



Faculté de Physique
Département de Physique énergétique

Spécialité : physique

Option : Physique des Matériaux et des Plasmas

Présenté par

Mlle : Fatima SIDJILANI

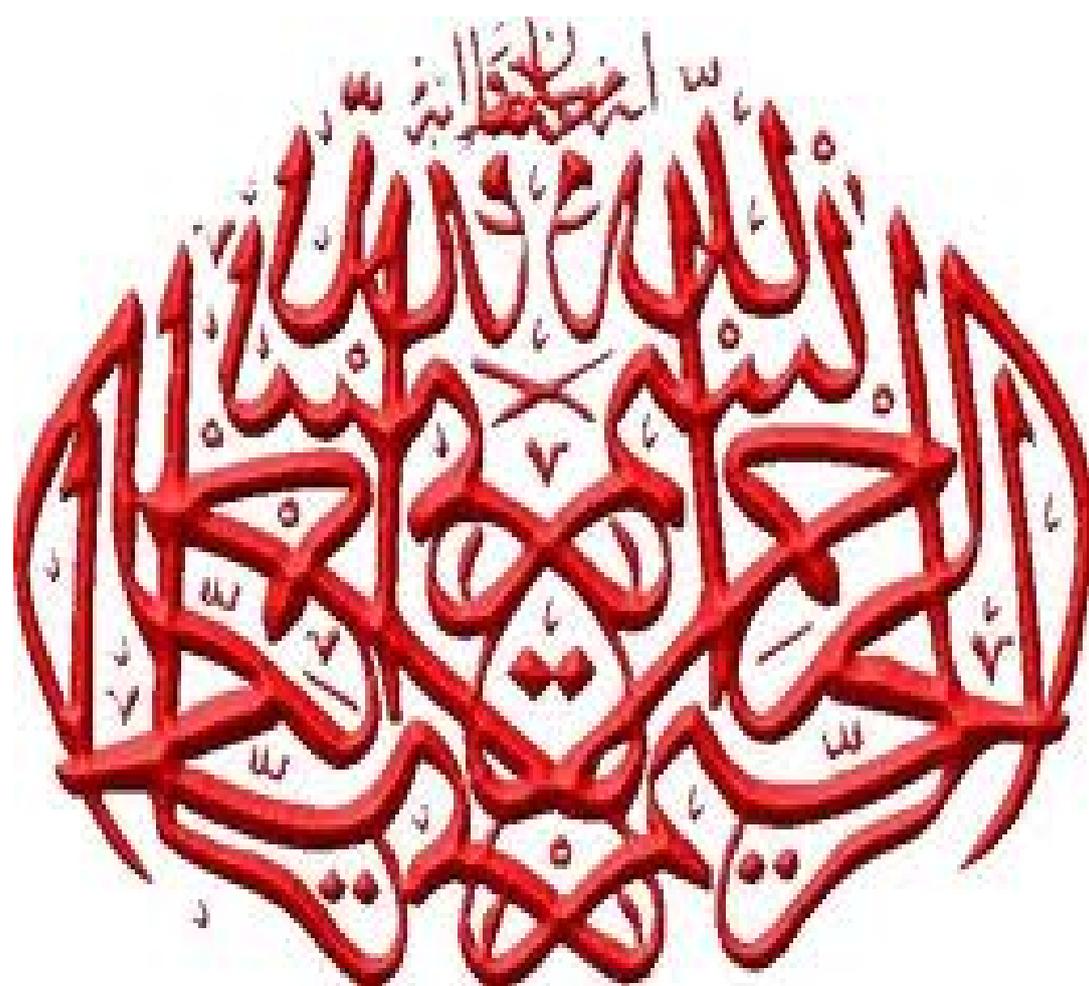
Pour l'obtention du diplôme de Magister en Physique
Thème

Diffusion des ondes dans un
milieu aléatoire

SOUTENU LE : 10/12/2014

Devant la commission d'examen composée de :

<u>Qualité</u>	<u>Nom et Prénoms</u>	<u>Grade</u>	<u>Etb d'origine</u>
Président	Mr. BELASRI Ahmed	Professeur	USTO-MB
Rapporteur	Mme. HAMDACHE Fatima	Professeur	USTO-MB
Co-Rapporteur	Mlle. YEDJOUR Afifa	M.C « B »	USTO-MB
Examineur	Mr. KAMECHE Mustapha	Professeur	USTO-MB
Examineur	Mr. ZEKRI Nouredinne	Professeur	USTO-MB
Invité	Mlle. DJERABA Aicha	M.C « B »	USTO-MB



Dédicace

Je dédie ce travail, à toute ma famille « Sidjilani, Bouelame, et Ouazani »

Mes frères Mes sœurs et neveux

Mes enseignants

*Mes collègues de post graduation : du département de physique, et
particulièrement du L.P.P.M.C.A.*

Ceci est une Dédicace.

*A celui qui m'a indiqué la bonne voie en
me rappelant que la volonté fait toujours
les grands hommes,...*

à mon père.

*A celle qui a attendu avec patience les
fruits de sa bonne éducation,...*

à ma Mère.

Remerciements



e travail a été réalisé dans le Laboratoire de Physique des Plasmas, Matériaux Conducteurs et leurs Applications (L.P.P.M.C.A). De l'Université des Sciences et Technologies d'Oran Mohamed Boudiaf (USTOM-B).

*Je remercie **Dieu** du bien fait de la science et de m'avoir donné le courage, la volonté et la patience de réaliser ce travail.*

*Je tiens à remercier mon encadreur M^{me} le professeur **F. HAMDACHE**, en lui exprimant ma profonde gratitude, pour m'avoir proposé ce sujet, pour son soutien et son aide. Il m'est impossible de citer ici toutes les raisons de mes remerciements, mais je voudrais signaler, parmi tant d'autres, les conditions excellentes de travail dans les quelles M^{me} HAMDACHE m'a accueillie et ma grande admiration pour ses qualités humaines.*

*Je remercie le professeur **A. BELASRI**, de m'avoir accueilli dans son laboratoire. Je tiens également à lui exprimer ma reconnaissance pour sa grande disponibilité, sa rigueur scientifique, En fin d'avoir bien voulu présider le jury de ce mémoire.*

*Je remercie vivement mon co-encadreur **Dr A.YEDJOUR** de l'USTOM-B, de m'avoir dirigé dans ce travail ceci par sa disponibilité et sa patience.*

*Mes remerciements vont également au **Pr M.KAMECHE**, de l'USTOM-B d'avoir accepté d'examiner ce travail.*

*Je remercie également **Pr N.ZEKRI**, de l'USTOM-B d'avoir accepté d'examiner ce travail.*

*Je remercie particulièrement **Dr A.DJERABA**, de l'USTOM-B pour son aide et sa disponibilité.*

*Je tiens à remercier tous mes amis **Chahra, Nawel, Zoulikha, Khadidja, Moukhtaria, Abed karim**, tous les gens qui m'ont aidée de près ou de loin à accomplir ce travail. Ainsi que tous les membres du laboratoire **L.P.P.M.C.A** .*

RÉSUMÉ

L'objectif de ce travail est l'étude de l'effet d'un potentiel optique aléatoire unidimensionnel (Speckel) sur la fonction d'onde d'un condensat de Bose-Einstein avec interactions. Nous traitons le condensat de Bose-Einstein dans l'approximation du champ moyen et nous utilisons l'équation de Gross-Pitaevskii afin de calculer la densité $|\psi|^2$. Nous trouvons dans le cas particulier, lorsque la longueur de relaxation ξ est plus petite que la longueur de corrélation σ_R , que le condensat présente une délocalisation (un profil de type Thomas Fermi). Dans le cas contraire, lorsque la longueur de corrélation est plus petite que la longueur de relaxation, le condensat suit les modulations de potentiel optique aléatoire. Enfin, l'étude d'un BEC avec interaction en présence d'un potentiel désordonné nous a permis de modifier le profil de la densité $|\psi|^2$ suivant la nature du potentiel aléatoire et la fonction d'onde reste toujours délocalisée même pour une très faible longueur de corrélation du désordre.

Mots clés : Potentiel aléatoire, fonction d'onde, condensation de Bose-Einstein, équation Gross-Pitaevskii, délocalisation.

Table des matières

Table des matières	i
Introduction Générale	1
Bibliographies	3

CHAPITRE 1 : Diffusion des ondes

1.1 Introduction	5
1.2 Diffusion des ondes dans un milieu aléatoire	6
1.2.1 Diffusion simple	10
1.2.2 Diffusion multiples	10
1.3 Le désordre et les interférences	11
1.4 Théorie de la localisation	12
1.4.1 La localisation faible	13
1.4.2 Localisation d'Anderson	14
1.4.3 Critères de localisation	15
1.4.4 Théorie d'échelle	16
1.5 Théorie de la transition métal-isolant	20
1.5.1 Transition d'Anderson	21

Table des matières

1.6 Généralités sur les condensations de Bose-Einstein	24
1.6.1 Cas d'un gaz piégé dans un potentiel harmonique	24
1.6.2 Résultat expérimentaux	27
1.7 Conclusion	31
Bibliographies	32

CHAPITRE 2 : mise en équation de la condensation de Bose-Einstein

2.1 Introduction	36
2.2 L'équation de Gross-Pitaevskii	37
2.3 Les approximations à l'équation de Gross-Pitaevskii	40
2.3.1 Équation sans interaction : Oscillateur harmonique	40
2.3.2 Calcul variationnel : Approximation par une Gaussienne	42
2.3.3 Équation sans terme d'énergie cinétique : régime de Thomas-Fermi	43
2.4 Conclusion	45
Bibliographies	46

CHAPITRE 3: Délocalisation d'un condensat de Bose-Einstein en présence d'interactions dans un champ de tavelures

3.1 Introduction	48
3.2 Potentiel optique aléatoire : champ de tavelures ou speckel	49

Table des matières

3.3 Propriété statistiques du champ de tavelures	51
3.4 Condensation de Bose-Einstein	52
3.5 Equation de Gross-Pitaevskii	53
3.6 Régime de Thomas Fermi.....	54
3.7 Modèle physique.....	55
3.7.1 Régime de Thomas fermi en absence de potentiel aléatoire	56
3.7.2 Effet d'un potentiel d'un aléatoire lissé	60
3.7.3 Variation du maximum de la densité	65
3.7.4 Variation de la largeur de la densité.....	66
3.8 CONCLUSION :.....	67
Bibliographies	68
Conclusion général.....	69

Introduction générale

La propagation des ondes dans les milieux désordonnés a été largement étudiée en physique des ondes depuis une cinquantaine d'années. Les premières études expérimentales et théoriques ont été menées en physique du solide, puis en optique avant que ce sujet n'intéresse des domaines plus appliqués comme les télécommunications, l'acoustique ultrasonore ou encore la sismologie. En ce qui concerne les ondes dites classiques, la plupart des travaux théoriques et expérimentaux s'intéressent à la propagation des ondes dans les milieux désordonnés [1]. La localisation est un phénomène qui peut apparaître lorsqu'une onde se propage dans un milieu désordonné qui est inhomogène où les hétérogénéités sont réparties de façon aléatoire. Ce phénomène a été étudié par Anderson [2] en 1958 pour expliquer la transition métal-isolant. Il est de nature purement ondulatoire, les ondes peuvent être des ondes de matière, comme les électrons qui sont à l'origine de cette description, mais aussi des ondes lumineuses ou acoustiques. La localisation a eu des répercussions dans des domaines variés tels que le transport radiatif, la sismologie, la physique atomique, les atomes froids ou encore l'imagerie médicale, initiant ainsi une physique mésoscopique, qui a permis la découverte de phénomènes nouveaux tels que la rétrodiffusion cohérente, la localisation faible, les fluctuations universelles de conductance. Cela a aussi ouvert les portes d'une physique des ondes en milieu désordonné très riche [3].

La condensation de Bose-Einstein [4] est une transition de phase quantique qui a eu un destin inhabituel dans l'histoire de la physique. En 1924 Bose a démontré la loi de Planck pour le rayonnement du corps noir en traitant les photons comme un gaz de particules identiques puis l'idée a été généralisée par Einstein pour un gaz de particules matérielles. En 1925 Einstein démontra une propriété extraordinaire de ces systèmes en augmentant la densité spatiale à des températures très basses alors une fraction des atomes se condense dans un état d'énergie le plus bas. Cette idée a été accueillie avec des doutes et après 70 ans des observations expérimentales vraiment indiscutables ont permis de confirmer l'analyse théorique initiale [5].

Les gaz atomiques ultra-froids font l'objet de beaucoup de travaux expérimentaux et théoriques. Utilisant les progrès récents dans le refroidissement et le piégeage d'atomes neutres, les condensats de Bose-Einstein d'atomes dilués [6,7] et les gaz de Fermi dégénérés (DFGs) [8,9,10,11] sont maintenant régulièrement produits dans les laboratoires. Les gaz

ultra-froids constituent un terrain favorable pour étudier les problèmes standards de la physique de la matière condensée [12, 13, 14,15].

Dans les condensats gazeux, on peut tenir compte des interactions entre atomes en utilisant la théorie de champ moyen [16]. L'état du condensat est décrit par une fonction d'onde qui satisfait à l'équation de Gross-Pitaevskii (GPE) [17,18], qui est une équation de Schrödinger contenant un terme non linéaire.

Notre travail consiste à étudier le comportement de la fonction d'onde d'un condensat dans un potentiel désordonné.

Dans le premier chapitre, on s'intéresse plus particulièrement à la propagation des ondes dans un milieu désordonné et aux notions fondamentales des systèmes désordonnés à une dimension 1D. On présentera les principaux travaux qui ont contribué à l'établissement de la théorie de localisation, ses critères, ses fondements, la théorie d'échelle entre autre les travaux d'Anderson, d'Abraham et al et de Thouless [2,19]. Et enfin on présentera le phénomène de la condensation de Bose-Einstein en citant quelques résultats expérimentaux observés récemment avec les atomes froids.

Dans le chapitre 2, nous exposons quelques modèles physiques aptes à engendrer le transport de l'onde dans un milieu désordonné. Ainsi que les théories de base des condensats et l'introduction des approximations de l'équation de Gross-Pitaevskii.

Le chapitre 3, comporte l'essentiel de notre travail. Nous développons une approche de perturbation pour calculer numériquement la fonction d'onde d'un condensat en présence d'un potentiel désordonné. Les résultats obtenus, en particulier pour la longueur de relaxation ξ plus petite que la longueur de corrélation σ_R , le condensat est dans un état délocalisé présentant un profil de type Thomas-Fermi. Dans la situation inverse, où la longueur de corrélation est plus petite que la longueur de relaxation, nous montrons que le potentiel aléatoire peut être significativement lissé, la fonction d'onde peut être délocalisée pour le cas d'un désordre faible est d'une longueur de corrélation petite. Enfin, nous comparons ces résultats aux résultats expérimentaux de L. Sanchez-Palencia [20].

Bibliographie

- [1] A. Aubry. « Approche matricielle de l'opérateur de propagation des ondes ultrasonores en milieu diffusant aléatoire ». Thèse de Doctorat, (2008).
- [2] P.W.Anderson. Absence of diffusion in certain random lattices. *Phy. Rev.* 109, page 1492, March (1958).
- [3] P.Sebbah, editor. *Waves and Imaging through Complex Media*. Kluwer Academic Publishers, (2001).
- [4] S. N. Bose. Plancks gesetz und lichtquantenhypothese. *Zeitschrift für Physik*, 26 :178, (1924).
- [5] S. Breteaux et S. Giraud. «Résolution De L'équation De Gross-Pitaevskii Par Différentes méthodes Numériques » (2005).
- [6] E.A. Cornell and C.E. Wieman, *Rev. Mod. Phys.* **74**, 875 (2002).
- [7] W. Ketterle, *ibid.* **74**, 1131 (2002).
- [8] A.G. Truscott, K.E. Strecker, W.I. McAlexander, G.B. Partridge, and R.G. Hulet, *Science* **291**, 2570 (2001).
- [9] F. Schreck, L. Khaykovich, K.L. Corwin, G. Ferrari, T. Bourdel, J. Cubizolles, and C. Salomon, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 080403 (2001).
- [10] Z. Hadzibabic, C.A. Stan, K. Dieckmann, S. Gupta, M.W. Zwierlein, A. G'orlitz, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 160401 (2002).
- [11] G. Roati, F. Riboli, G. Modugno, and M. Inguscio, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 150403 (2002).
- [12] J.R. Anglin and W. Ketterle, *Nature (London)* **416**, 211 (2002).
- [13] D. Jaksch and P. Zoller, *Ann. Phys.* **315**, 52 (2005).
- [14] T. Giamarchi, «Strong correlations in low dimensional systems», arXiv:cond-mat/0605472v1 (2006).
- [15] M. Lewenstein, A. Sanpera, V. Ahufinger, B. Damski, A. Sen (De), U. Sen. *Advances in Physics* **56** (2), 243 (2007).
- [16] N. N. Bogoliubov, *J. Phys. U.S.S.R.*, 11 :23, (1947).

[17] W.D. Li Phys Rev A 74, 063612 (2006)

[18] E . P. Gross, Nuovo Cimento 20, 454 (1961).

[19] P.E.Lindelof,J.Norregaard et J.Hanberg. Phys. Scr.T 14. 17 (1986).

[20] L. Sanchez-Palencia, \Smoothing effect and delocalization of interacting Bose- Einstein condensates in random potentials", Phys. Rev. A 74, 053625 (2006).

Diffusion des ondes

1.1 Introduction

La propagation des ondes est un des phénomènes les plus courants dans la nature. La mécanique quantique traite les particules comme des ondes: les électrons dans les métaux sont décrits par des ondes et la conductivité résulte de la propagation de ces ondes. Mais les ondes ne se propagent pas librement. La plupart des milieux qu'elles traversent comportent des obstacles, des inhomogénéités. Ainsi le phénomène de diffusion prend place et l'onde peut être diffusée de façon élastique ou inélastique. Lors d'une diffusion élastique, l'énergie de l'onde est conservée, seule sa direction de propagation est changée, alors qu'une onde diffusée inélastiquement son énergie et son impulsion sont modifiées.

La diffusion inélastique est toujours présente dans les systèmes physiques réels et contribue à la destruction de la cohérence de l'onde, empêchant ainsi l'apparition d'interférences. Lors de la diffusion d'une onde différents phénomènes surviennent si celle-ci diffuse faiblement ou fortement sur un ensemble d'obstacles réguliers ou non. Si le milieu traversé par l'onde est peu dense, celle-ci subira peu de collision et sera légèrement perturbée. Au contraire, une forte densité de potentiels engendrera la diffusion multiple [1-3]. L'onde subit alors plusieurs collisions avant de sortir du milieu.

Les différents régimes de propagation sont caractérisés par un paramètre important : le libre parcours moyen l_e qui représente la distance moyenne entre deux collisions successives, pour un système de taille L on a :

- ✓ Régime balistique ($l_e > L$) l'électron se déplacera d'un mur à un autre sans diffusion et la conductivité du système est quantifiée.

- ✓ Régime métallique ($l_e < L$) l'électron diffuse plusieurs fois à travers le système. Pour un désordre petit, $l_e \gg \xi$ (ξ longueur de localisation) et la conductivité est grande.
- ✓ Régime localisé (isolant) ($l_e < L$) la taille du système excède la longueur de localisation ξ ($L \gg \xi$) et la conductivité est faible : décroît en $\exp(-L/\lambda)$.

Les propriétés de transport d'une onde cohérente en milieu désordonné sont déterminées par l'interférence des chemins de diffusion multiple, ce qui mène à la localisation spatiale et à l'absence de diffusion dans le milieu. Ce phénomène, connu sous le nom de localisation d'Anderson [2] a d'abord été prédit pour des électrons dans des cristaux désordonnés, avant d'être étendu au cas des ondes classiques, ce qui a permis son observation dans différents systèmes. L'avènement récent des systèmes d'atomes ultra froids [4-7], qui sont très bien contrôlés expérimentalement. Ils offrent de nouvelles possibilités pour étudier le problème de localisation d'Anderson.

Ce chapitre est consacré aux notions générales de la diffusion d'une onde dans un milieu désordonné, on s'intéressera particulièrement à la localisation d'Anderson qui est un phénomène emblématique des systèmes désordonnés, où les effets de diffusion et d'interférences s'entremêlent. Nous verrons aussi l'effet du désordre sur les propriétés de transport en passant par la théorie d'échelle pour la caractérisation des états électroniques.

A la fin du chapitre on introduit le phénomène de la condensation de Bose-Einstein, par un rappel historique des différentes découvertes et des techniques utilisées pour obtenir un condensat. Nous présenterons aussi les observations expérimentales de la localisation d'Anderson avec des atomes froids.

1.2 Diffusion des ondes dans un milieu aléatoire

Lorsqu'une onde se propage dans un milieu matériel, elle interagit avec lui et son comportement sera modifié. Cette interaction peut être décrite en terme de diffusion : l'onde rencontre un constituant élémentaire du milieu (atome, grain d'une poudre, impureté ou défaut du réseau cristallin,...) appelé diffuseur, si l'onde incidente rencontre plusieurs diffuseurs, l'onde sortante résulte de l'interférence de toutes les ondes diffusées. L'onde sortante peut être alors écrite comme la somme d'ondes partielles. Pour chacune de ces ondes partielles, on peut distinguer le nombre de diffuseurs qu'elle a rencontré voir figure 1.1.

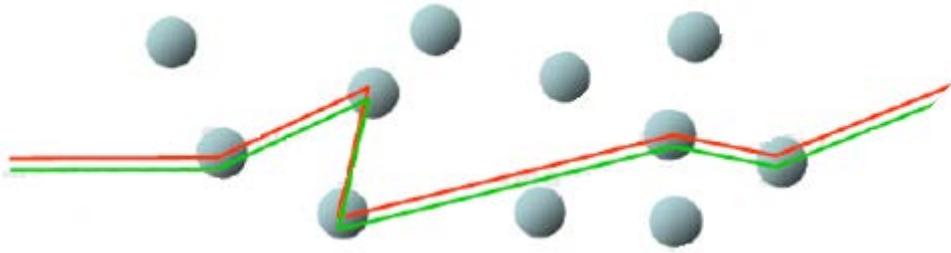


Fig. 1.1 : Représentation d'un processus de diffusion multiple [46]

Par conséquent dans un milieu désordonné, la fonction d'onde $\psi(r)$ est donnée par une somme partielle de fonctions d'ondes de chaque diffuseur n avec des chemins différents dans le milieu :

$$\psi(r) = \sum_n \psi_n(r) \quad (1.1)$$

En présence d'un potentiel périodique La fonction d'onde de l'électron est donnée sous la forme d'une onde de Bloch:

$$\psi_{n,k}(r) = U_{n,k}(r) \exp ikr \quad (1.2)$$

L'onde de Bloch est solution de l'équation de Schrödinger dans l'espace libre avec les conditions aux limites périodiques, et les effets du réseau peuvent être absorbés dans la masse effective de l'électron. La symétrie de la solution signifie que nous pouvons trouver la fonction d'onde de tout l'échantillon en répétant la solution d'une cellule unité.

Quand le désordre est introduit, la symétrie est perdue et des quantités physiques deviennent aléatoirement distribuées. La fonction d'onde doit être calculée pour plusieurs réalisations d'une petite cellule et des grandeurs physiques sont évaluées en prenant les moyennes sur les valeurs prévues.

La théorie semi-classique du transport à $T = 0^{\circ}K$ pour un faible désordre utilise les états de Bloch comme un ensemble complet de base et permet la diffusion d'un état de Bloch à un autre comme un résultat du désordre. La distance moyenne que l'électron traverse entre

événement de diffusion qui est le libre parcours moyen l_e est une bonne mesure de la force du désordre [49] dans le régime métallique.

Nous considérons ici la propagation d'une onde plane monochromatique de vecteur d'onde k se propageant dans un milieu désordonné statique de taille finie aux positions r_i . Pour décrire la diffusion de l'onde dans ce milieu aléatoire, il est nécessaire d'introduire les différentes échelles spatiales intervenant dans le problème :

La longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$, le libre parcours moyen l_e et l'extension L de ce dernier.

On distingue alors deux régimes de diffusion :

- ✓ le régime de diffusion simple : lorsque $L \ll l_e$ où l'onde subit peu (ou pas) de diffusions.
- ✓ le régime de diffusions multiples : lorsque $l_e \ll L$ où l'onde subit dans ce cas de nombreuses collisions avec le milieu désordonné avant d'en sortir.

Dans le cas d'un faible désordre ($k l_e \gg 1$), On peut considérer que l'onde se propage de diffuseur en diffuseur, comme représenté figure 1.2.

L'amplitude complexe $A(k, k')$ de l'onde diffusée dans la direction k' s'écrit sous la forme :

$$A(k, k') = \sum_{r_1, r_2} f(r_1, r_2) e^{i(k \cdot r_1 - k' \cdot r_2)} \quad (1.3)$$

où $f(r_1, r_2)$ est l'amplitude complexe associée au chemin de diffusion multiple entre les points r_1 et r_2 (voir figure 1.2), elle tient compte de la phase accumulée par l'onde le long de ce chemin de diffusion. L'intensité de l'onde s'écrit alors :

$$|A(k, k')|^2 = \sum_{r_1, r_2} \sum_{r_3, r_4} f(r_1, r_2) f^*(r_3, r_4) e^{-i(k \cdot r_1 - k' \cdot r_2)} e^{i(k \cdot r_3 - k' \cdot r_4)} \quad (1.4)$$

Le produit des amplitudes $f(r_1, r_2) f^*(r_3, r_4)$ fait intervenir un terme de phase qui est égal à la différence de phase entre les deux chemins $r_1 \rightarrow r_2$ et $r_3 \rightarrow r_4$. Cette différence de phase varie aléatoirement suivant des chemins empruntés. Ainsi une moyenne de ce produit sur les différentes réalisations du désordre est nulle sauf dans les cas où les chemins correspondent à des trajectoires identiques (la différence de phase étant alors nulle quelque soit la réalisation du désordre). Il existe deux possibilités pour obtenir des trajectoires identiques : $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_3$ et $\mathbf{r}_2 =$

\mathbf{r}_4 ou $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_4$ et $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_3$. Ces deux chemins correspondent à une propagation de l'onde suivant un chemin donné selon le même sens de propagation ou en sens opposé comme l'illustre la figure 1.2.

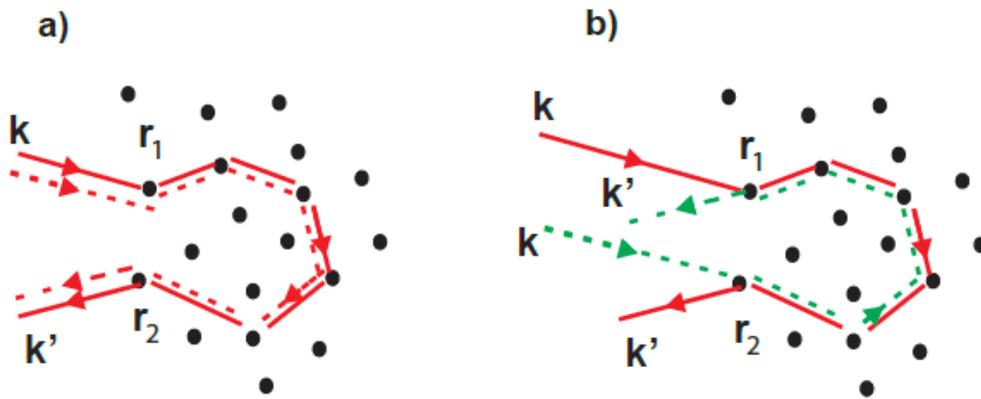


Fig. 1.2 : Chemins de propagation contribuant à l'intensité diffusée : les chemins parcourus dans le même sens de propagation (a) correspondent à la diffusion classique et ceux parcourus dans des sens opposés (b) donnent lieu aux interférences [45]

Il vient alors pour l'intensité diffusée moyennée sur les réalisations du désordre ($\langle \dots \rangle$ représente une moyenne sur les différentes réalisations du désordre) :

$$\langle |A(k, k')|^2 \rangle = \langle \sum_{r_1, r_2} |f(r_1, r_2)|^2 [1 + e^{i(k+k') \cdot (r_1 - r_2)}] \rangle \quad (1.5)$$

L'équation (1.5) fait intervenir la somme de deux termes. Le premier terme de phase nulle correspond à la propagation en sens identique. Il s'agit du terme de diffusion "classique" égal à la somme des intensités diffusées sur chaque diffuseur ($\langle |A(k, k')|^2 \rangle = \langle \sum_{r_1, r_2} |f(r_1, r_2)|^2 \rangle$), terme qui existe en l'absence d'interférences. Le second terme a une phase non nulle qui s'écrit $(k + k') \cdot (r_1 - r_2)$ il correspond à la présence d'interférences et à des chemins parcourus en sens opposés figure 1.2. C'est la prise en compte de ce second terme qui conduit à l'existence d'effets particuliers dus aux interférences lors de la diffusion dans un milieu désordonné.

1.2.1 Diffusion simple

Du point de vue de la rétrodiffusion cohérente, les chemins de diffusion simple sont particuliers : leurs chemins directs et renversés sont identiques. Ils ne contribuent donc pas à l'augmentation cohérente de l'intensité. Dans tous les cas où la diffusion simple ne peut être éliminée, le facteur d'augmentation est toujours strictement inférieur à 2, même si les amplitudes des chemins directs et renversés sont égales.

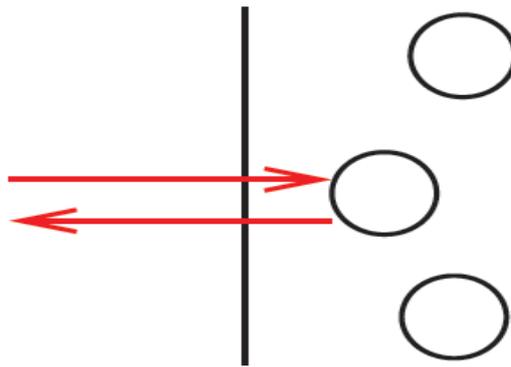


Fig. 1.3 : Les chemins directs et renversés sont confondus.

1.2.2 Diffusions multiples

Les diffusions multiples d'onde dans un milieu désordonné est un problème important pour différents domaines de la physique comme l'optique, l'acoustique ou la mécanique quantique. Dans de nombreux cas, le caractère désordonné du milieu diffusant l'onde détruit tous les effets d'interférences [7]. Toute fois, il y a également des situations où la prise en compte des effets d'interférences est essentielle. C'est le cas par exemple de la localisation d'Anderson [2], pour laquelle les interférences sont suffisamment fortes pour empêcher la propagation de l'onde dans le milieu et mener à un état localisé. Un autre effet dû aux interférences, plus aisé à observer expérimentalement, est l'augmentation cohérente de la rétrodiffusion, qui peut se voir comme un effet précurseur de la localisation d'Anderson. Cet effet a été largement étudié depuis le milieu des années 1980, principalement pour la diffusion multiple de la lumière [7, 8].

L'observation de la rétrodiffusion cohérente et de la localisation d'Anderson nécessite un milieu fortement diffusant. A ce titre, l'utilisation d'atomes comme diffuseurs des ondes

électromagnétiques semble très prometteuse : un atome est un très bon diffuseur, présentant des transitions résonantes étroites, avec une section efficace à résonance importante, de l'ordre du carré de la longueur d'onde, qui est très grande devant la taille de l'atome. Expérimentalement, l'utilisation d'atomes comme diffuseurs est possible grâce aux progrès récents concernant le contrôle et la manipulation de gaz d'atomes froids, dont un des aboutissements est l'observation de la condensation de Bose-Einstein [9, 10].

1.3 Le désordre et les interférences

La propagation des ondes en milieu aléatoire est un phénomène commun à nombreux domaines de la physique. Son étude a connu récemment un regain d'intérêt après la découverte, en optique et en mécanique quantique, d'effets cohérents inattendus dans un régime où l'on pensait que le désordre était suffisamment fort pour éliminer a priori tout effet d'interférence.

Afin de comprendre l'origine de ces effets cohérents, il peut être utile de rappeler quelques généralités sur les interférences. Bien que très spectaculaire en mécanique quantique, leur traduction dans le langage optique physique permet d'en avoir une intuition plus directe. Dans un milieu périodique, les effets d'interférences jouent un rôle essentiel pour la propagation d'une onde. La diffraction de la lumière par un réseau, ou la théorie de Bloch d'un électron dans un cristal parfait en sont des exemples bien connus. Lorsque le milieu devient désordonné, le problème devient complexe. Dans la plupart des cas, l'accès à la connaissance détaillée du milieu est tellement difficile que les physiciens se contentent d'en faire une approche statistique. Cela revient à étudier l'influence en moyenne des diffuseurs sur l'onde : le modèle physique inclut les diffuseurs et leurs propriétés intrinsèques. La moyenne sur toutes les positions des diffuseurs revient à faire disparaître les interférences, car on superpose alors des figures d'interférences avec des franges différentes. Ce qui conduit à des théories de transport dans lesquelles les effets d'interférences sont négligés. Par exemple le modèle de Drude pour la conduction électronique, ou la théorie du transfert radiatif pour le transport de l'intensité lumineuse tiennent compte avec succès d'un grand nombre d'observations [4, 11,12]. À la suite de ces observations les effets cohérents liés à la présence d'interférence par exemple phénomènes de diffusions multiples en présence de désordre ne doivent plus subsister à un calcul de moyenne d'ensemble.

1.4 Théorie de la localisation

Dans son article initial de 1958 [2], Anderson montre que les fonctions d'onde électroniques d'un matériau peuvent être profondément altérées par la présence d'un désordre suffisamment fort. L'hamiltonien du système considéré, basé sur un modèle de liaisons fortes, est de la forme:

$$H\psi_n = E\psi_n = \epsilon_n\psi_n + \sum_{k \neq n} t_{jn}\psi_k \quad (1.6)$$

Où ψ_n désigne la composante de la fonction d'onde sur le site n d'un réseau de dimensions d , ϵ_n est l'énergie sur un site aléatoire, suivant une distribution rectangulaire $P(\epsilon) = 1/W$ avec $\epsilon \in [-W/2, W/2]$ et t_{jn} sont les énergies de saut d'un site j vers un site n qui sont le plus souvent restreints aux plus proches voisins.

Quand le désordre est suffisamment fort par opposition avec les ondes étendues de Bloch, les fonctions d'ondes sont exponentiellement localisées figure 1.4 de forme générale:

$$|\psi(\vec{r})| \sim \exp\left(-\frac{|\vec{r}-\vec{r}_0|}{\xi}\right) \quad (1.7)$$

Où ξ représente la longueur de localisation qui dépend de l'énergie et du désordre.

L'existence de tels états est assez claire dans le régime de désordre très fort. Les états propres sont alors, en première approximation, des états classiquement piégés dans les minimas locaux du désordre. En partant de ces états, Anderson a développé une théorie des perturbations en terme de paramètre d'effet tunnel sur le réseau.

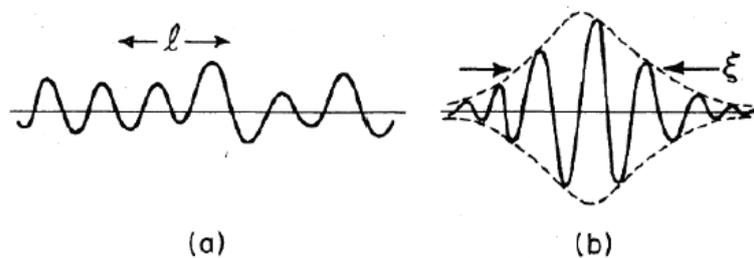


Fig. 1.4 : Fonctions d'onde (a) un état étendu et (b) un état localisé.

l et ξ sont respectivement le libre parcours moyen et la longueur de localisation [13].

La conclusion principale est qu'il est finalement difficile de délocaliser un état de cette manière car le couplage entre les états est soit pénalisé par des recouvrements exponentiellement faibles soit par un dénominateur très grand (différence des énergies apparaissant dans la théorie des perturbations).

Une conséquence intuitive de l'existence de ces états localisés est alors la suppression du transport et donc l'absence de diffusion. Par contre, à mesure que le désordre diminue, on espère alors finir par délocaliser les états propres et rétablir le transport à travers le système.

Mott, Twose et Borland [14,15] ont montré qu'à 1D tous les états sont exponentiellement localisés et ceci quelque soit l'amplitude du désordre alors qu'en 3D il existe une valeur critique du désordre W_c en dessous de laquelle les états sont délocalisés [2].

La phénoménologie de la localisation d'Anderson dépend donc hautement de la dimensionnalité, point sur lequel nous reviendrons par la suite.

Deux points extrêmement importants sont alors à noter. Tout d'abord la localisation due au désordre peut avoir lieu même si l'énergie de l'onde est bien plus grande que le désordre $E > W$ (1D en est l'exemple le plus frappant). En d'autres termes, la localisation d'Anderson est un phénomène non classique car elle interdit le transport classiquement autorisé. L'autre point est l'existence d'une transition métal-isolant (transition d'Anderson). En raison effets d'interférences.

Enfin, au lieu de faire varier l'amplitude du désordre on peut simplement la fixer et regarder le comportement des états en fonction de leurs énergies. S'il existe une valeur critique du désordre (transition d'Anderson à 3D) pour localiser un état, il est clair que tous les états d'énergie inférieure à ce seuil seront localisés et ceux au dessus, délocalisés.

Pour un désordre fixe, on parle alors de bord de mobilité désignant ainsi la valeur de l'énergie au delà de laquelle le transport est possible. En particulier dans un solide, si l'énergie de Fermi est en dessous ou en dessus de ce seuil, le système sera isolant ou conducteur. Ce concept, introduit par Mott en 1967 [16], explique clairement pourquoi une transition métal-isolant est possible en changeant la densité d'électrons et donc l'énergie de Fermi dans un semi-conducteur.

1.4.1 La localisation faible

Un régime où les interférences sont relativement facilement inclus celui ; dit « de localisation faible » caractérisé par $kl_e \gg 1$. Avec k le vecteur d'onde : $k = 2\pi/\lambda$ sous cette condition, les interférences ne sont pas toutes détruites par une moyenne d'ensemble sur le

désordre : les chemins de diffusion visitant les mêmes diffuseurs dans l'ordre inverse continuent d'interférer. En effet, la différence de phase entre deux chemins est :

$$\delta\phi = (k_1 + k_2) \cdot (r_1 - r_2) \quad (1.8)$$

Où r_1 et r_2 sont les vecteurs positions du premier et du dernier diffuseur, k_1 et k_2 sont les vecteurs d'onde incident et sortant. Si les deux chemins sont fermés $r_1 = r_2$ il n'y a aucune source de déphasage entre eux. Ils interfèrent constructivement et contribuent à l'augmentation cohérente de la probabilité de retour à l'origine qui se traduit par une diminution de la constante de diffusion et par conséquent de la transmission vers l'avant d'où le nom de localisation faible. La condition pour que les interférences aient lieu est que la taille du milieu L soit inférieure à la longueur de cohérence ($L < l_{\text{cohérence}}$), par contre dans un milieu absorbant, cette longueur est la même dans les deux chemins. Ce phénomène qualifié de localisation faible est à l'origine de modification de transport des électrons notamment la transition de phase métal-isolant induit par le désordre. Il a vu le jour expérimentalement au début des années 1980 après un grand nombre de travaux théoriques, leur interprétation est aujourd'hui très claire et mis en évidence dans de nombreuses expériences [17-19].

1.4.2 Localisation d'Anderson

En 1958, P. W. Anderson montre que dans un milieu suffisamment désordonné, les effets d'interférences peuvent être tellement forts qu'ils empêchent la propagation de l'onde [2], celle-ci est localisée dans certaines régions à l'intérieur du milieu, et à l'extérieur duquel son intensité décroît exponentiellement. Les interférences sont destructives presque partout, sauf autour de la position initiale de l'électron, et la constante de diffusion de l'intensité est nulle. Cet effet porte le nom de localisation forte ou localisation d'Anderson. Il a été observé avec des ondes de matière électronique dans des semi-conducteurs [20,21], le désordre étant créé par des impuretés. Pour les systèmes tridimensionnels, l'apparition d'états localisés est donnée par le critère de Ioffe-Regel [22] : $kl \simeq 1$

Où k est le vecteur d'onde. Cela signifie que la localisation d'Anderson se produit lorsque le libre parcours moyen est comparable à la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$.

L'idée d'Anderson est devenue un véritable casse tête pour les physiciens. Il leur fallait une théorie moderne qui couvre l'essentiel des propositions d'Anderson tout en incluant les possibilités expérimentales. En plus, il a été découvert en 1980 que la localisation d'Anderson

ne se limite pas aux électrons, mais s'applique aussi aux ondes "classiques" comme la lumière, les micro-ondes, les ondes acoustiques et plus récemment les ondes de matière [50-52]. Sergey Skipetrov [53], en collaboration avec l'université de Manitoba, ont employé des ondes acoustiques pour réaliser l'expérience, consistant à envoyer des ultrasons dans un milieu désordonné à 3D

1.4.3 Critères de localisation

Il est utile d'avoir des idées claires qui permettent de comprendre les principales caractéristiques de la localisation, restant valable pour des modèles plus compliqués. Les critères suivant aident à avoir une image simple.

- **Critère d'Ioffe-Regel**

Le libre parcours moyen ℓ_e est caractéristique des hétérogénéités du milieu, il représente la longueur moyenne parcourue pour une onde entre deux diffusions. Dans le cas de diffuseurs isotropes, aux quels on se limitera ici, ces deux longueurs sont confondues s'il n'y a pas localisation. Un libre parcours moyen « grand » correspond à un milieu faiblement désordonné, la comparaison s'effectuant par rapport à la longueur d'onde de l'onde se propageant dans le milieu. Lorsque le désordre est faible, le transport des ondes est bien décrit en moyenne par l'équation de diffusion. Mais que se passe-t-il lorsque le libre parcours moyen devient comparable à la longueur d'onde ? Dans ce cas les effets d'interférences ne sont plus négligeables et la description en termes de diffusion n'est plus valable. La localisation correspond à l'arrêt du transport dans un milieu diffusant à cause des interférences entre les ondes diffusées. Dans un milieu diffusant 3D, il existe le critère de Ioffe-Regel, communément considéré comme nécessaire pour l'obtention des effets prépondérants des interférences. Ce critère, [22,54], stipule que la longueur d'onde doit être supérieure au libre parcours moyen :

$$kl < 1 \tag{1.9}$$

Lorsque ce critère est respecté, de nombreuses diffusions ont lieu sur une longueur d'onde et le phénomène de localisation forte a une grande probabilité d'avoir lieu.

- **Critère de Thouless**

En 1974, D.J. Thouless [25] considère un système désordonné de taille $L \ll \ell$ dans le régime étendu (non localisé). Selon l'équation de diffusion, le temps caractéristique pour qu'une onde traverse le milieu est $t_D = L^2/D$, où D est le coefficient de diffusion. Par conséquent les états propres du système ont une largeur typique $\delta E \approx D/L^2$ appelée énergie de Thouless. On peut comparer cette largeur avec l'écart moyen entre les niveaux ΔE donné approximativement par l'inverse de la densité d'état : $\Delta E = \frac{1}{\rho(E)D(E)L^d}$ ou L^d est le volume d'un système de dimension d . On peut alors définir :

$$g \equiv \frac{\delta E}{\Delta E} \approx \rho(E)D(E)L^{d-2} \quad (1.10)$$

Où $\rho(E)$ est la densité d'état et L^d est le volume du système de dimension d . g est une variable sans dimension appelée conductance.

Si $g > 1$ alors la diffusion peut être assurée par les micros états du système désordonné, ce dernier étant donc dans le régime métallique. Pour $g < 1$ il ne peut plus y avoir diffusion car il n'y a plus recouvrement entre les niveaux, l'écart moyen pour la diffusion δE ne contient qu'un seul micro état, le système se trouve alors dans le régime localisé. Le critère pour la localisation dans un milieu fini devient donc : $g < cste \approx 1$

Ce critère est universel, il est bien utilisé comme un critère approximatif pour la localisation.

1.4.4 Théorie d'Echelle

- **Approche de Thouless**

Thouless [59] a développé des arguments qui permettent de faire le lien entre le modèle d'Anderson et la conductance d'un système. De plus ces arguments vont conduire aux arguments d'échelle qui seront présentés dans la partie suivante.

Considérons un système de taille L en dimension d . Les niveaux d'énergie d'un tel système sont espacés d'une largeur Δ qui est l'inverse de la densité d'états $\rho(E)$. Un électron qui diffuse dans un système explorera les niveaux d'énergie contenus dans une bande de largeur $E_T = \frac{hD}{L^2}$, où E_T est appelée énergie de Thouless et D est la constante de diffusion. Le rapport entre l'énergie de Thouless et l'espacement de niveaux est appelé nombre de Thouless noté g , peut être relié à la conductance du système. En effet, on a :

$$g = \frac{E_T}{\Delta} = \frac{\hbar D \rho(E)}{L^2} \quad (1.11)$$

Or la relation d'Einstein relie la constante de diffusion à la conductivité du système σ :

$$D = \sigma / e^2 v(E) \quad (1.12)$$

Où $v(E) = \rho(E) L^d$ est la densité d'états par unité de volume. En notant que la conductance du système est donnée par $G = \sigma L^{d-2}$, on obtient :

$$g = \frac{E_T}{\Delta} = \frac{\hbar}{e^2} G \quad (1.13)$$

Le nombre de Thouless g est appelé conductance généralisée sans dimension.

D'après le modèle d'Anderson. En supposant que les niveaux d'énergie des impuretés sont régulièrement repartis entre $-W/2$ et $+W/2$, l'espacement entre niveaux est $\Delta = W/N$, où N est le nombre d'impuretés et par conséquent l'énergie de Thouless sera donnée par V/N , où V est l'intégrale de recouvrement entre états.

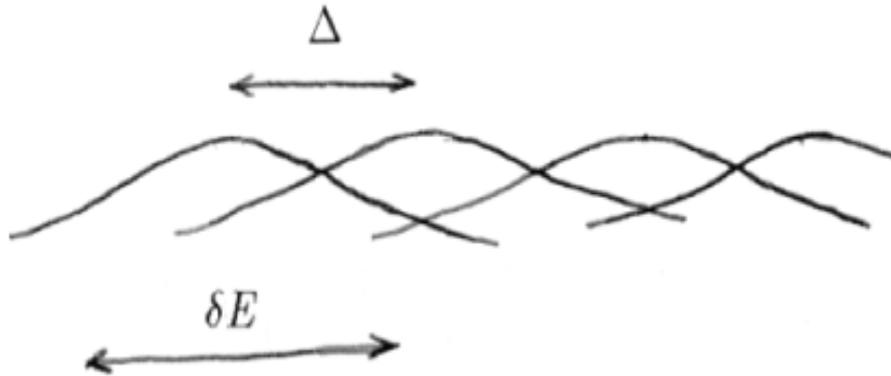
Le nombre de Thouless peut s'écrire :

$$g = \frac{V}{W} = \frac{\hbar}{e^2} G \quad (1.14)$$

Et le critère d'Anderson donne que le système devient isolant lorsque le nombre de Thouless devient inférieur à une certaine valeur critique $g_c = V/W_c$ de l'ordre de 1. Ce résultat montre donc que dans le problème d'Anderson, c'est la conductance qui possède une valeur critique.



$\delta E \Delta < 1$ Les états sont localisés



$\delta E \Delta > 1$ Les états sont étendus

- **Influence de la dimensionnalité de l'espace**

Dans l'argument d'Anderson, la présence de la transition a lieu quelle que soit la dimension de l'espace. Des arguments simples permettent de montrer que cette vision est fautive en dimension un, pour laquelle un désordre, aussi faible soit-il, localise les états électroniques [60] pour le montrer, reprenons les arguments de Thouless. L'élargissement, en énergie, d'un paquet d'onde diffusant sur une longueur L est égal à l'énergie de Thouless $E \propto L^{-2T}$, alors que l'espacement entre niveaux d'un système de dimension d varie comme L^{-d} .

Ainsi le nombre de niveaux contenus dans un paquet d'onde est proportionnel à L^{d-2} . Pour $d=1$, lorsque L augmente, le nombre de niveaux dans le paquet d'onde va diminuer jusqu'à ce qu'il ne reste qu'un état propre dans le paquet d'onde, conduisant à la localisation. Ainsi, quelque soit le désordre, les états électroniques en dimension un sont toujours localisés.

Pour $d=2$, l'élargissement du paquet d'onde et l'espacement entre niveaux varient tous les deux comme L^{-2} et aucune conclusion sur la localisation ne peut être donnée par cet argument. Il est alors nécessaire d'aller plus loin.

- **Raisonnement d'Abrahams, Anderson, Licciardello et Ramakrishnan**

En achevant le travail de Thouless, Abrahams, Anderson, Licciardello et Ramakrishnan [57] déduisent la courbe $\beta(g)$ à grandes et petites valeurs de g par interpolation entre deux régimes asymptotiques :

- ✓ **Forte conductance ($g \gg 1$)**

La loi d'Ohm classique $g = \sigma L^{d-2}$ s'applique et par conséquent :

$$\lim_{g \rightarrow \infty} \beta(g) = d - 2 \quad (1.15)$$

à 2D, $\beta(g)$ tends vers 0 ce qui traduit le fait bien connu que dans un plan la conductance est indépendante de la taille du système. Un calcul perturbatif en puissance de g^{-1} [13] donne la déviation de $\beta(g)$ par rapport à sa valeur asymptotique (1.15):

$$\beta(g) = d - 2 + \frac{a}{g} + O(g^{-2}) \quad (1.16)$$

✓ Faible conductance ($g \ll 1$)

Les états sont localisés et la conductance décroît exponentiellement (La loi d'Ohm quantique) d'où:

$$g \approx g_0 e^{-L/\xi} \quad \text{et} \quad \lim_{g \rightarrow \infty} \beta(g) = \ln[g/g_0(d)] \quad (1.17)$$

Où g_0 est un rapport sans dimension de l'ordre de 1, et ξ est la longueur de localisation. Il est là aussi possible d'aller plus loin en faisant un développement perturbatif en W/V [2], donnant une correction positive :

$$\beta(g) = \ln \left[\frac{g}{g_0} \right] [1 + \alpha \cdot g + \theta(g^2)] \quad (1.18)$$

D'après ces conditions, Abrahams et al [60] ont tracés la fonction $\beta(g)$ en faisant l'hypothèse de continuité entre les deux limites (1.16) et (1.18), et en remarquant que $\beta(g)$ doit être monotone étant donné qu'une diminution de W/V signifie plus de localisation. Cette fonction est représentée pour les dimensions 1, 2 et 3 par la figure 1.5.

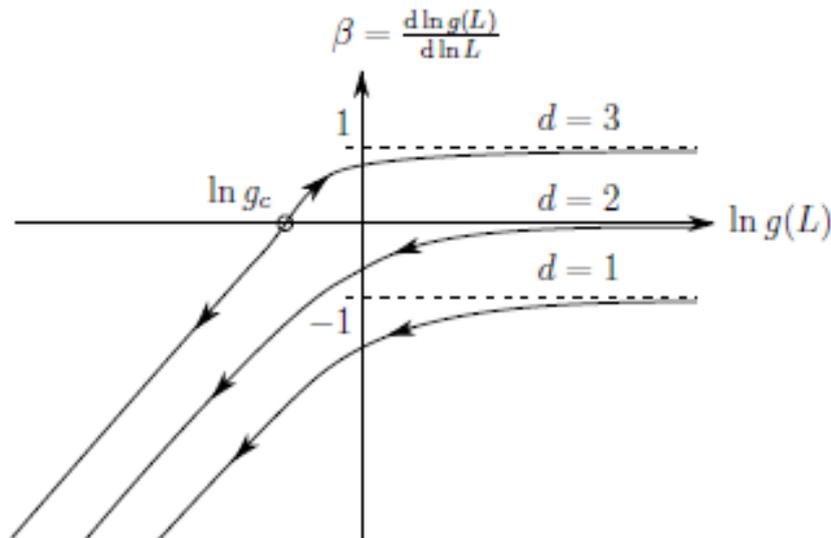


Fig. 1.5 : Fonction d'échelle β en fonction de $\ln(g)$ pour différentes dimensions dans le cas d'un système désordonné [55].

- **Commentaires sur la courbe $\beta(g)$**
 - $\beta(g) > 0$, la conductance augmente lorsque la taille du système augmente, les électrons sont délocalisés, on a un régime métallique.
 - $\beta(g) < 0$, la conductance diminue avec la taille du système, on a un régime isolant.
 - $\beta(g) = 0$ (à l'intersection avec l'axe horizontal au point g_c), ce qui traduit une transition de phase pour $d=3$ due au désordre, d'un état isolant ($g < g_c$) vers un état métallique ($g > g_c$).

La grande limitation de la théorie d'échelle est le problème des fluctuations universelles de conductance. Pour des échantillons macroscopiquement identiques, la conductance fluctue d'un échantillon à l'autre, car elle dépend de la configuration du désordre. La théorie n'est valable en moyenne que sur un grand nombre d'échantillons. D'après les études numériques réalisées [20,57], la moyenne logarithmique $\langle \ln(g) \rangle$ vérifie le mieux cette théorie.

1.5 Théorie de la transition métal-isolant

Parmi les transitions de phase, les transitions métal-isolant occupent une place tout à fait prépondérante. D'une part parce que, plus de 75 ans après l'explication quantique de la forte distinction entre métaux et isolant faite par Bloch, Peierls et Wilson en 1929 et 1931[58], nombre de ces transitions ne sont pas encore intégralement comprises. D'autre part parce

qu'elles relèvent d'une classe de transition de phase continue dites transitions de phase quantique puisqu'elles n'ont rigoureusement de sens qu'à $T = 0^{\circ}\text{K}$, et que leur comportement critique est gouverné par des fluctuations quantiques et non pas thermiques [26].

Les transitions métal-isolant peuvent être divisées en deux catégories principales : dans la première, il s'agit d'une transition structurale due à une modification du réseau cristallin [27] telle qu'elle sépare les bandes de conduction, engendrant ainsi un état isolant.

1.5.1 Transition d'Anderson

Au commencement de la mécanique quantique, l'étude des objets périodiques, sans défauts, a été privilégiée parce qu'elle permettait une résolution théorique relativement simple. Malheureusement, la nature nous présente plus de matériaux désordonnés que cristallins, ce qui a entraîné le besoin d'une description de l'effet du désordre [18].

La limite des faibles désordres est traditionnellement décrite par la diffusion des ondes de Bloch, issues d'un calcul sur des systèmes périodiques. Il en résulte les équations de Boltzmann pour le transport. Depuis la fin des années 1970, on sait que cette approche n'est pas suffisante et ne décrit pas bien ce qui se passe en présence de désordre. De nouvelles approches ont émergé depuis avec l'étude du problème d'Anderson d'un électron dans un potentiel aléatoire ainsi que l'étude des interactions entre électrons en présence d'un potentiel aléatoire.

Dans un réseau périodique chaque site a une énergie ϵ_i aléatoirement distribuée sur $\left[-\frac{w}{2}, +\frac{w}{2}\right]$ figure 1.6.

L'hamiltonien mono électronique du système s'écrit alors :

$$H_{Anderson} = t \sum_{ij} c_i^\dagger c_j + \sum_i \epsilon_i n_i^\dagger n_i \quad (1.19)$$

Où le premier terme décrit un terme type liaison forte et le deuxième qui décrit le désordre du système via l'énergie potentielle au site i .

Anderson a alors montré que la fonction d'onde d'un électron pouvait être profondément altérée par ce potentiel aléatoire s'il était suffisamment fort. En effet, lorsqu'il n'y a pas de désordre $W=0$, l'électron est dans un réseau périodique et on retrouve les fonctions de Bloch classique, le système est alors métallique.

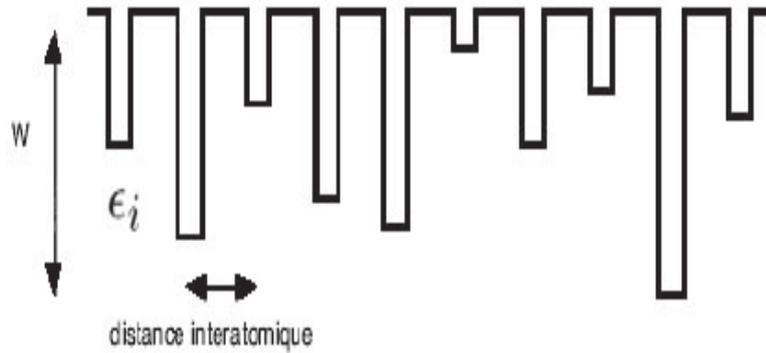


Fig. 1.6 : Variation de l'énergie potentielle sur chaque site pour un système désordonné 1D.

A faible désordre, il y a diffusion des électrons par ce potentiel aléatoire. Ils perdent alors leur cohérence de phase au bout d'une longueur caractéristique de l'ordre de l qui est le libre parcours moyen. En revanche, lorsque W devient important, le trop fort désordre peut localiser la fonction d'onde qui décroît exponentiellement dans l'espace :

$$|\psi(r)| \sim \exp\left(-\frac{|r-r_0|}{\xi}\right) \quad (1.20)$$

Où ξ est la longueur de localisation.

En effet, puisque le désordre est important, il existe une grande dispersion en énergie des états individuels des électrons. L'écart d'énergie ΔW entre deux sites voisins étant donné par :

$$\Delta W \sim \frac{1}{\frac{4}{3}\pi r^3 N(E)} \quad (1.21)$$

Où r est la distance séparant les deux sites considérés et $N(E)$ la densité d'états du système, les orbitales proches spatialement et qui ont un recouvrement important ont des énergies très différentes. De même, les orbitales proches en énergie sont éloignées spatialement et donc, dans la limite d'un fort désordre, il n'y aura que peu de recouvrement, si bien qu'il ne peut pas y avoir d'états étendus. Le système est alors isolant. On a donc une transition métal-isolant induite par le désordre. On note également que l'on a deux longueurs caractéristiques : l le libre parcours moyen et $\frac{1}{k_F}$ la longueur associée au vecteur d'onde de Fermi. La quantité $\frac{1}{k_F l}$ augmente avec le désordre et peut donc être prise comme paramètre de désordre. Le désordre

critique auquel a lieu la TMI correspond à $k_F l = 1$, c'est-à-dire à la situation où le libre parcours moyen est de l'ordre de grandeur de la distance inter-atomique.

Dans un schéma de structure des bandes figure 1.7, les électrons se situent au milieu, là où la densité d'état est maximale, interagissent beaucoup entre eux, et ont par conséquent plus de chance d'être délocalisés que les électrons de bord de bande [27].

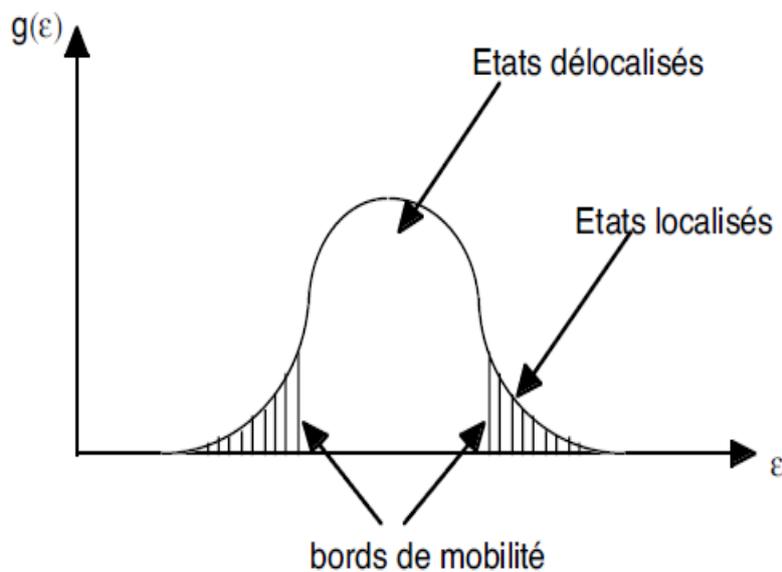


Fig. 1.7 : Densité d'états pour un système avec un désordre intermédiaire [55].

Si le rapport W/t est grand, les deux bords de mobilité séparant les états localisés des états étendus se rapprochent jusqu'à se rejoindre [27,28]. Tous les états sont alors localisés et le système est isolant. En revanche, si W/t est petit, les bords de mobilité s'éloignent et des états étendus apparaissent au milieu de la bande. Pour une valeur intermédiaire de W/t un des bords de mobilité traverse le niveau de Fermi et le système présente alors une transition métal-isolant.

1.6 Généralités sur les condensations de Bose-Einstein

La condensation de Bose-Einstein est une transition de phase particulière puisqu'il s'agit d'une transition de phase quantique. Elle concerne les particules de spin entier, les bosons, et se caractérise par une accumulation de ces derniers dans le même état quantique.

En 1924, Albert Einstein reçut un projet d'article écrit par un jeune physicien bengali, Satyendra Nath Bose, qui démontrait la loi de Planck pour le rayonnement du corps noir en traitant les photons comme un gaz de particules identiques. Fort intéressé, Einstein traduisit le manuscrit en allemand et veilla à sa publication, puis généralisa cette idée à un gaz de particules matérielles. Dans un second article, publié en 1925, Einstein démontra une propriété extraordinaire de ce système de particules matérielles : si sa densité spatiale n est plus grande que la valeur critique donnée par :

$$n_c \simeq \frac{0.166}{\hbar^3} (mk_B T)^{3/2} \quad (1.22)$$

Où k_B et \hbar sont les constantes de Boltzmann et de Planck, et m la masse des particules.

Une fraction macroscopique des atomes se « condense » dans l'état d'énergie le plus bas.

Ainsi la température de condensation semble très basse même pour des densités élevées. Par exemple si l'on prend de l'hélium on obtient $T_c \simeq 3.2\text{K}$ pour $n = 1.31027 \text{ atomes/m}^3$ [31-33].

1.6.1 Cas d'un gaz piégé dans un potentiel harmonique

Les expériences sur les gaz atomiques ne sont pas en général menées dans des boîtes cubiques, mais dans des pièges harmoniques créés à l'aide de champs magnétiques ou de faisceaux laser. Considérons l'exemple simple d'un piège isotrope de pulsation ω :

$$V_{ext}(\mathbf{r}) = \frac{m\omega^2 r^2}{2} = \frac{m\omega^2}{2} (x^2 + y^2 + z^2) \quad (1.23)$$

Les bosons sont alors répartis sur différents niveaux individuels caractérisés par trois nombres quantiques (n_x, n_y, n_z) , la valeur propre ε_n à :

$$\varepsilon_{n_x n_y n_z} = \left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2} \right) \hbar\omega \quad (1.24)$$

$$\varepsilon_n = \left(n + \frac{3}{2}\right) \hbar\omega \quad (1.25)$$

Avec : $n = n_x + n_y + n_z$

$\psi_{n_x n_y n_z}(\mathbf{r}) = \chi_{n_x}(x)\chi_{n_y}(y)\chi_{n_z}(z)$, où les n_i sont des entiers positifs ou nuls.

Rappelons que chaque fonction d'Hermite $\chi_j(\mathbf{x})$ est le produit d'un polynôme l'Hermite de degré j par la gaussienne $\exp\left(-\frac{x^2}{2d^2}\right)$, avec $d = (\hbar/m\omega)^{1/2}$. La limite thermodynamique de ce système est obtenue en prenant $N \rightarrow \infty, \omega \rightarrow a$, tout en gardant $N\omega^3$ constant. Comme pour le cas de la boîte, on trouve qu'une transition de phase se produit à la température critique T_c donnée par $N(\hbar\omega)^3 = \zeta(3)(k_B T_c)^3$, où ζ est la fonction de Riemann.

Pour $T < T_c$, une fraction macroscopique des particules s'accumule dans l'état fondamental du piège :

$$\psi_{0,0,0}(\mathbf{r}) = \frac{\exp\left[-r^2/2d^2\right]}{(\pi d^2)^{3/4}} \quad (1.26)$$

A température nulle, toutes les particules occupent cet état.

Si l'on prend alors pour zéro l'énergie de l'état fondamental, les valeurs propres de l'hamiltonien à une particule valent $\varepsilon_n = n\hbar\omega$ et le nombre moyen de particule n_k occupant un état individuel à une particule associé au niveau d'énergie ε_n peut alors s'écrire en prenant $\mu = \varepsilon_0 = 0$:

$$\langle n_k \rangle = \frac{1}{z^{-1} e^{\beta n \hbar \omega} - 1} \quad (1.27)$$

Avec :

$$z = e^{\beta\mu} \quad (1.28)$$

Où z est la fugacité du gaz définie à partir de son potentiel chimique μ , et $\beta = 1/K_B T$ tel que $\frac{\hbar\omega}{k_B} \ll 1$.

Le nombre moyen de bosons piégés dans le potentiel est alors :

$$N = N_0 + N_T = \frac{z}{1-z} + N_T \quad (1.29)$$

Où N_0 est le nombre de particules dans l'état fondamental (la limite où ce nombre est macroscopique correspond à une situation où $\mu \rightarrow 0$, c'est-à-dire $z \rightarrow 1$).

Concernant le nombre d'atomes non-condensés N_T , on peut montrer, plus précisément que celui-ci, s'écrit [32, 33] :

$$N_T = \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega} \right)^3 g_3(z) \quad (1.30)$$

Avec $g_3(z) = \zeta(3)$ dans la limite où $z = 1$ où ζ est la fonction de Riemann.

L'équation (1.29) peut alors s'écrire :

$$N \simeq N_0 + \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega} \right)^3 g_3(z) \quad (1.31)$$

On en déduit finalement la fraction $\frac{N_0}{N}$ condensée dans l'état fondamental :

$$\frac{N_0}{N} \simeq 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^3 \text{ pour } T \leq T_c \quad (1.32)$$

Avec T_c définie par

$$k_B T_c \simeq \hbar \omega \left(\frac{N}{g_3(1)} \right)^{1/3} \quad (1.33)$$

De (1.33), on voit clairement que $k_B T_c$ peut être beaucoup plus grand que $\hbar \omega$. Dans la plupart des pièges actuels, le nombre d'atomes est de quelques milliers à plusieurs millions de sorte que $k_B T_c$ est deux ordres de grandeurs environ plus grand que $\hbar \omega$, l'approximation $\frac{\hbar \omega}{k_B T_c} \ll 1$

est clairement valide. La quantité $\hbar\omega$ est fixée expérimentalement. Pour une valeur de 9 n°K la température critique est de 300 n°K avec 40000 atomes dans le piège.

D'un point de vue chronologique, beaucoup de travaux pour obtenir des condensats gazeux ont pris leur essor au niveau des années 80, utilisant des atomes d'hydrogène mais ont échoué en raison de la recombinaison des atomes pour former des molécules [35]. Or dans ces mêmes années ont été mises au point des techniques de refroidissement par laser [36,37].

Ces techniques de refroidissement combinées à celles de refroidissement par évaporation [38] ont permis d'atteindre les températures nécessaires à l'obtention du phénomène.

Ainsi, la condensation de Bose-Einstein a été observée pour la première fois en 1995 dans différentes expériences, d'une part utilisant des vapeurs de Rubidium [39] et d'autre part avec des atomes de Sodium [40] refroidis à des températures de l'ordre de la fraction de micro Kelvin. Si tous les atomes se trouvent dans le niveau fondamental, ceux-ci seront donc tous décrits par la même fonction d'onde $\phi(r, t)$ dite fonction d'onde du condensat (ou paramètre d'ordre du condensat), nous verrons dans la suite comment l'on peut décrire quantitativement cette fonction d'onde mais avant cela nous allons donner quelques notions expérimentales sur la condensation de Bose-Einstein.

1.6.2 Résultats expérimentaux

Nous allons commencer par montrer l'une des premières et plus célèbres images figure 1.8 d'un condensat obtenu par Anderson et al en 1995 [40].

L'image de gauche correspond à un gaz juste au-dessus de la température critique, celle du milieu, juste après l'apparition du condensat et celle de droite au condensat quasi pur. La taille de l'image est de 200 μm à 270 μm et correspond à une situation où les atomes se sont déplacés pendant un temps de $t=20$ s. Nous pouvons distinguer la fraction condensée au centre du nuage et le nuage thermique où se trouvent les atomes non condensés. A 50 nK, le nuage thermique n'est plus détecté, nous observons uniquement le condensat.

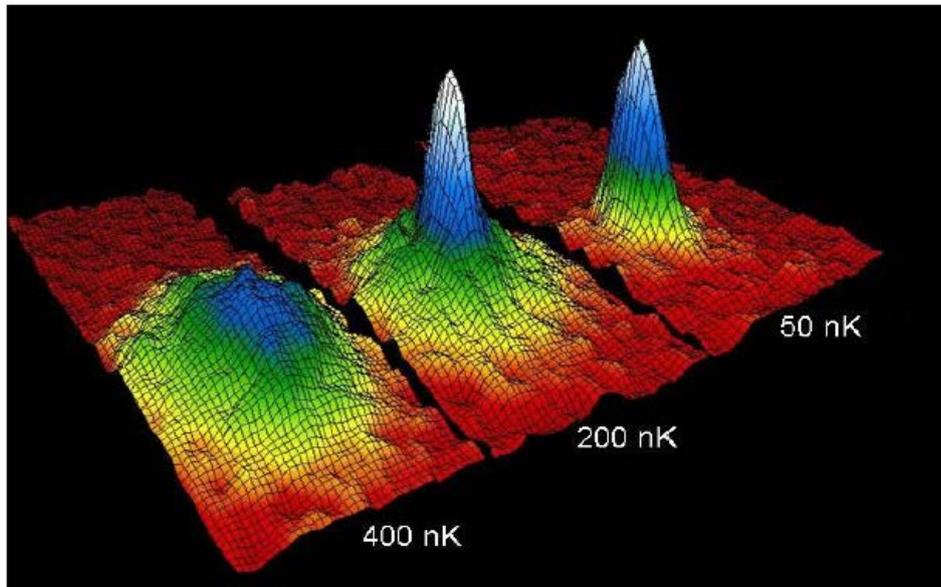


Fig. 1.8 : Distribution d'un nuage au voisinage du seuil de condensation, image par absorption du nuage de ^{87}Rb prise après un temps de vol [40].

Nous pouvons ensuite illustrer la formule (1.27) qui donne la fraction d'atomes condensés N_0/N en fonction du rapport de température T/T_c^0 .

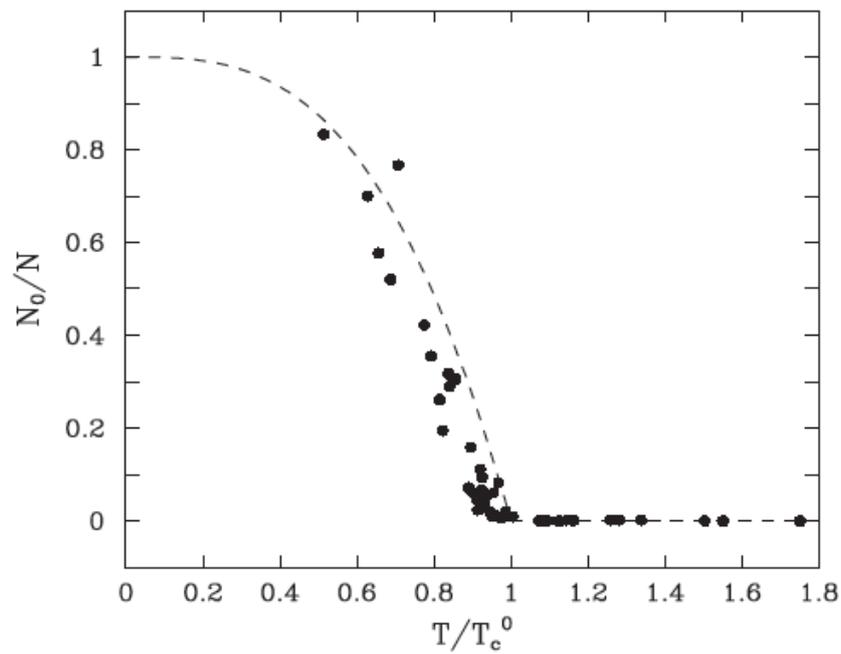


Fig. 1.9 : La fraction d'atomes condensés N_0/N en fonction du rapport température T/T_c^0 [34].

Sur la figure 1.9, il est clair qu'il existe une température critique pour laquelle un nombre macroscopique d'atomes se retrouvent dans l'état fondamental du système.

Enfin on peut montrer figure 1.10 une autre expérience assez spectaculaire qui illustre les propriétés de cohérence des condensats de Bose-Einstein.

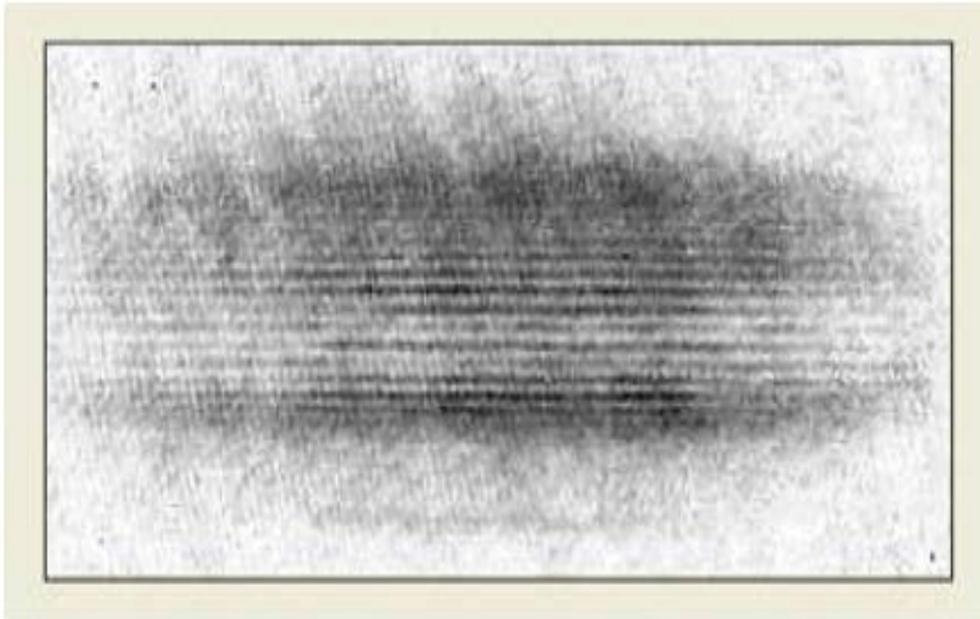


Fig. 1.10 : Figure illustrant des expériences de M.I.T. où l'on fait recouvrir deux condensats indépendants qui ont permis d'observer des franges dues aux interférences d'onde de matière qui prouve que les condensats sont bien des systèmes cohérents de phase [60].

- Observation de la localisation avec des ondes de matière

Nous présentons sur la figure 1.11 les résultats récents sur la localisation d'un condensat de Bose-Einstein en expansion dans un potentiel optique désordonné (Champ de tavelures) à 1D. Dans le régime de faible désordre, la transmission de l'onde de matière à travers une modulation unique du potentiel aléatoire est proche de l'unité. Après un temps d'expansion suffisamment long au bout duquel les interactions sont négligeables, le scénario proposé par Anderson est possible. Sanchez et al ont pu identifier le domaine de paramètres où la localisation d'Anderson peut être obtenue [41, 43, 44]. Cette étude a mis en évidence que les

potentiels induits par des tavelures optiques (speckle) ont des propriétés très particulières qui peuvent produire une transition effective d'un régime de localisation exponentielle à un régime de localisation en puissance.

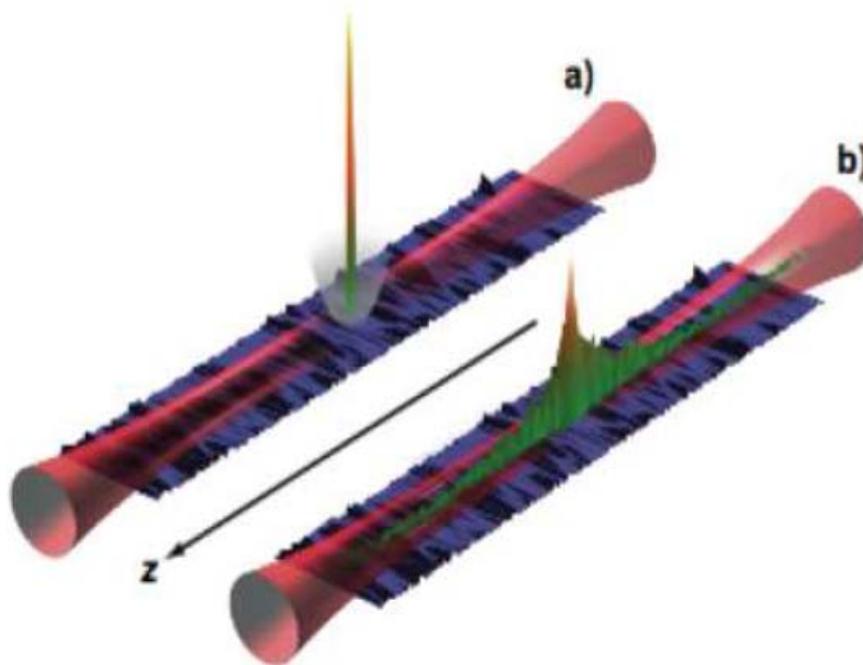


Fig. 1.11 : Image représentant la densité atomique de rubidium dans les expériences d'Anderson, prise en coupant le piège et en laissant s'étendre le condensat [41].

1.7 Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons introduit les notions élémentaires liées à la diffusion des ondes dans un système désordonné. En passant en revue les principaux travaux ayant contribué à l'établissement de la théorie de localisation, nous avons donné les propriétés électroniques de ces systèmes particulièrement la caractérisation de l'état (localisé ou délocalisé) en fonction du degré du désordre. On s'est particulièrement intéressé à la localisation d'Anderson où la diffusion et les interférences des ondes sont liées. A la fin du chapitre nous présentons la condensation de Bose-Einstein des atomes ultra-froids dans les quelles la localisation d'Anderson a été observé expérimentalement.

Bibliographies

- [1] G.Labeyrie, F.deTomasi, J.C.Bernard, C.A.Müller, C.Miniatura, and R.Kaiser, Coherent Backscattering of light by Atoms, *Phys. Rev. Lett.* 83, 5266, (1999).
- [2] P.W.Anderson, Absence of diffusion in certain random lattices, *Phys. Rev.* 109 (5), 1492-1505, (1958).
- [3] M.P.A.Fisher, P. B.Weichman, G.Grinstein, et D.S.Fisher, Boson localization and the superfluid-insulator transition, *Phys. Rev. B* 40, 546, (1989).
- [4] Ad.Lagendijk, B.A.vanTiggelen and D.S. Wiersma, Fifty years of Anderson localization, *Phys. Today*, **62** 24–29, (2009).
- [5] A. Aspect and M. Inguscio, Anderson localization of ultracold atoms, *Phys. Today*, **62** 30-35, (2009).
- [6] L.Sanchez-Palencia and M. Lewenstein, Disordered quantum gases under control, *Nature Phys.* **6** 87-95, (2010).
- [7] S.Chandrasekhar, Radiative transfer, Dover, New York, (1960).
- [8] M.P.van Albada and A.Lagendijk, Observation of weak localization of light in a random medium, *Phys. Rev. Lett.* **55** : 2692-2695, (1985).
- [9] P.Wolf and G.Maret, Weak localization and coherent backscattering of photons in disordered media, *Phys. Rev. Lett.* **55** : 2696-2699, (1985).
- [10] R.Kaiser, C.Westbrook and F.David, Editors Les Houches, (1999), Summer School on coherent atomic matter waves, EDP Sciences and Springer-Verlag, (2001).
- [11] K.Burnett, Editor Ultracold atoms and Bose-Einstein condensation, volume 7 of OSA Trends in optics and photonics series, OSA, (1996).
- [12] P.Drude, Zur Elektronentheorie, *Ann.d.Physik* 1, 566, 3, 369, (1900) and 7, 687 (1902).
- [13] M.Störzer, P.Gross, C.M.Aegerter, and G.Maret, Observation of the Critical Regime Near Anderson Localization of Light, *Phys. Rev. Lett.* 96, 063904, (2006).
- [14] P.A.Lee and T.V.Ramakrishnan, Disordered electronic systems, *Rev.Mod.Phys.* 57(2) :287-337, (1985).
- [15] N.F.Mott and W.D.Twose, The theory of impurity conduction, *Advances in Physics*, 10:107-163, (1961).
- [16] R.E.Borland, The Nature of the Electronic States in Disordered One-Dimensional Systems, *Royal Society of London Proceedings Series A*, 274:529-545, (1963).
- [17] N.F.Mott, Electrons in disordered structures, *Advances in Physics*, 16:49-144, (1967).

- [18] P.E.Wolf and G.Maret, Weak localization and coherent backscattering of photons in disordered media, *Phys. Rev. Lett.* 55, 2696, (1985).
- [19] D.Vollhardt and P.Wölfle, Diagrammatic, self-consistent treatment of the Anderson localization problem in d 2dimension, *Phys. Rev. B* 22, 4666, (1980), Selfconsistent theory of Anderson localization, in *Electronic phase transitions*, Elsevier Science, Amsterdam, (1992).
- [20] S.K.Cheung,X. Zhang,Z.Q.Zhang, A.A.Chabanov and A. Z.Genack, Impact of weak localization in the time domain, *Phys. Rev. Lett.* 92, 173902, (2004).
- [21] B.Kramer, A.McKinnon, Localization: theory and experiment, *Rep. Prog. Phys.* 56, 1469, (1993).
- [22] F.Ladieu, M.Sanquer, Interferences in disordered mesoscopic insulators, in E. Akkermans, G.Montambaux, J.L.Pichard et J.inn-Justin, (eds), *Mesoscopic quantum physics*, Les Houches ,(1994), Elsevier, Amsterdam, (1995).
- [22] A.F.Ioffe and A.R.Regel, Non-crystalline, amorphous and liquid electronic semiconductors, *Progress in Semiconductors*, 4,237, (1960).
- [23] D.S.Wiersma, P.Bartolini, A.Legendijk, and R.Righini, Localization of light in a disordered medium, *Nature*, 390, 671, (1997).
- [24] D.Wiersma, J.G.Rivas, P. Bartolini, A. Legendijk et R. Righini, *Nature* 398, 207, (1999).
- [25] D. J. Thoules, Electrons in disordered systems and the theory of localization, *Phys. Rep.* 13, 93, (1974).
- [26] D.Belitzet, T.Kirkpatrick, The Anderson-Mott transition, *Rev. Mod. Phys.*, 66, p. 261, (1994).
- [27] N.F. Mott, *Metal insulator Transitions*, Taylor and Francis LTD, London, (1974).
- [28] J.Frohlich, F.Martinelli, E.Scoppola, T.Spencer, *Commun. Math. Phys.* **101**, p.21, (1985).
- [29] A.A. Chabanov, M.Stoytchev et A.Z.Genack, Statistical signatures of photon localization, *Nature* 404, 850, (2000).
- [30] Y.P.Chen, J.Hitchcock, D.Dries, M.Junker, C.Welford et R.G.Hulet, Phase Coherenceand Superfluid-Insulator Transition in a Disordered Bose-Einstein Condensate, *arXiv* 0710.5187, (2007).
- [31] I.M. Lifshits, S.A. Gredeskul and L.A. Pastur, *Introduction to the Theory of Disordered*,

- [32] C. Cohen Tannoudji, Cours au Collège de France, (1997-1998).
- [33] Y. Castin, Cours d'école d'été des Houches: ArXiv, cond-mat 0105058, (2001).
- [34] J.R. Ensher et al. Physical Review Letters, 77, 4984, (1996).
- [35] I.F. Silvera et J.T.M. Walraven, Phys. Rev. Lett. 44, 164, (1980).
- [36] S. Chu, Rev of Mod. Phys. 70, 685, (1998).
- [37] W.D. Philips, Rev of Mod. Phys. 70, 721, (1998).
- [38] C. Cohen Tannoudji, Cours au Collège de France, (1996-1997).
- [39] M.R. Andrews, Phys. Rev. Lett. 79,553, (1997).
- [40] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman & E. A. Cornell. *Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor*. Science, vol. 269, no. 5221, pages 198–201, 1995.
- [41] J. Billy, V. Josse, Z. Zuo, A. Bernard, B. Hambrecht, P. Lugan, D. Clément, L.Sanchez-Palencia, A.Aspect and P. Bouyer, Direct observation of Anderson localization of matter waves in a controlled disorder, Nature 453, 891, (2008).
- [42] L.Sanchez-Palencia, D.Clement, P.Lugan, P.Bouyer and A.Aspect, Disorder induced trapping versus Anderson localization in Bose-Einstein condensates expanding in disordered potentials, arXiv :0803.1774, (2008).
- [43] P.Lugan, D.Clement, P.Bouyer, A.Aspect, M.Lewenstein et L.Sanchez-Palencia, Ultracold Bose Gases in 1D Disorder: From Lifshits Glass to Bose-Einstein Condensate, Phys. Rev. Lett. 98, 170403, (2007).
- [44] Cours du DEA de mécanique quantique d'atomes froids : http://www.lkb.ens.fr/recherche/atfroids/francais/activite_fr.html.
- [45] J.BILLY, Thèse de Doctorat en Sciences de l'Université Paris-Sud 11 (Janvier 2010)
- [46] S.E.Skipetrov, Anderson localization of light Conférence à l'école de physique du GDR IMCODE, (June 2006).
- [47] E.Akkermans et G.Montambaux, Physique Mésoscopique des Electrons et des Photons (EDP Sciences Ed, Paris, (2004).
- [48] B.van. Tiggelen, In Wave Diffusion in Complex Media, Edited by J. P. Fouque (NATO Science Kluwer, Dordrecht), lectures notes at Houche, (1998).
- [49] A.Djeraba, Etude des phénomènes de transport dans les systèmes bidimensionnels quantiques, Thèse de Doctorat en Sciences USTOM-B, (2010).

- [50] J. Fröhlich et T.Spencer, Absence of Diffusion in the Anderson Tight Binding Model for Large Disorder and Low Energy, *Math, Phys.* 88, 151, (1983).
- [51] L.Sanchez-Palencia, D.Clément, P.Lugan, P.Bouyer, G.V. Shlyapnikov and A.Aspect , Anderson localization of expanding Bose-Einstein condensates in random potentials, *Phys. Rev. Lett.* 98, 210401, (2007).
- [52] R.Kuhn, O.Sigwarth, C.Miniatura, D.Delande and C.A.Muller, Coherent matter wave transport in speckle potentials, *New. J. Phys.* 9, 161, (2007).
- [53] H.Hu, A.Strybulevych, J.H.Page, Sergey E.Skipetrov and Bart A.van Tiggelen, *Nature Physics* 4 (12), 945-948, (2008).
- [54] Y. Imry, *Introduction to Mesoscopic Physics*, Oxford University, New York, (2002).
- [55] E.Abrahams, P.Anderson, D.Licciardello et T.Ramakrishnan, Scaling Theory of Localization: Absence of Quantum Diffusion in Two Dimensions, *Phys. Rev. Lett.*, 42, p. 673, (1979).
- [56] F.Bloch, *Z.Phys.*52,555, (1928).
- [57] Macleans Lutende Ndawana, Thèse de Doctorat, On the Universality of the Metal-Insulator Phase Transition, Université de Warwick, (September 2004).
- [58] N.BILAS, Thèse de Doctorat en Sciences de l'Université Paris-Sud 11 (Juin 2006).
- [59] D.J.Thouless, *J.Non-Crys.Solids* **8-10**,461, (1972).
- [60] Y.C.Lee, C.S.Chu et E.Castano, *Phys.Rev.***B27**, 6136, (1983).

Mise en équation de la condensation de Bose- Einstein

2.1 Introduction

On sait que la localisation d'Anderson est le phénomène emblématique des systèmes désordonnés, où les effets de diffusion et d'interférences sont présents [1-3]. En 1958, P.W. Anderson prédit en effet que le désordre, lié par exemple à la présence d'impuretés dans la structure cristalline, peut conduire à une suppression totale du transport des ondes électroniques, celles-ci restant localisées dans le milieu. D'origine purement ondulatoire, cette localisation a depuis été observée avec différents types d'ondes: électroniques, puis classiques (ondes lumineuses, ultra-sons, micro-ondes) et dernièrement avec des atomes ultra-froids [4-6].

Sachant aussi que les résultats de la théorie d'Anderson concernant les phénomènes de localisation dus aux interférences destructives des ondes induites par le désordre, en particulier lorsque le désordre est corrélé [7,8] où en prenant en considération les interactions non linéaires [9-13] montrent qu'il y'a un transport électronique même à 1D.

De ce fait le phénomène de la condensation de Bose-Einstein est devenu l'un des domaines de recherche les plus actifs en physique. Les raisons d'un tel intérêt pour les gaz de bosons condensés sont simples à comprendre, l'effet des interactions entre atomes qui joue, comme nous l'avons vu, un rôle important dans la description macroscopique du condensat, est beaucoup plus simple à décrire et à interpréter pour des systèmes gazeux que pour des phases liquides ou solides, on peut dans la plupart des cas se limiter à des interactions à deux corps, ce qui est évidemment impossible pour des systèmes plusieurs milliards de fois plus denses comme l'hélium liquide.

De fait la localisation d'Anderson dépend cruciallement de la dimension : tous les états sont en principe localisés à 1D et 2D, tandis qu'une réelle transition métal-isolant (états diffusifs-localisés), appelée la transition d'Anderson, est attendue à 3D. Phénomène fondamental et complexe, cette transition n'a pas encore livrée tous ses secrets. En particulier, la nature exacte du comportement critique pose toujours question. Un enjeu important à l'heure actuelle reste donc le développement de systèmes bien contrôlés pour permettre l'observation directe et précise de cette transition à 3D. Les atomes ultra-froids constituent d'excellents candidats, et, suite aux premières démonstrations réalisées à 1D, deux expériences viennent de faire un premier pas vers cet objectif en observant un effet de localisation à 3D : l'une effectuée par le groupe B. DeMarco avec un gaz de fermions [14] et l'autre dans le Laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique – Palaiseau à partir d'un BEC [15].

Après avoir présenté au chapitre1 une image physique simple du transport et de la localisation d'ondes en milieu désordonné et des généralités sur la condensation de Bose Einstein, nous donnons dans ce chapitre une description théorique de base du condensat et une introduction de l'équation de Gross-Pitaevskii [16-19] ainsi que ses approximations.

2.2 L'équation de Gross-Pitaevskii

L'équation de Gross-Pitaevskii [16-19] est l'équation qui régit l'état et la dynamique d'un gaz de bosons ultra-froids BEC sous l'approximation d'Hartree. Sa forme indépendante du temps s'obtient en considérant un gaz dilué de \mathcal{N} bosons ultra-froids dans un potentiel de confinement ou de potentiel de piégeage $V_{ext}(\vec{r})$, interagissant entre eux via un potentiel $V(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ ne dépendant que de la distance entre 2 bosons.

L'accumulation du condensat au fond du puits de potentiel conduit à une densité spatiale de l'ordre de 10^{20} atomes/ m^3 , pour laquelle le modèle du gaz parfait n'est plus valable, on ne peut pas ignorer

les interactions entre atomes. Ces interactions jouent un rôle essentiel pour déterminer les propriétés statiques du condensat : taille, énergie, ainsi que les propriétés dynamiques : modes de vibration, superfluidité. Leur prise en compte semble a priori un problème difficile, car le potentiel d'interaction entre deux atomes $V(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ est compliqué :

Attractif à longue distance ($|\vec{r}_i - \vec{r}_j| > 0.5nm$), il devient répulsif quand les deux atomes sont suffisamment proches pour que leurs nuages électroniques se recouvrent.

Cependant, à très basse température, il n'est pas nécessaire de prendre en compte la forme précise de ce potentiel pour décrire les propriétés du gaz atomique. La relation d'incertitude de Heisenberg affirme qu'un atome est d'autant plus délocalisé que sa vitesse est bien connue.

L'ordre de grandeur de cette délocalisation quantique est donné par la longueur d'onde thermique λ_{Th} : quand celle-ci devient supérieure à la portée du potentiel, on peut ignorer les détails de $V(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ et le caractériser par une seule quantité, appelée longueur de diffusion et notée a [20].

En particulier, deux potentiels ayant même longueur de diffusion ont des effets physiques équivalents à très basse température. On peut ainsi remplacer le potentiel réel $V(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ par le potentiel effectif [21] beaucoup plus simple :

$$V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \delta(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = g\delta(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \quad (2.1)$$

Où $\delta(\vec{r})$ représente la distribution de Dirac. La longueur de diffusion peut être positive (exemple : $a = 0.065$ nm pour l'hydrogène, 5.4 nm pour le rubidium) ou négative ($a = -1.5$ nm pour le lithium).

- Dans le premier cas, on dit qu'on a affaire à une interaction effective répulsive, car cela coûte de l'énergie de mettre deux atomes au même endroit, dans ce domaine de très basse température.
- Dans le cas contraire, l'interaction est dite attractive.

Considérons maintenant \mathcal{N} atomes confinés dans un potentiel extérieur $V_{ext}(\vec{r})$. Avec un potentiel d'interaction donné par (2.1), l'hamiltonien du système s'écrit :

$$\hat{H} = \underbrace{\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \left[\frac{\vec{p}_i^2}{2m} + V_{ext}(\vec{r}_i) \right]}_{h_1 \text{ hamiltonien à 1 corps}} + \sum_{i,j (i \neq j)} V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \quad (2.2)$$

Où $V_{ext}(\vec{r})$ est le potentiel extérieur de piégeage des atomes qui est en général harmonique (pas forcément isotrope).

Comme le système est à très basse température et donc presque totalement condensé, on adopte une approximation de champ moyen ceci en appliquant la méthode de Bogoliubov [22] avec les approximations suivantes :

- Les \mathcal{N} bosons sont sans spin, en interactions binaires à température nulle.
- Le gaz est dilué : $na^3 \ll 1$ où n est la densité atomique.
- Le condensat est presque pur, quasiment tous les atomes sont condensés.

D'après l'approximation du champ moyen tous les atomes sont dans le même état quantique, décrit par une fonction d'onde unique $\psi(r)$ vérifiant la condition de normalisation

$$\int |\psi(r)|^2 dr = 1$$

Dans l'approximation de Hartree, la fonction d'onde Ψ totale du système est considérée comme étant le produit des fonctions d'onde à une particule ψ :

$$|\Psi\rangle = \prod_{i=1}^{\mathcal{N}} |\psi_i\rangle \tag{2.3}$$

Notons que cette fonction d'onde reste inchangée par permutation de 2 particules, ce qui correspond bien à un système de bosons.

L'énergie E associée à l'équation (2.2) est donnée par :

$$H\psi = E\psi = \mathcal{N} \int \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla\psi(r)|^2 + V_{ext}(r) |\psi(r)|^2 + \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \frac{(\mathcal{N}-1)}{2} |\psi(r)|^4 \right\} dr \tag{2.4}$$

La densité de particules est donnée par : $n(r) = \mathcal{N}|\psi(r)|^2$

La fonction d'onde $\psi(r)$ minimise l'énergie du système, on obtient son équation d'évolution en différentiant (2.4) avec la contrainte de normalisation de $\psi(r)$ [23,24] :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\psi(r) + V_{\text{ext}}(r)\psi(r) + \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} (\mathcal{N} - 1)|\psi(r)|^2\psi(r) = \mu\psi(r) \quad (2.5)$$

Où $\mu = \partial E / \partial \mathcal{N}$ est le potentiel chimique.

En posant le terme d'interaction $g_0 = U_0 = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} (\mathcal{N} - 1) \simeq \frac{4\pi\hbar^2 \mathcal{N} a}{m}$

On obtient une équation qui a la structure d'une équation de Schrödinger avec un terme non linéaire additionnel, cette équation est appelée équation de Gross-Pitaevskii et qui permet de transposer à un système macroscopique (~ 1 million d'atomes) des concepts quantiques développés initialement pour des particules individuelles :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2\psi(r) + V_{\text{ext}}(r)\psi(r) + g_0|\psi(r)|^2\psi(r) = \mu\psi(r) \quad (2.6)$$

Dans l'équation (2.6), le terme $g_0|\psi(r)|^2$ traduit l'interaction entre les atomes. Pour l'hydrogène, le sodium ou le rubidium 87, g_0 est positif, ce qui correspond à une interaction répulsive. On peut alors mettre un nombre arbitrairement élevé d'atomes dans le condensat, sa taille d'équilibre augmentant avec sa population. Au contraire, une interaction attractive, comme c'est le cas pour le lithium 7, limite le nombre d'atomes condensables. Au-delà d'une certaine valeur, de l'ordre du millier d'atomes, le condensat s'effondre sur lui-même. Des molécules et des agrégats sont formés lors de cet effondrement, et ils s'échappent du piège.

2.3 Les approximations à l'équation de Gross-Pitaevskii

On étudie ici plusieurs cas limites de l'équation de Gross-Pitaevskii qui nous permettrons de faire nos calculs au chapitre3.

2.3.1 Équation sans interaction : Oscillateur harmonique

Dans le cas où le nuage condensé est suffisamment dilué pour que l'on puisse négliger, dans l'équation de Gross-Pitaevskii, le dernier terme (terme non linéaire dû aux interactions atomiques), on retrouve pour $\psi(r)$ une équation de Schrödinger standard bien que le sens physique de la fonction d'onde soit assez différent du cas d'une seule particule.

Les solutions analytiques de l'oscillateur harmonique à une dimension sont bien connues :

$$\psi_n(x) = \frac{\pi^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{2^n n!}} e^{-x^2/2} H_n(x) \quad (2.7)$$

Où $H_n(x)$ est le polynôme de Hermite de rang n , défini par :

$$\psi_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \quad (2.8)$$

Par exemple: $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$.

Pour chaque fonction d'onde $\psi_n(x)$ correspond une énergie $E_n = n + \frac{1}{2}$

La fonction d'onde $\psi(r)$ sera le produit de trois oscillateurs harmoniques :

$$\psi(x, y, z) = \psi_0(x) \psi_0(y) \alpha^{\frac{1}{4}} \psi_0(\sqrt{\alpha} z) = \frac{\alpha^{\frac{1}{4}}}{\pi^{\frac{3}{4}}} e^{-\frac{x^2+y^2+\alpha z^2}{2}} \quad (2.9)$$

Où α est le rapport d'anisotropie :

$$\alpha = \frac{\omega_x}{\omega_z} \quad (2.10)$$

avec ω_x pulsation d'oscillation radiale et ω_z pulsation d'oscillation axiale

Dont le potentiel chimique associé est :

$$\mu = 1 + \frac{\alpha}{2} \quad (2.11)$$

2.3.2 Calcul variationnel : Approximation par une Gaussienne

Nous avons vu qu'en l'absence d'interactions entre les particules, la fonction d'onde est une gaussienne. L'interaction entre les atomes augmente les dimensions du condensat, on prend donc une fonction test $\psi(r)$ ayant la forme suivante :

$$\psi_{a,b}(x, y, z) = \frac{1}{\pi^{3/4} a \sqrt{b}} e^{-\frac{x^2+y^2}{2a^2} + \frac{z^2}{2b^2}} \quad (2.12)$$

Où a et b sont des paramètres à ajuster pour minimiser l'énergie (2.4). On obtient :

$$E(\psi_{a,b}) = \mathcal{N} \left\{ \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{4b^2} + \frac{a^2}{2} + \frac{\alpha^2 b^2}{4} + \frac{A}{2(2\pi)^{3/2} a^2 b} \right\} \quad (2.13)$$

Avec :

$$A = \frac{g_0}{\hbar \omega_x} \frac{1}{\left(\frac{\hbar}{m \omega_x}\right)^{3/2}} \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial E(\psi_{a,b})}{\partial a} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial E(\psi_{a,b})}{\partial b} = 0$$

S'écrivent alors:

$$\begin{cases} a^2 - \frac{1}{a^2} - \frac{A}{(2\pi)^{3/2} a^2 b} = 0 \\ \alpha^2 b^2 - \frac{1}{b^2} - \frac{A}{(2\pi)^{3/2} a^2 b} = 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

Il est alors facile de résoudre ce système d'équations. On en déduit alors, comme dans tout calcul variationnel, une limite supérieure de la valeur du potentiel chimique $\mu = \langle \psi_{a,b} | H | \psi_{a,b} \rangle$.

2.3.3 Équation sans terme d'énergie cinétique : régime de Thomas-Fermi

Dans le régime de forte densité atomique, plus exactement pour $A \gg 1$ c'est-à-dire l'énergie d'interaction est grande par rapport à l'énergie cinétique. On peut négliger le terme d'énergie cinétique $-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_r^2$ dans l'équation (2.6), c'est ce qu'on appelle l'approximation de Thomas-Fermi. L'équation devient alors :

$$V_{\text{ext}}(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) + g_0|\psi(\mathbf{r})|^2\psi(\mathbf{r}) = \mu\psi(\mathbf{r}) \quad (2.16)$$

La solution de cette équation s'écrit simplement :

$$\psi_{TF}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\mu - V_{\text{ext}}(\mathbf{r})}{g_0}} & \text{Si } V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) < \mu \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.17)$$

La valeur de μ est donnée par la condition de normalisation $\int |\psi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} = 1$.

On donne le résultat obtenu pour 1D [25].

$$\mu = \frac{1}{2} \left(\frac{3A}{2} \right)^{2/3} \quad (2.18)$$

Pour $V_{\text{ext}}(r)$ un piège harmonique, le profil de densité $|\psi(r)|^2$ a la forme d'une parabole inversée.

L'équation (2.17) caractérise l'équilibre local entre l'énergie d'interaction et le potentiel de piégeage, selon la relation :

$$g_0|\psi_0(r)|^2 + V_{\text{ext}}(r) = \mu \quad (2.19)$$

Cet équilibre de Thomas-Fermi est représenté dans la figure 2.1. Notons que le régime de Thomas-Fermi est caractérisé en l'absence d'interactions par le a_0 mesure typique de la condensation qui peut être obtenue en appliquant le théorème du Viriel.

L'énergie cinétique de l'atome $\sim \hbar^2/(2ma_0^2)$ est égale à son énergie potentielle $\sim m\omega_0^2 a_0^2/2$, on obtient $a_0 \sim \sqrt{\hbar/m\omega_0}$.

Dans le régime de Thomas-Fermi, les interactions répulsives sont fortes et on s'attend que la mesure typique R_0 du condensat qu'elle soit beaucoup plus grand que a_0 .

R_0 suit l'équation. (2.17):

$$R_0 = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_0^2}} \tag{2.20}$$

En appliquant la condition $R_0 \gg a_0$, nous obtenons finalement :

$$\mu \gg \hbar\omega \tag{2.21}$$

Qui est l'inégalité fondamentale du régime de Thomas-Fermi.

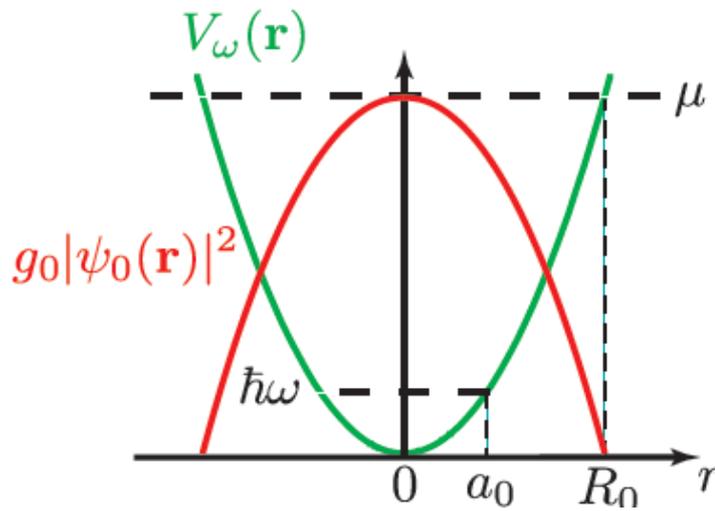


Fig. 2.1 : Fonction d'onde de Thomas-Fermi dans un potentiel de piégeage harmonique à symétrie sphérique [26].

2.4 Conclusion

Nous retiendrons dans ce chapitre, que l'équation de Gross-Pitaevskii correspond à l'équation de Schrödinger d'un gaz parfait à laquelle on ajoute un terme non-linéaire dû aux interactions qui ont pour origines les collisions entre atomes. Inclure dans la description du système les collisions interatomiques s'avère assez difficile. Néanmoins le problème est simplifié en traitant les atomes ultra-froids en utilisant une méthode variationnelle (approximation de Hartree). L'équation de Gross-Pitaevskii est d'ailleurs souvent appelée équation de Schrödinger non linéaire par les mathématiciens, le choix de la condition de normalisation est essentiel pour son obtention. Cependant, en changeant cette normalisation, on change l'équation.

Bibliographie

- [1] A.Legendjik, B.A.van Tiggelen and D. Wiersma, *Physics Today*, August (2009).
- [2] A. Yedjour and B. A.van Tiggelen. Diffusion and localization of cold atoms in 3D optical speckle. *Eur. Phys. J. D*, 59 249–255, (2010).
- [3] A. Yedjour, « Etude de l’effet d’une perturbation extérieure dans un alliage binaire et l’effet de l’influence de la distribution sur les propriétés électroniques : Application sur les alliages binaires et ternaires », Thèse de Doctorat Science, USTOM-B, (2011).
- [4] J. Billy et al. *Nature* 453, 891, (2008).
- [5] G.Roati et al. *Nature* 453, 895, (2008).
- [6] J. Chabé et al. *Phys. Rev. Lett.* 101, 255702, (2008).
- [7] I.F.dos Santos, F.A.B.F.deMoura, M.L.Lyra et M.D.Coutinho-Filho, *J.Phys.Condens.Matter*19, 476213, (2007).
- [8] Z.Okbani, « Etude d’un système désordonné corrélé à une dimension », Thèse de Doctorat, USTOM-B, (2007).
- [9] J.Frolich, T.Spenser et C.E.Wayne, *J.Sat.Phys.*42, 247, (1986).
- [10] M.I.Molina et G.P.Tsironis, *Phys.Rev.Lett.*73, 464, (1994).
- [11] N.Zekri et H.Bahlouli, *Phys.Stat.Sol.B*205, 511, (1998).
- [12] K.Senouci et N.Zekri, *Phys.Rev.B*62, 2987, (2000).
- [13] K.Senouci, Fluctuation et distribution de conductance dans les systèmes unidimensionnels désordonnés : Effet du champ électrique et de la non linéarité, Thèse de Doctorat, USTOM-B, (2003).
- [14] S.S. Kondov et al. *Science*, 334, 66, (2011).
- [15] F. Jendrzejewski et al. arXiv:1108.0137, (2011).
- [16] L. P. Pitaevskii et S.Stringari, *Bose–Einstein Condensation Oxford: Clarendon Press*, (2003).
- [17] E.P. Gross, Structure of a quantized vortex in boson systems, *Il Nuovo Cimento* 20 (3): 454–457, (May 1961).
- [18] N.M.Hughenoltz et D.Pines, *Phys.Rev.*, 116 (3): 489–506, (1959).
- [19] L.P. Pitaevskii et E.P. Gross, *Soviet Physics JETP* 13 (2): 451–454, (1961).
- [20] C.Cohen-Tannoudji, *Cours du collège de France*, (1996-2000).
- [21] C.J. Pethick et H. Smith, *Bose-Einstein condensation in dilute gases*, Cambridge University Press, 146-163, (2004).
- [22] N. N. Bogoliubov, *J. Phys. U.S.S.R.*, 11 :23, (1947).

- [23] C.Cohen-Tannoudji et al. La condensation de Bose-Einstein dans les gaz, in Einstein aujourd'hui, EDP sciences,pp.87-127, (2005).
- [24] C. Cohen-Tannoudji et al. Atomes ultra-froids, cours de D.E.A de physique quantique, (2006).
- [25] S.Breteaux et S.Giraud, L.P.A. L. M.S, Université de RennesI, Master 1 Physique, (2005).
- [26] N.Cherroret, « Transport cohérent en milieu aléatoire : des corrélations mésoscopiques à la localisation d'Anderson », Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier – Grenoble I, (2009).

Délocalisation d'un condensat de Bose-Einstein en présence d'interactions dans un champ de tavelures

3.1 Introduction :

L'objet de ce dernier chapitre est consacré à l'étude de l'effet d'un potentiel optique aléatoire unidimensionnel (speckel) sur la forme de la fonction d'onde d'un condensat de Bose-Einstein avec interactions. Nous traitons le condensat de Bose-Einstein dans l'approximation du champ moyen et nous utilisons l'équation de Gross-Pitaevskii afin de calculer la densité $|\psi|^2$ d'un condensat de Bose Einstein. Nous trouvons dans le cas particulier, lorsque la longueur de relaxation ξ est plus petite que la longueur de corrélation

σ_R , le condensat assume une délocalisation (profil de Thomas Fermi). Dans le cas contraire, lorsque la longueur de corrélation est plus petite que la longueur de relaxation, le condensat suit les modulations de potentiel optique aléatoire. Enfin, l'existence d'un BEC avec interaction en présence du potentiel désordonné permet de modifier le profil de la densité $|\psi|^2$ suivant la nature du potentiel aléatoire et la fonction d'onde reste toujours délocaliser même pour une très faible longueur de corrélation du désordre.

3.2 Potentiel optique aléatoire : champ de tavelures ou speckel.

Ce travail décrit l'étude du transport 1D d'un condensat de Bose-Einstein avec interactions en présence d'un potentiel optique aléatoire. L'origine physique des potentiels optiques vus par les atomes froids vient de la force dipolaire proportionnelle au gradient du module du champ électrique laser [1] ; Le champ électrique $E(r)$ possède une amplitude complexe donne lieu à un potentiel lumineux proportionnel au carré du champ $E_{dip}(r) = \alpha(\omega)E(r)^2$: $\alpha(\omega)$ la polarisabilité de l'atome à une fréquence ω . Le champ électrique fait intervenir l'intensité lumineuse $I(r) = |E(r)|^2$. Pour caractériser le potentiel aléatoire issu d'une réalisation d'un champ de tavelures, il nous faut donc caractériser l'échelle spatiale Δz des variations de l'intensité du champ de tavelures. Cette taille Δz correspond à la taille typique des taches de tavelures voir figure 3.1.

L'échelle de variations spatiales Δz est définie comme la largeur de la fonction auto-corrélation de la distribution d'intensité définie par

$$C_1(\delta r) = \langle I(r)I(r + \delta r) \rangle$$

où $I(r)$ est l'intensité au point r .

les crochets : $\langle \rangle$ désigne la moyenne statistique.

Où la déviation standard σ_I est définie par :

$$\sigma_I = \sqrt{\langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2}.$$

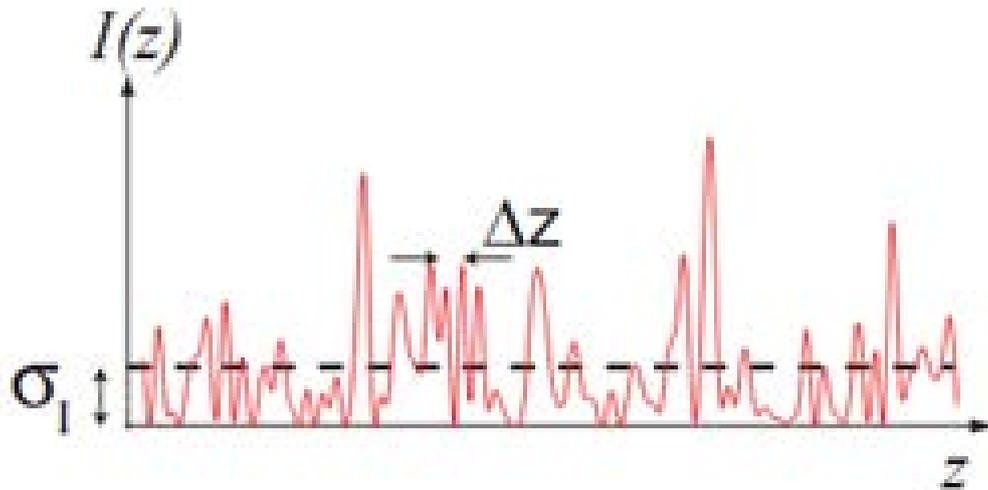


Fig.3.1- Variation spatiale de l'intensité d'une réalisation de tavelures selon une direction de l'espace. La déviation standard σ_I (pointillés noirs) caractérise l'amplitude typique des pics d'intensité. La longueur Δz caractérise l'échelle spatiale des modulations de l'intensité.

Nous nous intéressons à des propriétés moyennes des atomes telle que sa valeur moyenne et sa fonction de corrélation pour un champ de tavelure est donné par :

$$V(r)V(r - \Delta z)$$

Nous désignons par un speckel un champ de tavelure ou grains de tavelure par une distribution spatiale aléatoire d'intensité. Cette distribution spatiale aléatoire d'intensité résulte de la diffusion d'une lumière laser cohérente sur une surface rugueuse. Cette diffusion de la lumière laser par une surface rugueuse peut se faire en réflexion ou en transmission selon le montage et dans les deux cas, elle consiste en une modulation spatiale de la phase et de l'amplitude du champ électrique de la lumière incidente [2-3]. Ces modulations viennent des variations locales de l'épaisseur d'un verre dépoli qui représente un diffuseur. Le caractère aléatoire des variations de l'intensité et l'échelle spatiale de modulation apparaissent sur ce profil unidimensionnel (voir figure 3.2).

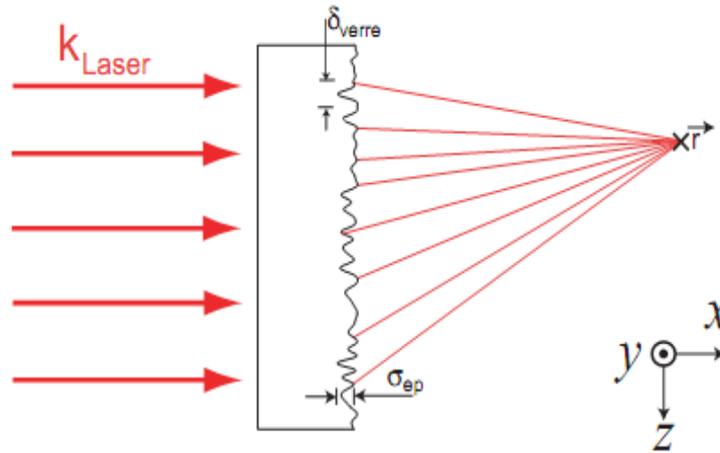


Fig.3.2- Diffusion d'une onde plane incidente cohérente par un verre diffuseur. Les aspérités du verre diffuseur engendrent des ondes partielles qui interfèrent au point \vec{r} et dont les différences relatives de marche en \vec{r} peuvent être grandes devant la longueur d'onde.

3.3 Propriété statistiques du champ de tavelures.

Pour comprendre le phénomène de tavelures ou champ de tavelures, les expérimentateurs ont considéré que la surface rugueuse du diffuseur peut être modélisée comme une assemblée de N diffuseurs ponctuels indépendants. Ce phénomène est valide lorsque l'échelle spatiale δ_{verre} de variation de l'épaisseur de verre (dans le plan de la surface rugueuse (voir figure 3.2)) est grande devant la longueur d'onde. Chaque diffuseur ponctuel ayant pour taille typique de longueur de corrélation δ_{verre} de la surface du diffuseur. En effet, sur une taille inférieure à la longueur de corrélation δ_{verre} , les variations de l'épaisseur sont faibles et la diffusion de l'onde incidente peut être considérée uniforme en première approximation. Au contraire deux points de surface rugueuse séparés d'une distance plus grande que la longueur de corrélation δ_{verre} sont par définition décorrélés. Ils diffuseront la lumière incidente indépendamment l'un de l'autre, en particulier les amplitudes et les phases diffusés par ces deux points seront indépendantes.

Les ondes partielles issues des différents centres diffuseurs de la surface rugueuse possèdent donc des amplitudes et des phases aléatoires et interfèrent constructivement ou destructivement lors de leur propagation en un point r de l'espace (voir figure 3.2).

3.4 Condensation de Bose-Einstein

Le phénomène de condensation de Bose-Einstein [4,5] tient aux propriétés statistiques d'un type de particules, les bosons, qui ne se manifestent que lorsque la nature ondulatoire (quantique) de la matière apparaît. La théorie de la dualité onde-corpuscule associée à une particule de quantité de mouvement \mathbf{p} une longueur d'onde, dite longueur de de Broglie, $\lambda_{dB} = \hbar/p$. A un ensemble statistique de particules ayant une énergie thermique moyenne égale à $3K_B T/2$ on associe une longueur de de Broglie thermique :

$$\Lambda_{dB} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mK_B T}} \quad (3.1)$$

Le caractère ondulatoire d'un ensemble de bosons apparaît lorsque la distance moyenne entre particules est inférieure à l'extension spatiale Λ_{dB} de l'onde qui lui est associée. Nous obtenons alors le critère

$$n \Lambda_{dB}^3 \sim 1 \quad (3.2)$$

Où n avec $n = |\psi|^2$ est la densité du gaz de bosons.

Le critère exact de condensation d'un gaz idéal de bosons à 3D [$n \Lambda_{dB}^3 \geq 2.612$] s'obtient en étudiant la statistique d'une assemblée de boson où il apparaît une saturation des niveaux excités [4]. Tous les atomes ajoutés au système peuplent alors l'état fondamental et nous pouvons définir un condensat de Bose-Einstein comme un ensemble de particules dont un nombre macroscopique peuple un seul et même état quantique.

A la limite thermodynamique, il est possible de définir la température critique T_c^0 pour le gaz idéal en dessous de laquelle le phénomène de condensation a lieu. Dans un piège harmonique V_{ext} , cette température critique de condensation est égale à

$$K_B T_c^0 = \hbar \bar{\omega} \left(\frac{N}{1.202} \right)^{1/3} \quad (3.3)$$

Avec $\bar{\omega} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}$ et N le nombre d'atome du gaz. Le nombre d'atomes condensés N_0 , i.e occupant macroscopiquement l'état fondamental du système, suit l'équation

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c^0}\right)^3 \quad (3.4)$$

La description d'une assemblée de bosons sans interaction permet une compréhension intuitive du phénomène de condensation mais ne permet pas de décrire la situation d'un gaz dégénéré où des interactions sont présentes. Même faibles, les interactions modifient profondément la fonction d'onde du condensat de Bose-Einstein [4, 5]

3.5 Equation de Gross-Pitaevskii

Dans les gaz d'atomes froids dilués avec lesquels nous travaillons [$na^3 \ll 1$ où a est la longueur de diffusion], les interactions sont très bien décrites par une diffusion en onde s. il est possible d'écrire une équation d'évolution pour l'opérateur champ en seconde quantification [7], $\hat{\psi}$, où le terme d'interaction est décrit par la diffusion en onde s. Il vient

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\psi}(r, t) = \left(-\frac{\hbar^2 \Delta}{2m} + V_{ext} + g|\hat{\psi}(r, t)|^2 \right) \hat{\psi}(r, t) \quad (3.5)$$

Où $g = 4\pi\hbar^2 a/m$ est la constante de couplage des interactions dans l'onde s.

En supposant alors l'existence d'un condensat de Bose-Einstein à $T=0$, nous pouvons écrire $\hat{\psi} \simeq \psi_0 + \delta\hat{\psi}$ où ψ_0 est la fonction d'onde du condensat et $\delta\hat{\psi}$ l'opérateur qui décrit les états excités orthogonaux au mode du condensat. En remplaçant $\hat{\psi} \simeq \psi_0$ dans l'équation (3.5), nous obtenons l'équation de Gross-Pitaevskii dépendant du temps.

En régime stationnaire (i.e. à l'équilibre). L'équation de précédente (3.5) se réduit, en substituant $\psi_0(r, t) = \phi_0(r)e^{-i\mu t/\hbar}$, à l'équation de Gross-Pitaevskii in dépendant du temps :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \phi_0 + V_{ext} \phi_0 + g|\phi_0|^2 \phi_0 = \mu \phi_0 \quad (3.6)$$

Et l'énergie μ s'identifie au potentiel chimique du condensat. Cette équation fait apparaître trois anergies : l'énergie cinétique proportionnelle à \hbar^2 ; l'énergie potentielle V_{ext} ; l'énergie d'interaction proportionnelle à g . Elle permet de décrire la plupart des propriétés des condensats atomiques à l'équilibre dont nous allons donner quelques exemples dans les paragraphes qui suivante.

3.6 Régime de Thomas Fermi

Lorsque l'énergie cinétique devient négligeable devant dans l'équation de Cross Piteevskii, des trois énergies mises en jeu par l'équation (3.6) l'énergie d'interaction, l'énergie potentielle et l'énergie cinétique, seules les l'énergie d'interaction et potentielle contribuent aux propriétés du condensat [4].

Pour un condensat dans un piège isotrope et d'extension spatiale R , le terme d'énergie cinétique est de l'ordre de $\hbar^2/2mR^2$ et le terme d'interaction de l'ordre gn . Avec $n = |\psi|^2$ Ainsi, si la taille du nuage R est grande devant la longueur de relaxation $\xi = \hbar/\sqrt{2mgn}$, $R \gg \xi$, le terme cinétique est négligeable devant le terme d'interaction. La condition du régime de Tomas-Fermi requiert donc un nombre d'atome suffisant afin que la taille du nuage due aux interactions répulsives soit grande devant l'extension spatiale de l'état fondamental du

piège $a_{oh} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\bar{\omega}}}$ où $\bar{\omega} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}$. Elle se met sous la forme

$$\frac{N_0 a}{a_{oh}} \gg 1 \quad (3.7)$$

Nous voulons caractériser le profil de la densité qui est une solution de l'équation de Gross-Pitaevskii pour un condensat à l'équilibre dans un potentiel anisotrope : $\omega_x = \omega_y = \omega_z = \omega$ perpenduclaire et selon la direction longitudinal $\omega = \omega_z$.

3.7 Modèle physique

Nous nous intéressons à la présence d'un gaz d'atomes froids de rubidium de masse $=142,73 \times 10^{-27}$ kg. Avec des interactions en présence d'un champ de tavelures de la forme

$$V(z) = V_R \cos(kz) \quad (3.8)$$

La corrélation apparaît dans l'amplitude du potentiel V_R ; $V_R = \frac{\hbar^2}{2m\sigma_R^2}$

La longueur σ_R caractérise l'échelle spatiale des fluctuations du potentiel aléatoire.

Nous travaillons dans le cas de faible désordre : V_R est faible par rapport du potentiel chimique μ , C'est à dire la longueur de corrélation est supérieur à la longueur de relaxation du condensat.

Nous considérons la seule direction du condensat dans laquelle le potentiel aléatoire possède des fluctuations sur la taille du nuage, soit l'axe Oz et nous supposons que les interaction sont répulsives 'est à dire, le terme g apparaît dans l'équation (3.5) est positive.

Le potentiel extérieur $V_{ext}(z)$ s'écrit comme somme du piège harmonique magnétique et du potentiel aléatoire

$$V_{ext}(z) = \frac{1}{2} m \omega_z^2 z^2 + V_R(z) \quad (3.9)$$

Ainsi, si le condensat est dans régime Tomas-Fermi, les modulations de son profile de densité selon l'axe Oz reflètent les fluctuations spatiales du potentiel aléatoire.

$$\mu \psi(z) = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{ext}(z) + g_{1D} |\psi(z)|^2 \right] \psi(z) \quad (3.10)$$

Avec : $g_{1D} = 2\hbar\omega_{\perp}a$,

\hbar : La constante de Planck.

ω_{\perp} : est la fréquence dans la direction transverse.

a : est la longueur de diffusion dans la direction transverse

Nous nous étudions d'abord le cas où le potentiel aléatoire est négligeable.

3.7.1 Régime de Thomas fermi en absence de potentiel aléatoire

Nous restons toujours dans le régime Thomas-Fermi, lorsque les interactions sont dominantes (couplage fort) et dans le régime de faible désordre. Dans ce cas, l'énergie cinétique est négligeable devant l'énergie d'interactions entre les atomes, la solution de l'équation de Gross-Pitaevskii indépendante du temps

$$V_{ext}(z) + g_{1D}|\psi(z)|^2 = \mu \quad (3.11)$$

Pour une amplitude de désordre faible devant le potentiel chimique du : $V_R \ll \mu$

Avec: $V_{ext} = V(z) = \frac{1}{2}m\omega^2 z^2$

$$\begin{cases} |\psi(z)|^2 = [\mu - V(z)]/g_{1D} & \text{Pour } \mu > V(z) \\ |\psi(z)|^2 = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.12)$$

Le profil de la densité est donné par :

$$|\psi(z)|^2 = \frac{\mu - V(z)}{g_{1D}} \quad (3.13)$$

Nous remplaçons l'expression du potentiel chimique à l'état stationnaire sans le potentiel harmonique: $\psi_0 = \sqrt{\mu/g_{1D}}$ dans l'équation (3.13), nous trouvons

$$|\psi(z)|^2 = \frac{\psi_0^2 g_{1D} - V(z)}{g_{1D}} \quad (3.14)$$

Nous remplaçons le terme d'interactions dans (3,14)

$$|\psi(z)|^2 = \psi_0^2 \left[1 - \frac{V(z)}{\mu} \right]$$

Avec :

$$\psi(z) = \psi_0 \left[1 - \frac{V(z)}{2\mu} \right]^{1/2} \quad (3.15)$$

Nous utilisons l'approximation du développement limité

Dans le cas $V(z) \ll \mu$, nous trouvons

$$\psi(z) \simeq \psi_0 - \frac{V(z)\psi_0}{2\mu} \quad (3.16)$$

L'équation (3.16), nous donne la relation entre la fonction d'onde à l'état fondamental en et la fonction d'onde à l'état excité selon la direction oz.

Lorsque le couplage est fort $\mu \gg \hbar\omega$ et la longueur de relaxation du BEC est beaucoup plus petite que la longueur de corrélation du potentiel ($\xi \ll \sigma_R$) Par conséquent, la fonction d'onde du BEC est donnée par :

$$n_0(z) = \frac{\mu - m\omega^2 z^2/2}{g_{1D}} = \mu_0(z)/g_{1D} \quad (3.17)$$

La longueur de Thomas Fermi du condensat est définie sur les bords où la fonction d'onde s'annule.

$$\psi(z) \simeq 0 \Rightarrow \frac{1}{g}(\mu - V(L_{TF})) = 0 \quad (3.18)$$

Cette équation nous donne

$$L_{TF} = \sqrt{2\mu/m\omega^2}:$$

Nous traçons la courbe $|\psi|^2$ en fonction la taille du système z , pour un potentielle chimique = 219h HZ, Il y'a une relation μ et ω

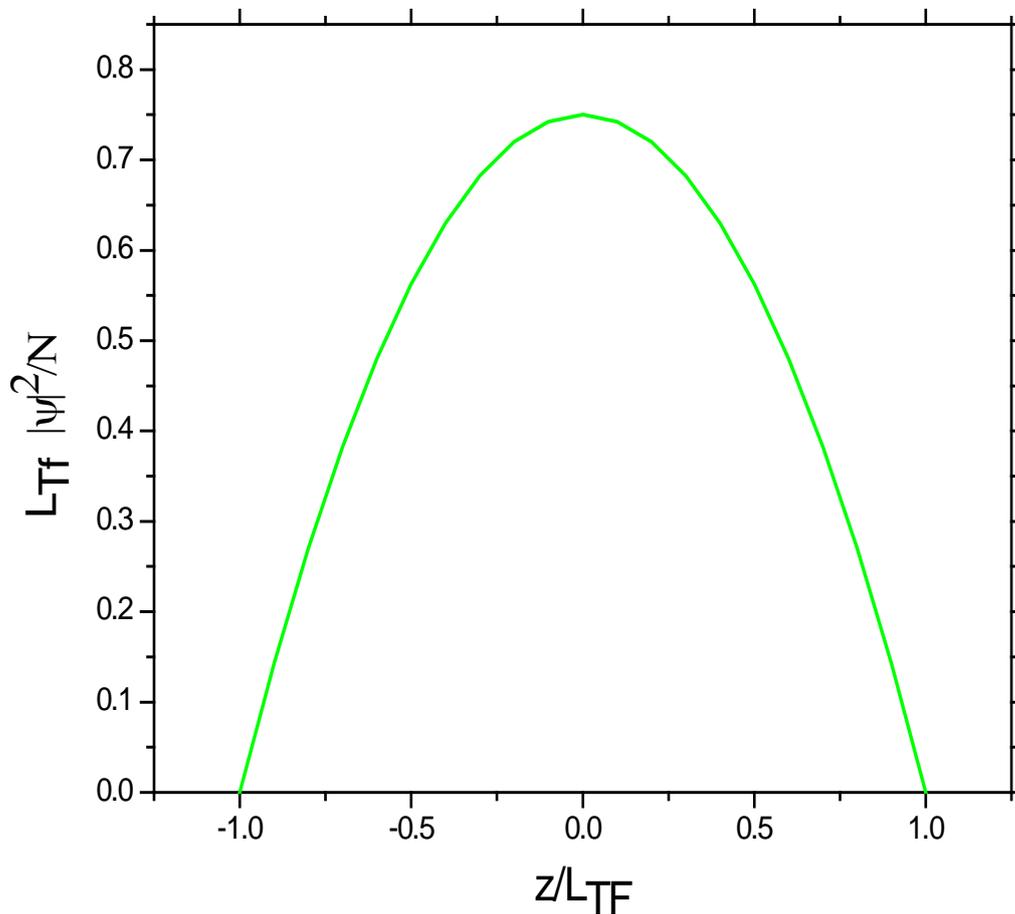


Fig3.3-: Densité d'état en fonction du Z/L_{TF} dans piège.

Nous constatons sur la figure 3.3 que la courbe a la forme d'une distribution gaussienne. Le maximum de la courbe atteint la valeur (0.75) au centre ($z=0$). Au-delà de cette valeur, $|\psi|^2$ décroît au fur à mesure en s'éloignant de l'origine. Lorsque la taille du système devient supérieure à la longueur L_{TF} , $|\psi|^2$ devient négligeable et s'annule aux points -1 et +1. La largeur à mi-hauteur de la courbe est de (0.675), les atomes sont en mouvement sous l'effet des interactions.

Nous concluons dans ce cas, que lorsque nous négligeons l'amplitude du désordre devant le potentiel chimique du condensat la densité reflète le confinement parabolique du piège harmonique. De plus, la condition de validité du régime de Thomas-Fermi ($\xi < \sigma_R$) est locale. Ainsi sur les bords du condensat où la densité chute jusqu'à s'annuler, le profile de densité n'est pas parabolique.

3.7.2 Effet d'un potentiel d'un aléatoire lissé :

La situation change lorsque la longueur de relaxation est de l'ordre supérieur à la longueur de corrélation du potentiel. En effet, le terme cinétique n'est plus négligeable et le condensat sort du régime de Thomas-Fermi. Dans ce cas particulier la fonction d'onde exacte d'un condensat de Bose-Einstein n'ait pas encore trouvé analytiquement [6].

L'utilité de définir un potentiel $\tilde{V}(r)$ aléatoire lissé par le terme d'interaction en champ moyen d'un condensat est de trouver une fonction d'onde approximative afin de résoudre le problème transport dans le cas où $\xi > \sigma_R$

Pour une amplitude de potentiel faible, les techniques de la théorie de perturbation permettent d'écrire la fonction d'onde d'un condensat de Bose-Einstein comme

$$\psi(z) = \psi_0 + \delta\psi(z),$$

Pour $\delta\psi \ll \psi_0$

Avec ψ_0 est la solution de l'équation de Gross-Pitaevskii:

Nous écrivons

$$\mu\psi_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi_0 + g\psi_0^3 \quad (3.19)$$

Le premier ordre de la série de perturbation est donné par :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2(\delta\psi) - [\mu - 3g\psi_0^2]\delta\psi = -V(r)\psi_0 \quad (3.20)$$

Sachant que $\mu - 3g\psi_0^2 = -2\mu$,

L'équation (3.20) s'écrit comme:

$$-\frac{\xi_0(z)^2}{2}\nabla^2(\delta\psi) + \delta\psi = -\frac{V(z)\psi_0}{2\mu} \quad (3.21)$$

Où $\xi_0(z) = \hbar/\sqrt{2m\mu_0(z)}$

Avec $\xi_0(z)$ est la longueur de relaxation locale.

Le potentiel aléatoire 1D lissé $\tilde{V}(z)$ est défini par [6]

$$\tilde{V}(r) = \int dr' G(r-r')\tilde{V}(r-r'). \quad (3.22)$$

La fonction V' est liée à $V(r-r')$ par la fonction de Green G.

Le terme $V(r-r')$ représente la corrélation entre deux points.

A 1D, la fonction de Green s'écrit comme

$$G(z) = \frac{1}{\sqrt{2}\xi} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}z}{\xi}\right) \quad (3.23)$$

En se limitant au premier terme de l'intégrale, le potentiel lissé est donné par la relation suivante :

$$\tilde{V}(k) = \frac{V(k)}{1+(k\xi_0(z))^2} \quad (3.24)$$

avec: $V(k) = V_R \cos(kz)$, $k = 2\pi/\sigma_R$,

En se limitant toujours au premier terme du développement limité, la fonction d'onde s'écrit comme

$$\psi(r) \simeq \psi_0 - \frac{\tilde{V}(r)\psi_0}{2\mu} \quad (3.25)$$

Nous restons toujours dans le cas où $\xi > \sigma_R$, nous prenons, $\frac{\sigma_R}{\xi} = 0.5$, la figure 3.4 montre le profil de la densité d'un condensat de Bose-Einstein en présence d'un champ de tavelures., nous remarquons que la présence du potentiel aléatoire se manifeste par l'apparition de modulations de la densité.

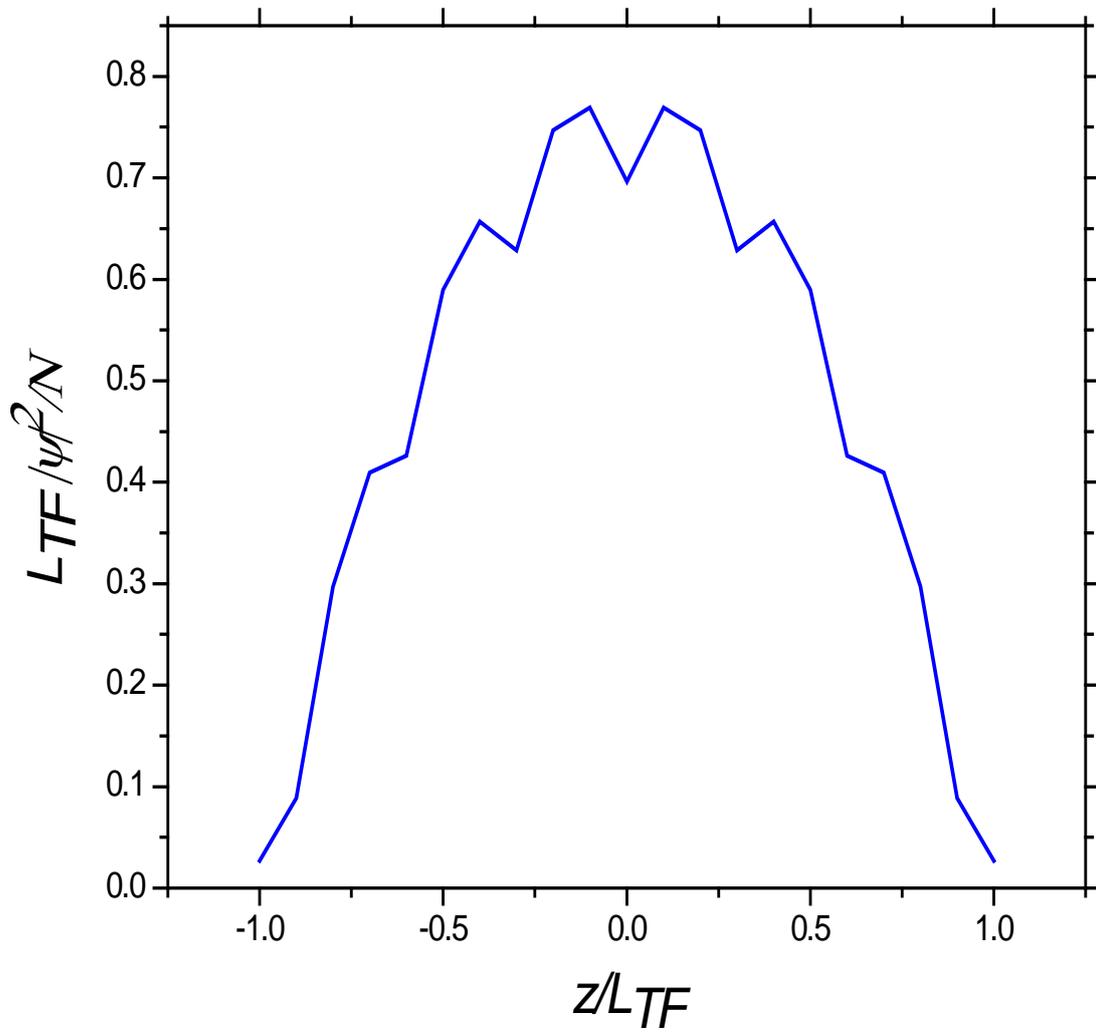


Fig3.4- Profils de densité d'un condensat de Bose-Einstein désordonné en fonction

$$z/L_{TF} \left(\frac{\sigma_R}{\xi} = 0.5 \right)$$

Dans ce cas particulier, où le potentiel lissé mais nous bordons le cas avec $\frac{\sigma_R}{\xi} = 10$. Nous observons sur la figure 3.5 que la forme de la courbe reste toujours gaussienne mais les modulations de la densité disparaissent se confondant ainsi avec le régime de Thomas-Fermi. Ce résultat peut être expliqué par l'effet des interactions qui suppriment l'effet du désordre. Le système est donc dans un état délocalisé.

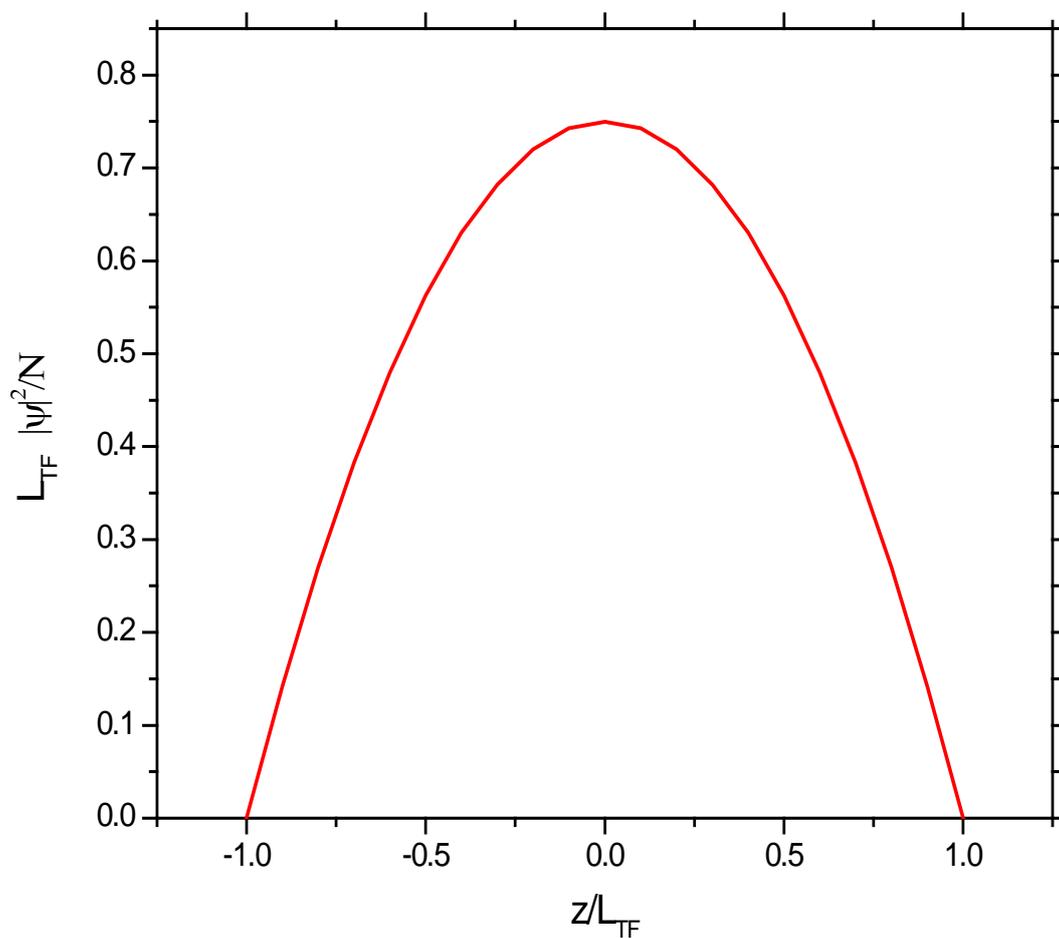


Fig3.5- Profils de densité d'un condensat de Bose-Einstein désordonné en fonction z/L_{TF} ($\frac{\sigma_R}{\xi} = 10$)

3.7.3 Variation du maximum de la densité

Afin de savoir l'effet du désordre sur la nature des états, il est intéressant d'étudier comment varie le maximum de la densité pour différentes valeurs du rapport σ_R/ξ , les résultats trouvés montrent que le maximum de la densité croît lentement en fonction de σ_R/ξ voir la figure 3.6. Dans l'intervalle [$\sigma_R < \xi$], la courbe reste presque stable, le maximum de la densité ne change pas. Dans le cas contraire $\sigma_R > \xi$ une variation linéaire apparaît sur la courbe. Ceci est dû aux fluctuations de l'amplitude du potentiel aléatoire.

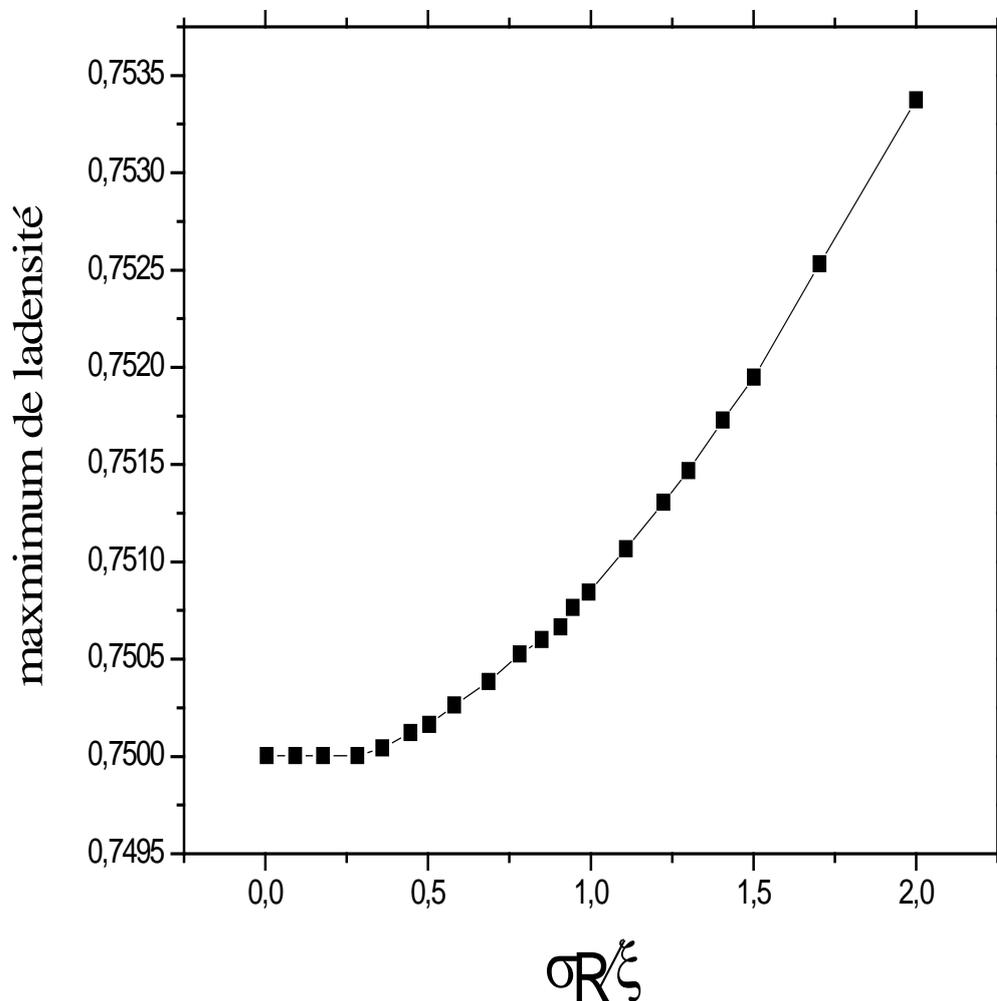


Fig.3.6- Variations du maximum du profil de la densité d'état en fonction σ_R/ξ

3.7.4 Variation de la largeur de la densité

L'étude de la largeur à mi-hauteur nous renseigne sur l'état des atomes dans le piège. Il est intéressant de voir comment varie la largeur du profil de la densité en fonction de σ_R/ξ .

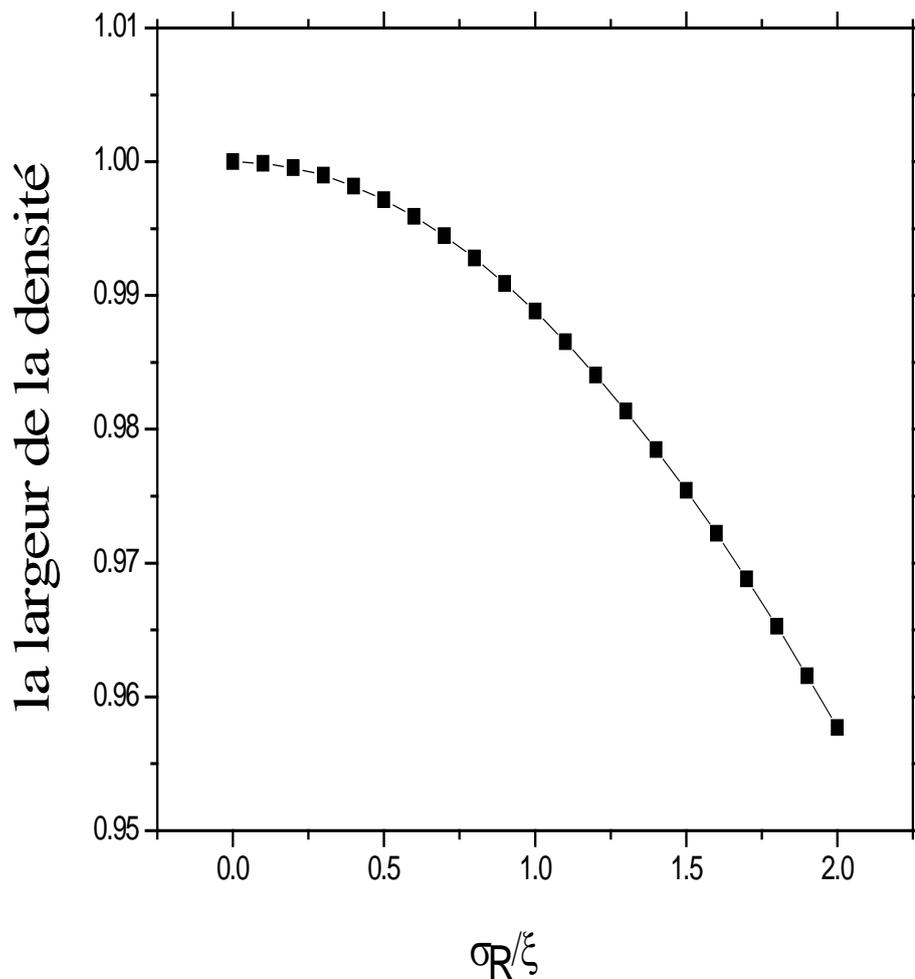


Fig.3.7- Variations de la largeur du profil de la densité d'état en fonction de σ_R/ξ

Nous constatons sur la figure 3.7 que si $\sigma_R < \xi$ la largeur à mi-hauteur décroît faiblement ce qui explique que le système reste délocalisé. Contrairement pour $\sigma_R > \xi$, la décroissance de la largeur est importante, ainsi, nous pouvons dire que le système est faiblement délocalisé.

3.8 CONCLUSION :

Nous étudions dans ce chapitre le rôle des interactions et le potentiel optique aléatoire sur l'état d'un condensat de Bose-Einstein. Nous commençons d'abord par la présence des condensats de Bose-Einstein dans un piège harmonique en présence des interactions. Les interactions répulsives sont responsables de l'expansion longitudinale du condensat dans la direction oz unidimensionnel. Dans l'approximation du champ moyen et en utilisant l'équation non-linéaire de Gross-Pitaevskii, nous trouvons la densité d'état atomique $|\psi|^2$ pour un nuage d'atomes froids. Nous étudions deux cas possible, lorsque le potentiel chimique des condensats est supérieur au potentiel aléatoire $\xi < \sigma_R$, cela traduit le régime de Thomas Fermi où les interactions sont importantes, dans ce cas, les condensats bougent dans le piège harmonique sous l'effet des interactions. La densité d'état atomique présente une courbe large de forme parabole reflète la forme du piège harmonique et nous explique que le condensat est dans un état délocalisé. Dans le cas inverse, lorsque $\xi > \sigma_R$, le potentiel optique aléatoire existe et se manifeste par la présence de la corrélation, dans ce cas le condensat sort du régime de Thomas-Fermi. Après avoir utilisé le développement limité au premier ordre afin de chercher le potentiel lissé par les interactions. Le calcul de la densité d'état donne un profil différent à celle obtenu dans le régime de Thomas-Fermi. Les modulations apparaît sur la courbe reflètent les fluctuations spatiales du potentiel aléatoire.

Dans ce cas particulier, en présence du potentiel lissé, nous avons pris le cas où l'énergie du champ de tavelures est inférieure à l'énergie d'interactions.

Le résultat est en bon accord avec le régime de Thomas-Fermi, les modulations disparaissent en diminuant la longueur de corrélation.

En fin, nous concluons que les interactions contribuent à délocalisé le condensat de Bose-Einstein, alors que le désordre conduit à le localisé.

Si les interactions sont importantes et le potentiel aléatoire est présent alors le condensat reste délocalisé.

Bibliographies

- [1] R. Grimm, M. Weidemüller, et Y. Ovchinnikov, "Optical dipole traps for neutral atoms", *Adv. At. Mol. Opt. Phys.* 42, 95 (2000).
- [2] J. W. Goodman, *Speckle Phenomena in Optics : Theory and Applications* (Roberts and Company Publishers, 2007).
- [3] M. Françon, *La Granularité Laser (speckle) et ses applications en optique* (Masson, Paris, 1978).
- [4] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. Pitaevskii, et S. Stringari, "Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases", *Rev. Mod. Phys.* 71, 463 (1999).
- [5] L. Pitaevskii et S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation* (Oxford Science Publication, 2003).
- [6] L. Sanchez-Palencia, "Smoothing effect and delocalization of interacting Bose-Einstein condensates in random potentials", *Phys. Rev. A* 74, 053625 (2006).
- [7] K. Huang, *Statistical mechanics*, 2ème éd. (Wiley, New York, 1987).

Conclusion Générale

Ce travail décrit l'étude du transport 1D d'un condensat de Bose-Einstein avec interactions en présence d'un potentiel optique aléatoire. Nous nous sommes intéressés à un gaz d'atomes froids de rubidium de masse $m = 142,73 \times 10^{-27} \text{ kg}$ avec des interactions en présence d'un champ de tavelures de la forme $V(z) = V_R \cos(kz)$. Nous considérons la seule direction du condensat dans laquelle le potentiel aléatoire possède des fluctuations sur la taille du nuage, soit l'axe Oz et nous supposons que les interactions sont répulsives.

En utilisant l'approximation du champ moyen et l'équation non-linéaire de Gross-Pitaevskii, nous calculons la densité d'état atomique pour un nuage d'atomes froids. Nous étudions deux cas possibles, lorsque le potentiel chimique des condensats est supérieur au potentiel aléatoire $\xi > \sigma_R$, cela traduit le régime de Thomas Fermi où les interactions sont importantes, dans ce cas, les condensats bougent dans le piège harmonique sous l'effet des interactions. La densité d'état atomique présente une courbe large de forme parabole reflétant ainsi la forme du piège harmonique et nous montrons que le condensat est dans un état délocalisé. Dans le cas inverse, lorsque $\xi < \sigma_R$, le potentiel optique aléatoire existe et se manifeste par la présence de la corrélation, dans ce cas le condensat sort du régime de Thomas-Fermi. En utilisant le développement limité au premier ordre afin de chercher le potentiel lissé par les interactions. Le calcul de la densité d'état présente un profil différent à celui obtenu dans le régime de Thomas-Fermi. Les modulations qui apparaissent sur la courbe reflètent les fluctuations spatiales du potentiel aléatoire.

Dans ce cas particulier, en présence du potentiel lissé, nous avons pris le cas où l'énergie du champ de tavelures est inférieure à l'énergie d'interactions.

Le résultat est en bon accord avec le régime de Thomas-Fermi, les modulations disparaissent en diminuant la longueur de corrélation.

En fin, nous concluons que les interactions contribuent à une délocalisation du condensat de Bose-Einstein, alors que le désordre conduit à une localisation. Mais si les interactions sont importantes et le potentiel aléatoire est présent alors le condensat reste délocalisé.

Notons qu'il est utile de vérifier ces résultats par une résolution numérique de l'équation de l'équation de Gross-Pitaevskii.