الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة وهران للعلوم و التكنولوجيا محمد بوضياف

THÈSE

En vue de l'obtention du
Diplôme de Doctorat en Sciences

Présentée par : BENNOUAR Abdelmadjid

Intitulé

Applications harmoniques et applications biharmoniques sur certaines structures

Faculté	*: Mathématiques et Informatique*
Département	*: Mathématiques*
Spécialité	*: Mathématiques*
Option	*: Géométrie différentielle*

Devant le Jury Composé de :

Membres de Jury	Grade	Qualité	Domiciliation
Mr TLEMCANI Mounir	Professeur	Président	Université de l'USTO-MB
Mr OUAKKAS Seddik	Professeur	Encadrant	Université de SAIDA
Mr BEKKAR Mohamed	Professeur		Université d'ORAN 1
Mr BEKKARA Samir	MCA	Examinateurs	Université de l'USTO-MB
Mr ZOUBIR HANIFI	MCA		ENPO

Année Universitaire : 2017/2018

Remerciements

Le travail de recherche présenté dans cette thèse a été réalisé sous la direction du Professeur Monsieur OUAKKAS Seddik, qui n'a ménagé aucun effort pour m'apporter l'aide nécessaire et me prodiguer de précieux et utiles conseils. Je lui exprime toute ma reconnaissance et le prie d'accepter ma profonde gratitude.

Je remercie vivement le Professeur Monsieur TLEMCANI Mounir d'avoir bien voulu présider le jury de soutenance de cette thèse.

Mes remerciements s'adressent également au Professeur Monsieur BEKKAR Mohamed ainsi qu'aux Docteurs Messieurs BEKKARA Samir et ZOUBIR Hanifi d'avoir accepté d'être membres du jury.

Je saisis cette occasion pour exprimer mes sincères reconnaissances au Professeur Monsieur YEGANEFAR Nader de l'université d'AIX-MARSEILLE, pour l'aide qu'il n'a cessé de m'apporter lors de mes différents stages.

Un grand merci aussi à tous ceux qui m'ont apporté leur soutient moral et contribué de près ou de loin à l'élaboration de cette thèse.

Je remercie enfin tous les membres de ma famille, particulièrement mes chers parents, mon épouse, mes enfants IHCENE et ASSEM, à qui je dédie ce travail de recherche.

Résumé

Les applications harmoniques et biharmoniques sont des correspondances entre les variétés riemanniennes ou pseudo-riemanniennes qui sont solution des équations d'Euler-Lagrange. L'objet principal dans cette thèse, est de donner une nouvelle classe d'applications biharmoniques entre les variétés admettant une structure riemannienne produit tordu. Une famille d'exemples a été construite afin d'illustrer les résultats originaux obtenus. Nous allons étudier par la suite une extension plus large, appelée application f-harmonique, en traitant particulièrement la f-biharmonicité des applications conformes entre les variétés riemanniennes équidimensionnelles.

Abstract

The harmonic and biharmonic maps are correspondences between the riemannian or pseudo-riemannian manifolds which are solutions of the Euler-Lagrange equations. The main goal in this thesis is to give a new class of biharmonic maps between the manifolds which admit a riemannian warped product structure. A family of examples has been built up to show the original results we have found. Then, we will study a more general extension, called f-harmonic maps, with particular attention on the f-biharmonicity of conformal maps between equidimensional riemannian manifolds.

Table des matières

Remerciements . . . . **i**

Résumé . . . . **i**

Abstract . . . . **ii**

1 Introduction **2**

2 Géométrie associée aux applications harmoniques et biharmoniques **7**

2.1 Préliminaire géométrique 7

2.1.1 Variété riemannienne, notions élémentaires 7

2.1.2 Espace fibré tangent et connexion induite 9

2.1.3 Seconde forme fondamentale 10

2.2 Applications harmoniques 11

2.2.1 Définitions élémentaires 11

2.2.2 Première variation de l'énergie 12

2.2.3 Exemples d'applications harmoniques 16

2.2.4 Seconde variation de l'énergie 17

2.3 Applications biharmoniques 20

2.3.1 Première variation de la bi-énergie 20

2.3.2 Exemples d'applications biharmoniques 21

3 Structure Riemannienne des Variétés Produits tordus **22**

3.1 Structure riemannienne des variétés produits 22

3.1.1 Notion de relèvements, définitions et notations 22

3.1.2 Métrique produit et invariants riemanniens 26

3.2 Structure riemannienne des variétés produits tordus 30
3.2.1 Métrique produit tordu 30
3.2.2 Propriétés et notations 30
3.2.3 Invariants riemanniens 32

4 Construction d'applications biharmoniques sur les variétés produits tordus 41
4.1 Cas I : $\phi : (M^m \times_\alpha N^n, G_\alpha) \longrightarrow (M^m \times_\beta N^n, G_\beta)$ 41
4.2 Cas II : $\widetilde{\phi} : (M^m \times_f N^n, G_f) \longrightarrow (P_1^{p_1} \times P_2^{p_2}, G)$ 54
4.3 Cas III : $\widetilde{\phi} : N \longrightarrow (M \times_f P, G_f)$ 57
4.4 Cas IV : $\widetilde{\phi} : (M^m \times_f N^n, G_f) \longrightarrow (P^p, k)$ 62

5 Géométrie des applications f-biharmoniques 69
5.1 Application f-harmonique et f-biharmonique 69
5.1.1 Application f-harmonique 69
5.1.2 Tenseur f-énergie impulsion 72
5.2 Application f-biharmonique 76
5.3 f-biharmonicité des applications conformes 77

Bibliographie 90

Chapitre 1

Introduction

La théorie des applications harmoniques a été introduite par J. H. Sampson dans l'espoir d'obtenir une version homotopique à la théorie de Hodge de la cohomologie très réussie en 1952. J. Eells et J. H. Sampson dans [12], ont publié le premier article sur les applications harmoniques entre les variétés riemanniennes en 1964. Le document était considéré comme étant le travail de pionniers dans la notion d'applications harmoniques, par la suite, ils ont publié un deuxième puis un troisième papier conjoint [13, 14]. L'application harmonique entre deux variétés riemanniennes $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ est définie soit comme étant le point critique de l'énergie fonctionnelle,

$$E(\phi, D) = \frac{1}{2} \int_D |d\phi|^2 \upsilon_g$$

où υ_g est la forme volume de M déterminée pour la métrique g et D un domaine compact dans M, soit comme des solutions pour les équations d'Euler-Lagrange (dites équations harmoniques),

$$\tau(\phi) = trace_g \nabla d\phi = 0$$

ou bien localement,

$$\tau(\phi) = g^{ij} \left\{ \frac{\partial^2 \phi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial \phi^\alpha \partial \phi^\beta}{\partial x^i \partial x^j} \bar{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} \circ \phi - \frac{\partial \phi^\gamma}{\partial x^k} \Gamma^k_{ij} \right\} \frac{\partial}{\partial y} \circ \phi = 0$$

avec $\tau(\phi)$ est le champ de tension et $\bar{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}$ et Γ^k_{ij} sont les symboles de Christoffel sur N et M respectivement.

Ce système d'équation semi-linéaire elliptique, nous montre bien le lien profond, établi par les applications harmoniques, entre la géométrie des variétés d'une part, et divers problèmes de la théorie des équations aux dérivées partielles d'autre part.
Le théorème donné ci-après, fut le principal résultat démontré par J. Eells et J. H. Sampson dans [12] ;

Théorème Soit $(M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ application de classe C^∞. On suppose que la courbure de Ricci sur M est non négatif et la courbure de Riemann sur N est non positive. Alors ϕ est harmonique si est seulement si elle est géodésique. De plus,
1. S'il existe au moins un point de M pour lequel sa courbure de Ricci est positive, alors l'application harmonique ϕ est constante.
2. Si la courbure riemannienne sur N est partout négative, alors l'application harmonique soit elle est constante soit l'image est une géodésique fermée dans N.

Une extension naturelle des applications harmoniques, appelée application biharmonique, est suggérée par J. Eells et L. Lemaire dans [11]. Le premier résultat dans ce domaine a été obtenu par Y. Jiang G dans [15], il a dérivé l'équation d'Euler-Lagrange de la bi-énergie fonctionnelle,

$$E_2(\phi, D) = \frac{1}{2} \int_D |\tau(\phi)|^2 v_g$$

Cette équation caractérise les applications biharmoniques et est donnée par le fait que le bi-tension $\tau_2(\phi)$ soit nul ;

$$\tau_2(\phi) = -\Delta\tau(\phi) - trace_g R^N(d\phi, \tau(\phi))\, d\phi = 0$$

où Δ étant le laplacien sur le fibré induit $\phi^{-1}(TN)$ et R^N est le tenseur de courbure sur N. L'équation biharmonique $\tau_2(\phi) = 0$ est une équation elliptique de quatrième ordre.

Il est clair que toute application harmonique est biharmonique. Plusieurs résultats ont été prouvés donnant la condition nécessaire et suffisante pour qu'une application biharmonique soit harmonique, on cite ente autre, le cas d'une submersion riemannienne voir [20]. Cependant, le premier résultat répondant au problème posé, fut démontré par Y. Jiang G dans [16] ;

Théorème Soit $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞. Si M est compacte, orientable et la courbure sectionnelle $Riem^N \leq 0$, alors ϕ est biharmonique si et seulement si elle est harmonique.

Depuis l'année 2000, la théorie des applications biharmoniques a reçu une attention croissante et est devenue le sujet d'études avec beaucoup de progrès. Plusieurs mathématiciens se sont intéressés à construire des applications biharmoniques non harmoniques, c'est ce qu'on appelle application bi-harmonique propre, voir [2] – [4] et [21] – [26] pour quelques constructions. On pourrait mentionner que dans [2], Baire et Kamissoko ont étudié la biharmonicité de l'application identité par rapport à la déformation de la métrique domaine, et que Balmus dans [3] l'a fait par rapport à la déformation de la métrique co-domaine. Dans [4], Balmus, Montaldo et Oniciuc ont étudié les applications biharmoniques entre les variétés produits tordus où ils ont donné une condition pour la biharmonicité de l'inclusion d'une variété riemannienne N dans le produit $M \times_f N$, où $f \in C^\infty(M)$ une fonction positive, et celle de la projection $\overline{\pi} : M \times_f N \longrightarrow M$.

Le but principal de ce travail est de donner une autre construction des applications biharmoniques entre les variétés riemanniennes produits tordus en démontrant des théorèmes généralisant quelques résultats obtenus dans [4]. De plus, nous allons étudier les propriétés géométriques d'une extension plus large des applications biharmoniques, appelée application f-biharmonique, où $f : M \longrightarrow (0, \infty)$ une fonction positive.

Dans le premier chapitre de la thèse, on donne un rappel géométrique de quelques notions de variétés riemanniennes, particulièrement la géométrie associée à l'espace fibré tangent inverse et la connexion induite, et celle associée aux applications harmoniques et biharmoniques.

On s'intéresse dans le deuxième chapitre à l'étude de la structure riemannienne des variétés produits et celle des variétés produits tordus introduite par B. O N'eill voir [19]. Après avoir défini la métrique produit, dite diagonale, et la métrique produit tordu de deux variétés riemannienne, nous allons exprimer la connexion linéaire associée aux variétés produits et variétés produits tordus en fonction de la connexion de Levi-Civita. Nous démontrerons par la suite, les principaux résultats donnant la formule des invariants riemanniens dans le cas produit riemannien et celui du produit tordu riemannien.

Le troisième chapitre est consacré à la construction d'une nouvelle classe d'applications biharmoniques entre les variétés riemanniennes qui sont produits tordus, généralisant ainsi certains résultats obtenus par Balmus, Montaldo et Oniciuc dans [4]. Une famille d'exemples a été construite afin d'illustrer les théorèmes, cités ci-après, qui sont publiés dans l'article [22] ;

Théorème 1. Soit $\phi : (M^m \times_\alpha N^n, G_\alpha) \longrightarrow (M^m \times_\beta N^n, G_\beta)$ une application définie par $\phi(x,y) = (x,y)$. L'application ϕ est biharmonique si et seulement si

$$grad\Delta f + 2Ricci\,(gradf) - 2\left(\Delta \ln\alpha + (n-2)\,|grad \ln\alpha|^2\right) gradf$$

$$+ (n-4)\left(\nabla^M_{grad\ln\alpha} gradf\right) - 2n\frac{\beta^2}{\alpha^2} df\,(grad\ln\beta)\,grad\ln\beta$$

$$- n\frac{\beta^2}{\alpha^2}\left(\nabla^M_{gradf} grad\ln\beta\right) = 0,$$

où $f = \alpha^2 - \beta^2$ et $\alpha, \beta \in C^\infty(M)$ sont des fonctions positives.

Théorème 2. Soit $\widetilde{\phi} : (M^m \times_f N^n, G_\alpha) \longrightarrow (P_1^{p_1} \times P_2^{p_2}, G)$ définie par $\widetilde{\phi}(x,y) = (\phi(x), \psi(y))$ où $\phi : (M,g) \longrightarrow (P_1, k_1)$ et $\psi : (N,h) \longrightarrow (P_2, k_2)$ deux applications harmoniques. Alors l'application $\widetilde{\phi}$ est biharmonique si et seulement si

$$\mathrm{Tr}_g\left(\nabla^\phi\right)^2 d\phi\,(grad\ln f) + Tr_g R^{P_1}\left(d\phi\,(grad\ln f), d\phi\right) d\phi + n\nabla^\phi_{grad\ln f} d\phi\,(grad\ln f) = 0.$$

Théorème 3. Soit $\phi : (N^n, h) \longrightarrow (P^p, k)$ une application harmonique, alors l'application $\widetilde{\phi} : N \longrightarrow (M \times_f P, G_f)$ définie par $\widetilde{\phi}(y) = (x_0, \phi(y))$ est biharmonique si et seulement si

$$\begin{cases} (e(\phi))^2\,grad\left(|gradf^2|^2\right) - 2\,(\Delta e(\phi))\,gradf^2 = 0 \\ \text{et} \\ d\phi\,(grad\,(e(\phi))) = 0 \end{cases}$$

Les applications f-biharmoniques, qui généralisent les applications harmoniques, ont été d'abord introduites par Lichnerowicz [18] en 1970. Elles ont été récemment étudiées par N. Course [9, 10], Ouakkas, Nasri et Djaa [23] et Chiang et Wolak [7, 8], ainsi que d'autres. Le quatrième chapitre a pour but d'étudier particulièrement la f-biharmonicité des applications conformes. Pour se faire, on donne en premier lieu certaines définitions élémentaires puis on traite la notion du tenseur f-énérgie impulsion et les propriétés géométriques associées aux applications f-biharmoniques et celles associées aux applications conformes afin de pouvoir démontrer le théorème principal, cité ci-après, donnant la condition nécessaire et suffisante pour qu'une application conforme entre les variétés riemanniennes équidimensionnelles soit biharmonique ;

Théorème. Soit $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$ $(n \geq 3)$une application conforme de dilatation λ, alors ϕ est f-biharmonique si et seulement si

$$grad\Delta \ln\lambda - \frac{(n-6)}{2} grad\left(|grad \ln\lambda|^2\right) + 2\nabla_{grad \ln f} grad \ln\lambda$$

$$- \left(2\left(\Delta \ln\lambda\right) + (n-2)\left|grad \ln\lambda\right|^2 - \Delta \ln f - |grad \ln f|^2\right) grad \ln\lambda$$

$$+ 2\left|grad \ln\lambda\right|^2 grad \ln f + 2Ricci^M\left(grad \ln\lambda\right) = 0$$

Chapitre 2

Géométrie associée aux applications harmoniques et biharmoniques

Nous allons donner dans ce chapitre, un rappel géométrique de quelques notions de variétés riemanniennes, particulièrement la géométrie associée à l'espace fibré tangent inverse et la connexion induite, et celle associée aux applications harmoniques et biharmoniques.

2.1 Préliminaire géométrique

2.1.1 Variété riemannienne, notions élémentaires

Définition 2.1.1. Une variété riemannienne de classe C^∞ et de dimension m, est une variété différentiable munie d'une application $C^\infty(M)$-bilinéaire symétrique , non dégénérée et définie positive, qu'on note $g : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow C^\infty(M)$, appelée métrique riemannienne. si on munit la variété M^m d'un système de coordonnées locales $\{x_i\}_{i=1\ldots m}$, alors la métrique s'écrit localement comme suit ;

$$g = \sum_{i=1}^{m} g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

où g_{ij} sont des fonctions de classe C^∞.

Définition 2.1.2. Une connexion linéaire ∇ sur une variété différentiable M^m, est une application $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$ vérifiant :

1. $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
2. $\nabla_X (fY) = f\nabla_X (Y) + X(f) Y$

3. $\nabla_{X+fY}(Z) = \nabla_X(Z) + f\nabla_Y(Z)$

$\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ et $\forall f \in C^\infty(M)$

Définition 2.1.3. Soient (M^m, g) une variété riemannienne et ∇ une connexion linéaire associée à M^m et soit $\{e_i\}_{i=1\ldots m}$ une base orthonormée sur M^m.
I. On appelle tenseur de courbure, toute application $C^\infty(M)$-trilinéaire, $R : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$, vérifiant :

1. $R(X, Y, Z) + R(Y, Z, X) + R(Z, X, Y) = 0$
2. $(\nabla_X R)(Y, Z) + (\nabla_Y R)(Z, X) + (\nabla_Z R)(X, Y) = 0$

II. On appelle courbure de Ricci, toute forme bilinéaire symétrique telle que :

$$Ricci(X, Y) = \sum_{i=1}^{m} g(R(X, e_i)e_i, Y)$$

III. On appelle courbure scalaire, la fonction définie sur M^m par :

$$Scal = Tr_g Ricci = \sum_{i,j=1}^{m} g(R(e_i, e_j)e_j, e_i)$$

Définition 2.1.4. Soient (M^m, g) une variété riemannienne et ∇ une connexion linéaire associée à M^m.

1. On définit le gradient d'une fonction $f \in C^\infty(M)$, pour tout champ de vecteur $\forall X \in \Gamma(TM)$ par :
$$g(gradf, X) = X(f)$$
2. On définit la divergence d'un champ de vecteurs $X \in \Gamma(TM)$ par :
$$divX = \sum_{i=1}^{m} g(\nabla_{e_i}X, e_i)$$
3. On définit la divergence d'une 1-forme $\omega \in \Gamma(T^*M)$ par :
$$div\omega = \sum_{i=1}^{m} (\nabla_{e_i}\omega)e_i$$
4. On définit le laplacien d'une fonction $f \in C^\infty(M)$ par :
$$\Delta(f) = div(gradf)$$

où $\{e_i\}_{i=1...m}$ étant une base orthonormée sur M^m.

Définition 2.1.5. Soit (M^m, g) une variété riemannienne. On appelle forme volume définie sur la variété M^m, la mesure définie localement dans un repère par :

$$d\nu_g = \sqrt{detg_{ij}}dx^1 \wedge ... \wedge dx^m = \sqrt{detg_{ij}}dx$$

Proposition 2.1.1. ([1]) *Soit D un domaine compact à bord dans une variété riemannienne (M^m, g) et soient ω une 1-forme et X un champ de vecteurs, définis sur un voisinage inclu dans D. Alors,*

$$\int_D (div\omega)\, d\nu_g = \int_{\partial D} \omega(\eta)\, d\nu_g, \int_D (divX)\, d\nu_g = \int_{\partial D} (g(X, \eta))\, d\nu_g$$

où, ∂D est le bord de D et $\eta = \eta(x)$ est le vecteur unitaire normale à ∂D.

Corollaire 2.1.1. *Pour touts ω une 1-forme et X un champ de vecteurs à support compact dans D, alors*

$$\int_D (div\omega)\, d\nu_g = 0, \int_D (divX)\, d\nu_g = 0$$

2.1.2 Espace fibré tangent et connexion induite

Définition 2.1.6. Soient (M^m, g) et (N^n, h) deux variétés riemanniennes et $\phi : M \longmapsto N$ une application de classe C^∞. Alors on définit le fibré tangent inverse par :

$$\phi^{-1}TN = \left\{(x, v), x \in M et\ v \in T_{\phi(x)}N\right\}$$

L'ensemble de toutes les sections de C^∞ de $\phi^{-1}TN$ se note par $\Gamma(\phi^{-1}TN)$, et est défini par :

$$\Gamma(\phi^{-1}TN) = \left\{v : M \to TN, \forall x \in M\ et\ v_x \in T_{\phi(x)}N\right\}$$

Définition 2.1.7. Soit ∇^N la connexion linéaires de Levi-Cevita sur (N^n, h). Alors pour toute $\phi \in C^\infty(M; N)$, on peut définir la connexion induite comme étant l'unique connexion sur le fibré $\Gamma(\phi^{-1}TN)$ comme suit :

$$\nabla^\phi_X V = \nabla^N_{d\phi(X)} Y\ avec\ V = Y \circ \phi \in \Gamma(\phi^{-1}TN), Y \in \Gamma(TN)$$

Remarque 2.1.1. Soient $X = X^i\partial_i \in \Gamma(TM)$ et $Y = Y^j\partial_j \in \Gamma(TN)$ donc la connexion induite peut être écrite en coordonnées locales comme suit :

$$\left(\nabla^N_{d\phi(X)} Y\right)(\phi(x)) = X^i \frac{\partial}{\partial x_i} Y^j_x \frac{\partial}{\partial y_j} + X^i \frac{\partial \phi^k}{\partial x_i} Y^j_x \Gamma^l_{jk} \frac{\partial}{\partial y_l}$$

Proposition 2.1.2. ([1]). *Soient M et N deux variétés différentiables et $\phi : M \longmapsto N$ une application de classe C^∞. Alors pour $X, Y \in \Gamma(TM)$, on a :*

$$\nabla_X^\phi d\phi(Y) - \nabla_Y^\phi d\phi(X) = d\phi([X,Y])$$

Remarque 2.1.2. La connexion induite sur le fibré tangent $\phi^{-1}TN$ est compatible avec la métrique h, voir [27]

2.1.3 Seconde forme fondamentale

Définition 2.1.8. Soient (M^m, g) et (N^n, h) deux variétés riemanniennes et $\phi : M \longmapsto N$ une application de classe C^∞. On appelle seconde forme fondamentale de ϕ, la dérivée covariante de la 1-forme $d\phi$ définie pour $X, Y \in \Gamma(TM)$ par :

$$(\nabla d\phi)(X,Y) = (\nabla_X d\phi)(Y) = \left(\nabla_X^\phi d\phi\right)(Y) - d\phi\left(\nabla_X^M Y\right),$$

où $(\nabla_X d\phi)(Y) \in \Gamma(\phi^{-1}TN)$

Remarque 2.1.3. Pour un système de coordonnées locales $(x^1, ..., x^m)$ sur M et $(y^1, ..., y^n)$ sur N, on écrit :

$$(\nabla\phi)_{ij} = \nabla\phi\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \phi_{ij}^\gamma \frac{\partial}{\partial y^\gamma}$$

Alors,

$$\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} d\phi\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \nabla \frac{\partial}{\partial x^j}\phi_* \frac{\partial}{\partial x^j} - \phi_* \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

$$= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right) - \phi_* \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

$$= g^{ij}\left\{\frac{\partial^2\phi^\alpha}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^\alpha} + \frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial\phi^\beta}{\partial x^i}\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial}{\partial y^\gamma}\circ\phi - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\circ\phi\right\}$$

Ainsi,

$$\phi_{ij}^\gamma = \frac{\partial^2\phi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial\phi^\gamma}{\partial x^k} + \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial\phi^\beta}{\partial\partial x^i}$$

où Γ_{ij}^k et $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma$ sont les symboles de Christoffel de (M^m, g) et (N^n, h) respectivement.

Définition 2.1.9. Soit $\phi : M \longmapsto N$ une application de classe C^∞, si $\nabla d\phi = 0$ alors ϕ est dite totalement géodésique.

2.2 Applications harmoniques

2.2.1 Définitions élémentaires

Définition 2.2.1. Soient (M^m, g) et (N^n, h) deux variétés riemanniennes et
$\phi : M \longmapsto N$ une application de classe C^∞. On appelle densité de ϕ, la fonction $e(\phi) : M \to \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\forall x \in M, e(\phi)(x) = \frac{1}{2}|d_x\phi|^2 \tag{2.2.1}$$

où $|d_x\phi|$ étant la norme de Hilbert-Schmidt de $d_x\phi$ définie comme suit :

$$|d_x\phi|^2 = \sum_{i=1}^{m} h(d_x\phi(e_i), d_x\phi(e_i))$$

où $\{e_i\}$ étant la base orthonormale sur T_xM.

Définition 2.2.2. On définit le pull-back ϕ^*h de la métrique h par :

$$\phi^*h(X, Y) = h(d\phi(X), d\phi(Y)), \ \forall X, Y \in \Gamma(TM)$$

Alors on a :

$$|d_x\phi|^2 = tr_g\phi^*h = \sum_{i=1}^{m} \phi^*h(e_i, e_i)$$

Remarque 2.2.1. L'équation (1.2.1) peut être écrite comme suit :

$$e(\phi) = \frac{1}{2}tr_g\phi^*h$$

Ce qui nous donne en coordonnées locales :

$$e(\phi) = \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial \phi^\beta}{\partial x_j} (h_{\alpha\beta} \circ \phi)$$

Définition 2.2.3. Soit $\phi : M \longmapsto N$ une application de classe C^∞ et D un domaine compact de M. On définit la fonctionnelle de l'énergie de ϕ au-dessus de D, comme étant l'intégrale de la densité de ϕ;

$$E(\phi, D) = \int_D e(\phi)\, \nu_g = \frac{1}{2} \int_D |d\phi|^2 \nu_g$$

où ν_g est la forme volume sur M donnée par :

$$\nu_g = \sqrt{detg_{ij}} dx^1 \wedge ... \wedge dx^m = \sqrt{detg_{ij}} dx$$

Définition 2.2.4. Soient (M^m, g) et (N^n, h) deux variétés riemanniennes. On dit qu'une application $\phi : M \longmapsto N$ de classe C^∞ est harmonique si elle est un point critique de la fonctionnelle de l'énergie $E(\phi, D)$ pour tout compact $D \subset M$;

$$\frac{d}{dt} E(\phi_t, D)\,|_{t=0} = 0$$

pour toute variation de classe C^∞, $\{\phi_t\}_{t\in[-\varepsilon,\varepsilon]}$, à support compact dans D définie par :

$$F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \to N, (t, x) \mapsto F(t, x) = \phi_t(x)$$

vérifiant :

$$F(0, x) = \phi(x), \forall x \in M \text{ et } F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \to N \text{est de classe } C^\infty$$

2.2.2 Première variation de l'énergie

Pour établir la première variation de l'énergie on a besoins du résultat suivant :

Lemme 2.2.1. *Soit $F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \to N$ est de classe C^∞ avec $F(t, x) = \phi_t(x)$. Alors on a :*

$$\frac{d}{dt} E(\phi_t, D) = \int_D \sum_{i=1}^m h\left(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}} F_* e_i, F_* e_i\right) \nu_g$$

où $\{e_i\}$ étant la base orthonormale sur $T_x M$

Démonstration. Soit $F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \to N, (t, x) \mapsto F(t, x) = \phi_t(x)$ de classe C^∞, on a alors :

$$F_* : T_{(t,x)}\left((-\varepsilon, \varepsilon) \times M\right) \to T_{F(t,x)}N, \ \frac{\partial}{\partial t} \mapsto F_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{(t,x)}$$

(on note par fois F_* par dF)

Donc, $\forall x \in M$ on aura :

$$F_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{(0,x)} = \phi_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{(0,x)} = \frac{d}{dt}\left[\phi_t(x)\right]_{t=0} = \upsilon(x)$$

où $\frac{d}{dt}\left[\phi_t(x)\right]_{t=0} = \upsilon(x)$ est appelé variation de champ de vecteurs le long de ϕ.

D'où, d'après la définition on a :

$$\frac{d}{dt}E(\phi_t, D) = \frac{1}{2}\int_D \sum_{i=1}^{m} \frac{d}{dt} h\left(\phi_{t,*}(e_i), \phi_{t,*}(e_i)\right)\nu_g$$

D'autre part, pour $x \in M$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} h\left(\phi_{t,*}(e_i), \phi_{t,*}(e_i)\right) &= \frac{d}{dt} h_{\phi_t(x)}\left(\phi_{t,*}(e_i(x)), \phi_{t,*}(e_i(x))\right) \\
&= \frac{d}{dt} h_{F(t,x)}\left(F_*(e_i(t,x)), F_*(e_i(t,x))\right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{(t,x)} h\left(F_*e_i, F_*e_i\right) \\
&= h\left(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}} F_*e_i, F_*e_i\right) + h\left(F_*e_i, \nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}} F_*e_i\right) \\
&= 2h\left(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}} F_*e_i, F_*e_i\right) \text{ car } \nabla^\phi \text{ est compatible avec } h.
\end{aligned}$$

d'où,

$$\frac{d}{dt} h_{F(t,x)}\left(F_*(e_i(t,x)), F_*(e_i(t,x))\right) = 2h\left(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}} F_*e_i, F_*e_i\right) \tag{2.2.2}$$

Et par conséquent,

$$\frac{d}{dt}E\left(\phi_t, D\right) = \int_D \sum_{i=1}^{m} h\left(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}} F_* e_i, F_* e_i\right)\nu_g$$

Théorème 2.2.1. (***Première variation de l'énergie***) *.Soient* (M^m, g) *et* (N^n, h) *deux variétés riemanniennes et* $\{\phi_t\}_t$ *une variation de classe* C^∞ *à support dans un domaine compact* $D \subset M$*. Alors :*

$$\frac{d}{dt}E\left(\phi_t, D\right) = -\int_D h\left(\upsilon, \sum_{i=1}^{m}\left\{\nabla^{\phi}_{e_i}\phi_*\left(e_i\right) - \phi_*\left(\nabla^{M}_{e_i}e_i\right)\right\}\right)\nu_g$$

où $\frac{d}{dt}\left[\phi_t\left(x\right)\right]_{t=0} = \upsilon\left(x\right)$ *et* $\{e_1, ..., e_m\}$ *une base orthonormée de* M*.*

Démonstration. Pour $F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \to N, (t, x) \mapsto F\left(t, x\right) = \phi_t\left(x\right)$ de classe C^∞ on a :,

$$\nabla^{\phi}_{X}\left(F_* Y\right) - \nabla^{\phi}_{Y}\left(F_* X\right) = F_*\left(\left[X, Y\right]\right), \forall X, Y \in \Gamma\left(TM\right)$$

Donc, pour $X = \dfrac{\partial}{\partial t}$ et $Y = e_i$, on obtient :

$$\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}}\left(F_* e_i\right) - \nabla^{\phi}_{e_i}\left(F_*\frac{\partial}{\partial t}\right) = F_*\left(\left[\frac{\partial}{\partial t}, e_i\right]\right), \forall X, Y \in \Gamma\left(TM\right)$$

Or, $\left[\dfrac{\partial}{\partial t}, e_i\right] = 0$, d'où, $\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}}\left(F_* e_i\right) = \nabla^{\phi}_{e_i}\left(F_*\dfrac{\partial}{\partial t}\right)$, on obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
2h\left(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}}\left(F_* e_i\right), F_* e_i\right) &= 2h\left(\nabla^{\phi}_{e_i}\left(F_*\frac{\partial}{\partial t}\right), F_* e_i\right) \\
&= 2\left\{e_i h\left(F_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), F_*\left(e_i\right)\right) - h\left(F_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \nabla^{\phi}_{e_i}F_*\left(e_i\right)\right)\right\}
\end{aligned}$$

D'autre part, on sait que le champ de vecteur $X_t \in \Gamma\left(TM\right)$ est déterminé par (voir [1]) :

$$g\left(X_t, Y\right) = h\left(F_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), F_*\left(Y\right)\right), \forall Y \in \Gamma\left(TM\right) \tag{2.2.3}$$

Ce qui nous donne :

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} e_i h\left(F_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), F_*(e_i)\right) &= \sum_{i=1}^{m} e_i g\left(X_t, e_i\right) + \sum_{i=1}^{m}\left\{g\left(\nabla^M_{e_i} X_t, e_i\right) + g\left(X_t, \nabla^M_{e_i} e_i\right)\right\} \\
&= div\left(X_t\right) + \sum_{i=1}^{m} h\left(X_t, \nabla^M_{e_i} e_i\right), (\text{ par la définition de } div\left(X_t\right)) \\
&= div\left(X_t\right) + \sum_{i=1}^{m} h\left(F_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), F_*\left(\nabla^M_{e_i} e_i\right)\right), (\text{ d'après 2.2.3 })
\end{aligned}
$$

D'autre par, on a :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt} h\left(\phi_{t,*}(e_i), \phi_{t,*}(e_i)\right) &= h\left(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}} F_* e_i, F_* e_i\right), (\text{ d'après 2.2.2 }) \\
&= \left\{e_i h\left(F_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), F_*(e_i)\right) - h\left(F_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \nabla^\phi_{e_i} F_*(e_i)\right)\right\}
\end{aligned}
$$

On aura donc,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} E\left(\phi_t, D\right) &= \int_D \left\{\sum_{i=1}^{m} h\left(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}} F_* e_i, F_* e_i\right)\right\} \nu_g \\
&= \int_D \left\{\sum_{i=1}^{m}\left\{e_i h\left(F_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), F_*(e_i)\right) - h\left(F_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \nabla^\phi_{e_i} F_*(e_i)\right)\right\}\right\} \nu_g
\end{aligned}
$$

$$
= \int_D div\left(X_t\right)\nu_g + \int_D \left\{\sum_{i=1}^{m} h\left(F_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), F_*\left(\nabla^M_{e_i} e_i\right)\right) - \sum_{i=1}^{m} h\left(F_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \nabla^\phi_{e_i} F_*(e_i)\right)\right\} \nu_g
$$

$$
= \int_D div\left(X_t\right)\nu_g - \int_D h\left(F_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \sum_{i=1}^{m}\left\{\nabla^\phi_{e_i}\phi_*(e_i) - \phi_*\left(\nabla^M_{e_i} e_i\right)\right\}\right)\nu_g
$$

Or, $\int_D div\left(X_t\right)\nu_g = 0$, (Formule de Green).

D'où,

$$
\frac{d}{dt} E\left(\phi_t, D\right) = -\int_D h\left(F_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \sum_{i=1}^{m}\left\{\nabla^\phi_{e_i}\phi_*(e_i) - \phi_*\left(\nabla^M_{e_i} e_i\right)\right\}\right)\nu_g \tag{2.2.4}
$$

et pour $t = 0$ on a :

$$F_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \upsilon\left(x\right),\ F_*\left(e_i\right)\left(0,x\right) = \phi_*\left(e_i\right) \text{ et } F_*\left(\nabla^M_{e_i}\right) = \phi_*\left(\nabla^M_{e_i}\right)\left(x\right)$$

On obtient au final,

$$\frac{d}{dt}E\left(\phi_t, D\right) = -\int_D h\left(\upsilon, \sum_{i=1}^{m}\left\{\nabla^{\phi}_{e_i}\phi_*\left(e_i\right) - \phi_*\left(\nabla^M_{e_i}e_i\right)\right\}\right)\nu_g$$

Définition 2.2.5. On définit le champ de tension de ϕ, comme étant la section $\tau \in \Gamma\left(\phi^{-1}TN\right)$, par :

$$\tau\left(\phi\right) = Trace_g\nabla d\phi = \sum_{i=1}^{m}\left\{\nabla^{\phi}_{e_i}\phi_*\left(e_i\right) - \phi_*\left(\nabla^M_{e_i}e_i\right)\right\} \tag{2.2.5}$$

Corollaire 2.2.1. *Une application $\phi \in C^{\infty}\left(M,N\right)$ est dite harmonique si et seulement si*

$$\tau\left(\phi\right) = 0 \tag{2.2.6}$$

c'est à dire ϕ est un point critique de l'énergie fonctionnelle $E\left(\phi_t, D\right)$.

Remarque 2.2.2. 1. L'équation 2.2.6 est appelée système des applications harmoniques.
2. Si $\{x^i\}$ et $\{y^{\alpha}\}$ désignent les coordonnées locales sur les variétés M et N respectivement, alors l'expression locale du champ du tension $\tau\left(\phi\right)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}\tau\left(\phi\right) &= g^{ij}\left\{\frac{\partial^2\phi^{\gamma}}{\partial x^i\partial x^j} + \frac{\partial\phi^{\alpha}\partial\phi^{\beta}}{\partial x^i\partial x^j}\bar{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta}\circ\phi - \frac{\partial\phi^{\gamma}}{\partial x^k}\Gamma^k_{ij}\right\}\frac{\partial}{\partial y}\circ\phi \\ &= \left\{\Delta^M\phi^{\gamma} + g^{ij}\bar{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta}\circ\phi\frac{\partial\phi^{\alpha}\partial\phi^{\beta}}{\partial x^i\partial x^j}\right\}\frac{\partial}{\partial y}\circ\phi\end{aligned}$$

Où, Γ^k_{ij} et $\bar{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta}$ sont les symboles de Christoffel de (M^m, g) et (N^n, h) respectivement. On constate ainsi, que l'équation 2.2.6 est localement déterminée par un système non linéaire d'équation aux dérivées partielles de second ordre, où la partie principale est l'opérateur Laplacien sur la variété M.

2.2.3 Exemples d'applications harmoniques

***Exemple* 2.2.1.** *Soient (M,g) et (N,h) deux variétés riemanniennes, pour $y \in N$ fixe, toute application constante $\phi : M \to N, \phi\left(x\right) = y$ est harmonique car la densité de la fonction ϕ*

est nulle.

Exemple 2.2.2. *On pose* $(N,h) = \left(\mathbb{R}^k, \langle .,. \rangle_{\mathbb{R}^k}\right)_{k=1,..,n}$ *et notons par* $\phi = (\phi_1, ..., \phi_n)$*, l'application* $\phi \in C^\infty\left(M, \mathbb{R}^k\right)$*. Alors :*
$\phi : (M,g) \to \left(\mathbb{R}^k, \langle .,. \rangle_{\mathbb{R}^k}\right)_{k=1,..,n}$ *est harmonique si et seulement si* $(\Delta\phi_i)_{i=1,..,k} = 0$ *c'est à dire si et seulement si chaque* ϕ_i *est harmonique,* $\forall i = 1, ..., k$.

Exemple 2.2.3. *Posons* $M = [a,b] \subset \mathbb{R}$*. Alors l'application* $\gamma : [a,b] \to N$ *est une courbe sur* N *et on a* $\tau(\phi) = 0$ *si et seulement si :*

$$\frac{d^2\gamma^\alpha}{dt^2} + \bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\zeta} \circ \gamma \frac{d\gamma^\beta}{dt}\frac{d\gamma^\zeta}{dt} = 0$$

Donc, γ *est harmonique si et seulement si* γ *est géodésique.*

2.2.4 Seconde variation de l'énergie

Soit $\phi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ une application harmonique et considérons une variation $\phi_{s,t}$ de classe C^∞ définie par :

$$F : I \times I \times M \to N, (s,t,x) \longmapsto F(s,t,x) = \phi_{s,t}(x),$$

telles que :

$$F \text{ est de classe } C^\infty \text{ et } F(0,0,x) = \phi(x) \forall, x \in M$$

Soient v et w deux champs de vecteurs de variation définis, $\forall x \in M$ par :

$$v(x) = \frac{d}{dt}\left[\phi_{(s,t)}(x)\right]_{(s,t)=(0,0)} \in T_{\phi(X)}N$$

et

$$w(x) = \frac{d}{ds}\left[\phi_{(s,t)}(x)\right]_{(s,t)=(0,0)} \in T_{\phi(X)}N$$

Soient $\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}$ et X des champs de vecteurs de $\Gamma(TM)$ on obtient ainsi les notation suivantes :

$$v = dF_{(0,0,x)}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) = F_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_{(s,t)=(0,0)}$$

et

$$w = dF_{(0,0,x)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = F_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{(s,t)=(0,0)}$$

On définit la hessienne de l'énergie E notée $H(E)(v,w)$ au point critique ϕ par :

$$H(E)_\phi(v,w) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\left[E\left(\phi_{s,t}\right)\right]_{(s,t)=(0,0)}$$

Théorème 2.2.2. (***Seconde variation de l'énergie***) *.Soit$\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application harmonique. Alors la hessienne de l'énergie E au point ϕ est donnée par :*

$$H(E)_\phi(v,w) = \int_D h\left(J_\phi(v), w\right)\nu_g,\ \forall v, w \in \Gamma\left(\phi^{-1}TN\right)$$

où J_ϕ étant l'opérateur différentiel elliptique auto-adjoint du deuxième ordre défini par :

$$J_\phi = -\sum_{i=1}^m \left\{\nabla^\phi_{e_i}\nabla^\phi_{e_i} - \nabla^\phi_{\nabla^M_{e_i}e_i}\right\} - \sum_{i=1}^m R^N\left(., \phi_* e_i\right)\phi_* e_i,\ \forall v \in \Gamma\left(\phi^{-1}TN\right)$$

et, D est un domaine compact de M, R^N est le tenseur de courbure sur N et $\{e_1, ..., e_m\}$ une base orthonormale sur T_xM

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}
E\left(\phi_{s,t}\right) &= \frac{1}{2}\int_D \sum_{i=1}^m h\left(\phi_{(s,t),*}\left(e_i\right), \phi_{(s,t),*}\left(e_i\right) d\nu_g\right. \\
&= \frac{1}{2}\int_D \sum_{i=1}^m h\left(F_*\left(e_i\right), F_*\left(e_i\right) d\nu_g\right.
\end{aligned}$$

On refait les mêmes calculs vus dans la section 2.2.2, on obtient la même équation que (1.2.4) :

$$\frac{\partial}{\partial t}E\left(\phi_{s,t}\right) = -\int_D h\left(F_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \sum_{i=1}^m \left\{\nabla^\phi_{e_i}F_*\left(e_i\right) - F*\left(\nabla^M_{e_i}e_i\right)\right\}\right)\nu_g$$

Par la différentiabilité par apport à s, on trouve :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}E\left(\phi_{s,t}\right) &= -\int_D \frac{\partial}{\partial s}h\left(F_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \sum_{i=1}^m \left\{\nabla^\phi_{e_i}F_*\left(e_i\right) - F*\left(\nabla^M_{e_i}e_i\right)\right\}\right)\nu_g \\
&= -\int_D h\left(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial s}}F_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \sum_{i=1}^m \left\{\nabla^\phi_{e_i}F_*\left(e_i\right) - F*\left(\nabla^M_{e_i}e_i\right)\right\}\right)\nu_g \\
&- \int_D h\left(F_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \sum_{i=1}^m \nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial s}}\left\{\nabla^\phi_{e_i}F_*\left(e_i\right) - F*\left(\nabla^M_{e_i}e_i\right)\right\}\right)\nu_g
\end{aligned}$$

Or,

$$\int_D h\left(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial s}}F_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \sum_{i=1}^m \left\{\nabla^\phi_{e_i}F_*\left(e_i\right) - F*\left(\nabla^M_{e_i}e_i\right)\right\}\right)\nu_g = 0$$

puisque l'application ϕ est harmonique, donc au point $(s,t)=(0,0)$ on aura :

$$\sum_{i=1}^{m}\left\{\nabla^{\phi}_{e_i}F_*\left(e_i\right)-F*\left(\nabla^{M}_{e_i}e_i\right)\right\}=\tau\left(\phi\right)=0$$

D'autre part, on a :

$$R^N\left(F_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right),F_*e_i\right)F_*e_i=\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}}\nabla^{\phi}_{e_i}F_*e_i-\nabla^{\phi}_{e_i}\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}}F_*e_i-\nabla^{\phi}_{\left[\frac{\partial}{\partial s},e_i\right]}F_*e_i$$

ce qui entraîne que

$$\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}}\nabla^{\phi}_{e_i}F_*e_i=\nabla^{\phi}_{e_i}\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}}F_*e_i+\nabla^{\phi}_{\left[\frac{\partial}{\partial s},e_i\right]}F_*e_i+R^N\left(F_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right),F_*e_i\right)F_*e_i$$

En appliquant la proposition 2.1.2 à $\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}}F_*e_i$, on trouve :

$$\begin{aligned}\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}}\nabla^{\phi}_{e_i}F_*e_i &= \nabla^{\phi}_{e_i}\left\{\nabla^{\phi}_{e_i}F_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)+F_*\left[\frac{\partial}{\partial s},e_i\right]\right\}+\nabla^{\phi}_{\left[\frac{\partial}{\partial s},e_i\right]}F_*e_i\\ &+ R^N\left(F_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right),F_*e_i\right)F_*e_i\end{aligned}$$

et comme $\left[\frac{\partial}{\partial s},e_i\right]=0$, on obtient alors :

$$\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}}\nabla^{\phi}_{e_i}F_*e_i=\nabla^{\phi}_{e_i}\nabla^{\phi}_{e_i}F_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)+R^N\left(F_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right),F_*e_i\right)F_*e_i$$

Or,

$$\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}}\nabla^{\phi}_{e_i}F_*e_i=\nabla^{\phi}_{\nabla^{M}_{e_i}e_i}F_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)+F_*\left[\frac{\partial}{\partial s},\nabla_{e_i}e_i\right]=\nabla^{\phi}_{\nabla^{M}_{e_i}e_i}F_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)$$

Par conséquent, pour $(s,t)=(0,0)$ on a $F_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)=v$, $F_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)=w$ et $F_*e_i=\phi_*e_i$, on obtient finalement,

$$\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}E\left(\phi_{s,t}\right)=-\int_D h\left(\sum_{i=1}^{m}\left\{\nabla^{\phi}_{e_i}\nabla^{\phi}_{e_i}-\nabla^{\phi}_{\nabla^{M}_{e_i}e_i}\right\}v-\sum_{i=1}^{m}R^N\left(v,\phi_*e_i\right)\phi_*e_i,w\right)\nu_g$$

Définition 2.2.6. L'opérateur $J_\phi=\overline{\Delta}_\phi-\Re_\phi$ est appelé opérateur de Jacobi, tels que $\overline{\Delta}_\phi$ et $\Re_\phi$ sont définis respectivement par :

$$\overline{\Delta}_\phi v = -\sum_{i=1}^{m}\left\{\nabla^\phi_{e_i}\nabla^\phi_{e_i} - \nabla^\phi_{\nabla^M_{e_i}e_i}\right\} v, \text{ pour tout } v \in \Gamma\left(\phi^{-1}TN\right)$$

et

$$\Re_\phi v = \sum_{i=1}^{m} R^N\left(v, \phi_* e_i\right)\phi_* e_i, \text{ pour tout } v \in \Gamma\left(\phi^{-1}TN\right)$$

Remarque 2.2.3. ([27]) L'opérateur différentiel $\overline{\Delta}_\phi$ est appelé Laplacien brut.

2.3 Applications biharmoniques

Définition 2.3.1. Soient (M^m, g) et (N^n, h) deux variétés riemanniennes et D un domaine compact de M. On définit la fonctionnelle bi-énergie d'une application de classe C^∞ $\phi : M \longrightarrow N$ par :

$$E_2\left(\phi, D\right) = \frac{1}{2}\int_D \left|\tau\left(\phi\right)\right|^2 \nu_g$$

Définition 2.3.2. Une application $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ de classe C^∞ est dite biharmonique si elle est point critique de la fonctionnelle bi-énergie $E_2\left(\phi, D\right)$ pour tout compact D de M ;

$$\frac{d}{dt}E_2\left(\phi_t, D\right) = 0$$

pour toute variation $\{\phi_t\}$ de ϕ à support dans D.

2.3.1 Première variation de la bi-énergie

Théorème 2.3.1. $\left([15], [27]\right)$ *.Soient$\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞ et $\{\phi_t\}_{t\in I}$. Une variation de classe C^∞ à support dans un compact D de M. Alors*

$$\frac{d}{dt}\left[E_2\left(\phi_t, D\right)\right]_{t=0} = \int_D h\left(v, \tau_2\left(\phi\right)\right) d\nu_g$$

Où, v désigne le champ de vecteur de la variation $\{\phi_t\}_{t\in I}$ et $\tau_2\left(\phi\right) \in \Gamma\left(\phi^{-1}TN\right)$ est appelé champ bi-tension de ϕ défini par :

$$\tau_2\left(\phi\right) = J_\phi\left(\tau\left(\phi\right)\right) = -\sum_{i=1}^{m}\left\{\nabla^\phi_{e_i}\nabla^\phi_{e_i} - \nabla^\phi_{\nabla^M_{e_i}e_i}\right\}\tau\left(\phi\right) - \sum_{i=1}^{m} R^N\left(\tau\left(\phi\right), \phi_* e_i\right)\phi_* e_i$$

Corollaire 2.3.1. *Une application $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ de classe C^∞ est dite biharmonique si et seulement si*

$$\tau_2\left(\phi\right) = 0 \tag{2.3.1}$$

Remarque 2.3.1. 1. L'équation (2.3.1) est appelée équation du champ bi-tension ou équation biharmonique.

2. ϕ est dite biharmonique si et seulement si $\tau(\phi) \in ker J_\phi$ où $J_\phi : \Gamma(\phi^{-1}TN) \longrightarrow \Gamma(\phi^{-1}TN)$

3. Toute application harmonique est biharmonique.

Définition 2.3.3. L'application $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ est dite une application harmonique propre si elle est non harmonique biharmonique.

2.3.2 Exemples d'applications biharmoniques

***Exemple* 2.3.1.** *Soit l'application de classe C^∞, $\phi : (M^m, g) \longrightarrow \mathbb{R}^n$, tel que pour tout $x \in M$, $\phi(x) = (\phi^1, ..., \phi^n)$, donc :*
le champ de tension $\tau(\phi) = -\Delta\phi = -(\Delta\phi^1, ..., \Delta\phi^n)$ et $E_2 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_D |\Delta\phi|^2 d\nu_g$ avec D un compact de M.
Alors, l'équation biharmonique est donnée par :

$$\tau_2(\phi) = \Delta^2\phi = (\Delta^2\phi^1, ..., \Delta^2\phi^n) = 0$$

D'où, l'application est biharmonique si et seulement si les fonctions ϕ^i sont biharmoniques.

***Exemple* 2.3.2.** *Soient $\gamma : I \longrightarrow (N, h)$ une géodésique et $t : I \longrightarrow J, t \longmapsto t(s) = t$ un changement de paramètre, où I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Alors l'application $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ t : J \longrightarrow N$ est biharmonique si et seulement si $\dfrac{d^4t}{ds^4} = 0$ et $\dfrac{d^2t}{ds^2} \neq 0$*

***Exemple* 2.3.3.** *Soit $\phi : (M^m, g) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une immersion riemannienne, alors en utilisant l'équation $\Delta\phi = mH$, on a :*
ϕ est biharmonique si et seulement si $\Delta^2\phi = m\Delta H = 0$

Nous avons vu que toute application harmonique est nécessairement biharmonique, par ailleurs, beaucoup de résultats ont été prouvés donnant la condition nécessaire et suffisante pour qu'une application biharmonique soit harmonique, on cite entre autres, le cas d'une immersion riemannienne et celui d'une courbe biharmonique sur une surface, voir respectivement [20] et [5]. Cependant, le premier résultat répondant au problème posé, fut démontré en 1986 par G. Y. Jiang ;

Théorème 2.3.2. (***G.Y. Jiang***, [15]) .*Soitϕ : $(M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞. Si M est compacte, orientable et la courbure sectionnelle $Riem^N \leq 0$; alors ϕ est biharmonique si et seulement si elle est harmonique.*

Chapitre 3

Structure Riemannienne des Variétés Produits tordus

On s'intéresse dans ce chapitre à l'étude de la structure riemannienne des variétés produits et celle des variétés produits tordus introduite par B. O N'eill voir [19]*. Après avoir défini la métrique produit, dite diagonale, et la métrique produit tordu de deux variétés riemannienne, nous allons exprimer la connexion linéaire associée aux variétés produits et variétés produits tordus en fonction de la connexion de Levi-Civita. Nous démontrerons par la suite, les principaux résultats donnant la formule des invariants riemanniens dans le cas produit riemannien et celui du produit tordu riemannien.*

3.1 Structure riemannienne des variétés produits

3.1.1 Notion de relèvements, définitions et notations

Définition 3.1.1. Soient M et N deux variétés différentiables de classe C^∞ munies d'un atlas $(u_i, \varphi_i)_{i\in I}$ et $(v_j, \psi_j)_{j\in J}$, la structure de variété produit sur $M\times N$ est donnée par l'atlas $(u_i \times v_j, \varphi_i \times \psi_j)_{(i,j)\in(I\times J)}$

Définition 3.1.2. Soient M et N deux variétés différentiables de classe C^∞, on définit les projections π et σ de classe C^∞, comme suit :

$$\pi : M \times N \longrightarrow M, (x, y) \longmapsto \pi(x, y) = x$$

et

$$\sigma : M \times N \longrightarrow N, (x, y) \longmapsto \sigma (x, y) = y$$

Remarque 3.1.1. 1. les projections $\pi : M \times N \longrightarrow M$ et $\sigma : M \times N \longrightarrow N$ sont des submersions.
2. les restrictions $\pi \big|_{M\times\{y\}}$ et $\sigma \big|_{\{x\}\times N}$ sont des difféomorphismes de $M \times \{y\}$ sur M et de $\{y\} \times N$ sur N respectivement. En particulier, leurs applications linéaires tangentes nous donnent un isomorphisme.
3. On a $dimM \times N = dimM + dimN$ et pour tout $(x, y) \in M \times N$, on a $T_{(x,y)}M \times N = T_xM \oplus T_yM$

Définition 3.1.3. 1. Soient M et N deux variétés différentiables de classe C^∞ de dimension m et n respectivement. On appelle relevé de $f \in C^\infty (M)$ à $M \times N$, la fonction $\widetilde{f} = f \circ \pi$ où π est la projection canonique de $M \times N$ sur M.

Remarque 3.1.2. De même on peut définir le relevé de $f \in C^\infty (N)$ par $\widehat{f} = f \circ \sigma$ où σ est la projection canonique de $M \times N$ sur N.

Si $f_1, f_2 \in C^\infty (M)$ et $g_1, g_2 \in C^\infty (N)$, on a :
1.$\widetilde{(f_1 + f_2)} = \widetilde{f}_1 + \widetilde{f}_2$, $\widetilde{(\lambda f_1)} = \lambda\widetilde{f}_1$ et $\widetilde{(f_1 f_2)} = \widetilde{f}_1\widetilde{f}_2$

2. $\widehat{g_1 + g_2} = \widehat{g}_1 + \widehat{g}_2, \widehat{\lambda g_1} = \lambda\widehat{g}_1$ et $\widehat{g_1 g_2} = \widehat{g}_1\widehat{g}_2$

Définition 3.1.4. Soit $v \in T_xM$ un vecteur tangent, alors le relevé de v au point (x, y) et par définition l'unique vecteur tangent $\widetilde{v} \in T_{(x,y)}M \times N$ telles que :

$$d_{(x,y)}\pi (\widetilde{v}) = v \text{ et } d_{(x,y)}\sigma (\widetilde{v}) = 0 \text{ où } (x, y) \in M \times N$$

c'est à dire,

$$\widetilde{v} = (v, 0) \in T_{(x,y)}M \times N \text{ avec } v \in T_xM.$$

Définition 3.1.5. Soit $X \in \Gamma (M)$ un champ de vecteurs, alors le relevé de X à $M \times N$ est le champ de vecteurs $\widetilde{X}$ tel que :

$$\widetilde{X}_{(x,y)} = \widetilde{X_x} = (X_x, 0)$$

c'est à dire,

$$\widetilde{X} = (X, 0) \in \Gamma (M \times N) \text{ où } X \in \Gamma (M) \left(d\pi \circ \widetilde{X} = X \circ \pi, d\sigma \circ \widetilde{X} = 0\right)$$

Remarque 3.1.3. Les vecteurs tangents et les champs de vecteurs de N ayant des relevés à $M \times N$, définis d'une manière analogue en utilisant la projection canonique σ sur N.

Remarque 3.1.4. 1. On note par $L(M)$ ($respectivement\ par L(N)$) l'ensemble des relevés de champs de vecteurs de M ($respectivement\ de\ N$).
2. Nous avons $L(M)$ et $L(N)$ des sous-espaces vectoriels de $\Gamma(M \times N)$

Proposition 3.1.1. ([6]) *Soient* $X_1, X_2 \in \Gamma(M)$ *et* $Y_1, Y_2 \in \Gamma(N)$, $f \in C^\infty(M)$ *et* $g \in C^\infty(N)$. *On a alors :*

1. $\widetilde{X_1}\left(\widetilde{f}\right) = \left(\widetilde{X_1(f)}\right)$, $\widetilde{X_1}(\widehat{g}) = 0$ *et* $\widetilde{(fX_1)} = \widetilde{f}\widetilde{X_1}$

2. $\widehat{Y_1}(\widehat{g}) = \left(\widehat{Y_1(g)}\right)$, $\widehat{Y_1}\left(\widetilde{f}\right) = 0$ *et* $\widehat{(gY_1)} = \widehat{g}\widehat{Y_1}$

3. $\left[\widetilde{X_1}, \widetilde{X_2}\right] = \widetilde{[X_1, X_2]}$, $\left[\widehat{Y_1}, \widehat{Y_2}\right] = \widehat{[Y_1, Y_2]}$ *et* $\left[\widetilde{X_1}, \widehat{Y_1}\right] = 0$

Proposition 3.1.2. ([6]) *Soient* T_1, T_2 *deux tenseurs de type* $(0, r)$ *ou* $(1, r)$ *tels que :*

$$T_1\left(\widetilde{X_1}, ..., \widetilde{X_k}\right) = T_2\left(\widetilde{X_1}, ..., \widetilde{X_k}\right), \forall X_1, ..., X_k \in \Gamma(M)$$

et

$$T_1\left(\widehat{Y_1}, ..., \widehat{Y_k}\right) = T_2\left(\widehat{Y_1}, ..., \widehat{Y_k}\right), \forall Y_1, ..., Y_k \in \Gamma(N)$$

Alors, $T_1 = T_2$

Proposition 3.1.3. ([6]) *Soient* ∇^M *et* ∇^N *les connexions linéaires définies respectivement sur* M *et* N, *alors il existe une unique connexion* ∇ *sur* $M \times N$, *dite connexion produit, telles que :*

1. $\nabla_{(X_1, Y_1)}(X_2, Y_2) = \left(\nabla^M_{X_1} X_2, 0\right) + \left(0, \nabla^N_{Y_1} Y_2\right)$

2. $\nabla_{\widetilde{X_1}} \widetilde{X_2} = \left(\widetilde{\nabla^M_{X_1} X_2}\right) = \left(\nabla^M_{X_1} X_2, 0\right)$ *et* $\nabla_{\widehat{Y_1}} \widehat{Y_2} = \left(\widehat{\nabla^N_{Y_1} Y_2}\right) = \left(0, \nabla^N_{Y_1} Y_2\right)$

3. $\nabla_{\widetilde{X_1}} \widehat{Y_1} = \nabla_{\widehat{Y_1}} \widetilde{X_1} = 0$

Pour tous $X_1, X_2 \in \Gamma(M)$ *et* $Y_1, Y_2 \in \Gamma(N)$

Proposition 3.1.4. *Soient* T^M, T^N $\left(\text{respectivement } R^M, R^N\right)$ *les tenseurs de torsion sur* M *et* N *(respectivement les tenseurs de courbure sur* M *et* N*). Alors le tenseur de torsion* T *et le tenseur de courbure* R *sur* $M \times N$ *sont donnés par :*
1. $T = \widetilde{T^M} + \widehat{T^N} = \left(T^M, 0\right) + \left(0, T^N\right) = \left(T^M, T^N\right)$
2. $R = \widetilde{R^M} + \widehat{R^N} = \left(R^M, 0\right) + \left(0, R^N\right) = \left(R^M, R^N\right)$

Démonstration. $X_1, X_2 \in \Gamma(M)$ et $Y_1, Y_2 \in \Gamma(N)$ on a :

$$\begin{aligned} T\left(\widetilde{X_1}, \widetilde{X_2}\right) &= \nabla_{\widetilde{X_1}} \widetilde{X_2} - \nabla_{\widetilde{X_2}} \widetilde{X_1} - \left[\widetilde{X_1}, \widetilde{X_2}\right] \\ &= \left(\nabla^M_{X_1} X_2, 0\right) - \left(\nabla^M_{X_2} X_1, 0\right) - \left(\left[X_1, X_2\right], 0\right) \\ &= \left(\nabla^M_{X_1} X_2 - \nabla^M_{X_2} X_1 - \left[X_1, X_2\right], 0\right) \\ &= \left(T^M\left(X_1, X_2\right), 0\right) = \left(T^M, T^N\right)\left(\widetilde{X_1}, \widetilde{X_2}\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} T\left(\widehat{Y_1}, \widehat{Y_2}\right) &= \nabla_{\widehat{Y_1}} \widehat{Y_2} - \nabla_{\widehat{Y_2}} \widehat{Y_1} - \left[\widehat{Y_1}, \widehat{Y_2}\right] \\ &= \left(0, \nabla^N_{Y_1} Y_2\right) - \left(0, \nabla^N_{Y_2} Y_1\right) - \left(0, \left[Y_1, Y_2\right]\right) \\ &= \left(0, T^N\left(Y_1, Y_2\right)\right) = \left(T^M, T^N\right)\left(\widehat{Y_1}, \widehat{Y_2}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, d'après la proposition (2.1.12), on en déduit que :

$$T = \left(T^M, 0\right) + \left(0, T^N\right) = \left(T^M, T^N\right)$$

D'une manière analogue, on prouve que $R = \widetilde{R^M} + \widehat{R^N}$

Corollaire 3.1.1. *La variété* $M \times N$ *est sans torsion si et seulement si les variétés* M *et* N *le sont.*

3.1.2 Métrique produit et invariants riemanniens

Définition 3.1.6. Soient (M^m, g) et (N^n, h) deux variétés riemanniennes de dimension m et n respectivement. On appelle métrique diagonale produit, la métrique riemannienne produit sur $M \times N$ définie par :

$\forall (x, y) \in M \times N, \forall (v, w) \in T_{(x,y)} (M \times N)$, on a :

$$G_{(x,y)} (v, w) = g_x \left(d_{(x,y)}\pi (v), d_{(x,y)}\pi (w)\right) + h_y \left(d_{(x,y)}\sigma (w), d_{(x,y)}\sigma (w)\right)$$

ou par abus d'écriture,

$$G = \pi^* g + \sigma^* h,$$

où $G\left(\widetilde{X_1}, \widetilde{X_2}\right) = g(X_1, X_2), G\left(\widehat{Y_1}, \widehat{Y_2}\right) = h(Y_1, Y_2)$ et $G\left(\widetilde{X_1}, \widehat{Y_2}\right) = 0$,
$\forall X, Y \in \Gamma(M \times N)$

Définition 3.1.7. La variété $M \times N$ munie de la métrique riemannienne produit est appelée variété riemannienne produit.

Proposition 3.1.5. *Soient (M^m, g) et (N^n, h) deux variétés riemanniennes de connexion de Levi-Cevita respectives $\hat{M}nabla$ et ${}^N\nabla$, alors $\forall \widetilde{X_1}, \widetilde{Y_1} \in L(M)$ et $\forall \widehat{X_2}, \widehat{Y_2} \in L(N)$, on a :*

1. $\nabla_{\widetilde{X_1}} \widetilde{Y_1}$ *est le relevé de* ${}^M\nabla_{X_1} Y_1 \Longleftrightarrow \nabla_{\widetilde{X_1}} \widetilde{Y_1} = \widetilde{{}^M\nabla_{X_1} Y_1} = \left({}^M\nabla_{X_1} Y_1, 0\right)$

2. $\nabla_{\widehat{X_2}} \widehat{Y_2}$ *est le relevé de* ${}^N\nabla_{X_2} Y_2 \Longleftrightarrow \nabla_{\widehat{X_2}} \widehat{Y_2} = \widehat{{}^N\nabla_{X_2} Y_2} = \left(0, {}^N\nabla_{X_2} Y_2\right)$

3. $\nabla_{\widetilde{X_1}} \widehat{X_2} = \nabla_{\widehat{X_2}} \widetilde{X_1} = 0$

Démonstration. 1. D'après la formule de Koszul, $\forall \widetilde{X_1}, \widetilde{Y_1}, \widetilde{Z_1} \in L(M)$ on a :

$$\begin{aligned}
2G\left(\nabla_{\widetilde{X_1}}\widetilde{Y_1}, \widetilde{Z_1}\right) &= \widetilde{X_1}G\left(\widetilde{Y_1}, \widetilde{Z_1}\right) + \widetilde{Y_1}G\left(\widetilde{Z_1}, \widetilde{X_1}\right) - \widetilde{Z_1}G\left(\widetilde{X_1}, \widetilde{Y_1}\right) \\
&+ G\left(\widetilde{Z_1}, \left[\widetilde{X_1}, \widetilde{Y_1}\right]\right) + G\left(\widetilde{Y_1}, \left[\widetilde{Z_1}, \widetilde{X_1}\right]\right) - G\left(\widetilde{X_1}, \left[\widetilde{Y_1}, \widetilde{Z_1}\right]\right) \\
&= X_1 g(Y_1, Z_1) + Y_1 g(Z_1, X_1) - Z_1 g(X_1, Y_1) \\
&+ g(Z_1, [X_1, Y_1]) + g(Y_1, [Z_1, X_1]) - g(X_1, [Y_1, Z_1]) \\
&= 2g\left(\nabla^M_{X_1} Y_1, Z_1\right)
\end{aligned}$$

Par conséquent on obtient :

$$2G\left(\nabla_{\widetilde{X_1}}\widetilde{Y_1}, \widetilde{Z_1}\right) = 2G\left(\widetilde{{}^M\nabla_{X_1}Y_1}, \widetilde{Z_1}\right) = 2G\left(\left({}^M\nabla_{X_1}Y_1, 0\right), \widetilde{Z_1}\right)$$

D'où,

$$\nabla_{\widetilde{X_1}}\widetilde{Y_1} = \widetilde{{}^M\nabla_{X_1}Y_1} = \left({}^M\nabla_{X_1}Y_1, 0\right)$$

2. Pour tous $\widehat{X_2}, \widehat{Y_2}, \widehat{Z_2} \in L(N)$, la formule de Koszul nous donne :

$$\begin{aligned}
2G\left(\nabla_{\widehat{X_2}}\widehat{Y_2}, \widehat{Z_2}\right) &= \widehat{X_2}G\left(\widehat{Y_2}, \widehat{Z_2}\right) + \widehat{Y_2}G\left(\widehat{Z_2}, \widehat{X_2}\right) - \widehat{Z_2}G\left(\widehat{X_2}, \widehat{Y_2}\right) \\
&+ G\left(\widehat{Z_2}, \left[\widehat{X_2}, \widehat{Y_2}\right]\right) + G\left(\widehat{Y_2}, \left[\widehat{Z_2}, \widehat{X_2}\right]\right) - G\left(\widehat{X_2}, \left[\widehat{Y_2}, \widehat{Z_2}\right]\right) \\
&= X_2 h(Y_2, Z_2) + Y_2 h(Z_2, X_2) - Z_2 h(X_2, Y_2) \\
&+ h(Z_2, [X_2, Y_2]) + h(Y_2, [Z_2, X_2]) - h(X_2, [Y_2, Z_2]) \\
&= 2h\left(\nabla^N_{X_2} Y_2, Z_2\right)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$2G\left(\nabla_{\widehat{X_2}}\widehat{Y_2}, \widehat{Z_2}\right) = 2G\left(\widehat{\nabla^N_{X_2}Y_2}, \widehat{Z_2}\right) = 2G\left(\left(0, \nabla^N_{X_2}Y_2\right), \widehat{Z_2}\right)$$

D'où,

$$\nabla_{\widehat{X_2}} \widehat{Y_2} = {}^N\widehat{\nabla_{X_2} Y_2} = \left(0, {}^N \nabla_{X_2} Y_2\right)$$

3. On a pour tous $\widetilde{X_1}, \widetilde{Y_1}, \widetilde{Z_1} \in L(M)$ et $\widehat{X_2}, \widehat{Y_2}, \widehat{Z_2} \in L(N)$:

$$G\left(\nabla_{\widetilde{X_1}} \widehat{X_2}, \widetilde{Z_1}\right) = G\left(\nabla_{\widehat{X_2}} \widetilde{X_1}, \widehat{Z_2}\right) = 0$$

D'où,

$$\nabla_{\widetilde{X_1}} \widehat{X_2} = \nabla_{\widehat{X_2}} \widetilde{X_1} = 0$$

Proposition 3.1.6. *Soient $\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{Z} \in L(M)$ et $\widehat{U}, \widehat{V}, \widehat{W} \in L(N)$, on a alors :*

1. $R\left(\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{Z}\right)$ est le relevé de $R^M(X, Y, Z)$

2. $R\left(\widehat{U}, \widehat{V}, \widehat{W}\right)$ est le relevé de $R^N(U, V, W)$

3. R est nul si l'un des champs de vecteurs est dans $L(M)$ et les autres sont dans $L(N)$ et vice versa.

Démonstration. 1. On a par définition :

$$\begin{aligned} R\left(\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{Z}\right) &= \nabla_{\widetilde{X}} \nabla_{\widetilde{Y}} \widetilde{Z} - \nabla_{\widetilde{Y}} \nabla_{\widetilde{X}} \widetilde{Z} - \nabla_{\left[\widetilde{X}, \widetilde{Y}\right]} \widetilde{Z} \\ &= \widetilde{\nabla_X^M \nabla_Y^M} Z - \widetilde{\nabla_Y^M \nabla_X^M} Z - \widetilde{\nabla_{[X,Y]}^M} Z \\ &= \left(\nabla_X^M \nabla_Y^M Z - \nabla_Y^M \nabla_X^M - \nabla_{[X,Y]}^M Z, 0\right) \\ &= R^M \widetilde{(X, Y, Z)} = \left(R^M(X, Y, Z), 0\right) \end{aligned}$$

2. De même on a :

$$\begin{aligned} R\left(\widehat{U},\widehat{V},\widehat{W}\right) &= \nabla_{\widehat{X}}\nabla_{\widehat{Y}}\widehat{Z}-\nabla_{\widehat{Y}}\nabla_{\widehat{X}}\widehat{Z}-\nabla_{\left[\widehat{X},\widehat{Y}\right]}\widehat{Z} \\ &= \widehat{\nabla^N_X\nabla^M_Y}Z-\widehat{\nabla^N_Y\nabla^M_X}Z-\widehat{\nabla^N_{[X,Y]}}Z \\ &= \left(0,\nabla^N_X\nabla^N_Y Z-\nabla^N_Y\nabla^N_X-\nabla^N_{[X,Y]}Z\right) \\ &= R^N\widehat{(X,Y},Z)=\left(0,R^N(X,Y,Z)\right) \end{aligned}$$

3. On a :

$$R\left(\widehat{U},\widetilde{Y},\widetilde{Z}\right)=\nabla_{\widehat{U}}\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{Z}-\nabla_{\widetilde{Y}}\nabla_{\widehat{U}}\widetilde{Z}-\nabla_{\left[\widehat{U},\widetilde{Y}\right]}\widetilde{Z}=0$$

D'une manière analogue, on trouve le même résultat en échangeant la position des champs de vecteurs.

Proposition 3.1.7. *Soient $\widetilde{X},\widetilde{Y}\in L(M)$ et $\widehat{U},\widehat{V}\in L(N)$, on a alors :*

1. $Ricc\left(\widetilde{X},\widetilde{Y}\right)$ est le relevé de $\widetilde{Ricc_M(X},Y)$

2. $Ricc\left(\widehat{U},\widehat{V}\right)$ est le relevé de $\widehat{Ricc_N(U},V)$

3. $Ricc\left(\widehat{X},\widehat{U}\right)=0$

Démonstration. Soient $\{\xi_1,...,\xi_m\},\{\xi_{m+1},...,\xi_{m+n}\}$ la base orthonormales des champs de vecteurs relativement à la carte (U_1,φ) de M et (U_2,ψ) celle de N respectivement. Donc pour tout point $p\in U_1\times U_2$, on a :

$$Ricc\left(\widetilde{X},\widetilde{Y}\right)_p = \sum_{i=1}^{m}G\left(R\left(\widetilde{\xi_i},\widetilde{X}\right)\widetilde{Y},\widetilde{\xi_i}\right)+\sum_{i=1+m}^{m+n}G\left(R\left(\widehat{\xi_i},\widetilde{X}\right)\widetilde{Y},\widehat{\xi_i}\right)$$

Or,

$$\sum_{i=1+m}^{m+n}G\left(R\left(\widehat{\xi_i},\widetilde{X}\right)\widetilde{Y},\widehat{\xi_i}\right)=0$$

D'où,

$$Ricc\left(\widetilde{X},\widetilde{Y}\right)_p = \sum_{i=1}^{m} g\left(R_M\left(\xi_i, X\right)Y, \xi_i\right) = Ric_M\widetilde{\left(X, Y\right)}_p$$

D'une manière similaire on peut établir les autres propriétés.

3.2 Structure riemannienne des variétés produits tordus

3.2.1 Métrique produit tordu

Définition 3.2.1. Soient (M^m, g) et (N^n, h) deux variétés riemanniennes de dimension m et n respectivement et soit $f \in C^\infty(M)$ une fonction strictement positive. Le produit tordu $M \times_f N$ est le produit $M \times N$ muni de métrique G_f définie par :

$$G_f = \pi^* g + (f \circ \pi)^2 \sigma^* h$$

Plus explicitement, $\forall (x, y) \in M \times_f N$ et $\forall (v, w) \in T(M \times_f N)$, on a :

$$G_f(v, w) = g\left(d\pi(v), d\pi(w)\right) + (f \circ \pi)^2 h\left(d\sigma(v), d\sigma(w)\right)$$

où,

$\pi : (x, y) \in M \times_f N \rightarrow x \in M$ et $\sigma : (x, y) \in M \times_f N \rightarrow y \in N$ sont les projections canoniques.

Remarque 3.2.1. 1. La variété M est appelée la base de $M \times_f N$ et N est appelé le fibre.
2. Si $f = 1$, la métrique produit tordu n'est que le produit des métriques g et h.

3.2.2 Propriétés et notations

L'ensemble $M \times \{y\} = \sigma^{-1}(y)$, appelé feuilles, et l'ensemble $\{x\} \times N = \pi^{-1}(x)$, appelé fibres, sont des sous variétés de la variété produit tordu $M \times_f N$. Les vecteurs tangents dans $T_{(x,y)}(M \times \{y\})$ et celui dans $T_{(x,y)}(\{x\} \times N)$ sont appelés respectivement vecteur horizontal

et vertical. Si $v \in T_xM, x \in M$ te $y \in N$, alors le relevé $\widetilde{v}$ au point (x, y) est l'unique vecteur tangent sur $T_{(x,y)\left(M \times_f N\right)}$ tel que $d\pi\left(\widetilde{v}\right) = v$, voir [6] et [19].
Notons par, $L(M)$ et $L(N)$, l'ensemble des relevés de $M \times_f N$ des champs de vecteurs sur M et N respectivement. Donc , $\forall \widetilde{X}, \widetilde{Y} \in L(M)$ et $\forall \widehat{U}, \widehat{V} \in L(N)$ on a :

$$\left[\widetilde{X}, \widetilde{Y}\right] = \widetilde{[X, Y]} \in L(M),\ \left[\widehat{U}, \widehat{V}\right] = \widehat{[X, Y]} \in L(N),\ \left[\widetilde{X}, \widehat{U}\right] = 0$$

Proposition 3.2.1. *Soit $\zeta \in C^{\infty}(M)$, alors le gradient du relevé $\zeta \circ \pi$ de ζ à $M \times_f N$ est le relevé du gradient de ζ à $M \times_f N$ sur M.*

Démonstration. Soit v un vecteur tangent vertical $\left(v \in T_{(x,y)}(M \times \{y\})\right)$, alors $d\pi(v) = 0$, on a donc :

$$G_f\left(grad\left(\zeta \circ \pi\right), v\right) = v\left(\zeta \circ \pi\right) = d\left(\zeta \circ \pi\right)(v) = 0$$

cela veut dire que $grad\left(\zeta \circ \pi\right)$ est un vecteur tangent horizontal.
Soit maintenant w un vecteur tangent horizontal $\left(w \in T_{(x,y)}(\{x\} \times N)\right)$, on a alors :

$$G_f\left(grad\left(\zeta \circ \pi\right), w\right) = g\left(d\pi\left(grad\left(\zeta \circ \pi\right)\right), d\pi(w)\right) + \left(f \circ \pi\right)^2 h\left(d\sigma\left(grad\left(\zeta \circ \pi\right)\right), d\sigma(w)\right)$$

Or, $d\sigma(w) = 0$, donc :

$$\begin{aligned} G_f\left(grad\left(\zeta \circ \pi\right), v\right) &= g\left(d\pi\left(grad\left(\zeta \circ \pi\right)\right), d\pi(w)\right) = w\left(\zeta \circ \pi\right) \\ &= d\pi(w)(\zeta) = g\left(grad(\zeta), d\pi(w)\right) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$d\pi\left(grad\left(\zeta \circ \pi\right)\right) = grad\zeta$$

3.2.3 Invariants riemanniens

Dans tout ce qui suit, on notera de la même manière les champs de vecteurs et leurs relevés de M et ceux de N dans $L(M)$ et $L(N)$.

Proposition 3.2.2. *Soient (M^m, g) et (N^n, h) deux variétés riemanniennes de dimension m et n respectivement. Soient ∇ la connexion de Levi-Civita associée à la variété produit $(M \times N, G)$, alors la connexion de Levi-Civita, notée $\overline{\nabla}$, associée à la variété produit tordu $(M \times_f N, G_f)$ est donnée comme suit :*

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y &+ \frac{1}{2f^2} X_1\left(f^2\right)(0, Y_2) + \frac{1}{2f^2} Y_1\left(f^2\right)(0, X_2) \\ &- \frac{1}{2} h(X_2, Y_2)\left(gradf^2, 0\right) \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

$\forall X_1, Y_1 \in L(M)$, $\forall X_2, Y_2 \in L(N)$ *où* $X = (X_1, X_2), Y = (Y_1, Y_2) \in \Gamma(T(M \times_f N))$

Démonstration. D'après la formule de Koszul, on a :

$$\begin{aligned} 2G_f\left(\overline{\nabla}_X Y, Z\right) &= X(G_f(Y, Z)) + Y(G_f(X, Z)) - Z(G_f(X, Y)) \\ &+ G_f(Z, [X, Y]) + G_f(Y, [Z, X]) - G_f(X, [Y, Z]) \\ &= X\left\{g(Y_1, Z_1) + f^2 h(Y_2, Z_2)\right\} + Y\left\{g(X_1, Z_1) + f^2 h(X_2, Z_2)\right\} \\ &- Z\left\{g(X_1, Y_1) + f^2 h(X_2, Y_2)\right\} + g(Z_1, [X_1, Y_1]) \\ &+ f^2 h(Z_2, [X_2, Y_2]) + g(Y_1, [Z_1, X_1]) + f^2 h(Y_2, [Z_2, X_2]) \\ &- g(X_1, [Y_1, Z_1]) - f^2 h(X_2, [Y_2, Z_2]) \end{aligned}$$

Donc,

$$
\begin{aligned}
2G_f\left(\overline{\nabla}_X Y, Z\right) &= 2g\left(\left(\nabla^M_{X_1}Y_1, Z_1\right) + 2f^2 h\left(\nabla^N_{X_2}Y_2, Z_2\right) + X_1\left(f^2\right) h\left(Y_2, Z_2\right)\right.\\
&+ Y_1\left(f^2\right) h\left(X_2, Z_2\right) - Z_1\left(f^2\right) h\left(X_2, Y_2\right)\\
&= 2g\left(\nabla^M_{X_1}Y_1, Z_1\right) + 2f^2 h\left(\nabla^N_{X_2}Y_2, Z_2\right) + h\left(X_1\left(f^2 Y_2\right) + Y_1\left(f^2\right) X_2, Z_2\right)\\
&- Z_1\left(f^2\right) h\left(X_2, Y_2\right)\\
&= 2G_f\left(\left(\nabla^M_{X_1}Y_1, \nabla^N_{X_2}Y_2\right), Z\right) + h\left(X_1\left(f^2 Y_2\right) + Y_1\left(f^2\right) X_2, Z_2\right)\\
&- g\left(h\left(X_2, Y_2\right) gradf^2, Z_1\right)
\end{aligned}
$$

Ainsi,

$$
\begin{aligned}
2G_f\left(\overline{\nabla}_X Y, Z\right) &= 2G_f\left(\left(\nabla^M_{X_1}Y_1, \nabla^N_{X_2}Y_2\right), Z\right) + G_f\left(\frac{X_1\left(f^2\right) Y_2 + Y_1\left(f^2\right) X_2}{f^2}, Z\right)\\
&- G_f\left(h\left(X_2, Y_2\right) gradf^2, Z\right)\\
&= 2G_f\left\{\left(\nabla^M_{X_1}Y_1, \nabla^N_{X_2}Y_2\right) + \frac{X_1\left(f^2\right)}{2f^2}Y_2 + \frac{Y_1\left(f^2\right)}{2f^2}X_2 - \frac{1}{2}\left(h\left(X_2, Y_2\right) gradf^2, Z\right\}\right.
\end{aligned}
$$

D'où,

$$
\begin{aligned}
\overline{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + \frac{1}{2f^2}X_1\left(f^2\right)\left(0, Y_2\right) + \frac{1}{2f^2}Y_1\left(f^2\right)\left(0, X_2\right)\\
&- \frac{1}{2}h\left(X_2, Y_2\right)\left(gradf^2, 0\right)
\end{aligned}
$$

$\forall X_1, Y_1, Z_1 \in L(M)$, $\forall X_2, Y_2, Z_2 \in L(N)$ où $X = (X_1, X_2), Y = (Y_1, Y_2), Z = (Z_1, Z_2) \in \Gamma(T(M \times_f N))$

Proposition 3.2.3. *Soient (M^m, g) et (N^n, h) deux variétés riemanniennes de dimension*

m et n respectivement. Notons par R et $\overline{R}$ les tenseurs de courbures de la variété $(M \times N, G)$ et $(M \times_f N, G_f)$ respectivement. Alors on a :

$$\overline{R}(X,Y) - R(X,Y) = \frac{1}{2f^2}\left(\nabla_{Y_1} gradf^2 - \frac{1}{2f^2} Y_1 \left(f^2\right) gradf^2, 0\right) \wedge_{G_f} (0, X_2)$$

$$- \frac{1}{2f^2}\left(\nabla_{X_1} gradf^2 - \frac{1}{2f^2} X_1 \left(f^2\right) gradf^2, 0\right) \wedge_{G_f} (0, Y_2) \qquad (3.2.2)$$

$$- \frac{1}{4f^4}\left|gradf^2\right|^2 (0, X_2) \wedge_{G_f} (0, Y_2).$$

Où, $\left(X \wedge_{G_f} Y\right) Z = G_f(Z,Y) X - G_f(Z,X) Y$, pour tous $X = (X_1, X_2), Y = (Y_1, Y_2) \in \Gamma(T(M \times_f N))$ avec $X_1, Y_1, Z_1 \in L(M)$ et $X_2, Y_2, Z_2 \in L(N)$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} \overline{R}(X,Y) Z &= \overline{R}((X_1, X_2), (Y_1, Y_2)) Z = \overline{R}(X_1, Y_1) Z + \overline{R}(X_1, Y_2) Z \\ &+ \overline{R}(X_2, Y_1) Z + \overline{R}(X_2, Y_2) Z \end{aligned}$$

1. $\overline{R}(X_1, Y_1) Z = \overline{R}(X_1, Y_1) Z_1 + \overline{R}(X_1, Y_1) Z_2$

$$\begin{aligned} a.\overline{R}(X_1, Y_1) Z_1 &= \overline{\nabla}_{X_1} \overline{\nabla}_{Y_1} Z_1 - \overline{\nabla}_{Y_1} \overline{\nabla}_{X_1} Z_1 - \overline{\nabla}_{[X_1, Y_1]} Z_1 \\ &= \nabla^M_{X_1} \nabla^M_{Y_1} Z_1 - \nabla^M_{X_1} \nabla^M_{Y_1} Z_1 - \nabla^M_{[X_1, Y_1]} Z_1 = \left(R^M(X_1, Y_1) Z, 0\right) \end{aligned}$$

D'où,

$$\overline{R}(X_1, Y_1) Z_1 = \left(R^M(X_1, Y_1) Z, 0\right)$$

b. $\overline{R}(X_1, Y_1) Z_2 = \overline{\nabla}_{X_1} \overline{\nabla}_{Y_1} Z_2 - \overline{\nabla}_{Y_1} \overline{\nabla}_{X_1} Z_1 - \overline{\nabla}_{[X_1, Y_1]} Z_2$

Or, en appliquant la proposition 3.2.2, on obtient :

$\overline{\nabla}_{Y_1} Z_2 = \frac{1}{2f^2} Y_1 (f^2) (0, Z_2) = \frac{1}{2f^2} Y_1 (f^2) Z_2$

De même pour $\overline{\nabla}_{X_1} Z_2$ et $\overline{\nabla}_{[X_1,Y_1]} Z_2$

On trouve, par la suite :

$$\begin{aligned}
\overline{R}\left(X_1,Y_1\right)Z_1 &= \overline{\nabla}_{X_1}\left(\frac{1}{2f^2}Y_1\left(f^2\right)\right)Z_2 - \overline{\nabla}_{Y_1}\left(\frac{1}{2f^2}X_1\left(f^2\right)\right)Z_2 - \frac{[X_1,Y_1]}{2f^2}\left(f^2\right)Z_2 \\
&= \left\{\nabla^M_{X_1}\left(\frac{1}{2f^2}Y_1\left(f^2\right)\right) - \nabla^M_{Y_1}\left(\frac{1}{2f^2}X_1\left(f^2\right)\right) - \frac{[X_1,Y_1]}{2f^2}\left(f^2\right)\right\}Z_2 \\
&= \left(\frac{-1}{2f^4}X_1\left(f^2\right)Y_1\left(f^2\right) + \frac{1}{2f^2}X_1\left(Y_1\left(f^2\right)\right)\right)Z_2 + \left(\frac{1}{2f^4}X_1\left(f^2\right)Y_1\left(f^2\right)\right)Z_2 \\
&- \left(\frac{1}{2f^2}Y_1\left(X_1\left(f^2\right)\right)\right)Z_2 - \left(\frac{[X_1,Y_1]}{2f^2}\left(f^2\right)\right)Z_2 = 0
\end{aligned}$$

D'où,

$$\overline{R}\left(X_1,Y_1\right)Z = \left(R^M\left(X_1,Y_1\right)Z, 0\right)$$

2. $\overline{R}\left(X_1,Y_2\right)Z = \overline{R}\left(X_1,Y_2\right)Z_1 + \overline{R}\left(X_1,Y_2\right)Z_2$

$$\begin{aligned}
a.\overline{R}\left(X_1,Y_2\right)Z_1 &= \overline{\nabla}_{X_1}\overline{\nabla}_{Y_2}Z_1 - \overline{\nabla}_{Y_2}\overline{\nabla}_{X_1}Z_1 - \overbrace{\overline{\nabla}_{[X_1,Y_2]}Z_1}^{\nearrow 0} \\
&= \overline{\nabla}_{X_1}\left(\frac{1}{2f^2}Z_1\left(f^2\right)\right)Y_2 - \frac{1}{2f^2}\nabla^M_{X_1}Z_1\left(f^2\right)Y_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{R}\left(X_1,Y_2\right)Z_1 &= \left\{-\frac{X_1\left(f^2\right)Z_1\left(f^2\right)}{2f^4} + \frac{X_1\left(Z_1\left(f^2\right)\right)}{2f^2} - \frac{1}{2f^2}\nabla^M_{X_1}Z_1\left(f^2\right)\right\}Y_2 \\
&= \frac{1}{2f^2}\left\{X_1\left(Z_1\left(f^2\right)\right) - \frac{X_1\left(f^2\right)Z_1\left(f^2\right)}{f^2} - \nabla^M_{X_1}Z_1\left(f^2\right)\right\}Y_2 \\
&= \frac{1}{2f^2}\left\{\nabla^M_{X_1}g\left(gradf^2,Z_1\right) - g\left(gradf^2,\nabla^M_{X_1}Z_1\right) - \frac{X_1\left(f^2\right)}{f^2}g\left(gradf^2,Z_1\right)\right\}Y_2 \\
&= \frac{1}{2f^2}\left\{g\left(\nabla^M_{X_1}gradf^2,Z_1\right) - \frac{X_1\left(f^2\right)}{f^2}g\left(gradf^2,Z_1\right)\right\}Y_2
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\overline{R}\left(X_1,Y_2\right)Z_1 = G_f\left\{\tfrac{1}{2f^2}\left(\nabla^M_{X_1}gradf^2-\tfrac{X_1\left(f^2\right)}{f^2},0\right),\left(Z_1,0\right)\right\}\left(0,Y_2\right)$$

$$\begin{aligned}
b.\overline{R}\left(X_1,Y_2\right)Z_2 &= \overline{\nabla}_{X_1}\overline{\nabla}_{Y_2}Z_2-\overline{\nabla}_{Y_2}\overline{\nabla}_{X_1}Z_1-\overbrace{\overline{\nabla}_{[X_1,Y_2]}Z_2}^{\nearrow 0}\\
&= \overline{\nabla}_{X_1}\left\{\nabla^N_{Y_2}Z_2-\frac{1}{2}h\left(Y_2,Z_2\right)gradf^2\right\}-\overline{\nabla}_{Y_2}\frac{1}{2f^2}X_1\left(f^2\right)Z_2\\
&= \overline{\nabla}_{X_1}\nabla^N_{Y_2}Z_2-\frac{1}{2}h\left(Y_2,Z_2\right)\overline{\nabla}_{X_1}gradf^2-\frac{1}{2f^2}X_1\left(f^2\right)\overline{\nabla}_{Y_2}Z_2\\
&= \frac{1}{2f^2}X_1\left(f^2\right)\nabla^N_{Y_2}Z_2-\frac{1}{2}h\left(Y_2,Z_2\right)\nabla^M_{X_1}gradf^2\\
&- \frac{1}{2f^2}X_1\left(f^2\right)\left\{\nabla^N_{Y_2}Z_2-\frac{1}{2}h\left(Y_2,Z_2\right)gradf^2\right\}\\
&= -\frac{1}{2}h\left(Y_2,Z_2\right)\left\{\nabla^M_{X_1}gradf^2-\frac{X_1\left(f^2\right)}{2f^2}gradf^2\right\}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\overline{R}\left(X_1,Y_2\right)Z_2 = -G_f\left(\left(0,Y_2\right),\left(0,Z_2\right)\right)\left\{\frac{1}{2f^2}\left(\nabla^M_{X_1}gradf^2-\frac{X_1\left(f^2\right)}{2f^2}gradf^2\right),0\right\}$$

Et par conséquent, on trouve :

$$\begin{aligned}
\overline{R}\left(X_1,Y_2\right)Z &= G_f\left\{\frac{1}{2f^2}\left(\nabla^M_{X_1}gradf^2-\frac{X_1\left(f^2\right)}{f^2},0\right),\left(Z_1,0\right)\right\}\left(0,Y_2\right)\\
&- G_f\left(\left(0,Y_2\right),\left(0,Z_2\right)\right)\left\{\frac{1}{2f^2}\left(\nabla^M_{X_1}gradf^2-\frac{X_1\left(f^2\right)}{2f^2}gradf^2\right),0\right\}
\end{aligned}$$

D'où,

$$\overline{R}\left(X_1,Y_2\right)Z = \tfrac{1}{2f^2}\left(\nabla^M_{X_1}gradf^2-\tfrac{X_1\left(f^2\right)}{2f^2}\right)\wedge_{G_f}\left(0,Y_2\right)$$

3. $\overline{R}(X_2,Y_2)Z = \overline{R}(X_2,Y_2)Z_1 + \overline{R}(X_2,Y_2)Z_2$

$$
\begin{aligned}
a.\overline{R}(X_2,Y_2)Z_1 &= \overline{\nabla}_{X_2}\overline{\nabla}_{Y_2}Z_1 - \overline{\nabla}_{Y_2}\overline{\nabla}_{X_2}Z_1 - \overline{\nabla}_{[X_2,Y_2]}Z_1 \\
&= \overline{\nabla}_{X_2}\left\{\overbrace{\nabla^N_{Y_2}Z_1}^{\nearrow 0} + \frac{1}{2f^2}Z_1\left(f^2\right)(0,Y_2)\right\} - \overline{\nabla}_{Y_2}\left\{\overbrace{\nabla^N_{X_2}Z_1}^{\nearrow 0} + \frac{1}{2f^2}Z_1\left(f^2\right)(0,X_2)\right\} \\
&- \left\{\overbrace{\nabla^N_{[X_2,Y_2]}Z_1}^{\nearrow 0} + \frac{1}{2f^2}Z_1\left(f^2\right)(0,[X_2,Y_2])\right\} \\
&= \overline{\nabla}_{X_2}\frac{1}{2f^2}Z_1\left(f^2\right)Y_2 - \overline{\nabla}_{Y_2}\frac{1}{2f^2}Z_1\left(f^2\right)X_2 - \frac{1}{2f^2}Z_1\left(f^2\right)[X_2,Y_2] \\
&= \frac{1}{2f^2}Z_1\left(\overline{\nabla}_{X_2}Y_2 - \overline{\nabla}_{Y_2}X_2 - [X_2,Y_2]\right) = 0
\end{aligned}
$$

b.$\overline{R}(X_2,Y_2)Z_2 = \overline{\nabla}_{X_2}\overline{\nabla}_{Y_2}Z_2 - \overline{\nabla}_{Y_2}\overline{\nabla}_{X_2}Z_2 - \overline{\nabla}_{[X_2,Y_2]}Z_2$ Calculons $\overline{\nabla}_{X_2}\overline{\nabla}_{Y_2}Z_2$, on a donc :

$$
\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{X_2}\overline{\nabla}_{Y_2}Z_2 &= \overline{\nabla}_{X_2}\left\{\nabla^N_{Y_2}Z_2 - \frac{1}{2f^2}h(Y_2,Z_2)\left(gradf^2,0\right)\right\} \\
&= \overline{\nabla}_{X_2}\nabla^N_{Y_2}Z_2 - \overline{\nabla}_{X_2}\left(\frac{1}{2f^2}h(Y_2,Z_2)\left(gradf^2,0\right)\right) \\
&= \nabla^N_{X_2}\nabla^N_{Y_2}Z_2 - \frac{1}{2f^2}h\left(X_2,\nabla^N_{Y_2}Z_2\right)\left(gradf^2,0\right) \\
&- \frac{1}{2f^2}h(Y_2,Z_2)\left(\nabla^N_{X_2}gradf^2,0\right) - \frac{1}{2f^2}X_2\left(h(Y_2,Z_2)\right)\left(gradf^2,0\right)
\end{aligned}
$$

De même, on trouve après les calculs :

$$
\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{Y_2}\overline{\nabla}_{X_2}Z_2 &= \nabla^N_{Y_2}\nabla^N_{X_2}Z_2 - \frac{1}{2f^2}h\left(Y_2,\nabla^N_{X_2}Z_2\right)\left(gradf^2,0\right) \\
&- \frac{1}{2f^2}h(X_2,Z_2)\left(\nabla^N_{Y_2}gradf^2,0\right) - \frac{1}{2f^2}Y_2\left(h(X_2,Z_2)\right)\left(gradf^2,0\right)
\end{aligned}
$$

et

$$\overline{\nabla}_{[X_2,Y_2]}Z_2 = \nabla^N_{[X_2,Y_2]}Z_2 - \tfrac{1}{2f^2}h([X_2,Y_2])\left(gradf^2,0\right)$$

On aura donc,

$$\begin{aligned}
\overline{R}\left(X_2, Y_2\right) Z_2 &= \left(0, R_N\left(X_2, Y_2\right) Z_2\right) - \frac{1}{2f^2} h\left(X_2, \nabla^N_{Y_2} Z_2\right)\left(gradf^2, 0\right) - \frac{1}{2f^2} h\left(Y_2, Z_2\right) \nabla^N_{X_2}\left(gradf^2, 0\right) \\
&+ \frac{1}{2f^2} h\left(Y_2, \nabla^N_{X_2} Z_2\right)\left(gradf^2, 0\right) + \frac{1}{2f^2} h\left(X_2, Z_2\right) \nabla^N_{Y_2}\left(gradf^2, 0\right) \\
&+ \frac{1}{2f^2} h\left(\left[X_2, Y_2\right], Z_2\right)\left(gradf^2, 0\right) + \frac{1}{2f^2} h\left(X_2, Z_2\right) \nabla^N_{Y_2}\left(gradf^2, 0\right) \\
&- \frac{1}{2f^2} X_2\left(h\left(Y_2, Z_2\right)\right)\left(gradf^2, 0\right) + \frac{1}{2f^2} Y_2\left(h\left(X_2, Z_2\right)\right)\left(gradf^2, 0\right)
\end{aligned}$$

Or, d'autre part on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2f^2} h\left(\left[Y_2, X_2\right], Z_2\right)\left(gradf^2, 0\right) &= \frac{1}{2f^2}\left\{h\left(Y_2, \nabla^N_{X_2} Z_2\right) - \nabla^N_{X_2} h\left(Y_2, Z_2\right)\right\}\left(gradf^2, 0\right) \\
&+ \frac{1}{2f^2}\left\{\nabla^N_{Y_2} h\left(X_2, Z_2\right) - h\left(X_2, \nabla^N_{Y_2} Z_2\right)\right\}\left(gradf^2, 0\right) \\
&= -\frac{1}{2f^2} h\left(\left[X_2, Y_2\right], Z_2\right)\left(gradf^2, 0\right)
\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
\overline{R}\left(X_2, Y_2\right) Z_2 &= \left(0, R_N\left(X_2, Y_2\right) Z_2\right) - \frac{1}{2f^2} h\left(Y_2, Z_2\right) \nabla^N_{X_2}\left(gradf^2, 0\right) + \frac{1}{2f^2} h\left(X_2, Z_2\right) \nabla^N_{Y_2}\left(gradf^2, 0\right) \\
&= \left(0, R_N\left(X_2, Y_2\right) Z_2\right) - \frac{1}{2f^2} h\left(Y_2, Z_2\right) \frac{1}{2f^2} grdf^2\left(f^2\right)\left(0, X_2\right) \\
&+ \frac{1}{2f^2} h\left(X_2, Z_2\right) \frac{1}{2f^2} grdf^2\left(f^2\right)\left(0, Y_2\right) \\
&= \left(0, R_N\left(X_2, Y_2\right) Z_2\right) - \frac{1}{4f^4}\left|gradf^2\right|^2\left\{h\left(Y_2, Z_2\right)\left(0, X_2\right) - h\left(X_2, Z_2\right)\left(0, Y_2\right)\right\}
\end{aligned}$$

On obtient alors,

$$\begin{aligned}\overline{R}\left(X_2,Y_2\right)Z_2 &= \left(0,R_N\left(X_2,Y_2\right)Z_2\right)-\frac{1}{4f^4}\left|gradf^2\right|^2\left\{G_f\left(\left(0,Y_2\right),\left(0,Z_2\right)\right)\left(0,X_2\right)\right\}\\ &+ \frac{1}{4f^4}\left|gradf^2\right|^2\left\{G_f\left(\left(0,X_2\right),\left(0,Z_2\right)\right)\left(0,Y_2\right)\right\}\end{aligned}$$

Et par conséquent, on trouve :

$$\overline{R}\left(X_2,Y_2\right)Z=\left(0,R_N\left(X_2,Y_2\right)Z_2\right)-\frac{1}{4f^4}\left|gradf^2\right|^2\left(0,X_2\right)\wedge_{G_f}\left(0,Y_2\right)$$

4. $\overline{R}\left(X_2,Y_1\right)Z=\overline{R}\left(X_2,Y_1\right)Z_1+\overline{R}\left(X_2,Y_1\right)Z_2$

En suivant le même raisonnement vu précédemment, et après les calculs on trouve :

$$\overline{R}\left(X_2,Y_1\right)Z_1 = G_f\left\{\frac{1}{2f^2}\left(\frac{Y_1\left(f^2\right)}{2f^2}gradf^2-\nabla^M_{Y_1}gradf^2\right),Z_1\right\}\left(0,Z_2\right)$$

et

$$\overline{R}\left(X_2,Y_1\right)Z_2 = G_f\left\{\left(0,X_2\right),\left(0,Z_2\right)\right\}\frac{1}{2f^2}\left(\nabla^M_{Y_1}-\frac{Y_1\left(f^2\right)}{2f^2}gradf^2,0\right)$$

D'où,

$$\begin{aligned}\overline{R}\left(X_2,Y_1\right)Z &= G_f\left\{\frac{1}{2f^2}\left(\frac{Y_1\left(f^2\right)}{2f^2}gradf^2-\nabla^M_{Y_1}gradf^2\right),Z_1\right\}\left(0,Z_2\right)\\ &+ G_f\left\{\left(0,X_2\right),\left(0,Z_2\right)\right\}\frac{1}{2f^2}\left(\nabla^M_{Y_1}-\frac{Y_1\left(f^2\right)}{2f^2}gradf^2,0\right)\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient au final :

$$\begin{aligned}\overline{R}\left(X,Y\right)-R\left(X,Y\right) &= \frac{1}{2f^2}\left(\nabla^M_{Y_1}gradf^2-\frac{1}{2f^2}Y_1\left(f^2\right)gradf^2,0\right)\wedge_{G_f}\left(0,X_2\right)\\ &- \frac{1}{2f^2}\left(\nabla^M_{X_1}gradf^2-\frac{1}{2f^2}X_1\left(f^2\right)gradf^2,0\right)\wedge_{G_f}\left(0,Y_2\right)\\ &- \frac{1}{4f^4}\left|gradf^2\right|^2\left(0,X_2\right)\wedge_{G_f}\left(0,Y_2\right)\end{aligned}$$

Où, $\left(X \wedge_{G_f} Y\right) Z = G_f\left(Z, Y\right) X - G_f\left(Z, X\right) Y$

Proposition 3.2.4. *Soit $(M \times_f N, G_f)$ la variété produit tordu telles que la $dim M = m$ et $dim N = n > 1$. Alors pour tous $X, Y \in L\left(M\right)$ et $U, V \in L\left(N\right)$, le tensur de Ricci de $M \times_f N$ satisfait :*
1. $Ricc\left(X, Y\right) = \left(Ricc_M, 0\right) - \frac{n}{f} Hessf\left(X, Y\right)$
2. $Ricc\left(X, U\right) = 0$
3. $Ricc\left(U, V\right) = \left(0, Ricc_N\right) - \left\{\frac{\Delta f}{f} + \left(n-1\right) \frac{G_f(gradf, gradf)}{f^2}\right\} G_f\left(U, V\right)$
où, $Ricc_M$ et $Ricc_N$ sont les tenseurs de Ricci de M et N respectivement et Δf étant le laplacien de f.

Démonstration. Cela découle de la proposition 3.2.3 et de la formule du tenseur de Ricci, voir [6] et [19]

Chapitre 4

Construction d'applications biharmoniques sur les variétés produits tordus

Le troisième chapitre est consacré à la construction d'une nouvelle classe d'applications biharmoniques entre les variétés riemanniennes qui sont produits tordus, généralisant ainsi certains résultats obtenus par Balmus, Montaldo et Oniciuc dans [4]*. Une famille d'exemples a été construite afin d'illustrer les théorèmes démontrés dans l'article* [22].

4.1 Cas I : $\phi : (M^m \times_\alpha N^n, G_\alpha) \longrightarrow (M^m \times_\beta N^n, G_\beta)$

Avant d'étudier le premier cas, Nous allons simplifier la formule (3.2.2) démontrée dans le second chapitre. Donnons tout d'abord, l'expression de la connexion riemannienne des variétés produit tordu équivalente à (3.2.1), voir par exemple [4] ;

Proposition 4.1.1. *Soient (M^m, g) et (N^n, h) deux variétés riemanniennes de dimension m et n respectivement. Soient ∇ la connexion de Levi-Civita associée à la variété produit $(M \times N, G)$, alors la connexion de Levi-Civita, notée $\widetilde{\nabla}$, associée à la variété produit tordu $(M \times_f N, G_f)$ est donnée comme suit :*

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + X_1 (\ln f)(0, Y_2) + Y_1 (\ln f)(0, X_2) - f^2 h(X_2, Y_2)(grad \ln f, 0) . \quad (4.1.1)$$

$\forall X_1, Y_1 \in L(M)$, $\forall X_2, Y_2 \in L(N)$ *où* $X = (X_1, X_2), Y = (Y_1, Y_2) \in \Gamma(T(M \times_f N))$

Proposition 4.1.2. *Soient (M^m, g) et (N^n, h) deux variétés riemanniennes et soit $f \in C^\infty(M)$ une fonctions positive. La relation entre le tenseur de courbure de G_f et G est* *donnée par le formule suivante :*

$$\widetilde{R}(X,Y) - R(X,Y) = \left(\nabla_{Y_1} grad \ln f + Y_1(\ln f)\, grad \ln f, 0\right) \wedge_{G_f} (0, X_2)$$

$$- \left(\nabla_{X_1} grad \ln f + X_1(\ln f)\, grad \ln f, 0\right) \wedge_{G_f} (0, Y_2) \tag{4.1.2}$$

$$- |grad \ln f|^2 (0, X_2) \wedge_{G_f} (0, Y_2),$$

pour tous $X, Y \in \Gamma(T(M \times N))$*, où* $X = (X_1, X_2)$*,* $Y = (Y_1, Y_2)$ *et* ∇ *étant la connexion définie sur la variété* M

Démonstration. On a démontré que :

$$\widetilde{R}(X,Y) - R(X,Y) = \frac{1}{2f^2}\left(\nabla_{Y_1} gradf^2 - \frac{1}{2f^2} Y_1\left(f^2\right) gradf^2, 0\right) \wedge_{G_f} (0, X_2)$$

$$- \frac{1}{2f^2}\left(\nabla_{X_1} gradf^2 - \frac{1}{2f^2} X_1\left(f^2\right) gradf^2, 0\right) \wedge_{G_f} (0, Y_2) \tag{4.1.3}$$

$$- \frac{1}{4f^4}\left|gradf^2\right|^2 (0, X_2) \wedge_{G_f} (0, Y_2).$$

Un calcul simple nous donne

$$\nabla_{Y_1} gradf^2 = 2\nabla_{Y_1} f^2 grad \ln f$$

$$= 2f^2 \nabla_{Y_1} grad \ln f + 2Y_1\left(f^2\right) grad \ln f$$

$$= 2f^2 \nabla_{Y_1} grad \ln f + 4f^2 Y_1(\ln f)\, grad \ln f$$

et

$$Y_1\left(f^2\right) gradf^2 = 4f^4 Y_1(\ln f)\, grad \ln f,$$

d'où

$$\nabla_{Y_1} gradf^2 - \frac{1}{2f^2} Y_1\left(f^2\right) gradf^2 = 2f^2 \nabla_{Y_1} grad \ln f + 2f^2 Y_1(\ln f)\, grad \ln f. \tag{4.1.4}$$

D'une manière analogue on trouve

$$\nabla_{X_1} gradf^2 - \frac{1}{2f^2} X_1\left(f^2\right) gradf^2 = 2f^2 \nabla_{X_1} grad \ln f + 2f^2 X_1 (\ln f)\, grad \ln f \tag{4.1.5}$$

et

$$\left|gradf^2\right|^2 = \left|2f^2 grad \ln f\right|^2 = 4f^4 \left|grad \ln f\right|^2 . \tag{4.1.6}$$

si on remplace (4.1.4), (4.1.5) et (4.1.6) dans (3.1.3), on obtient

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(X,Y) - R(X,Y) = {} & \left(\nabla_{Y_1} grad \ln f + Y_1 (\ln f)\, grad \ln f, 0\right) \wedge_{G_f} (0, X_2) \\ & - \left(\nabla_{X_1} grad \ln f + X_1 (\ln f)\, grad \ln f, 0\right) \wedge_{G_f} (0, Y_2) \\ & - \left|grad \ln f\right|^2 (0, X_2) \wedge_{G_f} (0, Y_2)\end{aligned}$$

Considérons deux variétés riemanniennes (M^m, g) et (N^n, h) et soient $\alpha, \beta \in C^\infty(M)$. Nous allons démontrer à présent un résultat donnant une condition nécessaire est suffisante pour que l'application $\phi : (M^m \times_\alpha N^n, G_\alpha) \longrightarrow (M^m \times_\beta N^n, G_\beta)$ soit biharmonique.

Théorème 4.1.1. *Soit $\phi : (M^m \times_\alpha N^n, G_\alpha) \longrightarrow (M^m \times_\beta N^n, G_\beta)$ une application définie par $\phi(x,y) = (x,y)$. L'application ϕ est biharmonique si et seulement si*

$$\begin{aligned} & grad\Delta f + 2Ricci\,(gradf) - 2\left(\Delta \ln \alpha + (n-2)\left|grad \ln \alpha\right|^2\right) gradf \\ & + (n-4)\left(\nabla^M_{grad \ln \alpha} gradf\right) - 2n\frac{\beta^2}{\alpha^2} df\,(grad \ln \beta)\, grad \ln \beta \\ & - n\frac{\beta^2}{\alpha^2}\left(\nabla^M_{gradf} grad \ln \beta\right) = 0, \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

où $f = \alpha^2 - \beta^2$ and $\alpha, \beta \in C^\infty(M)$ sont des fonctions positives.

Démonstration. Soient $(e_i)_{1 \le i \le m}$ et $(f_j)_{1 \le j \le n}$ deux repères orthonormés définis sur M et N respectivement. Le repère orthonormé sur $M \times_\alpha N$ est donné par $\left\{(e_i, 0), \frac{1}{\alpha}(0, f_j)\right\}$ et celui sur $(M \times_\beta N)$ par $\left(\left\{(e_i, 0), \frac{1}{\beta}(0, f_j)\right\}\right)$. Notons que dans ce cas on a $d\phi(X,Y) = (X,Y)$ pour tous $X \in \Gamma(TM)$ et $Y \in \Gamma(TN)$.

Par définition du champ tension, on a :

$$\tau(\phi) = Tr_{G_\alpha}\widetilde{\nabla} d\phi$$

$$= \widetilde{\nabla}^{\phi}_{(e_i,0)} d\phi(e_i,0) - d\phi\left(\widetilde{\nabla}^{M\times_\alpha N}_{(e_i,0)}(e_i,0)\right)$$

$$+ \frac{1}{\alpha^2}\widetilde{\nabla}^{\phi}_{(0,f_j)} d\phi(0,f_j) - \frac{1}{\alpha^2} d\phi\left(\widetilde{\nabla}^{M\times_\alpha N}_{(0,f_j)}(0,f_j)\right),$$

en utilisant l'équation (3.2.2), on obtient :

$$\widetilde{\nabla}^{\phi}_{(e_i,0)} d\phi(e_i,0) = \widetilde{\nabla}^{M\times_\beta N}_{(e_i,0)}(e_i,0) = \left(\nabla^M_{e_i} e_i, 0\right),$$

$$d\phi\left(\widetilde{\nabla}^{M\times_\alpha N}_{(e_i,0)}(e_i,0)\right) = d\phi\left(\nabla^M_{e_i} e_i, 0\right) = \left(\nabla^M_{e_i} e_i, 0\right),$$

$$\widetilde{\nabla}^{\phi}_{(0,f_j)} d\phi(0,f_j) = \widetilde{\nabla}^{M\times_\beta N}_{(0,f_j)}(0,f_j) = \left(0, \nabla^N_{f_j} f_j\right) - n\beta^2(grad\ln\beta, 0),$$

et

$$d\phi\left(\widetilde{\nabla}^{M\times_\alpha N}_{(0,f_j)}(0,f_j)\right) = d\phi\left(\left(0,\nabla^N_{f_j} f_j\right) - n\alpha^2(grad\ln\alpha,0)\right) = \left(0,\nabla^N_{f_j} f_j\right) - n\alpha^2(grad\ln\alpha,0)$$

donc

$$\tau(\phi) = n(grad\ln\alpha,0) - n\frac{\beta^2}{\alpha^2}(grad\ln\beta,0) = \frac{n}{2\alpha^2}\left(grad\left(\alpha^2-\beta^2\right),0\right).$$

Notons que l'application ϕ est harmonique si et seulement si la fonction $\alpha^2-\beta^2$ est constante. Par définition, l'application ϕ est biharmonique si et seulement si

$$Tr_{G_\alpha}\widetilde{\nabla}^2\tau(\phi) + Tr_{G_\alpha}\widetilde{R}^{M\times_\beta N}(\tau(\phi), d\phi)\, d\phi = 0$$

Soit $f = \alpha^2-\beta^2$, alors ϕ est biharmonique si et seulement si

$$Tr_{G_\alpha}\widetilde{\nabla}^2\frac{1}{\alpha^2}(gradf,0) + \frac{1}{\alpha^2}Tr_{G_\alpha}\widetilde{R}^{M\times_\beta N}((gradf,0), d\phi)\, d\phi = 0. \tag{4.1.8}$$

Commençons par calculer le premier terme $Tr_{G_\alpha}\widetilde{\nabla}^2\frac{1}{\alpha^2}(gradf,0)$ de (4.1.8), on a :

$$Tr_{G_\alpha}\widetilde{\nabla}^2\frac{1}{\alpha^2}(gradf,0)=\widetilde{\nabla}^\phi_{(e_i,0)}\widetilde{\nabla}^\phi_{(e_i,0)}\frac{1}{\alpha^2}(gradf,0)-\widetilde{\nabla}^\phi_{\widetilde{\nabla}^{M\times_\alpha N}_{(e_i,0)}(e_i,0)}\frac{1}{\alpha^2}(gradf,0)$$

$$+\frac{1}{\alpha^2}\left(\widetilde{\nabla}^\phi_{(0,f_j)}\widetilde{\nabla}^\phi_{(0,f_j)}\frac{1}{\alpha^2}(gradf,0)-\widetilde{\nabla}^\phi_{\widetilde{\nabla}^{M\times_\alpha N}_{(0,f_j)}(0,f_j)}\frac{1}{\alpha^2}(gradf,0)\right). \tag{4.1.9}$$

Nous allons calculer l'expression (4.1.8) terme par terme. Par l'équation (3.2.1), on a :

$$\widetilde{\nabla}^\phi_{(e_i,0)}\frac{1}{\alpha^2}(gradf,0)=\frac{1}{\alpha^2}\widetilde{\nabla}^\phi_{(e_i,0)}(gradf,0)+e_i\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)(gradf,0)$$

$$=\frac{1}{\alpha^2}\widetilde{\nabla}^{M\times_\beta N}_{(e_i,0)}(gradf,0)+e_i\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)(gradf,0)$$

$$=\frac{1}{\alpha^2}\left(\nabla^M_{e_i}gradf,0\right)-\frac{2}{\alpha^2}e_i(\ln\alpha)(gradf,0),$$

Il s'ensuit que

$$\widetilde{\nabla}^\phi_{(e_i,0)}\widetilde{\nabla}^\phi_{(e_i,0)}\frac{1}{\alpha^2}(gradf,0)=\widetilde{\nabla}^\phi_{(e_i,0)}\left(\frac{1}{\alpha^2}\left(\nabla^M_{e_i}gradf,0\right)-\frac{2}{\alpha^2}e_i(\ln\alpha)(gradf,0)\right)$$

$$=\widetilde{\nabla}^\phi_{(e_i,0)}\left(\frac{1}{\alpha^2}\left(\nabla^M_{e_i}gradf,0\right)\right)-2\widetilde{\nabla}^\phi_{(e_i,0)}\left(\frac{1}{\alpha^2}e_i(\ln\alpha)(gradf,0)\right).$$

Par (3.2.1), on aura :

$$\widetilde{\nabla}^\phi_{(e_i,0)}\widetilde{\nabla}^\phi_{(e_i,0)}\frac{1}{\alpha^2}(gradf,0)=\widetilde{\nabla}^\phi_{(e_i,0)}\left(\frac{1}{\alpha^2}\left(\nabla^M_{e_i}gradf,0\right)-\frac{2}{\alpha^2}e_i(\ln\alpha)(gradf,0)\right)$$

$$=\widetilde{\nabla}^\phi_{(e_i,0)}\left(\frac{1}{\alpha^2}\left(\nabla^M_{e_i}gradf,0\right)\right)-2\widetilde{\nabla}^\phi_{(e_i,0)}\left(\frac{1}{\alpha^2}e_i(\ln\alpha)(gradf,0)\right)$$

et

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}^{\phi}_{(e_i,0)}\left(\frac{1}{\alpha^2}e_i(\ln\alpha)(gradf,0)\right) &= \frac{1}{\alpha^2}e_i(\ln\alpha)\left(\nabla^M_{e_i}gradf,0\right)+e_i\left(\frac{1}{\alpha^2}e_i(\ln\alpha)\right)(gradf,0)\\
&= \left(\frac{1}{\alpha^2}e_i(e_i(\ln\alpha))+e_i\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)e_i(\ln\alpha)\right)(gradf,0)\\
&+\frac{1}{\alpha^2}\left(\nabla^M_{grad\ln\alpha}gradf,0\right)\\
&= \frac{1}{\alpha^2}\left(e_i(e_i(\ln\alpha))-2e_i(\ln\alpha)e_i(\ln\alpha)\right)(gradf,0)\\
&+\frac{1}{\alpha^2}\left(\nabla^M_{grad\ln\alpha}gradf,0\right)\\
&= \frac{1}{\alpha^2}\left(\nabla^M_{grad\ln\alpha}gradf,0\right)\\
&+\frac{1}{\alpha^2}\left(e_i(e_i(\ln\alpha))-2\left|grad\ln\alpha\right|^2\right)(gradf,0).
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}^{\phi}_{(e_i,0)}\widetilde{\nabla}^{\phi}_{(e_i,0)}\frac{1}{\alpha^2}(gradf,0) &= \frac{1}{\alpha^2}\left(\left(\nabla^M_{e_i}\nabla^M_{e_i}gradf,0\right)-4\left(\nabla^M_{grad\ln\alpha}gradf,0\right)\right)\\
&-\frac{2}{\alpha^2}\left(e_i(e_i(\ln\alpha))-2\left|grad\ln\alpha\right|^2\right)(gradf,0).
\end{aligned} \tag{4.1.10}$$

Pour le terme $\widetilde{\nabla}^{\phi}_{\widetilde{\nabla}^{M\times_\alpha N}_{(e_i,0)}(e_i,0)}\frac{1}{\alpha^2}(gradf,0)$ et en utilisant l'équation (3.2.1), on trouve :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}^{\phi}_{\widetilde{\nabla}^{M\times_\alpha N}_{(e_i,0)}(e_i,0)}\frac{1}{\alpha^2}(gradf,0) &= \widetilde{\nabla}^{\phi}_{\left(\nabla^M_{e_i}e_i,0\right)}\frac{1}{\alpha^2}(gradf,0)\\
&= \widetilde{\nabla}^{M\times_\beta N}_{\left(\nabla^M_{e_i}e_i,0\right)}\frac{1}{\alpha^2}(gradf,0)\\
&= \frac{1}{\alpha^2}\widetilde{\nabla}^{M\times_\beta N}_{\left(\nabla^M_{e_i}e_i,0\right)}(gradf,0)+\left(\nabla^M_{e_i}e_i\right)\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)(gradf,0),
\end{aligned}$$

d'où,

$$\widetilde{\nabla}^{\phi}_{\widetilde{\nabla}^{M\times_{\alpha}N}_{(e_i,0)}(e_i,0)}\frac{1}{\alpha^2}\left(gradf,0\right)=\frac{1}{\alpha^2}\left(\nabla^M_{\nabla^M_{e_i}e_i}gradf,0\right)-\frac{2}{\alpha^2}\left(\nabla^M_{e_i}e_i\right)\left(\ln\alpha\right)\left(gradf,0\right). \quad (4.1.11)$$

Les équations (4.1.10) and (4.1.11) nous donnent

$$\widetilde{\nabla}^{\phi}_{(e_i,0)}\widetilde{\nabla}^{\phi}_{(e_i,0)}\frac{1}{\alpha^2}\left(gradf,0\right)-\widetilde{\nabla}^{\phi}_{\widetilde{\nabla}^{M\times_{\alpha}N}_{(e_i,0)}(e_i,0)}\frac{1}{\alpha^2}\left(gradf,0\right)$$

$$=\frac{1}{\alpha^2}\left(\left(Tr_g\nabla^2 gradf,0\right)-4\left(\nabla^M_{grad\ln\alpha}gradf,0\right)\right) \quad (4.1.12)$$

$$-\frac{2}{\alpha^2}\left(\Delta\ln\alpha-2\left|grad\ln\alpha\right|^2\right)\left(gradf,0\right).$$

D'une manière similaire, le calcul du terme $\widetilde{\nabla}^{\phi}_{(0,f_j)}\widetilde{\nabla}^{\phi}_{(0,f_j)}\frac{1}{\alpha^2}\left(gradf,0\right)$ donne

$$\widetilde{\nabla}^{\phi}_{(0,f_j)}\widetilde{\nabla}^{\phi}_{(0,f_j)}\frac{1}{\alpha^2}\left(gradf,0\right)=\widetilde{\nabla}^{\phi}_{(0,f_j)}\left(\frac{1}{\alpha^2}\widetilde{\nabla}^{M\times_{\beta}N}_{(0,f_j)}\left(gradf,0\right)\right)$$

$$=\widetilde{\nabla}^{\phi}_{(0,f_j)}\left(\frac{1}{\alpha^2}df\left(grad\ln\beta\right)\left(0,f_j\right)\right)$$

$$=\frac{1}{\alpha^2}df\left(grad\ln\beta\right)\widetilde{\nabla}^{M\times_{\beta}N}_{(0,f_j)}\left(0,f_j\right)$$

$$=\frac{1}{\alpha^2}df\left(grad\ln\beta\right)\left(\left(0,\nabla^N_{f_j}f_j\right)-n\beta^2\left(grad\ln\beta,0\right)\right)$$

par la suite

$$\widetilde{\nabla}^{\phi}_{(0,f_j)}\widetilde{\nabla}^{\phi}_{(0,f_j)}\frac{1}{\alpha^2}\left(gradf,0\right)=\frac{1}{\alpha^2}df\left(grad\ln\beta\right)\left(\left(0,\nabla^N_{f_j}f_j\right)-n\beta^2\left(grad\ln\beta,0\right)\right). \quad (4.1.13)$$

Pour le dernier terme $\widetilde{\nabla}^{\phi}_{\widetilde{\nabla}^{M\times_{\alpha}N}_{(0,f_j)}(0,f_j)}\frac{1}{\alpha^2}\left(gradf,0\right)$, on a :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}^{\phi}_{\widetilde{\nabla}^{M\times_\alpha N}_{\left(0,f_j\right)}(0,f_j)}\frac{1}{\alpha^2}\left(gradf,0\right) &= \widetilde{\nabla}^{\phi}_{\left(0,\nabla^N_{f_j}f_j\right)}\frac{1}{\alpha^2}\left(gradf,0\right)-n\alpha^2\widetilde{\nabla}^{\phi}_{(grad\ln\alpha,0)}\frac{1}{\alpha^2}\left(gradf,0\right)\\
&= \frac{1}{\alpha^2}\widetilde{\nabla}^{M\times_\beta N}_{\left(0,\nabla^N_{f_j}f_j\right)}\left(gradf,0\right)-n\widetilde{\nabla}^{M\times_\beta N}_{(grad\ln\alpha,0)}\left(gradf,0\right)\\
&-n\alpha^2\left(grad\ln\alpha\right)\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)\left(gradf,0\right)\\
&= \frac{1}{\alpha^2}df\left(grad\ln\beta\right)\left(0,\nabla^N_{f_j}f_j\right)-n\left(\nabla^M_{grad\ln\alpha}gradf,0\right)\\
&+2n\left|grad\ln\alpha\right|^2\left(gradf,0\right),
\end{aligned}$$

on obtient alors

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}^{\phi}_{\widetilde{\nabla}^{M\times_\alpha N}_{\left(0,f_j\right)}(0,f_j)}\frac{1}{\alpha^2}\left(gradf,0\right) &= \frac{1}{\alpha^2}df\left(grad\ln\beta\right)\left(0,\nabla^N_{f_j}f_j\right)-n\left(\nabla^M_{grad\ln\alpha}gradf,0\right)\\
&+2n\left|grad\ln\alpha\right|^2\left(gradf,0\right)
\end{aligned}\tag{4.1.14}$$

Les équations (4.1.13) et (4.1.14) nous donnent

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\nabla}^{\phi}_{(0,f_j)}\widetilde{\nabla}^{\phi}_{(0,f_j)}\frac{1}{\alpha^2}\left(gradf,0\right)-\widetilde{\nabla}^{\phi}_{\widetilde{\nabla}^{M\times_\alpha N}_{\left(0,f_j\right)}(0,f_j)}\frac{1}{\alpha^2}\left(gradf,0\right)\\
&= n\left(\nabla^M_{grad\ln\alpha}gradf,0\right)-2n\left|grad\ln\alpha\right|^2\left(gradf,0\right)\\
&-n\frac{\beta^2}{\alpha^2}df\left(grad\ln\beta\right)\left(grad\ln\beta,0\right)
\end{aligned}\tag{4.1.15}$$

En remplaçant (4.1.12) et (4.1.15) dans (4.1.9), on arrive à la formule suivante :

$$\begin{aligned}
Tr_{G_\alpha}\widetilde{\nabla}^2\frac{1}{\alpha^2}\left(gradf,0\right) &= \frac{1}{\alpha^2}\left(Tr_g\nabla^2 gradf,0\right)+\frac{n-4}{\alpha^2}\left(\nabla^M_{grad\ln\alpha}gradf,0\right)\\
&-\frac{2}{\alpha^2}\left(\Delta\ln\alpha+(n-2)\left|grad\ln\alpha\right|^2\right)\left(gradf,0\right)\\
&-n\frac{\beta^2}{\alpha^4}df\left(grad\ln\beta\right)\left(grad\ln\beta,0\right).
\end{aligned}$$

Or, en utilisant le fait que (voir [21])

$$Tr_g \nabla^2 gradf = grad\Delta f + Ricci\,(gradf)\,,$$

On obtient au final :

$$\begin{aligned} Tr_{G_\alpha} \widetilde{\nabla}^2 \frac{1}{\alpha^2}(gradf, 0) &= \frac{1}{\alpha^2}(grad\Delta f, 0) + \frac{1}{\alpha^2}(Ricci\,(gradf)\,, 0) \\ &- \frac{2}{\alpha^2}\left(\Delta \ln \alpha + (n-2)\,|grad \ln \alpha|^2\right)(gradf, 0) \\ &+ \frac{n-4}{\alpha^2}\left(\nabla^M_{grad \ln \alpha} gradf, 0\right) - n\frac{\beta^2}{\alpha^4} df\,(grad \ln \beta)\,(grad \ln \beta, 0)\,. \end{aligned} \tag{4.1.16}$$

Pour achever la preuve, il reste à calculer le terme $Tr_{G_\alpha} \widetilde{R}^{M\times_\beta N}\left((gradf, 0)\,, d\phi\right) d\phi$, on a :

$$\begin{aligned} Tr_{G_\alpha} \widetilde{R}^{M\times_\beta N}\left((gradf, 0)\,, d\phi\right) d\phi &= \widetilde{R}^{M\times_\beta N}\left((gradf, 0)\,, (e_i, 0)\right)(e_i, 0) \\ &+ \frac{1}{\alpha^2}\widetilde{R}^{M\times_\beta N}\left((gradf, 0)\,, (0, f_j)\right)(0, f_j)\,. \end{aligned} \tag{4.1.17}$$

Par (4.1.2), on trouve :

$$\widetilde{R}^{M\times_\beta N}\left((gradf, 0)\,, (e_i, 0)\right) = R^{M\times_\beta N}\left((gradf, 0)\,, (e_i, 0)\right) = \left(R^M\,(gradf, e_i)\,, 0\right),$$

d'où,

$$\widetilde{R}^{M\times_\beta N}\left((gradf, 0)\,, (e_i, 0)\right)(e_i, 0) = (Ricci\,(gradf)\,, 0)\,. \tag{4.1.18}$$

Pour le terme $\widetilde{R}^{M\times_\beta N}\left((gradf, 0)\,, (0, f_j)\right)(0, f_j)$ et par (4.1.2), on aura

$$\widetilde{R}^{M\times_\beta N}\left((gradf, 0)\,, (0, f_j)\right) = -\left(\nabla_{gradf} grad \ln \beta, 0\right) \wedge_{G_f} (0, f_j) - df\,(grad \ln \beta)\,(grad \ln \beta, 0) \wedge_{G_f} (0, f_j)\,.$$

Or,

$$\begin{aligned}\left((\nabla_{gradf}grad\ln\beta,0)\wedge_{G_f}(0,f_j)\right)(0,f_j) &= G_\beta\left((0,f_j),(0,f_j)\right)(\nabla_{gradf}grad\ln\beta,0)\\ &- G_\beta\left((0,f_j),(\nabla_{gradf}grad\ln\beta,0)\right)(0,f_j)\\ &= n\beta^2\left(\nabla_{gradf}grad\ln\beta,0\right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\left((grad\ln\beta,0)\wedge_{G_f}(0,f_j)\right)(0,f_j) &= G_\beta\left((0,f_j),(0,f_j)\right)(grad\ln\beta,0)\\ &- G_\beta\left((0,f_j),(grad\ln\beta,0)\right)(0,f_j)\\ &= n\beta^2\left(grad\ln\beta,0\right),\end{aligned}$$

ainsi,

$$\begin{aligned}\widetilde{R}^{M\times_\beta N}\left((gradf,0),(0,f_j)\right)(0,f_j) &= -n\beta^2 df\left(grad\ln\beta\right)(grad\ln\beta,0)\\ &- n\beta^2\left(\nabla^M_{gradf}grad\ln\beta,0\right).\end{aligned} \tag{4.1.19}$$

Si on remplace (4.1.18) et (4.1.19) dans (4.1.17), on obtient :

$$\begin{aligned}Tr_{G_\alpha}\widetilde{R}^{M\times_\beta N}\left((gradf,0),d\phi\right)d\phi &= \left(Ricci\left(gradf\right),0\right) - n\frac{\beta^2}{\alpha^2}df\left(grad\ln\beta\right)(grad\ln\beta,0)\\ &- n\frac{\beta^2}{\alpha^2}\left(\nabla^M_{gradf}grad\ln\beta,0\right)\end{aligned} \tag{4.1.20}$$

Finalement, les équations (4.1.16) et (4.1.20) nous donnent l'expression suivante :

$$Tr_{G_\alpha}\widetilde{\nabla}^2\frac{1}{\alpha^2}\left(gradf,0\right)+\frac{1}{\alpha^2}Tr_{G_\alpha}\widetilde{R}^{M\times_\beta N}\left(\left(gradf,0\right),d\phi\right)d\phi$$

$$=\frac{1}{\alpha^2}\left(grad\Delta f,0\right)+\frac{2}{\alpha^2}\left(Ricci\left(gradf\right),0\right)$$

$$-\frac{2}{\alpha^2}\left(\Delta\ln\alpha+(n-2)\left|grad\ln\alpha\right|^2\right)\left(gradf,0\right)$$
$$+\frac{n-4}{\alpha^2}\left(\nabla^M_{grad\ln\alpha}gradf,0\right)-n\frac{\beta^2}{\alpha^4}\left(\nabla^M_{gradf}grad\ln\beta,0\right)$$

$$-2n\frac{\beta^2}{\alpha^4}df\left(grad\ln\beta\right)\left(grad\ln\beta,0\right).$$

Par conséquent ϕ est biharmonique si et seulement si

$$grad\Delta f+2Ricci\left(gradf\right)-2\left(\Delta\ln\alpha+(n-2)\left|grad\ln\alpha\right|^2\right)gradf$$

$$+(n-4)\left(\nabla^M_{grad\ln\alpha}gradf\right)-n\frac{\beta^2}{\alpha^2}\left(\nabla^M_{gradf}grad\ln\beta\right)$$

$$-2n\frac{\beta^2}{\alpha^2}df\left(grad\ln\beta\right)grad\ln\beta=0.$$

Comme conséquence, on obtient le résultat suivant :

Corollaire 4.1.1. *L'application $\phi:(M\times_\alpha N,G_\alpha)\longrightarrow(M\times N,G)$ définie par $\phi(x,y)=(x,y)$ est biharmonique si et seulement si*

$$grad\left(\Delta\ln\alpha\right)+\frac{n}{2}grad\left(\left|grad\ln\alpha\right|^2\right)+2Ricci\left(grad\ln\alpha\right)=0.$$

Démonstration. Par le théorème 4.1.1, si on remplace $f=\alpha^2-1$, on déduit que $\phi:(M\times_\alpha N,G_\alpha)\longrightarrow(M\times N,G)$définie par $\phi(x,y)=(x,y)$ est biharmonique si et seulement si

$$grad\Delta\alpha^2+2Ricci\left(grad\alpha^2\right)-2\left(\Delta\ln\alpha+(n-2)\left|grad\ln\alpha\right|^2\right)grad\alpha^2$$
$$+(n-4)\left(\nabla^M_{grad\ln\alpha}grad\alpha^2\right)=0$$

Un calcul simple nous donne

$$grad\alpha^2=2\alpha^2grad\ln\alpha,$$

$$\nabla^M_{grad \ln\alpha} grad\alpha^2 = 2\nabla^M_{grad \ln\alpha}\alpha^2 grad \ln\alpha$$

$$= 2\alpha^2\nabla^M_{grad \ln\alpha} grad \ln\alpha + 2grad \ln\alpha \left(\alpha^2\right) grad \ln\alpha$$

$$= \alpha^2 grad \left(|grad \ln\alpha|^2\right) + 4\alpha^2 |grad \ln\alpha|^2 grad \ln\alpha.$$

On sait que

$$\Delta\alpha^2 = 2\alpha^2\Delta \ln\alpha + 4\alpha^2 |grad \ln\alpha|^2$$

donc

$$grad\Delta\alpha^2 = grad \left(2\alpha^2\Delta \ln\alpha + 4\alpha^2 |grad \ln\alpha|^2\right)$$

$$= 2grad \left(\alpha^2\Delta \ln\alpha\right) + 4grad \left(\alpha^2 |grad \ln\alpha|^2\right)$$

$$= 2\alpha^2 grad \left(\Delta \ln\alpha\right) + 4\alpha^2 \left(\Delta \ln\alpha\right) grad \ln\alpha$$

$$+ 4\alpha^2 grad \left(|grad \ln\alpha|^2\right) + 8\alpha^2 |grad \ln\alpha|^2 grad \left(\ln\alpha\right)$$

Finalement, on conclue que $\phi : (M \times_\alpha N, G_\alpha) \longrightarrow (M \times N, G)$ définie par $\phi(x, y) = (x, y)$ est biharmonique si et seulement si

$$grad \left(\Delta \ln\alpha\right) + \frac{n}{2} grad \left(|grad \ln\alpha|^2\right) + 2Ricci \left(grad \ln\alpha\right) = 0.$$

Exemple 4.1.1. *Soit $\phi : \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \times_\alpha N^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \times N^n$ $(m \neq 2)$ définie par $\phi(x, y) = (x, y)$, et supposons que $\ln\alpha$ est radiale $(\ln\alpha = f(r))$. Alors par le corollaire 3.1.1, on déduit que ϕ est biharmonique si et seulement si la fonction f satisfait l'équation différentielle suivante :*

$$f''' + \frac{m-1}{r} f'' - \frac{m-1}{r^2} f' + nf'f'' = 0.$$

Soit $\beta = f'$, cette équation deviendra

$$\beta'' + \frac{m-1}{r}\beta' - \frac{m-1}{r^2}\beta + n\beta\beta' = 0.$$

On obtient ainsi une solution particulière de type $\beta = \frac{a}{r}$ $(a \in \mathbb{R}^*)$, donc ϕ est biharmonique *si*

$$a = \frac{4-2m}{n}.$$

On obtient $\alpha(r) = Cr^{\frac{4-2m}{n}}$ $(C > 0)$ *et dans ce cas l'application* $\phi : \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \times_\alpha N^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \times N^n$ *définie* $\phi(x,y) = (x,y)$ *est biharmonique non-harmonique.*

Exemple 4.1.2. *Soit* $M = S^m$ *paramétrée par* $x = (\cos s, \sin s.z)$ $s \in [0,\pi]$, $z \in S^{m-1}$. *On définit sur* S^m *une base orthonormée donnée par* $e_1 = \frac{\partial}{\partial s}$, $e_i = (0, f_i)$ *pour* $i = 2, ..., m$, *où* f_i *sont tangents à* S^{m-1} *avec* $\sum\limits_{i=2}^{m} \nabla_{e_i} e_i = -(m-1)\cot s \frac{\partial}{\partial s}$.
On considère l'application $\phi : S^m \times_\alpha N^n \longrightarrow S^m \times N^n$ *définie par* $\phi(x,y) = (x,y) = ((\cos s, \sin s.z), y)$ *et supposons que la fonction* $f = \ln \alpha$ *dépends uniquement de* s. *Alors par le Corollaire 3.1.3, on déduit que l'application* ϕ *est biharmonique si et seulement si la fonction* f *satisfait l'équation différentielle suivante :*

$$f''' + nf'f'' + (m-1)\left((\cot s) f'' - \left(1 - \cot^2 s\right) f'\right) = 0.$$

Soit $\gamma(s) = f'(s)$, *alors la dernière équation devient*

$$\gamma'' + n\gamma\gamma' + (m-1)\left((\cot s)\gamma' - \left(1 - \cot^2 s\right)\right) = 0.$$

En particulier, si $m = 1$, *la fonction* $\gamma(s) = \frac{2}{ns+C}$ *est une solution de l'équation, on obtient donc*

$$\alpha(s) = \sqrt[n]{(ns+C)^2}.$$

Et dans ce cas, l'application $\phi : S^1 \times_\alpha N^n \longrightarrow S^1 \times N^n$ *définie par* $\phi(x,y) = (x,y) = ((\cos s, \sin s), y)$ *est biharmonique non-harmonique.*

Un résultat similaire est donné comme suit :

Corollaire 4.1.2. *L'application* $\phi : (M \times N, G) \longrightarrow (M \times_\beta N, G_\beta)$ *définie par* $\phi(x,y) = (x,y)$ *est biharmonique si et seulement si*

$$\begin{aligned} &grad\Delta \ln\beta + 2(\Delta \ln\beta)\, grad \ln\beta + \left(4 - 2n\beta^2\right)|grad \ln\beta|^2\, grad \ln\beta \\ &+ \left(2 - \frac{n}{2}\beta^2\right) grad\left(|grad \ln\beta|^2\right) + 2Ricci\,(grad \ln\beta) = 0. \end{aligned}$$

Ce qui est équivalent à dire que, ϕ *est biharmonique si et seulement si la fonction* $f = \beta^2 - 1$

vérifie l'équation différentielle suivante :

$$grad\Delta f + 2Ricci\,(gradf) - \frac{n}{4}grad\left(|gradf|^2\right) = 0$$

4.2 Cas II : $\widetilde{\phi} : (M^m \times_f N^n, G_f) \longrightarrow (P_1^{p_1} \times P_2^{p_2}, G)$

Dans cette section, nous allons étudier la biharmonocité de l'application $\widetilde{\phi} : (M^m \times_f N^n, G_\alpha) \longrightarrow (P_1^{p_1} \times P_2^{p_2}, G)$ définie par $\widetilde{\phi}\,(x, y) = (\phi\,(x)\,, \psi\,(y))$. Nous avons le résultat suivant :

Théorème 4.2.1. *Soit $\widetilde{\phi} : (M^m \times_f N^n, G_f) \longrightarrow (P_1^{p_1} \times P_2^{p_2}, G)$ définie par $\widetilde{\phi}\,(x, y) = (\phi\,(x)\,, \psi\,(y))$ où $\phi : (M, g) \longrightarrow (P_1, k_1)$ and $\psi : (N, h) \longrightarrow (P_2, k_2)$ deux applications harmoniques. Alors l'application $\widetilde{\phi}$ est biharmonique si et seulement si*

$$Tr_g\left(\nabla^\phi\right)^2 d\phi\,(grad\ln f) + Tr_g R^{P_1}\left(d\phi\,(grad\ln f)\,, d\phi\right) d\phi + n\nabla^\phi_{grad\ln f} d\phi\,(grad\ln f) = 0. \tag{4.2.1}$$

Démonstration. Choisissons $(e_i)_{1\leq i\leq m}$ comme étant un repère orthonormé sur M et $(f_j)_{1\leq j\leq n}$ celui sur N. Un repère orthonormé sur $M \times_f N$ est donné par $\left\{(e_i, 0)\,, \frac{1}{f}\,(0, f_j)\right\}$. Notons que dans ce cas on a $d\widetilde{\phi}\,(X, Y) = (d\phi\,(X)\,, d\psi\,(Y))$ pour chaque $X \in \Gamma\,(TM)$ et $Y \in \Gamma\,(TN)$. Par la définition du champ de tension, on a :

$$\begin{aligned}
\tau\left(\widetilde{\phi}\right) &= Tr_{G_f}\nabla d\widetilde{\phi} \\
&= \nabla^{\widetilde{\phi}}_{(e_i,0)} d\widetilde{\phi}\,(e_i, 0) + \frac{1}{f^2\circ\pi}\nabla^{\widetilde{\phi}}_{(0,f_j)} d\widetilde{\phi}\,(0, f_j) \\
&\quad - d\widetilde{\phi}\left(\widetilde{\nabla}_{(e_i,0)}\,(e_i, 0)\right) - \frac{1}{f^2\circ\pi} d\widetilde{\phi}\left(\widetilde{\nabla}_{(0,f_j)}\,(0, f_j)\right).
\end{aligned}$$

en utilisant l'équation (3.2.1), un calcul direct nous donne :

$$\widetilde{\nabla}_{(e_i,0)}\,(e_i, 0) = (\nabla_{e_i} e_i, 0)$$

et

$$\widetilde{\nabla}_{(0,f_j)}\,(0, f_j) = \left(0, \nabla_{f_j} f_j\right) - n\left(f^2\circ\pi\right)(grad\ln f, 0)\,,$$

donc

$$\tau\left(\widetilde{\phi}\right) = \left(\nabla^{\phi}_{e_i} d\phi\left(e_i\right), 0\right) - \left(d\phi\left(\nabla_{e_i} e_i\right), 0\right)$$

$$+ \frac{1}{f^2 \circ \pi}\left(0, \nabla^{\psi}_{f_j} d\psi\left(f_j\right)\right) - \frac{1}{f^2 \circ \pi}\left(0, d\psi\left(\nabla_{f_j} f_j\right)\right) + n\left(d\phi\left(grad \ln f\right), 0\right)$$

$$= \left(\tau\left(\phi\right), 0\right) + \frac{1}{f^2 \circ \pi}\left(0, \tau\left(\psi\right)\right) + n\left(d\phi\left(grad \ln f\right), 0\right).$$

Puisque ϕ et ψ sont harmoniques, on déduit que

$$\tau\left(\widetilde{\phi}\right) = n\left(d\phi\left(grad \ln f\right), 0\right).$$

Par définition, l'application $\widetilde{\phi}$ est biharmonique si et seulement si

$$Tr_{G_f}\left(\nabla^{\widetilde{\phi}}\right)^2\left(d\phi\left(grad \ln f\right), 0\right) + Tr_{G_f} R^{P_1 \times P_2}\left(\left(d\phi\left(grad \ln f\right), 0\right), d\widetilde{\phi}\right) d\widetilde{\phi} = 0. \qquad (4.2.2)$$

Commençons par la simplification du terme $Tr_{G_f}\left(\nabla^{\widetilde{\phi}}\right)^2\left(d\phi\left(grad \ln f\right), 0\right)$, on a

$$Tr_{G_f}\left(\nabla^{\widetilde{\phi}}\right)^2\left(d\phi\left(grad \ln f\right), 0\right) = \nabla^{\widetilde{\phi}}_{(e_i,0)}\nabla^{\widetilde{\phi}}_{(e_i,0)}\left(d\phi\left(grad \ln f\right), 0\right) - \nabla^{\widetilde{\phi}}_{\widetilde{\nabla}^{M\times_f N}_{(e_i,0)}(e_i,0)}\left(d\phi\left(grad \ln f\right), 0\right)$$

$$+ \frac{1}{f^2 \circ \pi}\left(\nabla^{\widetilde{\phi}}_{(0,f_j)}\nabla^{\widetilde{\phi}}_{(0,f_j)}\left(d\phi\left(grad \ln f\right), 0\right)\right.$$

$$\left. - \nabla^{\widetilde{\phi}}_{\widetilde{\nabla}^{M\times_\alpha N}_{(0,f_j)}(0,f_j)}\left(d\phi\left(grad \ln f\right), 0\right)\right).$$

Or,

$$\nabla^{\widetilde{\phi}}_{(e_i,0)}\nabla^{\widetilde{\phi}}_{(e_i,0)}\left(d\phi\left(grad \ln f\right), 0\right) = \left(\nabla^{\phi}_{e_i}\nabla^{\phi}_{e_i} d\phi\left(grad \ln f\right), 0\right),$$

$$\nabla^{\widetilde{\phi}}_{\widetilde{\nabla}^{M\times_f N}_{(e_i,0)}(e_i,0)}\left(d\phi\left(grad \ln f\right), 0\right) = \nabla^{\phi}_{\left(\nabla_{e_i} e_i, 0\right)}\left(d\phi\left(grad \ln f\right), 0\right) = \left(\nabla^{\phi}_{\nabla_{e_i} e_i} d\phi\left(grad \ln f\right), 0\right),$$

$$\nabla^{\widetilde{\phi}}_{(0,f_j)}\nabla^{\widetilde{\phi}}_{(0,f_j)}\left(d\phi\left(grad \ln f\right), 0\right) = 0$$

et

$$\nabla^{\widetilde{\phi}}_{\widetilde{\nabla}^{M\times_\alpha N}_{(0,f_j)}(0,f_j)}\left(d\phi\left(grad \ln f\right), 0\right) = -n\left(f^2 \circ \pi\right)\left(\nabla^{\phi}_{grad \ln f} d\phi\left(grad \ln f\right), 0\right)$$

donc

$$Tr_{G_f}\left(\nabla^{\widetilde{\phi}}\right)^2(d\phi\,(grad\ln f)\,,0)=\left(Tr_g\left(\nabla^{\phi}\right)^2 d\phi\,(grad\ln f)+n\nabla^{\phi}_{grad\ln f}d\phi\,(grad\ln f)\,,0\right). \tag{4.2.3}$$

Pour le terme $Tr_{G_f}R^{P_1\times P_2}\left((d\phi\,(grad\ln f)\,,0)\,,d\widetilde{\phi}\right)d\widetilde{\phi}$, on a

$$Tr_{G_f}R^{P_1\times P_2}\left((d\phi\,(grad\ln f)\,,0)\,,d\widetilde{\phi}\right)d\widetilde{\phi}=R^{P_1\times P_2}\left((d\phi\,(grad\ln f)\,,0)\,,d\widetilde{\phi}\,(e_i,0)\right)d\widetilde{\phi}\,(e_i,0)$$

$$+\frac{1}{f^2\circ\pi}R^{P_1\times P_2}\left(\left(d\widetilde{\phi}\,(grad\ln f)\,,0\right),d\widetilde{\phi}\,(0,f_j)\right)d\widetilde{\phi}\,(0,f_j)\,.$$

Et comme

$$R^{P_1\times P_2}\left((d\phi\,(grad\ln f)\,,0)\,,d\widetilde{\phi}\,(e_i,0)\right)d\widetilde{\phi}\,(e_i,0)=\left(Tr_gR^{P_1}\left(d\phi\,(grad\ln f)\,,d\phi\right)d\phi,0\right)$$

et

$$R^{P_1\times P_2}\left((d\phi\,(grad\ln f)\,,0)\,,d\widetilde{\phi}\,(0,f_j)\right)d\widetilde{\phi}\,(0,f_j)=0,$$

alors

$$Tr_{G_f}R^{P_1\times P_2}\left((d\phi\,(grad\ln f)\,,0)\,,d\widetilde{\phi}\right)d\widetilde{\phi}=\left(Tr_gR^{P_1}\left(d\phi\,(grad\ln f)\,,d\phi\right)d\phi,0\right). \tag{4.2.4}$$

Les deux équations (4.2.3) and (4.2.4) nous donnent

$$\begin{aligned}&Tr_{G_f}\left(\nabla^{\widetilde{\phi}}\right)^2(d\phi\,(grad\ln f)\,,0)+Tr_{G_f}R^{P_1\times P_2}\left((d\phi\,(grad\ln f)\,,0)\,,d\widetilde{\phi}\right)d\widetilde{\phi}\\&=\left(Tr_g\left(\nabla^{\phi}\right)^2d\phi\,(grad\ln f)+n\nabla^{\phi}_{grad\ln f}d\phi\,(grad\ln f)+Tr_gR^{P_1}\left(d\phi\,(grad\ln f)\,,d\phi\right)d\phi,0\right)\end{aligned}$$

On conclut que l'application $\widetilde{\phi}$ est biharmonique si et seulement si ϕ satisfait l'équation suivante

$$\mathrm{Tr}_g\left(\nabla^{\phi}\right)^2d\phi\,(grad\ln f)+Tr_gR^{P_1}\left(d\phi\,(grad\ln f)\,,d\phi\right)d\phi+n\nabla^{\phi}_{grad\ln f}d\phi\,(grad\ln f)=0.$$

On donne à présent, un exemple d'application illustrant le théorème ;

***Exemple* 4.2.1.** *Soit $\phi:\mathbb{R}^4\longrightarrow\mathbb{R}^3$ la projection définie par $\phi\,(t,x_2,x_3,x_4)=(t,x_2,x_3)$ et considérons l'application $\widetilde{\phi}:\mathbb{R}^4\times_f N^n\longrightarrow\mathbb{R}^3\times N^n$ définie par $\widetilde{\phi}\,((t,x_2,x_3,x_4)\,,y)=((t,x_2,x_3)\,,y)$ où on suppose que la fonction $\alpha=\ln f$ dépends uniquement de t. Par le théorème 4.2.1, $\widetilde{\phi}$ est biharmonique si et seulement si $\alpha=\ln f$ satisfait l'équation différentielle* *d'ordre 3 suivante :*

$$\alpha''' + n\alpha'\alpha'' = 0.$$

Posons $\beta(t) = \alpha'(t)$, *on obtient alors*

$$\beta'' + n\beta\beta' = 0.$$

Par exemple, la fonction $\beta = \frac{2}{nt+C}$ *est une solution de l'équation, d'où* $f(t) = \sqrt[n]{(nt+C)^2}$ *et dans ce cas, l'application* $\widetilde{\phi}$ *est biharmonique non harmonique.*

Une conséquence immédiate du théorème 4.2.1 est donnée ci-après :

Corollaire 4.2.1. *Soit* $\widetilde{\phi} : (M^m \times_f N^n, G_\alpha) \longrightarrow (M^m \times P^p, G)$ *définie par* $\widetilde{\phi}(x,y) = (x, \psi(y))$ *où* $\psi : N \longrightarrow P$ *est une application harmonique. Alors* $\widetilde{\phi}$ *est biharmonique si et seulement si*

$$grad\Delta \ln f + 2Ricci^M (grad \ln f) + \frac{n}{2} grad\left(|grad \ln f|^2\right) = 0.$$

En particulier, si $\psi = Id_N$, on obtient

Corollaire 4.2.2. *Soit* $\phi : (M^m \times_f N^n, G_\alpha) \longrightarrow (M^m \times N^n, G)$ *définie par* $\phi(x,y) = (x,y)$. *Alors* ϕ *est biharmonique si et seulement si*

$$grad\Delta \ln f + 2Ricci^M (grad \ln f) + \frac{n}{2} grad\left(|grad \ln f|^2\right) = 0.$$

4.3 Cas III : $\widetilde{\phi} : N \longrightarrow (M \times_f P, G_f)$

Maintenant, on considère l'application $\phi : (N^n, h) \longrightarrow (P^p, k)$, et étudions la biharmonicité de l'application $\widetilde{\phi} : N \longrightarrow (M \times_f P, G_f)$ définie par $\widetilde{\phi}(y) = (x_0, \phi(y))$.

Théorème 4.3.1. *Soit* $\phi : (N^n, h) \longrightarrow (P^p, k)$ *une application harmonique, alors l'application* $\widetilde{\phi} : N \longrightarrow (M \times_f P, G_f)$ *définie par* $\widetilde{\phi}(y) = (x_0, \phi(y))$ *est biharmonique si et seulement si*

$$\begin{cases} (e(\phi))^2 grad\left(|gradf^2|^2\right) - 2(\Delta e(\phi)) gradf^2 = 0 \\ \text{et} \\ d\phi(grad(e(\phi))) = 0 \end{cases}$$

Démonstration. Soit $(f_j)_{1\leq j\leq n}$ un repère orthonormé sur N. Le champ tension de $\widetilde{\phi}$ est donné par

$$\tau\left(\widetilde{\phi}\right) = Tr_h\widetilde{\nabla}d\widetilde{\phi}$$

$$= \widetilde{\nabla}^{\widetilde{\phi}}_{f_j}d\widetilde{\phi}\left(f_j\right) - d\widetilde{\phi}\left(\nabla^N_{f_j}f_j\right)$$

$$= \widetilde{\nabla}^{\widetilde{\phi}}_{f_j}\left(0, d\phi\left(f_j\right)\right) - \left(0, d\phi\left(\nabla^N_{f_j}f_j\right)\right)$$

$$= \left(0, \nabla^{\phi}_{f_j}d\phi\left(f_j\right)\right) - 2f^2e\left(\phi\right)\left(grad\ln f, 0\right)\circ\widetilde{\phi} - \left(0, d\phi\left(\nabla^N_{f_j}f_j\right)\right)$$

$$= \left(0, \tau\left(\phi\right)\right) - 2f^2e\left(\phi\right)\left(grad\ln f, 0\right)\circ\widetilde{\phi}.$$

Comme ϕ est harmonique, on aura donc

$$\tau\left(\widetilde{\phi}\right) = -2f^2e\left(\phi\right)\left(grad\ln f, 0\right)\circ\widetilde{\phi}.$$

Alors $\widetilde{\phi}$ est biharmonique si et seulement si

$$Tr_h\left(\nabla^{\widetilde{\phi}}\right)^2e\left(\phi\right)\left(grad\ln f, 0\right)\circ\widetilde{\phi} + e\left(\phi\right)Tr_h\widetilde{R}^{M\times_f P}\left(\left(grad\ln f, 0\right)\circ\widetilde{\phi}, d\widetilde{\phi}\right)d\widetilde{\phi} = 0. \quad (4.3.1)$$

Pour le terme $Tr_h\left(\nabla^{\widetilde{\phi}}\right)^2e\left(\phi\right)\left(grad\ln f, 0\right)\circ\widetilde{\phi}$ of (4.3.1), on a par définition

$$Tr_h\left(\nabla^{\widetilde{\phi}}\right)^2e\left(\phi\right)\left(grad\ln f, 0\right)\circ\widetilde{\phi} = \widetilde{\nabla}^{\widetilde{\phi}}_{f_j}\widetilde{\nabla}^{\widetilde{\phi}}_{f_j}e\left(\phi\right)\left(grad\ln f, 0\right)\circ\widetilde{\phi} - \widetilde{\nabla}^{\widetilde{\phi}}_{\nabla^N_{f_j}f_j}e\left(\phi\right)\left(grad\ln f, 0\right)\circ\widetilde{\phi}. \quad (4.3.2)$$

Calculons le premier terme $\widetilde{\nabla}^{\widetilde{\phi}}_{f_j}\widetilde{\nabla}^{\widetilde{\phi}}_{f_j}e\left(\phi\right)\left(grad\ln f, 0\right)\circ\widetilde{\phi}$ de (4.3.2). D'après (3.2.1), on obtient

$$\nabla^{\widetilde{\phi}}_{f_j}e\left(\phi\right)\left(grad\ln f, 0\right)\circ\widetilde{\phi} = e\left(\phi\right)\nabla^{\widetilde{\phi}}_{f_j}\left(grad\ln f, 0\right)\circ\widetilde{\phi} + f_j\left(e\left(\phi\right)\right)\left(grad\ln f, 0\right)\circ\widetilde{\phi}$$

$$= e\left(\phi\right)\left|grad\ln f\right|^2\left(0, d\phi\left(f_j\right)\right)\circ\widetilde{\phi} + f_j\left(e\left(\phi\right)\right)\left(grad\ln f, 0\right)\circ\widetilde{\phi},$$

d'où,

$$\nabla^{\widetilde{\phi}}_{f_j}\nabla^{\widetilde{\phi}}_{f_j}e(\phi)(grad\ln f,0)\circ\widetilde{\phi} = \nabla^{\widetilde{\phi}}_{f_j}\left(e(\phi)\left|grad\ln f\right|^2(0,d\phi(f_j))\right)\circ\widetilde{\phi}$$

$$+\nabla^{\widetilde{\phi}}_{f_j}\left(f_j(e(\phi))(grad\ln f,0)\circ\widetilde{\phi}\right)$$

$$= e(\phi)\left|grad\ln f\right|^2\nabla^{\widetilde{\phi}}_{f_j}(0,d\phi(f_j))\circ\widetilde{\phi}$$

$$+f_j(e(\phi))\nabla^{\widetilde{\phi}}_{f_j}(grad\ln f,0)\circ\widetilde{\phi}+\left|grad\ln f\right|^2 f_j(e(\phi))(0,d\phi(f_j))\widetilde{\phi}$$

$$+f_j(f_j(e(\phi)))(grad\ln f,0)\circ\widetilde{\phi}.$$

On déduit que

$$\nabla^{\widetilde{\phi}}_{f_j}\nabla^{\widetilde{\phi}}_{f_j}e(\phi)(grad\ln f,0)\circ\widetilde{\phi} = \left|grad\ln f\right|^2 e(\phi)\left(0,\nabla^{\phi}_{f_j}d\phi(f_j)\right)\circ\widetilde{\phi}$$

$$-2f^2(e(\phi))^2\left|grad\ln f\right|^2(grad\ln f,0)\circ\widetilde{\phi}$$

$$+2\left|grad\ln f\right|^2(0,d\phi(grade(\phi)))\circ\widetilde{\phi} \tag{4.3.3}$$

$$+f_j(f_j(e(\phi)))(grad\ln f,0)\circ\widetilde{\phi}.$$

En utilisant l'équation (3.2.1), on aura

$$\nabla^{\widetilde{\phi}}_{\nabla^N_{f_j}f_j}e(\phi)(grad\ln f,0)\circ\widetilde{\phi} = e(\phi)\nabla^{\widetilde{\phi}}_{\nabla^N_{f_j}f_j}(grad\ln f,0)\circ\widetilde{\phi}+\left(\nabla^N_{f_j}f_j\right)(e(\phi))(grad\ln f,0)\circ\widetilde{\phi}$$

$$= \left|grad\ln f\right|^2 e(\phi)\left(0,d\phi\left(\nabla^N_{f_j}f_j\right)\right)\circ\widetilde{\phi}$$

$$+\left(\nabla^N_{f_j}f_j\right)(e(\phi))(grad\ln f,0)\circ\widetilde{\phi}. \tag{4.3.4}$$

On remplace (4.3.3)et (4.3.4) dans (4.3.2) et on utilise le fait que ϕ est harmonique, on obtient

$$
\begin{aligned}
Tr_h \left(\nabla^{\widetilde{\phi}}\right)^2 e(\phi)(grad \ln f, 0) \circ \widetilde{\phi} &= -2f^2 (e(\phi))^2 |grad \ln f|^2 (grad \ln f, 0) \circ \widetilde{\phi} \\
&\quad + 2 |grad \ln f|^2 (0, d\phi(grad(e(\phi)))) \circ \widetilde{\phi} \\
&\quad + \Delta e(\phi)(grad \ln f, 0) \circ \widetilde{\phi}.
\end{aligned} \tag{4.3.5}
$$

D'autre part, on a

$$
Tr_h \widetilde{R}^{M \times_f P} \left((grad \ln f, 0) \circ \widetilde{\phi}, d\widetilde{\phi}\right) d\widetilde{\phi} = \widetilde{R}^{M \times_f P} ((grad \ln f, 0), (0, d\phi(f_j)))(0, d\phi(f_j)) \circ \widetilde{\phi}.
$$

Par (4.1.2), un simple calcul nous donne

$$
\begin{aligned}
\widetilde{R}^{M \times_f P} ((grad \ln f, 0), (0, d\phi(f_j))) &= -\frac{1}{2} \left(grad \left(|grad \ln f|^2\right), 0\right) \wedge_{G_f} (0, d\phi(f_j)) \\
&\quad - |grad \ln f|^2 (grad \ln f, 0) \wedge_{G_f} (0, d\phi(f_j)).
\end{aligned}
$$

Or,

$$
\left(\left(grad \left(|grad \ln f|^2\right), 0\right) \wedge_{G_f} (0, d\phi(f_j))\right)(0, d\phi(f_j)) = 2f^2 e(\phi) \left(grad \left(|grad \ln f|^2\right), 0\right)
$$

et

$$
\left((grad \ln f, 0) \wedge_{G_f} (0, d\phi(f_j))\right)(0, d\phi(f_j)) = 2f^2 e(\phi)(grad \ln f, 0).
$$

Alors,

$$
\begin{aligned}
Tr_h \widetilde{R}^{M \times_f P} \left((grad \ln f, 0) \circ \widetilde{\phi}, d\widetilde{\phi}\right) d\widetilde{\phi} &= -f^2 e(\phi) \left(grad \left(|grad \ln f|^2\right), 0\right) \circ \widetilde{\phi} \\
&\quad - 2f^2 |grad \ln f|^2 e(\phi)(grad \ln f, 0) \circ \widetilde{\phi}.
\end{aligned} \tag{4.3.6}
$$

Finalement, on conclut que

$$Tr_h\left(\nabla^{\widetilde{\phi}}\right)^2 e(\phi)(grad\ln f,0)\circ\widetilde{\phi}+e(\phi)\,Tr_h\widetilde{R}^{M\times_f P}\left((grad\ln f,0)\circ\widetilde{\phi},d\widetilde{\phi}\right)d\widetilde{\phi}$$

$$=-4f^2\left(e(\phi)\right)^2\left|grad\ln f\right|^2(grad\ln f,0)\circ\widetilde{\phi}$$

$$+\Delta e(\phi)(grad\ln f,0)\circ\widetilde{\phi}$$
$$-f^2\left(e(\phi)\right)^2\left(grad\left(\left|grad\ln f\right|^2\right),0\right)\circ\widetilde{\phi}$$

$$+2\left|grad\ln f\right|^2\left(0,d\phi\left(grad\left(e(\phi)\right)\right)\right)\circ\widetilde{\phi}.$$

Ainsi, $\widetilde{\phi}$ est biharmonique si et seulement si

$$\begin{cases} f^2\left(e(\phi)\right)^2\left(4\left|grad\ln f\right|^2 grad\ln f+grad\left(\left|grad\ln f\right|^2\right)\right)-\left(\Delta e(\phi)\right)grad\ln f=0 \\ \text{and} \\ d\phi\left(grad\left(e(\phi)\right)\right)=0 \end{cases}$$

On a

$$grad\left(\left|gradf^2\right|^2\right)=grad\left(\left|2f^2grad\ln f\right|^2\right)$$

$$=4grad\left(f^4\left|grad\ln f\right|^2\right)$$

$$=4f^4grad\left(\left|grad\ln f\right|^2\right)+16f^4\left|grad\ln f\right|^2 grad\ln f$$

$$=4f^4\left(4\left|grad\ln f\right|^2 grad\ln f+grad\left(\left|grad\ln f\right|^2\right)\right),$$

cela veut dire que

$$4\left|grad\ln f\right|^2 grad\ln f+grad\left(\left|grad\ln f\right|^2\right)=\frac{1}{4f^4}grad\left(\left|gradf^2\right|^2\right).$$

Par conséquent $\widetilde{\phi}$ est biharmonique si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{c}(e(\phi))^2\, grad\left(|gradf^2|^2\right)-2\,(\Delta e(\phi))\, gradf^2=0\\ \text{and}\\ d\phi\,(grad\,(e(\phi)))=0\end{array}\right.$$

Une application directe du Théorème 4.3.1 peut être vue, en supposant que la fonction $e(\phi)$ est constante, d'où le résultat suivant :

Corollaire 4.3.1. *Soit $\phi:(N^n,h)\longrightarrow(P^p,k)$ une application harmonique telle que $e(\phi)$ est constante. Alors l'application $\widetilde{\phi}:N\longrightarrow(M\times_f P,G_f)$ définie par $\widetilde{\phi}(y)=(x_0,\phi(y))$ est biharmonique si et seulement si*

$$grad\left(|gradf^2|^2\right)=0.$$

En particulier, si $\phi=Id_N$, on obtient (voir [4])

Corollaire 4.3.2. *l'inclusion $i_{x_0}:N\longrightarrow(M\times_f N,G_f)$ définie $i_{x_0}(y)=(x_0,y)$ est biharmonique si et seulement si*

$$grad\left(|gradf^2|^2\right)=0.$$

4.4 Cas IV : $\widetilde{\phi}:(M^m\times_f N^n,G_f)\longrightarrow(P^p,k)$

En premier temps, on considère l'application de classe C^∞ $\phi:(M^m,g)\longrightarrow(P^p,k)$ et définissons l'application $\widetilde{\phi}:(M^m\times_f N^n,G_f)\longrightarrow(P^p,k)$ par $\widetilde{\phi}(x,y)=\phi(x)$. Nous allons étudier la biamonicité de l'application $\widetilde{\phi}$. Commençons par le résultat suivant :

Proposition 4.4.1. *Soit $\phi:(M^m,g)\longrightarrow(P^p,k)$ une application de classe C^∞ . Le champ de tension de l'application $\widetilde{\phi}:(M^m\times_f N^n,G_f)\longrightarrow(P^p,k)$ définie par $\widetilde{\phi}(x,y)=\phi(x)$ est donné par :*

$$\tau\left(\widetilde{\phi}\right)=\tau(\phi)+nd\phi\,(grad\ln f) \tag{4.4.1}$$

Démonstration. Soient $\{e_i\}_{1\leq i\leq m}$ une base orthonormée sur M et $\{f_j\}_{1\leq j\leq n}$ celle définie sur N. Donc la base orthonormée définie sur $M\times_f N$ est donnée par $\left\{(e_i,0),\frac{1}{f}(0,f_j)\right\}$. Notons que dans ce cas on a $d\widetilde{\phi}(X,Y)=(d\phi(X),0)$ pour tous $X\in\Gamma(TM)$ et $Y\in\Gamma(TN)$.

Par la définition du champ de tension, on a :

$$\begin{aligned}\tau\left(\widetilde{\phi}\right) &= Tr_{G_f}\nabla d\widetilde{\phi}\\ &= \nabla^{\widetilde{\phi}}_{(e_i,0)}d\widetilde{\phi}\left(e_i,0\right)+\frac{1}{f^2}\nabla^{\widetilde{\phi}}_{(0,f_j)}d\widetilde{\phi}\left(0,f_j\right)\\ &- d\widetilde{\phi}\left(\widetilde{\nabla}_{(e_i,0)}\left(e_i,0\right)\right)-\frac{1}{f^2}d\widetilde{\phi}\left(\widetilde{\nabla}_{(0,f_j)}\left(0,f_j\right)\right).\end{aligned}$$

Un calcul simple nous donne,

$$\nabla^{\widetilde{\phi}}_{(e_i,0)}d\widetilde{\phi}\left(e_i,0\right)=\nabla^{\phi}_{e_i}d\phi\left(e_i\right)$$

et

$$\nabla^{\widetilde{\phi}}_{(0,f_j)}d\widetilde{\phi}\left(0,f_j\right)=0,$$

En utilisant l'équation (4.1.1), on déduit que

$$\widetilde{\nabla}_{(e_i,0)}\left(e_i,0\right)=\left(\nabla_{e_i}e_i,0\right)$$

et

$$\widetilde{\nabla}_{(0,f_j)}\left(0,f_j\right)=\left(0,\nabla_{f_j}f_j\right)-nf^2\left(grad\ln f,0\right).$$

Il s'ensuit que,

$$\tau\left(\widetilde{\phi}\right)=\nabla^{\phi}_{e_i}d\phi\left(e_i\right)-d\phi\left(\nabla^{M}_{e_i}e_i\right)+nd\phi\left(grad\ln f\right),$$

on obtient alors

$$\tau\left(\widetilde{\phi}\right)=\tau\left(\phi\right)+nd\phi\left(grad\ln f\right).$$

Nous allons calculer le champ bitension de l'application $\widetilde{\phi}:(M^m\times_f N^n,G_f)\longrightarrow(P^p,k)$.

Théorème 4.4.1. *Soit $\phi:(M^m,g)\longrightarrow(P^p,k)$ une application de classe C^∞. Le champ bitension de l'application $\widetilde{\phi}:(M^m\times_f N^n,G_f)\longrightarrow(P^p,k)$ définie par $\widetilde{\phi}(x,y)=\phi(x)$ est donné par :*

$$\begin{aligned}\tau_2\left(\widetilde{\phi}\right) &= \tau_2\left(\phi\right)-n\left(Tr_g\nabla^2 d\phi\left(grad\ln f\right)+Tr_gR^p\left(d\phi\left(grad\ln f\right),d\phi\right)d\phi\right)\\ &- n\nabla_{grad\ln f}\tau\left(\phi\right)-n^2\nabla_{grad\ln f}d\phi\left(grad\ln f\right).\end{aligned}\tag{4.4.2}$$

Démonstration. Par la définition du champ bitension, on a

$$\tau_2\left(\widetilde{\phi}\right) = -Tr_{G_f}\left(\nabla^{\widetilde{\phi}}\right)^2\tau\left(\widetilde{\phi}\right) - Tr_{G_f}R^P\left(\tau\left(\widetilde{\phi}\right), d\widetilde{\phi}\right)d\widetilde{\phi} \tag{4.4.3}$$

Pour le premier terme $Tr_{G_f}\left(\nabla^{\widetilde{\phi}}\right)^2\tau\left(\widetilde{\phi}\right)$, on a :

$$\begin{aligned} Tr_{G_f}\left(\nabla^{\widetilde{\phi}}\right)^2\tau\left(\widetilde{\phi}\right) &= \nabla^{\widetilde{\phi}}_{(e_i,0)}\nabla^{\widetilde{\phi}}_{(e_i,0)}\tau\left(\widetilde{\phi}\right) + \frac{1}{f^2}\nabla^{\widetilde{\phi}}_{(0,f_j)}\nabla^{\widetilde{\phi}}_{(0,f_j)}\tau\left(\widetilde{\phi}\right) \\ &\quad - \nabla^{\widetilde{\phi}}_{\widetilde{\nabla}_{(e_i,0)}(e_i,0)}\tau\left(\widetilde{\phi}\right) - \frac{1}{f^2}\nabla^{\widetilde{\phi}}_{\widetilde{\nabla}_{\left(0,f_j\right)}(0,f_j)}\tau\left(\widetilde{\phi}\right). \end{aligned}$$

Nous allons calculer cette expression terme par terme. On aura donc :

$$\begin{aligned} \nabla^{\widetilde{\phi}}_{(e_i,0)}\nabla^{\widetilde{\phi}}_{(e_i,0)}\tau\left(\widetilde{\phi}\right) &= \nabla^{\widetilde{\phi}}_{(e_i,0)}\nabla^{\widetilde{\phi}}_{(e_i,0)}\tau\left(\phi\right) + n\nabla^{\widetilde{\phi}}_{(e_i,0)}\nabla^{\widetilde{\phi}}_{(e_i,0)}d\phi\left(grad\ln f\right) \\ &= \nabla^{\phi}_{e_i}\nabla^{\phi}_{e_i}\tau\left(\phi\right) + n\nabla^{\phi}_{e_i}\nabla^{\phi}_{e_i}d\phi\left(grad\ln f\right) \end{aligned}$$

et

$$\nabla^{\widetilde{\phi}}_{(0,f_j)}\nabla^{\widetilde{\phi}}_{(0,f_j)}\tau\left(\widetilde{\phi}\right) = 0.$$

En utilisant l'équation (4.1.1), on obtient :

$$\nabla^{\widetilde{\phi}}_{\widetilde{\nabla}_{(e_i,0)}(e_i,0)}\tau\left(\widetilde{\phi}\right) = \nabla^{\phi}_{\nabla^M_{e_i}e_i}\tau\left(\phi\right) + n\nabla^{\phi}_{\nabla^M_{e_i}e_i}d\phi\left(grad\ln f\right),$$

et

$$\nabla^{\widetilde{\phi}}_{\widetilde{\nabla}_{\left(0,f_j\right)}(0,f_j)}\tau\left(\widetilde{\phi}\right) = -nf^2\nabla^{\phi}_{grad\ln f}\tau\left(\phi\right) - n^2f^2\nabla^{\phi}_{grad\ln f}d\phi\left(grad\ln f\right).$$

Alors, on déduit que :

$$\begin{aligned} Tr_{G_f}\left(\nabla^{\widetilde{\phi}}\right)^2\tau\left(\widetilde{\phi}\right) &= Tr_g\left(\nabla^{\phi}\right)^2\tau\left(\phi\right) + nTr_g\left(\nabla^{\phi}\right)^2 d\phi\left(grad\ln f\right) \\ &\quad + n\nabla^{\phi}_{grad\ln f}\tau\left(\phi\right) + n^2\nabla^{\phi}_{grad\ln f}d\phi\left(grad\ln f\right). \end{aligned} \tag{4.4.4}$$

Pour terminer la démonstration, nous allons simplifier le terme $Tr_{G_f}R^P\left(\tau\left(\widetilde{\phi}\right), d\widetilde{\phi}\right)d\widetilde{\phi}$, on a :

$$\begin{aligned}
Tr_{G_f} R^P\left(\tau\left(\widetilde{\phi}\right), d\widetilde{\phi}\right) d\widetilde{\phi} &= R^P\left(\tau\left(\widetilde{\phi}\right), d\widetilde{\phi}\left(e_i, 0\right)\right) d\widetilde{\phi}\left(e_i, 0\right) \\
&+ \frac{1}{f^2} R^P\left(\tau\left(\widetilde{\phi}\right), d\widetilde{\phi}\left(0, f_j\right)\right) d\widetilde{\phi}\left(0, f_j\right) \\
&= R^P\left(\tau\left(\widetilde{\phi}\right), d\widetilde{\phi}\left(e_i, 0\right)\right) d\widetilde{\phi}\left(e_i, 0\right) \\
&= R^P\left(\tau\left(\phi\right), d\phi\left(e_i\right)\right) d\phi\left(e_i\right) \\
&+ nR^P\left(d\phi\left(grad \ln f\right), d\phi\left(e_i\right)\right) d\phi\left(e_i\right).
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que,

$$Tr_{G_f} R^P\left(\tau\left(\widetilde{\phi}\right), d\widetilde{\phi}\right) d\widetilde{\phi} = Tr_g R^P\left(\tau\left(\phi\right), d\phi\right) d\phi + nTr_g R^P\left(d\phi\left(grad \ln f\right), d\phi\right) d\phi. \quad (4.4.5)$$

On remplace (4.4.4) et (4.4.5) dans (4.4.3), on trouve :

$$\begin{aligned}
\tau_2\left(\widetilde{\phi}\right) &= \tau_2\left(\phi\right) - n\left(Tr_g \nabla^2 d\phi\left(grad \ln f\right) + Tr_g R^p\left(d\phi\left(grad \ln f\right), d\phi\right) d\phi\right) \\
&- n\nabla_{grad \ln f}\tau\left(\phi\right) - n^2\nabla_{grad \ln f} d\phi\left(grad \ln f\right).
\end{aligned}$$

Comme conséquence, si ϕ est harmonique, on a :

Corollaire 4.4.1. *Soit $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (P^p, k)$ une application harmonique. L'application $\widetilde{\phi} : (M^m \times_f N^n, G_f) \longrightarrow (P^p, k)$ définie par $\widetilde{\phi}(x, y) = \phi(x)$ est biharmonique si et seulement si*

$$Tr_g \nabla^2 d\phi\left(grad \ln f\right) + Tr_g R^P\left(d\phi\left(grad \ln f\right), d\phi\right) d\phi + n\nabla_{grad \ln f} d\phi\left(grad \ln f\right) = 0.$$

En prticulier si $\phi = Id_M$, la première projection $P_1 : (M^m \times_f N^n, G_f) \longrightarrow (M^m, g)$ définie par $P_1(x, y) = x$ est biharmonique si et seulement si (voir [4])

$$grad \Delta \ln f + \frac{n}{2} grad\left(|grad \ln f|^2\right) + 2Ricci^M\left(grad \ln f\right) = 0.$$

On donne à présent un exemple d'application biharmonique non harmonique.

Exemple 4.4.1. *Soit $\widetilde{\varphi} : \mathbb{R}^m \backslash \{0\} \times_f N^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$ définie par $\widetilde{\varphi}(x, y) = \frac{x}{|x|^2}$ en supposons que $\ln f$ est radiale ($\ln f = \alpha(r)$). Donc par le théorème 4.4.1, on déduit que l'application $\widetilde{\varphi} : \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \times_f N^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ est biharmonique si est seulement si la fonction α satisfait* *l'équation différentielle suivante :*

$$n\alpha''' + \frac{n(m-5)}{r}\alpha'' - \frac{3n(3m-7)}{r^2}\alpha' + n^2\alpha'\alpha'' - \frac{2n^2}{r}(\alpha')^2 - \frac{8(m-2)(m-4)}{r^3} = 0.$$

Soit $\beta = \alpha'$*, cette équation deviendra :*

$$n\beta'' + \frac{n(m-5)}{r}\beta' - \frac{3n(3m-7)}{r^2}\beta + n^2\beta\beta' - \frac{2n^2}{r}\beta^2 - \frac{8(m-2)(m-4)}{r^3} = 0.$$

Pour une solution particulière de type $\beta = \frac{a}{r}$ *(*$a \in \mathbb{R}^*$*), alors* $\widetilde{\varphi} : \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \times_f N^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ *est biharmonique si est seulement si*

$$3n^2a^2 + 2n(5m-14)a + 8(m-2)(m-4) = 0.$$

Cette équation admet deux solutions : $a = \frac{4-2m}{n}$ *et* $a = \frac{4(4-m)}{3n}$*.*

1. *Pour* $a = \frac{4-2m}{n}$*, on obtient* $f(r) = Cr^{\frac{4-2m}{n}}$ *et dans ce cas* $\widetilde{\varphi} : \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \times_f N^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ *est biharmonique donc harmonique.*
2. *Pour* $a = \frac{4(4-m)}{3n}$*, on obtient* $f(r) = Cr^{\frac{4(4-m)}{3n}}$ *et dans ce cas* $\widetilde{\varphi} : \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \times_f N^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ *est biharmonique non harmonique.*

Maintenant, on considère l'application $\psi : (N^n, g) \longrightarrow (P^p, k)$ et on définit l'application $\widetilde{\psi} : (M^m \times_f N^n, G_f) \longrightarrow (P^p, k)$ par $\widetilde{\psi}(x, y) = \psi(y)$. Nous allons étudier la biharmonicité $\widetilde{\psi}$, on obtient le résultat suivant :

Théorème 4.4.2. *Soit* $\psi : (N^n, h) \to (P^p, k)$ *une application de classe* C^∞*, on définit* $\widetilde{\psi} : (M^m \times_f N^n, G_f) \to (P^p, k)$ *par* $\widetilde{\psi}(x, y) = \psi(y)$*. Le champ tension et bitension de l'application* $\widetilde{\psi}$ *sont donnés par :*

$$\tau\left(\widetilde{\psi}\right) = \frac{1}{f^2 \circ \pi}\tau(\psi) \tag{4.4.6}$$

et

$$\tau_2\left(\widetilde{\psi}\right) = \frac{1}{f^4 \circ \pi}\tau_2(\psi) - \frac{2}{f^2 \circ \pi}\left(\left(\Delta \ln f + (n-2)\left|grad \ln f\right|^2\right) \circ \pi\right)\tau(\psi). \tag{4.4.7}$$

Démonstration. Commençons par calculer le champ tension de $\widetilde{\psi}$. Par définition, on a :

$$\begin{aligned}\tau\left(\widetilde{\psi}\right) &= Tr_{G_f}\nabla d\widetilde{\psi}\\ &= \nabla^{\widetilde{\psi}}_{(e_i,0)}d\widetilde{\psi}\left(e_i,0\right)+\frac{1}{f^2\circ\pi}\nabla^{\widetilde{\psi}}_{(0,f_j)}d\widetilde{\psi}\left(0,f_j\right)\\ &- d\widetilde{\psi}\left(\widetilde{\nabla}_{(e_i,0)}\left(e_i,0\right)\right)-\frac{1}{f^2\circ\pi}d\widetilde{\psi}\left(\widetilde{\nabla}_{(0,f_j)}\left(0,f_j\right)\right).\end{aligned}$$

En utilisant l'équation (4.1.1), on obtient,

$$\tau\left(\widetilde{\psi}\right)=\frac{1}{f^2\circ\pi}\nabla^{\psi}_{f_j}d\psi\left(f_j\right)-\frac{1}{f^2\circ\pi}d\psi\left(\nabla_{f_j}f_j\right)=\frac{1}{f^2\circ\pi}\tau\left(\psi\right),$$

donc

$$\tau\left(\widetilde{\psi}\right)=\frac{1}{f^2\circ\pi}\tau\left(\psi\right).$$

Ainsi $\widetilde{\psi}$ est harmonique si est seulement si ψ est harmonique. Calculons maintenant le champ bitension de l'application $\widetilde{\psi}$. On a :

$$\tau_2\left(\widetilde{\psi}\right)=-Tr_{G_f}\left(\nabla^{\widetilde{\psi}}\right)^2\tau\left(\widetilde{\psi}\right)-Tr_{G_f}R^P\left(\tau\left(\widetilde{\psi}\right),d\widetilde{\psi}\right)d\widetilde{\psi}. \tag{4.4.8}$$

Pour le premier terme $Tr_{G_f}\left(\nabla^{\widetilde{\psi}}\right)^2\tau\left(\widetilde{\psi}\right)$, on trouve :

$$\begin{aligned}Tr_{G_f}\left(\nabla^{\widetilde{\psi}}\right)^2\tau\left(\widetilde{\psi}\right) &= \nabla^{\widetilde{\psi}}_{(e_i,0)}\nabla^{\widetilde{\psi}}_{(e_i,0)}\tau\left(\widetilde{\psi}\right)+\frac{1}{f^2\circ\pi}\nabla^{\widetilde{\psi}}_{(0,f_j)}\nabla^{\widetilde{\psi}}_{(0,f_j)}\tau\left(\widetilde{\psi}\right)\\ &- \nabla^{\widetilde{\psi}}_{\widetilde{\nabla}_{(e_i,0)}(e_i,0)}\tau\left(\widetilde{\psi}\right)-\frac{1}{f^2\circ\pi}\nabla^{\widetilde{\psi}}_{\widetilde{\nabla}_{\left(0,f_j\right)}(0,f_j)}\tau\left(\widetilde{\psi}\right).\end{aligned}$$

Or

$$\nabla^{\widetilde{\psi}}_{(e_i,0)}\nabla^{\widetilde{\psi}}_{(e_i,0)}\tau\left(\widetilde{\psi}\right)=\frac{2}{f^2\circ\pi}\left(\left(2\left|grad\ln f\right|^2-e_i\left(e_i\left(\ln f\right)\right)\right)\circ\pi\right)\tau\left(\psi\right)$$

et

$$\frac{1}{f^2\circ\pi}\nabla^{\widetilde{\psi}}_{(0,f_j)}\nabla^{\widetilde{\psi}}_{(0,f_j)}\tau\left(\widetilde{\psi}\right)=\frac{1}{f^4\circ\pi}\nabla^{\psi}_{f_j}\nabla^{\psi}_{f_j}\tau\left(\psi\right).$$

Finalement, par (4.1.1), on obtient :

$$\nabla^{\widetilde{\psi}}_{\widetilde{\nabla}_{(e_i,0)}(e_i,0)}\tau\left(\widetilde{\psi}\right)=\frac{2}{f^2\circ\pi}\left(\nabla_{e_i}e_i\left(\left(\ln f\right)\right)\circ\pi\right)\tau\left(\psi\right)$$

et

$$\frac{1}{f^2 \circ \pi} \nabla^{\widetilde{\psi}}_{\widetilde{\nabla}_{(0,f_j)}(0,f_j)} \tau\left(\widetilde{\psi}\right) = \frac{1}{f^4 \circ \pi} \nabla^{\psi}_{\nabla_{f_j} f_j} \tau(\psi) + \frac{2n}{f^2 \circ \pi}\left(\left(|grad \ln f|^2\right) \circ \pi\right) \tau(\psi).$$

Ce qui nous donne,

$$Tr_{G_f}\left(\nabla^{\widetilde{\psi}}\right)^2 \tau\left(\widetilde{\psi}\right) = \frac{1}{f^4 \circ \pi} Tr_h \nabla^2 \tau(\psi) - \frac{2}{f^2 \circ \pi}\left(\left(\Delta \ln f + (n-2)|grad \ln f|^2\right) \circ \pi\right) \tau(\psi) \tag{4.4.9}$$

Par conséquent, pour le premier terme $Tr_{G_f} R^P\left(\tau\left(\widetilde{\psi}\right), d\widetilde{\psi}\right) d\widetilde{\psi}$, on peut établir que

$$Tr_{G_f} R^P\left(\tau\left(\widetilde{\psi}\right), d\widetilde{\psi}\right) d\widetilde{\psi} = \frac{1}{f^4 \circ \pi} Tr_h R^P(\tau(\psi), d\psi) d\psi. \tag{4.4.10}$$

En substituant (4.4.10) et (4.4.10) dans (4.4.8), on trouve :

$$\tau_2\left(\widetilde{\psi}\right) = \frac{1}{f^4 \circ \pi} \tau_2(\psi) - \frac{2}{f^2 \circ \pi}\left(\left(\Delta \ln f + (n-2)|grad \ln f|^2\right) \circ \pi\right) \tau(\psi).$$

Une conséquence immédiate du Théorème 4.4.2 est donnée par le résultat suivant : :

Corollaire 4.4.2. *Soit $\psi : (N^n, h) \longrightarrow (P^p, k)$ une application biharmonique non harmonique. Alors l'application $\widetilde{\phi} : (M^m \times_f N^n, G_f) \longrightarrow (P^p, k)$ définie par $\widetilde{\psi}(x, y) = \psi(y)$ est biharmonique si te seulement si la fonction f^{n-2} est harmonique.*

Chapitre 5

Géométrie des applications f-biharmoniques

Ce chapitre a pour but d'étudier particulièrement la f-biharmonicité des applications conformes. Pour se faire, on donne en premier lieu certaines définitions élémentaires puis on traite la notion du tenseur f-énérgie impulsion et les propriétés géométriques associées aux applications f-biharmoniques et celles associées aux applications conformes afin de pouvoir démontrer le théorème principal donnant la condition nécessaire et suffisante pour qu'une application conforme entre les variétés riemanniennes équidimensionnelles soit biharmonique.

5.1 Application f-harmonique et f-biharmonique

5.1.1 Application f-harmonique

Définition 5.1.1. Soient (M^m, g) et (N^n, h) deux variétés riemanniennes et $\phi : M \longmapsto N$ une application de classe C^∞ et $f : (M^m, g) \longrightarrow (0, +\infty)$ une fonction de classe C^∞ strictement positive. On appelle f-énergie de l'application ϕ sur un domaine compact de M, la fonctionnelle E_f définie par :

$$E_f(\phi, D) = \frac{1}{2} \int_D f(x) \, |d\phi|^2 \, \nu_g \tag{5.1.1}$$

Définition 5.1.2. Une application $\phi : (M^m, g) \longmapsto (N^n, h)$ de classe C^∞ est dite f-harmonique, si elle est point critique de la fonctionnelle f-énergie $E_f(\phi, D)$, c'est à dire :

$$\frac{d}{dt} E_f(\phi_t, D)_{t=0} = 0 \tag{5.1.2}$$

où $\{\phi_t\}$ est une variation de $\{\phi\}$ à support dans D.

Définition 5.1.3. Soit $\phi : (M^m, g) \longmapsto (N^n, h)$ une application de classe C^∞. Le champ f-tension de ϕ est une section $\tau_f(\phi) \in \Gamma(\phi^{-1}(TN))$, définie par :

$$\tau_f(\phi) = tr_g \nabla f d\phi \tag{5.1.3}$$

Remarque 5.1.1. l'équation donnée par (5.1.3) est appelée équation d'Euler-Lagrange associée à (5.1.1)

Proposition 5.1.1. *Soit $\phi : (M^m, g) \longmapsto (N^n, h)$ une application de classe C^∞, le champ f-tension est donnée par :*

$$\tau_f(\phi) = f\tau(\phi) + d\phi(gradf) \tag{5.1.4}$$

Démonstration. Soit $\{e_1, ..., e_m\}$ une base orthonormée sur M. Par la définition du champ f-tension, on a :

$$\tau_f(\phi) = tr_g \nabla f d\phi = \sum_{i=1}^m \nabla f d\phi(e_i, e_i)$$

$$= \sum_{i=1}^m \left(\nabla^\phi_{e_i} f d\phi(e_i) - f d\phi\left(\nabla^M_{e_i} e_i\right)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^m \left(f \nabla^\phi_{e_i} f d\phi(e_i) + e_i(f) d\phi(e_i) - f d\phi\left(\nabla^M_{e_i} e_i\right)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^m \left(f\left(\nabla^\phi_{e_i} f d\phi(e_i) - d\phi\left(\nabla^M_{e_i} e_i\right)\right) + e_i(f) d\phi\, e_i()\right)$$

Or,

$$\sum_{i=1}^m \left(\nabla^\phi_{e_i} f d\phi(e_i) - d\phi\left(\nabla^M_{e_i} e_i\right)\right) = \tau(\phi)$$

et

$$\sum_{i=1}^m e_i(f) d\phi(e_i) = d\phi(gradf)$$

on obtient au final :

$$\tau_f(\phi) = f\tau(\phi) + d\phi(gradf)$$

Remarque 5.1.2. Toute application harmonique $\phi : (M^m, g) \longmapsto (N^n, h)$ est f-harmonique si et seulement si $gradf \in kerd\phi$.

Théorème 5.1.1. (***Première variation de la f-énergie***)
Soit $\phi : (M^m, g) \longmapsto (N^n, h)$ *une application de classe* C^∞ *et* $\{\phi_t\}$ *est une variation de classe* C^∞ *de* $\{\phi\}$ *à support dans D. Alors :*

$$\frac{d}{dt}E_f(\phi_t, D)_{t=0} = -\int_D h(v, \tau_f(\phi))\,\nu_g \tag{5.1.5}$$

où $v = \frac{d}{dt}\phi_t\,|_{t=0}$

Démonstration. Soit $\{e_1, ..., e_m\}$ une base orthonormée sur M. Posons $F : (-\epsilon, +\epsilon) \times M, (t, x) \longmapsto F(t, x) = \phi_t(x)$ de classe C^∞, on a donc :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E_f(\phi_t, D)_{t=0} &= \int_D \sum_{i=1}^m fh\left(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}}(dF(e_i)), dF(e_i)\right)\nu_g\,|_{t=0} \\ &= \int_D \sum_{i=1}^m fh\left(\nabla^\phi_{e_i} v, d\phi(e_i)\right)\nu_g \end{aligned} \tag{5.1.6}$$

avec $(dF(e_i))_{(0,x)} = d\phi(e_i)_{(0,x)} = \frac{d}{dt}\phi_t(x)\,|_{t=0} = v(x)$
Soit maintenant la 1-forme θ à support compact définie par :

$$\theta(X) = h(v, fd\phi(X)), \forall X \in \Gamma(TM)$$

Alors,

$$div^M\theta = \sum_{i=1}^m \left\{e_i(\theta(e_i)) - \theta\left(\nabla^M_{e_i} e_i\right)\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^m \left\{h\left(\nabla^\phi_{e_i} v, fd\phi(e_i)\right) + h\left(v, \nabla^\phi_{e_i} fd\phi(e_i)\right) - h\left(v, fd\phi\left(\nabla^M_{e_i} e_i\right)\right)\right\}$$

Ainsi, d'après (5.1.6) et le théorème de Stokes, on aura :

$$\frac{d}{dt}E_f\left(\phi_t, D\right)_{t=0} = -\int_D \sum_{i=1}^{m} h\left(v, \left\{\nabla^{\phi}_{e_i} f d\phi\left(e_i\right) - f d\phi\left(\nabla^M_{e_i} e_i\right)\right\}\right)\nu_g$$

$$= -\int_D h\left(v, \tau_f\left(\phi\right)\right)\nu_g$$

Remarque 5.1.3. 1. Si on considère $f = 1$, on retrouve la définition du champ de tenseur à ϕ, $\tau_f\left(\phi\right) = \tau_1\left(\phi\right)$.
2. Le champ f-tension de ϕ ,$\tau_f\left(\phi\right)$, peut être écrit localement comme suit :

$$\tau_f\left(\phi\right) = g^{ij}\left\{f\frac{\partial^2\phi^\gamma}{\partial x^i\partial x^j} + f\frac{\partial\phi^\alpha\partial\phi^\beta}{\partial x^i\partial x^j}\overline{\Gamma}^k_{\alpha\beta}\circ\phi - f\frac{\partial\phi^\gamma}{\partial x^k}\Gamma^k_{ij} + \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial\phi^\gamma}{\partial x^j}\right\}\frac{\partial}{\partial y^\gamma}\circ\phi$$

***Exemple* 5.1.1.** *Soit $\phi : \left(\mathbb{R}, \langle,\rangle_{\mathbb{R}}\right) \longrightarrow \left(\mathbb{R}, \langle,\rangle_{\mathbb{R}}\right)$ une fonction de classe C^∞ si $f\left(x\right) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$, alors ϕ est f-harmonique si ϕ est solution de l'équation différentielle :*

$$f\phi^{''} + f^{'}\phi^{'} = 0 \Longrightarrow \phi^{''} + \phi^{'} = 0 \Longrightarrow \phi\left(x\right) = a + be^x, \forall a, b \in \mathbb{R}$$

On constate qu'une application f-harmonique n'est pas nécessairement harmonique.

5.1.2 Tenseur f-énergie impulsion

Soit $\phi : \left(M^m, g\right) \longmapsto \left(N^n, h\right)$ une application de classe C^∞. Si $\{g\}_{t\in[-\epsilon,+\epsilon]}$ une variation de la métrique g avec $g_0 = g$, alors on définit le tenseur 2-covariant δg sur la variété M par :

$$\delta g = \frac{\partial}{\partial t}g\,|_{t=0} \in \Gamma\left(T^*M \otimes T^*M\right)$$

localement, on obtient :

$$g_t = g_{ij}\left(t, x\right)dx^i \otimes dx^j, g_0 = g = g_{ij}\left(x\right)dx^i \otimes dx^j et \delta g = \frac{\partial}{\partial t}g_{ij}\left(t, x\right)dx^i \otimes dx^j$$

Définition 5.1.4. Soit $\phi : \left(M^m, g\right) \longmapsto \left(N^n, h\right)$ une application de classe C^∞. On appelle tenseur énergie impulsion de ϕ, le tenseur symétrique 2-covariant défini par :

$$S\left(\phi\right) = e\left(\phi\right)g - \phi^*h$$

c'est à dire,

$$\forall X, Y \in \Gamma\left(TM\right), S\left(\phi\right)\left(X, Y\right) = e\left(\phi\right)g\left(X, Y\right) - h\left(d\phi\left(X\right), d\phi\left(Y\right)\right)$$

où $e(\phi) = \frac{1}{2}|d\phi|^2$ étant la densité de ϕ et ϕ^*h la métrique pull back.

Proposition 5.1.2. ([1]) *Soient $\phi : (M^m, g) \longmapsto (N^n, h)$ une application de classe C^∞ et $\{g\}_{t\in[-\epsilon,+\epsilon]}$ une variation de la métrique g de classe C^∞. Alors,*

$$\frac{d}{dt}E(\phi_t, D)\Big|_{t=0} = \frac{1}{2}\int_D \langle S(\phi), \delta g\rangle \nu_g$$

où D étant le domaine compact de M et $\langle,\rangle$ la métrique induite.

Théorème 5.1.2. *Soit $\phi : (M^m, g) \longmapsto (N^n, h)$ une application de classe C^∞, alors*

$$div^M S(\phi) = -h(\tau(\phi), d\phi)$$

Démonstration. Soit $\{e_1, .., e_m\}$ une base orthonormée sur M définie au voisinage de $x \in M$, on a par définition :

$$S(\phi)(e_i, e_j) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^m h(d\phi(e_k), d\phi(e_k))\delta_{ij} - h(d\phi(e_i), d\phi(e_j))$$

ainsi,

$$\begin{aligned}
\left(div^M S(\phi)\right)(e_j) &= \sum_{i=1}^m \nabla_{e_i} S(\phi)(e_i, e_j) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^m e_i(h(d\phi(e_k), d\phi(e_k)))\delta_{ij} - \sum_{i=1}^m e_i(h(d\phi(e_i), d\phi(e_j))) \\
&= h(\tau(\phi), d\phi(e_j)) - \sum_{i,j=1}^m h\left(d\phi(e_i), \nabla^\phi_{e_i} d\phi(e_j) - \nabla^\phi_{e_j} d\phi(e_i)\right) \\
&= -h(\tau(\phi), d\phi(e_j))
\end{aligned}$$

Corollaire 5.1.1. *Soit $\phi : (M^m, g) \longmapsto (N^n, h)$ une application de classe C^∞. Si ϕ est harmonique, alors $div^M S(\phi) = 0$.*

Définition 5.1.5. Soient $\phi : (M^m, g) \longmapsto (N^n, h)$ une application de classe C^∞ et $f : (M^m, g) \longrightarrow (0, +\infty)$ une fonction de classe C^∞ strictement positive. On définit le tenseur f-énergie impulsion de ϕ par :

$$S_f(\phi) = fe(\phi)\, g - f\phi^*(h) \tag{5.1.7}$$

c'est à dire,

$$S_f(\phi)(X,Y) = fe(\phi)\, g(X,Y) - fh(d\phi(X), d\phi(Y))$$

Proposition 5.1.3. *Soient $\phi : (M^m, g) \longmapsto (N^n, h)$ une application de classe C^∞ et f : $(M^m, g) \longrightarrow (0, +\infty)$ une fonction de classe C^∞ strictement positive, alors :*

$$div^M S_f(\phi) = -h(\tau_f(\phi), d\phi) + e(\phi)\, df \tag{5.1.8}$$

Démonstration. Soit $\{e_1, .., e_m\}$ une base orthonormée sur M telle que $\nabla^M_{e_i} e_j = 0$ au point $x \in M$, $\forall i, j = 1, ..., m$, on a donc $\forall X \in \Gamma(TM)$:

$$\begin{aligned}
\left(div^M S_f(\phi)\right)(X) &= (\nabla_{e_i} S_f(\phi))(e_i, X) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left\{ e_i (S_f(\phi)(e_i, X)) - S_f(\phi)\left(e_i, \nabla^M_{e_i} X\right) \right\}
\end{aligned} \tag{5.1.9}$$

D'une part, en utilisant (5.1.7) on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} \{e_i (S_f(\phi)(e_i, X))\} &= \sum_{i=1}^{m} \{e_i (fe(\phi)\, g(e_i, X)) - e_i (fh(d\phi(e_i), d\phi(X)))\} \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left\{ e_i (e(\phi))\, fg(e_i, X) + e_i(f)\, e(\phi)\, g(e_i, X) + fe(\phi)\, g\left(e_i, \nabla^M_{e_i} X\right) \right\} \\
&- \left\{ e_i(f)\, h(d\phi(e_i), d\phi(X)) - fh\left(\nabla^\phi_{e_i} d\phi(e_i), d\phi(X)\right) \right. \\
&- fh\left(d\phi(e_i), \nabla^\phi_{e_i} d\phi(X)\right)
\end{aligned} \tag{5.1.10}$$

Ainsi,

$$\sum_{i=1}^{m}\left\{e_i\left(S_f\left(\phi\right)\left(e_i,X\right)\right)\right\}=fX\left(e\left(\phi\right)\right)+e\left(\phi\right)X\left(f\right)+\sum_{i=1}^{m}g\left(e_i,\nabla^M_{e_i}X\right)$$

$$-h\left(d\phi\left(gradf\right),d\phi\left(X\right)\right)-fh\left(\tau\left(\phi\right),d\phi\left(X\right)\right)$$

$$-fh\left(d\phi\left(e_i\right),\nabla^M d\phi\left(e_i,X\right)\right)-fh\left(d\phi\left(e_i\right),d\phi\left(\nabla^M_{e_i}X\right)\right)$$

or,

$$d\phi\left(gradf\right)+f\tau\left(\phi\right)=\tau_f\left(\phi\right)$$

et

$$h\left(d\phi\left(e_i\right),\nabla^M d\phi\left(e_i,X\right)\right)=X\left(e\left(\phi\right)\right)$$

on conclut que :

$$\sum_{i=1}^{m}\left\{e_i\left(S_f\left(\phi\right)\left(e_i,X\right)\right)\right\}=-h\left(\tau_f\left(\phi\right),d\phi\left(X\right)\right)+e\left(\phi\right)df\left(X\right)$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\left\{fe\left(\phi\right)g\left(e_i,\nabla^M_{e_i}X\right)-fh\left(d\phi\left(e_i\right),d\phi\left(\nabla^M_{e_i}X\right)\right)\right\} \tag{5.1.11}$$

D'autre part, le terme $S_f\left(\phi\right)\left(e_i,\nabla^M_{e_i}X\right)$ de (5.1.8) se calcule en utilisant (5.1.7), on a donc :

$$\sum_{i=1}^{m}S_f\left(\phi\right)\left(e_i,\nabla^M_{e_i}X\right)=\sum_{i=1}^{m}\left\{fe\left(\phi\right)g\left(e_i,\nabla^M_{e_i}X\right)-fh\left(d\phi\left(e_i\right),d\phi\left(\nabla^M_{e_i}X\right)\right)\right\} \tag{5.1.12}$$

Par conséquent, en remplaçant (5.1.10) et (5.1.11) dans (5.1.9), on aura :

$$div^M S_f\left(\phi\right)=-h\left(\tau_f\left(\phi\right),d\phi\right)+e\left(\phi\right)df$$

En particulier, on a :

Proposition 5.1.4. *Soit $\phi:\left(M^m,g\right)\longmapsto\left(N^n,h\right)$ une submersion de classe C^∞. Alors ϕ est f-harmonique si et seulement si*

$$div^M\left(f\phi^*h\right)=fdiv\left(e\left(\phi\right)\right)$$

Démonstration. On a ϕ est f-harmonique si et seulement si $h\left(\tau_f\left(\phi\right), d\phi\right) = 0$.
Or, d'après (4.1.8), ϕ est f-harmonique si et seulement si

$$div^M S_f\left(\phi\right) = e\left(\phi\right) df$$

or,

$$\begin{aligned} div^M S_f\left(\phi\right) &= div^M\left(fe\left(\phi\right) g - f\phi^* h\right) \\ &= d\left(fe\left(\phi\right)\right) - div^M\left(f\phi^* h\right) \\ &= fde\left(\phi\right) + e\left(\phi\right) df - div^M\left(f\phi^* h\right) \end{aligned}$$

Théorème 5.1.3. ([9]) (***Seconde variation de la f-énergie***)
Soient $\phi : (M^m, g) \longmapsto (N^n, h)$ *une application f-harmonique de classe* C^∞, D *un domaine compact de* M *et* $\phi_{t,s} : M \longrightarrow N\left(t, s \in (-\epsilon, +\epsilon)\right)$ *une variation de classe* C^∞ *à deux paramètres à support compact dans* D *tels que,*

$$v = \frac{\partial\phi_{t,s}}{\partial t}\Big|_{(t,s)=(0,0)} \ \textit{et}\ w = \frac{\partial\phi_{t,s}}{\partial s}\Big|_{(t,s)=(0,0)}$$

alors,

$$\frac{\partial}{\partial t\partial s}E_f\left(\phi_{t,s}; D\right) = \int_D h\left(-ftr_g R^N\left(v, d\phi\right) d\phi - tr_g\left(\nabla^\phi f \nabla^\phi v - f\nabla^\phi_{\nabla^M} v\right), w\right)$$

5.2 Application f-biharmonique

Définition 5.2.1. Soient $\phi : (M^m, g) \longmapsto (N^n, h)$ une application de classe C^∞ et D un domaine compact de M. On définit la fonctionnelle f-bi-énergie de l'application ϕ par :

$$E_{2,f}\left(\phi, D\right) = \frac{1}{2}\int_D f\left|\tau\left(\phi\right)\right|^2 \nu_g$$

Définition 5.2.2. Une application $\phi : (M^m, g) \longmapsto (N^n, h)$ une application de classe C^∞ est dite f-biharmonique si elle est point critique de la fonctionnelle f-bi-énergie, pour tout compact de M.

Le résultat ci-après, donne l'équation de l'application f-biharmonique en dérivant l'équation d'Euler-Lagrange ;

Théorème 5.2.1. ([28]) *Soit $\phi : (M^m, g) \longmapsto (N^n, h)$ une application de classe C^∞. Alors ϕ est f-biharmonique si et seulement si le champ f-bitension s'annule, c'est à dire :*

$$\tau_{2,f}(\phi) = -Tr_g\left(\nabla^\phi\right)^2 f\tau(\phi) - fTr_g R^N(\tau(\phi), d\phi)\, d\phi = J^\phi(f\tau(\phi)) = 0$$

où J^ϕ est l'opérateur de Jacobi le long de l'application ϕ défini par :

$$J^\phi(X) = -Tr_g\left(\left(\nabla^\phi\right)^2 X + R^N(X, d\phi)\, d\phi\right)$$

Proposition 5.2.1. ([28]) *Soit $\phi : (M^m, g) \longmapsto (N^n, h)$ une application de classe C^∞. La relation entre le champ f-bitension $\tau_{2,f}(\phi)$ et le champ bitension $\tau_2(\phi)$ est donnée par :*

$$\tau_{2,f}(\phi) = f\tau_2(\phi) - \Delta(f)\,\tau(\phi) - 2\nabla_{gradf}\tau(\phi)$$

Remarque 5.2.1. 1. Un calcul simple nous donne que $\Delta f = f\Delta lnf + f\,|gradlnf|^2$ et $gradf = fgradlnf$, on obtient alors :

$$\tau_{2,f}(\phi) = f\left\{\tau_2(\phi) - \left(\Delta lnf + f\,|gradlnf|^2\right)\tau(\phi) - 2\nabla_{gradlnf}\tau(\phi)\right\}$$

d'où, l'application ϕ est f-biharmonique si et seulement si

$$\tau_2(\phi) - \left(\Delta lnf + f\,|gradlnf|^2\right)\tau(\phi) - 2\nabla_{gradlnf}\tau(\phi) = 0$$

2. Il est clair que toute application harmonique est f-biharmonique. Si l'application ϕ est biharmonique, alors ϕ est f-biharmonique si et seulement si

$$\left(\Delta lnf + f\,|gradlnf|^2\right)\tau(\phi) + 2\nabla_{gradlnf}\tau(\phi) = 0$$

5.3 f-biharmonicité des applications conformes

Définition 5.3.1. Soient (M^m, g) et (N^n, h) deux variétés riemanniennes. On dit que l'application $\phi : M \longmapsto N$ est conforme s'il existe une fonction $\lambda : M \longrightarrow (0, \infty)$ de classe C^∞,appelée dilatation de ϕ, telle que :

$$h\left(d\phi\left(X\right),d\phi\left(Y\right)\right)=\lambda^{2}g\left(X,Y\right),\forall X,Y\in\Gamma\left(TM\right)$$

Proposition 5.3.1. ([1]) *Soit $\phi:(M^m,g)\longmapsto(N^n,h)$ une application conforme de dilatation λ. Alors le champ de tension de ϕ est donné par :*

$$\tau_{f}\left(\phi\right)=\left(2-n\right)d\phi\left(gradln\lambda\right)$$

Théorème 5.3.1. *Soit $\phi:(M^m,g)\longrightarrow(N^n,h)$, $n\geq3$, une application conforme de dilatation λ, alors le champ bitension de ϕ est donné par :*

$$\tau_{2}\left(\phi\right)=\left(n-2\right)d\phi\left(H\right)$$

où,

$$H=grad\Delta ln\lambda-\frac{(n-6)}{2}grad\left(\left|gradln\lambda\right|^{2}\right)+2Ricc^{M}\left(gradln\lambda\right)$$
$$-\left(2\left(\left(\Delta ln\lambda\right)\right)+\left(n-2\right)\left|gradln\lambda\right|^{2}\right)gradln\lambda \tag{5.3.1}$$

Avant de prouver ce théorème, on a besoin de deux lemmes. Dans le premier, on donne la formule du terme $Tr_g\left(\nabla^{\phi}\right)^{2}d\phi\left(grad\gamma\right)$ de l'application conforme $\phi:(M^m,g)\longrightarrow(N^n,h)$, $n\geq3$ de dilatation λ pour toute fonction $\gamma\in C^{\infty}\left(M\right)$

Lemme 5.3.1. *Soit $\phi:(M^m,g)\longrightarrow(N^n,h)$, $n\geq3$, une application conforme de dilatation λ, alors pour toute fonction $\gamma\in C^{\infty}\left(M\right)$, on a :*

$$Tr_{g}\left(\nabla^{\phi}\right)^{2}d\phi\left(grad\gamma\right)=d\phi\left(grad\Delta\gamma\right)+4d\phi\left(\nabla_{gradln\lambda}grad\gamma\right)+d\phi\left(Ricc^{M}\left(grad\gamma\right)\right)$$
$$+\left(\Delta ln\lambda\right)d\phi\left(grad\gamma\right)-2\left(\Delta\gamma\right)d\phi\left(gardln\lambda\right) \tag{5.3.2}$$
$$-\left(n-2\right)dln\lambda\left(grad\gamma\right)d\phi(gardln\lambda$$

Démonstration. Soit $\gamma\in C^{\infty}\left(M\right)$, par définition on a :

$$Tr_{g}\left(\nabla^{\phi}\right)^{2}d\phi\left(grad\gamma\right)=\nabla_{e_i}^{\phi}\nabla_{e_i}^{\phi}d\phi\left(grad\gamma\right)-\nabla_{\nabla_{e_i}e_i}^{\phi}d\phi\left(grad\gamma\right) \tag{5.3.3}$$

On a alors (Ici la sommation des termes est calculée sur des indices répétés) :

$$\nabla^{\phi}_{e_i} d\phi\left(grad\gamma\right) = \phi\left(e_i, grad\gamma\right) + d\phi\left(\nabla_{e_i} grad\gamma\right)$$

Or, on sait que ($voir$ [1]),

$$\phi\left(e_i, grad\gamma\right) = e_i\left(ln\lambda\right) d\phi\left(grad\gamma\right) + dln\lambda\left(grad\gamma\right) d\phi\left(e_i\right) - e_i\left(\gamma\right) d\phi\left(grad\lambda\right)$$

donc,

$$\begin{aligned}\nabla^{\phi}_{e_i} d\phi\left(grad\gamma\right) &= e_i\left(ln\lambda\right) d\phi\left(grad\gamma\right) + dln\lambda\left(grad\gamma\right) d\phi\left(e_i\right) \\ &- e_i\left(\gamma\right) d\phi\left(gradln\lambda\right) + d\phi\left(\nabla_{e_i} grad\gamma\right)\end{aligned} \tag{5.3.4}$$

Il s'ensuit que,

$$\begin{aligned}\nabla^{\phi}_{e_i}\nabla^{\phi}_{e_i} d\phi\left(grad\gamma\right) &= \nabla^{\phi}_{e_i}\left\{e_i\left(ln\lambda\right) d\phi\left(grad\gamma\right)\right\} + \nabla^{\phi}_{e_i}\left\{dln\lambda\left(grad\phi\left(e_i\right)\right)\right\} \\ &- \nabla^{\phi}_{e_i}\left\{e_i\left(\gamma\right) d\phi\left(gradln\lambda\right)\right\} + \nabla^{\phi}_{e_i} d\phi\left(\nabla_{e_i} grad\gamma\right)\end{aligned} \tag{5.3.5}$$

Pour étudier l'expression (5.3.5), commençons par le terme $\nabla^{\phi}_{e_i}\left\{e_i\left(ln\lambda\right) d\phi\left(grad\gamma\right)\right\}$, on a :

$$\nabla^{\phi}_{e_i}\left\{e_i\left(ln\lambda\right) d\phi\left(grad\gamma\right)\right\} = e_i\left(ln\lambda\right)\nabla^{\phi}_{e_i} d\phi\left(grad\gamma\right) + e_i\left(e_i\left(ln\lambda\right)\right) d\phi\left(grad\gamma\right)$$

En utilisant l'équation (5.3.4), on déduit que

$$\begin{aligned}\nabla^{\phi}_{e_i}\left\{e_i\left(ln\lambda\right) d\phi\left(grad\gamma\right)\right\} &= e_i\left(ln\lambda\right) e_i\left(ln\lambda\right) d\phi\left(grad\gamma\right) + e_i\left(ln\lambda\right) dln\lambda\left(grad\gamma\right) d\phi\left(e_i\right) \\ &- e_i\left(ln\lambda\right) e_i\left(\gamma\right) d\phi\left(gradln\lambda\right) + e_i\left(ln\lambda\right) d\phi\left(\nabla_{e_i} grad\gamma\right) \\ &+ e_i\left(e_i\left(ln\lambda\right)\right) d\phi\left(grad\gamma\right)\end{aligned}$$

on obtient donc,

$$\nabla^{\phi}_{e_i}\left\{e_i\left(ln\lambda\right)d\phi\left(grad\gamma\right)\right\}=\left|gradln\lambda\right|^2 d\phi\left(grad\gamma\right)+d\phi\left(\nabla_{gradln\lambda}grad\gamma\right)$$
$$+\,e_i\left(e_i\left(ln\lambda\right)\right)d\phi\left(grad\gamma\right) \tag{5.3.6}$$

Pour le terme $\nabla^{\phi}_{e_i}\left\{dln\lambda\left(grad\gamma\right)d\phi\left(e_i\right)\right\}$, un calcul similaire nous donne,

$$\nabla^{\phi}_{e_i}\left\{dln\lambda\left(grad\gamma\right)d\phi\left(e_i\right)\right\}=dln\lambda\left(grad\gamma\right)\nabla^{\phi}_{e_i}d\phi\left(e_i\right)+e_i\left\{g\left(gradln\lambda,grad\gamma\right)\right\}d\phi\left(e_i\right)$$
$$=dln\lambda\left(grad\gamma\right)\nabla^{\phi}_{e_i}d\phi\left(e_i\right)+g\left(\nabla_{e_i}gradln\lambda,grad\gamma\right)d\phi\left(e_i\right)$$
$$+\,g\left(gradln\lambda,\nabla_{e_i}grad\gamma\right)d\phi\left(e_i\right)$$
$$=dln\lambda\left(grad\gamma\right)\nabla^{\phi}_{e_i}d\phi\left(e_i\right)+g\left(\nabla_{grad\gamma}gradln\lambda,e_i\right)d\phi\left(e_i\right)$$
$$+\,g\left(\nabla_{gradln\lambda}grad\gamma,e_i\right)d\phi\left(e_i\right)$$

ainsi,

$$\nabla^{\phi}_{e_i}\left\{dln\lambda\left(grad\gamma\right)d\phi\left(e_i\right)\right\}=dln\lambda\left(grad\gamma\right)\nabla^{\phi}_{e_i}d\phi\left(e_i\right)+d\phi\left(\nabla_{grad\gamma}gradln\lambda\right)$$
$$+\,d\phi\left(\nabla_{gradln\lambda}grad\gamma\right) \tag{5.3.7}$$

D'une manière analogue, on a :

$$\nabla^{\phi}_{e_i}\left\{e_i\left(\gamma\right)d\phi\left(gradln\lambda\right)\right\}=e_i\left(\gamma\right)\nabla^{\phi}_{e_i}d\phi\left(gradln\lambda\right)+e_i\left(e_i\left(\gamma\right)\right)d\phi\left(gradln\lambda\right)$$
$$=e_i\left(\gamma\right)e_i\left(ln\lambda\right)d\phi\left(gradln\lambda\right)+e_i\left(\gamma\right)dln\lambda\left(gradln\lambda\right)d\phi\left(e_i\right)$$
$$-\,e_i\left(\gamma\right)e_i\left(ln\lambda\right)d\phi\left(gradln\lambda\right)+e_i\left(\gamma\right)d\phi\left(\nabla_{e_i}gradln\lambda\right)$$
$$+\,e_i\left(e_i\left(\gamma\right)\right)d\phi\left(gradln\lambda\right)$$

ce qui nous donne,

$$\nabla^{\phi}_{e_i}\left\{e_i(\gamma)\, d\phi\,(gradln\lambda)\right\} = |gradln\lambda|^2\, d\phi\,(grad\gamma) + d\phi\,(\nabla_{grad\gamma} gradln\lambda)$$
$$+\, e_i\,(e_i\,(\gamma))\, d\phi\,(gradln\lambda) \tag{5.3.8}$$

Pour le dernier terme, on a :

$$\nabla^{\phi}_{e_i} d\phi\,(\nabla_{e_i} grad\gamma) = e_i\,(ln\lambda)\, d\phi\,(\nabla_{e_i} grad\gamma) + dln\lambda\,(\nabla_{e_i} grad\gamma)\, d\phi\,(e_i)$$
$$-\, g\,(e_i, \nabla_{e_i} grad\gamma)\, d\phi\,(gradln\lambda) + d\phi\,(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i} grad\gamma)$$
$$= 2d\phi\,(\nabla_{gradln\lambda} grad\gamma) - (\Delta\gamma)\, d\phi\,(gradln\lambda)$$
$$+\, d\phi\,(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i} grad\gamma)$$

donc,

$$\nabla^{\phi}_{e_i} d\phi\,(\nabla_{e_i} grad\gamma) = d\phi\,(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i} grad\gamma) + 2d\phi\,(\nabla_{gradln\lambda} grad\gamma)$$
$$-\, (\Delta\gamma)\, d\phi\,(gradln\lambda) \tag{5.3.9}$$

On remplace (5.3.6), (5.3.7), (5.3.8) et (5.3.9) dans (5.3.5), on trouve :

$$\nabla^{\phi}_{e_i}\nabla^{\phi}_{e_i} d\phi\,(grad\gamma) = 4d\phi\,(\nabla_{gradln\lambda} grad\gamma) + e_i\,(e_i\,(ln\lambda))\, d\phi\,(grad\gamma)$$
$$+\, dln\lambda\,(grad\gamma)\,\nabla^{\phi}_{e_i} d\phi\,(e_i) - e_i\,(e_i\,(\lambda))\, d\phi\,(gradln\lambda) \tag{5.3.10}$$
$$+\, d\phi\,(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i} grad\gamma) - (\Delta\gamma)\, d\phi\,(gradln\lambda)$$

D'autre part, on a :

$$\nabla^{\phi}_{\nabla_{e_i} e_i} d\phi\,(grad\gamma) = \nabla d\phi\,(\nabla_{e_i} e_i, grad\gamma) + d\phi\left(\nabla_{\nabla_{e_i} e_i} grad\gamma\right)$$

De plus, en utilisant l'équation (5.3.4), on obtient :

$$\begin{aligned}\nabla^{\phi}_{\nabla_{e_i}e_i} d\phi\,(grad\gamma) &= \nabla_{e_i}e_i\,(ln\lambda)\,d\phi\,(grad\gamma) + dln\lambda\,(grad\gamma)\,d\phi\,(\nabla_{e_i}e_i) \\ &- \nabla_{e_i}e_i\,(\gamma)\,d\phi\,(gradln\lambda) + d\phi\left(\nabla_{\nabla_{e_i}e_i} grad\gamma\right)\end{aligned} \tag{5.3.11}$$

Par conséquent, en substituant (5.3.10) et (5.3.11) dans (5.3.3), on trouve :

$$\begin{aligned}Tr_g\left(\nabla^{\phi}\right)^2 d\phi\,(grad\gamma) &= \nabla^{\phi}_{e_i}\nabla^{\phi}_{e_i} d\phi\,(grad\gamma) - \nabla^{\phi}_{\nabla_{e_i}e_i} d\phi\,(grad\gamma) \\ &= d\phi\left(Tr_g\nabla^2 grad\gamma\right) + 4d\phi\,(\nabla_{gradln\lambda} grad\gamma) \\ &+ (\Delta ln\lambda)\,d\phi\,(grad\gamma) + dln\lambda\,(grad\gamma)\,\tau\,(\phi) \\ &- 2\,(\Delta\gamma)\,d\phi\,(gradln\lambda)\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant le fait que ($voir$ [24])

$$Tr_g\left(\nabla^{\phi}\right)^2 d\phi\,(grad\gamma) = grad\Delta\gamma + Ricc^M\,(grad\lambda)$$

et

$$\tau\,(\phi) = (n-2)\,d\phi\,(gradln\lambda)$$

on obtient au final,

$$\begin{aligned}Tr_g\left(\nabla^{\phi}\right)^2 d\phi\,(grad\gamma) &= d\phi\,(grad\Delta\gamma) + 4d\phi\,(\nabla_{gradln\lambda} grad\gamma) + d\phi\left(Ricc^M\,(grad\gamma)\right) \\ &+ (\Delta ln\lambda)\,d\phi\,(grad\gamma) - 2\,(\Delta\gamma)\,d\phi\,(gardln\lambda) \\ &- (n-2)\,dln\lambda\,(grad\gamma)\,d\phi(gardln\lambda\end{aligned}$$

Maintenant, dans le deuxième lemme donné ci-après, nous allons calculer

$$Tr_g R^N\,(d\phi\,(grad\gamma))\,d\phi$$

associé à l'application conforme $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$, $n \geq 3$ de dilatation λ pour toute fonction $\gamma \in C^{\infty}(M)$;

Lemme 5.3.2. *Soit $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$, $n \geq 3$, une application conforme de dilatation λ, alors pour toute fonction $\gamma \in C^{\infty}(M)$, on a :*

$$\begin{aligned} Tr_g R^N (d\phi (grad\gamma))\, d\phi = {} & d\phi \left(Ricc^M (grad\gamma)\right) - (n-2)\, d\phi \left(\nabla_{grad\gamma} gradln\lambda\right) \\ & - \left(\Delta ln\lambda + (n-2) \left|gradln\lambda\right|^2\right) d\phi (grad\gamma) \\ & + (n-2)\, dln\lambda (grad\gamma)\, d\phi (gradln\lambda) \end{aligned} \tag{5.3.12}$$

Démonstration. Soit $\gamma \in C^{\infty}(M)$, par définition on a :

$$Tr_g R^N (d\phi (grad\gamma), d\phi)\, d\phi = R^N (d\phi (grad\gamma), d\phi (e_i))\, d\phi (e_i) \tag{5.3.13}$$

or, on sait que (*voir* [1])

$$\begin{aligned} Ricc^N (d\phi (X), d\phi (Y)) = {} & Ricc^M (X, Y) + (n-2)\, X (ln\lambda)\, Y (ln\lambda) \\ & - (n-2) \left|gradln\lambda\right|^2 g (X, Y) \\ & - (n-2)\, \nabla dln\lambda (X, Y) - (\Delta ln\lambda)\, g (X, Y) \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} R^N (d\phi (grad\gamma), d\phi (e_i)) = {} & Ricc^M (grad\gamma, e_i) + (n-2)\, grad\gamma (ln\lambda)\, e_i (ln\lambda) \\ & - (n-2) \left|gradln\lambda\right|^2 g (grad\gamma, e_i) \\ & - (n-2)\, ln\lambda (grad\lambda, e_i) - (\Delta ln\lambda)\, g (grad\gamma, e_i) \end{aligned}$$

il s'ensuit que,

$$R^N\left(d\phi\left(grad\gamma\right), d\phi\left(e_i\right)\right) = Ricc^M\left(grad\gamma, e_i\right) + (n-2)\, dln\lambda\left(grad\gamma\right) e_i\left(ln\lambda\right)$$

$$- (n-2)\left|gradln\lambda\right|^2 e_i\left(\gamma\right) - (n-2)\nabla dln\lambda\left(\left(grad\gamma, e_i\right)\right. \qquad (5.3.14)$$

$$- \left(\Delta ln\lambda\right) e_i\left(\gamma\right)$$

En remplaçons (5.3.13) dans (5.3.12), on en déduit que :

$$Tr_g R^N\left(d\phi\left(grad\gamma\right), d\phi\right) d\phi = R^N\left(d\phi\left(grad\gamma\right), d\phi\left(e_i\right)\right) d\phi\left(e_i\right)$$

$$= d\phi\left(Ricc^M\left(grad\gamma\right)\right) + (n-2)\, dln\left(grad\gamma\right) d\phi\left(gradln\lambda\right)$$

$$- (n-2)\left|gradln\lambda\right|^2 d\phi\left(grad\gamma\right) - (n-2)\nabla dln\lambda\left(grad\gamma, e_i\right) d\phi\left(e_i\right)$$

$$- \left(\Delta ln\lambda\right) d\phi\left(grad\gamma\right)$$

D'autre part on a :

$$\nabla dln\lambda\left(grad\gamma, e_i\right) d\phi\left(e_i\right) = \left\{e_i\left(g\left(gradln\lambda, grad\gamma\right)\right) - dln\lambda\left(\nabla_{e_i} grad\gamma\right)\right\} d\phi\left(e_i\right)$$

$$= g\left(\nabla_{e_i} gradln\lambda, grad\gamma\right) d\phi\left(e_i\right)$$

$$= g\left(\nabla_{grad\gamma} gradln\lambda, e_i\right) d\phi\left(e_i\right)$$

$$= d\phi\left(\nabla_{grad\gamma} gradln\lambda\right)$$

On obtient au final,

$$Tr_g R^N \left(d\phi \left(grad\gamma\right)\right) d\phi = d\phi \left(Ricc^M \left(grad\gamma\right)\right) - (n-2)\, d\phi \left(\nabla_{grad\gamma} gradln\lambda\right)$$

$$- \left(\Delta ln\lambda + (n-2)\left|gradln\lambda\right|^2\right) d\phi \left(grad\gamma\right)$$

$$+ (n-2)\, dln\lambda \left(grad\gamma\right) d\phi \left(gradln\lambda\right)$$

On donne à présent la preuve du théorème 5.3.1.

Démonstration. Par définition, le champ bitension est donné par :

$$\tau_2(\phi) = Tr_g \left(\nabla^\phi\right)^2 \tau(\phi) - Tr_g R^N \left(\tau(\phi), d\phi\right) d\phi$$

Or, le champ tension associé à l'application conforme ϕ est donné par :

$$\tau(\phi) = (n-2)\, d\phi \left(gradln\lambda\right)$$

on obtient alors,

$$\tau_2(\phi) = (n-2)\left(Tr_g \left(\nabla^\phi\right)^2 d\phi \left(gradln\lambda\right) + Tr_g R^N \left(d\phi \left(gradln\lambda\right), d\phi\right) d\phi\right) \tag{5.3.15}$$

Or, par le lemme 5.3.1, on a :

$$Tr_g \left(\nabla^\phi\right)^2 d\phi \left(grad\gamma\right) = d\phi \left(grad\Delta\gamma\right) + 4d\phi \left(\nabla_{gradln\lambda} grad\gamma\right) + d\phi \left(Ricc^M \left(grad\gamma\right)\right)$$

$$+ \left(\Delta ln\lambda\right) d\phi \left(grad\gamma\right) - 2\left(\Delta\gamma\right) d\phi \left(gardln\lambda\right)$$

$$- (n-2)\, dln\lambda \left(grad\gamma\right) d\phi \left(gardln\lambda\right) \tag{5.3.16}$$

et en utilisant le lemme 5.3.2 et le fait que $\nabla_{gradln\lambda} gradln\lambda = \frac{1}{2} grad\left(\left|gradln\lambda\right|^2\right)$, on trouve :

$$Tr_g R^N \left(d\phi \left(gradln\lambda\right), d\phi\right) d\phi = d\phi \left(Ricc^M \left(gradln\lambda\right)\right) - \left(\Delta ln\lambda\right) d\phi \left(gradln\lambda\right) \tag{5.3.17}$$

$$- \frac{(n-2)}{2} d\phi \left(grad\left(\left|gradln\lambda\right|^2\right)\right)$$

Par conséquent, si on remplace (5.3.16) et (5.3.17) dans (5.3.15), on obtient :

$$\tau_2(\phi) = (n-2)\, d\phi\,(grad\Delta ln\lambda) - \frac{(n-2)(n-6)}{2} d\phi\left(grad\left(|gradln\lambda|^2\right)\right)$$

$$-(n-2)\left(2(\Delta ln\lambda) + (n-2)\,|gradln\lambda|^2\right) d\phi\,(gradln\lambda)$$

$$+\,2(n-2)\, d\phi\left(Ricc^M(gradln\lambda)\right)$$

Ainsi, le bitension de ϕ est donné par,

$$\tau_2(\phi) = (n-2)\, d\phi\,(H)$$

où,

$$H = grad\Delta ln\lambda - \frac{(n-6)}{2} grad\left(|gradln\lambda|^2\right) + 2Ricc^M(gradln\lambda)$$

$$-\left(2(\Delta ln\lambda) + (n-2)\,|gradln\lambda|^2\right) gradln\lambda$$

Nous allons démontrer à présent un résultat caractérisant la f-biharmocicité des applications conformes.

Théorème 5.3.2. *Soit $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$ $(n \geq 3)$ une application conforme de dilatation λ, alors ϕ est f-biharmonique si et seulement si*

$$\begin{aligned} &grad\Delta\ln\lambda - \frac{(n-6)}{2} grad\left(|grad\ln\lambda|^2\right) + 2\nabla_{grad\ln f}\, grad\ln\lambda \\ &-\left(2(\Delta\ln\lambda) + (n-2)\,|grad\ln\lambda|^2 - \Delta\ln f - |grad\ln f|^2\right) grad\ln\lambda \\ &+ 2\,|grad\ln\lambda|^2\, grad\ln f + 2Ricci^M(grad\ln\lambda) = 0. \end{aligned} \tag{5.3.18}$$

Démonstration. On a vu que le champ f-bitension de ϕ est donné par :

$$\tau_{2,f}(\phi) = f\left\{\tau_2(\phi) - \left(\Delta\ln f + |grad\ln f|^2\right)\tau(\phi) - 2\nabla_{grad\ln f}\tau(\phi)\right\}. \tag{5.3.19}$$

Puisque ϕ est une application conforme, alors

$$\tau(\phi) = (2-n)d\phi(grad\ln\lambda)$$

et

$$\tau_2(\phi) = (n-2)\, d\phi\,(H)$$

où,

$$H = grad\Delta \ln\lambda - \frac{(n-6)}{2} grad\left(|grad \ln\lambda|^2\right) + 2Ricci^M\,(grad \ln\lambda)$$

$$-\left(2\,(\Delta\ln\lambda) + (n-2)\,|grad \ln\lambda|^2\right) grad \ln\lambda,$$

ce qui nous donne

$$\tau_{2,f}\,(\phi) = (n-2)\, f\left\{d\phi\,(H) + \left(\Delta \ln f + |grad \ln f|^2\right) d\phi\,(grad \ln\lambda) + 2\nabla_{grad \ln f} d\phi\,(grad \ln\lambda)\right\}.$$

Pour le terme $\nabla_{grad \ln f} d\phi\,(grad \ln\lambda)$, on a (voir [1])

$$\nabla_{grad \ln f} d\phi\,(grad \ln\lambda) = \nabla d\phi\,(grad \ln\lambda, grad \ln f) + d\phi\,(\nabla_{grad \ln f} grad \ln\lambda)$$

$$= |grad \ln\lambda|^2\, d\phi\,(grad \ln f) + d\phi\,(\nabla_{grad \ln f} grad \ln\lambda).$$

Donc

$$\tau_{2,f}\,(\phi) = (n-2)\, f d\phi\left(H + \left(\Delta \ln f + |grad \ln f|^2\right) grad \ln\lambda + 2\,|grad \ln\lambda|^2\, grad \ln f + 2\nabla_{grad} grad \ln\lambda\right)$$

Finalement , on conclut que le champ f-bitension de ϕ est donné par :

$$\tau_{2,f}\,(\phi) = (n-2)\, f d\phi\,(H\,(\lambda, f))$$

où,

$$H\,(\lambda, f) = grad\Delta \ln\lambda - \frac{(n-6)}{2} grad\left(|grad \ln\lambda|^2\right) + 2\nabla_{grad \ln f} grad \ln\lambda$$

$$-\left(2\,(\Delta\ln\lambda) + (n-2)\,|grad \ln\lambda|^2 - \Delta \ln f - |grad \ln f|^2\right) grad \ln\lambda$$

$$+\, 2\,|grad \ln\lambda|^2\, grad \ln f + 2Ricci^M\,(grad \ln\lambda).$$

En considérant le fait que $n \geq 3$, on déduit que l'application conforme ϕ est f-biharmonique si et seulement si

$$
\begin{aligned}
H(\lambda, f) = {} & grad\Delta \ln\lambda - \frac{(n-6)}{2} grad\left(|grad \ln\lambda|^2\right) + 2\nabla_{grad \ln f} grad \ln\lambda \\
& - \left(2(\Delta\ln\lambda) + (n-2)|grad \ln\lambda|^2 - \Delta \ln f - |grad \ln f|^2\right) grad \ln\lambda \\
& + 2|grad \ln\lambda|^2 grad \ln f + 2Ricci^M (grad \ln\lambda) = 0.
\end{aligned}
$$

Exemple 5.3.1. *Let $\phi : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ $(n \geq 3)$ est l'inversion définie par $\phi(x) = \frac{x}{|x|^2}$. ϕ est une application conforme de dilatation $\lambda = \frac{1}{r^2}$ $(r = |x|)$. On suppose que $\ln f$ est radiale $(\ln f = \alpha(r))$. Donc par le théorème 5.3.2, on déduit que l'application $\phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est f-biharmonique si la fonction α satisfait l'équation différentielle suivante :*

$$\frac{1}{r}\alpha'' + \frac{(n-7)}{r^2}\alpha' + \frac{1}{r}(\alpha')^2 - \frac{4(n-4)}{r^3} = 0.$$

Soit $\beta = \alpha'$, l'équation deviendra

$$\frac{1}{r}\beta' + \frac{(n-7)}{r^2}\beta + \frac{1}{r}\beta^2 - \frac{4(n-4)}{r^3} = 0.$$

Une solution particulière est de type $\beta = \frac{a}{r}$ $(a \in \mathbb{R}^*)$, alors $\phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow R^n \setminus \{0\}$ est f-biharmonique si et seulement si

$$a^2 + (n-8)a - 4(n-4) = 0.$$

Cette équation admet deux solutions : $a = 4$ et $a = 4 - n$.

1. *Pour $a = 4$, on obtient $f(r) = Cr^4$ et dans ce cas l'inversion $\phi : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ est f-biharmonique.*
2. *Pour $a = 4 - n$, on obtient $f(r) = Cr^{4-n}$ est l'inversion $\phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$est f-biharmonique.*

Si on suppose que $f = \lambda$, on obtient le corollaire ci-après qui est une conséquence immédiate du théorème 5.3.2 ;

Corollaire 5.3.1. *Soit $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$ $(n \geq 3)$ est une application conforme de dilatation λ, alors ϕ est λ-biharmonique si et seulement si*

$$
\begin{aligned}
& grad\Delta \ln\lambda - \left(\Delta \ln\lambda + (n-5)|grad \ln\lambda|^2\right) grad \ln\lambda \\
& - \frac{(n-8)}{2} grad\left(|grad \ln\lambda|^2\right) + 2Ricci^M (grad \ln\lambda) = 0.
\end{aligned}
$$

En particulier, on prouve que la λ-biharmonicité de l'application conforme $\phi : (\mathbb{R}^n, g) \to (N^n, h)$ $(n \geq 3)$ où la dilatation λ est radiale $(\ln \lambda = \alpha(r), r = |x|$ et $\alpha \in C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$, nous ramène à une équation équation différentielle ordinaire du second ordre. Plus précisément, on a :

Remarque 5.3.1. Soit $\phi : (\mathbb{R}^n, g) \to (N^n, h)$ $(n \geq 3)$ est une application conforme de dilatation λ et supposons que $\ln \lambda$ est radiale $(\ln \lambda = \alpha(r), r = |x|$ and $\alpha \in C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$. Un calcul direct nous donne

$$grad \ln \lambda = \alpha' \frac{\partial}{\partial r},$$

$$|grad \ln \lambda|^2 = (\alpha')^2,$$

$$grad \left(|grad \ln \lambda|^2\right) = 2\alpha'\alpha'' \frac{\partial}{\partial r},$$

$$\Delta \ln \lambda = \alpha'' + \frac{n-1}{r}\alpha'$$

et

$$grad (\Delta \ln \lambda) = \left(\alpha''' + \frac{n-1}{r}\alpha'' - \frac{n-1}{r^2}\alpha'\right) \frac{\partial}{\partial r}.$$

Ainsi ϕ est λ-biharmonique si et seulement si la fonction α satisfait l'équation différentielle suivante :

$$\alpha''' - (n-7)\alpha'\alpha'' + \frac{n-1}{r}\alpha'' - \frac{n-1}{r^2}\alpha' - \frac{n-1}{r}(\alpha')^2 - (n-5)(\alpha')^3 = 0.$$

Si on dénote par $\beta = \alpha'$, la λ-biharmonicité de ϕ est équivalente à l'équation différentielle

$$\beta'' - (n-7)\beta\beta' + \frac{n-1}{r}\beta' - \frac{n-1}{r^2}\beta - \frac{n-1}{r}\beta^2 - (n-5)\beta^3 = 0.$$

Une solution particulière est de type $\beta = \frac{a}{r}$ $(a \in \mathbb{R}^*)$, on déduit alors $\phi : (\mathbb{R}^n, g) \to (N^n, h)$ $(n \geq 3)$ est λ-biharmonique si et seulement si a est une solution de l'équation algébrique suivante :

$$(n-5)a^2 + 6a + 2n - 4 = 0.$$

cette équation admet des solutions réelles si et seulement si $n \in \{3, 4, 5, 6\}$.

1. Si $n = 3$, on trouve $a = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$ ou $a = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$, donc $\lambda = Cr^{\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)}$ ou $\lambda = Cr^{\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)}$ $(C \in \mathbb{R}_+^*)$. Alors chaque application conforme $\phi : (\mathbb{R}^3, g) \to (N^3, h)$ de dilatation $\lambda = Cr^{\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)}$ ou $\lambda = Cr^{\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)}$ est λ-biharmonique.

2. Si $n=4$, on trouve $a=3+\sqrt{13}$ ou $a=3-\sqrt{13}$, donc $\lambda=Cr^{\left(3+\sqrt{13}\right)}$ ou $\lambda=Cr^{\left(3-\sqrt{13}\right)}$ $(C\in\mathbb{R}_+^*)$. Alors chaque application conforme $\phi:(\mathbb{R}^4,g)\to(N^4,h)$ de dilatation $\lambda=Cr^{\left(3+\sqrt{13}\right)}$ ou $\lambda=Cr^{\left(3-\sqrt{13}\right)}$ est λ-biharmonique.
3. Si $n=5$, on trouve $a=-1$, donc $\lambda=\frac{C}{r}$ $(C\in\mathbb{R}_+^*)$. Alors chaque application conforme $\phi:(\mathbb{R}^5,g)\to(N^5,h)$ de dilatation $\lambda=\frac{C}{r}$ est λ-biharmonique.
4. Si $n=6$, on trouve $a=-2$ ou $a=-4$, donc $\lambda=\frac{C}{r^2}$ ou $\lambda=\frac{C}{r^4}$ $(C\in\mathbb{R}_+^*)$. Alors dans ce cas chaque application conforme $\phi:(\mathbb{R}^6,g)\to(N^6,h)$ de dilatation $\lambda=\frac{C}{r^2}$ ou $\lambda=\frac{C}{r}$ est λ-biharmonique. Par exemple , l'inversion $\phi:(\mathbb{R}^n\setminus\{0\},g_{\mathbb{R}^n})\longrightarrow(\mathbb{R}^n\setminus\{0\},g_{\ R^n})$ définie par $\phi(x)=\frac{x}{|x|^2}$ est une application conforme de dilatation $\lambda=\frac{1}{r^2}$ et elle est λ-biharmonique si et seulement si $n=6$.

Bibliographie

[1] P. Baird, J. C. Wood, Harmonic Morphisms between Riemannian Manifolds Oxford Science Publication, 2003.

[2] P. Baird et D. Kamissoko, On constructing biharmonic maps and metrics, Annals of Global Analysis and Geometry 23,2003, 65-75.

[3] A. Balmus, Biharmonic properties and conformal changes, An. Stiint. Univ. Al.I. Cuza Iasi Mat. (N.S.) 50 2004,367-372.

[4] A. Balmus,S. Montaldo, C. Oniciuc, Biharmonic maps between warped product manifolds, J. Geom. Phys, 57, 449-466 2008

[5] R. Caddeo, S. Montaldo, P. Piu, Biharmonic curves on a surface.Rend. Mat. Appl., 21 2001, 143-157.

[6] B-Y. Chen, Peudo-Riemannian Geometry, δ-Invariant and Applications, Michigan State University, USA 2011.

[7] Y.J. Chiang, R. Wolak, Transversally f-harmonic and Transversally f-biharmonic mpas between foliated manifolds. JP J Geom. Topol. 13, 93-117, 2013.

[8] Y.J. Chiang, R. Wolak, Transversally F-harmonic maps between foliated manifolds preprint

[9] N. Course, f-harmonic maps. PHD. thesis, University of Warwick, 2004.

[10] N. Course, f-harmonic maps which map the boundary of the domain to one point in the target. N. Y. J. Math. 13, 423-435, 2007.

[11] J. Eells, L. Lemaire, Selected topics in harmonic maps. regional conference series in Mathematics, vol 150, 1983.

[12] J. Eells, J.H. Sampson, Harmonic maps of riemannian manifolds. Am. J. Math. 86, 109-160, 1960

[13] J. Eells, J.H. Sampson, Energie et déformation en géométrie différentielle. Ann. Inst. Fourier 14, 61-69, 1965.

[14] J. Eells, J.H. Sampson, Variational theory in fibre bundles, seminar in differential geometry, Kyoto, pp. 22-33 ; 1965.

[15] G. Y. Jiang, 2-harmonic maps and their first and second variational Formulas. Chinese Ann. Math. (1986), 130-144.

[16] G. Y. Jiang, 2-harmonic isometric immersion between riemannian manifolds. Chin. Ann. Math. 7, 130-144, 1986.

[17] S. Kobayashi, N. Nomizu, Fondation of Differential Geometry, Vol. 1 et Vol. 2, J. Wiley (1963- 1969).

[18] A. Lichnerowicz, Applicaions harmoniques et variétés Kahleriennes, Symposita Mathematica, Rom, pp. 341-402, 1970.

[19] B. O'Neill, Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity, New York, Academic Press, 1983.

[20] C. Oniciuc, Biharmonic maps between Riemannian Manifolds. An. Stiint.Mat, 48 (2002), 237-248.

[21] C. Oniciuc, New examples of biharmonic maps in spheres, Colloq. Math., 97 (2003), 131-139.

[22] S. Ouakkas, A. Bennouar, Some constructions of biharmonic maps on the warped product manifolds, comment. Math. Univ. Carolin. 58,4 pp. 481-500, 2017.

[23] S. Ouakkas, R. Nasri, M. Djaa, On the f-harmonic and f-biarmonic maps. J. P. J. Geom. Topol. 10, 11-27, 2010.

[24] S. Ouakkas, Biharmonic maps, conformal deformations and the Hopf maps.Diff. Geom. Appl, 26 (2008), 495-502.

[25] S. Ouakkas, Applications biharmoniques : déformations conformes et théorèmes de Liouville, thèse (2008).

[26] S.Y. Perktas, E Kilic, Biharmonic maps between doubly warped product manifolds, Balkan J Geom Appl, 15(2) : 151-162 (2010).

[27] H. Urakawa, The geometry of Biharmonic Maps, Contemporary Mathemaics Vol. 542, 159-175,(2011)

[28] WJ Lu, On f-bi-harmonic maps and bi-f-harmonic maps between Riemannian manifolds July 2015 Vol. 58 No. 7 : 1483–1498.