**Exercice 05:**

Un petit jet circulaire de mercure de  $200 \mu\text{m}$  de diamètre sort d'une ouverture (voir annexe II.3). Quelle est la différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur du jet à  $20^\circ\text{C}$ .

**Réponse :**

1.  $\Delta P = 5140 \text{ Pa}$

# Chapitre III

## LES EQUATIONS DE CONSERVATION

<b>III</b>	<b>LES EQUATIONS DE CONSERVATION .....</b>	<b>26</b>
III.1	Conservation de la masse (Equation de continuité) .....	27
III.1.1	Le Théorème de Transport de <i>Reynolds</i> .....	27
III.1.2	Forme intégrale de l'équation de continuité .....	27
III.1.3	Forme différentielle de l'équation de continuité .....	28
III.1.4	Forme vectorielle de l'équation de continuité .....	30
III.2	Conservation de la quantité de mouvement (Equations d' <i>Euler</i> ) ...	31
III.2.1	La 2 ème loi de <i>Newton</i> .....	32
III.2.2	Forme vectorielle de l'équation d' <i>Euler</i> .....	35
III.3	Conservation de la quantité de mouvement (Equations de <i>Navier Stokes</i> ) .....	36
III.3.1	Le tenseur de contraintes total .....	36
III.3.2	Les contraintes normales et les contraintes tangentielles ...	36
III.3.3	Forme vectorielle de l'équation de <i>Navier Stokes</i> .....	38
III.4	Exercices avec réponses .....	40

### III.1 Conservation de la masse (Equation de continuité) :

#### III.1.1 Le Théorème de Transport de Reynolds :

$N$ : Propriété

$n$ :  $N$  par unité de masse

$$\left. \frac{dN}{dt} \right|_{sys} = \left. \frac{\partial N}{\partial t} \right|_{cv} + \int_{cs} n \cdot \rho (\vec{V} \cdot \hat{\eta}) dA$$

$\eta$ : Vecteur normal sur la surface

$\vec{V} \cdot \hat{\eta} \cdot dA$ : Débit volumique

$\rho \cdot \vec{V} \cdot \hat{\eta} \cdot dA$ : Débit massique

$n \cdot \rho \cdot \vec{V} \cdot \hat{\eta} \cdot dA$ : Transport total de la propriété

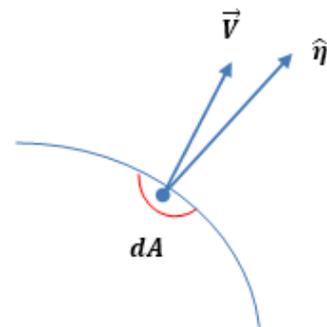


Fig (III.1) Vecteur normal et vitesse sur une surface élémentaire  $dA$ .

**Pour un système :**(conservation de la masse)

$$\frac{dM_{sys}}{dt} = 0$$

$$N = m$$

$$n = 1$$

**Forme générale :**

$$\left. \frac{dm}{dt} \right|_{sys} = \left. \frac{\partial m}{\partial t} \right|_{cv} + \int_{cs} \rho (\vec{V}_R \cdot \hat{\eta}) dA = 0$$

$$\left. \frac{\partial m}{\partial t} \right|_{cv} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV$$

#### III.1.2 Forme intégrale de l'équation de continuité

$$\left. \frac{dm}{dt} \right|_{sys} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV + \int_{cs} \rho (\vec{V}_R \cdot \hat{\eta}) dA = 0$$

**1. Volume de contrôle non déformable :**

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV = \int_{cv} \frac{\partial}{\partial t} (\rho) dV$$

**2. Volume de contrôle stationnaire :**

$$\vec{V}_R = \vec{V}$$

$$\int_{cv} \frac{\partial}{\partial t} \rho dV + \int_{cs} (\rho \cdot \vec{V} \cdot \hat{n}) dA = 0$$

On applique le **théorème de divergence de Gauss** :

$$\int_{cs} (\rho \cdot \vec{V} \cdot \hat{n}) dA = \int_{cv} \nabla(\rho \cdot \vec{V}) dV$$

$$\left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \cdot \vec{V}) \right] dV = 0$$

**III.1.3 Forme différentielle de l'équation de continuité :**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \cdot \vec{V}) = 0$$

**Pour un volume de control :**

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV + \int_{cs} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA = 0$$

On considère un petit élément :  $\delta v = \delta x \delta y \delta z$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV = \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta x \delta y \delta z$$

$\rho$ : Uniforme en  $\delta v$  (élément petit)

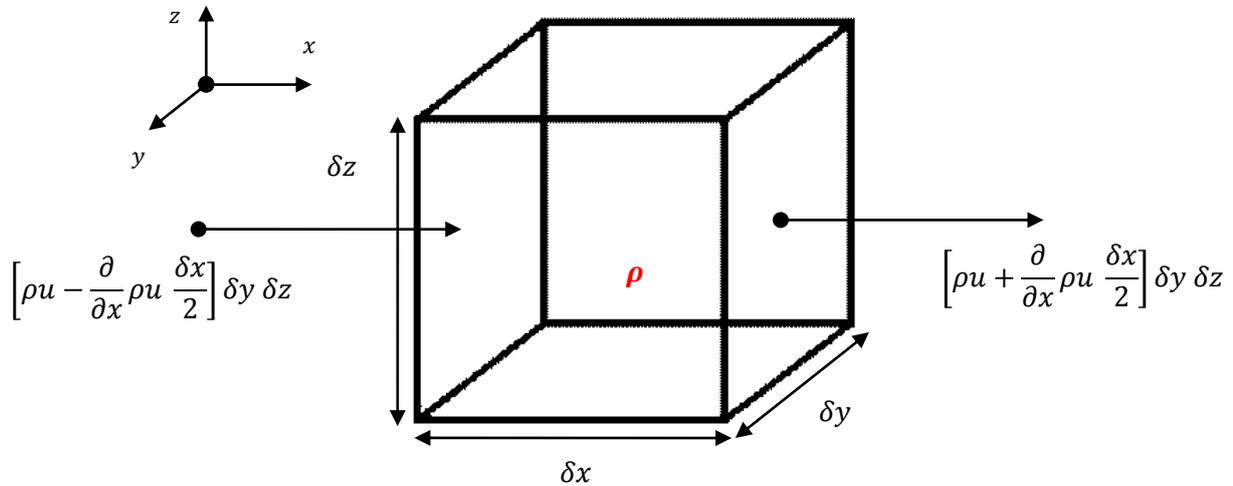


Fig (III.2) Débit entrant et sortant pour un petit élément  $dv$  .

**Débit massique :**

$$q_m = \frac{\rho V}{t} \quad [kg/s]$$

**Débit volumique :**

$$q_v = \frac{V}{t} \quad [m^3/s]$$

$$q_m = \rho q_v$$

**Débit massique net :**

Sur le plan  $X$  :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \delta x \delta y \delta z$$

Sur le plan  $Y$  :

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \delta x \delta y \delta z$$

Sur le plan  $Z$  :

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \delta x \delta y \delta z$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

**III.1.4 Forme vectorielle de l'équation de continuité :**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{V} = 0$$

**Stationnaire :**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

**Incompressible :**

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} &\rightarrow \rho \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

**Application :**

Vérifier l'équation de continuité pour les cas suivants :

$$u = 2x^2 - xy + z^2, v = x^2 - 4xy + y^2, w = -2xy - yz + y^2$$

$$u = 4xy + y^2, v = 4xy + 3x$$

**Réponse :**

**1.**  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$

1. L'équation de continuité est vérifiée.

**2.**  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 4y + 4x$

2. L'équation de continuité n'est pas vérifiée.

### III.2 Conservation de la quantité de mouvement (Equations d'Euler) :

#### Le Théorème de Transport de Reynolds :

$N$ : Propriété.

$n$ :  $N$  par unité de masse.

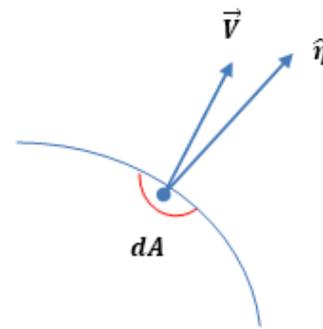
$$\left. \frac{dN}{dt} \right|_{sys} = \left. \frac{\partial N}{\partial t} \right|_{cv} + \int_{cs} n \cdot \rho (\vec{V} \cdot \hat{\eta}) dA$$

$\hat{\eta}$ : Vecteur normal sur la surface

$\vec{V} \cdot \hat{\eta} \cdot dA$ : Débit volumique

$\rho \cdot \vec{V} \cdot \hat{\eta} \cdot dA$ : Débit massique

$n \cdot \rho \cdot \vec{V} \cdot \hat{\eta} \cdot dA$ : Transport total de la propriété



**Fig (III.3)** Vecteur normal et vitesse sur une surface élémentaire  $dA$ .

**Pour un système :** (conservation de la quantité de mouvement) :

$$\sum \vec{F}_N = \frac{d}{dt} \int \vec{V} dm$$

$$N = m\vec{V}$$

$$n = \vec{V}$$

$$\left. \frac{d(m\vec{V})}{dt} \right|_{sys} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho \vec{V} dV + \int_{cs} (\rho \vec{V})(\vec{V}_R \cdot \hat{\eta}) dA$$

#### 1. Volume de contrôle non déformable :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho \vec{V}_R dV = \int_{cv} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{V}_R) dV$$

#### 2. Volume de contrôle stationnaire :

$$\vec{V}_R = \vec{V}$$

$$\left. \frac{d(m\vec{V})}{dt} \right|_{sys} = \int_{cv} \frac{\partial}{\partial t} (\rho\vec{V}) dV + \int_{cs} (\rho\vec{V})(\vec{V} \cdot \hat{n}) dA$$

On applique **le théorème de divergence de Gauss** :

$$\sum \vec{F}_N = \int_{cv} \frac{\partial}{\partial t} (\rho\vec{V}) dV + \int_{cs} (\rho\vec{V})(\vec{V} \cdot \hat{n}) dA$$

$$\int_{cs} (\rho\vec{V})(\vec{V} \cdot \hat{n}) dA = \int_{cv} \nabla(\rho \cdot \vec{V}) \vec{V} dV$$

$$\sum \vec{F}_N = \int_{cv} \frac{\partial}{\partial t} (\rho\vec{V}) dV + \int_{cv} \nabla(\rho \cdot \vec{V}) \vec{V} dV$$

On considère un petit élément :  $\delta v = \delta x \delta y \delta z$

$$\delta \vec{F}_N = \frac{d}{dt} (\vec{V} \delta m) = \delta m \frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$\delta \vec{F}_N = \delta m \vec{a}$$

### III.2.1 La 2 ème loi de *Newton* :

$$\sum \vec{F}_N = \text{Masse} \times \text{Accélération}$$

Forces extérieures = Forces d'inertie

$$\sum \vec{F}_N = F_{Surface} + F_{volume}$$

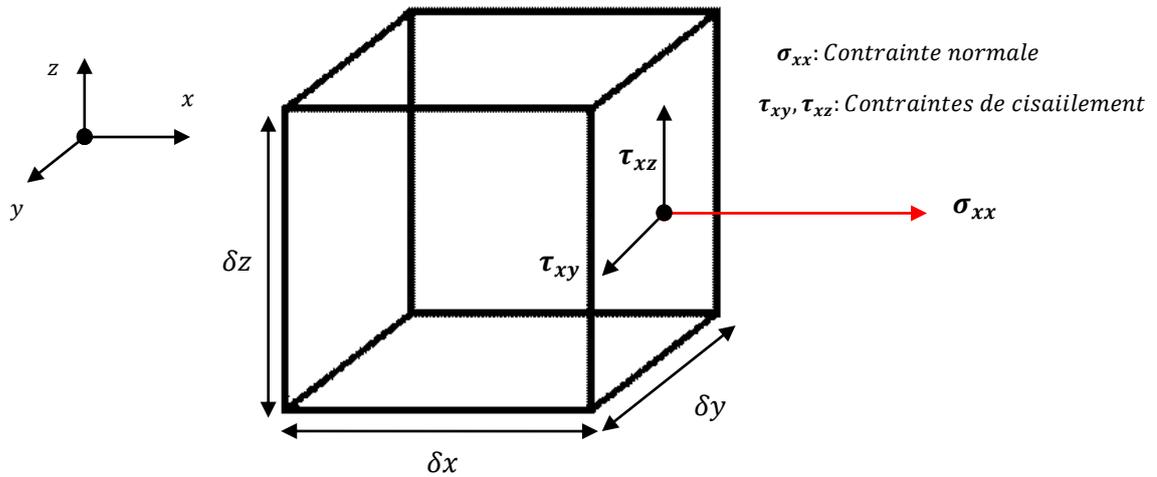
**Forces extérieures :**

**Poids** (*Body forces*) :

**Ex** : gravité, champs magnétique, champs électrique...

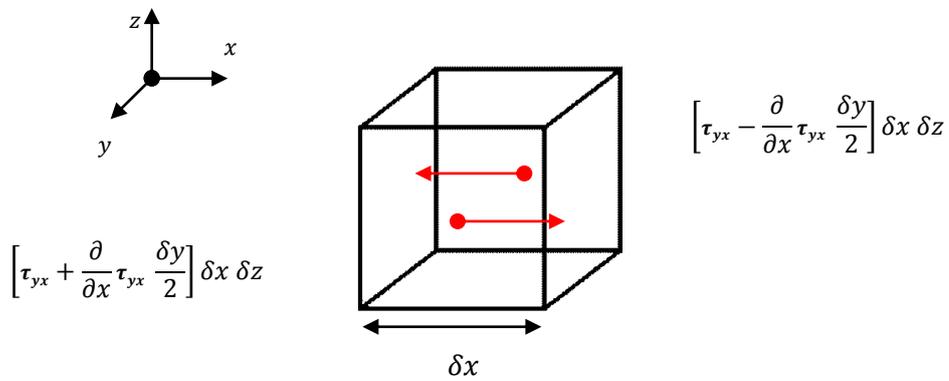
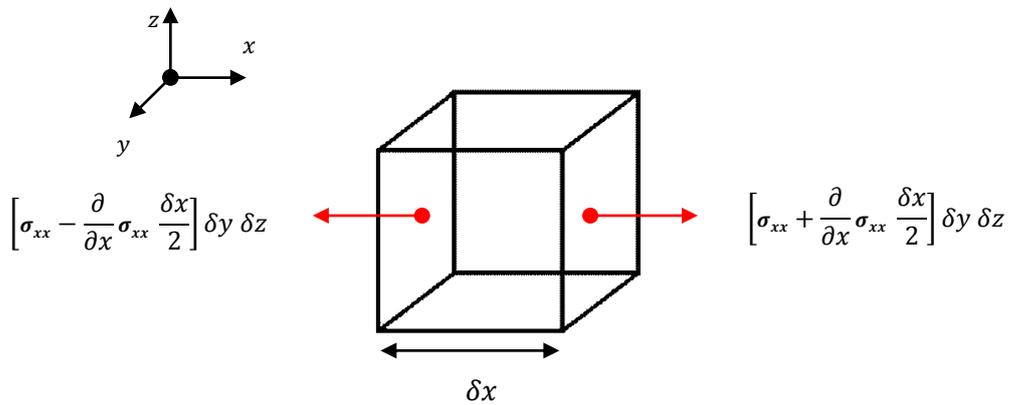
**Forces de surfaces** (*Surface forces*), elles influent sur la surface:

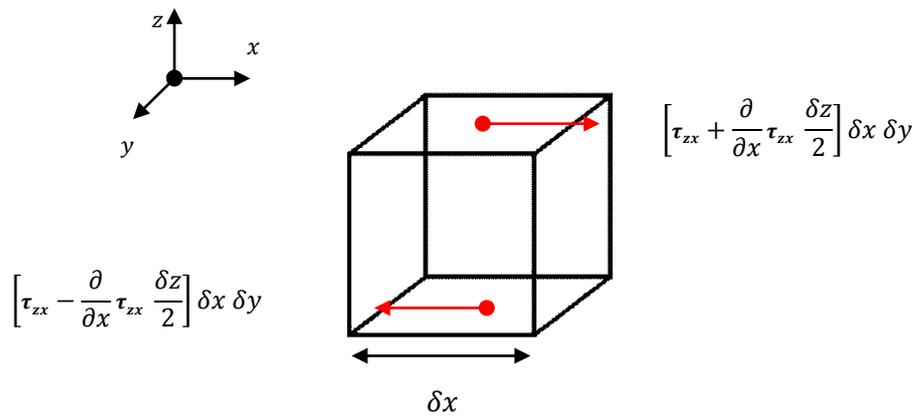
**Ex** : Force normale :  $P$  (pressions) et les forces tangentielles (forces de viscosité)  $\tau$ .



**Fig (III.4)** La Contrainte normale et les contraintes tangentielles sur une surface élémentaire  $dA$ .

Sur le plan  $X$  :





**Fig (III.5)** La Contrainte normale et les contraintes tangentielles sur le plan X.

**Forces de surfaces :**

*Sur le plan X :*

$$\delta F_{sx} = \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \delta x \delta y \delta z$$

*Sur le plan Y :*

$$\delta F_{sy} = \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \delta x \delta y \delta z$$

*Sur le plan Z :*

$$\delta F_{sz} = \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) \delta x \delta y \delta z$$

$$\delta \vec{F} = \delta m \vec{a}$$

$$\delta m = \rho \delta x \delta y \delta z$$

$$\sum \vec{F} = \text{masse} \cdot \text{acceleration} = m \frac{d\vec{V}}{dt}$$

Les équations de mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} \rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{cases}$$

**Bilan :**

**Nombre d'équations :** 03 équations+ 01 equation de continuité= 04 équations

**Inconnus :**  $u, v, w,$  + les contraintes.

On a :

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij}$$

**Écoulements parfaits :** Contraintes de cisaillement sont nuls.

$$\tau_{ij}=0$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -P$$

$$\begin{cases} \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} = \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} = \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} = \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{cases}$$

Les équations ci-dessus sont appelées **les équations d'Euler**.

### III.2.2 Forme vectorielle de l'équation d'Euler:

$$\rho \vec{g} + \nabla P = \rho \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \nabla \vec{V} \right)$$

### **III.3 conservation de la quantité de mouvement (Equations de Navier Stokes) :**

#### **III.3.1 Le tenseur de contraintes total :**

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij}$$

$P$ : La contrainte normale (pression hydrostatique).

$\tau_{ij}$ : Le tenseur de contraintes visqueuses (contraintes de cisaillements).

$\delta_{ij}$ : Le symbole de *Kronecker*.

$$\begin{cases} \delta_{ij} = 1 & \text{si } i = j \\ \delta_{ij} = 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$\tau_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \eta\delta_{ij}e = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \eta\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}$$

$\mu$  et  $\eta$  sont deux paramètres caractérisant les propriétés visqueuses (le frottement interne) des fluides.

$\mu$ : Viscosité de cisaillement

$\eta$ : Viscosité de dilatation

$\varepsilon_{ij}$ : Le tenseur de taux de déformation

$e$ : Le taux de dilatation

$$e = \text{div } \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

#### **III.3.2 Les contraintes normales et les contraintes tangentielles:**

##### **Les contraintes normales :**

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad \text{avec } i = j \quad \begin{cases} \sigma_{xx} = -P + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \sigma_{yy} = -P + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \eta \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \sigma_{zz} = -P + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \eta \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{cases}$$

**Les contraintes tangentielles :**

$$\sigma_{ij} = \tau_{ij} \quad \text{avec } i \neq j \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \sigma_{zx} = \sigma_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{array} \right.$$

**Les forces de surface :**

Sur le plan  $X$  :

$$\begin{aligned} \delta F_{sx} &= \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \delta x \delta y \delta z \\ &= \left[ \left( -\frac{\partial P}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \eta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \right) \right] \delta x \delta y \delta z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta F_{sx} &= \left[ -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. + \eta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) \right] \delta x \delta y \delta z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta F_{sx} &= \left[ -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right. \\ &\quad \left. + \eta \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \delta x \delta y \delta z \end{aligned}$$

$$\delta F_{sx} = \left[ -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + (\mu + \eta) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \delta x \delta y \delta z$$

$$\delta F_{sx} = \left[ -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + (\mu + \eta) \frac{\partial e}{\partial x} \right] \delta x \delta y \delta z$$

**Incompressibilité :**

$$e = \text{div } \vec{V} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Les equations de mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{cases}$$

Les equations ci-dessus sont appelées les equations de *Navier Stokes* pour les fluides incompressibles.

**III.3.3 Forme vectorielle de l'équation de Navier Stokes:**

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \nabla \vec{V} \right) = \rho \vec{g} + \nabla P + \mu \nabla^2 \vec{V}$$

$\vec{V} \nabla \vec{V}$ : Terme convectif.

$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$ : Terme instationnaire.

$\rho \vec{g}$ : Gravité (force de volume)

$\nabla P$ : Pression (force de surface).

$\mu \nabla^2 \vec{V}$ : Force de viscosité (force de surface).

Avec :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

**Bilan :**

**Nombre d'équations :** 03 equations+ 01 equation de continuité= 04 equations.

**Inconnus :**  $u, v, w, +P$  et  $\rho = 05$  inconnus.

On ajoute l'équation d'état.

### **Problème :**

- Le terme convectif est non linéaire.
- Equation différentielle de 2<sup>ème</sup> ordre.
- Très peu de solutions (cas d'un écoulement stationnaire incompressible laminaire d'un fluide visqueux newtonien).

La seule approche utilisée pour résoudre ces équations c'est la CFD (*Computational Fluid Dynamics*).

### III.4 Exercices avec réponses:

#### **Exercice 01:**

Pour un écoulement incompressible plan, lequel de ces champs de vitesse suivants satisfait l'équation de conservation de masse :

- (a)  $u = -x, v = y$                       (b)  $u = 3y, v = 3x$                       (c)  $u = 4x, v = -4y$   
 (d)  $u = 3xt, v = 3yt$     (e)  $u = xy + y^2t, v = xy + x^4t$                       (f)  $u = 4x^2y^3, v = -2xy^4$

Les composantes de vitesse dans les directions  $x$  et  $z$  d'un écoulement incompressible en régime stationnaire sont données comme suit :

$$u = x^4 + 3z^4, w = y^4 - 3yz$$

Donner la forme générale de la deuxième composante de vitesse qui satisfait l'équation de continuité.

Le champ de vitesse d'un écoulement incompressible est donné par :

$$V = x^2i - z^2j - 3xzk.$$

Si la viscosité du fluide est de  $0,04 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ , évaluer le tenseur des contraintes visqueuses  $\tau_{ij}$  au point  $(x, y, z) = (3, 2, 1)$ .

#### **Réponse :**

1. L'équation de continuité est satisfaite pour (a), (b), (c), et (f), et elle n'est pas satisfaite pour (d) et (e).

2.  $v = \frac{3}{2}y^2 - 4yx^3 + f(x, y)$

3.  $\tau_{ij} = \begin{vmatrix} 0,48 & 0 & -0,12 \\ 0 & 0 & -0,08 \\ -0,12 & -0,08 & -0,72 \end{vmatrix}$

#### **Exercice 02:**

On appliquant l'équation de conservation de masse et la quantité du mouvement sur un écoulement 2D suivant  $X$  entre deux plaques parallèles inclinées (voir annexe III.1)

Calculer :

La vitesse  $u$  ;

La contrainte de Cisaillement  $\tau$  ;

Le débit  $Q$ .

Sachant que le fluide est incompressible, newtonien et laminaire et pour un régime stationnaire.

**Réponse :**

1.  $u = \frac{1}{2\mu} \cdot \left[ -\left(\frac{P_2 - P_1}{L}\right) + \rho g \cdot \sin\theta \right] (h^2 - y^2)$
2.  $\tau_{(y=0)} = 0$  ,  $\tau_{(y=h)} = -\left[ -\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) + \rho g_x \right] h$
3.  $Q = \frac{2h^3 \left[ -\frac{\Delta P}{L} + \rho g \cdot \sin\theta \right]}{3\mu}$

**Exercice 03:**

Un champ de vitesse à deux dimensions est donné par :

$$u = \frac{Ky}{x^2 + y^2}$$

$$v = \frac{Kx}{x^2 + y^2}$$

$K$  est une constante. Le champ satisfait-il l'équation de continuité? Transformer ces vitesses en composantes polaires  $v_r$  et  $v_\theta$  sachant que :

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r}$$

**Réponse :**

1.  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$
2.  $v_r = 0$  ,  $v_\theta = \frac{K}{r}$

L'équation de continuité est satisfaite.

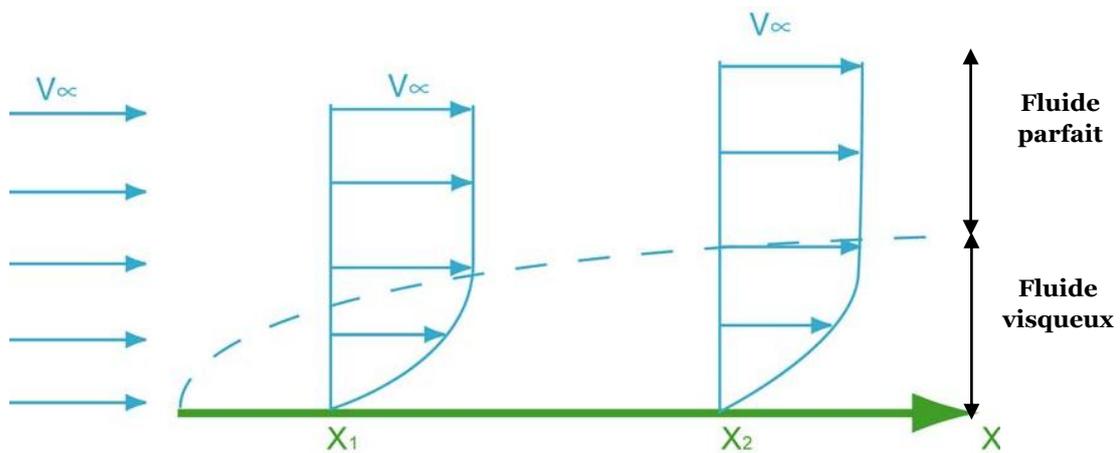
# Chapitre IV

## LA COUCHE LIMITE

<b>IV</b>	<b>LA COUCHE LIMITE .....</b>	<b>42</b>
IV.1	Introduction .....	43
IV.2	Grandeurs caractéristiques de la couche limite .....	44
IV.2.1	Epaisseur .....	44
IV.2.2	Epaisseur de déplacement .....	45
IV.2.3	Epaisseur de la quantité de mouvement .....	46
IV.2.4	Autres facteurs et coefficients .....	46
IV.3	Evolution de la couche limite .....	47
IV.3.1	Plaque plane .....	47
IV.3.2	Une forme arrondie (profil, cylindre....) .....	48
IV.4	Formules utilisées pour le calcul des paramètres de la couche limite (cas d'une plaque plane) .....	50
IV.5	Exercices avec réponses .....	45

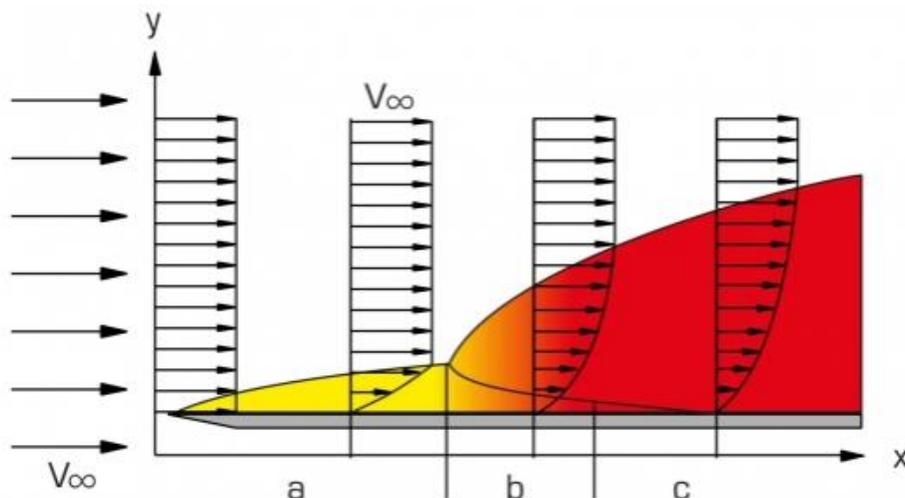
**IV.1 Introduction :**

Considérons l'écoulement d'un fluide autour d'un obstacle, les effets de viscosité sont négligeables loin, de la paroi, le fluide peut être considéré parfait. Lorsqu'on se rapproche de la paroi, les effets de la viscosité sont considérables et la vitesse du fluide devient progressivement nulle. Le domaine de transition où la vitesse devient progressivement nulle est appelé *couche limite* comme présente la figure IV.1.



**Fig (IV.1)** Schéma descriptif de la couche limite.

L'épaisseur de la couche limite dépend de *Reynolds*  $R_e$ . Au sein de la couche limite, l'écoulement peut être soit laminaire soit turbulent (cela dépend de  $R_e$  aussi).



**Fig (IV.2)** Formation d'une couche limite sur une plaque plane.  
 (a) écoulement laminaire (b) écoulement transitoire (c) écoulement turbulent

Au contact de la paroi, quand le profil de vitesse présente une pente infinie, on dit qu'il y a un décollement de la couche limite. Après le point de décollement  $D$ , la couche limite devient turbulente. On cherche toujours à optimiser le profil de façon à minimiser le sillage. Le sillage est responsable d'une dissipation d'énergie.

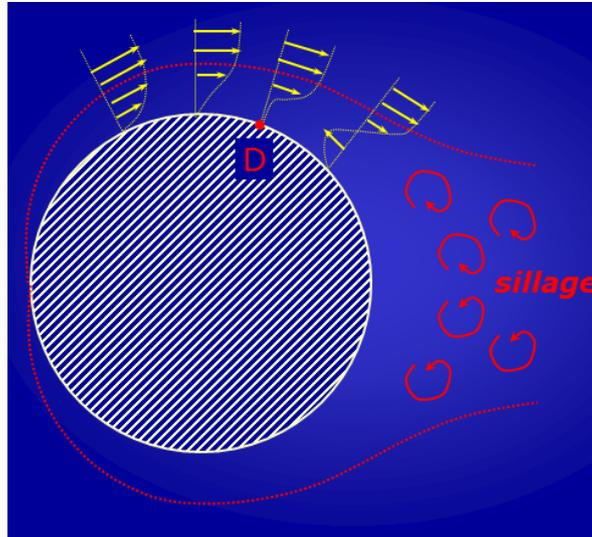


Fig (IV.3) Décollement de la couche limite.

## IV.2 Grandeurs caractéristiques de la couche limite :

### IV.2.1 Epaisseur :

La figure IV.4 montre l'épaisseur de la couche limite qui est définie comme la distance à la paroi à partir de laquelle la vitesse devient supérieure à 99% de la vitesse d'écoulement uniforme  $u(y = \delta) = 0.99U$ , c'est-à-dire non perturbé par l'objet.

Quand on se déplace sur une perpendiculaire  $O_y$  à la paroi, la vitesse  $u$  se rapproche rapidement d'une manière asymétrique de celle qui règne dans le fluide libre, on peut considérer l'épaisseur de la couche limite comme étant la distance  $\delta$  au-delà de laquelle  $u = 0.99U$ .

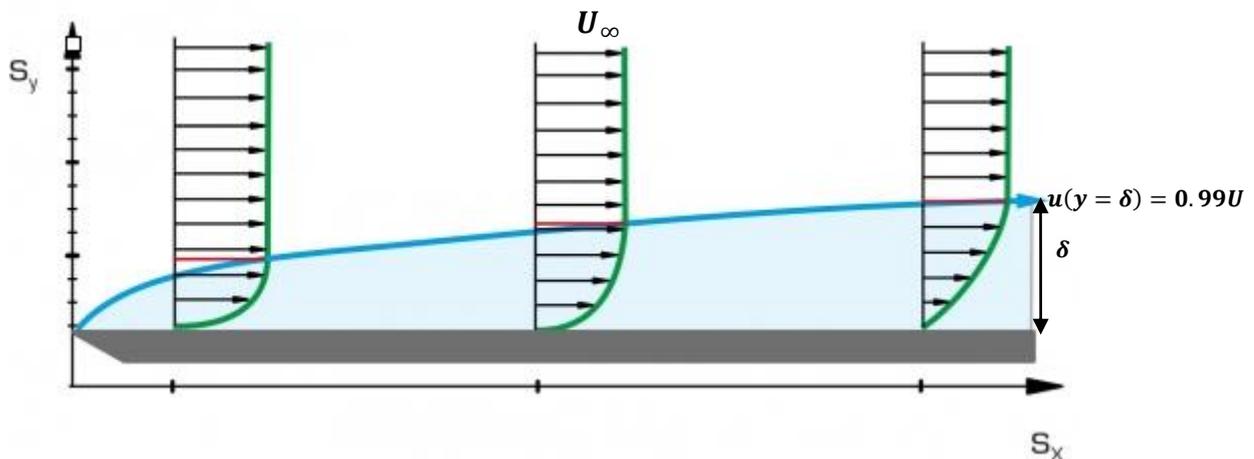


Fig (IV.4) Epaisseur de la couche limite.

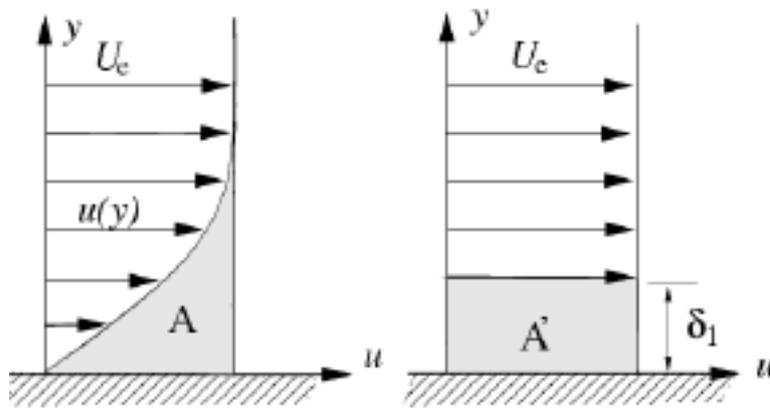
**IV.2.2 Epaisseur de déplacement :**

Pour définir l'épaisseur de déplacement, on évolue le flux manquant par rapport à celui qu'on aurait dans l'hypothèse d'un écoulement uniforme jusqu'à la paroi.

Les lignes de courants en écoulement visqueux sont déplacées par rapport à leurs positions en fluide non visqueux.

L'épaisseur de déplacement décrit le déficit de débit  $Q_P - Q_V$ .

Ce déplacement est exploité pour définir une épaisseur tels que les aires  $A$  et  $A'$  soient égales :



**Fig (IV.5)** Epaisseur de déplacement.

$$Q_P = \int_0^\delta U_\infty dy$$

$$Q_V = \int_0^\delta u dy$$

$Q_P$ : Débit volumique pour un fluide parfait.

$Q_V$ : Débit volumique pour un fluide visqueux.

$$A = \int_0^\delta (U_\infty - u) dy = A' = \delta^* U_\infty$$

Avec :

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy$$

L'épaisseur de déplacement  $\delta^*$  représente le déficit en débit de fluide dû à la présence de la couche Limite autour du corps.

**IV.2.3 Epaisseur de la quantité de mouvement :**

On multiplie les débits par la vitesse  $u$  et de la même manière on définit l'épaisseur de la quantité de mouvement  $\theta$ .

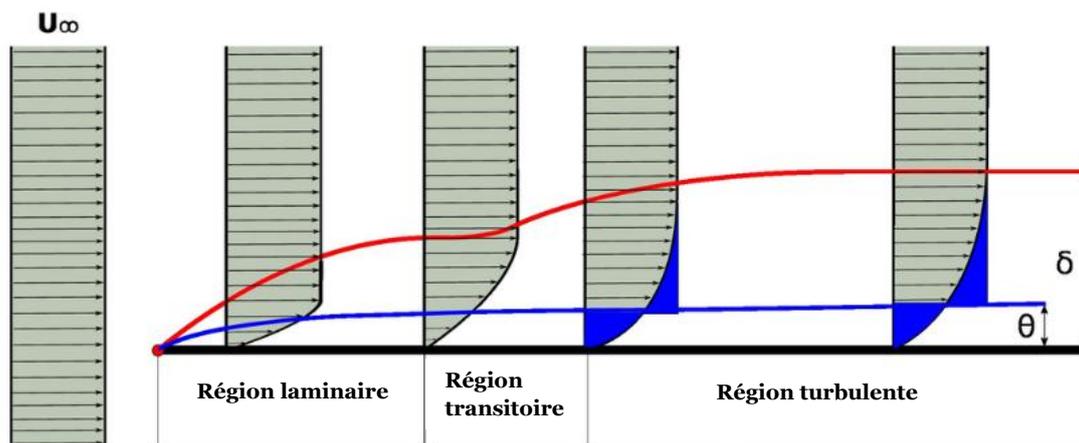
$$\int_0^\delta u \cdot U_\infty dy - \int_0^\delta u \cdot u dy = \theta \cdot U_\infty^2$$

$$\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U_\infty} \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy$$

L'épaisseur de Quantité de Mouvement  $\theta$  représente le déficit en quantité de mouvement dans la couche limite par rapport à ce qu'on aurait dans un écoulement de fluide parfait.

Une autre définition est :

L'épaisseur de quantité de mouvement mesure la perte de quantité de mouvement due à la friction des particules de fluide à la surface du corps.



**Fig (IV.6)** Epaisseur de quantité de mouvement.

**IV.2.4 Autres facteurs et coefficients :**

- Facteur de forme de la couche limite :

$$H = \frac{\delta^*}{\theta}$$

- Contrainte tangentielle à la paroi :

$$\tau_0 = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

- Coefficient de frottement local :

$$C_f = \frac{\tau_0}{1/2\rho U^2}$$

- Coefficient de frottement global sur une surface S :

$$C_F = \frac{1}{S} \int C_f dS$$

- Le flux d'énergie dissipée :

$$FD = \int_0^\infty \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy$$

- Equation de la couche limite (forme intégrale) :

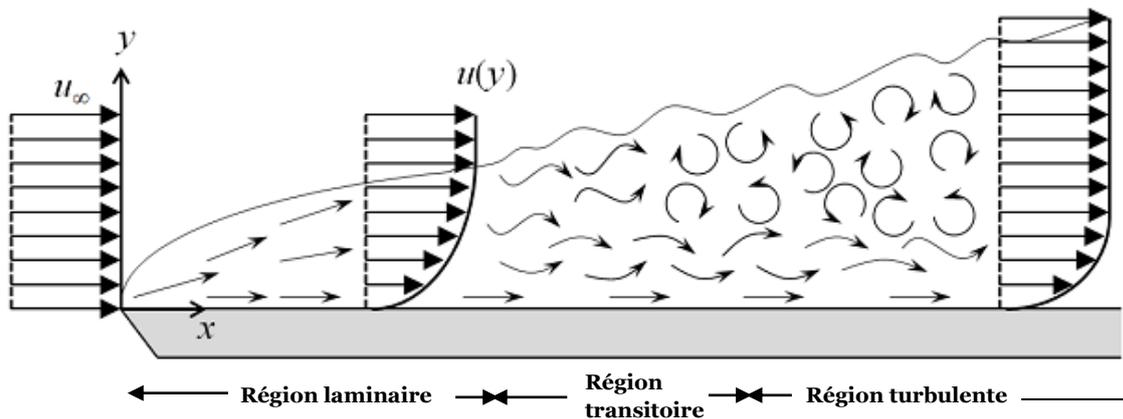
$$\frac{d\theta}{dx} + (H + 2) \frac{\theta}{U_\infty} \frac{dU_\infty}{dx} = \frac{C_f}{2}$$

### IV.3 Evolution de la couche limite :

#### IV.3.1 Plaque plane :

Quand un fluide s'écoule autour d'une plaque plane, l'action des contraintes de cisaillement (forces de viscosité) retarde l'écoulement dans la direction latérale (direction de l'écoulement), l'épaisseur de la couche limite augmente.

Dues aux contraintes de cisaillement, l'écoulement dans la couche limite est rotationnel et il est irrotationnel en dehors de la couche limite (*Prandtl*).



**Fig (IV.7)** Structure de l'écoulement dans la couche limite.

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

La valeur de  $\tau$  en dehors de la couche est égale à 0 car :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$0 \ll y \ll \delta$  :  $\frac{\partial u}{\partial y}$  est très élevé, l'effet de la viscosité est dominant.

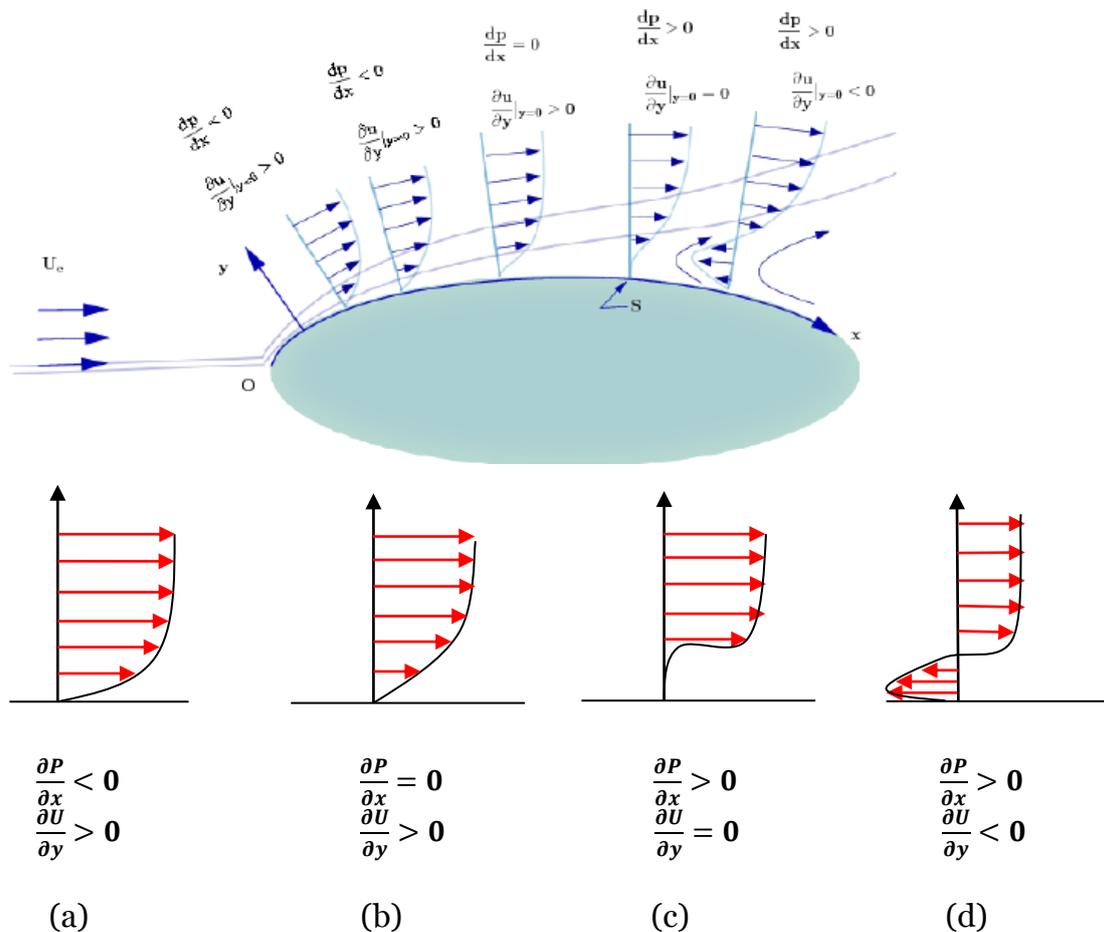
$y > \delta$  :  $\tau = 0$  L'effet de viscosité n'est pas dominant.

La Formule de *Blasius* pour une couche limite laminaire :

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{Re}}$$

**IV.3.2 Une forme arrondie (profil, cylindre....) :**

Considérant un écoulement autour d'un profil ou un obstacle avec une forme arrondie (ex : un cylindre), il est clairement montré que le profil de vitesse change progressivement due aux forces de viscosité et due aussi à la forme géométrique. La figure IV.8 montre l'évolution de la couche limite jusqu'au point de séparation (S) où il y aura la formation de sillage.



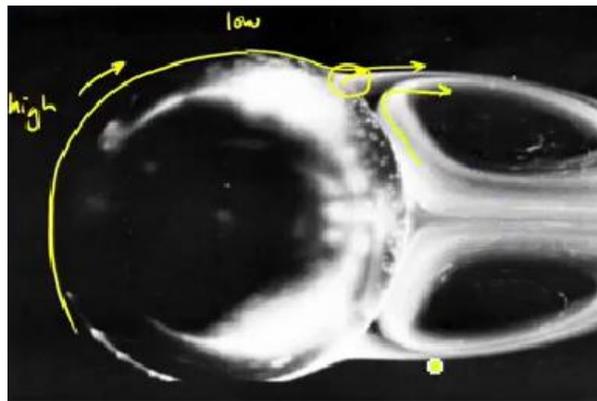
**Fig (IV.8)** Evolution du profil de vitesse.

$\frac{\partial P}{\partial x} < 0 \Rightarrow$  : Accélération dans le sens de l'écoulement  $\Rightarrow$  **Gradient de pression favorable.**

$\frac{\partial P}{\partial x} > 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial y} < 0$  : Décélération dans le sens de l'écoulement  $\Rightarrow$  **Gradient de pression défavorable.**

Un gradient de pression défavorable peut donc provoquer un décollement au point S ; Le décollement est accompagné d'une formation de tourbillons (figure IV.9) et peut avoir de graves conséquences :

- Instabilité de l'écoulement ;
- Transition au régime turbulent ;
- Augmentation de trainée.



**Fig (IV.9)** Décollement de la couche limite (écoulement autour d'un cylindre).

La nature de l'écoulement pouvait être localement décrite au moyen du nombre de *Reynolds* local :

$$R_{ex} = \frac{Ux}{\nu}$$

Quand  $R_{ex} > 5 \cdot 10^5$  la couche limite devient turbulente, et la transition du laminaire au turbulent se manifeste par un épaissement brutal de la couche limite.

**IV.4 Formules utilisées pour le calcul des paramètres de la couche limite (cas d'une plaque plane) :**

Le tableau IV.1 montre les formules utilisées dans le calcul des paramètres caractérisant la couche limite pour différents régimes (cas d'une plaque plane).

**Tab (IV.1)** Les formules de *Blasius* et *Prandtl* pour le calcul des paramètres de la couche limite (cas d'une plaque plane).

<b>Paramètres</b>	<b>Laminaire (solution de Blasius)</b>	<b>Turbulent (Approximation de Prandtl)</b>
<b>Epaisseur de la C.L</b>	$\frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{R_{ex}}}$	$\frac{\delta}{x} = \frac{0.16}{(R_{ex})^{1/7}}$
<b>Epaisseur de déplacement</b>	$\frac{\delta^*}{x} = \frac{1.72}{\sqrt{R_{ex}}}$	$\frac{\delta^*}{x} = \frac{0.02}{(R_{ex})^{1/7}}$
<b>Epaisseur de quantité de mouvement</b>	$\frac{\theta}{x} = \frac{0.664}{\sqrt{R_{ex}}}$	$\frac{\theta}{x} = \frac{0.016}{(R_{ex})^{1/7}}$
<b>Facteur de forme</b>	$H = \frac{\delta^*}{\theta} = 2.59$	$H = \frac{\delta^*}{\theta} = 1.25$
<b>Coefficient de frottement local</b>	$C_f = \frac{0.664}{\sqrt{R_{ex}}}$	$C_f = \frac{0.027}{(R_{ex})^{1/7}}$
<b>Contrainte de cisaillement sur la paroi</b>	$\tau_0 = \frac{0.332 \cdot \mu^{1/2} \cdot \rho^{1/2} \cdot U^{3/2}}{x^{1/2}}$	$\tau_0 = \frac{0.0135 \cdot \mu^{1/7} \cdot \rho^{6/7} \cdot U^{13/7}}{x^{1/7}}$
<b>Coefficient de traînée</b>	$C_d = \frac{1.328}{\sqrt{R_{eL}}}$	$C_d = \frac{0.031}{(R_{eL})^{1/7}}$



$$\frac{u}{u_1} = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3$$

1. Calculer l'épaisseur de quantité de mouvement  $\theta$  ?

**Réponse :**

1.  $\theta = 39\delta/280$

**Exercice 04 :**

Soit un écoulement laminaire autour d'une plaque mince et plate, on admet que le profil de vitesse dans la couche limite répond à l'équation :

$$\frac{u}{U_\infty} = \frac{3}{2} \cdot \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right)^3$$

$U_\infty$ : Vitesse d'écoulement libre.

$u$ : Vitesse à une distance  $y$  de la paroi.

$\delta$ : Epaisseur de la couche limite.

$\theta$ : Epaisseur de quantité de mouvement :  $\theta = 0.139\delta$

Déterminer :

1. Epaisseur de déplacement  $\delta^*$ .
2. Facteur de forme  $H$ .
3. Contrainte de cisaillement  $\tau_{max}$ .
4. Coefficient de frottement local  $C_f$  en fonction de  $\delta$ .

**Réponse :**

1.  $\delta^* = 0,375$

2.  $H = 2,7$

3.  $\tau_{max} = \frac{3}{2} \cdot \mu \cdot \frac{U_\infty}{\delta}$

4.  $C_f = \frac{3\mu}{\delta \cdot \rho \cdot U_\infty}$

# Chapitre V

## ÉCOULEMENTS AUTOUR DES OBSTACLES

<b>V</b>	<b>ÉCOULEMENTS AUTOUR DES OBSTACLES .....</b>	<b>53</b>
V.1	Introduction .....	54
V.2	Evolution expérimentale de $C_x(R_e)$ et description de l'écoulement autour d'une sphère lisse .....	56
V.2.1	Evolution expérimentale de $C_x(R_e)$ .....	56
V.2.2	Description de l'écoulement .....	57
V.3	Evolution expérimentale de $C_x(R_e)$ et description de l'écoulement autour d'un cylindre .....	59
V.3.1	Evolution expérimentale de $C_x(R_e)$ .....	59
V.3.2	Description de l'écoulement .....	60
V.4	Écoulement autour d'un hydrofoil .....	61
V.5	Écoulement autour d'une hélice .....	62
V.6	Écoulement autour d'une plaque plane (calcul du $C_x$ ) .....	63
V.7	Quelques paramètres influents sur le coefficient de Trainée $C_x$ .....	65
V.7.1	Position de la plaque .....	65
V.7.2	La surface .....	65
V.8	Optimisation des formes géométriques .....	65
V.9	Exercices avec réponses .....	67

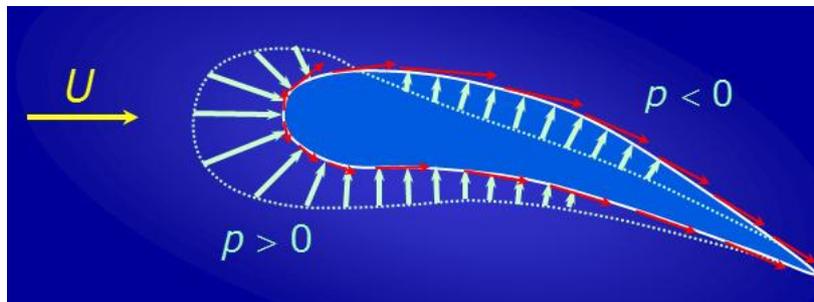
### V.1 Introduction :

En aérodynamique et hydrodynamique, cas des hydrofoils les forces exercées par le fluide sur le foil peuvent être décomposées en deux catégories qui se distinguent par la nature du phénomène physique qui les provoque :

- La première catégorie comprend les forces de pression qui sont dues au mouvement même du foil par rapport au fluide. Ces forces, perpendiculaires au profil en tout point, peuvent être modélisées par une résultante unique, perpendiculaire à la direction principale de l'écoulement et dirigée vers le haut : la portance.
- La seconde catégorie comprend les forces de viscosité qui sont dues à la nature visqueuse du fluide.

Considérons un profil d'objet non symétrique :

Les forces de pression sont normales et les forces de frottement sont tangentielles sur la face supérieure il y a une dépression ( $P < P_0$ ), sur la face inférieure on remarque qu'il y a une surpression ( $P > P_0$ ) comme montre la figure v.1.



**Fig (V.1)** Les forces de pression et les forces de frottement exercées sur un profil.

La résultante des forces de pression présente :

- Une composante verticale : la portance (Lift)  $\vec{L}_p$ .
- Une composante horizontale : la traînée (drag)  $\vec{D}_p$ .

La résultante des forces de frottement présente :

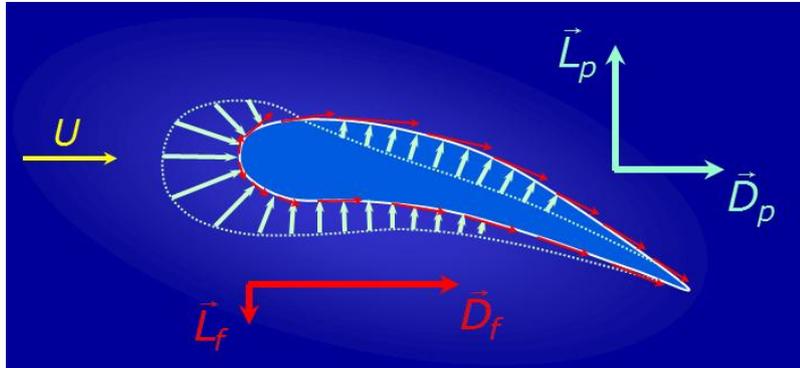
- Une composante verticale : la portance (Lift)  $\vec{L}_F$ .
- Une composante horizontale : la traînée (drag)  $\vec{D}_F$ .

La figure V.2 montre la traînée et la portance exercées sur le profil.

$$\vec{L} = \vec{L}_p + \vec{L}_f$$

Et une force de traînée :

$$\vec{D} = \vec{D}_p + \vec{D}_f$$



**Fig (V.2)** La force de traînée et la force de portance exercées sur un profil.

Les coefficients de portance et traînée sont écrits respectivement comme suit :

$$C_L = \frac{L}{0.5\rho \cdot S \cdot V^2}$$

$$C_D = \frac{D}{0.5\rho \cdot S \cdot V^2}$$

Le coefficient de traînée  $C_x$  dépend des caractéristiques suivantes :

$$C_x = f\left(\text{La forme}, R_e, M_a, Fr, \frac{l}{\epsilon}\right)$$

La forme de la géométrie a une grande influence sur la traînée.

Ex : Pour une sphère, et une géométrie qui ressemble à un casque d'un cycliste.

Pour un  $R_e = 10^5$  :

Géométrie (a) :  $C_x = 0.5$

Géométrie (b) :  $C_x = 0.04$

La traînée est réduite à 92%



**Fig (V.3)** Influence de la forme géométrique sur le coefficient de traînée.

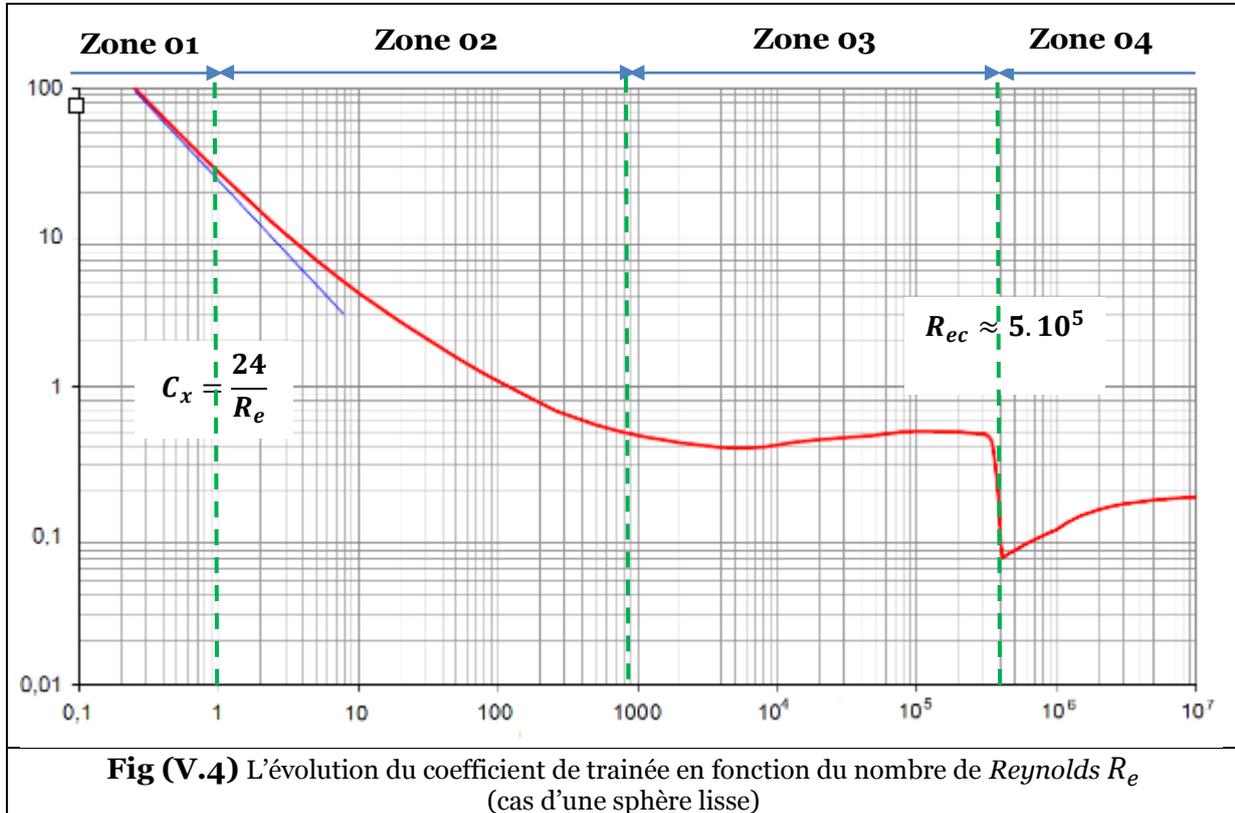
(a)  $C_x = 0.5$

(b)  $C_x = 0.04$

**V.2 Evolution expérimentale de  $C_x(R_e)$  et description de l'écoulement autour d'une sphère lisse:**

**V.2.1 Evolution expérimentale de  $C_x(R_e)$ :**

La figure ci-dessous reproduit l'évolution du coefficient de trainée  $C_x$  en fonction du  $R_e = \frac{\rho^2 UR}{\mu}$  pour une sphère de rayon  $R$ .



Les valeurs numériques particulières sont indiquées sur le tableau V.1.

**Tab (V.1)** Valeurs numériques du coefficient de trainée en fonction du nombre de Reynolds  $R_e$  (cas d'une sphère lisse)

$R_e$	0.1	1	10	$10^2$	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$5.10^5$	$10^6$
$C_x$	245	28	4.4	1.1	0.47	0.43	0.47	discontinuité	0.14

Cette courbe fait apparaitre 4 zones caractéristiques :

**Tab (V.2)** Description des zones caractéristiques de la courbe du coefficient de trainée (cas d'une sphère lisse)

<b>Zone 1</b> $R_e < 1$	<b>Zone 2</b> $1 < R_e < 10^3$	<b>Zone 3</b> $10^3 < R_e < R_{ec}$	<b>Zone 4</b> $R_e > R_{ec} \approx 5.10^5$
$C_x = \frac{24}{R_e}$	$C_x = A \left( 1 + \frac{a}{\sqrt{R_e}} \right)$ Avec : $a = 9.06$ Et $Aa^2 = 24$	$C_x$ presque constant	$C_x$ chute lorsque l'écoulement devient turbulent. Il évolue assez peu ensuite

Calculant la force de trainée  $F_x$  :

$$F_x = \frac{1}{2} C_x \rho U^2 S$$

Avec :

$$C_x = 24 \cdot \frac{\mu}{2\rho R U}$$

On a :

$$S = \pi R^2$$

Donc :

$$F_x = 24 \cdot \frac{\mu}{2\rho R U} \frac{\rho U^2}{2} \pi R^2$$

Et on aura :

$$F_x = 6 \pi \mu R U$$

L'approximation de cette force de trainée pour une sphère à bas de nombre de Reynolds  $F_x = 6 \pi \mu R U$  constitue la formule de Stokes.

### **V.2.2 Description de l'écoulement :**

Pour une sphère de rayon  $R$  le coefficient de trainée  $F_x$  est défini par :

$$F_x = \frac{1}{2} C_x \rho U^2 (\pi R^2)$$

Rappelons la forme de l'évolution de coefficient de trainée  $C_x(R_e)$  (Figure V.4).

#### **(a) Pour les valeurs de $R_e < 1$ :**

L'écoulement est laminaire et approximativement linéaire. Les lignes de courant ont l'allure représentée sur la figure.  $C_x$  est inversement proportionnel à  $R_e$ .

#### **(b) Pour des valeurs de $R_e > 1$ (de l'ordre de $R_e \approx 20$ ) :**

Il apparaît un tourbillon stable derrière la sphère comme montre la figure ci-dessous. Les dimensions de ce tourbillon augmentent avec  $R_e$ .

**(c) Pour des nombre de Reynolds de l'ordre de 300 à 450 :**

Ce tourbillon finit par occuper toute la partie arrière de la sphère, comme il est montré sur la figure.

**(d) A partir de de  $R_e$  voisinant 450 :**

Le tourbillon se détache, en prenant une forme hélicoïdale. Ce tourbillon a pour conséquence l'existence d'une force transversale tournante s'exerçant sur la sphère.

**(e) Pour de  $R_e \approx 1000$  :**

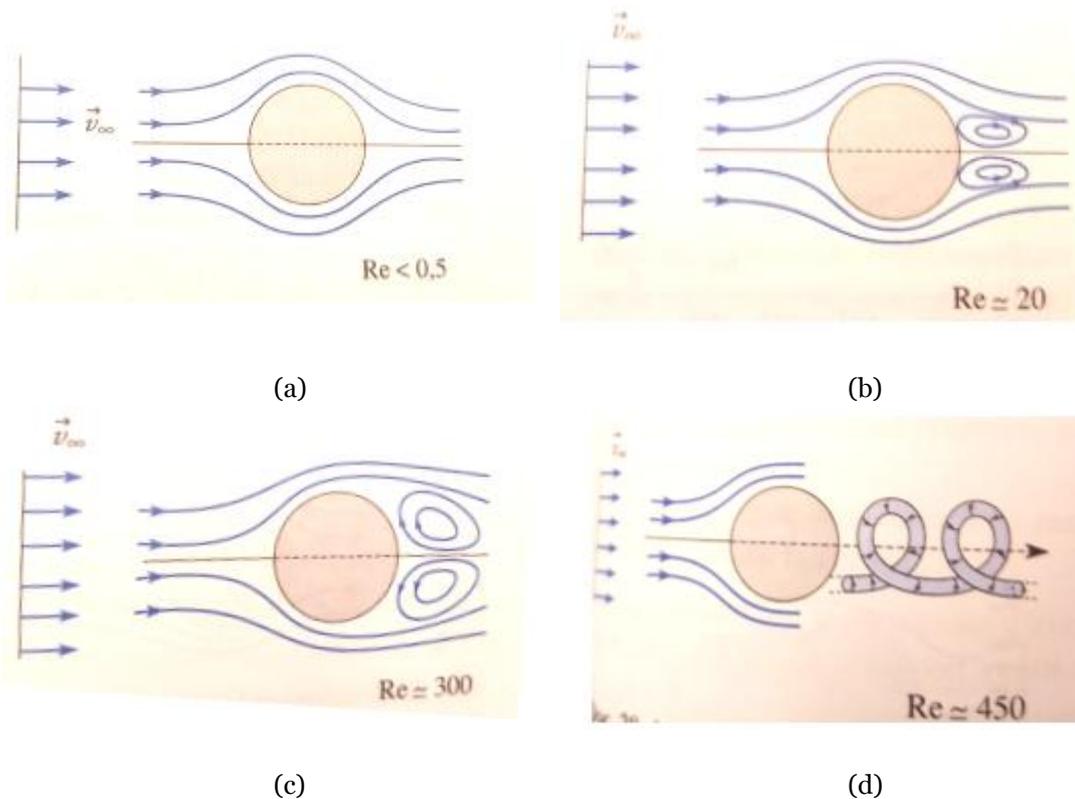
L'écoulement n'est plus régulier, il se forme un sillage, zone turbulente et chaotique derrière la sphère.

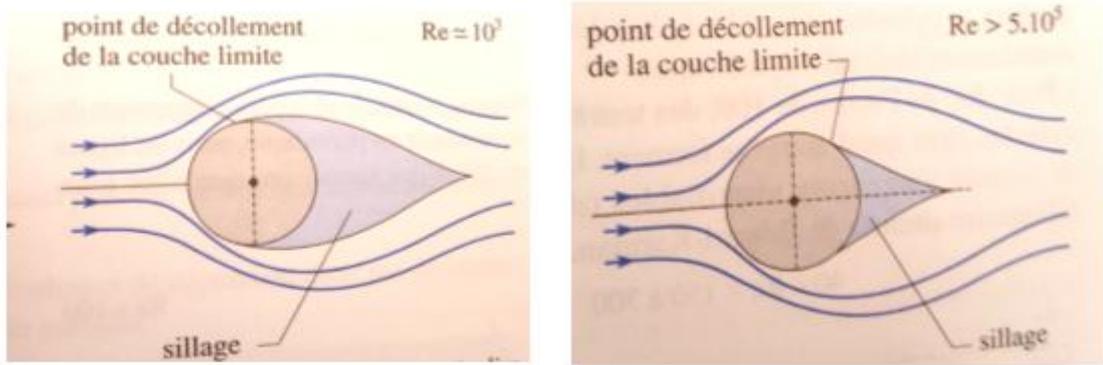
**(f) Pour une valeur critique  $R_{ec} \approx 5 \cdot 10^5$  :**

La couche limite effectue une transition laminaire-turbulente :

- Le point de décollement de la couche limite change de position (il recule).
- Le coefficient de traînée  $C_x$  chute lors de cette transition.

Si  $R_e$  augmente encore  $R_e > 5 \cdot 10^5$  ; le sillage se rétrécit, les tourbillons sont chaotiques. Le coefficient de traînée  $C_x$  évolue assez peu.





(e)

(f)

**Fig (V.5)** Description de l'écoulement en fonction du nombre de Reynolds  $R_e$  (cas d'une sphère lisse)

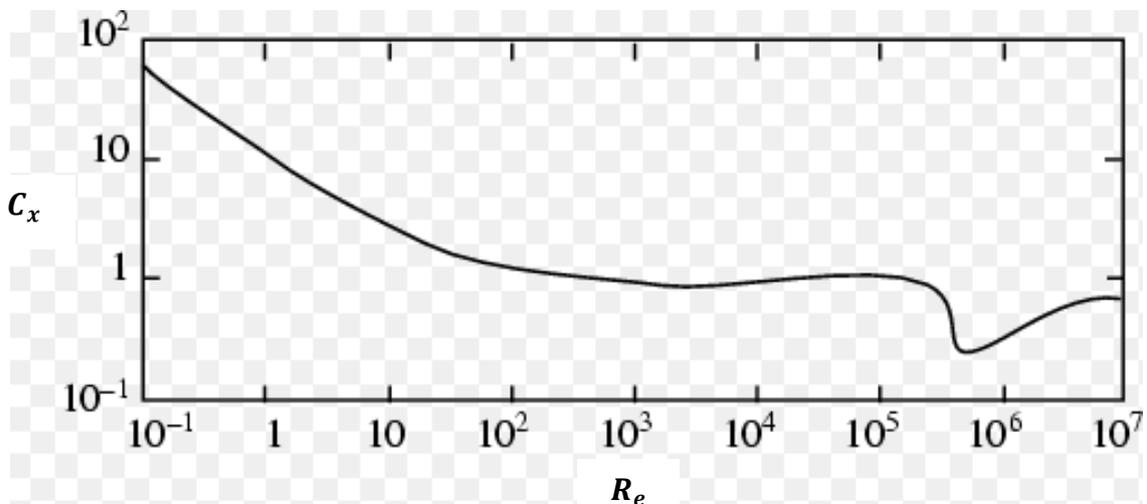
### V.3 Evolution expérimentale de $C_x(R_e)$ et description de l'écoulement autour d'un cylindre:

#### V.3.1 Evolution expérimentale de $C_x(R_e)$ :

L'allure de la variation de  $C_x$  pour un cylindre en fonction de  $R_e$  est défini par :

$$R_e = \frac{\rho DU}{\mu}$$

L'allure de la variation de  $C_x$  pour un cylindre en fonction du  $R_e$ , est donnée sur la figure ci-dessous.



**Fig (V.6)** L'évolution du coefficient de trainée en fonction du nombre de Reynolds  $R_e$  (cas d'un cylindre)

Les valeurs numériques particulières sont indiquées sur le tableau V.3.

**Tab (V.3)** Valeurs numériques du coefficient de traînée en fonction du nombre de *Reynolds*  $R_e$   
(cas d'un cylindre)

$R_e$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	1	10	$10^2$	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$5 \cdot 10^5$	$10^6$	$10^7$
$C_x$	400	60	11	3	1.2	1.1	1.12	1.23	discontinuité	0.4	0.6

### V.3.2 Description de l'écoulement :

**(a) Pour de faibles valeurs de  $R_e$  ; de l'ordre de l'unité :**

L'écoulement est laminaire et approximativement linéaire. Les lignes de courant ont l'allure représentée sur la figure. Nous sommes en présence d'un écoulement laminaire visqueux non décollé.

**(b) Pour des valeurs de  $R_e$  de quelques dizaines :**

Il apparaît des tourbillons stables derrière le cylindre comme il est illustré sur la figure. L'écoulement est toujours symétrique ; il existe un décollement laminaire symétrique.

**(c) Pour un *Reynolds* de l'ordre de 100 :**

Des tourbillons se détachent périodiquement de cylindre, alors que d'autres se forment. L'écoulement est périodique mais les lignes de courant sont encore identifiables. Des tourbillons dits *Van Karman* apparaissent.

**(d) Pour un  $R_e$  compris entre  $R_e = 300$  et  $R_e = 5 \cdot 10^5$  :**

Le décollement de couche limite s'effectue toujours d'une couche limite laminaire. Les tourbillons se détachent du cylindre et deviennent turbulents comme montre la figure ci-dessous.

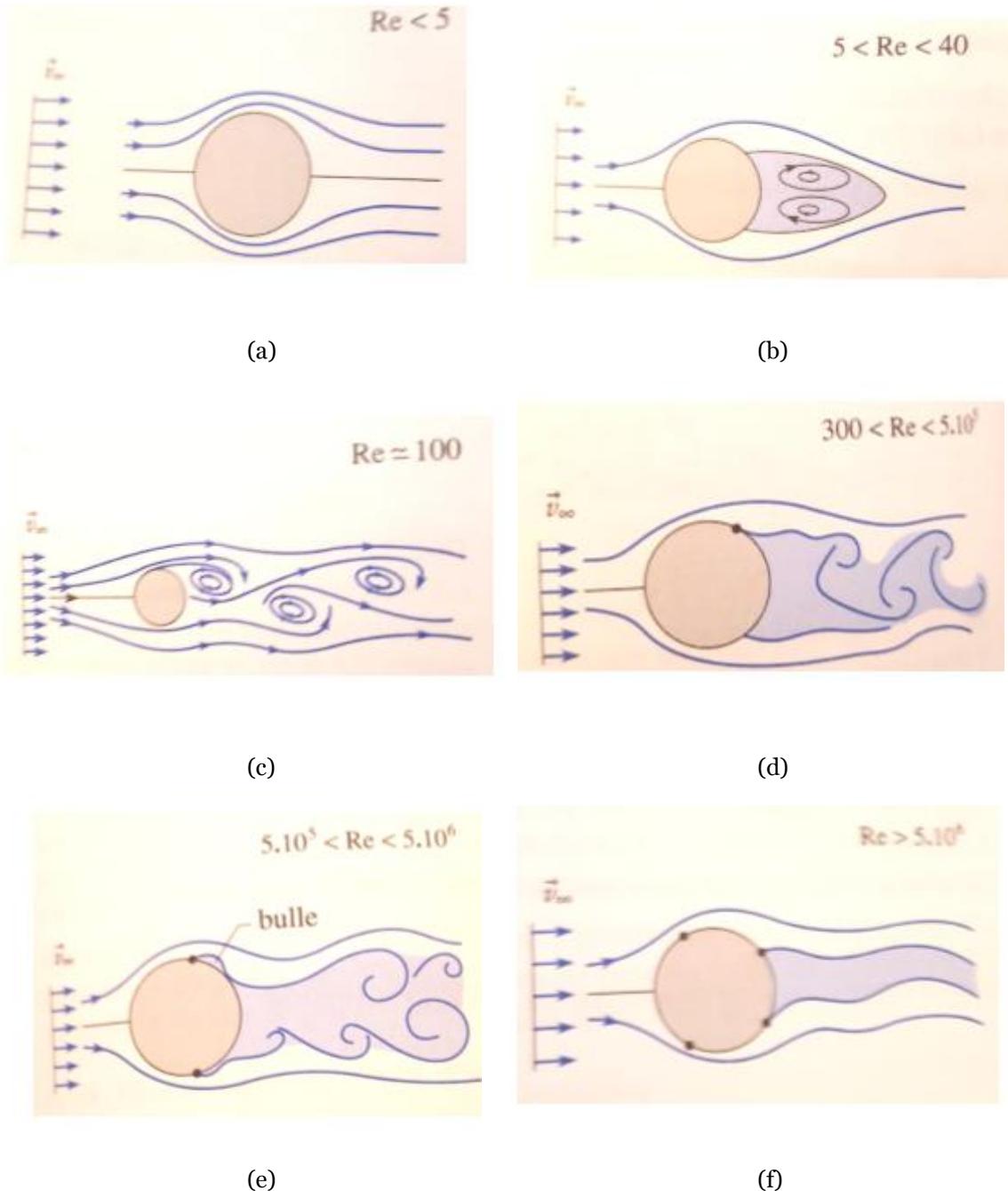
**(e) Pour un *Reynolds*  $5 \cdot 10^5 < R_e < 5 \cdot 10^6$  :**

Le décollement s'effectue à partir d'une couche limite turbulente.

**(f) valeur  $R_e > 10^6$  :**

Le  $C_x$  reste quasiment constant.

La figure V.7 montre la structure de l'écoulement pour différents nombre de *Reynolds*  $R_e$ .

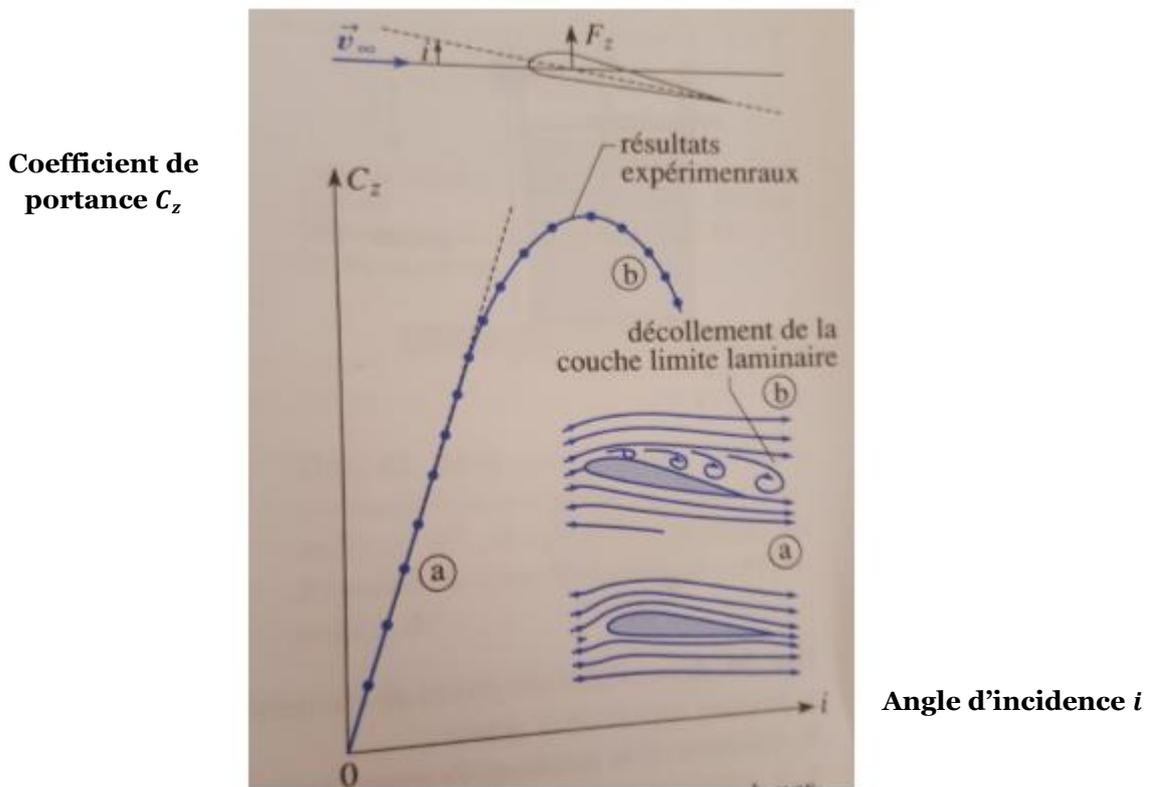


**Fig (V.7)** Description de l'écoulement en fonction du nombre de Reynolds  $Re$  (cas d'un cylindre)

**V.4 Écoulement autour d'un hydrofoil :**

Le fluide s'écoule de part et d'autre du foil en suivant les lignes de courant qui se séparent au bord d'attaque et se rejoignent au bord de fuite. Dans le cas d'une incidence trop importante, la ligne de courant qui se trouve sur l'extrados ne peut pas "coller" au profil sur toute sa longueur : On dit qu'il y a *décollement*. En conséquence, il se crée une zone de recirculation due à la viscosité du fluide. Dans cette zone,

l'écoulement devient turbulent, il y a une formation de tourbillons. C'est ce qu'on appelle le *décrochage*. Le décollement de la couche limite laminaire provoque une baisse de portance



**Fig (V.8)** Coefficient de portance  $C_z$  en fonction de l'angle d'incidence. (cas d'un hydrofoil)

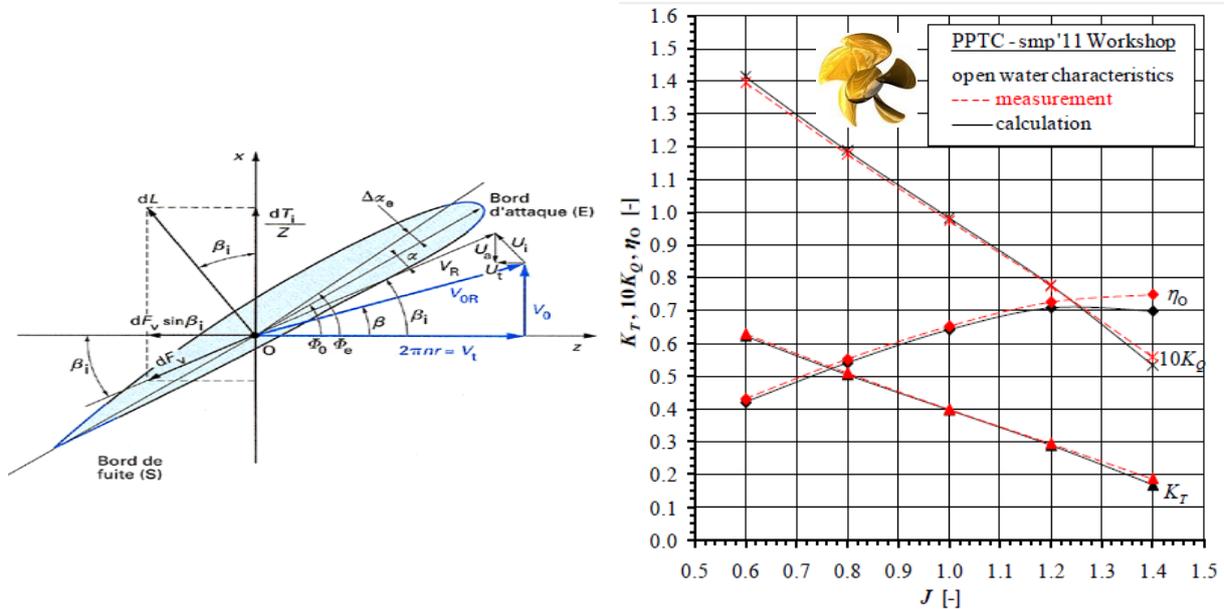
### V.5 Écoulement autour d'une hélice:

Pour calculer les performances hydrodynamiques d'une hélice marine, les valeurs de la portance et la traînée sont estimées avant. Lorsqu'un écoulement est généré autour d'une section d'une hélice marine, ce dernier crée un angle d'incidence avec la section. La force de portance et la traînée sont générées. Les performances hydrodynamiques sont calculées à la base de la portance et la traînée :

$$dT = Z[dL(r) \cdot \cos\beta(r) - dD(r) \cdot \sin\beta(r)]$$

$$dQ = Z[dL(r) \cdot \sin\beta(r) + dD(r) \cdot \cos\beta(r)]rdr$$

Comme pour le cas des hydrofoils, le rendement de l'hélice chute à une certaine vitesse d'écoulement (décrochage) et ça est dû à l'augmentation de l'angle d'incidence.



**Fig (V.9)** Cas de l'écoulement autour d'une hélice marine.  
 (a) Forces agissantes sur une section d'hélice (b) Performances hydrodynamiques

**V.6 Écoulement autour d'une plaque plane (calcul du  $C_x$ ):**

On a la formule de la trainée :

$$D = 1/2 \cdot \rho \cdot S \cdot U^2 \cdot C_x$$

$D$  : La trainée.

$C_x$  : Coefficient de trainée.

$U$  : Vitesse de l'écoulement relative à l'objet.

**Pour un écoulement laminaire :**

$$C_x = 1.328 Re_l^{-1/2} \quad \text{pour } Re < 5 \cdot 10^5$$

**Pour un écoulement transitoire :**

$$C_x = 0.0743 Re_l^{-1/5} - \frac{1740}{Re_l} \quad \text{pour } 5 \cdot 10^5 < Re < 10^7$$

$$C_x = \frac{0.455}{(\text{Log}Re_l)^{2.58}} - \frac{1740}{Re_l} \quad \text{pour } 5 \cdot 10^5 < Re_e < 10^9$$

**Pour un écoulement turbulent :**

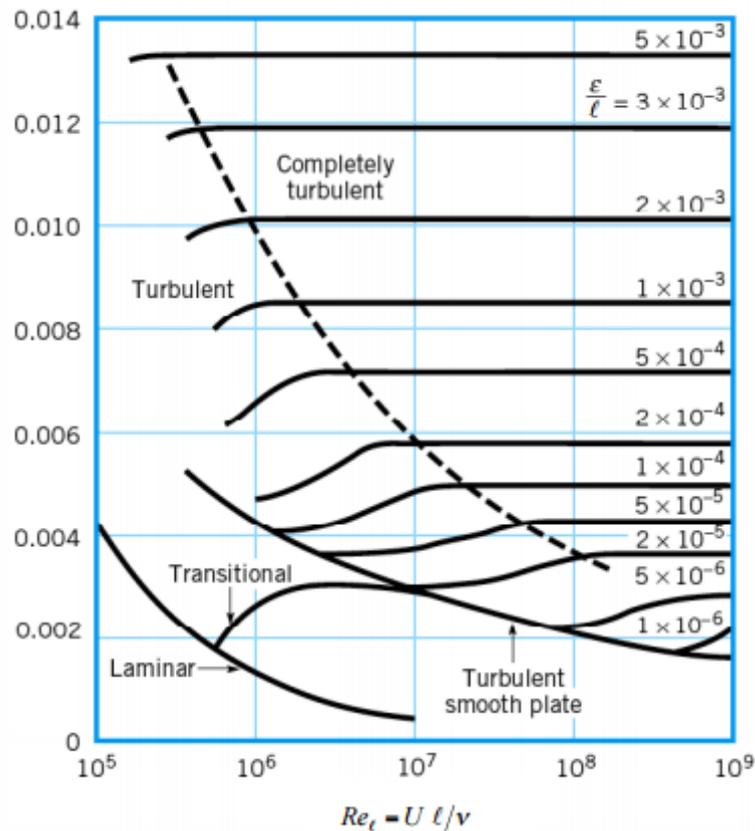
**(a) Turbulent lisse :**

$$C_x = 0.0743 Re_l^{-1/5} \quad \text{pour } 5 \cdot 10^5 < Re_e < 10^7$$

$$C_x = \frac{0.455}{(\text{Log}Re_l)^{2.58}} \quad \text{pour } 5 \cdot 10^5 < Re_e < 10^9$$

**(b) Complètement turbulent :**

$$C_x = [1.89 + 1.62 \log(\varepsilon/l)]^{-2.5} \quad \text{dépendant de la rugosité}$$

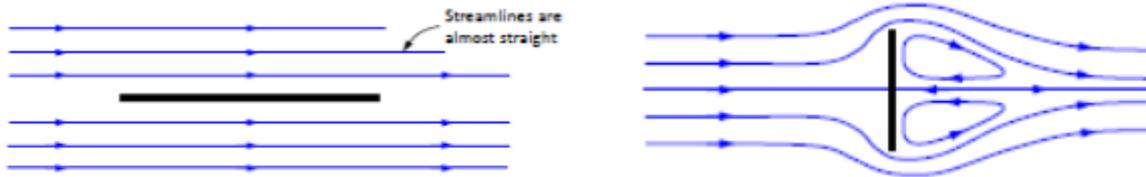


**Fig (V.10)** Coefficient de traînée  $C_x$  en fonction de nombre de Reynolds  $Re_e$  (cas d'une plaque plane à différents coefficient de rugosité)

**V.7 Quelques paramètres influents sur le coefficient de trainée  $C_x$  :**

**V.7.1 Position de la plaque :**

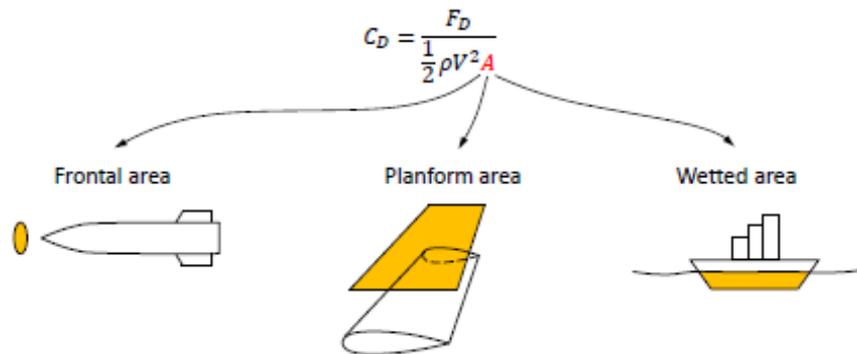
Quand la plaque est alignée parallèlement à l'écoulement, les lignes de courant sont presque uniformes. La force de trainée est due aux forces de viscosités. La force de pression est négligeable. Quand la plaque est perpendiculaire, La force de trainée est due aux forces de pressions. . La force de viscosité est négligeable.



**Fig (V.11)** Écoulement autour d'une plaque plane.  
 (a) une plaque parallèle à l'écoulement      (b) une plaque perpendiculaire à l'écoulement

**V.7.2 La surface :**

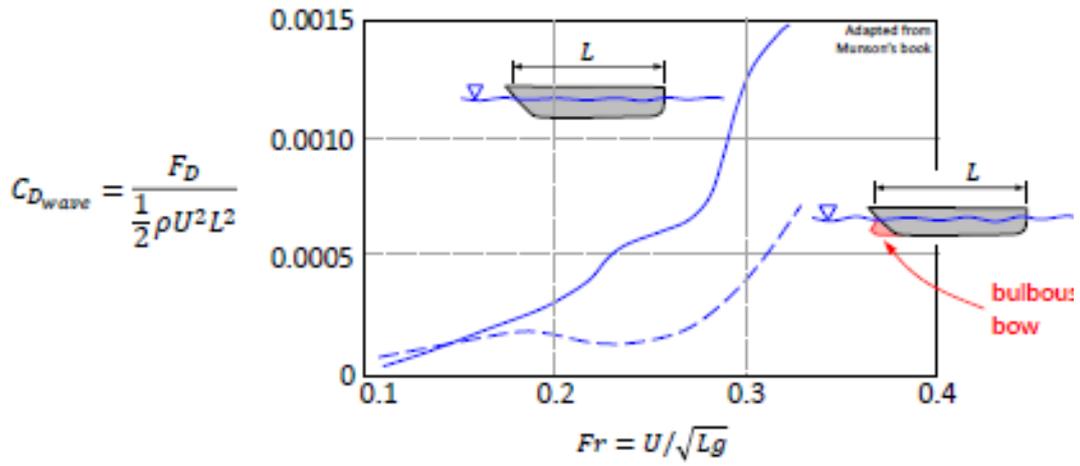
Le coefficient de trainée dépend aussi de la forme géométrique, et la surface consiste un paramètre important pour le calcul  $C_x$  . La figure V.12 montre la surface utilisée pour différents formes géométriques.



**Fig (V.12)** Choix de la surface pour le calcul du Coefficient de trainée  $C_x$  .  
 (différentes formes géométriques)

**V.8 Optimisation des formes géométriques :**

Pour déplacer des obstacles sur une surface libre la trainée due aux vagues augmente. Les formes des coques de navire sont conçues afin de réduire la trainée due aux vagues. L'utilisation d'un bulbe réduit la résistance due aux vagues.



**Fig (V.13)** Coefficient de trainée  $C_x$  en fonction du nombre de Froude  $F_r$  (une coque avec et sans un bulbe)

**V.9 Exercices avec réponses:**

**Exercice 01:**

Calculer la force de traînée due au mât de 20 mètres de haut d'un voilier dans un vent de 30 noeuds, si  $R = 10 \text{ cm}$ , sachant que 1 noeud nautique vaut 1.852 km. La courbe du  $C_x(R_e)$  pour le cas d'un cylindre et une sphère est illustrée (voir annexe V.1).

On donne :

$$v_{air} = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s} \quad , \quad \rho_{air} = 1.23 \text{ kg/m}^3$$

**Réponse :**

1.  $F_x = 744 \text{ N}$

**Exercice 02:**

Une plaque plane mince de 14 m de longueur, et de 4 m de largeur est remorquée parallèlement à elle-même dans le sens de sa longueur dans l'eau à la vitesse de 120 km/h.

Déterminer la force de frottement s'exerçant sur la plaque ?

On remplace la plaque par un obstacle cylindrique mince de diamètre  $D = 0.25 \text{ m}$ . Calculer la force de frottement sur l'une des surfaces de cet obstacle ?

On donne :

$$R_e < 10^5 : C_x = \frac{1.328}{\sqrt{R_e}}$$

$$10^5 < R_e < 10^7 : C_x = \frac{0.074}{R_e^{1/5}}$$

$$R_e > 10^7 : C_x = 0.455 \cdot (\text{Log}_{10} R_e)^{-2.58} , \quad v_{e.mer} = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} , \quad \rho_{e.mer} = 1025 \text{ kg/m}^3$$

**Réponse :**

1.  $F_{x \text{ plaque}} = 56,43 \cdot 10^3 \text{ N}$

2.  $F_{x \text{ cylindre}} = 88,4 \text{ N}$

**Exercice 03:**

On veut propulser à la vitesse de 72 km/h une vedette de masse égale à 10 tonnes en la faisant supporter seulement par une aile sous-marine (hydrofoil) dont le coefficient de portance vaut 0,7 et le coefficient de traînée 0,06.

On donne :

$$\rho_{e.mer} = 1025 \text{ kg/m}^3$$

Calculer :

1. La surface de l'aile.

2. La puissance nécessaire à la propulsion.

**Réponse :**

1.  $S = 0,684 \text{ m}^2$

2.  $P_{ui} = 168,264 \text{ kw}$

**Exercice 04:**

Un sous-marin a une longueur  $L = 84 \text{ m}$  et une surface totale de coque de  $S = 1800 \text{ m}^2$ . Calculer la résistance due aux forces de frottement visqueux s'exerçant sur la coque, sachant que le sous-marin a une vitesse  $V = 15 \text{ m/s}$ . Pour faire ce calcul, on admettra qu'à la valeur  $C_x$  du coefficient moyen de frottement établi pour une plaque plane est applicable ici.

On donne :

$$Re > 10^7 : \quad C_x = 0.455 \cdot (\text{Log}_{10} Re)^{-2.58} \quad \nu = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \quad \rho = 1025 \text{ kg/m}^3$$

**Réponse :**

1.  $F_{x \text{ sous marin}} = 324,026 \cdot 10^3 \text{ N}$

# Chapitre VI

## TURBULENCE

<b>VI</b>	<b>TURBULENCE</b> .....	<b>69</b>
VI.1	Introduction .....	70
VI.2	Les equations moyennées .....	70
VI.2.1	Principe .....	70
VI.3	Rappel des equations instantanées .....	71
VI.3.1	Equations principales .....	71
VI.4	Critère de choix et classification .....	74

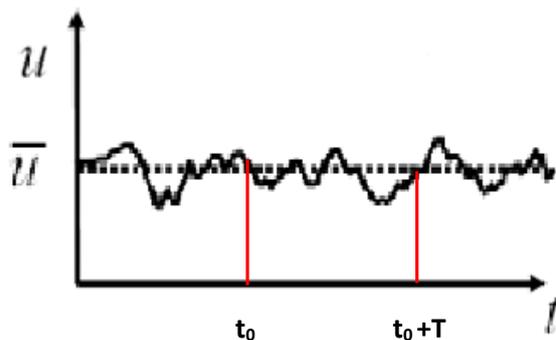
## VI.1 Introduction :

Quand le champ de vitesse subit d'importantes fluctuations spatiales et temporelles on dit que l'écoulement est turbulent. Il est très compliqué de décrire ce champ, des méthodes statistiques sont employées en remplaçant les propriétés instantanées par des valeurs moyennes.

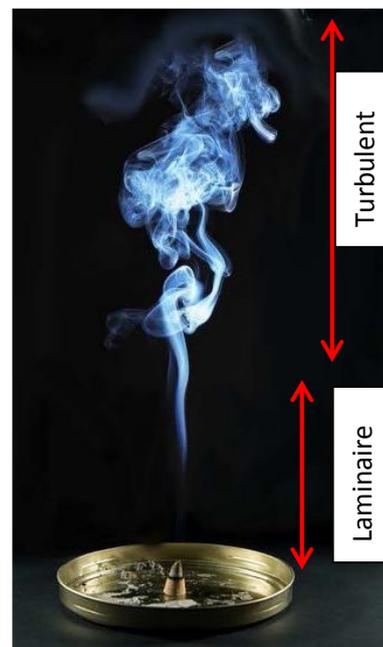
## VI.2 Les equations moyennées :

### VI.2.1 Principe :

- La résolution des équations de *Navier Stokes* peut se faire pour des nombres de *Reynolds* faibles et pour des cas simples.
- Les problèmes de la mécanique des fluides sont pratiquement rencontrés dans les écoulements turbulents c'est-à-dire pour de nombres de *Reynolds* importants qui consistent à s'intéresser aux quantités moyennes.
- Pour cela l'opérateur moyen d'ensemble est appliqué aux équations de mouvement en pratiquant une décomposition de *Reynolds* sur les inconnus du problème.
- Les nouvelles equations sont appelées les equations moyennées par opposition aux equations du mouvement dite instantanées.



**Fig (VI.1)** Champs de vitesse en un point dans un régime turbulent.



**Fig (VI.2)** Structure de l'écoulement laminaire et turbulent (cas d'une fumée de cigarette)

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u dt$$

On a :

$$u = \bar{u} + u'$$

$u$ : Vitesse instantanée.

$\bar{u}$ : Vitesse moyenne.

$u'$ : Fluctuation de la vitesse.

On obtient la vitesse moyenne en réalisant  $N$  mesures.

$$\bar{u} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u^i$$

## VI.3 Rappel des equations instantanées :

### VI.3.1 Equations principales :

- Incompressibilité (continuité) :

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

- *Navier Stokes* :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

Equation de continuité :

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v} + v')}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{w} + w')}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

(1) et (2) vérifient l'équation de continuité.

Equation de quantité de mouvement (*Navier Stokes*):

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

On a :

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i$$

$$P = \bar{P} + P'$$

On remplace dans l'équation de quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial t} + (\bar{u}_j + u'_j) \frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\bar{P} + P')}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j \partial x_j} \\ \frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\bar{P} + P')}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j \partial x_j} \\ \frac{\partial(\bar{u}_i + \bar{u}'_i)}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \bar{u}'_j \frac{\partial \bar{u}'_i}{\partial x_j} + \bar{u}'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}'_i}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\bar{P} + \bar{P}')}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2(\bar{u}_i + \bar{u}'_i)}{\partial x_j \partial x_j} \end{aligned}$$

On a aussi :

$$\bar{u}'_i = 0 \text{ et } \bar{u}_i = \bar{u}_i$$

On obtiendra :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \overline{u'_j \frac{\partial \bar{u}'_i}{\partial x_j}} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \\ \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} &= \overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} + \overline{u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_j}} \\ \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} &= \overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\overline{\partial u'_i u'_j}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\overline{\partial u'_i u'_j}}{\partial x_j}$$

On connaît que :

$$\tau_{ij} = \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

On aura :

$$\nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j}$$

$$-\frac{\overline{\partial u'_i u'_j}}{\partial x_j} \cdot \frac{\rho}{\rho} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\overline{\partial \rho u'_i u'_j}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_j}$$

$R_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j}$  (Tenseur de Reynolds)

L'équation de Navier Stokes moyennée s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\tau}_{ij} + R_{ij})$$

Avec :

$$\bar{u}'_i = 0$$

$$\bar{u}'_j = 0$$

$$\overline{u'_i u'_j} \neq 0$$

- Les composantes  $R_{ij}$  sont appelées contraintes de Reynolds ou tensions de Reynolds, elles sont analogues avec les contraintes visqueuses.
- L'équation de Navier Stokes moyennée diffère de l'équation de Navier Stokes instantanée par la présence d'un terme supplémentaire représentant l'effet du champ fluctuant sur le champ moyen.
- Le tenseur de Reynolds est symétrique :

$$R_{ij} = -\rho \begin{bmatrix} \overline{u'u'} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{v'u'} & \overline{v'v'} & \overline{v'w'} \\ \overline{w'u'} & \overline{w'v'} & \overline{w'w'} \end{bmatrix}$$

- En situation de turbulence développée (loin de paroi), le tenseur de *Reynolds* est prépondérant devant le tenseur de contraintes visqueuses.  $R_{ij} \gg \overline{\tau_{ij}}$

**Tab (VI.1)** Inconnus à calculer pour le cas des équations instantanées et moyennées.

Inconnues à calculer (4)	Equations disponibles (4)	Inconnus supplémentaires (6)	Nombre total d'inconnus (10)
Champ de vitesse moyen $\bar{u}_j$ (3) Pression moyenne $\bar{P}$ (1)	Continuité Navier Stokes	Tensions de Reynolds $\overline{u'_i u'_j}$ (6)	Champ de vitesse moyen (4) Pression moyenne Tensions de Reynolds (6)

- Il est donc nécessaire de modéliser les inconnues supplémentaires à l'aide de loi « modèles de fermeture »
- La décomposition de *Reynolds* dans les équations de *Navier Stokes* a permis de trouver un certain nombre d'équations pour les inconnus du problème.
- Le nombre d'inconnues est toujours supérieur aux nombre d'équations.
- On peut utiliser l'équation de *Poisson* à la place de l'équation de continuité.
- On obtient l'équation de *Poisson* en appliquant l'opérateur divergence à l'équation de *Navier Stokes*.

### VI.4 Critère de choix et classification :

Il existe deux grandes catégories de modélisation :

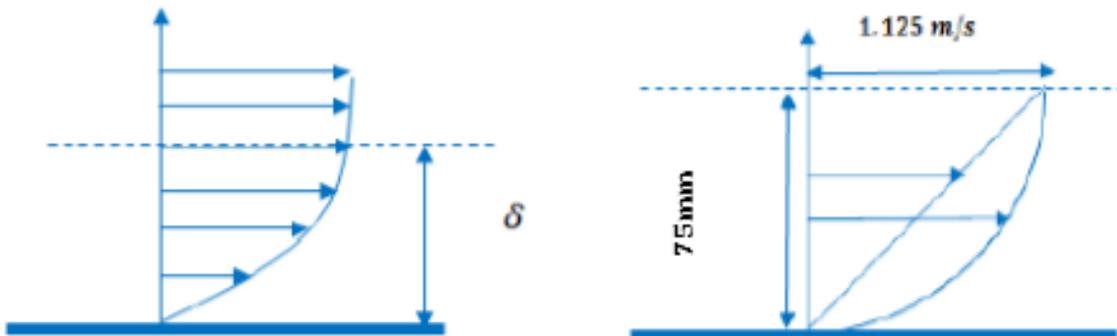
- **Modèle du premier ordre** : modèles à viscosité turbulente basé sur l'hypothèse de *Boussinesq* qui consiste à modéliser directement les tensions de Reynolds à l'aide de la viscosité turbulente  $\mu_t$ .
  - **0 équation** (Longueur de mélange)
  - **1 équation** ( $k$  énergie cinétique turbulente)
  - **2 équations** ( $k - \omega, k - \varepsilon$ )
- **Modèles du 2<sup>ème</sup> ordre** : Les tensions de *Reynolds* sont calculées directement, la modélisation se porte sur des moments d'ordre supérieur, la mise en œuvre est plus délicate mais les résultats sont de meilleure qualité.
  - **7 équations** ( $R_{ij} - \varepsilon$ )

Le choix du modèle dépend du problème à traiter.

Les modèles à viscosité turbulente sont plus stables et couramment utilisés.

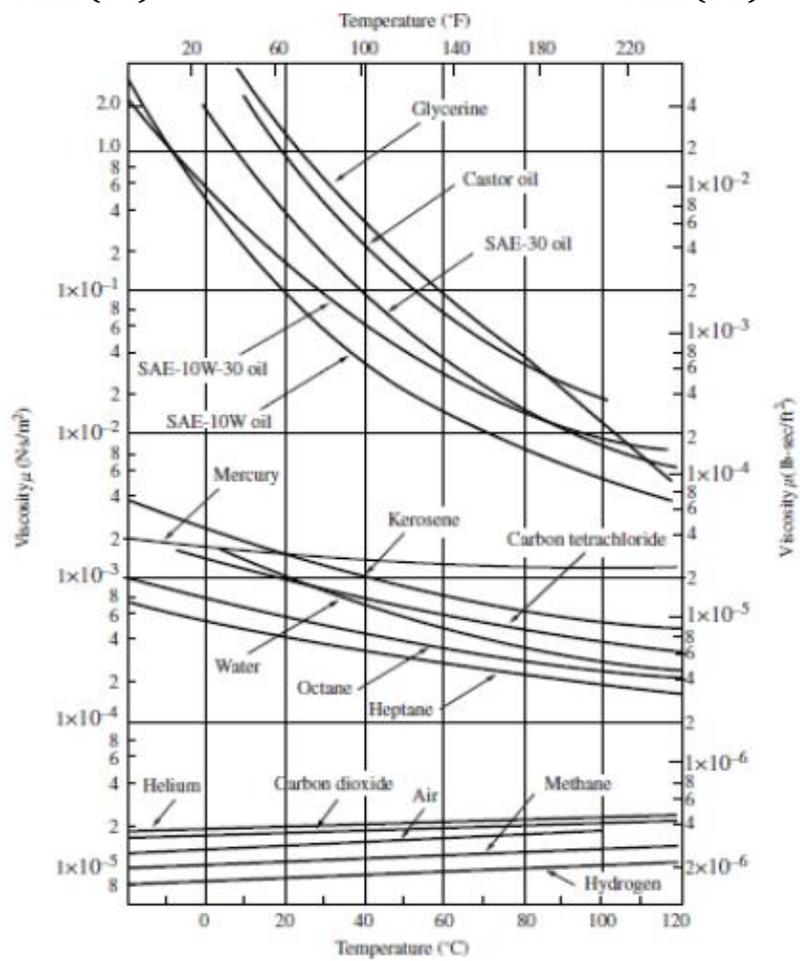
L'utilisation de 0, 1, 2 équations dépend de la complexité du problème à traiter.

# Annexes

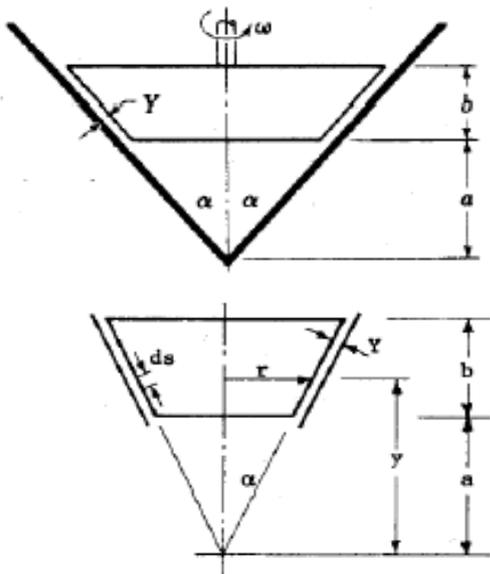


Anx (I.1)

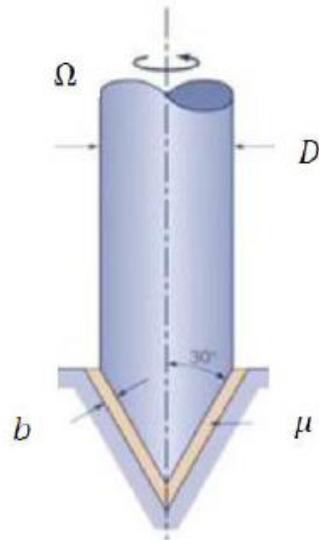
Anx (I.2)



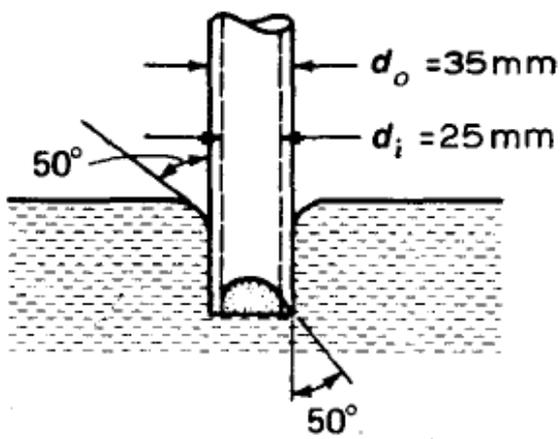
Anx (I.3)



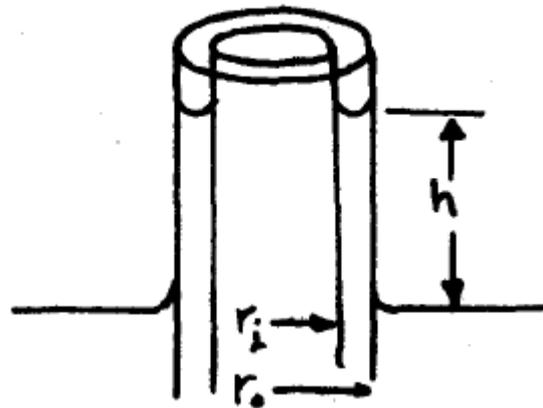
Anx (I.4)



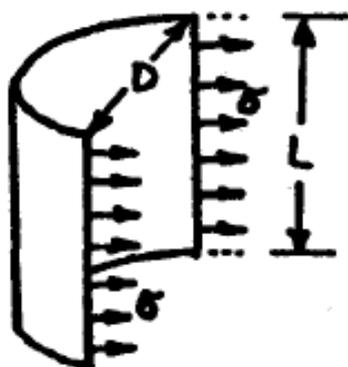
Anx (I.5)



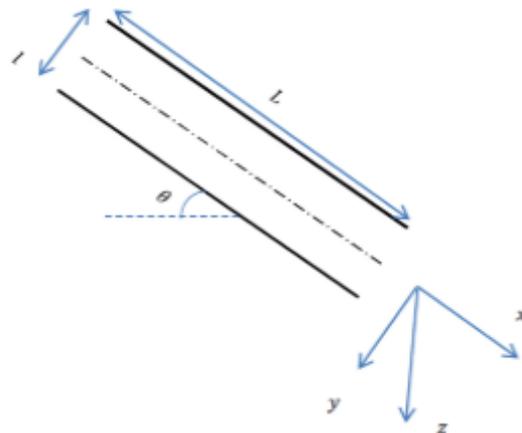
Anx (II.1)



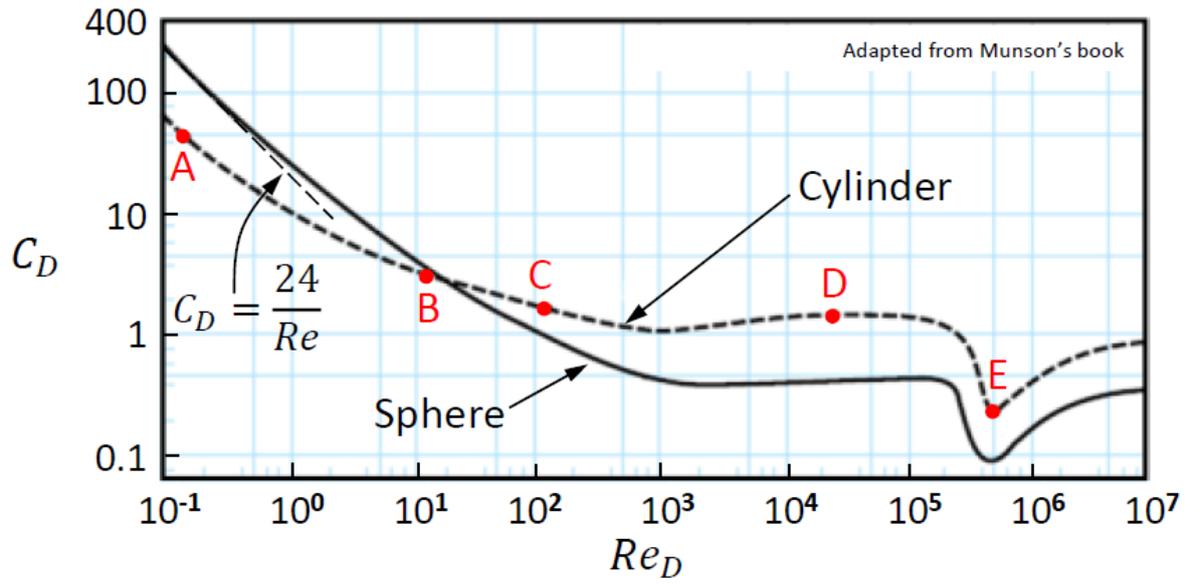
Anx (II.2)



Anx (II.3)



Anx (III.1)



Anx (V.1)

# Références

- [1]** Mécanique des fluides 2 ème édition, Sakir Amiroudiene, Jean-Luc Battaglia.
- [2]** Fluid Mechanics Fundamentals and applications, Yunus A. Çengel, Jhon M. Cimbala.
- [3]** Fluid Mechanics, Merl Potter, David C. Wiggert.
- [4]** Mécanique expérimentale des fluides, Tome 1 statique et dynamique des fluides non visqueux, Raymond Comolet.
- [5]** Mécanique expérimentale des fluides, Tome 2 dynamique des fluides réels, Turbomachines, Raymond Comolet.
- [6]** Introduction to fluid mechanics, Y. Nakayama.
- [7]** Turbulent flows, Stephen B. Pope.