



# THÈSE

## En vue de l'obtention du Diplôme de Doctorat en Sciences

*Présentée et soutenue par*  
**BENKADA Abdelmoudjib**

### *Intitulé*

**Identification des systèmes faiblement non linéaires  
à l'aide des modèles de Volterra adaptatifs :  
Modélisation des distorsions des haut-parleurs**

*Faculté* : Génie Électrique  
*Département* : Électronique  
*Spécialité* : Électronique  
*Option* : Contrôle Avancé et Vibrations

*Soutenue le 18 juillet 2019, devant le jury composé de*

<b>M. AHMED FOITIH Zoubir</b>	<b>Pr</b>	<b>Président</b>	<b>USTO Mohamed Boudiaf</b>
<b>M. KADDOUR Abdelhafid</b>	<b>Pr</b>	<b>Encadrant</b>	<b>USTO Mohamed Boudiaf</b>
<b>M. KAROUI Saïd</b>	<b>MCA</b>	<b>Co-Encadrant</b>	<b>USTO Mohamed Boudiaf</b>
<b>M. BESSAID Abdelhafid</b>	<b>Pr</b>	<b>Examineur</b>	<b>Université Abou Bakr Belkaïd - Tlemcen</b>
<b>M. REMRAM Youcef</b>	<b>Pr</b>	<b>Examineur</b>	<b>USTHB Houari Boumediène - Alger</b>
<b>M. SEBBANI Mohamed</b>	<b>Pr</b>	<b>Examineur</b>	<b>Université Ahmed Benbella Oran 1</b>

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي  
جامعة وهران للعلوم و التكنولوجيا محمد بوضياف



## *Thèse*

*En vue de l'obtention du  
Diplôme de Doctorat en Sciences*

*Présentée et soutenue par  
BENKADA Abdelmoudjib*

## *Intitulé*

**Identification des systèmes faiblement non linéaires à  
l'aide des modèles de Volterra adaptatifs :  
Modélisation des distorsions des haut-parleurs**

*Faculté : Génie Électrique  
Département : Électronique  
Spécialité : Électronique  
Option : Contrôle Avancé et Vibrations*

*Soutenue le 18 juillet 2019, devant le jury composé de*

<i>M. AHMED FOITIH Zoubir</i>	<i>Pr</i>	<i>Président</i>	<i>USTO Mohamed Boudiaf</i>
<i>M. KADDOUR Abdelhafid</i>	<i>Pr</i>	<i>Encadrant</i>	<i>USTO Mohamed Boudiaf</i>
<i>M. KAROUI Saïd</i>	<i>MCA</i>	<i>Co-Encadrant</i>	<i>USTO Mohamed Boudiaf</i>
<i>M. BESSAID Abdelhafid</i>	<i>Pr</i>	<i>Examineur</i>	<i>Université Abou Bakr Belkaïd - Tlemcen</i>
<i>M. REMRAM Youcef</i>	<i>Pr</i>	<i>Examineur</i>	<i>USTHB Houari Boumediène - Alger</i>
<i>M. SEBBANI Mohamed</i>	<i>Pr</i>	<i>Examineur</i>	<i>Université Ahmed Benbella Oran 1</i>

# Dédicace

*À mes parents*

*À mon épouse et mes enfants*

*À ma famille*

# Remerciements

C'est avec un plaisir immense que je m'apprête à adresser mes remerciements, à tous ceux qui ont compté pour moi tout au long de ce parcours, qui était loin d'être une simple parenthèse de la vie.

Je tiens tout d'abord à exprimer toute ma gratitude à mon directeur de thèse et mon mentor, M. Abdelhafid KADDOUR, Professeur à l'université des sciences et de la technologie Mohamed Boudiaf (USTO-MB) qui, par ses encouragements, son incommensurable soutien et son intérêt constant, m'a permis de persévérer dans mon travail. Je le remercie pour m'avoir accordé tant de liberté dans ce travail de recherche, sans pour autant lésiner sur les suggestions, les critiques et les idées.

Au même titre, je remercie mon co-directeur de thèse M. Saïd KAROUI, Docteur et enseignant à l'USTO-MB, pour sa disponibilité et pour avoir veillé à la bonne orientation de ma thèse.

Je remercie les membres du jury, M. Abdelhafid BESSAID, Professeur à l'université Aboubekr Belkaïd de Tlemcen, M. Youcef REMRAM, Professeur à l'université des sciences et de la technologie Houari Boumediène et M. Mohamed SEBBANI, Professeur à l'université Oran 1 Ahmed Benbella. Leur acceptation de faire partie du jury de soutenance, et l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail m'honorent. J'adresse mes remerciements particuliers à l'adresse de M. Zoubir AHMED FOITIH, Professeur à l'USTO-MB, qui me fait l'honneur de présider ce jury.

Je tiens à remercier M. Ghalem BACHIR, Professeur à l'université des sciences et de la technologie Mohamed Boudiaf, pour les encouragements, et la stimulation dont il a toujours fait montre à mon égard.

Mes remerciements vont également à M. Sid Ahmed SABEUR, Docteur et enseignant à l'USTO-MB, et responsable du centre de calcul haute performance HPC Ibn Baja de l'USTO-MB, pour sa disponibilité et sa précieuse collaboration.

Un grand merci à M. Saïd SOUDANI, Docteur et enseignant à l'USTO-MB, pour son attention et ses encouragements constants.

Je remercie également M. Mokhtar FREH BENGABOU, responsable du service du suivi de la formation de post-graduation pour sa disponibilité et ses mots attentionnés.

---

Qu'ils soient remerciés tous les amis et les collègues, qui n'ont cessé de me soutenir et de s'intéresser à l'état d'avancement de mon travail de thèse.

Je suis grandement redevable à mes parents et à mon frère, d'être parvenu au bout de ce parcours, grâce à leur amour, leurs encouragements et leur soutien infailible.

Enfin, je remercie mon épouse pour sa patience, son indulgence et ses sacrifices durant toutes ces années.

# Résumé

L'objectif de cette thèse est le développement d'un formalisme complet basé sur le modèle de Volterra, en vue de l'identification du haut-parleur électrodynamique, en tant que système faiblement non linéaire. La finalité est de modéliser les distorsions non linéaires (distorsion harmonique totale, composantes harmoniques, et distorsion d'intermodulation) et la réponse en fréquence du haut-parleur, à partir des résultats d'identification.

L'identification du haut-parleur a été réalisée à l'aide de deux méthodes : filtres adaptatifs de Volterra LMS et RLS. L'essentiel de l'identification consiste en l'estimation des noyaux de Volterra, réalisée en fonction de différents signaux d'excitation, des niveaux d'excitation couvrant la totalité de la plage de restitution du haut-parleur, des fréquences d'échantillonnage, et de diverses étendues de mémoire de la série de Volterra. Une étude comparative des différentes possibilités offertes par les différentes variantes des filtres de Volterra adaptatifs construits, a permis de valider les meilleures topologies de filtres réalisés qui ont pu donner la meilleure qualité des modèles prédits des distorsions du haut-parleur.

Une nouvelle méthode pour l'ajustement de la valeur du facteur d'oubli dans les filtres de Volterra adaptatifs RLS a été développée. La méthode proposée appelée produit de la valeur crête et de la valeur efficace PVRP (Peak Value-RMS Product), est construite à partir de caractéristiques simples du signal : la valeur crête et la valeur efficace, utilisées dans un algorithme d'ajustement permettant la minimisation de la métrique PVRP. L'amélioration du choix de la valeur du facteur d'oubli, utilisée dans l'algorithme du filtre de Volterra adaptatif RLS avec la métrique PVRP, s'est montrée fort efficace pour la modélisation des distorsions du haut-parleur, avec un meilleur accord entre les distorsions prédites et les courbes expérimentales des distorsions.

## Mots-clés

Identification, système faiblement non linéaire, modélisation, haut-parleur électrodynamique, distorsion non linéaire, modèle de Volterra, filtre adaptatif.

# Table des matières

Dédicace	iii
Remerciements	iv
Résumé	vi
Table des matières	vii
Liste des figures	xiii
Liste des tableaux	xx
Liste des algorithmes	xxii
Liste des notations	xxiii
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
Contexte . . . . .	1
Problématique . . . . .	4
Objectifs de la thèse . . . . .	5
Contributions de la thèse . . . . .	6
Organisation de la thèse . . . . .	8
<b>I État de l’art de l’identification et la modélisation des systèmes non linéaires</b>	<b>12</b>
<b>1 Introduction à la modélisation des systèmes non linéaires</b>	<b>13</b>
1.1 Introduction . . . . .	13
1.2 Systèmes linéaires . . . . .	13
1.3 Systèmes non linéaires . . . . .	14
1.4 Différents types de non-linéarité . . . . .	15
1.4.1 Non-linéarité d’amplitude . . . . .	16
1.4.2 Non-linéarité de fréquence . . . . .	18
1.4.3 Non-linéarité complexe . . . . .	19
1.5 La modélisation . . . . .	20
1.6 L’identification . . . . .	20
1.6.1 Définition des objectifs . . . . .	21
1.6.2 Définition du protocole expérimental . . . . .	22
1.6.3 Choix de la structure du modèle . . . . .	22

1.6.4	Choix du critère d'estimation . . . . .	23
1.6.5	Estimation paramétrique . . . . .	24
1.6.5.1	Algorithmes d'estimation non récurrents (offline) . . . . .	24
1.6.5.2	Algorithmes d'estimation récurrents (online) . . . . .	24
1.6.6	Validation du modèle . . . . .	24
1.6.6.1	L'erreur quadratique moyenne . . . . .	25
1.6.6.2	L'erreur quadratique moyenne normalisée . . . . .	25
1.7	Modèles linéaires . . . . .	26
1.7.1	Modèles linéaires paramétriques . . . . .	26
1.7.2	Modèles linéaires semi-paramétriques . . . . .	26
1.7.3	Modèles linéaires non paramétriques . . . . .	27
1.8	Modèles non linéaires . . . . .	27
1.8.1	Modèles non linéaires paramétriques . . . . .	28
1.8.2	Modèles non linéaires semi-paramétriques . . . . .	28
1.8.3	Modèles non linéaires non paramétriques . . . . .	28
1.8.4	Modèles non linéaires spécifiques . . . . .	29
1.9	Conclusion . . . . .	30
<b>2</b>	<b>Modélisation des systèmes non linéaires à l'aide du modèle de Volterra</b>	<b>31</b>
2.1	Introduction . . . . .	31
2.1.1	Aperçu historique de la série de Volterra . . . . .	31
2.1.2	Applications du modèle Volterra . . . . .	32
2.2	Principe de la série de Volterra . . . . .	33
2.3	Propriétés de la série de Volterra . . . . .	36
2.3.1	Causalité . . . . .	36
2.3.2	Stabilité . . . . .	36
2.3.3	Linéarité par rapport aux coefficients des noyaux . . . . .	37
2.3.4	Symétrie des noyaux . . . . .	37
2.3.5	Complexité . . . . .	38
2.3.5.1	Facteurs de complexité . . . . .	38
2.3.5.2	Réduction de la complexité . . . . .	40
2.4	Série de Volterra fréquentielle . . . . .	42
2.5	Implémentation du filtre de Volterra . . . . .	43
2.6	Conclusion . . . . .	46
<b>3</b>	<b>Estimation des noyaux de Volterra à l'aide des filtres adaptatifs</b>	<b>47</b>
3.1	Introduction . . . . .	47
3.2	Filtrage optimal - Filtrage de Wiener . . . . .	48
3.3	Equation de Wiener-Hopf . . . . .	49
3.4	Estimation des noyaux de Volterra . . . . .	54
3.5	Choix de la structure des noyaux de Volterra . . . . .	56
3.6	Algorithmes non linéaires d'adaptation . . . . .	58
3.6.1	Algorithme du gradient stochastique (LMS) . . . . .	59
3.6.1.1	Algorithme LMS pour un système linéaire . . . . .	59
3.6.1.2	Algorithme LMS pour modèle de Volterra . . . . .	65
3.6.2	Algorithme des moindres carrés récurrents (RLS) . . . . .	67
3.6.2.1	Algorithme RLS pour un système linéaire . . . . .	67

3.6.2.2	Algorithme RLS pour modèle de Volterra . . . . .	74
3.7	Conclusion . . . . .	76
<b>II Le haut-parleur électrodynamique : un système non linéaire</b>		<b>77</b>
<b>4</b>	<b>Non-linéarités et distorsions dans le haut-parleur électrodynamique</b>	<b>78</b>
4.1	Introduction . . . . .	78
4.2	Le haut-parleur électrodynamique . . . . .	78
4.3	Distorsions . . . . .	80
4.3.1	Définition de la distorsion . . . . .	80
4.3.2	Distorsion linéaire . . . . .	81
4.3.3	Distorsion non-linéaire . . . . .	82
4.3.3.1	Distorsion harmonique . . . . .	82
4.3.3.2	Distorsion d'intermodulation . . . . .	82
4.3.3.3	Distorsion par différence de fréquence . . . . .	83
4.3.3.4	Distorsion sous-harmonique . . . . .	84
4.3.3.5	Distorsion Doppler . . . . .	84
4.4	Sources des distorsions dans le haut-parleur électrodynamique . . . . .	85
4.4.1	Non-linéarités d'origine électromagnétique . . . . .	85
4.4.2	Non-linéarités d'origine mécanique . . . . .	87
4.4.3	Non-linéarités d'origine acoustique . . . . .	88
4.4.4	Non-linéarités d'origines diverses . . . . .	89
4.5	Évaluation objective des distorsions . . . . .	89
4.5.1	Mesure de la non-linéarité . . . . .	89
4.5.2	Fonction de cohérence . . . . .	91
4.5.3	Mesure des distorsions . . . . .	92
4.5.3.1	Mesure de la distorsion harmonique . . . . .	92
4.5.3.2	Mesure de la distorsion d'intermodulation . . . . .	93
4.5.3.3	Mesure de la distorsion par différences des fréquences . . . . .	95
4.6	Limite des méthodes d'évaluation objective des distorsions . . . . .	95
4.7	Audibilité et évaluation perceptive des distorsions . . . . .	96
4.7.1	Audibilité de la distorsion linéaire . . . . .	99
4.7.1.1	Distorsion d'amplitude . . . . .	99
4.7.1.2	Distorsion de phase . . . . .	99
4.7.2	Audibilité des distorsions non linéaires . . . . .	100
4.8	Conclusion . . . . .	102
<b>5</b>	<b>État de l'art de la modélisation du haut-parleur électrodynamique</b>	<b>103</b>
5.1	Introduction . . . . .	103
5.2	Modélisation du haut-parleur électrodynamique . . . . .	104
5.3	Approche paramétrique de modélisation (boîte blanche) . . . . .	104
5.3.1	Modèle à paramètres localisés . . . . .	105
5.3.1.1	Modèle linéaire à paramètres localisés . . . . .	105
5.3.1.1.1	Système électrique . . . . .	107
5.3.1.1.2	Couplage électro-mécanique . . . . .	109
5.3.1.1.3	Système mécanique . . . . .	110

5.3.1.1.4	Couplage mécano-acoustique . . . . .	111
5.3.1.1.5	Système acoustique . . . . .	111
5.3.1.1.6	Circuit équivalent analogue complet du système électro-mécano-acoustique . . . . .	112
5.3.1.2	Modélisation non linéaire du haut-parleur électrodyna- mique . . . . .	112
5.3.1.2.1	Non-linéarités du système électrique . . . . .	113
5.3.1.2.2	Non-linéarités du système mécanique . . . . .	114
5.3.1.2.3	Bilan global des non-linéarités dans le modèle du haut-parleur électrodynamique . . . . .	114
5.3.2	Série de Volterra analytique . . . . .	115
5.3.3	Modèle à espace d'état non linéaire . . . . .	115
5.3.4	Modèles numériques . . . . .	116
5.3.5	Modèles NARMAX . . . . .	116
5.3.6	Modèle à temps discret . . . . .	117
5.3.7	Modèles des systèmes à Hamiltonien à ports . . . . .	118
5.4	Approche non paramétrique de modélisation (boîte noire) . . . . .	118
5.4.1	Modèles de Volterra non paramétriques . . . . .	118
5.4.2	Déconvolution non linéaire . . . . .	119
5.4.3	Modèles fréquentiels . . . . .	121
5.5	Approche semi-paramétrique de modélisation (boîte grise) . . . . .	122
5.5.1	Modèles structurés en blocs . . . . .	122
5.6	Conclusion . . . . .	122

### III Contributions à l'identification du système haut-parleur et à la modélisation de ses distorsions 125

<b>6</b>	<b>Identification du système haut-parleur à l'aide des filtres de Volterra adaptatifs</b>	<b>126</b>
6.1	Introduction . . . . .	126
6.2	Évaluation de la non-linéarité et mesure des distorsions dans le haut-parleur	127
6.2.1	Procédé expérimental général de mesure . . . . .	127
6.2.1.1	Description du procédé expérimental . . . . .	127
6.2.1.2	Ambiance acoustique . . . . .	129
6.2.2	Mesure de la courbe caractéristique . . . . .	129
6.2.2.1	Description de la méthode de mesure . . . . .	129
6.2.2.2	Analyse des résultats . . . . .	131
6.2.3	Fonction de cohérence . . . . .	135
6.2.3.1	Description de la méthode de mesure . . . . .	135
6.2.3.2	Analyse des résultats . . . . .	136
6.2.4	Mesure de la réponse en fréquence . . . . .	138
6.2.4.1	Description de la méthode de mesure . . . . .	138
6.2.4.2	Analyse des résultats . . . . .	140
6.2.5	Mesure des distorsions harmoniques et de la distorsion harmo- nique totale . . . . .	141
6.2.5.1	Description de la méthode de mesure . . . . .	141

6.2.5.2	Analyse des résultats . . . . .	143
6.2.6	Mesure des distorsions d'intermodulation . . . . .	146
6.2.6.1	Description de la méthode de mesure . . . . .	146
6.2.6.2	Analyse des résultats . . . . .	149
6.3	Identification du haut-parleur à l'aide des filtres de Volterra adaptatifs . . . . .	150
6.3.1	Considérations pratiques de l'identification . . . . .	150
6.3.1.1	Fréquence d'échantillonnage . . . . .	150
6.3.1.2	Choix du signal d'excitation . . . . .	152
6.3.1.3	Charge de calcul . . . . .	154
6.3.1.4	Procédé expérimental d'identification . . . . .	154
6.3.2	Construction du filtre de Volterra . . . . .	155
6.3.2.1	Paramètres du filtre de Volterra . . . . .	155
6.3.2.2	Implémentation du filtre de Volterra . . . . .	158
6.3.3	Simulation des filtres de Volterra adaptatifs LMS et RLS . . . . .	168
6.4	Conclusion . . . . .	175
<b>7</b>	<b>Modélisation des distorsions et de la réponse en fréquence du haut-parleur</b> . . . . .	<b>178</b>
7.1	Introduction . . . . .	178
7.2	Mise en œuvre des modèles . . . . .	179
7.3	Modélisation des métriques du haut-parleur à l'aide des filtres de Volterra adaptatifs . . . . .	180
7.3.1	Résultats de la modélisation avec le filtre de Volterra LMS adaptatif et $f_s = 24$ kHz . . . . .	181
7.3.2	Résultats de la modélisation avec le filtre de Volterra LMS adaptatif et $f_s = 96$ kHz . . . . .	182
7.3.3	Résultats de la modélisation avec le filtre de Volterra RLS adaptatif et $f_s = 24$ kHz . . . . .	184
7.3.4	Résultats de la modélisation avec le filtre de Volterra RLS adaptatif et $f_s = 96$ kHz . . . . .	186
7.4	Analyse et exactitude des modèles prédits . . . . .	187
7.4.1	Analyse des distorsions harmoniques . . . . .	187
7.4.2	Analyse des distorsions d'intermodulation . . . . .	189
7.4.3	Analyse de la réponse en fréquence . . . . .	190
7.5	Évaluation de la performance et validation des filtres adaptatifs . . . . .	191
7.5.1	Convergence et stabilité . . . . .	191
7.5.1.1	Algorithme LMS . . . . .	191
7.5.2	Algorithme RLS . . . . .	194
7.5.3	Complexité . . . . .	197
7.5.4	Validation . . . . .	199
7.6	Conclusion . . . . .	201
<b>8</b>	<b>Nouvelle méthode PVRP d'ajustement du facteur d'oubli</b> . . . . .	<b>203</b>
8.1	Introduction . . . . .	203
8.2	Problématique de la généralité de l'optimisation MSE . . . . .	204
8.3	Contexte de développement de la méthode PVRP . . . . .	206
8.4	Description de la métrique PVRP . . . . .	207

8.5	Algorithme de minimisation du PVRP . . . . .	208
8.6	Application de l'ajustement du facteur d'oubli . . . . .	209
8.7	Discussion des résultats de simulation . . . . .	210
8.8	Conclusion . . . . .	218
<b>Conclusion générale et perspectives</b>		<b>219</b>
	Conclusion générale . . . . .	219
	Perspectives . . . . .	224
!		
<b>Annexe A : Caractéristiques du matériel expérimental</b>		<b>225</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>232</b>

# Liste des figures

1.1	Application du principe de superposition dans un système linéaire. . . . .	14
1.2	Classification de la non-linéarité. . . . .	15
1.3	Exemples de caractéristiques non linéaires d'amplitude. a) Seuil ou zone morte, b) Saturation, c) Seuil avec saturation, d) Changement de gain, e) Polynôme, f) Hystérésis, g) Relai idéal, h) Relai réel, i) Tout ou rien, j) Jeu de denture, k) Multiniveaux, l) Frottement. . . . .	17
1.4	Exemples de caractéristiques non linéaires de fréquence. a) Harmoniques, b) Résonance de saut. . . . .	18
1.5	Exemples de caractéristiques non linéaires complexes. a) Cycle limite, b) Bifurcation, c) Chaos. . . . .	19
1.6	Procédure générale d'identification de systèmes. . . . .	21
1.7	Critère d'estimation dans la procédure d'identification. . . . .	23
1.8	Différents types de modèles linéaires. . . . .	27
1.9	Différents types de modèles non linéaires. . . . .	29
2.1	Représentation schématique d'une série de Volterra générale. . . . .	35
2.2	Système non linéaire décomposé en noyaux de Volterra fréquentiels. . . . .	43
2.3	Structure d'un filtre de Volterra du premier ordre. . . . .	44
2.4	Implémentation d'un filtre de Volterra du premier ordre sans $h_0$ . . . . .	45
2.5	Implémentation d'un filtre de Volterra quadratique. . . . .	45
3.1	Principe du filtrage optimal. . . . .	48
3.2	Schéma de principe d'un filtre de Wiener. . . . .	50
3.3	Surface de l'erreur quadratique moyenne. . . . .	52
3.4	Illustration du principe d'orthogonalité pour $N = 2$ . . . . .	54
3.5	Identification d'un système inconnu à l'aide d'un filtre adaptatif. . . . .	55
3.6	Noyau de Volterra en topologie filtre de Wiener avec une structure FIR. . . . .	58
4.1	Schéma de coupe d'un haut-parleur électrodynamique. . . . .	79
4.2	Haut-parleurs commerciaux selon la bande de fréquences. a) Woofer de 18" (30 – 3000 Hz), b) Médium de 6" (105 – 12500 Hz), c) Tweeter de 6-3/4" (3500 – 25000 Hz), d) Large bande de 8" (45 – 20000 Hz). . . . .	80
4.3	Exemple des spectres de l'excitation et de la réponse dans le cas de la distorsion harmonique. . . . .	82
4.4	Exemple du spectre d'excitation et de sa réponse dans le cas de la distorsion d'intermodulation. . . . .	83
4.5	Exemple du spectre d'excitation et sa réponse dans le cas de la distorsion par différence de fréquence. . . . .	83

4.6	Exemple du spectre d'excitation et sa réponse dans le cas de la distorsion sous-harmonique. . . . .	84
4.7	Modulation de phase d'une onde acoustique causée par une distorsion Doppler. . . . .	85
4.8	Exemple typique du facteur de force en fonction de la position de la bobine mobile. . . . .	86
4.9	Courbe de l'inductance non linéaire de la bobine mobile en fonction du déplacement de la membrane. . . . .	87
4.10	Courbe typique de la force de rappel du système de suspension du haut-parleur en fonction du déplacement de la membrane. . . . .	88
4.11	Courbe de rigidité non linéaire du système de suspension en fonction du déplacement de la membrane (adapté de [Klippel, 2005]). . . . .	88
4.12	Exemple de la répartition de la température dans le haut-parleur électrodynamique fonctionnant en régime permanent dans un local à une température ambiante de 21 °C [Jouhaneau, 1993]. . . . .	89
4.13	Schéma du procédé expérimental de mesure de la non-linéarité. . . . .	90
4.14	Exemple de courbes caractéristiques linéaire et non linéaire obtenues à l'aide d'un stimulus sinusoïdal de 1000 Hz. . . . .	91
4.15	Exemples de courbes caractéristiques réelles, réalisées pour la mesure de la linéarité. . . . .	91
4.16	Exemple de la distorsion harmonique caractéristique, incluant la THD, la seconde et la troisième distorsions harmoniques, exprimés en pourcentage entre 20 et 5000 Hz. . . . .	93
4.17	Lignes isosoniques normales des sons purs (écoute binaurale en champ libre, incidence frontale). . . . .	97
4.18	Effet de masque fréquentiel, produit par deux sons purs (masquants) sur les produits de distorsion. . . . .	98
5.1	Schéma synoptique du modèle linéaire à paramètres localisés du haut-parleur électrodynamique. . . . .	107
5.2	Circuit équivalent analogue du système électrique du haut-parleur électrodynamique. . . . .	107
5.3	Modèle avec pertes L2R de l'impédance électrique du haut-parleur. . . . .	108
5.4	Circuit équivalent analogue du système électrique du haut-parleur électrodynamique selon le modèle L2R. . . . .	109
5.5	Modèle avec pertes L3R de l'impédance électrique du haut-parleur. . . . .	109
5.6	Couplage électro-mécanique : a) Modèle physique, b) Circuit équivalent analogue. . . . .	110
5.7	Système mécanique : a) Système réel, b) Modèle physique, et c) Circuit équivalent analogue. . . . .	110
5.8	Circuit équivalent analogue du couplage mécano-acoustique. . . . .	111
5.9	Circuit équivalent analogue du système acoustique. . . . .	112
5.10	Circuit équivalent analogue complet du système électro-mécano-acoustique du modèle linéaire du haut-parleur électrodynamique. . . . .	112
5.11	Circuit équivalent analogue complet du modèle non linéaire du haut-parleur électrodynamique. . . . .	115

5.12	Décomposition d'un système non linéaire à l'aide de la convolution non linéaire. . . . .	120
5.13	Schéma d'identification à l'aide de la méthode de déconvolution non linéaire. . . . .	121
6.1	Procédé expérimental général de mesure. . . . .	127
6.2	Procédé expérimental de mesure de la courbe caractéristique. . . . .	130
6.3	Résultats expérimentaux de la mesure bivoie avec la tension électrique à l'entrée du haut-parleur ( $V_{rms} = 0,25$ V), et la pression acoustique à la sortie du microphone (SPL = 72 dB). . . . .	132
6.4	Résultats expérimentaux de la mesure bivoie avec la tension électrique à l'entrée du haut-parleur ( $V_{rms} = 1$ V), et la pression acoustique à la sortie du microphone (SPL = 81 dB). . . . .	132
6.5	Résultats expérimentaux de la mesure bivoie avec la tension électrique à l'entrée du haut-parleur ( $V_{rms} = 1,5$ V), et la pression acoustique à la sortie du microphone (SPL = 87 dB). . . . .	133
6.6	Résultats expérimentaux de la mesure bivoie avec la tension électrique à l'entrée du haut-parleur ( $V_{rms} = 3$ V), et la pression acoustique à la sortie du microphone (SPL = 92 dB). . . . .	133
6.7	Résultats expérimentaux de la mesure bivoie avec la tension électrique à l'entrée du haut-parleur ( $V_{rms} = 4,5$ V), et la pression acoustique à la sortie du microphone (SPL = 96 dB). . . . .	134
6.8	Résultats expérimentaux de la mesure bivoie avec la tension électrique à l'entrée du haut-parleur ( $V_{rms} = 6$ V), et la pression acoustique à la sortie du microphone (SPL = 99 dB). . . . .	134
6.9	Résultats expérimentaux de la mesure bivoie avec la tension électrique à l'entrée du haut-parleur ( $V_{rms} = 7,5$ V), et la pression acoustique à la sortie du microphone (SPL = 101 dB). . . . .	135
6.10	Procédé expérimental de mesure de la fonction de cohérence. . . . .	136
6.11	Graphes de la fonction de cohérence en fonction des niveaux de la tension d'entrée du haut-parleur. . . . .	137
6.12	Graphe en cascade de la fonction de cohérence en fonction des niveaux de la tension d'entrée du haut-parleur. . . . .	137
6.13	Procédé expérimental de mesure de la réponse en fréquence. . . . .	138
6.14	a) Fenêtrage temporel de la réponse impulsionnelle mesurée, entre les instants $t_1$ et $t_2$ , b) Résultat du fenêtrage temporel. . . . .	139
6.15	Réponse en fréquence mesurée du haut-parleur, obtenue avec la méthode de la réponse impulsionnelle. . . . .	140
6.16	Illustration des principales fréquences et de la bande passante dans la réponse en fréquence mesurée du haut-parleur. . . . .	141
6.17	Procédé expérimental de mesure des distorsions harmoniques et de la THD. . . . .	142
6.18	Secondes composantes de la distorsion harmonique ( $HD_2$ ) mesurées, obtenues avec 1, 4 et 7 $V_{rms}$ . . . . .	143
6.19	Troisièmes composantes de la distorsion harmonique ( $HD_3$ ) mesurées, obtenues avec 1, 4 et 7 $V_{rms}$ . . . . .	144
6.20	Distorsions harmoniques totales (THD) mesurées, obtenues avec 1, 4 et 7 $V_{rms}$ . . . . .	144

6.21	Distorsions harmoniques ( $HD_2$ , $HD_3$ et THD) mesurées, obtenues avec 1 Vrms. . . . .	145
6.22	Distorsions harmoniques ( $HD_2$ , $HD_3$ et THD) mesurées, obtenues avec 4 Vrms. . . . .	145
6.23	Distorsions harmoniques ( $HD_2$ , $HD_3$ et THD) mesurées, obtenues avec 7 Vrms. . . . .	146
6.24	Procédé expérimental de mesure des distorsions d'intermodulation. . . . .	147
6.25	Courbes expérimentales du module et de la phase de l'impédance du haut-parleur woofer-médium Nuandi Electronic modèle ND-MW08M50. . . . .	148
6.26	Spectres de distorsion d'intermodulation (IMD) mesurées, obtenues avec 1, 4 et 7 Vrms. . . . .	149
6.27	Illustration de l'intérêt du sur-échantillonnage pour la conception des filtres anti-remplissage des ADC. . . . .	151
6.28	Organigramme de la construction des trois signaux d'excitation utilisés dans le procédé d'identification. . . . .	153
6.29	Topologie du filtre de Volterra du troisième ordre ( $N=3$ ), avec une étendue de mémoire $M = 1$ . . . . .	162
6.30	Topologie du filtre de Volterra du troisième ordre ( $N=3$ ), avec une étendue de mémoire $M = 2$ . . . . .	163
6.31	Topologie du filtre de Volterra du troisième ordre ( $N=3$ ), avec une étendue de mémoire $M = 3$ . . . . .	166
6.32	Topologie du filtre de Volterra du troisième ordre ( $N=3$ ), avec une étendue de mémoire $M = 4$ . . . . .	169
6.33	Organigramme de programmation de l'algorithme du filtre de Volterra adaptatif LMS du troisième ordre de non-linéarité, servant à l'identification du haut-parleur. . . . .	170
6.34	Organigramme de programmation de l'algorithme du filtre de Volterra adaptatif RLS du troisième ordre de non-linéarité, servant à l'identification du haut-parleur. . . . .	171
7.1	Schéma de la procédure de modélisation des distorsions harmoniques à l'aide des filtres de Volterra adaptatifs. . . . .	179
7.2	Schéma de la procédure de modélisation des distorsions d'intermodulation à l'aide des filtres de Volterra adaptatifs. . . . .	180
7.3	Schéma de la procédure de modélisation de la réponse en fréquence à l'aide des filtres de Volterra adaptatifs. . . . .	180
7.4	Distorsions harmoniques ( $HD_2$ , $HD_3$ et THD) prédites correspondant à la meilleure note subjective (2/1), obtenues avec l'algorithme de Volterra LMS avec le signal BGUNI, $f_s = 24$ kHz, $M = 4$ et $\mu_{1,2,3} = 0,0667$ . . . . .	182
7.5	Réponse en fréquence prédite correspondant à la meilleure note subjective (2/1), obtenue avec l'algorithme de Volterra LMS avec le signal BGUNI, $f_s = 24$ kHz, $M = 4$ et $\mu_{1,2,3} = 0,0667$ . . . . .	182
7.6	Distorsions harmoniques ( $HD_2$ , $HD_3$ et THD) prédites correspondant à la meilleure note subjective (2/2), obtenues avec l'algorithme de Volterra LMS avec le signal BGUNI, $f_s = 96$ kHz, $M = 2$ et $\mu_{1,2,3} = 0,0523$ . . . . .	183

7.7	Réponse en fréquence prédite correspondant à la meilleure note subjective (2/2), obtenue avec l'algorithme de Volterra LMS avec le signal BGUNI, $f_s = 96$ kHz, $M = 2$ et $\mu_{1,2,3} = 0,0523$ . . . . .	184
7.8	Distorsions harmoniques ( $HD_2$ , $HD_3$ et THD) prédites correspondant à la meilleure note subjective (2/3), obtenues avec l'algorithme de Volterra RLS avec le signal BGCLIN, $f_s = 24$ kHz, $M = 1$ et $\lambda = 0,88$ . . . . .	185
7.9	Réponse en fréquence prédite correspondant à la meilleure note subjective (2/3), obtenue avec l'algorithme de Volterra RLS avec le signal BGCLIN, $f_s = 24$ kHz, $M = 1$ et $\lambda = 0,88$ . . . . .	185
7.10	Distorsions harmoniques ( $HD_2$ , $HD_3$ et THD) prédites correspondant à la meilleure note subjective (3/3), obtenues avec l'algorithme de Volterra RLS avec le signal BGUNI, $f_s = 96$ kHz, $M = 2$ et $\lambda = 0,922$ . . . . .	187
7.11	Réponse en fréquence prédite correspondant à la meilleure note subjective (3/3), obtenue avec l'algorithme de Volterra RLS avec le signal BGUNI, $f_s = 96$ kHz, $M = 2$ et $\lambda = 0,922$ . . . . .	187
7.12	Superposition de la seconde distorsion harmonique ( $HD_2$ ) mesurée avec la seconde distorsion harmonique prédite correspondant à la meilleure note subjective (3/3), obtenue avec l'algorithme de Volterra RLS avec le signal BGUNI, $f_s = 96$ kHz, $M = 2$ et $\lambda = 0,922$ . . . . .	188
7.13	Superposition de la troisième distorsion harmonique ( $HD_3$ ) mesurée avec la troisième distorsion harmonique prédite correspondant à la meilleure note subjective (3/3), obtenue avec l'algorithme de Volterra RLS avec le signal BGUNI, $f_s = 96$ kHz, $M = 2$ et $\lambda = 0,922$ . . . . .	189
7.14	Superposition de la distorsion harmonique totale (THD) mesurée avec la distorsion harmonique totale prédite correspondant à la meilleure note subjective (3/3), obtenue avec l'algorithme de Volterra RLS avec le signal BGUNI, $f_s = 96$ kHz, $M = 2$ et $\lambda = 0,922$ . . . . .	189
7.15	Superposition de la réponse en fréquence mesurée avec la réponse en fréquence prédite, obtenue avec l'algorithme RLS adaptatif pour le signal BGUNI, $f_s = 96$ kHz, $M = 2$ et $\lambda = 0,922$ , correspondant à la meilleure note subjective. . . . .	190
7.16	Représentation temporelle simultanée du signal désiré, la sortie du filtre et du signal d'erreur, obtenus avec l'algorithme LMS adaptatif pour le signal BGUNI, $f_s = 24$ kHz, $M = 4$ et $\mu_{1,2,3} = 0,0667$ , correspondant à la meilleure note subjective LMS/24 kHz. . . . .	192
7.17	Courbe d'apprentissage de l'algorithme LMS adaptative, obtenue avec un signal BGUNI, $f_s = 24$ kHz, $M = 4$ et $\mu_{1,2,3} = 0,0667$ , correspondant à la meilleure note subjective LMS/24 kHz. . . . .	192
7.18	Représentation temporelle simultanée du signal désiré, la sortie du filtre et du signal d'erreur, obtenus avec l'algorithme LMS adaptatif pour le signal BGUNI, $f_s = 96$ kHz, $M = 4$ et $\mu_{1,2,3} = 0,0523$ , correspondant à la meilleure note subjective LMS/96 kHz. . . . .	193
7.19	Courbe d'apprentissage de l'algorithme LMS adaptative, obtenue avec un signal BGUNI, $f_s = 96$ kHz, $M = 2$ et $\mu_{1,2,3} = 0,0523$ , correspondant à la meilleure note subjective LMS/96 kHz. . . . .	193

7.20	Représentation temporelle simultanée du signal désiré, la sortie du filtre et du signal d'erreur, obtenus avec l'algorithme RLS adaptatif pour le signal BGCLIN, $f_s = 24$ kHz, $M = 1$ et $\lambda = 0,88$ , correspondant à la meilleure note subjective RLS/24 kHz. . . . .	194
7.21	Courbe d'apprentissage de l'algorithme RLS adaptative, obtenue avec un signal BGCLIN, $f_s = 24$ kHz, $M = 1$ et $\lambda = 0,88$ , correspondant à la meilleure note subjective RLS/24 kHz. . . . .	195
7.22	Représentation temporelle simultanée du signal désiré, la sortie du filtre et du signal d'erreur, obtenus avec l'algorithme RLS adaptatif pour le signal BGUNI, $f_s = 96$ kHz, $M = 2$ et $\lambda = 0,922$ , correspondant à la meilleure note subjective RLS/96 kHz. . . . .	196
7.23	Vue rapprochée de la représentation temporelle simultanée du signal désiré, la sortie du filtre et du signal d'erreur (début des itérations), obtenus avec l'algorithme RLS adaptatif pour un signal BGUNI, $f_s = 96$ kHz, $M = 2$ et $\lambda = 0,922$ , correspondant à la meilleure note subjective RLS/96 kHz. . . . .	196
7.24	Vue rapprochée de la représentation temporelle simultanée du signal désiré, la sortie du filtre et du signal d'erreur (fin des itérations), obtenus avec l'algorithme RLS adaptatif pour un signal BGUNI, $f_s = 96$ kHz, $M = 2$ et $\lambda = 0,922$ , correspondant à la meilleure note subjective RLS/96 kHz. . . . .	197
7.25	Courbe d'apprentissage de l'algorithme RLS adaptative, obtenue avec un signal BGUNI, $f_s = 96$ kHz, $M = 2$ et $\lambda = 0,922$ , correspondant à la meilleure note subjective RLS/96 kHz. . . . .	197
7.26	Comparaison du signal expérimental de validation avec la réponse prédite du filtre pour la validation. . . . .	200
8.1	Exemple du signal d'erreur du filtre de Volterra adaptatif RLS, obtenu avec un signal BGUNI/96 kHz et $\lambda = 0,99$ . . . . .	206
8.2	Le PVRP en fonction du balayage du facteur d'oubli entre 0,8 et 1, pour un filtre de Volterra adaptatif RLS/96 kHz du troisième ordre avec $M=2$ et avec un signal de type BGUNI. . . . .	209
8.3	Courbes prédites de la THD et des composantes de distorsion harmonique $HD_2$ et $HD_3$ ( $\lambda = 0,85$ , $MSE = 3,5381e+12$ et $PVRP = 1,2478e+15$ ). . . . .	210
8.4	Courbe prédite de la réponse en fréquence ( $\lambda = 0,85$ , $MSE = 3,5381e+12$ et $PVRP = 1,2478e+15$ ). . . . .	211
8.5	Courbes prédites de la THD et des composantes de distorsion harmonique $HD_2$ et $HD_3$ ( $\lambda = 0,90256$ , $MSE = 0,0373$ et $PVRP = 13,1876$ ). . . . .	211
8.6	Courbe prédite de la réponse en fréquence ( $\lambda = 0,90256$ , $MSE = 0,0373$ et $PVRP = 13,1876$ ). . . . .	212
8.7	Courbes prédites de la THD et des composantes de distorsion harmonique $HD_2$ et $HD_3$ ( $\lambda = 0,924975$ , $MSE = 0,0463$ et $PVRP = 0,4146$ ). . . . .	212
8.8	Courbe prédite de la réponse en fréquence ( $\lambda = 0,924975$ , $MSE = 0,0463$ et $PVRP = 0,4146$ ). . . . .	213
8.9	Courbes prédites de la THD et des composantes de distorsion harmonique $HD_2$ et $HD_3$ ( $\lambda = 0,9414$ , $MSE = 0,0574$ et $PVRP = 0,4626$ ). . . . .	213

8.10	Courbe prédite de la réponse en fréquence ( $\lambda = 0,9414$ , $MSE = 0,0574$ et $PVRP = 0,4626$ ). . . . .	214
8.11	Courbes prédites de la THD et des composantes de distorsion harmonique $HD_2$ et $HD_3$ ( $\lambda = 0,98$ , $MSE = 0,0961$ et $PVRP = 0,6$ ). . . . .	214
8.12	Courbe prédite de la réponse en fréquence ( $\lambda = 0,98$ , $MSE = 0,0961$ et $PVRP = 0,6$ ). . . . .	215
8.13	Superposition de la distorsion harmonique totale (THD) mesurée avec la distorsion harmonique totale prédite, obtenue avec l'algorithme de Volterra RLS avec le signal BGUNI, $f_s = 96$ kHz, $M = 2$ et $\lambda = 0,924975$ . . . . .	215
8.14	Superposition de la seconde distorsion harmonique ( $HD_2$ ) mesurée avec la seconde distorsion harmonique prédite, obtenue avec l'algorithme de Volterra RLS avec le signal BGUNI, $f_s = 96$ kHz, $M = 2$ et $\lambda = 0,924975$ . . . . .	216
8.15	Superposition de la seconde distorsion harmonique ( $HD_3$ ) mesurée avec la troisième distorsion harmonique prédite, obtenue avec l'algorithme de Volterra RLS avec le signal BGUNI, $f_s = 96$ kHz, $M = 2$ et $\lambda = 0,924975$ . . . . .	216
8.16	Superposition de la réponse en fréquence mesurée avec la réponse en fréquence prédite, obtenue avec l'algorithme RLS adaptatif pour le signal BGUNI, $f_s = 96$ kHz, $M = 2$ et $\lambda = 0,924975$ . . . . .	217
A.1	Le haut-parleur woofer-médium Nuandi Electronic ND-MW08M50. . . . .	225
A.2	Courbe de la réponse en fréquence du haut-parleur. . . . .	226
A.3	Courbes du module et de la phase de l'impédance du haut-parleur. . . . .	227
A.4	Écran semi-infini avec le haut-parleur. . . . .	227
A.5	Image de l'interface audionumérique AVID M-AUDIO Fast Track C400. . . . .	228
A.6	Image de l'amplificateur de mesure Brüel & Kjær type 2610. . . . .	229
A.7	Réponse en fréquence de l'amplificateur de mesure Brüel & Kjær type 2610. . . . .	230
A.8	Microphone 1/2" Brüel & Kjær type 4189. . . . .	230
A.9	Réponse en fréquence du Microphone 1/2" Brüel & Kjær type 4189. . . . .	230
A.10	Amplificateur de puissance ALTON SA-680 utilisé. . . . .	231

# Liste des tableaux

3.1	Principales normes utilisées dans les critères d'optimisation du filtrage optimal. . . . .	49
4.1	Valeurs limites de la distorsion harmonique caractéristique totale des haut-parleurs et des casques dans les équipements et systèmes électroacoustiques haute-fidélité [IEC, 1986a;b]. . . . .	101
5.1	Tableau récapitulatif des différents modèles du haut-parleur électrodynamique dans la littérature. . . . .	124
6.1	Valeurs des distorsions d'intermodulation mesurées, obtenues avec 1, 4 et 7 $V_{rms}$ . . . . .	150
6.2	Calcul du nombre de coefficients des noyaux d'ordres 1, 2 et 3, et 4 du nombre total de coefficients des noyaux de la série de Volterra considérée. . . . .	161
6.3	Longueurs du vecteur d'entrée utilisées dans la simulation du filtre de Volterra adaptatif LMS. . . . .	172
6.4	Longueurs du vecteur d'entrée utilisées dans la simulation du filtre de Volterra adaptatif RLS. . . . .	172
7.1	Système de notation subjective mis en place pour l'évaluation de la qualité des courbes prédites. . . . .	181
7.2	Résumé des résultats de modélisation de l'algorithme de Volterra LMS avec $f_s = 24$ kHz . . . . .	181
7.3	Résumé des résultats de modélisation de l'algorithme de Volterra LMS avec $f_s = 96$ kHz . . . . .	183
7.4	Résumé des résultats de modélisation de l'algorithme de Volterra RLS avec $f_s = 24$ kHz . . . . .	184
7.5	Résumé des résultats de modélisation de l'algorithme de Volterra RLS avec $f_s = 96$ kHz . . . . .	186
7.6	Comparaison des valeurs des distorsions d'intermodulation mesurées avec les valeurs des distorsions d'intermodulation prédites, obtenues avec l'algorithme RLS adaptatif pour le signal BGUNI, $f_s = 96$ kHz, $M = 2$ et $\lambda = 0,922$ , correspondant à la meilleure note subjective. . . . .	190
7.7	Complexité en nombre d'opérations arithmétiques nécessaires par itération, des filtres adaptatifs linéaires LMS et RLS de $L$ coefficients. . . . .	198
7.8	Complexité en nombre de FLOPS requis pour les algorithmes adaptatifs de Volterra LMS et RLS utilisés. . . . .	199

---

8.1	Comparaison des valeurs des distorsions d'intermodulation mesurées avec les valeurs des distorsions d'intermodulation prédites, obtenues avec l'algorithme RLS adaptatif pour différentes valeurs de $\lambda$ pour le signal BGUNI, $f_s = 96$ kHz, $M = 2$ . . . . .	217
8.2	Valeurs de la MSE et du PVRP pour les valeurs pertinentes du facteur d'oubli. . . . .	218
A.1	Principales caractéristiques du haut-parleur woofer-médium Nuandi Electronic ND-MW08M50. . . . .	225
A.2	Paramètres de Thiele et Small du haut-parleur woofer-médium Nuandi Electronic modèle ND-MW08M50. . . . .	226
A.3	Principales caractéristiques de l'interface audionumérique AVID M-AUDIO Fast Track C400. . . . .	228
A.4	Principales caractéristiques de l'amplificateur de mesure Brüel & Kjær type 2610. . . . .	229
A.5	Principales caractéristiques du Microphone 1/2" Brüel Kjær type 4189. . . . .	231

# Liste des algorithmes

3.1	Algorithme LMS . . . . .	61
3.2	Algorithme LMS pour modèle de Volterra . . . . .	66
3.3	Algorithme RLS . . . . .	71
3.4	Algorithme RLS pour modèle de Volterra . . . . .	75
6.1	Algorithme de Volterra adaptatif LMS. . . . .	173
6.2	Algorithme de Volterra adaptatif RLS. . . . .	174
8.1	Algorithme de minimisation du PVRP . . . . .	208

# Liste des notations

## Abréviations

---

AR	Auto Regressive model (Modèle autorégressif)
ARMAX	Auto Regressive Moving Average with eXternal inputs (Modèle autorégressif à moyenne mobile et entrée exogène)
ARX	Auto Regressive model with eXternal inputs (Modèle autorégressif à entrée exogène)
BBG	bruit blanc gaussien
BGCLIN	bruit blanc gaussien de puissance à croissance linéaire
BGCLOG	bruit blanc gaussien de puissance à croissance logarithmique
BGUNI	bruit blanc gaussien uniforme
BJ	Box-Jenkins
E/S	Entrée(s)/sortie(s)
FFT	Fast Fourier Transform (Transformée de Fourier rapide)
FIR	Finite Impulse Response (Réponse impulsionnelle finie)
FLOPS	Floating-point Operations Per Second (opérations en virgule flottante par seconde)
FM	Frequency Modulation (Modulation de fréquence)
IEC	International Electrotechnical Commission (Commission électrotechnique internationale)
IFFT	Inverse Fast Fourier Transform (Transformée de Fourier rapide inverse)
IIR	Infinite Impulse Response (Réponse impulsionnelle infinie)
LMS	Least Mean Square (Algorithme du gradient stochastique)
LS	Least Squares (Moindres carrés)
LSE	Least-Square Estimate
LTI	Linéaire à Temps Invariant
M.I.T.	Massachusetts Institute of Technology
MMAE	Minimum Mean Absolute Squared Error (Erreur absolue moyenne)
MMSE	Minimum Mean Squared Error (Erreur quadratique moyenne minimale)
MSE	Mean Squared Error (Erreur quadratique moyenne)
NAR	Nonlinear Auto Regressive model (Modèle autorégressif non linéaire)
NARMAX	Nonlinear Auto Regressive Moving Average with eXternal inputs (Modèle non linéaire autorégressif à moyenne mobile et entrée exogène)
NARX	Nonlinear Auto Regressive model with eXternal inputs (Modèle non linéaire autorégressif à entrée exogène)

---

NMSE	Normalised Mean Squared Error (Erreur quadratique moyenne normalisée)
PVRP	Peak Value-RMS Product (produit de la valeur crête et de la valeur efficace)
RF	réponse en fréquence
RLS	Recursive Least Squares (Algorithme des moindres carrés récursifs)
RLS	Recursive least squares (Algorithme des moindres carrés récursifs)
SPL	Sound Pressure Level (Niveau de la pression sonore)
TFD	Transformée de Fourier Discrète
THD	Total Harmonic distortion (Distorsion harmonique totale)
Var	variance
WLS	Weighted Least Squares (Moindres carrés pondérés)

### Symboles Grecs

---

$\delta$	facteur de régularisation pour l'initialisation de $\mathbf{P}(0)$
$\hat{\theta}$	paramètre prédit
$\lambda$	facteur d'oubli de l'algorithme RLS
$\lambda_i$	valeur propre d'une matrice
$\mu$	pas d'adaptation de l'algorithme LMS
$\omega$	pulsation
$\sigma$	écart-type
$\sigma^2$	variance
$\tau$	retard
$\theta$	paramètre
$\theta$	vecteur de paramètres
$\varepsilon_p$	erreur de prédiction
$\varepsilon$	erreur
$\alpha(n)$	erreur <i>a priori</i> à l'étape $n$

### Symboles Latins

---

$\mathbf{h}(\mathbf{n})$	vecteur des coefficients du filtre
$\mathbf{I}$	matrice identité
$\mathbf{Q}$	matrice unitaire
$\mathbf{w}(\mathbf{n})$	vecteur des coefficients du filtre
$\hat{y}(n)$	sortie prédite
$\text{tr}(\cdot)$	trace d'une matrice
$\mathbf{x}$	vecteur d'entrée
$B$	biais
$b(n)$	bruit
$Bl$	facteur de force
$C$	combinaison avec répétition
$C_{ms}$	compliance du système de suspension du haut-parleur
$C_{xy}$	fonction de cohérence
$d(n)$	signal désiré
$e(n)$	signal d'erreur

---

$f$	fonction
$F_x$	force de réluctance
$h(t), h(n)$	réponse impulsionnelle, noyau de Volterra
$H[.]$	opérateur de Volterra
$HD_2$	seconde composante de la distorsion harmonique
$HD_3$	troisième composante de la distorsion harmonique
$i$	entier
$IMD_2$	seconde composante de la distorsion d'intermodulation
$IMD_3$	troisième composante de la distorsion d'intermodulation
$J$	fonction de coût
$J_{min}$	erreur minimale
$k$	entier
$L_e$	inductance électrique
$M$	étendue de mémoire de la série de Volterra
$N$	ordre de non-linéarité
$n$	entier, temps discret
$O$	complexité en temps de calcul
$P$	densité spectrale de puissance
$p$	entier, ordre de non-linéarité, ordre de noyau
$p$	pression acoustique
$t$	temps
$X$	transformée de Fourier de l'entrée
$x$	déplacement de la bobine du haut-parleur
$x(t), x(n)$	signal d'entrée, signal d'excitation, stimulus
$Y$	transformée de Fourier de la sortie
$y(t), y(n)$	signal sortie, réponse d'un système
$z^{-1}$	retard unité
$\mathbf{k}(n)$	vecteur du gain de Kalman
$\mathbf{P}(n)$	inverse de la matrice d'autocorrélation
$\mathbf{R}_x$	matrice d'autocorrélation
$\mathbf{R}_{dx}$	vecteur d'intercorrélation
$\mathbf{w}_{opt}$	filtre optimal de Wiener
dB	décibel
Hz	Hertz
IMD	distorsion d'intermodulation totale
Pa	Pascal
Vrms	Volt efficace

# Introduction générale

## Contexte

*Le monde réel est non linéaire.* Cette non-linéarité est due à la disproportion, à l'irrégularité, à la complexité, au chaos, etc. Elle conditionne de manière naturelle la richesse et la diversité des phénomènes physiques réels, et est devenue pour les uns, une source de curiosité et d'intérêt, et représente toutefois pour les autres une source de complication voire de danger.

L'intérêt à l'égard des systèmes non linéaires a commencé avec les systèmes mécaniques et optiques dès le XIX<sup>e</sup> siècle, ce qui a conduit à l'incursion des mathématiques, avec les travaux fondateurs sur le calcul différentiel et les systèmes d'équations différentielles du mathématicien et physicien français Henri Poincaré (1854 – 1912). Le développement de la théorie de la stabilité des dynamiques linéaires et non linéaires par le mathématicien russe Alexandre Mikhaïlovitch Liapounov (1857 – 1918), fut un autre repère dans l'histoire des systèmes non linéaires.

A l'opposé des systèmes linéaires, les systèmes non linéaires demeurent quasi-absents des programmes d'enseignement en graduation<sup>1</sup>. Certains expliquent cela par la difficulté de leur étude et leur analyse. D'autres, le justifient tout simplement par le défaut d'outils analytiques idoines, semblables à ceux qui ont été développés pour les systèmes linéaires invariants dans le temps [Ogunfunmi, 2007].

Loin du cadre académique, l'ingénierie des systèmes non linéaires est considérée non seulement comme une entreprise difficile, confuse, et largement considérée comme dangereuse [Rugh, 1981].

Les transducteurs dans leur majorité sont des exemples typiques de systèmes dynamiques non linéaires. Le haut-parleur électrodynamique est un transducteur électroacoustique connu depuis son invention pour son comportement non linéaire, induisant des distorsions dans ses paramètres de sortie (pression acoustique et vibration de la membrane). Malgré les efforts apportés par les ingénieurs pour la réduction de sa non-linéarité, le haut-parleur demeure néanmoins l'élément le moins linéaire de la chaîne audio<sup>2</sup>. Les corrections qui ont été apportées sur le haut-parleur électrodynamique,

---

1. Une recherche que nous avons effectuée sur Internet le 12/03/2018, concernant les programmes d'enseignement pour Licence et Master, tous domaines confondus, a révélé l'absence de toute matière dédiée exclusivement aux systèmes non linéaires, excepté la présence de rares chapitres ou de parties de chapitres, sur la résolution d'équations et systèmes non linéaires (mathématiques), et des généralités sur les systèmes non linéaires (automatique et systèmes asservis). Du reste, les programmes d'enseignement dans les autres pays ne font pas exception à cet égard.

2. Une chaîne audio est généralement constituée de : 1. Une ou plusieurs sources sonores (microphones, lecteurs CD, PC, station audionumérique (DAW), 2. Mixeurs et contrôleurs audio (Préam-

l'ont été sur le plan de la conception, des éléments mécaniques, et dans le circuit magnétique, seulement, le champ d'action de la correction de ces distorsions, se passe depuis une trentaine d'années au niveau de la compensation des distorsions et de la linéarisation.

Ainsi, dans le but de saisir cette dynamique non linéaire du haut-parleur, des chercheurs ont introduit depuis une trentaine d'années, de nouveaux outils d'étude et d'analyse, à l'image du néerlandais A. J. M. Kaizer en 1986 [Kaizer, 1986], avec son travail de thèse novateur, dans lequel il a utilisé pour la première fois la série de Volterra pour la description du comportement du haut-parleur électrodynamique. Depuis, le modèle de Volterra, déjà utilisé depuis le milieu des années 1960 dans de nombreux domaines pour l'analyse et la modélisation des systèmes dynamiques non linéaires, est devenu un paradigme récurrent pour la modélisation du haut-parleur.

Le formalisme de Volterra se décline en plusieurs variantes : approche analytique (paramétrique), approche globale (non paramétrique), dans le domaine temporel ou fréquentiel, en représentation d'état ou associé à des méthodes adaptatives. L'une des approches les plus intéressantes parmi les méthodes d'identification, et qui a été adoptée pour la modélisation du haut-parleur électrodynamique est certainement les filtres de Volterra adaptatifs, combinant l'efficacité reconnue de la série de de Volterra pour capturer les traits pertinents du comportement dynamique des systèmes non linéaires, et les méthodes adaptatives qui sont devenues incontournables en automatique et en traitement du signal en général, dans les procédés d'identification pour l'estimation des paramètres d'un modèle.

Pour les haut-parleurs, l'intérêt des filtres adaptatifs de Volterra est d'autant plus marqué lorsqu'il s'agit de mettre à profit les modèles développés dans des solutions d'identification ou de linéarisation en temps réel, cherchant la poursuite de la variation des différents signaux sous des conditions de non stationnarité connues dans le haut-parleur électrodynamique. L'atout majeur du modèle de Volterra est sans doute la linéarité de la sortie de sa série par rapport à ses paramètres, appelés coefficients des noyaux de Volterra. Cette dernière propriété permet d'étendre vers le modèle de Volterra, beaucoup de méthodes employées pour la modélisation des systèmes linéaires. Néanmoins, il faut dire que le formalisme de Volterra possède certaines limitations, notamment le nombre de paramètres très important qui peut être une véritable contrainte, avec un nombre élevé de l'ordre de non-linéarité ou de l'étendue de mémoire, et des hypothèses simplificatrices infructueuses.

Néanmoins, ce développement suscite une question légitime qui se pose, qui est de savoir pourquoi modéliser les distorsions non linéaires du haut-parleur ?

Nous citons en ce qui suit les principales raisons de cette modélisation des distorsions non linéaires du haut-parleur électrodynamique.

- La linéarisation : Encore appelée compensation des non-linéarités ou des distorsions non linéaires. Elle représente depuis une vingtaine d'années, le plus grand chantier de la recherche pour les haut-parleurs. Elle consiste, à compenser les non-linéarités de diverses origines du haut-parleur électrodynamique, à l'aide de différentes stratégies de linéarisation à partir d'un modèle fiable du haut-parleur et des distorsions occasionnées.

---

plificateurs, convertisseurs, régulation du gain, égaliseurs, traitement, filtrage... 3. Amplificateurs de puissance (en monovoie, bivoie ou multivoie), 4. Sortie (haut-parleurs ou systèmes de haut-parleurs).

- Le haut-parleur large bande unique : L’engouement naissant pour un retour vers le schéma du haut-parleur unique, appelé haut-parleur large bande, avec toutes les exigences maintenues en termes de qualité et de fidélité attendues des systèmes de sonorisation actuels à restitution multiple des plages de fréquences. Ce choix induit beaucoup de contraintes pour limiter les distorsions non linéaires souvent de type Doppler, dont la modélisation est l’élément essentiel de la solution [Quaegebeur, 2007].
- Bass mania<sup>1</sup> : La forte demande des mélomanes et du monde professionnel de la musique, depuis les années 1970 d’une bonne réponse des haut-parleurs en basses fréquences, exigeant une large excursion de la membrane du haut-parleur, a contraint les fabricants à pousser les limites de la restitution des sons graves, avec des woofers et des subwoofers de plus en plus puissants et surdimensionnés. Toutefois, cette qualité est aujourd’hui fortement compromise avec la miniaturisation des haut-parleurs dans les équipements multimédia actuels (Smartphones, tablettes, téléviseurs, ordinateurs portables, etc.), ce qui représente un véritable défi pour les ingénieurs pour obtenir une qualité acceptable, avec un son sans distorsion, où l’on doit passer forcément par l’étape de modélisation.
- Suppression d’écho acoustique : Le procédé de suppression d’écho acoustique, consiste à supprimer l’écho généré en chemin de retour par interférence sonore, afin de garantir une qualité vocale dans les systèmes de communication de conversation full-duplex, tels que dans les téléphones en mode haut-parleur, systèmes de téléphonie mains libres, téléconférence, etc. Techniquement, l’écho est de deux types, le premier est linéaire, ayant comme sources : la propagation directe dans l’espace, les réverbérations contre les parois et les retards. Cependant, le second est non linéaire, formé principalement par les caractéristiques du haut-parleur, les vibrations de l’enceinte et les irrégularités de la forme d’onde du signal. La suppression de l’écho linéaire est une opération qu’on arrive à maîtriser, par contre le plus dur est de se débarrasser de la partie non linéaire, on parle ainsi de suppression d’écho non linéaire. Le haut-parleur étant le principal responsable de ce type d’écho, il devient du coup impératif d’avoir un modèle très précis des distorsions du haut-parleur pour l’intégrer dans le modèle global du canal de transmission en vue de l’élaboration d’une stratégie efficace de suppression d’écho.
- Contrôle actif du bruit (CAB)<sup>2</sup> : Méthode permettant de réduire les bruits indésirables primaires par l’ajout d’un bruit secondaire artificiel ou antibruit, afin d’éteindre le bruit primaire par interférence destructive. Dans certaines applications, où le bruit ambiant est très fort (turbines, transformateurs, systèmes d’échappement, etc.), il y a besoin d’une source de bruit secondaire de même puissance et de très grande qualité, et surtout avec une réponse en basses fréquences avec des distorsions non linéaires les plus faibles possibles, obtenue à l’aide de modèles d’une très grande exactitude, indispensables pour la réussite du CAB.
- Aide auditive : L’aide auditive comporte les appareils et les prothèses auditifs. Compte tenu de la très minuscule taille de ces dispositifs, les distorsions non linéaires se comptent parmi les principales limitations. Des études ont montré des valeurs allant jusqu’à 40 % de distorsion harmonique dans la région des basses fréquences [Schurer,

---

1. Littéralement en français : La manie des sons graves, qui est une expression de la culture audiophile.

2. En anglais : Active Noise Control ou ANC.

- 1997], induisant une gêne permanente chez les patients, ce qui oblige les fabricants à redoubler d'effort pour réduire la valeur des distorsions à l'aide de modèles spécifiques.
- Restauration des données audio : Les dernières années ont connu un intérêt sans précédent à l'égard de la restauration et la sauvegarde des fonds patrimoniaux radio-phoniques, audiovisuels et cinématographiques. Les détériorations les plus difficiles à traiter sont les distorsions non linéaires (Bruits de clic, artefacts audio, bruit de fond, écrêtage, distorsion de quantification, etc.). La restauration de ces effets néfastes pour les données audio, parfois centenaires, repose sur des modèles non linéaires très performants (La thèse [Troughton, 1999] est dédiée à ce sujet).

A la lumière de tous ces motifs, faisant que le procédé de modélisation des distorsions non linéaires dans le haut-parleur devient indispensable, ayant au bout du compte des finalités très diverses, telles que le confort à l'écoute, la clarté de l'audition, la suppression du bruit ambiant, des conversations intelligibles ou la sauvegarde du patrimoine en données audio.

Le travail de cette thèse examine les développements récents dans le domaine de l'identification des haut-parleurs. Il explore de nouvelles possibilités, pour tirer efficacement profit des méthodes les plus intéressantes à même d'améliorer la modélisation des distorsions non linéaires. L'exactitude des distorsions non linéaires prédites, serait un grand avantage pour le renforcement de la qualité sonore des haut-parleurs électrodynamiques, que l'on croyait acquise, mais plus que jamais mise à l'épreuve.

## Problématique

La recherche approfondie menée sur les différents volets de notre travail de thèse, nous a permis de dégager la problématique de la thèse qui peut être exprimée par la questions suivante : ***Le haut-parleur réel est un système dynamique non linéaire et non stationnaire. L'association du modèle de Volterra avec les filtres adaptatifs est-elle la solution appropriée, pour respectivement répondre aux problèmes de non-linéarité et de non-stationnarité ?***

A partir de cette problématique, nous pouvons décliner quatre questions centrales auxquelles nous devons répondre :

1. Le modèle de Volterra est employé depuis longtemps sur les systèmes non linéaires, et depuis une trentaine d'années sur les haut-parleurs électrodynamiques, pour l'identification et la compensation des non-linéarités. Pourquoi cet intérêt porté au modèle de Volterra, malgré ses limites, ses exigences et sa complexité ?
2. Plusieurs filtres de Volterra adaptatifs LMS et RLS ont été employés pour l'identification des haut-parleurs. Quel algorithme adaptatif donnerait les meilleures estimations des filtres (noyaux de Volterra), capables de fournir les modèles les plus exacts des distorsions non linéaires ?
3. Pour chaque filtre de Volterra adaptatif choisi, une multitude de paramètres de différents types et différentes valeurs possibles, s'offre pour l'identification, dont la manipulation est extrêmement décisive pour le procédé d'identification en général et l'estimation des noyaux de Volterra en particulier. Quels sont les meilleurs paramètres à choisir pour le filtre de Volterra adaptatif afin de garantir la meilleure optimisation des noyaux estimés ? Les questions suivantes se posent concernant ces paramètres :

- Quels signaux d’excitation choisir ?
  - Quels niveaux d’excitation choisir ?
  - La fréquence d’échantillonnage a-t-elle une influence sur la qualité des noyaux ?
  - Quel ordre de non-linéarité de la série de Volterra choisir ?
  - Quelle étendue de mémoire de la série de Volterra choisir ?
  - Quelle structure à choisir pour les noyaux en tant que filtres (FIR, IIR) ?
4. L’erreur de prédiction produite au cours du processus d’identification, semble être influencée par le caractère non stationnaire du haut-parleur électrodynamique. Est-il possible d’améliorer la qualité de l’estimation des noyaux de Volterra en agissant sur les paramètres de l’algorithme d’adaptation du filtre de Volterra adaptatif ?

## Hypothèse

Partant d’une recherche bibliographique approfondie et d’un état de l’art sur les différents axes du thème de la thèse, et en s’appuyant sur les questionnements de la problématique, nous sommes parvenus à élaborer une hypothèse centrale de la thèse. Le travail de cette thèse repose notamment sur une hypothèse, qui a trait aux moyens et aux méthodes mis à profit pour la modélisation des distorsions non linéaires du haut-parleur comme finalité. Il ressort que ces modèles de Volterra adaptatifs choisies comme moyens, dissimulent une complexité qui réside dans la mise en œuvre liée au caractère multiparamétrique des filtres adaptatifs de Volterra à mettre en œuvre. Dans cette hypothèse, il doit exister un compromis, même faible soit-il, parmi toutes les combinaisons offertes par cette myriade de paramètres, engagés dans la construction des filtres de Volterra adaptatifs. Cette hypothèse servira en conséquence, de fil conducteur tout au long de la thèse, pour le développement de la stratégie d’identification du haut-parleur en tant que système faiblement non linéaire, et qui permettra dans l’étape suivante, de s’atteler à la modélisation des distorsions non linéaires.

## Objectifs de la thèse

Les objectifs de cette thèse peuvent être résumés en quatre points :

1. Construire un procédé d’identification complet et abouti, issu de l’association du formalisme de Volterra avec les principaux filtres adaptatifs. Cette combinaison est censée tenir compte de la caractéristique faiblement non linéaire de certains systèmes dynamiques non linéaires comme le haut-parleur électrodynamique, et en même temps garder en ligne de mire la non stationnarité affichée par les haut-parleurs réels, comme la plupart des systèmes non linéaires réels.
2. Mettre à profit le plus grand nombre possible de résultats des travaux antérieurs, afin d’explorer de nouveaux terrains de la modélisation des systèmes dynamiques faiblement non linéaires en général, et de celle du haut-parleur électrodynamique en particulier.
3. Contribuer à la démystification du formalisme de Volterra, en s’appuyant sur des recherches bibliographiques et des études théoriques approfondies, tout en étant conscients de sa complexité et de l’extrême difficulté de sa mise en œuvre. Cette démystification, passe par la maîtrise de tous les aspects de la série de Volterra utilisée au cœur d’une méthode complète d’identification, servant à la modélisation de

différents systèmes dynamiques faiblement non linéaires, rencontrés dans diverses applications dans tous les domaines.

4. Apporter des réponses aux questionnements de la problématique.

## Contributions de la thèse

Les principales contributions apportées par ce travail de thèse s'articulent selon trois points principaux : 1. L'originalité du sujet, 2. La méthodologie, 3. La mise en œuvre. Ces points sont détaillés ci-après :

**1. Originalité du sujet :** Une recherche effectuée sur le Portail National de Signalement des Thèses (PNST) <sup>1</sup> le 16/04/2018, nous a permis de constater que :

- aucun travail ayant pour objet les haut-parleurs n'y est inscrit ;
- aucun travail ayant pour sujet l'identification ou la modélisation des systèmes non linéaires à l'aide du modèle ou la série de Volterra <sup>2</sup> n'y figure ;
- aucun travail de post-graduation (Magister, Doctorat), traitant le même thème n'y est signalé.
- enfin, hors les données fournies par le PNST, la recherche bibliographique que nous avons effectuée, nous a permis de constater que la plupart des travaux sur la modélisation du haut-parleur utilisent le modèle de Volterra analytique. Or, les rares recherches basées sur le modèle de Volterra non paramétrique, c.-à-d., à l'aide d'une approche globale de la modélisation du haut-parleur, mettent à profit des méthodes autres que les filtres adaptatifs pour l'estimation des paramètres du modèle. A ce titre, nous pouvons dire que le travail de cette thèse traitant de la modélisation des distorsions dans le haut-parleur électrodynamique, à l'aide des filtres de Volterra adaptatifs LMS et RLS du troisième ordre, en vue de la modélisation des distorsions du haut-parleur, est un travail inédit, qui se différencie complètement des autres travaux existants, et ce, entre autres raisons, compte tenu de la combinaison modèle de Volterra/filtres adaptatifs employée, ou de par l'étude comparative multiparamétrique réalisée.

## 2. Méthodologie

**a.** A partir de la recherche bibliographique que nous avons menée sur la modélisation du système haut-parleur, nous avons constaté qu'au cours des trois dernières décennies, une trentaine de recherches ont été réalisées sur le thème de la modélisation du haut-parleur, à l'aide de différentes méthodes et pour des objectifs différents. Certains chercheurs ont employé des filtres adaptatifs seuls ou avec diverses méthodes de modélisation, pour l'identification du haut-parleur, à l'exemple de :

- [Ribeiro et al., 2005] : Filtres RLS, et Kalman pour la compensation des non-linéarités ;
- [Gao and Snelgrove, 1991; Tsai et al., 2013] : Diverses méthodes adaptatifs avec des modèles à éléments localisés, pour la modélisation des paramètres de Small

1. L'adresse Internet du PNST est : [www.pnst.cerist.dz](http://www.pnst.cerist.dz)

2. La saisie du terme « Volterra » comme mot clé pour la recherche, permet de lister que des travaux en mathématiques sur les équations intégro-différentielles de Volterra.

- et Thiele pour les premiers, et pour la compensation des non-linéarités pour les derniers ;
- [Hegde et al., 2002] : Plusieurs filtres adaptatifs avec le modèle de Wiener et le modèle de Hammerstein-Wiener en vue de l’optimisation des méthodes de modélisation ;
  - [Bright, 2002] : Divers filtres adaptatifs avec le modèle à erreur de sortie pour la compensation des non-linéarités du haut-parleur.

D’autres chercheurs ont adopté le modèle de Volterra avec ses différentes variantes pour l’identification du haut-parleur, parmi lesquels :

- [Bouvier et al., 2016] : Série de Volterra analytique avec représentation d’état pour l’estimation des paramètres de Small et Thiele ;
- [Tsujikawa et al., 2000] : Modèle de Volterra avec la méthode des multi-signaux sinusoïdaux en vue de la modélisation des distorsions et de leurs compensation.

Dans notre travail, nous avons opté pour une approche globale pour l’identification du haut-parleur électrodynamique. Elle consiste à associer le modèle de Volterra non paramétrique avec des filtres adaptatifs, en vue de l’estimation des noyaux paramétriques de Volterra, décrivant le comportement global du système haut-parleur. A ce titre, cette association modèle de Volterra-filtres adaptatifs est originale et inédite, que nous avons développée dans le but de modéliser différentes métriques<sup>1</sup> du haut-parleur électrodynamique, à savoir, les distorsions harmoniques, les distorsions d’intermodulation et la réponse en fréquence ;

- b.** Une étude comparative multiparamètres a été réalisée à partir des trois topologies retenues, en l’occurrence, les filtres de Volterra adaptatifs LMS et RLS, tout en variant les points suivants :
- différents signaux d’excitation ont été utilisés, basés sur le bruit blanc gaussien ;
  - divers niveaux d’excitation ont été utilisés pour chaque signal d’excitation choisi, jusqu’à la capacité maximale de restitution du haut-parleur utilisé ;
  - un troisième ordre de non-linéarité de la série de Volterra a été utilisé, alors que la grande majorité des modèles ne dépassent pas le second ordre ;
  - des étendues de mémoire de la série de Volterra  $M = 1, 2, 3$  et  $4$  ont été employées, quand la plupart des travaux utilisent qu’une seule étendue de mémoire ;
  - deux fréquences d’échantillonnage de  $24$  et  $96$  kHz ont été adoptées.
- c.** Une nouvelle méthode de post-estimation a été développée, servant à l’ajustement de la valeur du facteur d’oubli dans les filtres de Volterra adaptatifs RLS. La méthode proposée, appelée méthode du produit de la valeur crête et de la valeur efficace PVRP

---

1. En français, le terme *métrique*, en tant que substantif féminin existe [ATILF et al., 2017], mais possède exclusivement des significations en philologie, en topologie et en musicologie. Par contre en anglais, son sens a été étendu vers d’autres domaines, comme la technologie, ce qui a inspiré la communauté d’utilisateurs francophones à l’utiliser dans des domaines tels que la technologie, l’informatique ou le management. Nous citons les deux définitions anglaises de la métrique (*metrics*) : 1. A standard for measuring or evaluating something; basis for assessment (Une norme pour mesurer ou évaluer quelque chose; base pour l’évaluation) [Harper Collins Publishers, 2017], 2. A system or standard of measurement (Un système ou une norme de mesure) [Oxford University Press, 2017].

(Peak Value-RMS Product). La méthode proposée améliore le choix de la valeur du facteur d'oubli dans l'algorithme d'adaptation RLS. Elle est développée pour le cas particulier des systèmes non linéaires peu variant dans le temps, où la poursuite des variations du signal d'entrée provoque des perturbations dans le signal d'erreur de prédiction, et où des métriques telles que l'erreur quadratique moyenne (MSE) sont limitées.

### 3. Mise en œuvre

- Développement d'algorithmes d'adaptation LMS et RLS, spécifiques au modèle de Volterra. Ce développement sous-entend une nouvelle écriture des vecteurs d'entrée, des matrices des paramètres des noyaux, et des séquences de sorties. Les différents paramètres des algorithmes sont également transformés, comme le pas d'adaptation  $\mu$  dans les algorithmes LMS qui prend la forme d'une matrice  $L \times L$ .
- Le choix d'investigation de la qualité des noyaux de Volterra, et par la suite l'exactitude des modèles de distorsion, en fonction de la fréquence d'échantillonnage, a imposé l'emploi d'une interface d'acquisition audionumérique d'une résolution maximale de 24-bit/96 kHz, pour des fréquences d'échantillonnage de 24 kHz ou 96 kHz qui n'a jamais été utilisée auparavant.
- La mesure des différentes distorsions du haut-parleur électrodynamique, ont été mises en œuvre à l'aide de codes développées sous environnement Matlab<sup>TM</sup>. Ces mêmes codes ont servi pour la modélisation des mêmes métriques mesurées du haut-parleur. Ce double usage des codes Matlab<sup>TM</sup> développés, a permis d'utiliser exactement les mêmes protocoles métrologiques pour les mesures expérimentales et pour la prédiction des métriques choisies, afin de s'affranchir des écarts inéluctables entre les algorithmes de modélisation et les protocoles de mesure des équipements utilisés dans le procédé expérimental de mesure.
- Le choix de la méthodologie expliquée plus haut, a entraîné une complexité sans précédent du procédé d'identification du haut-parleur, induisant une très importante charge de calcul due :
  - au recours à une fréquence d'échantillonnage jusqu'à 96 kHz ;
  - aux durées des signaux d'excitation qui peuvent aller jusqu'à 45 secondes ;
  - à la prise en compte du troisième ordre de non-linéarité ( $N = 3$ ) ;
  - aux étendues de mémoire de la série de Volterra  $M = 1, 2, 3$  et 4.

Devant la charge de calcul évidente, accumulée avec cette complexité du procédé d'identification, nous étions contraints d'avoir recours aux services du centre de calcul haute performance HPC Ibn Baja de l'USTO-MB, en vue de l'implémentation des codes développés, manipulant des données de très grandes tailles, et nécessitant une grande puissance de calcul et une large mémoire.

## Organisation de la thèse

**Le chapitre 1** traite de l'état de l'art de l'identification, de la modélisation en général, et de la modélisation des systèmes non linéaires en particulier. Au début de ce chapitre nous définissons les systèmes linéaires et non linéaires. Nous aborderons par la suite les différents types de non-linéarité, avec une description des principales caractéristiques

non linéaires. Les différentes étapes employées dans la procédure d'identification sont abordées successivement. Les deux dernières sections sont réservées à une revue des différentes classes de modèles linéaires et non linéaires avec de nombreux exemples dans chaque classe.

**Le chapitre 2** de cette thèse, s'intéresse à la série de Volterra comme assise d'un modèle élaboré, et reconnu, désormais incontournable pour l'étude et l'analyse d'un grand nombre de systèmes dynamiques non linéaires. Dans la seconde section du chapitre, est présenté le formalisme mathématique ayant servi à la construction de la série de Volterra, et l'opérateur de Volterra conventionnellement employé pour la description des systèmes non linéaires. La troisième section est sans doute, la plus importante de ce chapitre, car elle permet de cerner les différentes propriétés de la série de Volterra, dont la compréhension et l'étude sont fondamentales pour le développement du modèle autour de la série de Volterra. La représentation fréquentielle de la série de Volterra fera l'objet, de la quatrième section, qui est souvent retenue par les chercheurs pour représenter les non-linéarités des systèmes dynamiques. Enfin, dans la dernière section est décrite la façon de concrétiser ce remarquable outil qu'est la série de Volterra, en vue d'implémenter le filtre dit de Volterra, une transformation de la série de Volterra mathématique pour le traitement de signal, employé pour le filtrage non linéaire, l'identification et l'analyses des systèmes non linéaires.

**Le chapitre 3** a pour objectif de présenter les fondements théorique et mathématique des deux principales familles de méthodes adaptatives, que sont les algorithmes basés sur le gradient, et les algorithmes basés sur les moindres carrés. Les deux premières sections exposent le problème du filtrage optimal, et plus particulièrement le filtre de Wiener qui occupe une place centrale dans la théorie de l'estimation moderne. La solution de Wiener du filtre optimal, est abordée en détaillant les étapes nécessaires pour la résolution de l'équation de Wiener-Hopf. La section suivante permet de mettre l'accent, sur la place de l'estimation des noyaux de Volterra à l'aide des méthodes adaptatives, dans le contexte général de l'identification des systèmes faiblement non linéaires à l'aide des filtres de Volterra adaptatifs. Dans la cinquième section, sont présentées les différentes structures pour les noyaux de Volterra pouvant être adoptées, qui sont très déterminantes dans l'exactitude de la modélisation, et la qualité des modèles obtenus. Dans la sixième section, nous nous intéressons à l'algorithme du gradient stochastique (LMS), et à l'algorithme des moindres carrés récursifs (RLS), comme étant les deux principaux algorithmes représentatifs des méthodes adaptatifs, et en l'occurrence, les deux algorithmes retenus pour notre travail. Pour cela, nous décrivons le formalisme inhérent aux deux algorithmes retenus, en partant du cas linéaire abondamment traité dans la littérature, dont l'introduction est indispensable pour la déduction des algorithmes correspondant pour le modèle de Volterra.

**Le chapitre 4** présente une monographie de la distorsion, avec ses différents types et les différents aspects liés à sa mesure, et les différentes sources de distorsions dans le haut-parleur. Il commence par définir la distorsion, avec une présentation des différents types de distorsion qui se présentent dans les systèmes non linéaires en général. Ensuite, nous exposons les différentes sources de distorsion dans le haut-parleur. La section suivante traite des méthodes d'évaluation objective de la distorsion, en présentant les principales méthodes de mesure objective utilisées pour l'évaluation des différentes distorsions dans

le haut-parleur. Ensuite, suivra une section qui aborde les limites de ces méthodes d'évaluation objective, pour une meilleure description des phénomènes de distorsion. Dans la dernière section, cet aspect de la perception des distorsions est à juste titre abordé, en guise de complément important dans l'évaluation globale du haut-parleur en termes de distorsion.

**Le chapitre 5** passe en revue les différents modèles des haut-parleurs électrodynamiques linéaires et non linéaires développés durant les quarante dernières années. La seconde section énumère les raisons derrière la modélisation du haut-parleur. Dans la troisième section, nous abordons l'approche paramétrique, englobant sept différents modèles du haut-parleur, qui sont développés selon leur importance. L'approche non paramétrique de modélisation fera l'objet de la quatrième section, qui se décline en trois types de modèles du haut-parleur : les modèles de Volterra non paramétriques, les modèles basés sur la déconvolution non linéaire et les modèles fréquentiels. L'approche semi-paramétrique est traitée dans la dernière section, représentée notamment par les modèles structurés en blocs.

**Le chapitre 6** est composé de deux parties. Dans la première partie sont présentés les différents résultats de mesure réalisés sur le haut-parleur électrodynamique, mis à profit pour sa caractérisation et la quantification de sa non-linéarité. Les méthodes de mesure employées sont : la fonction de cohérence, les distorsions harmoniques, la THD et la distorsion d'intermodulation. La seconde partie du chapitre se consacre au procédé d'identification du système haut-parleur, mis en œuvre à l'aide des filtres de Volterra adaptatifs. Il y est question de procéder à la modélisation des distorsions non linéaires dans le haut-parleur, mais également de réaliser une comparaison multiparamétrique des deux algorithmes adaptatifs associés au filtre de Volterra pour l'identification du haut-parleur. Des considérations pratiques importantes relatives à l'identification du système haut-parleur sont abordées, utiles pour l'implémentation des filtres de Volterra adaptatifs. Les deux dernières sous-sections, présentent de manière détaillée les méthodes d'implémentation des deux filtres de Volterra adaptatifs LMS et RLS.

**Le chapitre 7** décrit la modélisation des diverses métriques choisies du haut-parleur, et s'attèle à l'analyse des résultats de prédiction obtenus, pour terminer avec l'évaluation de la performance des méthodes d'identification choisies. Nous décrivons dans la seconde section la méthodologie employée pour l'obtention des modèles des différentes métriques choisies pour le haut-parleur. La troisième section présente de manière exhaustive les résultats des 48 filtres adaptatifs de Volterra LMS et RLS réalisés. La quatrième section prend en charge l'analyse de ces résultats, et l'exactitude des différents modèles prédits. Dans la dernière section, est traitée l'évaluation comparative de la performance des différentes stratégies d'identification exécutées.

Enfin, **le chapitre 8** présente une nouvelle méthode de post-estimation appelée, la méthode PVRP (Peak Value-RMS Product). Cette méthode sert à l'ajustement de la valeur du facteur d'oubli dans le filtre de Volterra adaptatif RLS, en prenant la forme d'un algorithme basé sur la métrique PVRP, qui s'exprime en fonction du signal d'erreur issu de l'estimation des noyaux de Volterra. Nous commençons dans la seconde section, par un exposé de la problématique relative à l'emploi généralisé de la MSE. La troisième section aborde le contexte de développement de la nouvelle méthode, avant de décrire les

différentes étapes de la construction de la métrique PVRP, aboutissant sur l'algorithme de sa minimisation. Dans la quatrième section, la méthode PVRP est implémentée sur les filtres estimés obtenus lors de l'identification du haut-parleur utilisé, en vue de permettre la prédiction des différentes métriques mesurées. La cinquième section concerne la détermination de la valeur ajustée du facteur d'oubli, où l'efficacité de la méthode PVRP est évaluée sur le système haut-parleur. La dernière section expose les résultats des simulations et leurs interprétations.

## Première partie

# État de l'art de l'identification et la modélisation des systèmes non linéaires

# CHAPITRE 1

## Introduction à la modélisation des systèmes non linéaires

### 1.1 Introduction

Selon Danilov cité par [Bezruchko and Smirnov, 2010] : « *La non-linéarité est omniprésente, multiple et inépuisablement diverse. Elle est partout, en grand et en petit, dans les phénomènes éphémères et durables... La non-linéarité est un concept vaste avec de nombreuses nuances et gradations.* »

Nul ne peut contester la place des systèmes non linéaires dans les divers domaines de la science et de la technologie d'aujourd'hui. La construction de modèles des systèmes dynamiques réels est la tâche de l'identification et de la modélisation, en vue d'en élaborer une représentation mathématique abstraite capable de capturer ses caractéristiques les plus pertinentes. L'identification des systèmes est désormais un domaine de recherche actif depuis plus de trente ans. De nombreuses techniques sont devenues des outils standard dans l'ingénierie du contrôle et du traitement du signal [Procházka et al., 1998].

Dans ce contexte, ce premier chapitre est un état de l'art de l'identification et la modélisation en général, et en particulier celle des systèmes non linéaires. Ce chapitre commence par des définitions des systèmes linéaires et non linéaires. Nous aborderons par la suite les différents types de non-linéarité, avec une description des principales caractéristiques non linéaires. Les différentes étapes employées dans la procédure d'identification sont abordées successivement. Les deux dernières sections sont consacrées à une revue des différentes classes de modèles linéaires et non linéaires avec de nombreux exemples dans chaque classe.

### 1.2 Systèmes linéaires

Un système est dit linéaire s'il est régi par des équations différentielles linéaires à coefficients constants [Vault and Boucher, 1983]. Ainsi, si  $x(t)$  est le signal d'entrée d'un système donné, et  $y(t)$  sa réponse, l'équation générale d'un tel système s'écrit :

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t) \quad (1.1)$$

où les coefficients  $a_i$  et  $b_i$  sont constants.

Cette équation décrit le comportement dynamique du système considéré, mais également son régime permanent en annulant ses dérivées.

Cela se traduit mathématiquement par l'applicabilité du principe de superposition, qui est constitué de l'additivité et l'homogénéité, comme deux propriétés nécessaires pour la linéarité (Figure 1.1) [Barrett, 1963; Gelb et al., 1968; Vukić et al., 2003] :

**a. l'additivité :** à la somme de deux entrées quelconques d'un système correspond la somme des deux réponses correspondantes :

$$f(x_1(t) + x_2(t)) = f(x_1(t)) + f(x_2(t)) = y_1(t) + y_2(t).$$

**b. l'homogénéité :** à un multiple d'une entrée quelconque d'un système correspond le même multiple de la réponse correspondante :

$$f(\alpha x(t)) = \alpha f(x(t)) = \alpha y(t) \text{ pour tout scalaire } \alpha.$$

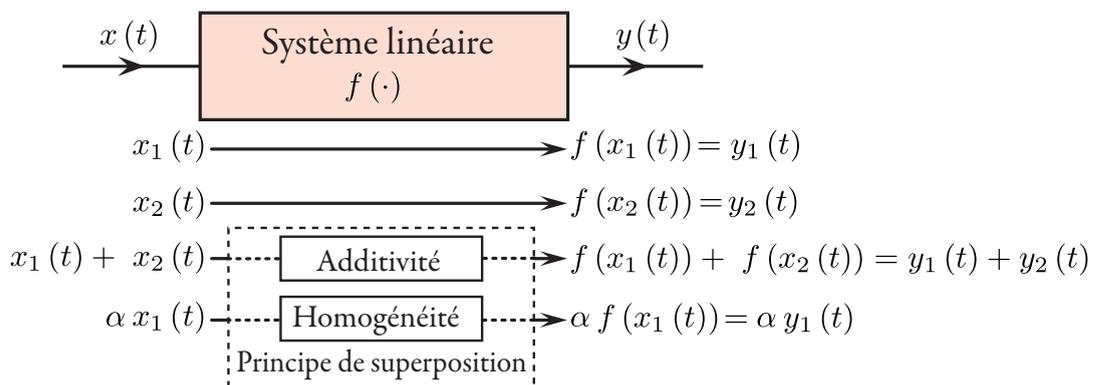


FIGURE 1.1 – Application du principe de superposition dans un système linéaire.

Ainsi, le principe de superposition indique simplement que la réponse totale d'un système linéaire à un ensemble d'entrées simultanées, peut être décomposée en plusieurs expériences où chaque entrée est appliquée individuellement, et les sorties de chacune de ces entrées séparées peuvent être additionnées pour donner la réponse totale [Worden and Tomlinson, 2001].

En pratique, même si la majorité des systèmes réels n'est pas linéaire, en revanche beaucoup de lois physiques sont des lois linéaires. Ces systèmes linéaires acceptent le plus souvent des solutions analytiques, et cela peut être le cas même pour des systèmes non linéaires excités par des signaux de faible amplitude.

### 1.3 Systèmes non linéaires

Un système est dit non linéaire, s'il ne peut pas être représenté à l'aide d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants<sup>1</sup>, ou pour lequel le principe de superposition ne s'applique pas [Gelb et al., 1968; Viault and Boucher, 1983]. La différence entre les systèmes linéaires et non linéaires, réside notamment dans l'extrême complexité du comportement des systèmes non linéaires [Worden and Tomlinson, 2001]. Les équations des systèmes non linéaires, n'acceptent presque jamais de solutions analytiques, et quel que soit le domaine, leur comportement est fortement dépendant des conditions initiales.

Malgré son importance pour la distinction en termes de linéarité et non-linéarité des systèmes, le principe de superposition souffre toutefois de sa difficulté de mise en œuvre pratique. Un certain nombre de techniques faciles d'application, ont ainsi été mises en place pour la vérification de la linéarité, comme la distorsion harmonique, la cohérence, l'homogénéité ou la réciprocité<sup>1</sup>.

Les systèmes non linéaires peuvent être divisés en deux catégories :

- **Systèmes non linéaires sans mémoire**<sup>2</sup> : ce sont des systèmes dont la réponse à un instant  $t$  ne dépend que de l'entrée à ce même instant, sans tenir compte des entrées précédentes. De tels systèmes réagissent de façon instantanée, sans retard, sans régime transitoire ou temps d'établissement.
- **Systèmes non linéaires avec mémoire**<sup>3</sup> : ce sont des systèmes dont la réponse à un instant  $t$  dépend que de l'entrée à cet instant  $t$  et des entrées précédentes.

### 1.4 Différents types de non-linéarité

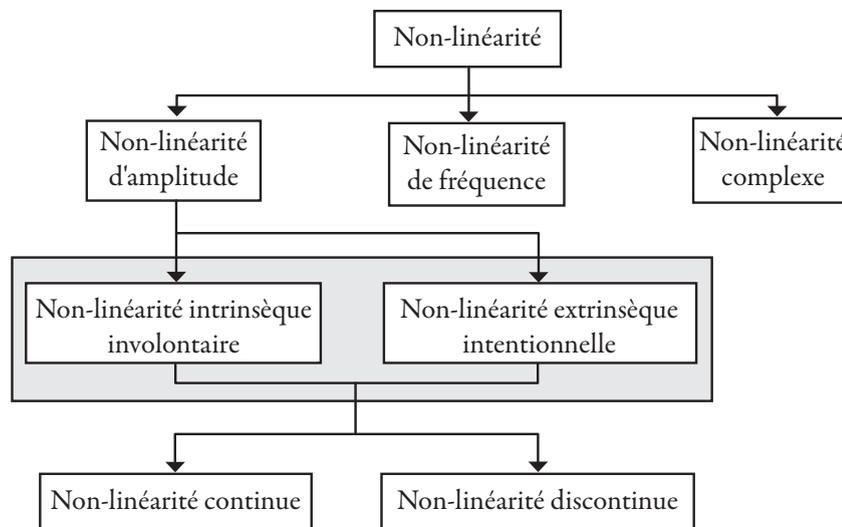


FIGURE 1.2 – Classification de la non-linéarité.

1. Cela donnerait des termes de l'entrée  $x(t)$  avec des puissances supérieures à 1.

1. Le théorème de réciprocité peut être rencontré dans plusieurs domaines de la physique et de l'ingénierie, plus connu en électromagnétisme et dans l'analyse des circuits électriques passifs et linéaires grâce à l'interchangeabilité des courants et des tensions.

2. Appelés également, systèmes statiques, instantanés, amnésiques ou à zéro mémoire.

3. Appelés également, systèmes dynamiques ou inertiels.

La non-linéarité des systèmes étant si complexe et variée, qu'il est pratiquement impossible de la contenir dans une « classe » de systèmes non linéaires, capable de représenter à elle seule une antinomie des systèmes linéaires.

L'observation des caractéristiques non linéaires rencontrées dans divers domaines, tels que l'électricité, l'électronique, l'acoustique, le magnétisme, la mécanique, l'hydraulique ou la pneumatique, permet nonobstant de classer la non-linéarité selon le schéma de la Figure 1.2.

Un premier niveau de classification peut être réalisé selon le domaine d'influence de la non-linéarité. Il en découle ainsi trois types de non-linéarité que l'on peut rencontrer dans les systèmes dynamiques : non-linéarité d'amplitude, non-linéarité de fréquence, et non-linéarité complexe.

### 1.4.1 Non-linéarité d'amplitude

La présence de la non-linéarité d'amplitude dans les systèmes non linéaires réels, est soit intrinsèque involontaire ou extrinsèque intentionnelle. La non-linéarité involontaire est inhérente à la structure intrinsèque du système, laquelle est le plus souvent source de perturbations, comme le frottement, la saturation, ou le jeu de denture, et qui peut être contournée à l'aide de différents procédés de linéarisation. La non-linéarité intentionnelle quant à elle, est volontairement introduite dans le système pour un but précis, où la caractéristique non linéaire est recherchée, à l'exemple des relais ou des zones mortes qui sont utilisées pour éliminer les oscillations indésirables.

Un niveau de classification ultime dans la non-linéarité d'amplitude, est plus apparent, lié à la forme de la courbe d'entrée-sortie du système, et divise les non-linéarités comme continues et discontinues. A cause de l'impossibilité d'approximer les discontinuités non linéaires à l'aide de fonction linéaires, elles sont également appelées non-linéarités « dures ».

La Figure 1.3, montre des exemples de caractéristiques entrée-sortie représentatives de divers phénomènes non linéaires naturels ou des processus techniques, influençant l'amplitude des réponses. Parmi ces exemples, nous décrivons ci-après quelques-unes de ces caractéristiques non linéaires d'amplitude [Borne et al., 1992; Gelb et al., 1968; Viault and Boucher, 1983; Vukić et al., 2003] :

- **Saturation** : C'est l'état dans lequel, après une augmentation suffisante de l'entrée, aucune augmentation supplémentaire de la réponse n'est possible. Ex. : amplificateurs, couple et vitesse dans les moteurs, l'état d'un matériau ferromagnétique qui ne peut plus être magnétisé.
- **Frottement** : Il survient lorsque des surfaces mécaniques de deux corps sont en contact glissant.
- **Seuil ou zone morte** : Il se produit lorsque le système à partir d'une première valeur donnée, ne répond plus à l'entrée (réponse nulle appelée zone morte), jusqu'à ce que l'entrée atteigne une nouvelle valeur de sortie de la zone morte. Ex : Seuils dans les actionneurs (servovalves hydrauliques), diodes.
- **Jeu de denture** : C'est l'espace présent entre les dents d'engrenage, et permet à l'aide d'un film lubrifiant d'empêcher la surchauffe et les dommages des dents, et surtout une rapidité de la transmission de l'engrenage. Par contre, avec l'usure, ce jeu augmente et provoque une perte de mouvement entre les arbres d'entrée

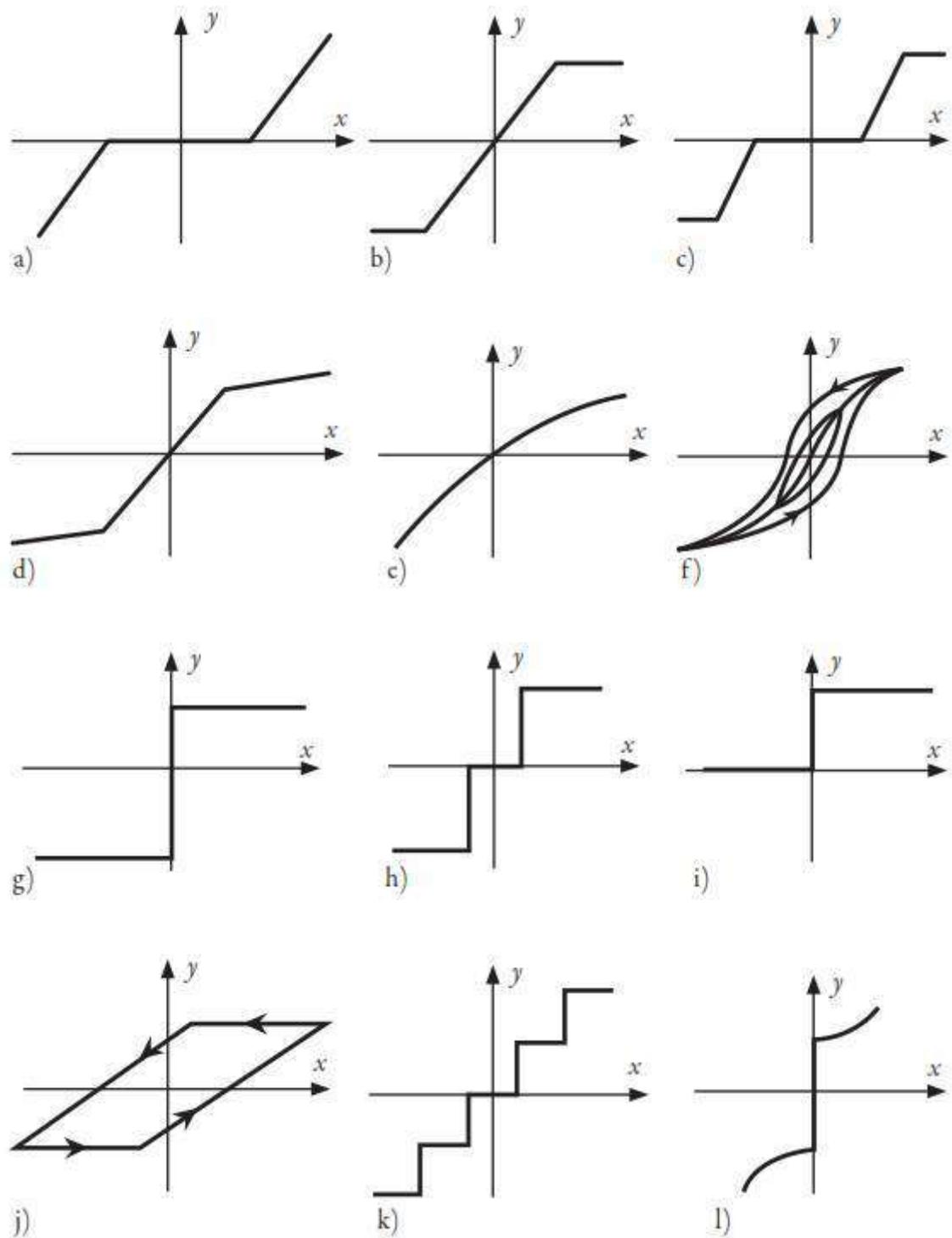


FIGURE 1.3 – Exemples de caractéristiques non linéaires d'amplitude. a) Seuil ou zone morte, b) Saturation, c) Seuil avec saturation, d) Changement de gain, e) Polynôme, f) Hystérésis, g) Relai idéal, h) Relai réel, i) Tout ou rien, j) Jeu de denture, k) Multi-  
 vaux, l) Frottement.

et de sortie du réducteur, ce qui rend difficile le positionnement précis des pièces entraînées.

- **Relais** : Sa caractéristique est obtenue en ramenant la plage de linéarité à zéro, ce qui donne une discontinuité verticale dans le cas idéal, et qui peut être obtenue à l'aide d'une commutation à thyristors.
- **Tout ou rien** : Ce sont des caractéristiques intéressantes sous forme d'échelon, employées pour la commande et la régulation des systèmes, comme les thermostats dans les systèmes thermiques ou la commande de servovalves, et certains capteurs à deux états pour la détection de présence d'objets.
- **Hystérésis** : Caractéristique des systèmes dynamiques soumis à une excitation cyclique, dont la réponse dépend non seulement des entrées actuelles mais également des entrées précédentes, donnant une réponse obtenue lors de l'augmentation de l'excitation, qui ne se confond pas avec celle obtenue en diminuant l'excitation. L'hystérésis est présente dans de nombreux processus naturels ou techniques : propriétés de certains matériaux élastiques, polarisation de matériaux ferroélectriques, aimantation des matériaux ferromagnétiques, circuits électroniques, etc.
- **Multiniveaux** : Cette caractéristique en escalier est typique des potentiomètres bobinés servant de capteurs de position. Elle peut évoquer également la procédure de quantification en traitement du signal, qui consiste à obtenir à partir d'un processus continu ou d'un ensemble très grand d'éléments, un processus discret ou un ensemble d'éléments réduits en nombre (dénombrable). La quantification est utilisée dans les convertisseurs analogique numérique, ou dans les techniques de compression d'image et de son.

#### 1.4.2 Non-linéarité de fréquence

Nous décrivons dans ce qui suit les principales caractéristiques non linéaires se manifestant dans le domaine fréquentiel (Figure 1.4) [Vukić et al., 2003] :

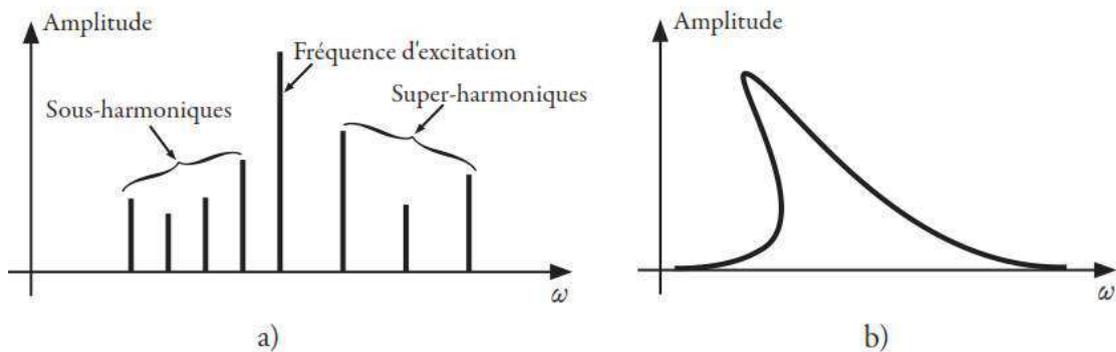


FIGURE 1.4 – Exemples de caractéristiques non linéaires de fréquence. a) Harmoniques, b) Résonance de saut.

- **Harmoniques** : Le système non linéaire produit ici une réponse contenant des fréquences autres que la fréquence d'excitation qui l'a excité. Ces fréquences sont soit multiples de la fréquence d'excitation, on parle de super-harmoniques, ou des sous-multiples de la fréquence d'excitation, et sont appelées sous-harmoniques.
- **Résonance de saut** : C'est un phénomène présent dans les systèmes mécaniques et dans les systèmes de commande, survenant lorsque l'amplitude ou la fréquence

d'un signal d'excitation harmonique, varie lentement autour de la fréquence de résonance du système, entraînant un changement soudain de l'amplitude et/ou la phase et/ou la fréquence du signal de sortie périodique de système non linéaire.

### 1.4.3 Non-linéarité complexe

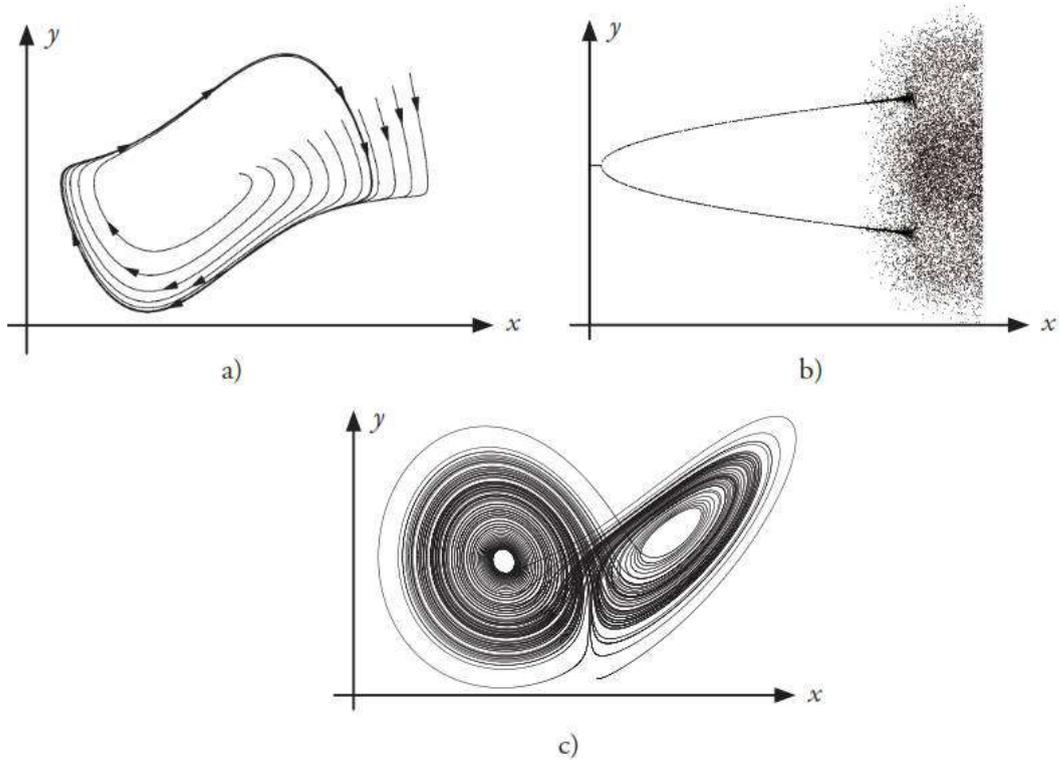


FIGURE 1.5 – Exemples de caractéristiques non linéaires complexes. a) Cycle limite, b) Bifurcation, c) Chaos.

La non-linéarité complexe, et un type de non-linéarité que l'on trouve parmi les causes de la complexité des systèmes<sup>1</sup>.

Parmi les systèmes complexes où la non-linéarité joue un rôle principal dans leur comportement, on trouve les cycles limites, les bifurcations et la chaos, qui sont brièvement décrits ci-après (Figure 1.5) [Banerjee et al., 2012; Fuchs, 2013] :

- **Cycle limite** : Ce sont des systèmes non linéaires et complexes, où l'espace de phase<sup>2</sup> est le siège d'oscillations non forcées, caractérisées par leur amplitude et leur fréquence indépendamment des valeurs des conditions initiales.

1. Un système complexe ou appelé système à dynamique complexe, est un système constitué de plusieurs parties (ou sous-systèmes) interconnectées qui sont en interaction, offrant ainsi au système complexe de nouvelles propriétés qui sont absentes au niveau des sous-systèmes. Le système complexe possède surtout un comportement intrinsèquement difficile à modéliser en raison des dépendances, des relations ou des interactions entre ses différentes parties.

2. Un espace de phase est un espace ayant pour coordonnées les variables dynamiques du système (Ce sont toutes les grandeurs physiques permettant de décrire le système à un instant donné, par exemple, pour un mobile ponctuel, ce sont 6 variables : 3 variables de position  $(x, y, z)$  et 3 variables de vitesse  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ , et représente tous les états possibles du système dynamique, et où chaque état possible correspondant à un point unique.

- **Bifurcation** : Des perturbations ou un changement de paramètres du système dynamique, entraînent des changements topologiques et qualitatifs du système, affectant sa stabilité et le nombre d'états d'équilibre. La bifurcation est très liée au chaos et partagent les mêmes applications.
- **Chaos** : Dans les systèmes non linéaires chaotiques, une très petite variation des conditions initiales peut causer une large variation de la réponse, et un comportement complètement inattendu, et difficilement prédictible même pour des systèmes déterministes. De plus, un système est chaotique, s'il est au minimum d'ordre 3, c.-à-d., la dimension du vecteur d'état est supérieure à 3. La théorie du chaos est employée dans la modélisation de phénomènes naturels en astrophysique, en économie, en biologie, en physique ou en météorologie.

## 1.5 La modélisation

La modélisation est l'ensemble des étapes utilisées pour le développement d'un modèle mathématique. Le modèle est une structure abstraite (par exemple, relations mathématiques, nombre fini de paramètres, etc.), censée représenter et décrire un processus réel, en captant de façon minimaliste ses aspects les plus essentiels pour des objectifs donnés. L. Ljung [Ljung, 1999] note, que le fait de construire des modèles à partir d'observations et d'étudier leurs propriétés, est véritablement le propos de la science.

Les méthodes de développement d'un modèle mathématique peuvent être classées comme suit :

- **Modélisation *a priori*** : Elle est réalisée à partir de lois établies dans un domaine donné<sup>1</sup>, régissant le système réel, on parle alors de modèle de connaissance, où le système étudié est vu comme une boîte blanche, abordé à l'aide de connaissances *a priori*.
- **Modélisation *a posteriori*** : A défaut de connaissances sur le système à modéliser, le modèle est alors élaboré sur la base des entrées et des sorties, obtenues à partir d'expériences. Ce modèle est alors appelé modèle de données, ou de représentation, et peut être aperçu comme une boîte noire. Les paramètres estimés dans ce type de modèle n'ont le plus souvent aucune signification physique par rapport à la réalité du système modélisé.
- **Modélisation boîte grise** : C'est une technique intermédiaire, utilisée lorsqu'une connaissance *a priori* du système à modéliser est insuffisante, imposant au surplus l'emploi des données expérimentales.

## 1.6 L'identification

L'identification est une technique expérimentale importante dans l'élaboration du modèle, qui consiste à déterminer les caractéristiques d'un système dynamique réel, considéré comme une boîte noire ou une boîte grise. L'identification s'appuie sur des méthodes et des algorithmes spécifiques, combinés à l'observation des données expérimentales des entrées et des sorties d'un système réel à modéliser. Si l'identification a eu ses fondements dans le monde de l'automatique et de l'industrie, elle a ensuite étendu son spectre d'applications vers d'autres domaines très variés : biologie, chimie, économie, télécommunications, météorologie, sociologie, etc.

---

1. Par exemple, lois de la physique, de la chimie, de l'économie, ou de la biologie, etc.

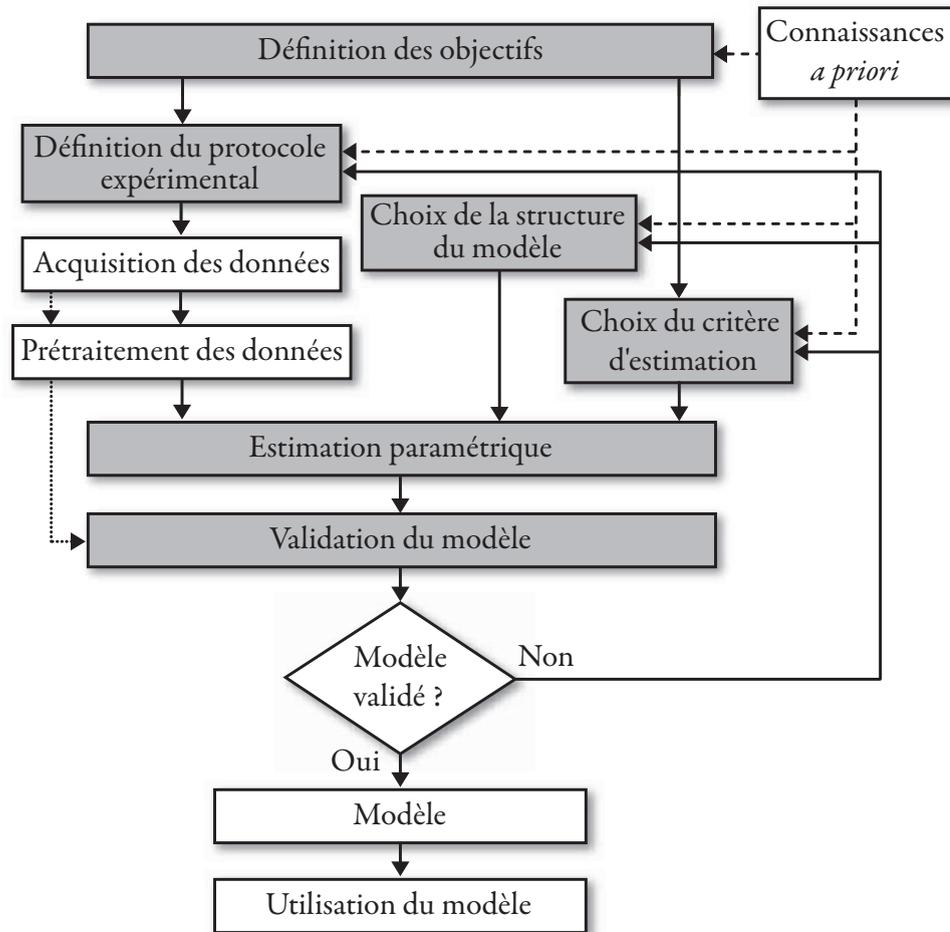


FIGURE 1.6 – Procédure générale d’identification de systèmes.

La procédure d’identification des systèmes dynamiques consiste en plusieurs étapes, rigoureusement ordonnées, qui sont toutes essentielles en vue de réussir la construction du modèle. Les différentes étapes de la procédure générale d’identification de systèmes sont représentées dans la Figure 1.6, et sont décrites ci-après [Borne et al., 1992; Goodwin and Payne, 1977; Landau and Besançon-Vauda, 2001; Ljung, 1999; Worden and Tomlinson, 2001] :

### 1.6.1 Définition des objectifs

Cette étape représente une ligne directrice, pour l’ensemble des étapes de la procédure d’identification. Ainsi, toutes les étapes accomplies en aval sont encadrées et adaptées à l’objectif préalablement définie, en tenant compte des éventuelles connaissances a priori disponibles sur le système dynamique à identifier, qui vont influencer les différents choix à prendre durant toute la procédure. Quelques exemples d’objectifs de l’identification sont listés ici :

- prédiction de l’évolution des systèmes (réponses à de nouvelles excitations) ;
- commande et optimisation de processus ;
- formation et enseignement (simulateurs réels, logiciels d’enseignement, etc.) ;

- traitement de signaux : (maintenance, suppression de bruit, analyse spectrale, etc.);
- analyse des propriétés des systèmes et la compréhension de leur fonctionnement interne et leur comportement ;
- détection de défauts et prédiction des pannes.

### 1.6.2 Définition du protocole expérimental

Le protocole expérimental comprend tous les aspects relatifs à l'exécution des expériences, avec comme objectif la réalisation d'expériences permettant de dégager le maximum d'informations sur le système, avec un souci particulier pour la réduction de l'influence des perturbations. Parmi les points à considérer ou les contraintes à surmonter, on peut citer :

- choix des signaux d'excitation adaptés ;
- contraintes sur l'amplitude et la puissance des entrées et des sorties ;
- choix de la fréquence d'échantillonnage ;
- choix de la durée de mesure (longueurs des signaux) ;
- définition des conditions expérimentales idéales pour le mesurage des données ;
- disponibilité du matériel expérimental et des logiciels spécialisés pour l'acquisition, le traitement et l'analyse des données ;
- vérification de la qualité des signaux mesurés, et la réalisation d'un éventuelle prétraitement en cas de nécessité.

### 1.6.3 Choix de la structure du modèle

Le choix de la structure du modèle est sans doute facilité par la connaissance interne du système, et il est déterminant pour le choix ultérieur du critère d'estimation des paramètres . Le système réel n'admet pas un modèle unique, il faudra ainsi trouver la structure la plus appropriée du modèle, à même de satisfaire les objectifs fixés. Par structure du modèle, cela sous-entend notamment :

- sa topologie : elle est directement dictée par une orientation vers un type de modèle particulier :
  1. modèle de connaissance ou de représentation ;
  2. modèle paramétrique ou non paramétrique ;
  3. modèle continu ou discret ;
  4. modèle statique ou dynamique ;
  5. modèle linéaire ou non linéaire ;
  6. structure paramétrique.
- sa taille : il s'agit du choix difficile de l'ordre polynomial dans la fonction de transfert (numérateur et dénominateur), ou de la taille des vecteurs et des matrices de la représentation d'état dans le cas paramétrique par exemple, ou dans le cas des modèles non paramétriques ; le nombre d'échantillons ou la résolution fréquentielle par exemple ;
- le retard introduit : il est déterminé par les constantes de temps du système réel ;
- la mémoire : elle est à l'image des éléments conservatifs du système à modéliser.

## 1.6.4 Choix du critère d'estimation

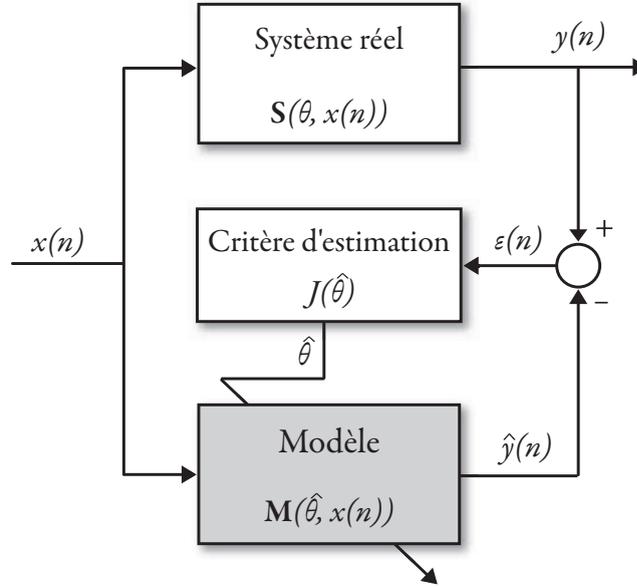


FIGURE 1.7 – Critère d'estimation dans la procédure d'identification.

Cette étape intervient après avoir choisi la structure du modèle. Elle consiste à choisir un critère d'estimation, permettant d'obtenir les paramètres du système. La position du critère d'estimation dans la procédure d'identification est illustrée dans la Figure 1.7. Soit un système dynamique inconnu  $\mathbf{S}(\theta, x(n))$ , où  $x(n)$  est la séquence d'entrée et  $\theta$  est le vecteur de paramètres inconnus qui a besoin d'être estimé. Par conséquent, le but de l'estimation est de construire un vecteur  $\hat{\theta}$ , qui est une approximation des paramètres  $\theta$ , et ainsi de parvenir à construire le modèle  $\mathbf{M}(\hat{\theta}, x(n))$ . Le critère d'estimation permet de déterminer les paramètres estimés du modèle, en minimisant l'erreur  $\varepsilon_p(n)$ , entre la réponse mesurée du système réel  $y(n)$  et la sortie estimée du modèle  $\hat{y}(n)$ .

$$\varepsilon_p = y(n) - \hat{y}(n) \quad (1.2)$$

Le critère d'estimation exploite cette erreur de prédiction  $\varepsilon_p(n)$ , et se matérialise par une fonction de coût  $J(\hat{\theta})$ , qui utilise ordinairement un critère des moindres carrés :

$$J(\hat{\theta}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \varepsilon_p^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [y(n) - \hat{y}(n)]^2 \quad (1.3)$$

Cette fonction de coût peut être une mesure de la validité du modèle  $\mathbf{M}(\hat{\theta}, x(n))$ . Elle caractérise l'écart entre le comportement du système à partir de ses réponses mesurées expérimentalement, et les réponses estimées par simulation du modèle construit. L'estimation par moindres carrés<sup>1</sup> permet d'écrire :

$$\hat{\theta}^* = \arg \min_{\hat{\theta}} J(\hat{\theta}) \quad (1.4)$$

1. Least-Square Estimate (LSE) en anglais)  $\hat{\theta}^*$  de  $\theta$  est la valeur de  $\hat{\theta}$  qui minimise le critère  $J(\hat{\theta})$ .

Un bon modèle est ainsi capable de fournir une erreur d'estimation la plus petite possible<sup>1</sup>. Cependant, une multitude de fonctions existent pour le critère d'estimation, ce qui permet une certaine liberté dans la définition du meilleur modèle.

### 1.6.5 Estimation paramétrique

Cette étape de la procédure d'identification, a pour but de déterminer les paramètres du modèle en se servant des données entrées/sorties expérimentales, et suivant la structure du modèle et le critère d'estimation choisis.

Le choix de l'algorithme d'estimation dépend de plusieurs facteurs. Le bruit peut être déterminant dans le choix de l'algorithme d'estimation, plus précisément, sa nature et sa présence en entrée ou en sortie ou les deux lors des expériences menées sur le système à identifier. Il existe deux types d'algorithmes d'estimation paramétrique :

#### 1.6.5.1 Algorithmes d'estimation non récursifs (offline)

L'estimation est réalisée par paquets de données entrées/sorties sur un horizon de temps donné. L'estimation est interrompue pendant l'acquisition des données, et les paramètres estimés ne varient pas avec le temps. On peut citer comme exemples de ces algorithmes, les estimateurs régressifs AR, ARX ou NARX par moindres carrés.

#### 1.6.5.2 Algorithmes d'estimation récursifs (online)

L'estimation se fait à chaque pas d'échantillonnage, au fur et à mesure qu'une paire de données entrées/sorties se présente, et le traitement est itératif. Dans ce cas, les paramètres estimés peuvent varier avec le temps. Les méthodes d'estimation online sont plus présentes dans des systèmes en temps réel, pour la régulation des processus ou la détection de défaut, à l'exemple de l'estimateur des moindres carrés récursifs (RLS) ou l'estimateur polynômial par moindres carrés, ou méthodes d'estimation d'erreur de prédiction pour les modèles linéaires et non linéaires.

L'estimation paramétrique récursive présente les avantages suivants :

- Requiert moins de puissance de calcul et de mémoire : une seule paire de données ;
- Adaptée pour une identification temps réel : estimation à chaque acquisition des données ;
- Possibilité de poursuite des données.

### 1.6.6 Validation du modèle

Plusieurs méthodes de validation s'offrent pour la validation du modèle jusque-là construit. Ces méthodes d'évaluation de la qualité de la validation des modèles, sont basées soit sur l'erreur de prédiction  $\varepsilon_p = y(n) - \hat{y}(n)$ , soit sur l'erreur d'estimation  $\varepsilon_e = \theta(n) - \hat{\theta}(n)$ . Elles ont cependant toutes, comme objectif, l'évaluation de la qualité du modèle développé. Cette évaluation est avant tout intrinsèque, et s'intéresse à la conformité de la structure adoptée, et à la quantification du biais de l'estimation des paramètres. De ce fait, le rôle de la validation est de pouvoir répondre à la problématique :

---

1. Cette minimisation est souvent exprimée à l'aide du biais  $B(\hat{\theta}) = E[\hat{\theta}(n)] - \theta(n)$ , qui tend vers zéro lorsque les paramètres du modèle convergent.

si le modèle construit est parvenu à saisir les aspects essentiels du comportement du système réel à identifier, afin qu'il soit en mesure de prédire les réponses du système.

Il est important pour la rigueur de la méthode de validation d'utiliser une série de données d'entrée distincte de celle exploitée pour l'élaboration du modèle, afin de s'assurer que le modèle ait réellement capturé la dynamique du système, et non une simple synthèse des principales caractéristiques des signaux d'excitation. Nous aborderons dans ce qui suit, deux mesures fondamentales dans la théorie de l'estimation, empruntés pour la validation des modèles, en l'occurrence, l'erreur quadratique moyenne, et l'erreur quadratique moyenne normalisée.

### 1.6.6.1 L'erreur quadratique moyenne

L'*erreur quadratique moyenne* MSE (Mean Squared Error), est une mesure statistique. Dans la théorie de l'estimation, elle indique la distance d'un estimateur de la valeur à estimer, ce qui en fait un critère de qualité clé pour les estimateurs.

En revenant à l'étape de validation des modèle, et si on raisonne en termes d'estimation, la MSE est défini statistiquement, comme l'espérance du carré de la différence entre le vecteur des paramètres estimés et le vecteur des paramètres du système :

$$\text{MSE}(\hat{\theta}) = \text{E} \left[ (\hat{\theta} - \theta)^2 \right] \quad (1.5)$$

On peut l'exprimer également en fonction du biais et de la variance de l'estimateur :

$$\text{MSE}(\hat{\theta}) = B(\hat{\theta})^2 + \text{Var}(\hat{\theta}) \quad (1.6)$$

Ainsi la MSE évalue la qualité d'un estimateur ou d'un ensemble de prédictions en termes de sa variance et de son biais, ce qui donne pour un estimateur sans biais, une MSE égale à la variance de l'estimateur.

Si  $y(n)$  est la réponse du système réel, et  $\hat{y}(n)$  est la sortie estimé du modèle, alors la MSE du prédicteur s'exprime en termes de calcul pratique :

$$\text{MSE}(\hat{y}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [y(n) - \hat{y}(n)]^2 \quad (1.7)$$

### 1.6.6.2 L'erreur quadratique moyenne normalisée

En vue d'une mesure objective de la qualité de l'estimation, on introduit la MSE normalisée du prédicteur, qui tend à éviter un biais vers une surestimation ou une sous-estimation, et qui est défini par [Worden and Tomlinson, 2001] :

$$\text{NMSE}(\hat{y}) = \frac{100}{N\sigma_y^2} \sum_{n=1}^N [y(n) - \hat{y}(n)]^2 \quad (1.8)$$

où  $\sigma_y^2$  est la variance de la réponse du système.

Dans le cas où la moyenne de la réponse du système  $\bar{y}(n)$  est utilisée comme sortie prédite, c.à.d.,  $\hat{y}(n) = \bar{y}(n)$ , alors la NMSE serait égale à 100 (le cas le plus défavorable) :

$$\text{NMSE}(\hat{y}) = \frac{100}{N\sigma_y^2} \sum_{n=1}^N [y(n) - \hat{y}(n)]^2 = \frac{100}{\sigma_y^2} \cdot \sigma_y^2 = 100 \quad (1.9)$$

En pratique une NMSE inférieure à 5 indique une bonne estimation, tandis qu'une valeur inférieure à 1 peut être synonyme d'une excellente estimation [Worden and Tomlinson, 2001].

Une variante de la formule de définition (1.5) de la NMSE, comme mesure plus adaptée de la qualité de l'estimation dans les procédures d'identification est donnée par [Birkett, 1997] :

$$\text{NMSE}(\hat{y}) = 100 \frac{\sum_{n=1}^N [y(n) - \hat{y}(n)]^2}{\sum_{n=1}^N y(n)^2} \quad (1.10)$$

ou en décibels :

$$\text{NMSE}(\hat{y})_{\text{dB}} = 10 \log \left[ \frac{\sum_{n=1}^N [y(n) - \hat{y}(n)]^2}{\sum_{n=1}^N y(n)^2} \right] \quad (1.11)$$

## 1.7 Modèles linéaires

Comme présenté dans la Figure 1.8, les modèles linéaires peuvent être divisés en modèles paramétriques, semi-paramétriques et non paramétriques.

### 1.7.1 Modèles linéaires paramétriques

Dans ce cas le système linéaire est perçu comme une boîte blanche. Les modèles linéaires paramétriques sont basés sur les lois théoriques de chaque domaine de connaissance du système. Le modèle est ainsi construit à l'aide d'une formulation, une mise en équation ou une estimation paramétrique. Les paramètres du système peuvent ici avoir une signification physique notamment pour les systèmes continus, et ces mêmes paramètres peuvent être une source de connaissances non négligeables pour la compréhension du comportement du système linéaire. Les modèles paramétriques sont plus précis que les autres, mais d'une mise en œuvre plus laborieuse.

La Figure 1.8 donne les différents types de modèles linéaires paramétriques dans la première colonne.

### 1.7.2 Modèles linéaires semi-paramétriques

Le système linéaire peut être vu comme une boîte grise, à cause d'une connaissance insuffisante ou partielle des lois théoriques régissant le comportement du système, et de

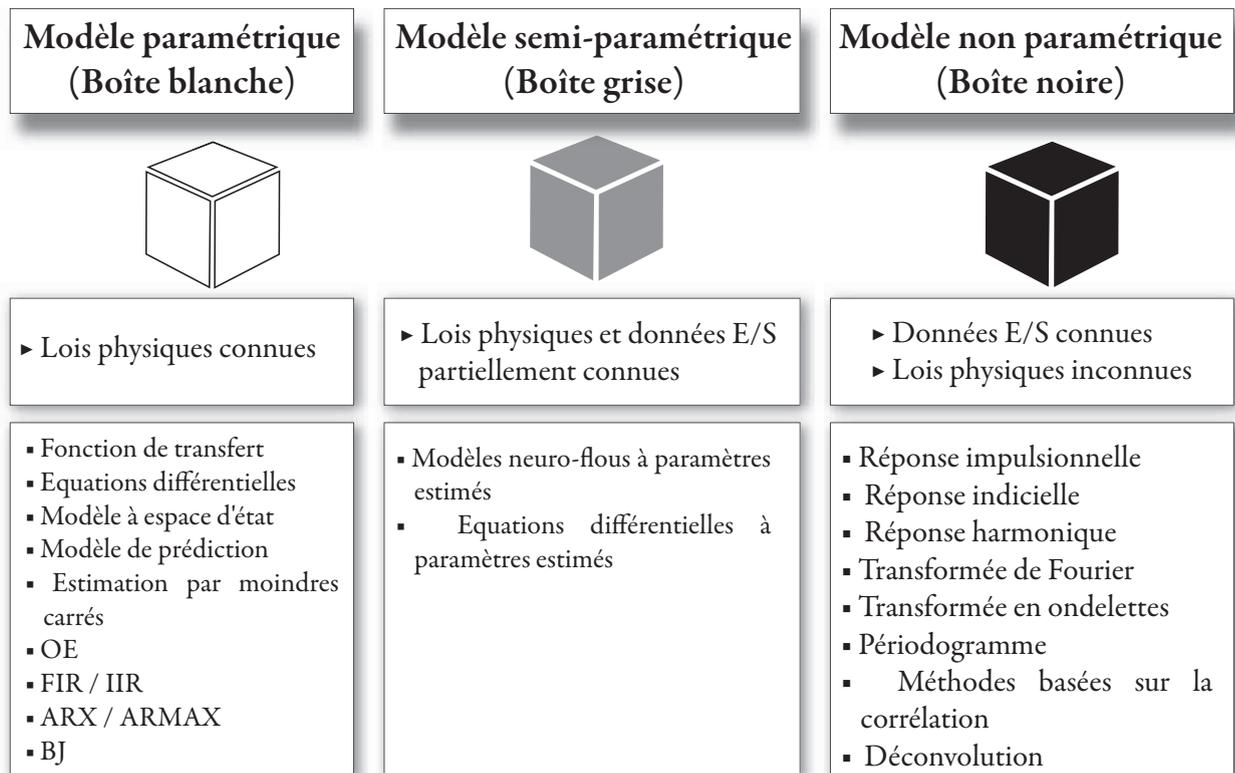


FIGURE 1.8 – Différents types de modèles linéaires.

ses données d'entrée/sortie. L'élaboration de ces modèles appelés également modèles intermédiaires ou hybrides est d'une extrême complication, tirant profit au maximum des moindres connaissances disponibles. Dans la Figure 1.8, on peut trouver quelques types de modèles semi-paramétriques utilisés comme les modèles neuro-flous à paramètres estimés ou les équations différentielles à paramètres estimés.

### 1.7.3 Modèles linéaires non paramétriques

Les modèles non linéaires non paramètres sont le résultat de procédures d'identification de systèmes non linéaires considérés comme des boîtes noires, dans la mesure où la seule connaissance disponible est celle relative aux données d'entrée et de sortie du système. Les éléments du modèle ici n'ont aucune signification physique, mais nombreux sont les informations que l'on peut déterminer comme des constantes de temps, la vitesse, ou des retards, et ce à partir de modèles tels que la réponse impulsionnelle, la réponse indicielle ou les différentes méthodes de l'analyse spectrale (Figure 1.8).

## 1.8 Modèles non linéaires

Les ébauches d'études et d'analyses des systèmes non linéaires qui se faisaient jusqu'à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, continuaient par naïveté ou par contrainte de simplification de s'appuyer sur des outils, des propriétés et des théorèmes propres aux systèmes linéaires. Or, supposer la linéarité pour un système dynamique non linéaire a ses limites, d'autant plus, si l'on compte explorer des domaines d'amplitude et de puissance assez larges, et

s'attaquer à des types de non-linéarités de plus en plus complexes (voir § 1.4). Jusqu'aux années 1950, on utilisait les séries de Taylor ou les modèles polynomiaux pour étudier les systèmes non linéaires sans mémoire. D'autre part, de nombreux travaux sur les systèmes non linéaires ont été réalisés, à l'instar des travaux du mathématicien allemand Karl Weierstrass (1815 – 1897) à partir de 1881 sur les approximations polynomiales des fonctions continues non linéaires, ou la publication en 1887 par le mathématicien et physicien italien Vito Volterra (1860 – 1940), d'une extension de série fonctionnelle, connue plus tard par la série de Volterra. Malheureusement ces travaux théoriques restaient sans de véritables applications afin que leur intérêt soit affirmé. Ainsi des pionniers comme l'ingénieur et mathématicien américano-azéri Lotfi Zadeh (1921 – 2017), ou le mathématicien américain Norbert Wiener (1894 – 1964) et bien d'autres, ont contribué à partir de 1950, à poser les fondements de l'identification et la modélisation des systèmes non linéaires, telle une nouvelle branche de la modélisation où se fusionnent les mathématiques avec le traitement de signal, l'automatique et les lois théoriques de chaque domaine considéré [Katzenelson and Gould, 1962; Schetzen, 1974].

L'hétérogénéité dans la nature non linéaire des systèmes réels, a fait qu'il y ait une pluralité de la non-linéarité, compliquant ainsi l'entreprise d'une stratégie unique pour l'identification de ces systèmes. A ce titre, un recueil des différents types de modèles non linéaires est présenté dans la Figure 1.9. Nous avons divisé ces modèles non linéaires en quatre classes : les modèles paramétriques, semi-paramétriques, spécifiques et non paramétriques.

### 1.8.1 Modèles non linéaires paramétriques

Les modèles non linéaires paramétriques tirent leur origine des travaux d'anciens mathématiciens sur les fonctions non linéaires et les équations fonctionnelles. Depuis, des bonds considérables ont été réalisés pour que de nouveaux théorèmes et de nouvelles techniques puissent voir le jour, qui sont à la base d'une pléthore de méthodes destinées à la modélisation non linéaire.

En présence de connaissances *a priori* sur le système identifié, de nombreuses méthodes analytiques et des méthodes d'estimation désormais employées pour l'identification des systèmes non linéaires, ont été adaptées à partir de méthodes utilisées pour les systèmes linéaires, comme les équations différentielles non linéaires ou les différents modèles régressifs (NAR, NARX, NARMAX), ou les modèles à espace d'état non linéaires. La Figure 1.9 reporte les principaux types de modèles non linéaires paramétriques.

### 1.8.2 Modèles non linéaires semi-paramétriques

Les modèles non linéaires semi-paramétriques sont une extension dans le domaine non linéaire des mêmes modèles linéaires semi-paramétriques, qui sont majoritairement des modèles flous et neuro-flous (Figure 1.9).

### 1.8.3 Modèles non linéaires non paramétriques

La configuration en boîte noire adoptée pour ces systèmes non linéaires, est impérative en absence de connaissance préalable sur le système, mais n'empêche en rien les

diverses méthodes non paramétriques d'identification à délivrer des informations sur le système identifié à partir des coefficients des modèles non paramétriques développés.

La modélisation non linéaire non paramétrique a connu un essor considérable durant les trois dernières décennies, avec un intérêt particulier pour les séries de Wiener et les séries de Volterra. Cet essor peut être expliqué par un passage décisif d'une théorisation, vers une phase d'implémentation qui a commencé à donner ses fruits en ingénierie et en industrie.

Le modèle de Volterra étant le modèle d'identification adopté dans notre travail, et qui fera l'objet du second chapitre de cette thèse. Ce modèle, ainsi que d'autres modèles non linéaires et non paramétriques usuels, sont présentés dans la Figure 1.9.

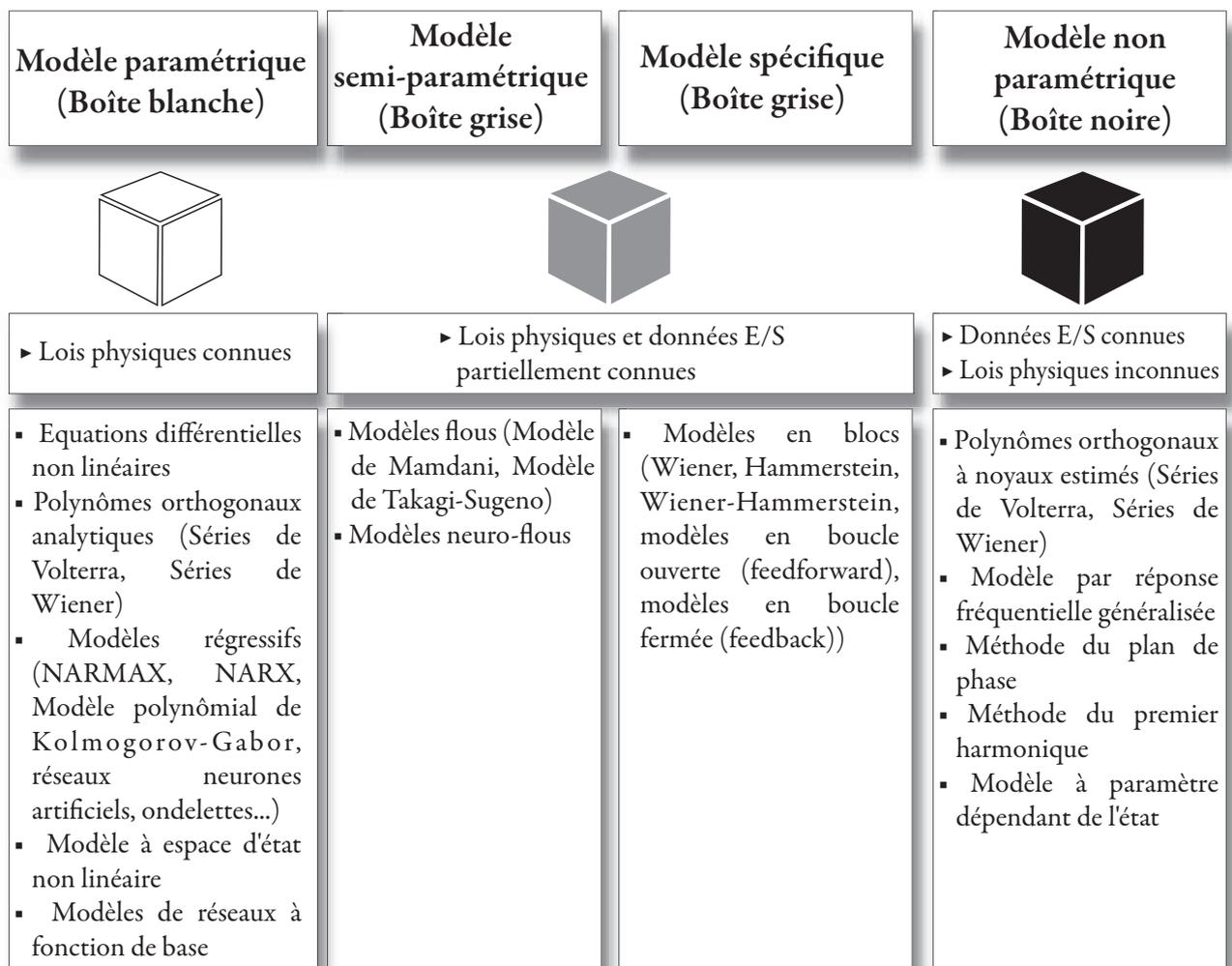


FIGURE 1.9 – Différents types de modèles non linéaires.

#### 1.8.4 Modèles non linéaires spécifiques

Ces modèles spécifiques sont connus également par les modèles à blocs, en ce sens que la non-linéarité de certains systèmes dynamiques peut être décomposée en un bloc linéaire dynamique  $\mathcal{L}$  avec un autre bloc non linéaire sans mémoire  $\mathcal{N}$ . Ces configurations de la modélisation des systèmes non linéaires reposent sur une simplification du modèle

de Volterra, et tendent à réduire la complexité paramétrique des séries de Volterra, pour ainsi donner naissance à des nouveaux modèles spécifiques tels que le modèle de Hammerstein et celui de Wiener.

Les principaux schémas de ces modèles à blocs sont [Gan, 2009; Kibangou, 2005] :

- les blocs  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{L}$  en série, connu par le modèle de Hammerstein (H) ;
- les blocs  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{N}$  en série, connu par le modèle de Wiener (W) ;
- les modèles de Wiener et de Hammerstein parallèles, qui sont des variantes construites à l'aide de la mise en parallèle des deux structures de bases précédentes ;
- le modèle de Wiener-Hammerstein (W-H), composé d'un système linéaire dynamique suivi d'un système non linéaire statique, lequel est suivi à son tour d'un autre système linéaire dynamique ( $\mathcal{L} - \mathcal{N} - \mathcal{L}$ ) ;
- le modèle de Lur'e en boucle de rétroaction, composé par le bloc linéaire  $\mathcal{L}$  dans le chemin direct, avec le bloc non linéaire  $\mathcal{N}$  dans le chemin de rétroaction ;

## 1.9 Conclusion

Ce chapitre introductif a permis d'énoncer un certain nombre de notions et de définitions fondamentales pour la suite de cette thèse. Nous avons voulu à travers les trois premières sections, souligner l'importance de la non-linéarité dans les différents domaines de la science et des techniques modernes, et surtout, la particularité des systèmes non linéaires par rapport aux systèmes linéaires. Dans la section 4, les différentes caractéristiques non linéaires, ont été amplement abordées, regroupées dans deux classes principales : la non-linéarité d'amplitude, et la non-linéarité de fréquence, qui seront reprises ultérieurement dans les sections et les chapitres consacrés à la distorsion dans les systèmes non linéaires.

Les quatre dernières sections du chapitre tournent autour de l'identification et la modélisation. L'identification y a été traitée dans la section 6, et les différentes étapes nécessaires pour cette procédure ont été détaillées. Ces différentes étapes seront mises à profit dans la troisième partie de la thèse dédiée à l'application expérimentale. Enfin, dans les sections 7 et 8, nous avons présenté respectivement les différentes catégories de modèles linéaires et non linéaires, en mettant en avant la spécificité de chaque type de modélisation et le contexte de leur emploi. Les différents types de modèles ont été illustrés à l'aide d'exemples de méthodes usuelles ou parfois très spécifiques, servant à la modélisation des différents systèmes, selon la disponibilité des connaissances *a priori* sur le comportement du système dynamique réel sous identification.

Le chapitre suivant s'intéressera à la série de Volterra, qui est au cœur du modèle de Volterra adaptatif que nous allons utiliser dans notre procédure d'identification .

# CHAPITRE 2

## Modélisation des systèmes non linéaires à l'aide du modèle de Volterra

### 2.1 Introduction

#### 2.1.1 Aperçu historique de la série de Volterra

Le modèle le plus élémentaire décrivant un système non linéaire est la série de Taylor, énoncée par le mathématicien anglais Brook Taylor (1685 – 1731) en 1717. Les séries de Taylor fournissent une représentation polynomiale d'un système non linéaire sans mémoire.

Plus d'un siècle plus tard, le mathématicien italien Vito Volterra (1860 – 1940) fut le premier en 1887 à introduire la notion de ce qui est aujourd'hui connu comme les séries de Volterra. Ces séries sont une forme généralisée du développement en série de Taylor, qui peut être utilisée pour représenter un système non linéaire avec mémoire. Le livre publié par Volterra en 1930, sous le titre : « Theories of Functionals and of Integral and Integro-differential Equations » [Volterra, 1930], constitue une référence fondamentale pour tous ceux qui ont travaillé ultérieurement sur le dit modèle de Volterra, et surtout a fait de Volterra l'un des fondateurs de l'analyse fonctionnelle<sup>1</sup>.

Le formalisme de Volterra a été repris en 1906 par le mathématicien français Maurice Fréchet (1878 – 1973), avec toutefois davantage de généralisation de la théorie initiale [Fréchet, 1906]. La première application majeure du travail de Volterra était réalisée pour l'analyse des circuits non linéaires, une série de travaux initiés par le mathématicien américain Norbert Wiener (1894 – 1964) au M.I.T. dès 1942, employait le formalisme de Volterra d'une manière générale pour l'analyse d'un grand nombre de problèmes, à l'exemple de la détermination du spectre de systèmes modulés en fréquence (FM).

Un remarquable rapport d'étude sur les propriétés des séries fonctionnelles a été publié par Barrett en 1963 [Barrett, 1963], dans lequel il fait valoir l'importance du modèle de Volterra dans plusieurs applications concrètes pour le contrôle de systèmes. Dans ce même article, est décrit l'emploi de la transformée de Fourier pour la construction des noyaux de Volterra dans le domaine fréquentiel, un outil d'un intérêt considérable pour l'analyse harmonique des systèmes dynamiques.

---

1. Avec le mathématicien polonais Stephan Banach (1892 – 1945)

Un autre grand nom, dont les travaux ont amplement alimenté les différentes sections de notre thèse, est le professeur américain en génie électrique au M.I.T. Martin Schetzen (1928 – 2017). Le Pr Schetzen a en effet énormément apporté à son domaine : la théorie des systèmes non linéaires, en termes de rigueur de la formulation, et de clarté de la présentation des idées, et ce depuis de sa thèse en 1962 [Schetzen, 1962], en passant par des publications notoires dans le domaine [Schetzen, 1965; 1974; 1981], et enfin son ouvrage référence : « *The Volterra and Wiener theories of nonlinear systems* », paru en 1989.

L'extension de l'emploi des séries de Volterra aux systèmes non-linéaires discrets a été réalisée pour la première fois par Paul Alper en 1965. Depuis, les séries de Volterra ont été largement utilisées pour le calcul des séries à nombre réduit de termes pour des systèmes qui présenteraient des difficultés pour l'étude de leur distorsion, à l'exemple des travaux dirigés par Narayanan (1967) aux Bell Telephone Laboratories à partir de 1967, dont l'apport des séries de Volterra s'était avéré déterminant dans l'étude et l'analyse des distorsions dans les amplificateurs transistorisés [Graham and Ehrman, 1973]. L'adoption des séries de Volterra pour décrire le comportement des haut-parleurs électrodynamiques fut entreprise pour la première fois en 1986, par le néerlandais A. J. M. Kaizer dans sa thèse de Ph.D intitulée "*On the Design of Broadband Electrodynamical Loudspeakers and Multiway Loudspeaker Systems*" [Kaizer, 1986].

Ce second chapitre de la thèse, s'intéresse ainsi à la série de Volterra comme assise d'un modèle élaboré, et reconnu, désormais incontournable pour l'étude et l'analyse d'un grand nombre de systèmes dynamiques non linéaires. Dans la seconde section du chapitre, est présenté le formalisme mathématique ayant servi à la construction de la série de Volterra, et l'opérateur de Volterra conventionnellement employé pour la description des systèmes non linéaires. La troisième section est sans doute, la plus importante du chapitre, car elle permet de cerner les différentes propriétés de la série de Volterra, dont la compréhension et l'étude sont fondamentales pour le développement du modèle autour de la série de Volterra. La représentation fréquentielle de la série de Volterra fera l'objet, de la quatrième section, qui est souvent retenue par les chercheurs pour représenter les non-linéarités des systèmes dynamiques. Enfin, dans la dernière section est décrite la façon de concrétiser ce remarquable outil qu'est la série de Volterra, en vue d'implémenter le filtre dit de Volterra, une transformation de la série de Volterra mathématique pour le traitement de signal, employé pour le filtrage non linéaire, l'identification et l'analyses des systèmes non linéaires.

### 2.1.2 Applications du modèle Volterra

Il existe beaucoup d'exemples pratiques de systèmes non linéaires dans divers domaines, sur lesquels la méthode de Volterra peut apporter des solutions, tels que les systèmes biologiques (réseaux neuronaux, etc.), les systèmes de communication (canaux avec amplificateurs non linéaires, etc.), le traitement du signal (déformation harmonique dans les haut-parleurs et dans l'enregistrement magnétique, etc.).

Le modèle polynômial de Volterra trouve son application dans plusieurs domaines, à l'exemple de :

- l'identification et la modélisation des systèmes dynamiques ;
- le filtrage adaptatif non linéaire ;
- les systèmes de communication (annulation de bruit et de l'écho) ;

- analyse des distorsions dans les systèmes dynamiques faiblement non linéaires (transducteurs, composants et circuits électroniques : amplificateurs, récepteurs, haut-parleurs, microphones, canaux de communication...);
- méthodes de prédistorsion et de linéarisation pour la réduction/élimination des distorsions et des non-linéarités indésirables;
- simulation d'environnements acoustiques.

## 2.2 Principe de la série de Volterra

La représentation la plus élémentaire pour représenter un système non linéaire sans mémoire, est sans doute la série de Taylor. La série de Taylor fournit une représentation polynomiale d'un système non linéaire sans mémoire représenté par une fonction non linéaire continue.

En considérant une fonction réelle continue,  $f(x)$ , possédant des dérivées continues jusqu'à l'ordre  $m$  en un point  $x_0$ . Cette fonction peut être développée en série de Taylor, à  $x = x_0$ , sous la forme suivante :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} \frac{df(x_0)}{dx} (x - x_0) + \frac{1}{2!} \frac{d^2f(x_0)}{dx^2} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{m!} \frac{d^m f(x_0)}{dx^m} (x - x_0)^m \quad (2.1)$$

L'expression précédente peut être écrite en notation compacte à l'aide de la somme arithmétique :

$$f(x) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad (2.2)$$

La théorie des systèmes linéaires nous enseigne que la réponse temporelle  $y(t)$  d'un système linéaire, causal avec mémoire, à un signal d'excitation  $x(t)$ , peut être calculée à l'aide de l'intégrale de convolution du signal d'excitation  $x(t)$  et de la réponse impulsionnelle  $h(t)$ , du système linéaire considéré :

$$y(t) = x(t) * h(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (2.3)$$

Un système linéaire peut ainsi être modélisé par sa réponse impulsionnelle,  $h(t)$ , avec laquelle, la réponse à une entrée quelconque peut être prédite en utilisant l'intégrale de convolution précédente.

Si on considère maintenant le cas d'un système non linéaire avec mémoire, vu comme une boîte noire, la représentation de la réponse d'un tel système, peut être exprimée à l'aide de la réponse impulsionnelle et du signal d'entrée, à condition d'étendre l'ordre de l'intégrale de convolution de 1 à  $n$  convolutions. D'ailleurs, l'extension de ce principe au cas des systèmes non linéaires à mémoire nous conduit à la série mise au point par Vito Volterra, connue sous le nom de série de Volterra.

De la sorte, la série de Volterra est un développement en série de fonction, forme généralisée du développement en série de Taylor pour représenter un système non linéaire

avec mémoire. La série de Volterra est un moyen générale pour décrire une réponse continue  $y(t)$  d'un système dynamique non linéaire, en fonction d'une entrée  $x(t)$ .

Le développement en série de Volterra classique pour un système non linéaire causal et invariant dans le temps, peut être exprimé à l'aide de la somme totale [Ogunfunmi, 2007; Rugh, 1981; Schetzen, 1965; 1974] :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} H_k[x(t)] = H_0[x(t)] + H_1[x(t)] + H_2[x(t)] + \cdots + H_p[x(t)] + \cdots \quad (2.4)$$

dans laquelle

$$H_0[x(t)] = h_0 \quad (2.5)$$

et l'opérateur de Volterra d'ordre  $p$ ,  $H_p[\cdot]$  est défini par la convolution :

$$H_p[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h_p(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_p) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) \cdots x(t - \tau_p) d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_p \quad (2.6)$$

Où le premier terme constant  $h_0$  représente la composante continue du système lorsque  $x(t) = 0$  [Schetzen, 1981], et  $h_p(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_p)$  est appelé noyau de Volterra temporel d'ordre  $p$  du système (ou réponse impulsionnelle non linéaire d'ordre  $p$ ). Les coefficients des noyaux de Volterra sont définis pour  $\tau_i = -\infty$  à  $+\infty$ ,  $i = 1, 2, \cdots, p, \cdots$ .

En sommant la totalité des convolutions partielles obtenues, la relation (2.4) entre l'entrée et la sortie donne la relation suivante :

$$\begin{aligned} y(t) = h_0 &+ \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau_1) x(t - \tau_1) d\tau_1 \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \cdots \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h_p(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_p) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) \cdots \\ &x(t - \tau_p) d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_p + \cdots \end{aligned} \quad (2.7)$$

D'un point de vue mathématique, l'expression (2.7) de la série de Volterra, est une série fonctionnelle. Pour une séquence d'entrée  $x(t)$ , l'intégration par rapport à un temps donné  $t$  de chaque terme de la série résulte en un nombre [Schetzen, 1981]. La réponse  $y(t)$ , dépend linéairement des coefficients du noyau d'ordre zéro  $h_0$ , linéaire<sup>1</sup>  $h_1(\tau_1)$ , quadratique  $h_2(\tau_1, \tau_2)$ , cubique  $h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ , en passant par le noyau d'ordre supérieur  $p$   $h_p(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_p)$ , vers un nombre infini de noyaux, comme schématisé dans la Fig. 2.1 :

---

1. Le premier noyau est la réponse impulsionnelle du système linéaire.

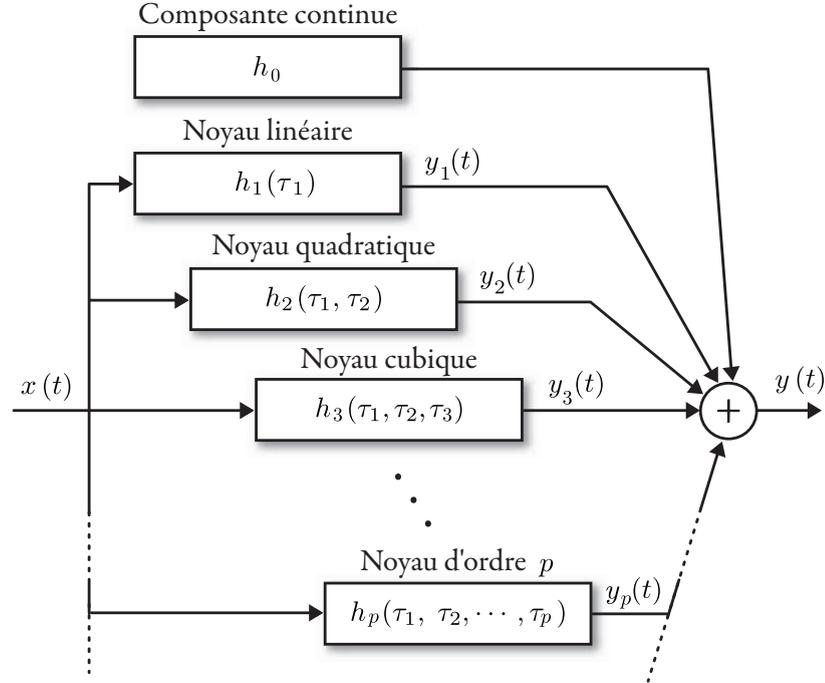


FIGURE 2.1 – Représentation schématique d'une série de Volterra générale.

Les noyaux de Volterra à partir du second ordre, sont à vrai dire, une généralisation de la notion de réponse impulsionnelle. Ils définissent la mémoire du système. Cette mémoire délimite l'intervalle de temps dans lequel les entrées précédentes sont susceptibles d'influencer la sortie actuelle du système. Les variables d'intégration  $\tau_j$  représentant des retards, sont les durées de mémoire représentatives de l'effet mémoire.

Dans une représentation à temps discret, l'équation (2.6) devient :

$$H_n [x(n)] = \sum_{i_1=-\infty}^{\infty} \sum_{i_2=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{i_p=-\infty}^{\infty} h_p(i_1, i_2, \dots, i_p) x(n-i_1) x(n-i_2) \cdots x(n-i_p) \quad (2.8)$$

De même, l'équivalent en temps discret de l'expression générale (2.7) de la série de Volterra décrivant le modèle d'un système non linéaire est :

$$\begin{aligned} y(n) = & h_0 + \sum_{i_1=-\infty}^{\infty} h_1(i_1) x(n-i_1) \\ & + \sum_{i_1=-\infty}^{\infty} \sum_{i_2=-\infty}^{\infty} h_2(i_1, i_2) x(n-i_1) x(n-i_2) + \cdots \\ & + \sum_{i_1=-\infty}^{\infty} \sum_{i_2=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{i_p=-\infty}^{\infty} h_p(i_1, i_2, \dots, i_p) x(n-i_1) x(n-i_2) \cdots x(n-i_p) + \cdots \end{aligned} \quad (2.9)$$

Où  $x(n)$  et  $y(n)$  sont respectivement les signaux d'entrée et de sortie, et  $h_p(i_1, i_2, \dots, i_p)$

est le noyau de Volterra discret d'ordre  $p$  du système, portant l'information sur le comportement non linéaire du système relatif à l'ordre  $p$ .

Il est à noter que dans la suite des sections de la thèse, pour des raisons pratiques, la notation en temps discret sera systématiquement employée.

## 2.3 Propriétés de la série de Volterra

### 2.3.1 Causalité

A l'image d'un système LTI, lequel est caractérisé par sa réponse impulsionnelle, un système non linéaire représenté à l'aide d'une série de Volterra est complètement caractérisé par ses noyaux. En utilisant la même condition de causalité que pour un système LTI, il peut être démontré qu'un système non linéaire est causal si et seulement si [Schetzen, 1981] :

$$h_p(i_1, i_2, \dots, i_p) \text{ pour tout } i_k < 0, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

La relation (2.9) de la réponse générale du système développée à l'aide de la série de Volterra devient alors :

$$\begin{aligned} y(n) = h_0 &+ \sum_{i_1=0}^{\infty} h_1(i_1) x(n-i_1) \\ &+ \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} h_2(i_1, i_2) x(n-i_1) x(n-i_2) + \dots \\ &+ \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \dots \sum_{i_p=0}^{\infty} h_p(i_1, i_2, \dots, i_p) x(n-i_1) x(n-i_2) \dots \\ &x(n-i_p) + \dots \end{aligned} \quad (2.10)$$

Ainsi, pour un système causal, les bornes inférieures des sommes dans l'éq. (2.10) sont mises à zéro.

### 2.3.2 Stabilité

Les questions de la stabilité et de la causalité, sont importantes si l'on compte implémenter la série de Volterra sous la forme d'un filtre.

Selon la définition générale de la stabilité basée sur l'intuition, un système est dit stable si et seulement si, chaque entrée bornée produit une sortie bornée également, on parle d'une stabilité EBSB : Entrée Bornée/Sortie Bornée [McClellan et al., 2003].

De même, et selon la condition mathématique de stabilité, un système est stable si et seulement si, pour toute entrée bornée telle que  $|x(t)| < B < \infty$  pour tout  $t$ , il est aussi vrai que  $|y(t)| < C < \infty$  pour tout  $t$ , où  $B$  et  $C$  sont des constantes [McClellan et al., 2003]. Pour qu'un système LTI soit stable, il faut selon la condition nécessaire et suffisante, que la réponse impulsionnelle du système soit absolument sommable, c.à.d. :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty \quad (2.11)$$

Cependant, pour un système non linéaire représenté par son développement par série de Volterra (Eq. 2.9), l'extension de la condition précédente pour un système non linéaire, est une condition suffisante mais pas nécessaire, soit [Ogunfunmi, 2007] :

$$\sum_{i_1=-\infty}^{\infty} \sum_{i_2=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{i_p=-\infty}^{\infty} |h_p(i_1, i_2, \dots, i_p)| < \infty \quad (2.12)$$

Pour les systèmes Volterra à noyaux séparables, la condition est nécessaire et suffisante<sup>1</sup> [Ogunfunmi, 2007].

### 2.3.3 Linéarité par rapport aux coefficients des noyaux

Une propriété très avantageuse de la série de Volterra, est que la sortie  $y(n)$  du système Volterra de l'éq. (2.9), est linéaire par rapport aux coefficients des noyaux. En effet, cette propriété a le mérite de permettre une représentation matricielle la série de Volterra, qui est très utile lors de l'implémentation des filtre de Volterra (§ 2.5). Cela signifie que la réponse du système  $y(n)$  dans l'éq. (2.9), est une combinaison linéaire, construite à partir de la somme de plusieurs termes :

- la composante continue  $h_0$  ;
- les coefficients du noyau du premier ordre  $h_1(i_1)$ , multipliés par les termes des échantillons de l'entrée de premier ordre ;
- jusqu'au terme avec les coefficients du noyau de l'ordre  $p$   $h_p(i_1, i_2, \dots, i_p)$ , multipliés par les termes des échantillons de l'entrée de l'ordre  $p$ , ainsi de suite... [Ogunfunmi, 2007].

### 2.3.4 Symétrie des noyaux

Dans plusieurs analyses, il est requis d'assumer que les noyaux de Volterra sont symétriques, c.-à-d., qu'ils demeurent les mêmes si on permute les indices (ex. pour  $p = 2$ ,  $h_2(i_1, i_2) = h_2(i_2, i_1)$ ).

Un noyau asymétrique  $h(i_1, i_2)$  peut être symétrisé par :

$$h^{\text{sym}}(i_1, i_2) = \frac{1}{2} [h(i_1, i_2) + h(i_2, i_1)]$$

En généralisant, tout noyau  $h_p(i_1, i_2, \dots, i_p)$  peut être remplacé par son symétrique en posant [Lamnabhi-Lagarrigue, 2009] :

---

1. Selon [Favier and Bouilloc, 2009] : « Le noyau d'ordre  $p$  est dit séparable s'il peut s'exprimer comme le produit de  $p$  noyaux d'ordre un :

$$h_p(m_1, \dots, m_p) = \prod_{i=1}^p h_{m_i}^{(i)}$$

où  $h_{m_i}^{(i)}$  représente le  $m_i^{\text{ème}}$  élément du noyau d'ordre un  $\mathbf{h}^{(i)}$ . »

$$h_p^{\text{sym}}(i_1, i_2, \dots, i_p) = \frac{1}{n!} \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_p) \in \mathbb{S}} h_p(i_1, i_2, \dots, i_p) \quad (2.13)$$

où  $\mathbb{S}$  est l'ensemble de toutes les permutations de  $i_1, i_2, \dots, i_p$ . Il est sûr que cette propriété de symétrie, entraîne une réduction conséquente du nombre de coefficients requis pour une représentation par série de Volterra.

### 2.3.5 Complexité

#### 2.3.5.1 Facteurs de complexité

La complexité de la série de Volterra est composée de deux facteurs liés aux noyaux de Volterra :

- l'ordre de non-linéarité : égal au nombre de noyaux de Volterra ;
- la mémoire du système : égale au nombre de coefficients des noyaux de Volterra.

#### a. Ordre de non-linéarité

L'ordre de non-linéarité que l'on note  $N$ , est un paramètre crucial à déterminer pour la série de Volterra, sans lequel les bornes supérieures des sommes de l'éq. (2.10) du système de Volterra causal, demeurent à l'infini. Toutefois, chacun sait qu'un ordre de non-linéarité infini, signifie une impossibilité pour l'implémentation de cette série de Volterra, mais ce qui est encore plus important est d'ordre mathématique à propos de la convergence de la série<sup>1</sup>. En effet, un ordre de non-linéarité infini, ou même s'il est fini, mais demeurant assez grand par rapport à un seuil donné, conduirait forcément à la divergence de la série et de son inutilité. Dans le but de résoudre cette problématique, nous relierons dans ce qui suit l'ordre de non-linéarité à deux aspects de la série de Volterra, qui seront considérés par la suite comme hypothèses conditionnelles pour l'utilisation du modèle de Volterra :

#### a.1 Niveau du signal d'entrée

En choisissant un signal d'entrée de faible niveau, on s'assure de la validité du caractère polynômiale de la série de Volterra qui sert à modéliser les non-linéarités du système. Quand le niveau de l'entrée est faible, les noyaux les plus bas sont plus dominants<sup>2</sup>

D'un point de vue mathématique, qualifier un système de faiblement non linéaire nécessite que sa pleine gamme d'entrée soit à l'intérieur du rayon de convergence du développement en série de ce système. Cela signifie en plus, que la série et ses dérivées soient que toutes deux continues [Dunn, 2005].

---

1. La convergence de la série de Volterra est abordée en détail dans l'annexe A.

2. Ceci est vrai également pour les termes d'un développement en série d'une fonction continue sans mémoire.

### a.2 Type et importance de la non-linéarité du système

La convergence évoquée précédemment, exige du système à ne pas avoir une non-linéarité trop importante. On dit que l'utilisation de la série de Volterra est réservée aux systèmes raisonnablement non-linéaires, ou faiblement non linéaires.

A *contrario*, un système fortement non linéaire est un système dont la non-linéarité présente le plus souvent des discontinuités, ou des caractéristiques complexes, et dont le comportement ne peut être complètement décrit qu'en augmentant le nombre de noyaux dans la série de Volterra, qui est équivalent à l'ordre de non-linéarité.

On peut remarquer aisément, la difficulté inhérente à la détermination de ce seuil, qui permet de qualifier à tort ou à raison, un système de faiblement non linéaire, ou bien de fortement non linéaire. Partant de ce problème, quelques méthodes sont employées pour aider à estimer ce seuil. Par exemple, détecter la saturation des fréquences fondamentales du système, ou celle de certaines mesures comme le produit d'intermodulation, et rester ainsi bien en dessous de ces niveaux de saturation, pour conserver le caractère faiblement non linéaire du système.

A défaut de pouvoir diminuer l'ordre de non-linéarité du système, on agit sur le niveau du signal d'entrée en le réduisant afin de forcer la convergence de la série de Volterra. Pratiquement, une divergence ou une convergence mal contrôlée, commence par une détérioration de la qualité des noyaux, et une inexactitude du modèle élaboré du système à l'aide de la série de Volterra.

Enfin, une règle s'impose : plus la non-linéarité est faible, moins on a besoin de noyaux (ordre de non-linéarité), pour la représentation du système modélisé. Ainsi, le plus souvent seulement les ordres de noyaux les plus bas (premier, second ou troisième) sont dominants et les noyaux d'ordre les plus élevés ont un effet négligeable sur la réponse du système, de tels systèmes sont appelés faiblement non linéaires. De toute manière, même si le système n'est pas faiblement non linéaire, et en vue de favoriser la calculabilité des noyaux de la série de Volterra, cette dernière est tronquée à un ordre non-linéarité fini  $N$ . D'ailleurs, en général, une série de Volterra causale sous la forme donnée par l'éq. (2.10), ayant un ordre de non-linéarité fini  $N$ , est appelée série de Volterra tronquée, est donnée par :

$$\begin{aligned}
 y(n) = h_0 &+ \sum_{i_1=0}^{\infty} h_1(i_1) x(n-i_1) \\
 &+ \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} h_2(i_1, i_2) x(n-i_1) x(n-i_2) + \dots \\
 &+ \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \dots \sum_{i_N=0}^{\infty} h_N(i_1, i_2, \dots, i_N) x(n-i_1) x(n-i_2) \dots \\
 &x(n-i_N)
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

### b. La mémoire

Dans l'éq. (2.10) du système Volterra causal, les bornes supérieures étant à l'infini, signifie que le système causal a une mémoire infinie. Cependant si une valeur finie est

attribuée aux bornes supérieures des sommes, on dit alors que le système possède une mémoire finie ou évanouissante.

La majorité des systèmes linéaires ou non linéaires réels possèdent une mémoire finie d'une longueur  $M_p - 1$ <sup>1</sup>. Afin de simplifier les calculs et surtout l'intelligibilité des équations, les noyaux ont souvent la même longueur de mémoire, ce qui peut être considéré comme une hypothèse pour l'utilisation de la série de Volterra [Tsimbinos, 1995].

Une série de Volterra d'ordre fini  $N$  et à mémoire finie  $M$ , peut ainsi être approximée par la série tronquée à mémoire finie suivante :

$$\begin{aligned}
 y(n) = h_0 &+ \sum_{i_1=0}^{M-1} h_1(i_1) x(n - i_1) \\
 &+ \sum_{i_1=0}^{M-1} \sum_{i_2=0}^{M-1} h_2(i_1, i_2) x(n - i_1) x(n - i_2) + \dots \\
 &+ \sum_{i_1=0}^{M-1} \sum_{i_2=0}^{M-1} \dots \sum_{i_N=0}^{M-1} h_N(i_1, i_2, \dots, i_N) x(n - i_1) x(n - i_2) \dots \\
 &x(n - i_N)
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

### 2.3.5.2 Réduction de la complexité

En observant l'expression (2.15), il devient plus évident que la complexité de la série de Volterra dépend à la fois de l'étendue de mémoire  $M$  et de l'ordre de non-linéarité  $N$ . Même en limitant ces deux paramètres, le nombre de coefficients de la série de Volterra reste très élevé, jusqu'à en faire un inconvénient majeur et un écueil pour son implémentation. Le nombre de coefficients de chaque noyau est donné par :

$$C(N, M) = M^N \tag{2.16}$$

Par conséquent, le nombre total de coefficients contenus dans une série de Volterra d'ordre  $N$  et de mémoire  $M$ , augmente de manière exponentielle avec l'ordre, il est donné par [Favier and Bouilloc, 2009]<sup>1</sup> :

$$C_{\text{tot}}(N, M) = \sum_{i=1}^N M^i \tag{2.17}$$

Une réduction importante du nombre de coefficients, peut être obtenue en considérant la propriété de la symétrie des noyaux de Volterra. La symétrie des noyaux réduit le nombre de coefficients de chaque noyau, à une combinaison avec répétition  $C_N^M$  de l'ordre de non-linéarité  $N$  et la mémoire  $M$  :

1. Il importe de distinguer dans la suite de la thèse, suivant la différenciation apportée par [Tsimbinos, 1995], entre :  $M_p$ , appelé étendue de mémoire, incluant le terme à mémoire zéro (*en Ang. memory span*), et  $M_p - 1$ , qui est appelé longueur de mémoire, qui représente la mémoire réelle de la série de Volterra (*en Ang. memory length*), qui n'est autre que le nombre de coefficients du noyau d'ordre  $p$ .

1. On suppose que l'effet de la composante continue est négligeable, ce qui est souvent le cas en pratique.

$$C_{\text{sym}}(N, M) = C_N^M = \binom{M+N-1}{N} = \frac{(M+N-1)!}{N!(M-1)!} \quad (2.18)$$

D'où un nombre total des coefficients égal à :

$$C_{\text{sym/tot}}(N, M) = \sum_{i=1}^N C_{\text{sym}}(i, M) \quad (2.19)$$

Pour une série de Volterra donnée, la réduction du nombre de chaque noyau peut être mesurée à l'aide du taux de réduction de la complexité suivant :

$$\frac{C_{\text{sym}}(N, M)}{C(N, M)} = \frac{(M+N-1)!}{N!(M-1)!M^N} \quad (2.20)$$

Et pour le nombre total de coefficients :

$$\frac{C_{\text{sym/tot}}(N, M)}{C_{\text{tot}}(N, M)} = \frac{\sum_{i=1}^N C_{\text{sym}}(i, M)}{\sum_{i=1}^N M^i} \quad (2.21)$$

Ainsi, une série de Volterra causale d'ordre de non-linéarité  $N$ , de mémoire  $M$  et dont les noyaux sont symétriques et appelé série de Volterra triangulaire, et s'écrit :

$$\begin{aligned} y(n) = & \sum_{i_1=0}^{M-1} h_1(i_1) x(n-i_1) \\ & + \sum_{i_1=0}^{M-1} \sum_{i_2=i_1}^{M-1} h_2(i_1, i_2) x(n-i_1) x(n-i_2) + \dots \\ & + \sum_{i_1=0}^{M-1} \sum_{i_2=i_1}^{M-1} \dots \sum_{i_N=i_{N-1}}^{M-1} h_N(i_1, i_2, \dots, i_N) x(n-i_1) x(n-i_2) \dots x(n-i_N) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Par exemple, pour une série de Volterra d'ordre 3, d'une étendue de mémoire  $M = 5$  on aura :

- le nombre de coefficients de chaque noyau est :

$$C(N, M) = M^N = 5^3 = 125$$

- le nombre de coefficients total contenus dans la série de Volterra est :

$$C_{\text{tot}}(N, M) = \sum_{i=1}^N M^i = \sum_{i=1}^3 5^i = 5 + 25 + 125 = 155$$

- le nombre de coefficients de chaque noyau symétrique est :

$$C_{\text{sym}}(N, M) = C_N^M = \binom{M+N-1}{N} = \frac{(M+N-1)!}{N!(M-1)!} = \frac{(5+3-1)!}{3!(5-1)!} = 35$$

- le nombre de coefficients total contenus dans la série de Volterra triangulaire est :

$$C_{\text{sym/tot}}(N, M) = \sum_{i=1}^N C_{\text{sym}}(i, M) = \sum_{i=1}^3 C_{\text{sym}}(i, 5) = 5 + 15 + 35 = 55$$

- le taux de réduction de la complexité pour chaque noyau est égal à  $35/125 = 28\%$
- et enfin, le taux de réduction total de la complexité pour la série de Volterra est de  $55/155 = 35,5\%$

## 2.4 Série de Volterra fréquentielle

Les noyaux de Volterra étant l'élément principal du modèle de Volterra, ainsi la série de Volterra fréquentielle consiste essentiellement à déterminer les noyaux de Volterra dans le domaine fréquentiel. Pour cela, la transformée de Fourier discrète multidimensionnelle est appliquée à un modèle de Volterra d'ordre  $N$  et d'étendue de mémoire  $M$  [Bedrosian and Rice, 1972; Stoddard and Birpoutsoukis, 2017], ce qui donne :

$$\begin{aligned} \text{TFD}[h_N(i_1, i_2, \dots, i_N)] &= H_N(k_1, k_2, \dots, k_N) \\ &= \sum_{i_1=0}^{M-1} \sum_{i_2=0}^{M-1} \dots \sum_{i_N=0}^{M-1} h_N(i_1, i_2, \dots, i_N) \\ &\quad \exp\left(-\frac{j2\pi}{M} \sum_{l=1}^N k_l i_l\right) \end{aligned} \quad (2.23)$$

On peut distinguer dans cette expression le noyau de Volterra fréquentiel  $H_N(k_1, k_2, \dots, k_N)$ , qui est une généralisation du concept de fonction de transfert. Les noyaux de Volterra fréquentiels sont très importants pour calculer les distorsions d'un système non linéaire, notamment les composantes de distorsions harmoniques et d'intermodulation.

En conséquence, dans le domaine fréquentiel, les noyaux de Volterra s'écrivent de la façon suivante :

$$\begin{aligned} H_N(j\omega_1, j\omega_2, \dots, j\omega_N) &= \sum_{i_1=0}^{M-1} \sum_{i_2=0}^{M-1} \dots \sum_{i_N=0}^{M-1} h_N(i_1, i_2, \dots, i_N) \\ &\quad \exp\left(-j\frac{1}{M} \sum_{l=1}^N \omega_l i_l\right) \end{aligned} \quad (2.24)$$

La réponse du système dans le domaine fréquentiel, exprimée en série de Volterra s'écrit alors :

$$Y(j\omega) = H_N(j\omega_1, j\omega_2, \dots, j\omega_N) X(j\omega) \quad (2.25)$$

Par analogie à ce qui a été dit dans le domaine temporel, cette réponse du système est la somme des réponses correspondant aux différents ordres de non-linéarité, ce qui correspond à :

$$Y(j\omega) = Y_1(j\omega_1) + Y_2(j\omega_1, j\omega_2) + \dots + Y_N(j\omega_1, \dots, j\omega_N) \quad (2.26)$$

Chaque réponse  $Y_1, Y_2, \dots, Y_N$  est exprimée par un opérateur linéaire, de la même manière qu'un produit de convolution fréquentiel, c.à.d. le produit des entrées  $X_1, X_2, \dots, X_N$  et des fonctions de transfert multidimensionnelles  $H_1, H_2, \dots, H_N$ . Les composantes de la réponse aux différents ordres sont respectivement :

$$\begin{aligned} Y_1(j\omega_1) &= H_1(j\omega_1) X(j\omega_1) \\ Y_2(j\omega_1, j\omega_2) &= H_2(j\omega_1, j\omega_2) X(j\omega_1) X(j\omega_2) \\ &\vdots \\ Y_N(j\omega_1, \dots, j\omega_N) &= H_N(j\omega_1, \dots, j\omega_N) X(j\omega_1) \dots X(j\omega_N) \end{aligned} \quad (2.27)$$

La Fig. (2.2) représente la décomposition d'un système non linéaire par une mise en parallèle des différents noyaux fréquentiels, dont la somme des réponses donne la réponse totale du système.

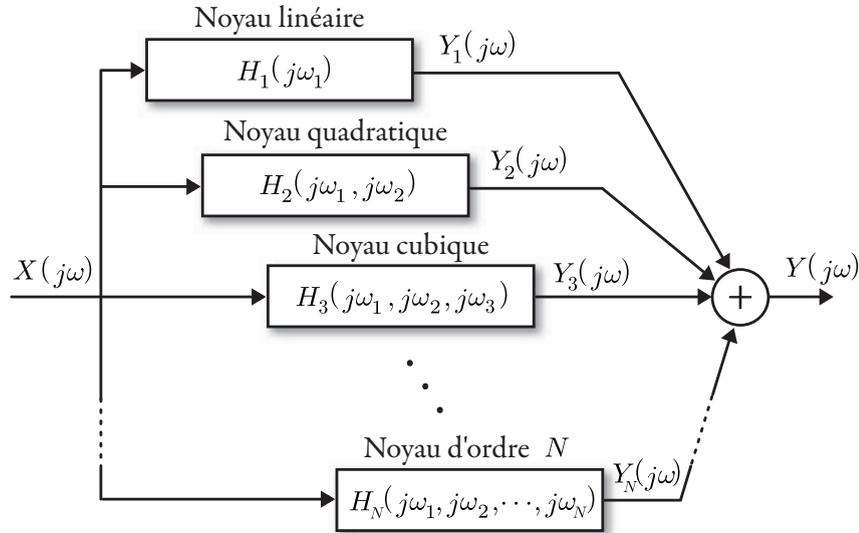


FIGURE 2.2 – Système non linéaire décomposé en noyaux de Volterra fréquentiels.

## 2.5 Implémentation du filtre de Volterra

Le filtre de Volterra appartient à la classe des filtres non linéaires polynomiaux non récursifs [Diniz, 2008; Pitas and Venetsanopoulos, 1990]. La série de Volterra causale, tronquée et triangulaire d'ordre de non-linéarité  $N$ , et de mémoire  $M$ , telle que décrite

par l'Eq. (2.22), est la relation qui relie l'entrée à la sortie du filtre de Volterra. Aujourd'hui, le filtre de Volterra est utilisé dans plusieurs domaines de la technique, pour la modélisation et l'analyse des systèmes dynamiques faiblement non linéaires.

La complexité de calcul d'un filtre de Volterra augmente exponentiellement avec l'ordre  $p$ , ce qui décourage l'usage de modèles d'ordres élevés. Quoique plusieurs simplifications ont été apportées au modèle de Volterra durant les dernières années, son emploi demeure toutefois limité aux second et troisième ordres, qui restent de loin, les plus utilisés dans la pratique [Lu, 2004; Pitas and Venetsanopoulos, 1990].

Pour sa structure, le filtre de Volterra peut être vu comme la somme de plusieurs convolutions multidimensionnelles, ou filtres convolutifs à  $p$ -dimensions<sup>1</sup>. L'on sait désormais, que la sortie de la série de Volterra dépend linéairement des coefficients de ses noyaux (§ 2.3.3), ce qui signifie que les méthodes développées pour la conception des filtres linéaires multidimensionnels, peuvent être employées pour la conception des filtres de Volterra.

A partir de l'Eq. (2.22), nous pouvons écrire la réponse du filtre de Volterra pour les différents ordres. Dans cette équation, la composante continue  $h_0$  est négligée. Cependant, dans le cas où elle est reconsidérée, la réponse d'un filtre de Volterra d'ordre zéro s'écrit par exemple :

$$y(n) = h_0 \quad (2.28)$$

où cette composante continue  $h_0$ , est le noyau d'ordre zéro, faisant que la réponse du filtre soit trivialement non linéaire [Ogunfunmi, 2007].

Aussi, l'Eq. (2.29) suivante, décrit la réponse d'un filtre de Volterra du premier ordre d'étendue de mémoire  $M$ , où  $h_0$  et  $h_1(i_1)$  représentent respectivement les coefficients du noyau de Volterra d'ordre zéro et d'ordre un :

$$y(n) = h_0 + \sum_{i_1=0}^{M-1} h_1(i_1) x(n - i_1) \quad (2.29)$$

La structure de l'Eq. (2.29) est représentée dans la Fig. (2.3). Sans le noyau d'ordre zéro dans cette équation, il est évident qu'elle est identique à celle d'un filtre convolutif linéaire, dont l'implémentation est illustrée dans la Fig. (2.4).

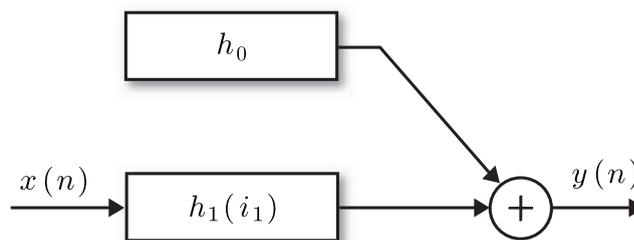


FIGURE 2.3 – Structure d'un filtre de Volterra du premier ordre.

1.  $p$  étant l'ordre du noyau correspondant au filtre partiel considéré.

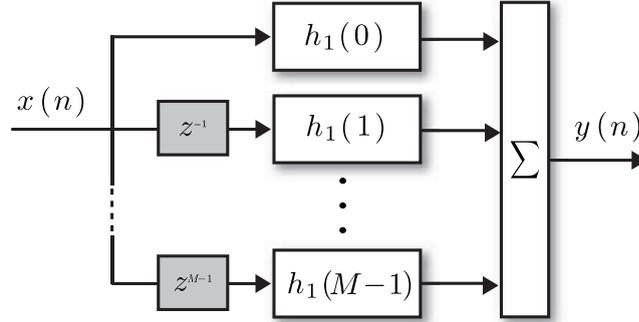


FIGURE 2.4 – Implémentation d'un filtre de Volterra du premier ordre sans  $h_0$ .

Par extension, la réponse d'un filtre de Volterra du second ordre (quadratique) et de mémoire  $M$  s'écrit (Figure 2.5) :

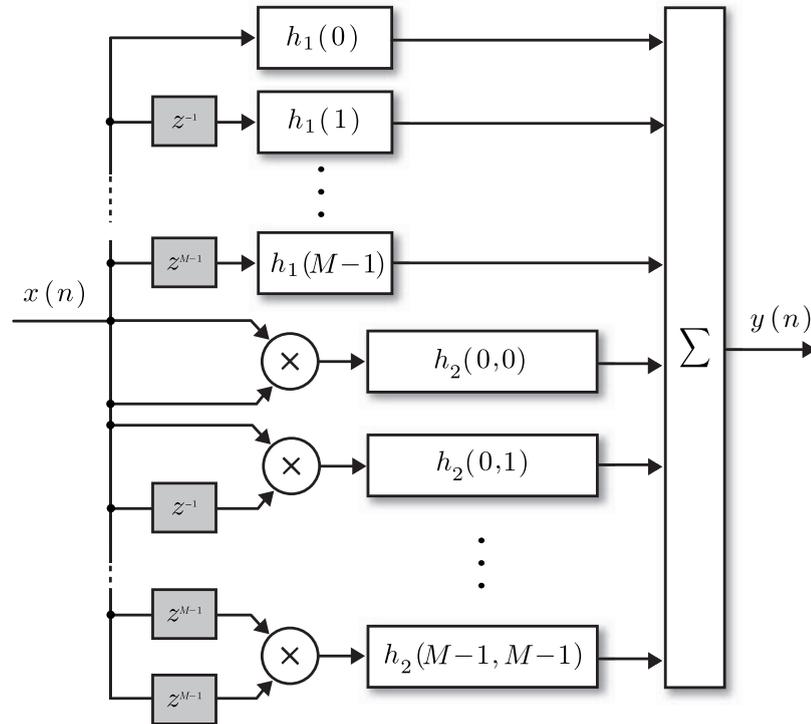


FIGURE 2.5 – Implémentation d'un filtre de Volterra quadratique.

$$y(n) = \sum_{i_1=0}^{M-1} h_1(i_1) x(n - i_1) + \sum_{i_1=0}^{M-1} \sum_{i_2=0}^{M-1} h_2(i_1, i_2) x(n - i_1) x(n - i_2) \quad (2.30)$$

avec les coefficients des deux noyaux de Volterra  $h_1(i_1)$  d'ordre un, et  $h_2(i_1, i_2)$  du second ordre, où  $i_1, i_2 = 0, 1, \dots, M - 1$ .

L'écriture matricielle de l'Eq. (2.30) est donnée par [Diniz, 2008] :

$$y(n) = \mathbf{h}^T(n) \mathbf{x}(n) \quad (2.31)$$

où  $\mathbf{x}(n)$  est le vecteur d'entrée donné par :

$$\mathbf{x}(n) = \begin{bmatrix} x(n) \\ x(n-1) \\ \vdots \\ x(n-M+1) \\ x^2(n) \\ x(n)x(n-1) \\ \vdots \\ x(n)x(n-M+1) \\ \vdots \\ x(n-M+1)x(n-M) \\ x^2(n-M+1) \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

et  $\mathbf{h}^T(n)$  est la transposée du vecteur  $\mathbf{h}(n)$  des coefficients des noyaux de Volterra du filtre, tel que :

$$\mathbf{h}(n) = [h_1(0) \ h_1(1) \ \cdots \ h_1(M-1) \ h_2(0,0) \ h_2(0,1) \ \cdots \ h_2(M-1, M-1)]^T \quad (2.33)$$

## 2.6 Conclusion

Ce chapitre a servi de base pour le formalisme de Volterra, autour duquel tourne le modèle de Volterra adaptatif employé dans cette thèse. Le chapitre a été en outre l'occasion de montrer la complexité de la série de Volterra, en abordant ses différentes propriétés, qui sont essentielle à la fois pour sa compréhension et surtout sa mise en application sur des systèmes réels. Bien que la série de Volterra puisse être utilisée pour la description de la dynamique d'un large éventail de systèmes non linéaires, son emploi a toutefois été restreint à une catégorie de systèmes dynamiques dont la mémoire est courte, et la non-linéarité est relativement modérée. Il a été question également dans ce chapitre, de souligner l'importance de la capacité d'implémentation de la série de Volterra sous forme de filtre, dans laquelle un maximum de soin doit être apporté aux divers éléments de la série, tels que l'ordre de non-linéarité et la longueur de mémoire, susceptibles de faire déborder le nombre de coefficients des noyaux, et en conséquence accroître la charge de calcul.

Le chapitre suivant sera consacré aux filtres de Volterra adaptatifs, basées sur des méthodes adaptatives, pour l'estimation des noyaux de Volterra.

# CHAPITRE 3

## Estimation des noyaux de Volterra à l'aide des filtres adaptatifs

### 3.1 Introduction

L'essentiel du processus d'identification à l'aide du formalisme de Volterra, consiste à estimer les noyaux du modèle de Volterra. Cela passe tout d'abord, par le choix de la structure des noyaux, ensuite, le calcul des coefficients des noyaux.

Cependant, l'estimation des noyaux de Volterra se fait soit en présence ou en absence de connaissances *a priori* sur le système à identifier. En présence d'une connaissance *a priori*, on se retrouve dans un contexte d'identification paramétrique, basé sur un formalisme de Volterra analytique. Le modèle de Volterra dans ce cas, et particulièrement ses noyaux sont décrits à l'aide de *séries de Volterra analytiques*, faisant intervenir des lois physiques des systèmes sous-jacents, et permettant de relier deux grandeurs fondamentales dans le système en guise d'entrée et de sortie. Malheureusement, une connaissance *a priori* du système n'est pas toujours possible. Ainsi, une stratégie d'une identification non paramétrique s'impose, où les coefficients des noyaux de Volterra n'ont aucune signification physique, mais dont l'ensemble permet de modéliser plusieurs caractéristiques dynamiques du système, telles que, les distorsions, le rapport signal/bruit, la stabilité, la stationnarité, etc.

L'objectif de ce chapitre est de présenter les fondements théorique et mathématique des deux principales familles de méthodes adaptatives, que sont les algorithmes basés sur le gradient, et les algorithmes basés sur les moindres carrés. Les deux premières sections exposent le problème du filtrage optimal, et plus particulièrement le filtre de Wiener qui occupe une place centrale dans la théorie de l'estimation moderne. La solution de Wiener du filtre optimal, est abordée en détaillant les étapes nécessaires pour la résolution de l'équation de Wiener-Hopf. La section suivante permet de mettre l'accent, sur la place de l'estimation des noyaux de Volterra à l'aide des méthodes adaptatives, dans le contexte général de l'identification des systèmes faiblement non linéaires à l'aide des filtres de Volterra adaptatifs. Dans la cinquième section, sont présentées les différentes structures pour les noyaux de Volterra pouvant être adoptées, qui sont très déterminantes dans l'exactitude de la modélisation, et la qualité des modèles obtenus. Dans la sixième section, nous nous intéressons à l'algorithme du gradient stochastique (LMS), et à l'algorithme des moindres carrés récursifs (RLS), comme étant les deux principaux algorithmes représentatifs des méthodes adaptatifs, et en l'occurrence, les deux

algorithmes retenus pour notre travail. Pour cela, nous décrivons le formalisme inhérent aux deux algorithmes retenus, en partant du cas linéaire abondamment traité dans la littérature, dont l'introduction est indispensable pour la déduction des algorithmes correspondant pour le modèle de Volterra.

### 3.2 Filtrage optimal - Filtrage de Wiener

Nous supposons dans ce qui suit, un processus aléatoire stationnaire  $d(n)$  altéré par un bruit également stationnaire  $b(n)$ . Le filtre optimal est le résultat de l'estimation, qui consiste à trouver la réponse impulsionnelle linéaire stationnaire de ce filtre  $h(t)$ , capable de fournir la meilleure approximation de  $d(n)$ , notée  $y(n)$ , en utilisant la convolution suivante (Figure (3.1)) :

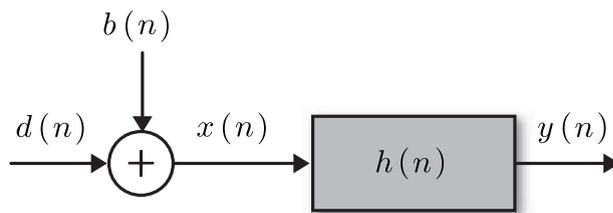


FIGURE 3.1 – Principe du filtrage optimal.

$$\begin{aligned} y(n) &= h(n) * [d(n) + b(n)] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k) x(k) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Il faudra que le processus estimé  $y(n)$  à la sortie du filtre optimal, soit le plus proche possible du processus initial désiré  $d(n)$ , cela se note en introduisant l'erreur  $e(n)$  :

$$e(n) = d(n) - y(n) \quad (3.2)$$

De plus, le problème du filtrage optimal consiste à trouver le **meilleur filtre**  $h(n)$ , basé sur la minimisation de l'erreur au sens d'une certaine **fonction de coût**  $J[e(n)]$ , tel que :

$$h(n) = \arg \min_h J[e(n)] \quad (3.3)$$

Plusieurs fonctions de coût sont utilisées en tant que **critères d'optimisation** ou de performance, basés sur la minimisation de l'une des normes ou métriques suivantes (Tableau 3.1) [Diniz, 2008] :

Norme	Formule de la norme	Critère d'optimisation
Somme des valeurs absolues (SAE : Sum of Absolute Errors)	$J[e(n)] = \sum_{i=0}^n e^2(i)$	Moindres carrés (LS : Least Squares)
Erreur absolue moyenne (MAE : Mean Absolute Error), ou norme $L_1$	$J[e(n)] = E[ e(n) ]$	Erreur absolue moyenne minimale (MMAE : Minimum Mean Absolute Error)
Erreur quadratique moyenne (MSE : Mean Squared Error), ou norme $L_2$	$J[e(n)] = E[ e(n) ^2]$	Erreur quadratique moyenne minimale (MMSE : Minimum Mean Squared Error)
Erreur de la norme $L_p$	$J[e(n)] = E[ e(n) ^p]$	
Erreur de la somme des carrés pondérés (WSSE : Weighted Sum Squared Error)	$J[e(n)] = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} e^2(i)$ avec $0 \ll \lambda < 1$	Moindres carrés pondérés (WLS : Weighted Least Squares)

TABLEAU 3.1 – Principales normes utilisées dans les critères d'optimisation du filtrage optimal.

Parmi ces critères, celui de l'erreur quadratique moyenne minimale (MMSE) est le critère d'optimisation le plus employé dans plusieurs spécialités des sciences et de la technique comme les statistiques, l'automatique, la théorie de l'estimation, et ce grâce à sa simplicité, son interprétation, et à son formalisme complet, ce qui correspond au problème de *filtrage de Wiener*.

Le filtre de Wiener est un filtre statistique utilisé en traitement du signal, qui a été développé par Norbert Wiener au début des années 1940 dans le *Radiation Laboratory* du MIT, et publié qu'après la Seconde Guerre mondiale en 1949 [Kailath, 1981]. Globalement, le filtre de Wiener est utilisé pour la suppression du bruit présent dans un signal.

### 3.3 Equation de Wiener-Hopf

Le filtre de Wiener repose sur la minimisation de l'erreur quadratique moyenne MSE, permettant à l'aide d'un développement simple, de fournir une solution unique du critère d'optimisation MMSE :

$$\begin{aligned} J_{MSE}[e(n)] &= E[|d(n) - y(n)|^2] \\ &= E[|e(n)|^2] \end{aligned} \tag{3.4}$$

La procédure de minimisation de la MSE implique seulement des statistiques du

second ordre (les corrélations) [Poularikas and Ramadan, 2006]. L'objectif du filtrage de Wiener est ainsi de concevoir un filtre de réponse impulsionnelle  $\mathbf{w}(n)$ , qui produit une estimation  $y(n)$  du signal désiré  $d(n)$  en utilisant une combinaison linéaire des données du processus d'entrée  $x(n)$ , tel que la norme MSE (fonction de coût)  $J_{MSE}[e(n)]$  soit minimisée [Poularikas and Ramadan, 2006].

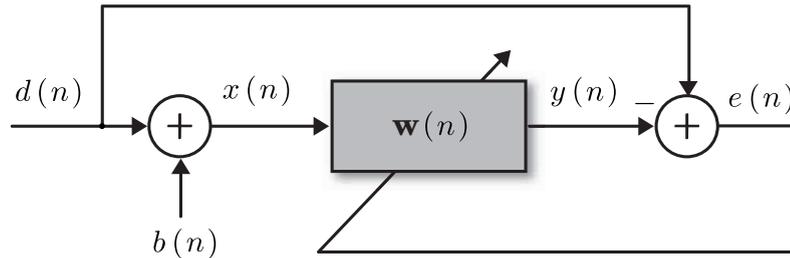


FIGURE 3.2 – Schéma de principe d'un filtre de Wiener.

La réponse impulsionnelle  $\mathbf{w}(n)$  du filtre de Wiener s'écrit :

$$\mathbf{w}^T(n) = [w(1), w(2), \dots, w(N)] \quad (3.5)$$

Les  $N$  coefficients  $w(n)$  de la réponse impulsionnelle  $\mathbf{w}^T(n)$  sont ajustés par le filtre de Wiener (Figure (3.2)), dont l'estimation du signal désiré s'exprime à l'aide du produit scalaire donné par [Diniz, 2008; Najim, 1998] :

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} w(n) x(n-k) = \mathbf{w}^T(n) \mathbf{x}(n) \quad (3.6)$$

avec le vecteur à l'entrée du filtre :

$$\mathbf{x}(n) = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-N+1)]^T \quad (3.7)$$

Comme l'erreur s'écrit :  $e(n) = d(n) - y(n)$ , on aura ainsi :

$$e(n) = d(n) - \mathbf{w}^T(n) \mathbf{x}(n) = d(n) - \mathbf{x}^T(n) \mathbf{w}(n) \quad (3.8)$$

Selon le Tableau (3.1), l'erreur quadratique moyenne MSE est  $J_{MSE}(\mathbf{w}) = E[e(n)^2]$ , ce qui donne après développement :

$$\begin{aligned} J_{MSE}(\mathbf{w}) &= E[e(n)^2] \\ &= E[(d(n) - \mathbf{w}^T(n) \mathbf{x}(n))^2] \\ &= E[(d(n) - \mathbf{w}^T(n) \mathbf{x}(n)) (d(n) - \mathbf{w}^T(n) \mathbf{x}(n))] \\ &= E[d^2(n) - \mathbf{w}^T(n) \mathbf{x}(n) d(n) - d(n) \mathbf{x}^T(n) \mathbf{w}(n) + \mathbf{w}^T(n) \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T(n) \mathbf{w}(n)] \\ &= E[d^2(n)] - 2\mathbf{w}^T(n) E[\mathbf{x}(n) d(n)] + \mathbf{w}^T(n) E[\mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T(n)] \mathbf{w}(n) \end{aligned}$$

Si l'on admet l'hypothèse que les signaux  $x(n)$  et  $d(n)$  sont conjointement stationnaires<sup>1</sup>, on peut écrire :

$$J_{MSE}(\mathbf{w}) = \sigma_d^2 - 2\mathbf{w}^T(n) \mathbf{R}_{dx} + \mathbf{w}^T(n) \mathbf{R}_x \mathbf{w}(n) \quad (3.9)$$

L'hypothèse de la stationnarité<sup>1</sup> de la fonction MSE permet d'écrire [Diniz, 2008] :

$$J_{MSE}(\mathbf{w}) = \sigma_d^2 - 2\mathbf{w}^T \mathbf{R}_{dx} + \mathbf{w}^T \mathbf{R}_x \mathbf{w} \quad (3.10)$$

où :

$\sigma_d^2$  : variance du signal désiré  $d(n)$

$\mathbf{R}_{dx}$  : vecteur d'intercorrélation  $1 \times N$  entre  $d(n)$  et  $x(n)$

avec

$$\mathbf{R}_{dx} = [R_{dx}(0), R_{dx}(1), \dots, R_{dx}(N-1)]^T \quad (3.11)$$

$\mathbf{R}_x$  : matrice d'autocorrélation  $N \times N$  de  $x(n)$

avec :

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} R_x(0) & R_x(1) & \dots & R_x(N-1) \\ R_x(-1) & R_x(0) & \dots & R_x(N-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_x(-N+1) & R_x(-N+2) & \dots & R_x(0) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

qui est une matrice hermitienne<sup>2</sup> et une matrice de Toeplitz<sup>3</sup>. En plus, puisque les signaux sont supposés stationnaires, la matrice est symétrique, à savoir  $R_x(k) = R_x(-k)$ .

En considérant l'équation (3.10), on peut remarquer que la MSE est une fonction quadratique des coefficients du vecteur  $w(n)$ . En outre, le minimum de la fonction de coût  $J_{MSE}(\mathbf{w})$  est obtenu pour le vecteur optimum  $\mathbf{w}_{opt}$  qui annule son gradient :

$$\frac{\partial J_{MSE}(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} = 0_{N \times 1} \quad (3.13)$$

ou encore :

$$\frac{\partial J_{MSE}(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} = -2\mathbf{R}_{dx} + 2\mathbf{R}_x \mathbf{w}_{opt} = 0_{N \times 1} \quad (3.14)$$

$$\mathbf{R}_x \mathbf{w}_{opt} = \mathbf{R}_{dx} \quad (3.15)$$

Cette équation permet de déterminer les coefficients du filtre dit optimal, qui permet de minimiser la MSE, et qui s'appelle l'équation de Wiener-Hopf.

---

1. Les signaux  $x(n)$  et  $d(n)$  sont conjointement stationnaires, si les fonctions d'intercorrélation sont indépendantes des indices de temps  $n$ , c.-à-d.,  $E[\mathbf{x}(n)d(n)] = \mathbf{R}_{dx}$  et  $E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)] = \mathbf{R}_x$ .

1. Cette hypothèse de la stationnarité, permet d'exprimer le vecteur de la réponse impulsionnelle  $\mathbf{w}$  indépendamment de l'indice de temps  $n$ .

2. Une matrice hermitienne est une matrice qui est égale à la matrice transconjuguée (ou adjointe), c.-à-d., la matrice transposée de la matrice conjuguée :  $A = \overline{A^T}$ .

3. Une matrice de Toeplitz est une matrice ayant des coefficients identiques sur la diagonale descendant de gauche à droite.

En supposant la matrice  $\mathbf{R}_x$  inversible, on a :

$$\mathbf{w}_{opt} = \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{R}_{dx} \quad (3.16)$$

Cette dernière équation est appelée la solution optimale au sens de Wiener ou solution de Wiener, avec  $\mathbf{w}_{opt}$  le filtre optimal de Wiener obtenu avec le MMSE comme critère d'optimisation, que l'on exprime autrement :

$$\mathbf{w}_{opt} = \arg \min_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^N} J_{MSE}(\mathbf{w}) \quad (3.17)$$

En pratique, il est difficile d'estimer avec précision  $\mathbf{R}_x$  et  $\mathbf{R}_{dx}$ . Toutefois, dans le cas où l'entrée du filtre et le signal désiré sont ergodiques, Diniz [Diniz, 2008] suggère d'utiliser des moyennes temporelles, dont le calcul est tout à fait envisageable à l'aide d'algorithmes adaptatifs pour l'estimation de  $\mathbf{R}_x$  et  $\mathbf{R}_{dx}$ .

L'erreur minimale  $J_{min}$ , ou MMSE, peut être calculée en remplaçant  $\mathbf{w}_{opt}$  (l'éq. (3.16)), dans l'équation (3.10), ce qui donne :

$$\begin{aligned} J_{min} &= \sigma_d^2 - 2(\mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{R}_{dx})^T \mathbf{R}_{dx} + (\mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{R}_{dx})^T \mathbf{R}_x (\mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{R}_{dx}) \\ &= \sigma_d^2 - 2\mathbf{R}_{dx}^T \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{R}_{dx} + (\mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{R}_{dx})^T \mathbf{R}_x \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{R}_{dx} \\ &= \sigma_d^2 - 2\mathbf{R}_{dx}^T \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{R}_{dx} + \mathbf{R}_{dx}^T \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{R}_{dx} \end{aligned} \quad (3.18)$$

qui est équivalent à :

$$J_{min} = \sigma_d^2 - \mathbf{R}_{dx}^T \mathbf{w}_{opt} \quad (3.19)$$

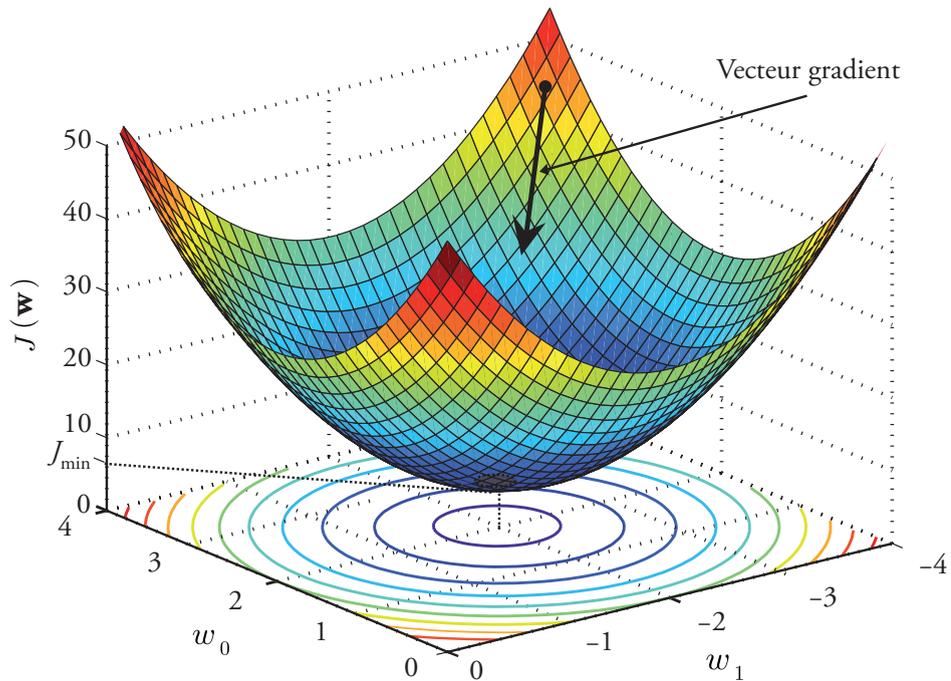


FIGURE 3.3 – Surface de l'erreur quadratique moyenne.

La Figure (3.3) ci-dessus, montre un exemple de la surface de la MSE (ou surface de performance) pour un filtre à deux coefficients ( $N = 2$ ). La surface est obtenue pour différentes valeurs des coefficients  $w_0$  et  $w_1$  dans la fonction de coût  $J(\mathbf{w})$ . Le bas de la surface correspond au fait, aux valeurs minimales de la MSE obtenues pour les valeurs optimales des coefficients du filtre, c.-à-d., quand la solution de Wiener est atteinte. Nous constatons que la MMSE correspond à  $w_0 = 2$  et  $w_1 = -2$ , qui sont les coefficients optimum du filtre de Wiener.

D'autre part, si on multiplie les deux membres de la relation (3.8) par  $\mathbf{x}(n)$ , on aura :

$$e(n) \mathbf{x}(n) = d(n) \mathbf{x}(n) - \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T(n) \mathbf{w} \quad (3.20)$$

L'espérance mathématique des deux membres donne :

$$E[e(n) \mathbf{x}(n)] = \mathbf{R}_{dx} - \mathbf{R}_x \mathbf{w} \quad (3.21)$$

Dans le cas où le filtre  $\mathbf{w}$  est un filtre optimal, on remplace ainsi  $\mathbf{w}_{opt}$  par sa valeur  $\mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{R}_{dx}$  (éq. (3.16), et la relation (3.21) devient :

$$E[e_{opt}(n) \mathbf{x}(n)] = \mathbf{0}_{N \times 1} \quad (3.22)$$

Cette relation signifie que lorsque les coefficients du vecteur  $\mathbf{w}$  sont à leurs valeurs optimales (solution de Wiener), le signal d'erreur optimale est orthogonal au vecteur d'entrée. De surcroît, si le signal d'erreur optimale et le signal désiré sont tous les deux à moyenne nulle, le principe d'orthogonalité implique que  $e_{opt}(n)$  et  $\mathbf{x}(n)$  sont décorrélés [Diniz, 2008; Najim, 1998].

L'équation (3.22) peut être réécrite à l'aide des coefficients du vecteur d'entrée :

$$E[e_{opt}(n) x(n-k)] = 0, \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.23)$$

Le principe d'orthogonalité entraîne le corollaire que la sortie optimale du filtre est également orthogonale à l'erreur optimale [Ogunfunmi, 2007; Vega and Rey, 2013] dans la mesure où :

$$E[e_{opt}(n) y_{opt}(n)] = E[e_{opt}(n) \mathbf{w}_{opt}^T \mathbf{x}(n)] = \mathbf{w}_{opt}^T E[e_{opt}(n) \mathbf{x}(n)] = 0 \quad (3.24)$$

La Figure (3.4) illustre le principe d'orthogonalité pour  $N = 2$ , où l'erreur optimale  $e_{opt}(n)$  est orthogonale aux échantillons d'entrée  $x(n)$  et  $x(n-1)$ , et à la sortie optimale du filtre (estimation)  $y_{opt}(n)$ , lorsque l'estimateur travaille avec les coefficients optimaux du filtre.

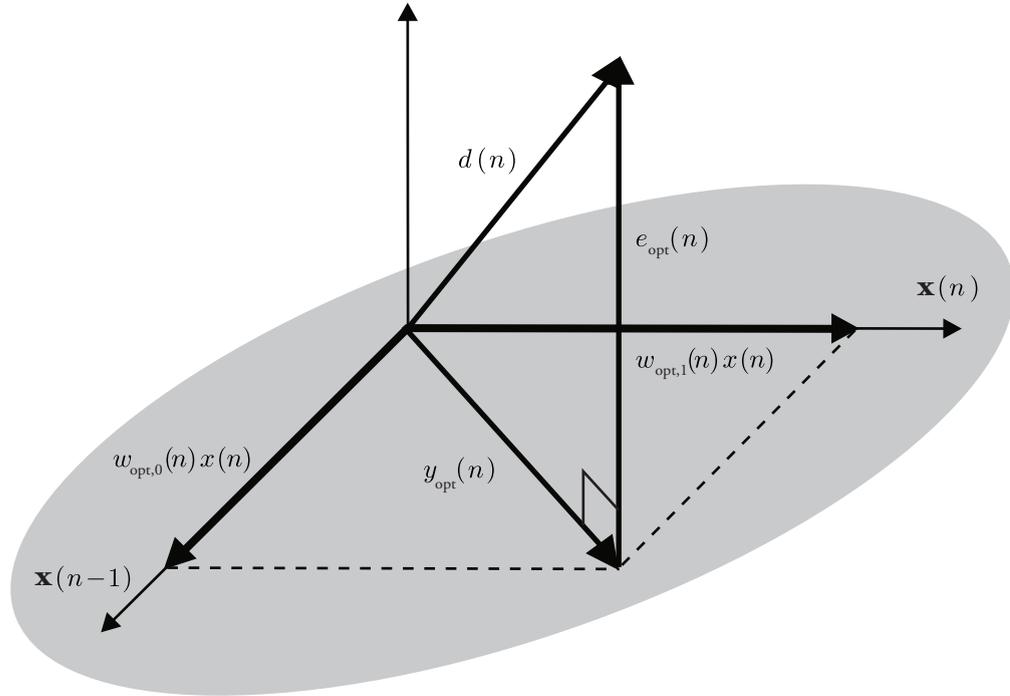


FIGURE 3.4 – Illustration du principe d’orthogonalité pour  $N = 2$ .

### 3.4 Estimation des noyaux de Volterra

Plusieurs auteurs s’accordent pour affirmer que jusqu’à aujourd’hui encore, il n’existe pas de méthode générale pour le calcul des noyaux de Volterra, bien que beaucoup de méthodes ont depuis une soixantaine d’années, pu être développées, et montré leur efficacité dans plusieurs domaines, notamment si les conditions d’estimation pour les systèmes non linéaires à identifier sont plutôt favorables [Singh and Chatterjee, 2011].

Dans la section (3.3), nous avons évoqué la difficulté en pratique, pour la résolution de l’équation de Wiener-Hopf, liée à l’estimation du vecteur d’autocorrélation de l’entrée du filtre de Wiener  $\mathbf{R}_x$  et de la matrice d’intercorrélacion entre l’entrée et le signal désiré  $\mathbf{R}_x$ . De plus, les propriétés statistiques de l’entrée et du signal désiré ne sont pas connues, et l’exigence en calculs pour l’inversion de la matrice  $\mathbf{R}_x$  n’est pas à négliger, tel que pour une matrice de taille  $N \times N$ , la complexité en temps de calcul est de  $O(N^3)$  [Ogunfunmi, 2007].

Cependant, ces écueils peuvent être évités au cas où l’entrée du filtre et le signal désiré sont ergodiques, ce qui permet d’utiliser des moyennes temporelles, que l’on peut calculer à l’aide de méthodes adaptatives pour l’estimation de  $\mathbf{R}_x$  et  $\mathbf{R}_{dx}$  [Diniz, 2008].

Ces méthodes adaptatives développées depuis le début des années 1960, notamment suite aux travaux du professeur américain en génie électrique Bernard Widrow, sont désormais un outil puissant du traitement de signal, grâce au développement constant de la puissance de calcul des processeurs de traitement numérique des signaux. Au fait, un filtre adaptatif étant l’implémentation d’une méthode adaptative, qui est un filtre généralement numérique capable de modifier sa fonction de transfert pendant l’acquisition des échantillons du signal d’entrée, en fonction d’un algorithme d’optimisation. Les filtres adaptatifs sont surtout utilisés dans un fonctionnement en temps réel, où leurs

paramètres estimés évoluent continuellement de façon récursive au sens d'un certain critère d'optimisation, en vue d'atteindre un besoin de performance donné.

L'application de ces filtres adaptatifs est fondamentalement dictée par le choix des signaux appropriés comme signaux d'entrée, et le choix du signal désiré [Diniz, 2008]. Les filtres adaptatifs comptent plusieurs exemples d'application, dont le nombre ne cesse d'augmenter dû à leurs succès. Parmi ces applications, on peut citer [Diniz, 2008] :

- annulation d'écho ;
- égalisation des canaux dispersifs ;
- identification du système ;
- amélioration du signal ;
- annulation du bruit ;
- prédiction de signaux.

L'identification des systèmes représente l'une des principales applications des filtres adaptatifs, utilisé dans le cadre de la modélisation de systèmes inconnus en absence de connaissance *a priori*. La Figure (3.5), représente le processus d'identification à l'aide d'un filtre adaptatif, dont le but est d'estimer les coefficients du filtre variable  $w(n)$ , en utilisant le signal d'entrée  $x(n)$  et un ajustement des coefficients fourni par l'algorithme d'adaptation. L'algorithme d'adaptation est basé sur un critère d'optimisation utilisant l'entrée  $x(n)$  et l'erreur  $e(n) = d(n) - y(n)$ , qui tend à minimiser une fonction de coût qui dépend de l'erreur, jusqu'à atteindre la solution optimale au sens de Wiener qui est la base de tous les filtres adaptatifs.

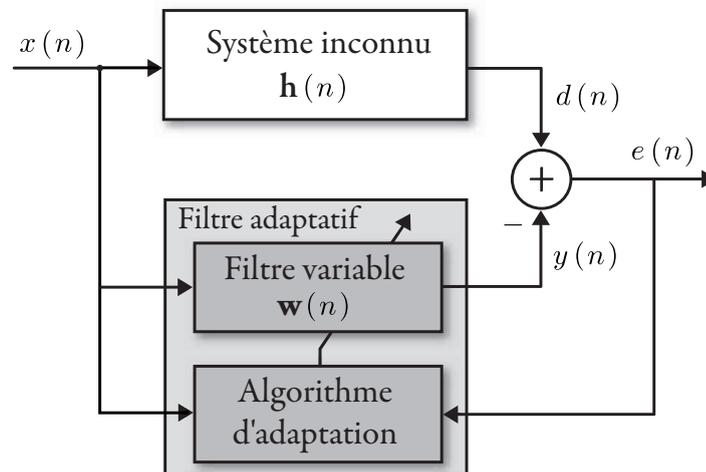


FIGURE 3.5 – Identification d'un système inconnu à l'aide d'un filtre adaptatif.

L'aspect procédural de l'identification a été largement abordé dans le premier chapitre, en l'occurrence la section (1.6.5) traitant l'estimation paramétrique de l'identification, où nous avons souligné l'importance des méthodes d'estimation récursives pour les systèmes non linéaires. Dans les situations où les systèmes dynamiques non linéaires sont variant dans le temps, ou les mesures statistiques de leurs signaux sont inconnues ou difficilement quantifiables, l'estimation non linéaire à l'aide des filtres adaptatifs est requise.

Les méthodes adaptatives employées ainsi avec le modèle de Volterra, s'imposent et

sont largement les plus utilisées pour l'identification des systèmes non linéaires pour les raisons suivantes :

- les méthodes adaptatives sont une alternative à la résolution analytique de l'équation de Wiener-Hopf, afin de trouver la solution exacte de Wiener, qui requiert le calcul de l'inverse de la matrice d'entrée  $\mathbf{R}_x$  ;
- lorsque l'ordre du système non linéaire est inconnu [Singh and Chatterjee, 2011] ;
- lorsque les paramètres du système non linéaire varient dans le temps [Budura, 2005] ;
- la sortie de la série de Volterra est linéaire par rapport coefficients des noyaux, ce qui permet d'étendre plusieurs concepts du filtrage linéaire au filtrage non linéaire et polynomial, et ainsi facilite l'implémentation des filtres de Volterra [Budura, 2005; Diniz, 2008; Singh and Chatterjee, 2011] ;

Cependant, les désavantages liés à l'implémentation des filtres de Volterra, qui ont été énumérés dans le premier chapitre, demeurent les mêmes pour les filtres de Volterra adaptatifs, ce qui exige une attention accrue dans le choix de l'ordre de la série, de l'étendue de mémoire et de la structure des noyaux.

Dans ce contexte du filtrage de Volterra adaptatif, il faut préciser que le filtre variable représenté dans la Figure (3.5), faisant partie du filtre adaptatif, représente schématiquement l'ensemble des noyaux de Volterra au nombre de l'ordre non-linéarité du système considéré. Le choix de la structure des noyaux dans le modèle de Volterra occupe une place importante dans la topologie du filtre de Volterra adaptatif, car déterminant pour l'exactitude du modèle développé, sa stabilité et sa convergence. D'autre part, l'algorithme d'adaptation constitue l'autre bloc essentiel dans le filtre adaptatif. Son rôle est de mettre en œuvre une procédure qui permet, à partir du signal d'entrée et du signal d'erreur, d'estimer et de mettre à jour les coefficients du filtre variable, basée sur une fonction de coût choisie. Le choix de la structure des noyaux de Volterra, et celui des algorithmes d'adaptation feront l'objet des sections suivantes.

### 3.5 Choix de la structure des noyaux de Volterra

Les noyaux de Volterra sont le principal résultat de la procédure d'identification basé sur le filtre de Volterra adaptatif. Comme ils sont une sorte de réponse impulsionnelle non linéaire du système dynamique à identifier, c'est d'eux que dépend l'exactitude du modèle développé.

Ainsi, ayant opté pour le modèle de Volterra pour la représentation de la faible non-linéarité d'un système dynamique, et en absence d'une connaissance *a priori* sur le système à identifier, trois principales structures des noyaux de Volterra s'offrent pour son implémentation :

- filtres à réponse impulsionnelle finie FIR ;
- filtres à réponse impulsionnelle infinie IIR ;
- filtres à structures à blocs tels que celle qui ont été énumérées dans la section (1.8.4).

Le choix d'une structure parmi celles citées précédemment, est conditionné par plusieurs facteurs :

- le degré de stabilité recherché : la stabilité fait la qualité des noyaux ;

- la rapidité de convergence requise : une convergence rapide permet l'augmentation de l'ordre des noyaux ;
- l'ordre de non-linéarité : dont dépend la qualité des noyaux et celle du modèle en général ;
- la facilité d'implémentation ;
- la sensibilité aux erreurs ;
- la distorsion de la phase.

Ainsi, un choix porté sur une structure FIR pour les noyaux de Volterra, dont les coefficients sont estimés selon un filtrage optimal au sens de Wiener, c.-à-d., avec la MMSE comme critère d'optimisation, implique un développement théorique identique à celui de la section (1.6.5). Un choix combiné MSE-FIR entraîne une fonction de coût quadratique par rapport aux coefficients du filtre optimal, et permet une solution de Wiener unique [Ogunfunmi, 2007].

Cependant, l'option d'une combinaison MSE-IIR, donnerait en général une fonction de coût non quadratique, avec de nombreux minima [Ogunfunmi, 2007]. De surcroît, l'on est surtout découragé par les désavantages classiques des filtres IIR, abondamment abordés dans la littérature de traitement de signal en termes notamment de, manque de stabilité, convergence lente, sensibilité au bruit et distorsion de la phase. Toutefois, cela n'empêche de les utiliser en cas d'un très grand nombre de coefficients des noyaux, là où une structure FIR représente un net désavantage compte tenu de sa complexité qui s'accroît avec l'ordre.

Enfin, les noyaux de Volterra peuvent prendre une structure basée sur les modèles en blocs, où les noyaux tentent de représenter la non-linéarité du système dynamique à l'aide d'une décomposition en un bloc linéaire dynamique  $L$  avec un autre bloc non linéaire sans mémoire  $N$ . Ces configurations aboutissent vers des modèles tels que le modèle de Hammerstein et celui de Wiener, qui ont le principal avantage de permettre une certaine simplification du modèle de Volterra, en réduisant sa complexité paramétrique, mais au prix de disposer d'un minimum de connaissance *a priori* du système à identifier. Pour cette raison on les classe, à juste titre dans la catégorie des modèles spécifiques ou boîte grise.

Selon [Diniz, 2008], une structure FIR est le choix le plus simple si l'on compte estimer les coefficients du filtre de Wiener, à l'aide d'algorithmes adaptatifs. Par extension, des noyaux de Volterra structurés suivant une topologie FIR constitueraient une option intéressante pour pouvoir tirer profit des avantages connus des filtres FIR, parmi lesquels :

- une stabilité naturelle et inconditionnelle ;
- une flexibilité mathématique ;
- une sensibilité réduite aux erreurs de quantification que les filtres IIR ;
- sont à phase linéaire, s'ils sont symétriques ;
- pas de distorsion de la phase ;
- simple implémentation, et possibilité d'un traitement en temps réel.

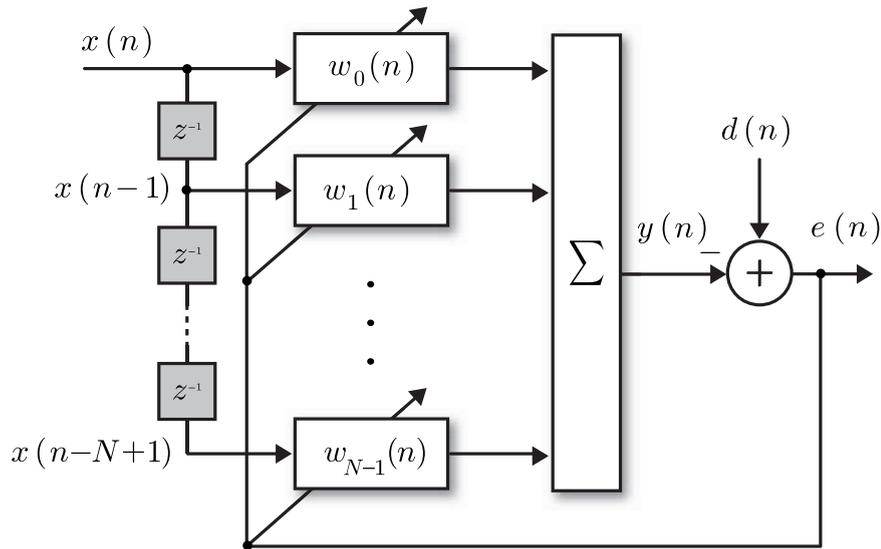


FIGURE 3.6 – Noyau de Volterra en topologie filtre de Wiener avec une structure FIR.

La Figure (3.6) ci-dessus, illustre la topologie d'un noyau de Volterra sous forme de filtre de Wiener en structure FIR. La sortie de ces noyaux est celle des filtres de Wiener traités dans la section précédente :

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} w(n) x(n-k) = \mathbf{w}^T(n) \mathbf{x}(n) \quad (3.25)$$

où  $\mathbf{x}(n) = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-N+1)]^T$  est le vecteur d'entrée en ligne à retard,  $\mathbf{w}(n) = [w_0(n), w_1(n), \dots, w_{N-1}(n)]^T$  est le vecteur des coefficients du noyau, et  $y(n)$  est l'échantillon estimé à la sortie du noyau.

### 3.6 Algorithmes non linéaires d'adaptation

Dans le filtre de Volterra adaptatif, l'algorithme d'adaptation a pour rôle d'estimer les coefficients des différents noyaux de Volterra de manière récursive, au sens d'un certain critère d'optimisation, le plus souvent du type moindres carrés [Najim, 1998]. Concrètement, l'algorithme d'adaptation est alimenté par les échantillons du signal d'entrée et l'erreur estimée obtenue en soustrayant la sortie globale de tous les noyaux de Volterra  $y(n)$ , de la réponse du système réel à identifier  $d(n)$ . Le critère d'optimisation est choisi parmi ceux du Tableau (3.1), afin de minimiser une certaine fonction de coût appropriée, dont le but est d'optimiser les coefficients des noyaux au sens de Wiener, en réduisant l'erreur de prédiction à son minimum afin d'atteindre la solution de l'équation de Wiener-Hopf, qui coïnciderait alors avec les coefficients optimaux des noyaux de Volterra.

Le choix de l'algorithme d'adaptation est déterminé par [Diniz, 2008; Najim, 1998; Ogunfunmi, 2007] :

- la rapidité de convergence : elle est liée au nombre d'itérations requises pour atteindre la solution optimale de Wiener ;
- la stabilité des coefficients estimés ;

- la complexité et la difficulté de mise en œuvre ;
- la facilité d'implémentation ;
- la capacité de poursuite des variations des signaux d'entrée (tracking) ;
- l'absence ou présence de bruit ;
- la robustesse : c'est l'insensibilité de la fonction de coût (estimateur) aux déviations des valeurs des échantillons<sup>1</sup> des différents signaux utilisés dans l'algorithme d'adaptation, afin de garder une qualité identique du modèle à la solution optimale<sup>2</sup>.

A la lumière de tous ces facteurs déterminants dans le choix de l'algorithme d'adaptation, deux grandes classes d'algorithmes se sont imposées au fil des années, à savoir, l'algorithme du gradient stochastique ou LMS (Least Mean Squares), et l'algorithme des moindres carrés récursifs ou RLS (Recursive Least Squares). Les deux algorithmes LMS et RLS sont les principaux algorithmes que nous allons utiliser dans l'application de cette thèse, feront l'objet des sections suivantes.

### 3.6.1 Algorithme du gradient stochastique (LMS)

#### 3.6.1.1 Algorithme LMS pour un système linéaire

L'algorithme adaptatif LMS est une méthode destinée à approximer la solution de l'équation de Wienr-Hopf, sans la possession d'une connaissance concernant la matrice d'autocorrélation de l'entrée, ni la matrice d'intercorrélacion entre le signal désiré et le signal d'entrée. L'algorithme LMS a été inventé par B. Widrow et M. E. Hoff en 1959, et il tient une place principale dans la catégories des algorithmes de gradient stochastiques [Zaknich, 2005; Zhao, 2009].

Avant d'aborder le formalisme de l'algorithme LMS, il est plus convenu de s'intéresser à la méthode d'optimisation qui lui sert de base, appelée algorithme du gradient.

En considérant la Figure (3.3), on peut remarquer aisément la convexité de la surface décrite par la fonction MSE  $J_{MSE}(\mathbf{w})$  [Zhao, 2009]. D'autre part, on suppose que la fonction MSE  $J_{MSE}(\mathbf{w})$  est continuellement différentiable, la solution optimale a son minimum satisfiera [Vega and Rey, 2013] :

$$J(\mathbf{w}_{opt}) \leq J(\mathbf{w}), \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}^L \quad (3.26)$$

L'idée est de proposer une méthode itérative, qui recherche la solution optimale, ou géométriquement la position de la MMSE dans la surface de performance, en suivant le sens opposé du vecteur gradient. Cette recherche du MMSE s'accompagne par la création d'un vecteur  $\mathbf{w}$ , qui démarre à partir d'une condition initiale  $w(0)$ , de sorte que les valeurs associées de la fonction  $J_{MSE}(\mathbf{w})$  conduisent à une valeur décroissante, c.-à-d.,  $J_{MSE}(\mathbf{w}_{n+1}) < J_{MSE}(\mathbf{w}_n)$  [Najim, 1998; Vega and Rey, 2013]. L'évaluation du vecteur gradient  $\nabla J_{MSE}(\mathbf{w})$  de cette fonction, montre qu'il prend la direction opposée à celle de la MMSE (vers le haut de la surface dans la Figure (3.3)) [Zhao, 2009].

---

1. On parle de données aberrantes ou de résidus aberrants (outliers) par opposition aux données correctes (inliers) : qui sont des déviations atypiques bien éloignées d'un ordre de grandeur dominant des valeurs des échantillons d'un processus donné [Toumazou et al., 1995; Zhao, 2009].

2. Il faut souligner que les méthodes basées sur les moindres carrés sont les moins robustes, au profit d'autres méthodes plus robustes basées par exemple, sur le maximum de vraisemblance ou la médiane [Toumazou et al., 1995].

Ainsi, en ayant un coefficient donné  $\mathbf{w}_n$  à l'étape  $n$ , l'objectif est d'avoir un meilleur ajustement en incrémentant  $\mathbf{w}_n$  dans la direction opposée du vecteur gradient de la MSE, et la minimisation de la fonction MSE se fait de manière récursive, jusqu'à obtenir la solution de Wiener à l'aide de la formule d'ajustement récursive suivante [Haykin, 1996; Mathews, 1991; Najim, 1998; Toumazou et al., 1995] :

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n - \frac{1}{2}\mu \frac{\partial J_{MSE}(\mathbf{w}_n)}{\partial w_n} \quad (3.27)$$

Il faut indiquer, qu'il existe une autre version de la formule d'ajustement récursive (Eq. (3.27)), différente par l'absence du facteur  $1/2$  du terme du gradient, utilisé par certains auteurs, et où la différence n'affecte en rien le traité de l'algorithme LMS en sa globalité, à l'exception des conditions de convergence et de stabilité qui seront spécifiques à chaque type de formule. Par exemple les auteurs [Diniz, 2008; Hayes, 1996; Poularikas and Ramadan, 2006; Zaknich, 2005], utilise cette autre variante de la formule d'ajustement récursive, qui s'écrit :

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n - \mu \frac{\partial J_{MSE}(\mathbf{w}_n)}{\partial w_n} \quad (3.28)$$

où  $n$  désigne le nombre d'itérations,  $\mu$  est une constante positive appelée pas d'adaptation (step-size adaptation), elle représente le pas de l'ajustement des coefficients du filtre variable dans le sens opposé du vecteur gradient.

En utilisant  $\mathbf{w}_n$  dans la fonction MSE (Eq. (3.10)), et après le calcul de sa dérivée, cela donne :

$$\frac{\partial J_{MSE}(\mathbf{w}_n)}{\partial w_n} = 2\mathbf{R}_x \mathbf{w}_n - 2\mathbf{R}_{dx} \quad (3.29)$$

En remplaçant le vecteur gradient dans (Eq. (3.27)), on a :

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n + \mu (\mathbf{R}_{dx} - \mathbf{R}_x \mathbf{w}_n) \quad (3.30)$$

Cette formule d'ajustement est caractéristique de l'**algorithme du gradient** (Gradient descent) ou appelé d'**algorithme de la plus forte pente** (steepest descent).

L'algorithme LMS est considéré comme une estimation stochastique simplifiée de l'algorithme du gradient, où le pas d'adaptation ou encore appelé le taux de convergence est choisi de façon aléatoire dans des conditions données.

En pratique, l'estimation du vecteur gradient de la MSE est une entreprise ardue, ce qui nous oriente vers l'utilisation du vecteur gradient instantané<sup>1</sup>. Il est donné par :

---

1. Rappelons que,  $J_{MSE}(\mathbf{w})$  est l'espérance de  $e(n)^2$ , ainsi en découle naturellement que  $e(n)^2$  soit la valeur instantanée de  $J_{MSE}(\mathbf{w})$  notée  $\hat{J}_{MSE}(\mathbf{w}_n)$ .

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \hat{J}_{MSE}(\mathbf{w}_n)}{\partial w_n} &= \frac{\partial e_n^2}{\partial w_n} \\
 &= \frac{\partial (d_n - \mathbf{w}_n^T \mathbf{x}_n)^2}{\partial w_n} \\
 &= \frac{\partial \left( d_n^2 - 2d_n \mathbf{w}_n^T \mathbf{x}_n + (\mathbf{w}_n^T \mathbf{x}_n)^2 \right)}{\partial w_n} \\
 &= -2d_n \mathbf{x}_n + 2\mathbf{x}_n^2 \mathbf{w}_n^T \\
 &= -2\mathbf{x}_n (d_n - \mathbf{x}_n \mathbf{w}_n^T) \\
 &= -2e_n \mathbf{x}_n
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

L'emploi de ce vecteur gradient stochastique dans la règle de mise à jour des coefficients (Eq. (3.27)) conduit à :

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n + \mu e_n \mathbf{x}_n \tag{3.32}$$

C'est la forme de mise à jour du fameux algorithme LMS. Le vecteur des coefficients initial  $\mathbf{w}_0$  est établi sur la base de la connaissance *a priori* du système. Typiquement, il est fixé à zéro lorsqu'il y a une absence de telles connaissances. Pour chaque itération, l'erreur d'estimation est calculée, le vecteur des coefficients suivant est obtenu en ajoutant le terme  $\mu e_n \mathbf{x}_n$  à l'estimation des coefficients actuels. L'algorithme LMS est résumé ci-après :

**ALGORITHME 3.1 – Algorithme LMS.**

---

**Notations :**

- $\mathbf{x}(n) = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-L+1)]^T$  vecteur d'entrée ( $L \times 1$ ) à l'étape  $n$
- $\mathbf{w}(n) = [w_0(n), w_1(n), \dots, w_{L-1}(n)]^T$  vecteur des coefficients ( $L \times 1$ ) à l'étape  $n$
- $d(n)$  : signal désiré à l'étape  $n$
- $y(n)$  : signal de sortie estimé du filtre à l'étape  $n$
- $\mu$  : pas d'adaptation

**Initialisation :**

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{w}(0) = [0, 0, \dots, 0]^T$$

**Calcul :** Pour chaque instant  $n = 1, 2, \dots, L$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{w}(n+1) &= \mathbf{w}(n) + \mu e(n) \mathbf{x}(n) \\
 y(n) &= \mathbf{w}^T(n) \mathbf{x}(n) \\
 e(n) &= d(n) - y(n)
 \end{aligned}$$


---

**a. Convergence en moyenne**

On définit le vecteur d'erreur des coefficients du filtre, ou l'erreur paramétrique, comme suit :

$$\tilde{\mathbf{w}}_n = \mathbf{w}_n - \mathbf{w}_{opt} \quad (3.33)$$

En remplaçant l'égalité trouvée précédemment  $\mathbf{R}_x \mathbf{w}_{opt} = \mathbf{R}_{dx}$  dans la formule d'ajustement (Eq. (3.30)), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{w}}_{n+1} &= \mathbf{w}_{n+1} - \mathbf{w}_{opt} \\ &= \mathbf{w}_n + \mu [\mathbf{R}_{dx} - \mathbf{R}_x \mathbf{w}_n] - \mathbf{w}_{opt} \\ &= \tilde{\mathbf{w}}_n + \mu [\mathbf{R}_x \mathbf{w}_{opt} - \mathbf{R}_x \mathbf{w}_n] \\ &= \tilde{\mathbf{w}}_n + \mu \mathbf{R}_x [\mathbf{w}_{opt} - \mathbf{w}_n] \\ &= (\mathbf{I} - \mu \mathbf{R}_x) \tilde{\mathbf{w}}_n \end{aligned} \quad (3.34)$$

En outre, il convient de noter que la matrice d'autocorrélation admet une décomposition en éléments propres, de la forme suivante :

$$\mathbf{R}_x = \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^T \quad (3.35)$$

où  $\mathbf{\Lambda}$  est la matrice diagonale déterminée par les valeurs propres  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{L-1}$  de  $\mathbf{R}_x$ , et  $\mathbf{Q}$  étant la matrice unitaire.

En utilisant la dernière décomposition dans (Eq. (3.35)), avec l'orthogonalité de  $\mathbf{Q}$ , à savoir,  $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$ , on écrit :

$$\tilde{\mathbf{w}}_{n+1} = (\mathbf{I} - \mu \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^T) \tilde{\mathbf{w}}_n \quad (3.36)$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^T \tilde{\mathbf{w}}_{n+1} &= \mathbf{Q}^T (\mathbf{I} - \mu \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^T) \tilde{\mathbf{w}}_n \\ &= \mathbf{I} \mathbf{Q}^T \tilde{\mathbf{w}}_n - \mu \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^T \tilde{\mathbf{w}}_n \\ &= (\mathbf{I} - \mu \mathbf{\Lambda}) \mathbf{Q}^T \tilde{\mathbf{w}}_n \end{aligned} \quad (3.37)$$

Considérons maintenant un vecteur  $\tilde{\mathbf{w}}'_n$  obtenu par la transformation linéaire suivante :

$$\tilde{\mathbf{w}}'_n = \mathbf{Q}^T \tilde{\mathbf{w}}_n \quad (3.38)$$

il vient ainsi :

$$\tilde{\mathbf{w}}'_{n+1} = (\mathbf{I} - \mu \mathbf{\Lambda}) \tilde{\mathbf{w}}'_n \quad (3.39)$$

Dans la mesure où  $\mathbf{I}$  est une matrice diagonale, on pourra ainsi écrire pour chaque élément  $i$  du vecteur d'erreur paramétrique :

$$\tilde{w}'_{i,n+1} = (1 - \mu\lambda_i) \tilde{w}'_{i,n} \quad (3.40)$$

Nous pouvons facilement remarquer dans cette relation à caractère récursif, qu'elle peut être exprimée en série géométrique de raison  $(1 - \mu\lambda_i)$  comme suit :

$$\tilde{w}'_{i,n+1} = (1 - \mu\lambda_i)^n \tilde{w}'_{i,n} \quad (3.41)$$

Par conséquent, l'algorithme d'adaptation converge lorsque la limite de l'erreur paramétrique  $\tilde{w}'_{i,n+1}$  tend vers zéro quand  $n$  tend vers l'infini :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\tilde{w}'_{i,n+1}) \rightarrow 0 \quad (3.42)$$

Ce qui signifie que le vecteur  $\tilde{\mathbf{w}}'$  tend vers zéro et le filtre variable converge vers  $\mathbf{w}_{opt}$ , c.-à-d., la convergence aura lieu si :

$$-1 < 1 - \mu\lambda_i < +1, \quad \forall i \quad (3.43)$$

d'où

$$0 < \mu < \frac{2}{\lambda_i}, \quad \forall i \quad (3.44)$$

Si l'on veut que cette condition soit valable pour toutes les valeurs de  $\lambda$ , ainsi doit-on introduire une valeur maximale des valeurs propres de  $\mathbf{R}_x$ , notée  $\lambda_{max}$ , dans la condition précédente, pour qu'elle devienne :

$$0 < \mu < \frac{2}{\lambda_{max}} \quad (3.45)$$

Nous pouvons à partir de cette dernière relation, tenter de déterminer une valeur optimale  $\mu_{opt}$  du pas d'adaptation, permettant de déterminer la vitesse de convergence globale de l'algorithme d'adaptation. En partant de la relation (3.43), équivalente à  $|1 - \mu\lambda_i| < 1$ , le problème serait alors de minimiser la plus grande valeur de la quantité  $|1 - \mu\lambda_i|$ , demeurant toutefois inférieure à 1, ce qui est prévu mathématiquement par l'opérateur minimax :

$$\mu_{opt} = \arg \min_i \max_i (|1 - \mu\lambda_i|) \quad (3.46)$$

$$\text{Pour } \mu > \mu_{opt} \quad : \quad 1 - \mu\lambda_i < 1 - \mu_{opt}\lambda_i \quad \Rightarrow \quad \max (|1 - \mu\lambda_i|) = \mu\lambda_{max} - 1$$

$$\text{Pour } \mu < \mu_{opt} : 1 - \mu\lambda_i > 1 - \mu_{opt}\lambda_i \Rightarrow \max(|1 - \mu\lambda_i|) = 1 - \mu\lambda_{min}$$

où  $\lambda_{min}$  est la valeur minimale des valeurs propres de  $\mathbf{R}_x$ .

$$\text{Ainsi, pour : } \mu = \mu_{opt} \Rightarrow 1 - \mu\lambda_{min} = \mu\lambda_{max} - 1$$

Ce qui donne finalement la valeur optimale du pas d'adaptation :

$$\mu_{opt} = \frac{2}{\lambda_{min} + \lambda_{max}} \quad (3.47)$$

### b. Convergence en moyenne quadratique

D'autre part, en vue d'assurer davantage de stabilité pour l'algorithme d'adaptation, et naturellement une meilleure convergence pour les coefficients du filtre, nous allons considérer la trace de la matrice d'entrée  $\mathbf{R}_x$  lorsque l'entrée est un signal blanc gaussien [Hayes, 1996; Najim, 1998]

$$\text{tr}(\mathbf{R}_x) = \sum_{i=1}^L \lambda_i \quad (3.48)$$

Les valeurs propres  $\lambda_i$  sont réelles et positives, car la matrice  $\mathbf{R}_x$  est symétrique définie positive, ce qui permet d'écrire :

$$\text{tr}(\mathbf{R}_x) \geq \lambda_{max} \quad (3.49)$$

d'où

$$\frac{2}{\lambda_{max}} \geq \frac{2}{\sum_{i=1}^L \lambda_i} \quad (3.50)$$

Ainsi la condition sur le pas d'adaptation devient :

$$0 < \mu < \frac{2}{\sum_{i=1}^L \lambda_i} \leq \frac{2}{\lambda_{max}} \quad (3.51)$$

Dans la mesure où  $x(n)$  est supposé stationnaire, ainsi la matrice  $\mathbf{R}_x$  est une matrice de Toeplitz, et on peut écrire :

$$\sum_{i=1}^L \lambda_i = \text{tr}(\mathbf{R}_x) = LR_x(0) = LE[x^2] \quad (3.52)$$

Finalement :

$$0 < \mu < \frac{2}{LE[x^2]} = \frac{2}{L\sigma_x^2} \leq \frac{2}{\lambda_{max}} \quad (3.53)$$

où  $\sigma_x^2$  représente la puissance moyenne du signal d'entrée  $x(n)$ , ce qui rend cette condition pratique et facilement estimable, assurant ainsi une convergence dite en moyenne quadratique.

### 3.6.1.2 Algorithme LMS pour modèle de Volterra

On considère le signal désiré  $d(n)$ , qui est la réponse du système dynamique réel à identifier, que l'on veut estimer à l'aide de  $y(n)$ , qui est la réponse du filtre de Volterra adaptatif développée à l'aide d'une série de Volterra causale à noyaux symétriques, d'ordre de non-linéarité  $N$ , de mémoire  $M$ , et qui utilise les  $M$  échantillons les plus récents du signal d'entrée  $x(n)$ , tel que :

$$\begin{aligned}
 y(n) = & \sum_{i_1=0}^{M-1} w_1(i_1) x(n-i_1) + \sum_{i_1=0}^{M-1} \sum_{i_2=i_1}^{M-1} w_2(i_1, i_2) x(n-i_1) x(n-i_2) + \dots \\
 & + \sum_{i_1=0}^{M-1} \sum_{i_2=i_1}^{M-1} \dots \sum_{i_N=i_{N-1}}^{M-1} w_N(i_1, i_2, \dots, i_N) \\
 & x(n-i_1) x(n-i_2) \dots x(n-i_N)
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

où  $w_p(i_1, i_2, \dots, i_p)$  avec  $p = 1, 2, \dots, N$ , est le noyau de Volterra d'ordre  $p$ , composé de  $p$  coefficients. L'objectif de l'algorithme LMS est d'ajuster de façon itérative les coefficients des noyaux de Volterra qui représente le filtre variable du filtre de Volterra adaptatif, de sorte à réduire la fonction MSE à son minimum correspondant à la solution optimale de Wiener.

La règle de mise à jour des coefficients (3.27), devient pour le modèle de Volterra [Mathews, 1991] :

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu e_n \mathbf{x}(n) \tag{3.55}$$

où si l'on considère une série de Volterra de second ordre,  $\mathbf{x}(n)$  est le vecteur d'entrée donné par :

$$\mathbf{x}(n) = \begin{bmatrix} x(n) \\ x(n-1) \\ \vdots \\ x(n-M+1) \\ x^2(n) \\ x(n)x(n-1) \\ \vdots \\ x(n)x(n-M+1) \\ \vdots \\ x(n-M+1)x(n-M) \\ x^2(n-M+1) \end{bmatrix} \tag{3.56}$$

et  $\mathbf{w}^T(n)$  est la transposée du vecteur  $\mathbf{w}(n)$  des coefficients des noyaux de Volterra du filtre, donnée par :

$$\mathbf{w}^T(n) = [w_1(0), w_1(1), \dots, w_1(M-1), w_2(0,0), w_2(0,1), \dots, w_2(M-1, M-1)] \quad (3.57)$$

Ainsi, la mise à jour des coefficients de noyaux, s'écrit alors [Diniz] :

$$w_{i_1}(n+1) = w_{i_1}(n) + \mu_1 e_n x(n - i_1) \quad (3.58)$$

$$w_{i_1, i_2}(n+1) = w_{i_1, i_2}(n) + \mu_2 e_n x(n - i_1) x(n - i_2) \quad (3.59)$$

où  $i_1, i_2 = 0, 1, \dots, N$

L'algorithme LMS pour modèle de Volterra se résume comme suit :

**ALGORITHME 3.2** – Algorithme LMS pour modèle de Volterra.

---

**Notations :**

$\mathbf{x}(n) = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-L+1)]^T$  vecteur d'entrée ( $L \times 1$ ) à l'étape  $n$

$\mathbf{w}(n) = [w_0(n), w_1(n), \dots, w_{L-1}(n)]^T$  vecteur des coefficients ( $L \times 1$ ) à l'étape  $n$

$d(n)$  : signal désiré à l'étape  $n$

$y(n)$  : signal de sortie estimé du filtre à l'étape  $n$

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_2 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \mu_2 \end{bmatrix} : \text{pas d'adaptation}$$

**Initialisation :**

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{w}(0) = [0, 0, \dots, 0]^T$$

**Calcul :** Pour chaque instant  $n = 1, 2, \dots, L$

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu e(n) \mathbf{x}(n)$$

$$y(n) = \mathbf{w}^T(n) \mathbf{x}(n)$$

$$e(n) = d(n) - y(n)$$


---

Concernant la convergence et la stabilité de l'algorithme, les mêmes conditions déterminées précédemment demeurent valables, que l'on peut appliquer pour chaque pas d'adaptation des différents ordres de la série de Volterra considérée.

### 3.6.2 Algorithme des moindres carrés récursifs (RLS)

#### 3.6.2.1 Algorithme RLS pour un système linéaire

Il est certain que l'algorithme LMS ait de nombreuses propriétés avantageuses, cependant son inconvénient majeur réside dans sa convergence lente, qui limite son emploi dans des applications où une convergence est cruciale. Par conséquent, sur ce registre de la convergence, un autre algorithme s'est posé en antagoniste par rapport à l'algorithme LMS, est l'*algorithme des moindres carrés récursifs RLS* (Recursive Least Squares). Le concept d'estimation des moindres carrés tire son origine dans un compte rendu sur la mécanique des comètes, publié en 1805 par le mathématicien français Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833). Mais, c'est le physicien et mathématicien allemand Johann Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), qui en 1809 dans un travail publié sur le mouvement des corps célestes, a développé la méthode de façon rigoureuse en un outil statistique, capable de minimiser l'erreur de mesure dans plusieurs domaines de la science. Après un siècle et demi, l'algorithme RLS, s'appuyant sur les travaux antérieurs sur l'estimation des moindres carrés, fut inventé par le statisticien britannique Robin Lewis Plackett (1920 – 2009) en 1950 [Young, 2011]. Contrairement à l'algorithme LMS, l'algorithme RLS estime récursivement les coefficients du filtre en minimisant non pas la MSE, mais l'erreur de la somme des carrés pondérés WSSE, comme fonction de coût dépendant du signal d'entrée.

Nous nous intéressons à la conception d'un filtre adaptatif FIR de Wiener, afin de trouver les coefficients du filtre variable :

$$\mathbf{w}(n) = [w_0(n), w_1(n), \dots, w_{L-1}(n)]^T \quad (3.60)$$

qui permet de minimiser l'erreur de la somme des carrés pondérés WSSE, notée  $J_{WSSE}$  [Hayes, 1996; Haykin, 1996; Mathews, 1991; Ogunfunmi, 2007; Poularikas and Ramadan, 2006] :

$$J_{WSSE}(n) = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} e^2(i) \quad (3.61)$$

où  $0 < \lambda \leq 1$  est le facteur de pondération exponentiel, appelé *facteur d'oubli*, et

$$e(i) = d(i) - y(i) = d(i) - \mathbf{w}_n^T \mathbf{x}(i) \quad (3.62)$$

qui est l'erreur de prédiction, exprimant la différence entre le signal désiré  $d(i)$  et la sortie du filtre à l'instant  $i$ .

La minimisation de la fonction de coût  $J_{WSSE}$  à l'étape  $n$ , se ramène d'abord à trouver la dérivée de l'éq. (3.61) par rapport à  $w_n(k)$  avec  $k = 1, 2, \dots, L - 1$ . L'application de la dérivée, donne :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial J_{WSSE}(n)}{\partial w_n(k)} &= \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} e(i) \frac{\partial J_{WSSE}(n)}{\partial w_n(k)} \\
 &= \sum_{i=0}^n 2\lambda^{n-i} e(i) \frac{\partial e(i)}{\partial w_n} \\
 &= -\sum_{i=0}^n 2\lambda^{n-i} e(i) x(i-k)
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

L'égalisation de la dérivée avec zéro, et le remplacement par la relation de l'erreur (3.62) donne :

$$\sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} \left[ d(i) - \sum_{l=0}^{L-1} w_n(l) x(i-l) \right] x(i-k) = 0 \tag{3.64}$$

En faisant passer chaque terme avec les sommations des deux côtés de l'équation, cela donne :

$$\sum_{l=0}^{L-1} w_n(l) \left[ \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} x(i-l) x(i-k) \right] = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} d(i) x(i-k) \tag{3.65}$$

Cette expression peut être exprimée sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{R}_x(n) \mathbf{w}_n = \mathbf{R}_{dx}(n) \tag{3.66}$$

On en déduit :

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{R}_x^{-1}(n) \mathbf{R}_{dx}(n) \tag{3.67}$$

où  $\mathbf{R}_x$  est la matrice  $L \times L$  d'auocorrélation exponentiellement pondérée de l'entrée  $x(n)$  :

$$\mathbf{R}_{dx} = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} d(i) \mathbf{x}(i) \tag{3.68}$$

L'éq. (3.67) offre une solution unique pour déterminer le vecteur de coefficients du filtre qui minimise la fonction de coût  $J_{WSSE}$ . Comme nous l'avons fait pour l'algorithme LMS, l'idée est d'au lieu de calculer la solution de cette équation, nous allons déduire une solution récursive, en employant la relation suivante :

$$\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}(n-1) + \Delta \mathbf{w}(n-1) \tag{3.69}$$

où  $\Delta \mathbf{w}(n-1)$  est le facteur de correction à l'étape  $n-1$ .

Pour cela, exprimons d'abord la matrice d'intercorrélration  $\mathbf{R}_{dx}(n)$  en fonction de  $\mathbf{R}_{dx}(n-1)$  :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{dx}(n) &= \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} d(i) \mathbf{x}(i) \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^{n-i} d(i) \mathbf{x}(i) + \lambda^0 d(n) \mathbf{x}(n) \\
 &= \lambda \mathbf{R}_{dx}(n-1) + d(n) \mathbf{x}(n)
 \end{aligned} \tag{3.70}$$

où  $\mathbf{x}(n) = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-L+1)]^T$  est le vecteur des échantillons de l'entrée de dimension  $(L \times 1)$

De même, exprimons  $\mathbf{R}_x(n)$  en fonction de  $\mathbf{R}_x(n-1)$  par :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_x(n) &= \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} \mathbf{x}(i) \mathbf{x}^T(i) \\
 &= \lambda \mathbf{R}_x(n-1) + \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T(n)
 \end{aligned} \tag{3.71}$$

Intéressons-nous maintenant à l'inverse de la matrice d'autocorrélation  $\mathbf{R}_x(n)$ , où l'on va utiliser pour son calcul, l'identité matricielle de Woodbury<sup>1</sup>, ou encore appelée lemme d'inversion matricielle, en posant :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \lambda \mathbf{R}_x(n-1) \text{ est une matrice } (L \times L) \\
 \mathbf{U} &= \mathbf{x}(n) \text{ est un vecteur } (L \times 1) \\
 \mathbf{V} &= \mathbf{x}^T(n) \text{ est un vecteur } (1 \times L) \\
 \mathbf{C} &= \mathbf{I}_1 \text{ est la matrice identité } (1 \times 1)
 \end{aligned}$$

L'application de l'identité de la matrice de Woodbury donne :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_x^{-1}(n) &= [\lambda \mathbf{R}_x(n-1) + \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T(n)]^{-1} - \frac{\lambda^{-1} \mathbf{R}_x^{-1}(n-1) \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T(n) \lambda^{-1} \mathbf{R}_x^{-1}(n-1)}{1 + \mathbf{x}^T(n) \lambda^{-1} \mathbf{R}_x^{-1}(n-1) \mathbf{x}(n)} \\
 &= \lambda^{-1} \mathbf{R}_x^{-1}(n-1) - \frac{\lambda^{-2} \mathbf{R}_x^{-1}(n-1) \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T(n) \lambda^{-1} \mathbf{R}_x^{-1}(n-1)}{1 + \mathbf{x}^T(n) \lambda^{-1} \mathbf{R}_x^{-1}(n-1) \mathbf{x}(n)}
 \end{aligned} \tag{3.72}$$

---

1. Identité matricielle de Woodbury : Supposons  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{A}$  deux matrices  $n \times n$ ,  $\mathbf{U}$  une matrice  $n \times k$ ,  $\mathbf{C}$  une matrice  $k \times k$ , et  $\mathbf{V}$  une matrice  $k \times n$ . Si elles sont toutes définies positives est reliées par [Hayes, 1996; Haykin, 1996] :

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{UCV}$$

alors l'inverse de la matrice  $\mathbf{B}$  s'écrit :

$$\mathbf{B}^{-1} = (\mathbf{A} + \mathbf{UCV})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{U} (\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{VA}^{-1} \mathbf{U})^{-1} \mathbf{VA}^{-1}$$

Pour notre développement, on s'intéresse au cas particulier où  $\mathbf{C} = \mathbf{I}_1$  est la matrice identité, alors  $\mathbf{U}$  est un vecteur colonne, et  $\mathbf{V}$  est un vecteur ligne, noté  $\mathbf{V}^T$ . Alors l'identité devient :

$$(\mathbf{A} + \mathbf{UV}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{UV}^T \mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{V}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{U}}$$

Cette relation est utile lorsque  $\mathbf{A}$  et son inverse  $\mathbf{A}^{-1}$  sont connues, et on a besoin d'inverser des matrices de la forme  $\mathbf{A} + \mathbf{UV}^T$ .

En utilisant la notation conventionnelle de l'algorithme RLS, on écrit :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(n) &= \mathbf{R}_x^{-1}(n) \\ &= \lambda^{-1}\mathbf{P}(n-1) - \mathbf{k}(n)\mathbf{x}^T(n)\lambda^{-1}\mathbf{P}(n-1)\end{aligned}\quad (3.73)$$

où le vecteur gain de Kalman  $\mathbf{k}(n)$  est :

$$\begin{aligned}\mathbf{k}(n) &= \frac{\lambda^{-1}\mathbf{P}(n-1)\mathbf{x}(n)}{1 + \mathbf{x}^T(n)\lambda^{-1}\mathbf{P}(n-1)\mathbf{x}(n)} \\ &= \frac{\mathbf{P}(n-1)\mathbf{x}(n)}{\lambda + \mathbf{x}^T(n)\mathbf{P}(n-1)\mathbf{x}(n)}\end{aligned}\quad (3.74)$$

On écrit  $\mathbf{k}(n)$  dans une autre forme :

$$\begin{aligned}\mathbf{k}(n) \{1 + \mathbf{x}^T(n)\lambda^{-1}\mathbf{P}(n-1)\mathbf{x}(n)\} &= \lambda^{-1}\mathbf{P}(n-1)\mathbf{x}(n) \\ \mathbf{g}(n) + \mathbf{k}(n)\mathbf{x}^T(n)\lambda^{-1}\mathbf{P}(n-1)\mathbf{x}(n) &= \lambda^{-1}\mathbf{P}(n-1)\mathbf{x}(n)\end{aligned}\quad (3.75)$$

En soustrayant le second terme du côté gauche, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbf{k}(n) &= \lambda^{-1}\mathbf{P}(n-1)\mathbf{x}(n) - \mathbf{k}(n)\mathbf{x}^T(n)\lambda^{-1}\mathbf{P}(n-1)\mathbf{x}(n) \\ &= \lambda^{-1} [\mathbf{P}(n-1) - \mathbf{k}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{P}(n-1)] \mathbf{x}(n)\end{aligned}\quad (3.76)$$

En considérant la définition récursive de  $\mathbf{P}(n)$  on obtient :

$$\mathbf{k}(n) = \mathbf{P}(n)\mathbf{x}(n)\quad (3.77)$$

Ainsi la récursion continue comme suit :

$$\begin{aligned}\mathbf{w}(n) &= \mathbf{P}(n) \mathbf{R}_{dx}(n) \\ &= \lambda \mathbf{P}(n) \mathbf{R}_{dx}(n-1) + d(n)\mathbf{P}(n) \mathbf{x}(n)\end{aligned}\quad (3.78)$$

La seconde étape est déduite de la définition récursive de  $\mathbf{R}_{dx}(n)$ . Nous incorporons ensuite la définition récursive de  $\mathbf{P}(n)$  ensemble avec la forme alternative de  $\mathbf{k}(n)$  on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbf{w}(n) &= \lambda [\lambda^{-1}\mathbf{P}(n-1) - \mathbf{k}(n)\mathbf{x}^T(n)\lambda^{-1}\mathbf{P}(n-1)] \mathbf{R}_{dx}(n-1) + d(n)\mathbf{k}(n) \\ &= \mathbf{P}(n-1)\mathbf{R}_{dx}(n-1) - \mathbf{k}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{P}(n-1)\mathbf{R}_{dx}(n-1) + d(n)\mathbf{k}(n) \\ &= \mathbf{P}(n-1)\mathbf{R}_{dx}(n-1) + \mathbf{k}(n) [d(n) - \mathbf{x}^T(n)\mathbf{P}(n-1)\mathbf{R}_{dx}(n-1)]\end{aligned}\quad (3.79)$$

où, on reconnaît  $\mathbf{P}(n-1)\mathbf{R}_{dx}(n-1) = \mathbf{w}(n-1)$ , nous aboutirons à la relation de mise à jour suivante :

$$\begin{aligned}\mathbf{w}(n) &= \mathbf{w}(n-1) + \mathbf{k}(n)[d(n) - \mathbf{x}^T(n)\mathbf{w}(n-1)] \\ &= \mathbf{w}(n-1) + \alpha(n)\mathbf{k}(n)\end{aligned}\tag{3.80}$$

où  $\alpha(n) = d(n) - \mathbf{w}(n-1)\mathbf{x}^T(n)$  est l'*erreur a priori*, D'autre part, nous avons l'*erreur a posteriori* ; qui est l'erreur calculée après la mise à jour des coefficients du filtre :

$$e(n) = d(n) - \mathbf{w}(n)\mathbf{x}^T(n)$$

D'où l'on peut écrire le facteur de correction :

$$\Delta\mathbf{w}(n-1) = \alpha(n)\mathbf{k}(n)$$

L'algorithme RLS est résumé comme suit :

ALGORITHME 3.3 – Algorithme RLS.

---

**Notations :**

- $\mathbf{x}(n) = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-L+1)]^T$  vecteur d'entrée ( $L \times 1$ ) à l'étape  $n$
- $\mathbf{w}(n) = [w_0(n), w_1(n), \dots, w_{L-1}(n)]^T$  vecteur des coefficients ( $L \times 1$ ) à l'étape  $n$
- $d(n)$  : signal désiré à l'étape  $n$
- $y(n)$  : signal de sortie estimé du filtre à l'étape  $n$
- $\mathbf{P}(n)$  inverse de la matrice d'autocorrélation de  $x(n)$  à l'étape  $n$
- $\delta$  facteur de régularisation pour l'initialisation de  $\mathbf{P}(0)$
- $\mathbf{I}$  matrice identité ( $L \times L$ )
- $\mathbf{k}(n)$  : vecteur du gain de Kalman ( $L \times 1$ ) à l'étape  $n$
- $\alpha(n)$  : erreur *a priori* à l'étape  $n$
- $e(n)$  : erreur *a posteriori* à l'étape  $n$
- $\lambda$  : facteur d'oubli ( $0 \ll \lambda \leq 1$ )

**Initialisation :**

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(0) &= \mathbf{w}(0) = [0, 0, \dots, 0]^T \\ \mathbf{P}(0) &= \delta^{-1}\mathbf{I}\end{aligned}$$

**Calcul :** Pour chaque instant  $n = 1, 2, \dots, L$

$$\begin{aligned}\alpha(n) &= d(n) - \mathbf{w}(n-1)\mathbf{x}^T(n) \\ \mathbf{k}(n) &= \frac{\mathbf{P}(n-1)\mathbf{x}(n)}{\lambda + \mathbf{x}^T(n)\mathbf{P}(n-1)\mathbf{x}(n)} \\ \mathbf{w}(n) &= \mathbf{w}(n-1) + \alpha(n)\mathbf{k}(n) \\ \mathbf{P}(n) &= \frac{1}{\lambda} [\mathbf{P}(n-1) - \mathbf{k}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{P}(n-1)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(n) &= \mathbf{w}^T(n) \mathbf{x}(n) \\ e(n) &= d(n) - y(n) \end{aligned}$$


---

### a. Initialisation de l'algorithme RLS

L'initialisation de plusieurs paramètres de l'algorithme RLS est requise, notamment celle concernant les paramètres nécessitant un calcul ou une mise à jours récursifs, tels que le vecteur  $\mathbf{w}(n)$  et l'inverse de la matrice d'autocorrélation  $\mathbf{P}(n)$ .

En vue de la réalisation de cette initiation, Hayes [Hayes, 1996] propose deux approches. La première, commence par le calcul récursif des coefficients de la matrice d'autocorrélation selon l'éq. (3.71), ensuite le calcul de son inverse :

$$\left[ P(0) = \sum_{i=-N+1}^0 \lambda^{-i} \mathbf{x}(i) \mathbf{x}^T(i) \right]^{-1} \quad (3.81)$$

Nous évaluons ensuite le vecteur d'intercorrélaiton  $\mathbf{R}_{dx}(0)$  :

$$\mathbf{R}_{dx}(0) = \sum_{i=-N+1}^0 \lambda^{-i} d(i) \mathbf{x}(i) \quad (3.82)$$

L'initialisation de  $\mathbf{w}_0$  se fait en posant  $\mathbf{w}_0 = \mathbf{P}(0) \mathbf{R}_{dx}(0)$ .

L'avantage de cette méthode est que l'optimalité est préservée à chaque étape puisque l'algorithme RLS est initialisé à  $n = 0$  avec le vecteur  $\mathbf{w}_0$  qui minimise l'erreur de moindres carrés pondérés  $J_{WSSSE}(0)$ . Cependant il existe un inconvénient, résidant dans la nécessité d'une inversion directe  $\mathbf{R}_x(0)$ , requérant environ  $N^3$  opérations.

La seconde approche couramment employée dans l'algorithme RLS pour l'initialisation de la matrice d'autocorrélation est comme suit :

$$\mathbf{R}_x(0) = \delta \mathbf{I} \quad (3.83)$$

où  $\delta$  est une petite valeur constante positive, dont l'influence n'est pas trop déterminante dans l'algorithme, souvent prise  $\delta \ll 0,01\sigma_x^2$ .

Ce qui donne :

$$\mathbf{P}(0) = \delta^{-1} \mathbf{I} \quad (3.84)$$

Enfin, en absence d'une information *a priori*, le vecteur des coefficients du filtre s'initialise à zéro :

$$\mathbf{w}_0 = 0 \quad (3.85)$$

L'inconvénient de cette approche simple est son introduction d'un biais dans la solution des moindres carrés [Hayes, 1996; Haykin, 1996]. La section suivante abordera ce problème en traitant la convergence de l'algorithme RLS.

Il est à noter que dans l'algorithme RLS, si le facteur d'oubli  $\lambda = 1$ , l'algorithme RLS est dénommé **algorithme RLS à fenêtre croissante** (growing window RLS algorithm) [Hayes, 1996], et l'erreur de moindres carrés pondérés  $J_{WSSSE}(n)$  dans la relation (3.61), n'est autre que la somme des erreurs quadratiques. Cependant, si  $\lambda < 1$ , un poids exponentiellement décroissant est appliqué comme pondération aux erreurs passées, ainsi le biais tend vers zéro lorsque  $n$  croît, et l'algorithme tend vers la solution de Wiener. De plus, ceci est avantageux dans un contexte de signaux non stationnaires, où  $\lambda$  attribue un poids plus important aux erreurs actuelles au détriment des erreurs passées.

A la différence de l'algorithme LMS, l'algorithme RLS permet ainsi le calcul de la solution exacte à partir de son algorithme itératif.

### b. Convergence

Le filtre  $\mathbf{w}_n$  de l'algorithme RLS est dit convergeant en moyenne, si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}_n] = \mathbf{w}_{opt} \quad (3.86)$$

Afin de démontrer cela, on reconsidère l'éq. (3.80) peut être réécrite comme suit :

$$\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}(n-1) + \mathbf{R}_x^{-1}(n) \mathbf{x}(n) \alpha(n) \quad (3.87)$$

On peut écrire également :

$$\mathbf{w}(n) - \mathbf{w}_{opt}(n) = \mathbf{w}(n-1) + \mathbf{R}_x^{-1}(n) \mathbf{x}(n) \alpha(n) - \mathbf{w}_{opt}(n) \quad (3.88)$$

En utilisant le vecteur d'erreur paramétrique  $\tilde{\mathbf{w}}(n) = \mathbf{w}(n) - \mathbf{w}_{opt}(n)$ , et la définition de l'erreur *a priori*, la relation précédente devient :

$$\tilde{\mathbf{w}}(n) = \tilde{\mathbf{w}}(n-1) + \mathbf{R}_x^{-1}(n) \mathbf{x}(n) [d(n) - \mathbf{x}^T \mathbf{w}(n-1)] \quad (3.89)$$

En tenant en compte la relation triviale  $d(n) = \mathbf{w}_{opt}^T(n) \mathbf{x}(n)$ , la relation (3.88) devient :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{w}}(n) &= \tilde{\mathbf{w}}(n-1) + \mathbf{R}_x^{-1}(n) \mathbf{x}(n) [\mathbf{w}_{opt}^T(n) \mathbf{x}(n) - \mathbf{x}^T(n) \mathbf{w}(n-1)] \\ &= \tilde{\mathbf{w}}(n-1) + \mathbf{R}_x^{-1}(n) \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T [\mathbf{w}_{opt}^T(n) - \mathbf{w}^T(n-1)] \\ &= \mathbf{R}_x^{-1}(n) \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T [\mathbf{w}_{opt}(n) - \mathbf{w}(n-1)] - \tilde{\mathbf{w}}(n-1) \\ &= \tilde{\mathbf{w}}(n-1) - \mathbf{R}_x^{-1}(n) \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T \tilde{\mathbf{w}}(n-1) \end{aligned} \quad (3.90)$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned}
 E[\mathbf{R}_x(n)] &= \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} E[\mathbf{x}(i) \mathbf{x}^T(i)] \\
 &= \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} \mathbf{r}_x(n) \\
 &= \frac{1 - \lambda^n}{1 - \lambda} \mathbf{r}_x(n) \\
 &\approx \frac{1}{1 - \lambda} \mathbf{r}_x(n), \quad \text{si } n \text{ devient très grand}
 \end{aligned} \tag{3.91}$$

Rappelons que  $\mathbf{R}_x$  est la matrice d'autocorrélation exponentiellement pondérée de l'entrée, et  $\mathbf{r}_x$  est la matrice d'autocorrélation normale.

En prenant l'espérance mathématique de l'expression (3.90), on écrit :

$$E[\tilde{\mathbf{w}}(n)] = E[\tilde{\mathbf{w}}(n-1)] - E[\mathbf{R}_x^{-1}(n) \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T \tilde{\mathbf{w}}(n-1)] \tag{3.92}$$

En supposant que les échantillons d'entrée  $x(n)$  et les coefficients du filtre  $w(n)$  sont indépendants, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 E[\tilde{\mathbf{w}}(n)] &= E[\tilde{\mathbf{w}}(n-1)] - E[\mathbf{R}_x^{-1}(n) \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T] E[\tilde{\mathbf{w}}(n-1)] \\
 &= E[\tilde{\mathbf{w}}(n-1)] [1 - E[\mathbf{R}_x^{-1}(n) \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T]] \\
 &= E[\tilde{\mathbf{w}}(n-1)] [1 - E[\mathbf{R}_x^{-1}(n)] E[\mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T]] \\
 &= E[\tilde{\mathbf{w}}(n-1)] \left[ 1 - \frac{1 - \lambda}{\mathbf{r}_x(n)} \mathbf{r}_x(n) \right] \\
 &= \lambda E[\tilde{\mathbf{w}}(n-1)] \\
 &= \lambda^n E[\tilde{\mathbf{w}}(0)]
 \end{aligned} \tag{3.93}$$

Cette dernière relation montre l'importance du facteur d'oubli  $\lambda$  dans la convergence de l'algorithme RLS, et surtout l'indépendance de la vitesse de convergence de la matrice  $\mathbf{R}_x$ , ce qui représente un avantage évident par rapport à ce qui a été trouvé avec l'algorithme LMS.

Enfin, nous pouvons déduire de la relation (3.93), que les coefficients du filtre convergent vers  $\mathbf{w}_{opt}$  quand la limite de l'erreur paramétrique  $\tilde{\mathbf{w}}$  tend vers zéro lorsque  $n$  tend vers l'infini :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[\tilde{\mathbf{w}}(n)] \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n)] \rightarrow \mathbf{w}_{opt}(n) \tag{3.94}$$

### 3.6.2.2 Algorithme RLS pour modèle de Volterra

L'algorithme RLS s'applique ici à une série de Volterra causale à noyaux symétriques, d'ordre de non-linéarité  $N$ , de mémoire  $M$ , et qui utilise les  $M$  échantillons les plus récents du signal d'entrée  $x(n)$ , donnée par la relation utilisée précédemment :

$$\begin{aligned}
 y(n) &= \sum_{i_1=0}^{M-1} w_1(i_1) x(n-i_1) + \sum_{i_1=0}^{M-1} \sum_{i_2=i_1}^{M-1} w_2(i_1, i_2) x(n-i_1) x(n-i_2) + \cdots \\
 &+ \sum_{i_1=0}^{M-1} \sum_{i_2=i_1}^{M-1} \cdots \sum_{i_N=i_{N-1}}^{M-1} w_N(i_1, i_2, \dots, i_N) \\
 &\quad x(n-i_1) x(n-i_2) \cdots x(n-i_N)
 \end{aligned} \tag{3.95}$$

avec les coefficients du noyau de Volterra d'ordre  $p$  :

$$w_p(i_1, i_2, \dots, i_p) \quad \text{avec } p = 1, 2, \dots, N$$

L'estimation des noyaux de Volterra à l'aide de l'algorithme RLS adaptatif, est basée sur la minimisation de la fonction de coût WSSE :

$$\begin{aligned}
 J_{WSSE}(n) &= \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} e^2(i) \\
 &= \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} [d(i) - y(i)]^2 \\
 &= \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} [(i) - \mathbf{w}_n^T \mathbf{x}(i)]^2
 \end{aligned} \tag{3.96}$$

L'algorithme suivant résume la procédure de minimisation de la fonction WSSE avec un modèle de Volterra du second ordre, et l'estimation des coefficients optimaux des noyaux de Volterra :

**ALGORITHME 3.4** – Algorithme RLS pour modèle de Volterra du second ordre.

---

**Notations :**

$\mathbf{x}(n)$  : vecteur d'entrée ( $L \times 1$ ) à l'étape  $n$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(n) &= [x(n), x(n-1), \dots, x(n-M+1), x^2(n), x(n)x(n-1), \dots, \\
 &\quad x(n)x(n-M+1), \dots, x(n-M+1)x(n-M), x^2(n-M+1)]^T
 \end{aligned}$$

$\mathbf{w}(n)$  : vecteur des coefficients ( $L \times 1$ ) à l'étape  $n$

$$\mathbf{w}(n) = [w_1(0), w_1(1), \dots, w_1(M-1), w_2(0,0), w_2(0,1), \dots, w_2(M-1, M-1)]^T$$

$d(n)$  : signal désiré à l'étape  $n$

$y(n)$  : signal de sortie estimé du filtre à l'étape  $n$

$\mathbf{P}(n)$  inverse de la matrice d'autocorrélation de  $x(n)$  à l'étape  $n$

$\delta$  facteur de régularisation pour l'initialisation de  $\mathbf{P}(0)$

$\mathbf{I}$  matrice identité ( $L \times L$ )

$\mathbf{k}(n)$  : vecteur du gain de Kalman ( $L \times 1$ ) à l'étape  $n$

$\alpha(n)$  : erreur *a priori* à l'étape  $n$

$e(n)$  : erreur *a posteriori* à l'étape  $n$

$\lambda$  : facteur d'oubli ( $0 \ll \lambda \leq 1$ )

**Initialisation :**

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{w}(0) = [0, 0, \dots, 0]^T$$

$$\mathbf{P}(0) = \delta^{-1} \mathbf{I}$$

**Calcul :** Pour chaque instant  $n = 1, 2, \dots, L$

$$\alpha(n) = d(n) - \mathbf{w}(n-1) \mathbf{x}^T(n)$$

$$\mathbf{k}(n) = \frac{\mathbf{P}(n-1) \mathbf{x}(n)}{\lambda + \mathbf{x}^T(n) \mathbf{P}(n-1) \mathbf{x}(n)}$$

$$\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}(n-1) + \alpha(n) \mathbf{k}(n)$$

$$\mathbf{P}(n) = \frac{1}{\lambda} [\mathbf{P}(n-1) - \mathbf{k}(n) \mathbf{x}^T(n) \mathbf{P}(n-1)]$$

$$y(n) = \mathbf{w}^T(n) \mathbf{x}(n)$$

$$e(n) = d(n) - y(n)$$


---

### 3.7 Conclusion

Nous nous sommes intéressés dans ce chapitre à l'étape centrale de la procédure d'identification à l'aide des filtres de Volterra adaptatifs, qui est l'estimation des noyaux. Au fil des différentes sections abordées, il a été souvent question du filtre de Wiener, qui est un outil incontournable dans le traitement de signal d'aujourd'hui, et qui est à l'origine de toutes les méthodes adaptatives développées. La solution de Wiener a été ensuite déterminée, par la résolution de l'équation de Wiener-Hopf, qui constitue le fondement des algorithmes LMS et RLS présentés. L'importance du choix de la structure des noyaux de Volterra en tant que filtres variables dans l'algorithme adaptatif, a été montrée, dépendant des performances requises en termes de convergence, de stabilité et de facilité d'implémentation. La présentation détaillée des algorithmes LMS et RLS, a permis de déduire les deux filtres de Volterra adaptatifs correspondant aux deux algorithmes. Nous avons enfin, évoqué les questions de la convergence, la stabilité et de l'initialisation des algorithmes adaptatifs étudiés, qui sont importants pour l'implémentation des algorithmes, et qui seront mis à profit dans les chapitres suivants avec des systèmes dynamiques réels.

Le suivant chapitre traitera des non-linéarités et des distorsions dans le haut-parleur électrodynamique, et fera partie de la seconde partie de cette thèse, dédiée au haut-parleur électrodynamique en tant que système non linéaire.

## Deuxième partie

# Le haut-parleur électrodynamique : un système non linéaire

# CHAPITRE 4

## Non-linéarités et distorsions dans le haut-parleur électrodynamique

### 4.1 Introduction

Les systèmes non linéaires qui ont fait l'objet d'études dans les divers domaines, sont nombreux. Dans cette thèse, nous nous intéressons au problème d'identification pour modéliser des caractéristiques d'un système non linéaire identifié. Pour cela, nous avons choisi le haut-parleur en tant que système non linéaire, afin de l'identifier à l'aide de filtres de Volterra adaptatifs, présentés dans les chapitres précédents. La modélisation des distorsions présentes dans le haut-parleur demande tout d'abord, une compréhension des distorsions en tant qu'effets des différentes caractéristiques non linéaires du haut-parleur.

Ce chapitre est une monographie de la distorsion, avec ses différents types, ses différents aspects liés à sa mesure, et les différentes sources de distorsions dans le haut-parleur. Il commence par énoncer la définition de la distorsion, et une présentation des différents types de distorsion qui se présentent dans les systèmes non linéaires en général. Ensuite, nous exposons les différentes sources de distorsion dans le haut-parleur selon leurs origines. La section suivante traite des méthodes d'évaluation objective de la distorsion, en présentant les principales méthodes de mesure utilisées pour l'évaluation des différentes distorsions dans le haut-parleur. Ensuite, suivra une section qui aborde les limites de ces méthodes d'évaluation, pour une meilleure description des phénomènes de distorsion. Dans la dernière section, l'audibilité et la perception des distorsions est abordée, en guise de complément important dans le processus d'évaluation globale du haut-parleur sur le plan des distorsions.

### 4.2 Le haut-parleur électrodynamique

Le *haut-parleur électrodynamique*<sup>1</sup> est un transducteur électroacoustique, qui convertit un signal électrique audio en une onde sonore. Il est le type de haut-parleur le plus utilisé, avec 99 % de part de marché des haut-parleurs [Quaegebeur, 2007; Rossi, 2007]. Le haut-parleur électrodynamique fut inventé en 1925 par les deux ingénieurs américains de la General Electric, Edward Washburn Kellogg (1883 – 1960), et Chester

---

1. Appelé également haut-parleur à bobine mobile. En anglais les trois terminologies suivantes sont employées indifféremment : electrodynamic loudspeaker, dynamic speaker, ou moving coil loudspeaker.

Williams Rice (1888 – 1951) [Borwick, 2001]. Le principe du haut-parleur électrodynamique est resté le même depuis son invention, bien que tout le procédé de conception, de fabrication et de son évaluation ont été grandement améliorés [Schneider, 2015].

Le haut-parleur électrodynamique tire son nom du principe électrodynamique, mis à profit pour la transduction électromécanique, et qui sert à transformer le signal électrique en un mouvement de la bobine, laquelle est placée dans un champ magnétique radial permanent et reliée à la membrane de forme conique, qui fait déplacer l'air pour produire des ondes acoustiques audibles (Figure 4.1).

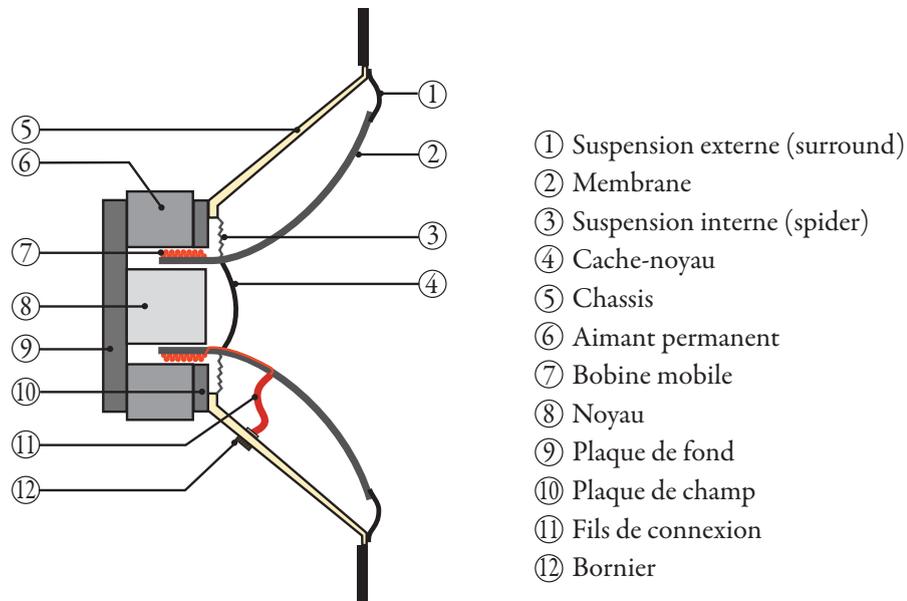


FIGURE 4.1 – Schéma de coupe d'un haut-parleur électrodynamique.

Les différents éléments constitutifs du haut-parleur électrodynamique, sont représentés dans la Figure 4.1. L'aimant et le noyau sont utilisés pour créer un champ magnétique radial dans l'entrefer. Quand un courant alternatif traverse la bobine, celle-ci se déplace et entraîne dans son mouvement la membrane qui lui est attachée, au rythme de l'excitation. La suspension interne est utilisée pour maintenir la bobine mobile centrée dans l'entrefer, et l'empêcher de toucher l'aimant et le noyau, tandis que la suspension externe sert à ramener la membrane à sa position de repos. La membrane, le cache-noyau et une partie de la suspension sont les pièces du haut-parleur qui font déplacer l'air. Ils sont chargés de donner un meilleur couplage à l'air, de façon plus efficace en convertissant les mouvements de la bobine en un mouvement de l'air. En outre, le cache-noyau et la suspension interne doivent protéger l'entrefer de la poussière.

Une restitution sonore de la totalité des fréquences audio, nécessite au moins deux haut-parleurs, chacun dédié à une gamme de fréquences distincte [Bright, 2002]. Cela est dû à l'impossibilité de reproduire les trois décades<sup>1</sup>. Cette différenciation de la restitution fréquentielle a permis de distinguer quatre principaux<sup>2</sup> types de haut-parleurs (Figure 4.2) :

1. La première décade s'étend de 20 Hz à 200 Hz, la seconde de 200 Hz à 2 kHz, et la troisième de 2 kHz à 20 kHz, couvrant ainsi la totalité de la gamme des fréquences audibles comprise entre 20 Hz et 20 kHz.

2. Il existe des haut-parleurs associant les deux décades successives, avec des variantes possibles

- **Haut-parleur de graves (Boomers ou woofers) :** c'est un haut-parleur conçu et dimensionné afin d'être capable de reproduire des basses fréquences entre 20 à 40 Hz, et de 400 à 500 Hz approximativement. On trouve en outre dans cette catégorie, les haut-parleurs d'infragraves (subwoofers), qui sont des haut-parleurs destinés à la reproduction de très basses fréquences jusqu'à la bande infrasonore, comprises entre 5 et 200 Hz pour des systèmes audio grand public, et entre 20 et 80 Hz pour des systèmes professionnels.
- **Haut-parleur de médiums :** haut-parleur spécialisé dans la restitution de sons de moyennes des fréquences, comprises entre les graves et les aiguës, c.-à-d., entre 150 Hz à 10 kHz<sup>1</sup>.
- **Haut-parleur d'aiguës ou Tweeter :** c'est un haut-parleur de petite taille, destiné à reproduire les ondes sonores de fréquences supérieures à 1000 Hz, appelées sons aiguës. Il existe également des super tweeter, qui sont des haut-parleurs conçus pour produire de très hautes fréquences, jusqu'à 100 kHz.
- **Haut-parleur large bande :** ce haut-parleur est conçu pour la reproduction d'une plage de fréquence la plus large possible de la gamme audible. Ces haut-parleurs sont utilisés dans des équipement où il n'est pas permis d'utiliser plus d'un haut-parleur, comme dans les appareils portables, les récepteurs radio et les enceintes acoustiques multimédia<sup>2</sup>.

Il convient de noter qu'une description plus détaillée du fonctionnement du haut-parleur électrodynamique, fera l'objet des sections consacrées à la modélisation de celui-ci dans le cinquième chapitre.



FIGURE 4.2 – Haut-parleurs commerciaux selon la bande de fréquences. a) Woofer de 18" (30 – 3000 Hz), b) Médium de 6" (105 – 12500 Hz), c) Tweeter de 6-3/4" (3500 – 25000 Hz), d) Large bande de 8" (45 – 20000 Hz).

## 4.3 Distorsions

### 4.3.1 Définition de la distorsion

Dans la norme IEC 60268-16 [IEC, 2011], traitant l'évaluation objective de l'intelligibilité de la parole au moyen de l'indice de transmission de la parole, on peut trouver dans le paragraphe 3 : « *Termes et définitions* », la définition 3.6 suivante de la distorsion :

---

suivant les valeurs fréquences de coupures, comme les Low-Mid, Mid-Bass/Bass, High/Midrange, Upper Midrange, etc.

1. Appelé en anglais : mid-range speaker ou squawker.
2. Appelé en anglais : Full-range speaker

« **3.6**  
**distorsion**

*toute déformation involontaire et généralement non désirée d'un signal se produisant dans un canal de transmission de la parole*

*NOTE La distorsion peut comprendre des effets linéaires et non linéaires, tant dans le domaine fréquentiel que dans le domaine temporel. »*

En d'autres termes, la distorsion est l'altération apportée à la forme du signal de sortie d'un système en réponse à une excitation donnée. La distorsion se produit lorsque le système agit différemment sur les composantes fréquentielles du signal, modifiant l'amplitude, la phase ou la fréquence. Ainsi, l'amplification, l'atténuation, le déphasage et le décalage fréquentiel, ne sont pas des distorsions puisque toutes les composantes du signal subissent la même modification.

Le haut-parleur comme système électroacoustique, faisant partie d'une chaîne audio, est censé idéalement être linéaire. Cependant en pratique, les haut-parleurs en général, présentent plusieurs caractéristiques non linéaires dans des conditions données. Ces non-linéarités engendrent des distorsions dans le haut-parleur, et détériorent le signal audio original dans la reproduction des différents sons, comme de la musique ou de la parole [Schurer, 1997]. La distorsion dans les haut-parleurs comme dans beaucoup d'autres systèmes, représente le seul effet à analyser par les ingénieurs, afin d'évaluer la non-linéarité du système, autrement, ils se dirigent vers des évaluations qualitatives et subjectives, inappropriées pour une quelconque aide à l'amélioration efficace et sérieuse de ces systèmes [Schneider, 2015].

Les haut-parleurs présentent deux types de distorsions : distorsions linéaires, et distorsions non linéaires.

### 4.3.2 Distorsion linéaire

La distorsion linéaire est l'altération du signal de sortie d'un système linéaire, qui se manifeste par la modification de la valeur de l'amplitude ou de la phase de certaines de ses composantes fréquentielles, on parle ainsi respectivement, de distorsion d'amplitude et de distorsion de phase<sup>1</sup> [Michaud, 2012] :

- **Distorsion d'amplitude** : Elle se manifeste lorsque le système modifie les amplitudes de certaines composantes fréquentielles de l'excitation, entraînant des irrégularités dans la réponse en fréquences, et sa fonction de transfert perd sa planéité [Schurer, 1997]. En revanche, si le système linéaire n'apporte qu'un gain constant limité (appliqué à l'ensemble du spectre du signal), alors sa réponse d'amplitude reste non distordue.
- **Distorsion de phase** : Elle se rapporte à la modification par le système, de la phase de certaines composantes fréquentielles du signal d'entrée. Un tel système dont le retard des composantes n'est pas le même pour toutes les composantes fréquentielles, est dit dispersif. Par contre, si le système linéaire introduit un retard

---

1. Certains auteurs comme M. Rossi [Rossi, 2007], préfèrent qualifier les distorsions d'amplitude et de phase, d'effets de non-respect de la condition de conformité, au lieu d'employer le terme distorsion linéaire.

constant (appliqué à l'ensemble du spectre du signal), alors il donne à la sortie une réponse à phase non distordue<sup>2</sup>.

### 4.3.3 Distorsion non-linéaire

Dans le premier chapitre, le principe de superposition a été décrit comme une condition de la linéarité des systèmes. Une dérogation à ce principe, peut conduire à des caractéristiques non linéaires les plus improbables citées comme exemples dans la section (1.4). De ce fait, la distorsion non linéaire serait l'effet des non-linéarités des systèmes, en état d'altérer ou de distordre la forme d'onde ou certaines caractéristiques des réponses par rapport aux excitations.

La distorsion non linéaire d'un système est l'effet de ses non-linéarités, et se manifeste par l'introduction de nouvelles composantes fréquentielles dans la réponse, initialement absentes du spectre d'entrée. A vrai dire, il existe des distorsions non linéaires au lieu d'une seule, car elle se manifeste de différentes manières, qui seront décrites ci-après :

#### 4.3.3.1 Distorsion harmonique

La distorsion harmonique est la mesure la plus ancienne et la plus employée pour l'évaluation de la non-linéarité d'amplitude [Borwick, 2001; Michaud, 2012].

La distorsion harmonique est l'effet qui apparaît, lorsqu'un système non linéaire excité par un signal sinusoïdal de fréquence  $f_0$ , génère des composantes spectrales additionnelles dites harmoniques, de fréquences  $nf_0$  avec  $n = 2, 3, 4, \dots$  (Figure 4.3).

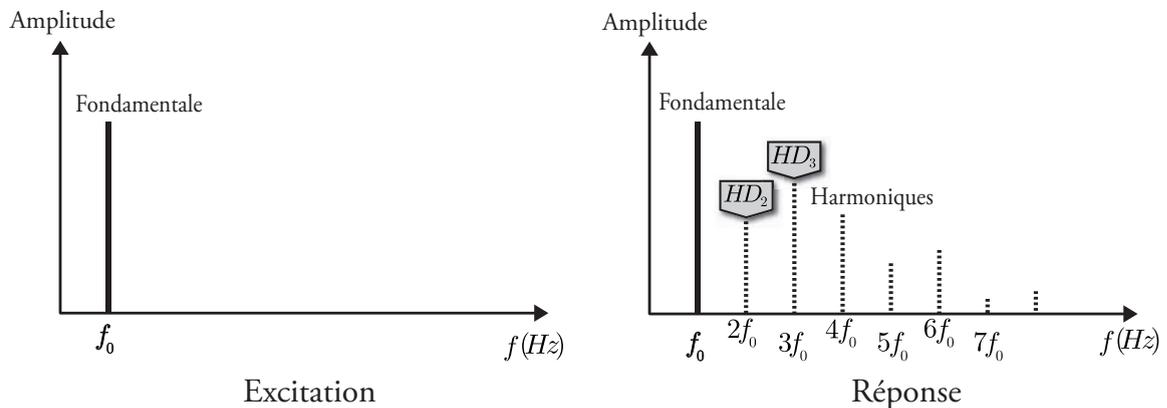


FIGURE 4.3 – Exemple des spectres de l'excitation et de la réponse dans le cas de la distorsion harmonique.

#### 4.3.3.2 Distorsion d'intermodulation

Les premières mesures de la distorsion d'intermodulation furent réalisées dans l'industrie du cinéma aux États-Unis en 1939 par les ingénieurs de la SMPTE<sup>1</sup>

2. Cela correspond à un retard de groupe constant, le système est alors appelé système à phase linéaire.

1. SMPTE (Society of Motion Picture and Television Engineers), organisation internationale de normalisation, fondée en 1916 aux États-Unis, ayant pour but la production de normes dans l'industrie cinématographique et télévisuelle.

En général, la distorsion d'intermodulation<sup>2</sup> apparaît dans la réponse d'un système non linéaire, quand l'excitation est constituée de plus d'une composante fréquentielle.

Plus particulièrement, la distorsion d'intermodulation est l'effet qui survient, lorsque le système non linéaire est excité à l'aide d'un signal formé par la somme de deux composantes, de fréquences différentes  $f_1$  et  $f_2$  avec  $f_1 < f_2$ , produit une réponse comportant des composantes supplémentaires latérales appelées produits d'intermodulation, aux fréquences  $f_2 \pm n f_1$  avec  $n$  entier (Figure 4.4), c.-à-d.,  $f_2 \pm f_1$ ,  $f_2 \pm 2f_1$ ,  $f_2 \pm 3f_1$ , etc. En pratique les amplitudes des deux composantes fréquentielles de test de la distorsion d'intermodulation sont différentes.

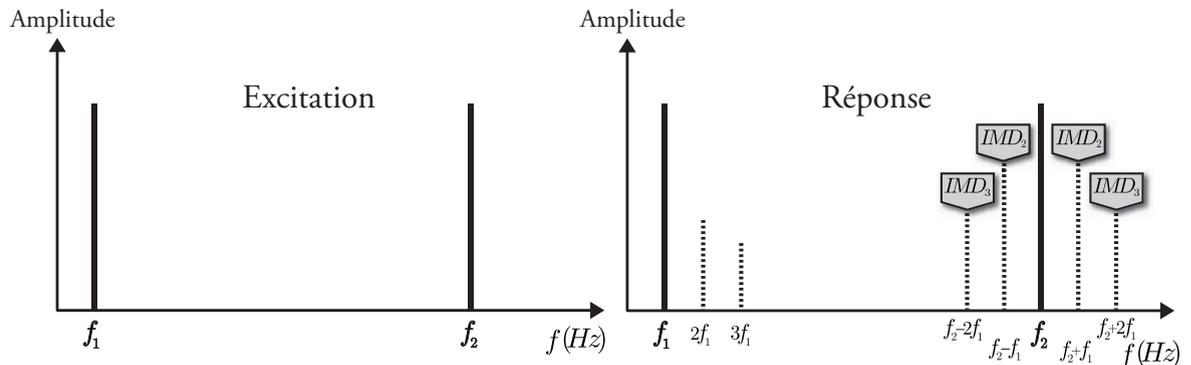


FIGURE 4.4 – Exemple du spectre d'excitation et de sa réponse dans le cas de la distorsion d'intermodulation.

#### 4.3.3.3 Distorsion par différence de fréquence

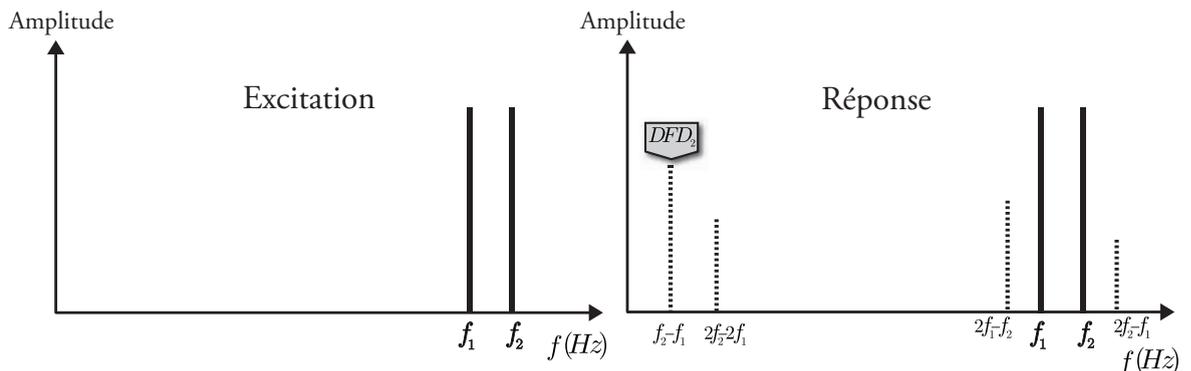


FIGURE 4.5 – Exemple du spectre d'excitation et sa réponse dans le cas de la distorsion par différence de fréquence.

2. Appelée distorsion de modulation dans la norme IEC 60268-5 :2007 [IEC, 2007], mais ce nom est très rarement employé dans la littérature francophone pour désigner le même effet. D'autre part, la norme IEC 268-2 [IEC, 1991] distingue clairement entre les deux termes, où le terme distorsion d'intermodulation y est défini comme étant un effet plus général englobant : la distorsion de modulation et la distorsion de différence de fréquence.

La distorsion par différence de fréquence<sup>1</sup> ou distorsion différentielle, peut être considérée comme une variante de la distorsion d'intermodulation où les fréquences des deux composantes utilisées sont très proches l'une de l'autre [Borwick, 2001].

La distorsion différentielle est l'effet qui se présente dans un système non linéaire, lorsqu'il est excité à l'aide d'un signal composé de la somme de deux composantes sinusoïdales d'amplitudes identiques, de fréquences  $f_1$  et  $f_2$ , avec la différence  $\delta f = f_2 - f_1$  qui est inférieure à  $f_1$  et  $f_2$ . Cet effet ajoute dans la réponse du système des composantes additionnelles appelées composantes différentielles de fréquences  $\delta f$ ,  $(2f_2 - f_1)$ ,  $(2f_1 - f_2)$ ,  $(3f_2 - 2f_1)$ ,  $(3f_1 - f_2)$ , etc. [Borwick, 2001; Rossi, 2007]. La Figure 4.5 ci-dessus, illustre l'effet de la distorsion par différence de fréquence à l'aide d'un exemple.

#### 4.3.3.4 Distorsion sous-harmonique

La distorsion sous-harmonique est un effet non linéaire de moindre importance que les effets précédents. Elle apparaît lorsque des composantes additionnelles sont présentes dans la réponse du système non linéaire, à des fréquences sous-multiples de la fréquence fondamentale d'excitation  $f_0$ , notamment les plus premiers sous-multiples, tels que  $f_0/2$ ,  $f_0/3$ , et  $f_0/4$  [Bolaños, 2005; Schurer, 1997] (Figure 4.6).

La distorsion sous-harmonique prend naissance dans les éléments vibrants du haut-parleur électrodynamique, comme la membrane. Des phénomènes de résonance interne sont à l'origine de cette distorsion harmonique, qui peuvent a fortiori évoluer vers des réponses chaotiques du haut-parleur [Bolaños, 2005].

Dans les haut-parleurs électrodynamiques, il existe des conditions bien particulières où la distorsion harmonique peut intervenir. Elle apparaît principalement dans les vieux haut-parleurs ou de bon marché, excités à des niveaux très élevés, compte tenu du faible amortissement de leurs membranes [Schurer, 1997].

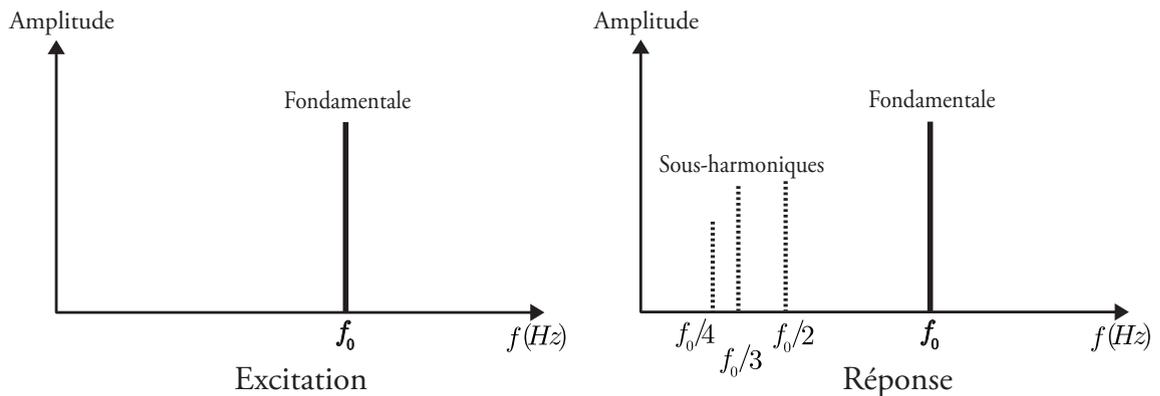


FIGURE 4.6 – Exemple du spectre d'excitation et sa réponse dans le cas de la distorsion sous-harmonique.

#### 4.3.3.5 Distorsion Doppler

La distorsion Doppler est provoquée par la modulation d'une fréquence plus élevée, par une excursion à basse fréquence de la membrane du haut-parleur. Cette modulation

1. Distorsion par différence de fréquence, est le nom utilisé dans la norme IEC 60268-5 :2007 [IEC, 2007] pour désigner cette distorsion.

de fréquence, entraîne le décalage des fréquences supérieures à cause de la limitation de l'excursion de la membrane aux basses fréquences [Schurer, 1997]. Concrètement, cela provoque un retard variable de l'onde acoustique rayonnée, qui peut être interprété comme une modulation de phase ou de fréquence (Figure 4.7) [Butterweck, 1989; Klippel, 2006].

La distorsion Doppler est présente notamment dans les haut-parleurs large bande, où une restitution sonore est attendue sur une large gamme fréquentielle. La solution radicale, pour éviter la distorsion Doppler, consiste à séparer la restitution sonore du système audio sur plusieurs haut-parleurs spécifiques types, tweeter, midrange et woofers avec des filtres séparateurs<sup>1</sup> [Klippel, 2006].

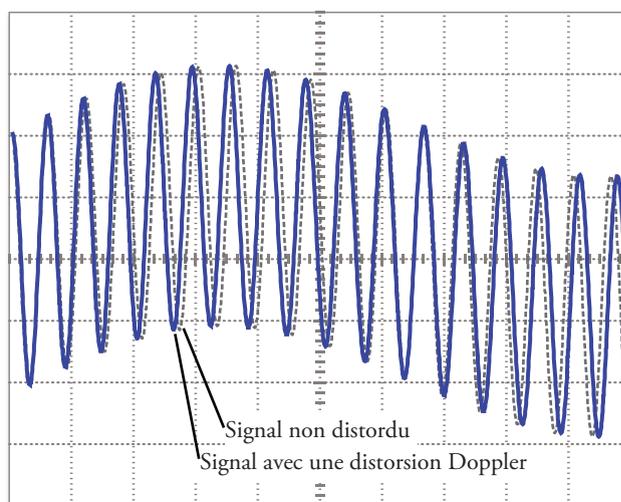


FIGURE 4.7 – Modulation de phase d'une onde acoustique causée par une distorsion Doppler.

#### 4.4 Sources des distorsions dans le haut-parleur électrodynamique

La majorité des non-linéarités du haut-parleur électrodynamique est causée par le principe de transduction du haut-parleur, et est directement liée à la géométrie et aux matériaux du moteur<sup>2</sup>, de la suspension et de la membrane [Klippel, 2006]. Une monographie des causes des non-linéarités et des différentes sources des distorsions dans le haut-parleur électrodynamique, nécessite la considération du modèle de Small et Thiele pour les localiser [Kaizer, 1987]. Sans la prétention d'une monographie détaillée des sources de non-linéarités, nous présentons ici les principales causes des non-linéarités du haut-parleur électrodynamique réparties selon leurs différentes origines.

1. Les filtres séparateurs ou répartiteurs (crossover) sont des filtres électroniques passifs ou actifs, utilisés pour partager le signal audio en plusieurs bandes fréquentielles : graves, médiums et aigus.

2. Le moteur du haut-parleur électrodynamique est constitué de l'aimant permanent, de la plaque de champ, de la pièce polaire et de la bobine mobile [Kaizer, 1987].

#### 4.4.1 Non-linéarités d'origine électromagnétique

**1. Facteur de force :** Le facteur de force<sup>3</sup>  $Bl$  décrit le couplage effectif entre la partie électrique et mécanique du haut-parleur électrodynamique. Il est exprimé par l'intégral du produit de la densité de flux magnétique  $B$  et de la longueur totale  $l$  du fil de la bobine mobile dans l'entrefer :  $\int Bdl$  [Kaizer, 1987].

La valeur du champ magnétique dans l'entrefer varie, en décroissant à chaque fois que la bobine mobile s'éloigne de sa position de repos [Quaegerbeur, 2007]. Cette dépendance du champ magnétique de la position de la bobine mobile, est à l'origine de la seconde plus importante source de non-linéarité dans le haut-parleur électrodynamique, à cause de la dépendance du facteur de force du déplacement de la bobine mobile, qui s'écrit ainsi  $Bl(x)$  [Kaizer, 1987; Quaegerbeur, 2007].

La Force électromagnétique de Laplace agissant sur la bobine mobile devient également dépendante de la position de celle-ci, à cause de la dépendance du facteur de force de la position de la bobine [Kaizer, 1987]. Un exemple typique de  $\int Bdl$  en fonction du déplacement est illustré dans la Figure 4.8.

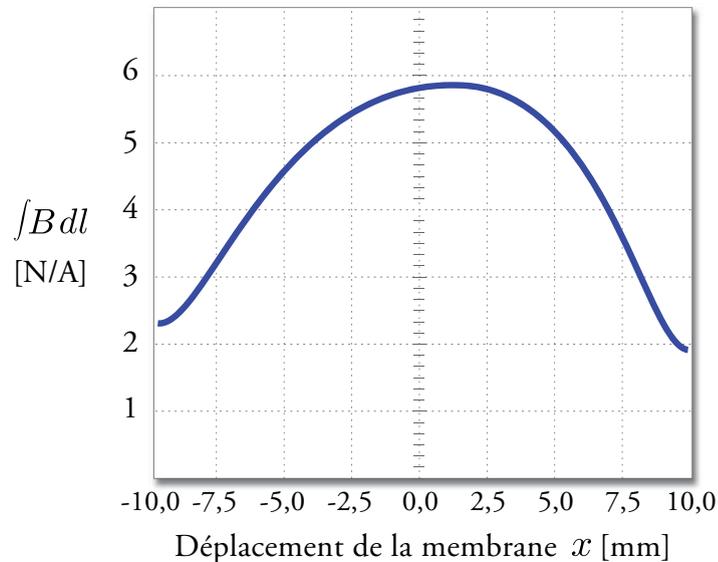


FIGURE 4.8 – Exemple typique du facteur de force en fonction de la position de la bobine mobile.

**2. Auto-inductance :** Le courant alternatif parcourant la bobine mobile crée un champ magnétique alternatif qui pénètre dans l'aimant permanent et l'air qui l'entoure. Lorsque la bobine mobile sort de l'entrefer dans l'aimant permanent vers l'air libre à l'extérieur, la perméabilité magnétique du matériau environnant diminue et l'inductance de la bobine diminue<sup>1</sup>. Au fur et à mesure que la bobine mobile s'éloigne de la limite de l'entrefer en étant de plus en plus entourée de l'air libre, l'inductance diminue ainsi fortement dans le sens positif du déplacement de la bobine mobile (Figure 4.9). Cette variation de l'inductance en fonction de la position de la bobine mobile

3. Appelé également coefficient de couplage électrodynamique, exprimé en [N/A] ou [T.m].

1. L'inductance d'un circuit électrique dépend de la géométrie du trajet du courant et de la perméabilité magnétique des matériaux environnants, elle est ainsi directement proportionnelle à la perméabilité.

constitue la troisième source plus importante des non-linéarités dans le haut-parleur électrodynamique [Klippel, 2005; Sturtzer, 2013].

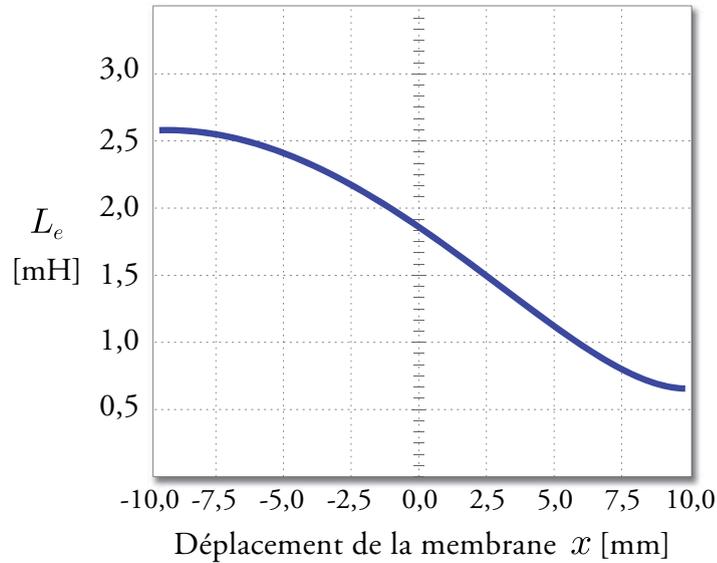


FIGURE 4.9 – Courbe de l’inductance non linéaire de la bobine mobile en fonction du déplacement de la membrane.

**3. Force de réluctance :** La variation de l’inductance de la bobine mobile  $L_e$  avec l’excursion  $x$  de la membrane est avérée. Cela donne une force de réluctance (ou force contre-électromotrice) proportionnelle au carré du courant  $i$  [Kaizer, 1987; Low and Hawksford, 1993] :

$$F_x = -\frac{1}{2}i^2 \frac{dL_e(x)}{dx} \quad (4.1)$$

**4. Force électromotrice induite dans la bobine :** Il est question ici de la variation de la force électromotrice induite dans la bobine mobile constatée avec l’excursion de la membrane. Ainsi, la tension aux bornes de la bobine n’est pas seulement proportionnelle à la dérivée temporelle du courant, mais se présente sous la forme [Kaizer, 1987; Low and Hawksford, 1993] :

$$U = L_e(x) \frac{di}{dt} + i \frac{dL_e(x)}{dx} \frac{dx}{dt} \quad (4.2)$$

**5. Effets de chauffage :** Déplacement du point de fonctionnement de l’aimant permanent en raison d’une variation du courant de la bobine mobile [Kaizer, 1987; Low and Hawksford, 1993].

#### 4.4.2 Non-linéarités d’origine mécanique

**1. Compliance :** La force de rappel produite par le système de suspension constitué de la suspension interne (spider) et la suspension externe (surround), centre l’ensemble de l’équipage mobile<sup>1</sup> et ramène la membrane à sa position de repos. Cette force est

1. L’équipage mobile du haut-parleur électrodynamique est constitué de la bobine mobile, la membrane, le cache-noyau et la suspension.

proportionnelle au déplacement  $x$  de la membrane seulement en petites amplitudes, c.-à-d.,  $F_{sus} = K_{ms}x$ .

En grandes amplitudes, la rigidité  $K_{ms}$  (ou son inverse la compliance  $C_{ms}$ ) du système de suspension du haut-parleur varie avec l'excursion de la membrane, rendant la force de rappel à son tour non linéaire  $F_{sus} = K_{ms}(x)x$ , ce qui constitue la principale source des non-linéarités dans le haut-parleur électrodynamique [Kaizer, 1987; Klippel, 2005]. Parfois la non-linéarité de la force de rappel de la suspension se présente sous forme d'hystérésis [Jouhaneau, 1993]. La Figure 4.10 montre une courbe typique de la force de rappel du système de suspension du haut-parleur en fonction du déplacement de la membrane. La Figure 4.11 montre la non-linéarité de la courbe de rigidité du système de suspension en fonction du déplacement de la membrane.

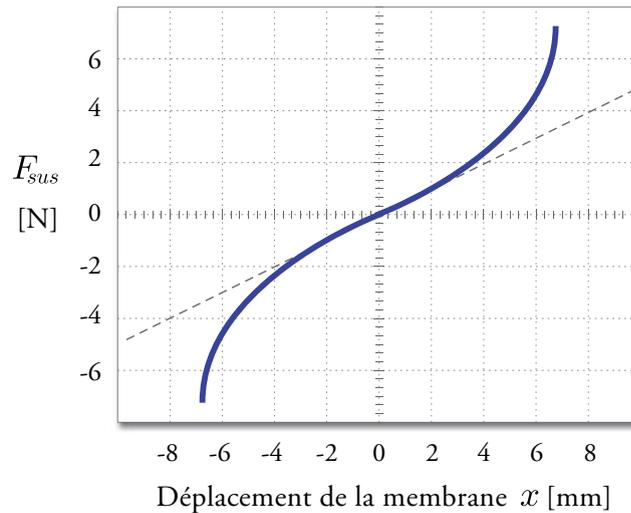


FIGURE 4.10 – Courbe typique de la force de rappel du système de suspension du haut-parleur en fonction du déplacement de la membrane.

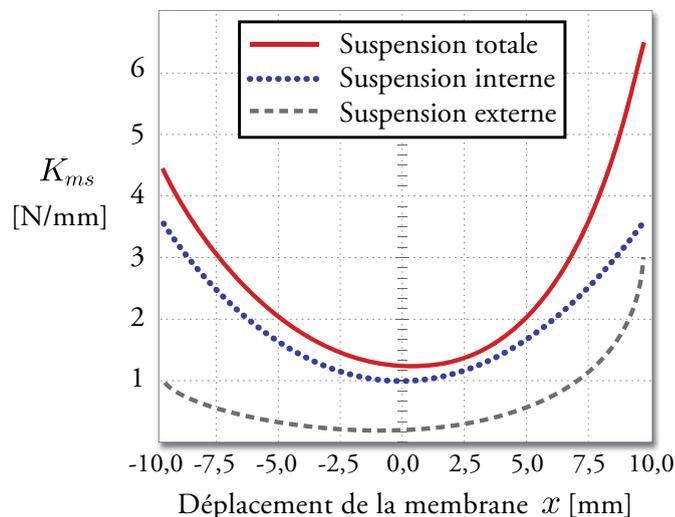


FIGURE 4.11 – Courbe de rigidité non linéaire du système de suspension en fonction du déplacement de la membrane (adapté de [Klippel, 2005]).

**2. Ecrêtage mécanique :** En grandes amplitudes, la limitation de la capacité d'excursion de la bobine mobile entraîne pour celle-ci un écrêtage mécanique et une compression [Kaizer, 1987; Low and Hawksford, 1993];

**3. Matériaux de la membrane :** Génération de sous-harmoniques dues aux matériaux de la membrane à des niveaux d'entraînement extrêmes [Kaizer, 1987; Low and Hawksford, 1993];

#### 4.4.3 Non-linéarités d'origine acoustique

**1. Distorsion Doppler :** Elle survient particulièrement avec des excursions de la membrane en basses fréquences pouvant entraîner une distorsion de phase, mais peut être le plus souvent négligée (voir § 4.3.3.5) [Kaizer, 1987; Low and Hawksford, 1993];

**2. Conditions acoustiques de la salle :** Le comportement acoustique du haut-parleur est d'autant plus influencé par les conditions acoustiques de la salle (forme de la salle, dimensions, matériaux des parois, etc.) [Kaizer, 1987; Low and Hawksford, 1993].

#### 4.4.4 Non-linéarités d'origines diverses

**1. Température :** Avec un rendement entre 0,2 et 2 %, les haut-parleurs sont connus pour être des transducteurs d'un rendement très faible. Même avec les 5 % de certains haut-parleurs haut de gamme apparus dans les deux dernières décennies, une partie infime de la puissance électrique est convertie en puissance acoustique rayonnée, et le reste est transformée en chaleur dissipée essentiellement dans la bobine mobile. La Figure 4.12 présente un exemple de la répartition de la température sur les différents éléments d'un haut-parleur électrodynamique fonctionnant en régime permanent dans un local à une température ambiante de 21 °C [Jouhaneau, 1993].

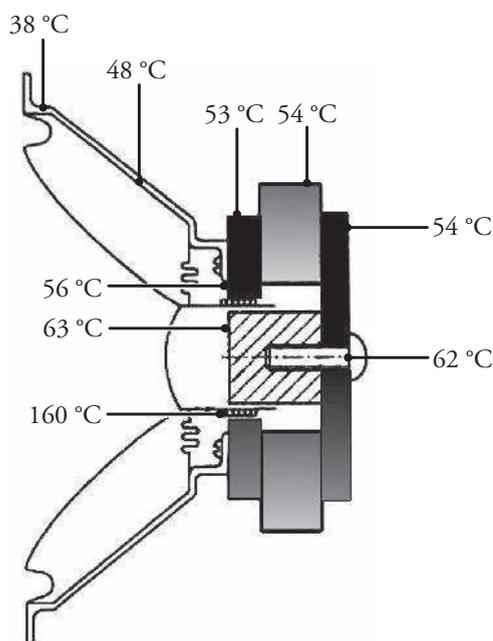


FIGURE 4.12 – Exemple de la répartition de la température dans le haut-parleur électrodynamique fonctionnant en régime permanent dans un local à une température ambiante de 21 °C [Jouhaneau, 1993].

L'échauffement de la bobine mobile entraîne une compression de l'amplitude (effet thermique), et peut causer la détérioration du haut-parleur [Jouhaneau, 1993; Klippel, 2005].

## 4.5 Évaluation objective des distorsions

### 4.5.1 Mesure de la non-linéarité

La non-linéarité en tant que propriété d'une grande catégorie des systèmes dynamiques, a été abordée dans le premier chapitre. Une étude axée sur la non-linéarité et ses effets, passe tout d'abord par son évaluation dans les systèmes, en vue de connaître spécialement, son type et son importance. La Figure 4.13 montre le procédé expérimental général de mesure de la non-linéarité. Cette mesure consiste à déterminer la courbe caractéristique entrée-sortie du haut-parleur, pour pouvoir en juger de la linéarité ou la non-linéarité du haut-parleur, en tant que système dynamique.

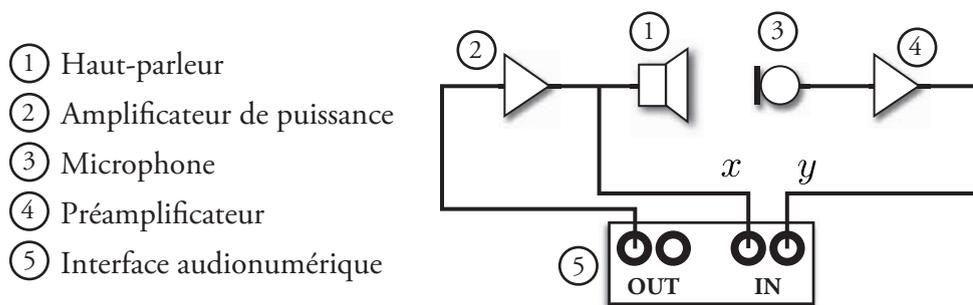


FIGURE 4.13 – Schéma du procédé expérimental de mesure de la non-linéarité.

Cela commence par l'application d'un stimulus de type sinusoïdal de fréquence 1000 Hz et d'amplitude variable à l'entrée de l'amplificateur de puissance.

Le signal à la sortie de l'amplificateur de puissance est considéré comme l'entrée du haut-parleur sous test, noté  $x$ . Le signal à la sortie du préamplificateur en aval du microphone est considéré comme la sortie du système haut-parleur, noté  $y$ . L'acquisition des deux signaux simultanément par l'interface audionumérique, permet d'effectuer une analyse double voie des deux signaux  $x$  et  $y$ , et ainsi de tracer la courbe de linéarité du système haut-parleur.

Dans la Figure 4.14 ci-dessous, est représenté un exemple de courbes caractéristiques obtenues à l'aide d'un stimulus sinusoïdal de 1000 Hz, donnant la réponse de deux haut-parleurs différents. La réponse  $y$  en noir est conforme au stimulus  $x$ , ce qui a donné une courbe caractéristiques linéaire. Par contre, l'exemple d'une réponse écrêtée donne une courbe caractéristique symétrique non linéaire caractéristique d'un écrêtage doux.

En réalité, les courbes expérimentales caractéristiques du haut-parleur, sont plus complexes que celles données dans la Figure 4.14, à cause de la durée du stimulus, et du caractère aléatoire de la déformation de la forme d'onde de la réponse obtenue (Figure 4.15). Les courbes caractéristiques réelles obtenues lors du test de linéarité, s'apparente plutôt aux fameuses courbes fantaisistes de Lissajous, ce qui est révélateur d'une distorsion de la phase (décalage temporelle entre le stimulus et la réponse), mais également une forte distorsion de la forme d'onde de la réponse.

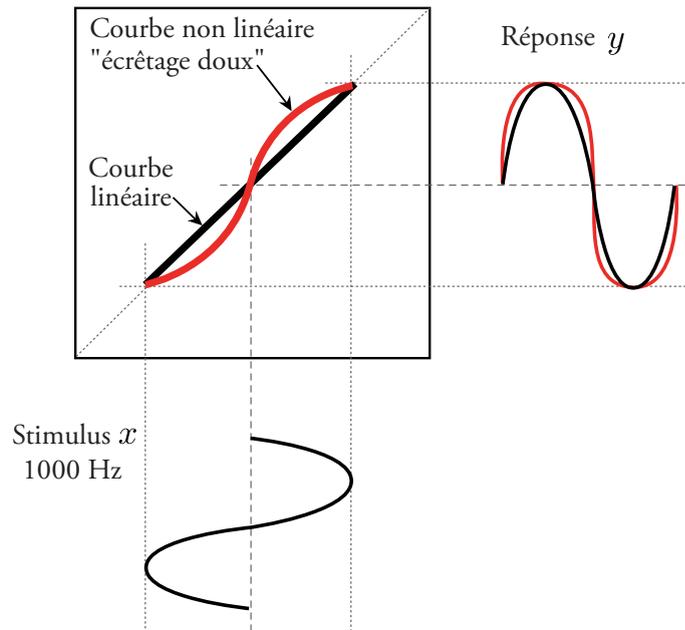


FIGURE 4.14 – Exemple de courbes caractéristiques linéaire et non linéaire obtenues à l'aide d'un stimulus sinusoïdal de 1000 Hz.

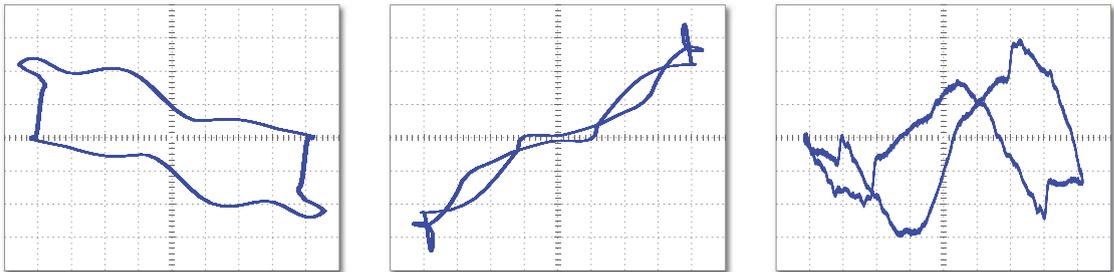


FIGURE 4.15 – Exemples de courbes caractéristiques réelles, réalisées pour la mesure de la linéarité.

#### 4.5.2 Fonction de cohérence

La fonction de cohérence entre deux signaux  $x(n)$  et  $y(n)$  est définie par le rapport suivant :

$$C_{xy}(f) = \frac{|P_{xy}(f)|^2}{P_{xx}(f)P_{yy}(f)} \quad (4.3)$$

où  $P_{xx}(f)$  et  $P_{yy}(f)$  sont les densités spectrales de puissance des signaux  $x(n)$  et  $y(n)$ , et  $P_{xy}(f)$  est la densité interspectrale de puissance (interspectres) des deux signaux.

En général, la cohérence peut être utilisée pour examiner la relation entre deux signaux. Elle est souvent utilisée pour estimer le transfert de puissance entre l'entrée et la sortie à une fréquence donnée d'un système dynamique.

La cohérence  $C_{xy}(f)$  est une fonction fréquentielle de valeurs comprises entre 0 et 1. Si  $C_{xy}(f) = 0$ , les deux signaux  $x(n)$  et  $y(n)$  sont dits incohérents. Si  $C_{xy}(f) = 1$ , les deux signaux  $x(n)$  et  $y(n)$  sont parfaitement cohérents. Et si  $0 < C_{xy}(f) < 1$ , cela

indique : soit la présence d'un bruit, soit l'existence d'une relation non linéaire entre  $x(n)$  et  $y(n)$ , ou soit  $y(n)$  en tant que réponse du système ne dépend pas uniquement de l'entrée  $x(n)$ .

Souvent, on préfère employer la fonction d'incohérence pour la mesure de la non-linéarité d'un système. Elle est exprimée en pourcentage, entre 0 et 100 % pour indiquer l'absence ou l'importance de la distorsion dans le système non linéaire. Alors que la THD ne considère que la présence d'harmoniques dans la réponse du haut-parleur, la fonction d'incohérence permet de détecter la déformation générale de la forme d'onde de la réponse, en présence de composantes non harmoniques et du bruit [Michaud, 2012].

### 4.5.3 Mesure des distorsions

#### 4.5.3.1 Mesure de la distorsion harmonique

La distorsion harmonique est décrite à l'aide de la distorsion harmonique totale (THD : Total Harmonic Distortion), exprimée en pourcentage ou en dB<sup>1</sup>, est le rapport de la valeur efficace des composantes harmoniques de la sortie distordue, à la valeur efficace totale [Rossi, 2007]. L'oreille humaine commence à reconnaître nettement un signal distordu à partir d'une THD de 1 % [de Nanteuil, 2008].

La THD doit être déterminé selon la formule donnée dans la norme IEC 60268-5 :2007 [IEC, 2007] :

$$THD = \frac{\sqrt{\sum_{i=2}^N p_i^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^N p_i^2}} 100 \% \quad (4.4)$$

ou en décibel

$$L_{THD} = 20 \log \frac{THD}{100} \quad (4.5)$$

Où  $p_i$  est la valeur efficace de la composante d'ordre  $i$  du signal considéré<sup>2</sup>, et  $N$  est le nombre maximal d'harmoniques considérées. La composante fondamentale correspond à l'indice  $i$  égal à 1. Par conséquent plus la valeur de la THD est faible, plus faible est la distorsion.

En général, les premières harmoniques sont les plus dominantes, en particulier la seconde et la troisième [IEC, 2007; Dobrucki, 2011]. En conséquence, seulement les distorsions harmoniques de second et de troisième ordre sont calculées à l'aide des formules suivantes [IEC, 2007] :

$$HD_2 = \frac{p_2}{\sqrt{\sum_{i=1}^N p_i^2}} 100 \% , \quad HD_3 = \frac{p_3}{\sqrt{\sum_{i=1}^N p_i^2}} 100 \% \quad (4.6)$$

---

1. Une distorsion de 100 % correspond à 0 dB.

2. Les différentes formules relatives aux distorsions dans la norme IEC 60268-5 :2007 [IEC, 2007], sont exprimées essentiellement par rapport à la pression acoustique, en revanche, ces formules peuvent s'appliquer pratiquement à toutes les grandeurs physiques et électriques, employées dans le formalisme de la transduction électro-mécano-acoustique du haut-parleur électrodynamique, telles que le courant électrique, la tension, l'accélération, etc.

ou en décibel

$$L_{HD_2} = 20 \log \frac{HD_2}{100}, \quad L_{HD_3} = 20 \log \frac{HD_3}{100} \quad (4.7)$$

Ainsi une observation focalisée sur seulement deux harmoniques facilite le diagnostic des causes de la non-linéarité dans le haut-parleur [Dobrucki, 2011].

De même, la distorsion harmonique peut être exprimée graphiquement, à l'aide de la distorsion harmonique caractéristique, définie par la norme IEC60268-5 :2007 [IEC, 2007], comme la THD calculée par rapport à la pression acoustique moyenne au lieu de la pression acoustique totale comme précédemment, dans une bande de fréquences donnée<sup>1</sup>. La pression acoustique moyenne  $p_m$  est exprimée dans la formule suivante, où  $p_i$  sont les pressions acoustiques instantanées, et  $n$  est le nombre de bandes de  $1/k$  d'octave dans la gamme fréquentielle de balayage de mesure 2007 [IEC, 2007] :

$$p_m = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{n}} \quad (4.8)$$

Concrètement, la mesure de la distorsion harmonique caractéristique est réalisée, à l'aide d'un balayage fréquentiel logarithmique, par rapport à la fréquence fondamentale d'excitation, en fixant la bande de  $1/k$  d'octave choisie, et les fréquences de début et de fin de la gamme fréquentielle de balayage du haut-parleur. Un exemple de la courbe de la distorsion harmonique caractéristique est donné dans la Figure 4.16 :

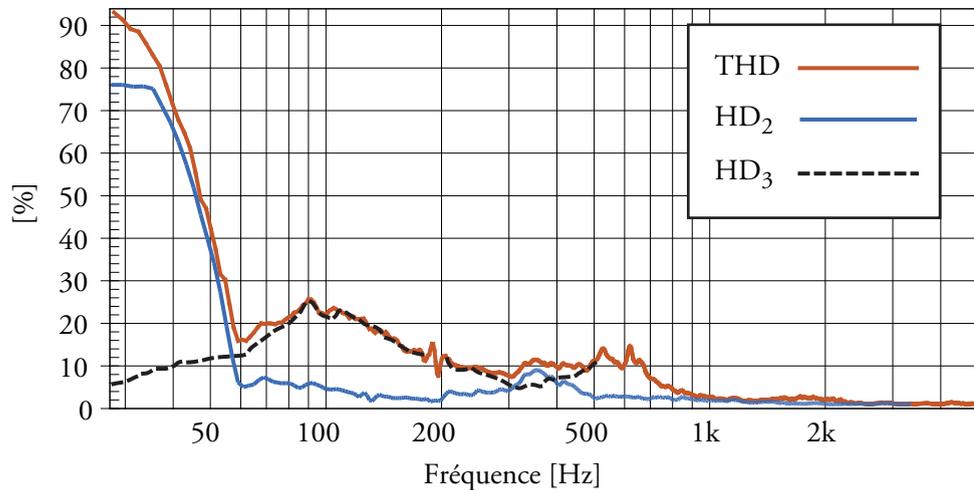


FIGURE 4.16 – Exemple de la distorsion harmonique caractéristique, incluant la THD, la seconde et la troisième distorsions harmoniques, exprimés en pourcentage entre 20 et 5000 Hz.

1. La norme IEC60268-5 :2007, cite la bande de  $1/3$  d'octave, mais une analyse à l'aide de bandes plus étroites, comme  $1/24$ ,  $1/36$  ou jusqu'à  $1/96$  d'octave, très courantes dans les équipements récents, cela permet une meilleure résolution du balayage fréquentiel.

### 4.5.3.2 Mesure de la distorsion d'intermodulation

Pour la mesure de la distorsion d'intermodulation, plusieurs méthodes existent, qui diffèrent dans la manière de combiner les signaux d'excitation. Toutefois, deux méthodes principales relatives à des normes différentes, se sont imposées pour la mesure de la distorsion d'intermodulation :

**1. Norme IEC 60268-5 :** Les distorsions d'intermodulation d'ordre 2 et 3 sont les plus employées, et très révélatrices de l'importance de la distorsion d'intermodulation dans le système non linéaire sous test. Elles sont déterminées selon les formules suivantes [IEC, 2007] :

$$IMD_2 = \frac{P_{(f_2-f_1)} + P_{(f_2+f_1)}}{P_{f_2}} 100 \% \quad (4.9)$$

$$IMD_3 = \frac{P_{(f_2-2f_1)} + P_{(f_2+2f_1)}}{P_{f_2}} 100 \% \quad (4.10)$$

ou en décibel

$$L_{IMD_2} = 20 \log \frac{IMD_2}{100} \quad , \quad L_{IMD_3} = 20 \log \frac{IMD_3}{100} \quad (4.11)$$

La norme IEC 60268-5 :2007 [IEC, 2007] préconise l'utilisation d'un signal composé de deux composantes sinusoïdales, l'une de fréquence  $f_2$ , qui doit être huit fois plus élevée que la seconde fréquence basse  $f_1$ . En plus, la valeur efficace de la composante de la fréquence basse  $f_1$ , doit être 4 fois plus grande.

W. Klippel [Klippel, 2006] suggère de choisir la fréquence basse  $f_1$ , par rapport à la fréquence de résonance  $f_s$  du haut-parleur, dans l'intervalle :  $f_s/2$  à  $2f_s$ .

Il importe de noter l'inexistence de formule dans la norme IEC 60268-5, pour le calcul de la distorsion d'intermodulation totale, combinant l'effet des deux produits d'intermodulation  $IMD_2$  et  $IMD_3$ .

**2. Norme SMPTE RP120-1983 (ou DIN 45043<sup>1</sup>) :** dans cette norme, on prend  $f_2 \gg f_1$ , généralement  $f_1 = 60$  Hz et  $f_2 = 7000$  Hz (dans la norme DIN 45043 :  $f_1 = 250$  Hz et  $f_2 = 8000$  Hz), avec un rapport d'amplitude 4 :1 pour les deux composantes sinusoïdales.

Cette méthode n'exprime pas explicitement les formules des deux produits d'intermodulation : seconde  $IMD_2$  et troisième  $IMD_3$ , par contre s'intéresse et énonce uniquement celle de la distorsion d'intermodulation totale. L'évaluation objective de la distorsion d'intermodulation se fait ainsi à l'aide du taux de distorsion d'intermodulation total, exprimé en pourcentage, est le rapport de la somme des valeurs efficaces des composantes latérales de  $f_2$ , et de la valeur efficace de la composante fréquentielle  $f_2$  :

$$IMD = \frac{\sum_{i=1}^N [P_{(f_2-if_1)} + P_{(f_2+if_1)}]}{P_{f_2}} 100 \% \quad (4.12)$$

---

1. La norme allemande DIN 45043 est similaire à la norme SMPTE RP120-1983, à quelques détails près dans l'énoncé du procédé expérimental.

ou en décibel

$$L_{IMD} = 20 \log \frac{IMD}{100} \quad (4.13)$$

#### 4.5.3.3 Mesure de la distorsion par différences des fréquences

Dans la norme IEC 60268-5:2007 [IEC, 2007], on présente la méthode de mesure de seulement la distorsion par différences des fréquences du second ordre. Sa mesure est basé sur le rapport de la pression acoustique, rayonnée par le haut-parleur excité par un signal de fréquence  $(f_2 - f_1)$ , à la pression acoustique totale rayonné par le haut-parleur. Les composantes sinusoïdales  $f_1$  et  $f_2$  sont de même amplitude, exprimées en valeur efficace. La norme recommande un écart de fréquence  $\delta f = f_2 - f_1 = 80$  Hz, et une valeur minimale de  $f_1$  égale au double de l'écart de fréquence  $\delta f$ , tout en restant à l'intérieur de la gamme fréquentielle du haut-parleur. Un filtre passe-bande étroit ajusté sur la fréquence  $(f_2 - f_1)$ , est connecté au microphone placé à 1 m du haut-parleur, afin de mesurer la valeur efficace de la composante de fréquence  $(f_2 - f_1)$ .

La distorsion par différences des fréquences du second ordre doit être déterminée en pourcentage, à l'aide la formule [IEC, 2007] :

$$DFD_2 = \frac{P(f_2-f_1)}{p_{f_1} - p_{f_2}} 100 \% \quad (4.14)$$

ou en décibel

$$L_{DFD_2} = 20 \log \frac{DFD_2}{100} \quad (4.15)$$

## 4.6 Limite des méthodes d'évaluation objective des distorsions

L'emploi des principales méthodes objectives d'évaluation des distorsions, telles que la distorsion harmonique ou la distorsion d'intermodulation, remonte à la première moitié du XX<sup>e</sup> siècle. Elles ont pour rôle de fournir une description des effets de la non-linéarité des haut-parleurs à l'aide d'une valeur numérique ou un graphique [Michaud, 2012]. Plusieurs normes ont depuis été développées et maintes fois révisées, pour les différentes méthodes d'évaluation des distorsions. En même temps, des recherches ont été menées sur l'efficacité réelle de ces méthodes de mesure, en relation avec la perception des distorsions dans les haut-parleurs.

A propos de ces méthodes d'évaluation objectives des distorsions, la majorité des résultats des travaux conduits dans ce sens, s'est mise d'accord sur les points suivants :

- la mesure de la THD semble être la moins pertinente pour l'estimation de la distorsion non linéaire [Michaud, 2012]. Dans leur article portant sur une étude comparative des différentes méthodes de mesure des distorsions non linéaires dans les haut-parleurs et leur interprétation, Voishvillo *et al.* [Voishvillo et al., 2004] dressent un constat sévère de la distorsion harmonique totale. Ils qualifient la THD comme une mauvaise mesure de la distorsion d'un point de vue psychoacoustique dans les haut-parleurs. Selon eux, la THD n'arrive pas à distinguer les différents ordres d'harmoniques, et le balayage fréquentiel THD peut conduire à des conclusions erronées sur la performance d'un haut-parleur, car des niveaux similaires de THD peuvent correspondre à des distributions très différentes d'harmoniques d'ordres différents ;

- la distorsion harmonique et la distorsion harmonique totale, sont insuffisantes pour une être en accord des résultats de mesures subjectives sur la perception des distorsions du haut-parleur [Voishvillo et al., 2004]. Elles sont basées sur la mesure de la réponse à une composante sinusoïdale en basse fréquence (fondamentale), donnant ainsi des harmoniques juste en basses fréquences, et laissant par conséquent les distorsions dues aux hautes fréquences inexplorées [Klippel, 2005] ;
- les stimuli multifréquence et le bruit gaussien produisent une réponse plus riche en information sur les effets de non-linéarité dans le haut-parleur [Voishvillo et al., 2004].

Après ces constats reconnus, il s'avère que ces méthodes conventionnelles d'évaluation objective ont montré leur limite pour une estimation complète et efficace des distorsions, et ont depuis été remplacées ou complétées par d'autres méthodes objectives et subjectives. Les stimuli gaussiens par exemple, ont été employés avec la fonction de cohérence, qui permet une interprétation graphique plus directe et plus porteuse en informations sur la non-linéarité du haut-parleur sous test [Voishvillo et al., 2004]. Quant à la distorsion d'intermodulation, elle demeure toutefois une mesure assez pertinente grâce à son mode de test multifréquentiel, et qui l'emporterait sur les méthodes harmoniques notamment dans les système non linéaires polynomiaux statiques [Voishvillo et al., 2004]. Cette supériorité est d'autant plus confirmée si l'ordre de non-linéarité du système haut-parleur est assez élevé. Somme toute, il a ainsi été montré que les méthodes d'évaluation objective des distorsions, souffrent de la limite de ne pas être capables d'offrir une solution d'estimation exhaustive de la réalité des effets de la non-linéarité du haut-parleur. Ainsi, nous estimons dans cette évaluation des distorsions, deux points sont important à prendre en considération :

- le bon choix des stimuli pour l'excitation des différentes régions de la gamme de fréquence du haut-parleur, sans lequel on passerait à côté d'informations essentielles pour l'évaluation des distorsions ;
- tenir compte des spécificités de l'oreille humaine des sujets percevant cette distorsion du haut-parleur, en considérant la non-linéarité de la sensibilité de l'oreille et la complexité des mesures subjectives.

## 4.7 Audibilité et évaluation perceptive des distorsions

En acoustique, les lignes isosoniques<sup>1</sup>(Figure 4.17) décrivent la relation de la sensibilité de l'oreille humaine au son en fonction de la fréquence et du niveau. Ces courbes nous renseignent que les sons en basses et hautes fréquences de la bande audio sont moins audibles que les sons de même amplitude dans la bande de fréquence moyenne. Cette propriété s'applique également sur les composantes de distorsion [Temme, 1993]. Selon sous-entend que l'audibilité des produits de distorsion, dépend de la fréquence de ces produits, ou plus précisément, de la région de la gamme audio où ils se trouvent. Par exemple, une distorsion harmonique inférieure à 400 Hz est plus difficile à détecter qu'une distorsion harmonique au-dessus de 400 Hz [Temme, 1993].

1. Selon la norme ISO 226-2003 [ISO, 2003], une ligne isosonique est définie par : « sur un graphique ayant comme coordonnées la fréquence et le niveau de pression acoustique, ligne joignant les points dont les coordonnées représentent des sons purs jugés de même intensité. »

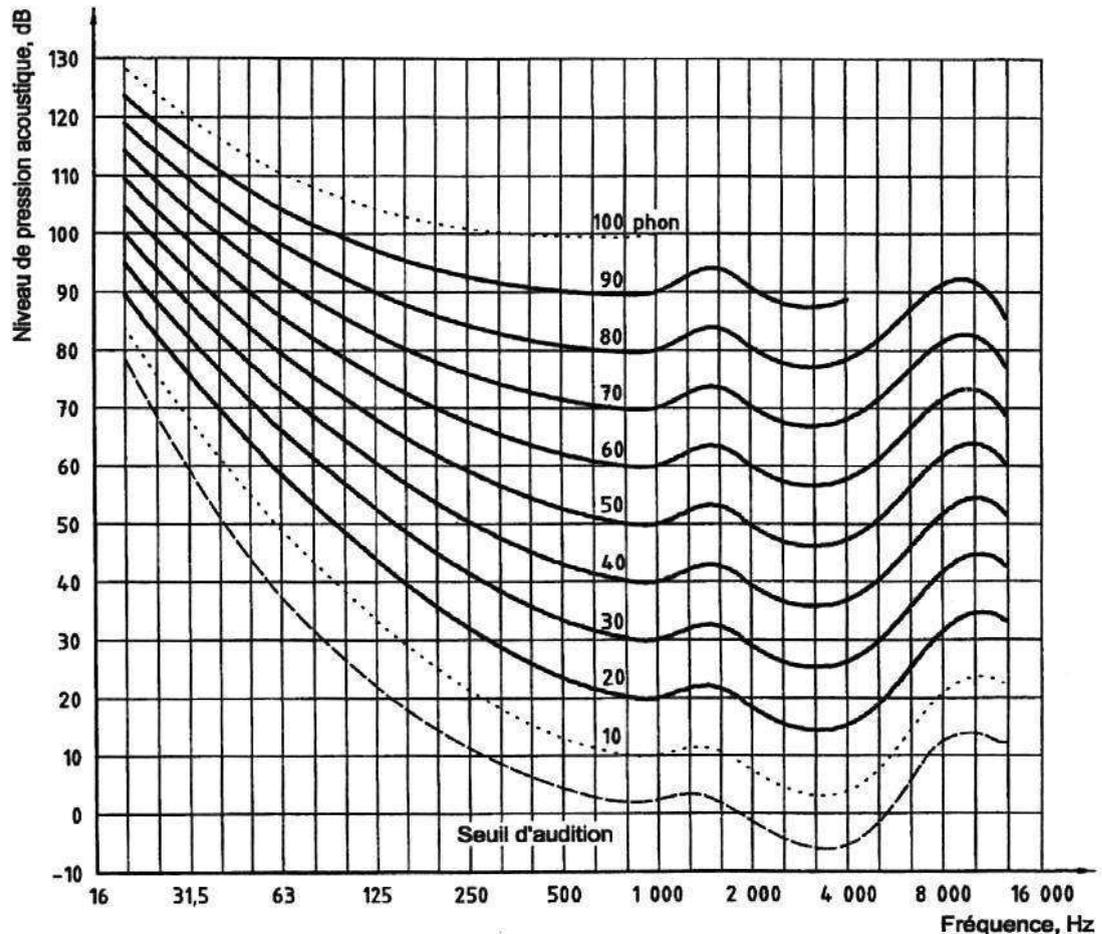


FIGURE 4.17 – Lignes isoniques normales<sup>1</sup> des sons purs (écoute binaurale en champ libre, incidence frontale) [ISO, 2003].

<sup>1</sup> Selon la norme ISO 226-2003 [ISO, 2003], une ligne isotonique normale est définie par : « *ligne isotonique correspondant au jugement moyen de sujets otologiquement normaux âgés de 18 ans à 25 ans inclusivement.* »

En général, l’audibilité de la distorsion est fonction de plusieurs facteurs :

1. la durée des sons : elle favorise l’audibilité des distorsions ;
2. la résolution temporelle minimale du système auditif humain estimée à environ 5 microsecondes par Milind N. Kunchur lors d’une étude clinique menée en 2007 [Kunchur, 2007], est un paramètre important pour le discernement perceptif de produits de distorsions hautes fréquences ;
3. l’**effet de masque** : phénomène psychoacoustique d’interaction entre les sons selon leurs niveaux ou leurs fréquences. L’effet de masque peut se produire dans le domaine temporel ou dans le domaine fréquentiel. Dans le temps, le son le plus intense (masquant) masque le son le moins intense. En fréquence, l’effet de masque dépend de la proximité fréquentielle des deux sons et de leurs niveaux respectifs. La Figure 4.18 illustre l’effet de masque fréquentiel dans l’audibilité des différents types de distorsion, où des sons purs dominants, arrivent à masquer tous les produits de distorsion

de niveau inférieur au niveau de masque, qui n'est autre que le seuil d'audition qui a été relevé par l'effet de masque [de Nanteuil, 2008; Rossi, 2007; Temme, 1993].

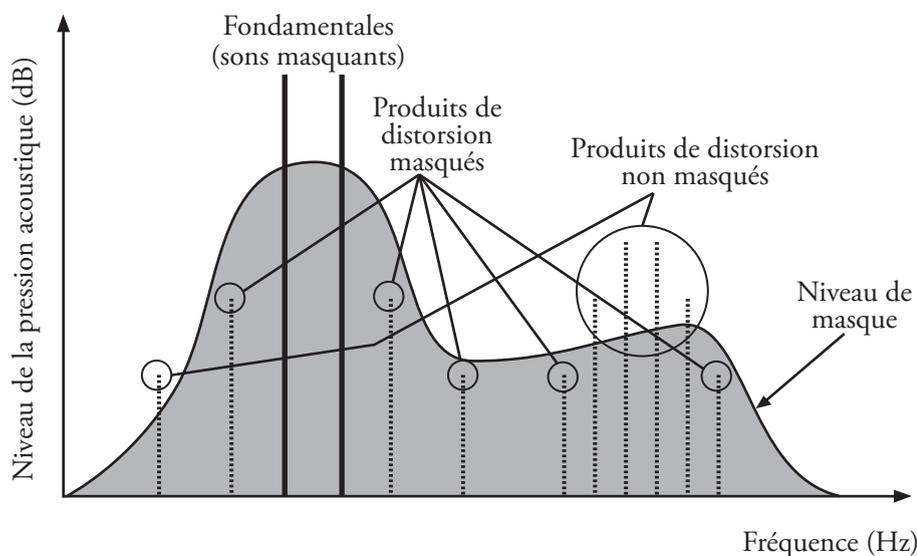


FIGURE 4.18 – Effet de masque fréquentiel, produit par deux sons purs (masquants) sur les produits de distorsion.

J. Moir dans un article référence [Moir, 1981], a abordé avec rigueur un concept déjà étudié auparavant, la *distorsion juste détectable* (just detectable distortion). La problématique établie par Moir dans son étude, était de savoir si les valeurs de THD avancées par les fabricants d'équipements audio, correspondaient à des niveaux de distorsion juste détectables ou juste acceptables. Parmi les résultats de cette étude, Moir avançait que la distorsion juste détectable dépend de :

1. le rapport de la valeur efficace sur la valeur moyenne de l'amplitude du signal pendant l'intervalle d'écoute effectif ;
2. la durée de chaque pic d'amplitude : dix pics de deux millisecondes chacun sont moins désagréables qu'un pic de vingt millisecondes au cours de la même période d'écoute ;
3. la bande de fréquence dans laquelle se produit la distorsion maximum. Les pics de distorsion en basses fréquences sont plus difficiles à détecter que les pics de même amplitude dans la bande de fréquences moyennes ;
4. l'ordre des harmoniques lorsque la distorsion est induite par une surcharge de l'électronique en amont, tel que les harmoniques et produits d'intermodulation du second ordre sont moins désagréables que les harmoniques impairs et produits d'intermodulation de troisième ordre.

Après avoir abordé l'audibilité des distorsions dans sa globalité, nous allons dans ce qui suit, considérer séparément la perception auditive des distorsions linéaires (distorsion d'amplitude, distorsion de phase), et celle des distorsions non linéaire.

### 4.7.1 Audibilité de la distorsion linéaire

#### 4.7.1.1 Distorsion d'amplitude

D'après des résultats d'études portant sur l'audibilité d'irrégularités de la réponse en fréquence (distorsion d'amplitude), cités par Rossi [Rossi, 2007], ces irrégularités sont produites par les coupures dans les filtres passe-bandes ou coupe-bandes, sous forme de pics ou de creux dans la réponse en fréquence. Rossi note que « les pics ou les bosses sont beaucoup plus audibles que les creux équivalents ou plus prononcés. » Ainsi, une distorsion d'amplitude dégradante de type pics-creux, serait plus nocive sur l'intelligibilité de la parole avec des pics qu'avec des creux. Ces derniers même profonds, s'avèrent être moins perceptibles que des pics modérés.

En général dans un haut-parleur, la distorsion linéaire d'amplitude se traduit d'un point de vue perceptible par une modification du timbre ou coloration du son à la sortie, causées par une altération de la courbe de la réponse en fréquence [Bright, 2002].

#### 4.7.1.2 Distorsion de phase

Si le physicien allemand Georg Ohm (1789 – 1854) est plus connu pour la loi qui porte son nom en électricité<sup>1</sup>, il a proposé également une autre loi peu connue en 1843, la *loi acoustique d'Ohm*, ou parfois appelée la *loi de phase acoustique*. Cette loi acoustique d'Ohm, stipule qu'un son est perçu par l'oreille comme un ensemble d'un certain nombre de sons purs harmoniques constitutifs, et que la phase de la forme d'onde de ce son n'a aucun effet sur la façon dont l'oreille le perçoit.

Un autre physicien et physiologiste allemand Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821 – 1894), a reconsidéré la loi de phase d'Ohm, pour confirmer que la perception des sons dépend uniquement de la puissance et du nombre de ses composantes fréquentielles, et nullement de leurs phases relatives.

Jusqu'aux années 1970, la loi de phase d'Ohm en acoustique faisait référence en matière d'inaudibilité de la distorsion de phase, depuis, cette loi commençait à faire l'objet de beaucoup de critiques, notamment avec l'essor des techniques audio numériques. Malgré l'hétérogénéité des résultats des divers travaux effectués dans ce sens, ils ont toutefois en commun la certitude de l'audibilité de la distorsion de phase apportée par les différents équipements électroacoustiques (filtres séparateurs et haut-parleurs). Nous allons tenter de résumer dans ce qui suit, l'essentiel des résultats des dernières recherches menées sur le sujet de l'audibilité de la distorsion de phase dans les haut-parleurs [Rossi, 2007; Self, 2013] :

- la distorsion de phase est audible, mais uniquement avec des signaux test et dans des conditions d'essais spécifiques ;
- même de faibles distorsions de phase (notamment les fréquences vocales) peuvent être audibles si les signaux sont convenablement choisis ;
- l'audibilité est beaucoup plus grande sur les écouteurs que sur les haut-parleurs ;
- l'acoustique de la salle est déterminante pour que l'oreille puisse détecter la présence d'une distorsion de phase (réverbération, angle d'incidence, . . .) ;

---

1. La loi d'Ohm, apparut dans le livre publié par Ohm en 1827 : *Die galvanische Kette mathematisch bearbeitet* (Le circuit galvanique étudié mathématiquement).

- dans les enceintes acoustiques multivoies, une distorsion de phase est facilement audible à cause de déphasages introduits systématiquement par les filtres séparateurs, par exemple, un filtre Butterworth du second ordre déphase le tweeter de 180° par rapport au Woofer ;
- avec des signaux de musique ou de parole normaux, la distorsion de phase n'est généralement pas audible.

Malgré l'intérêt porté à ce sujet de distorsion de phase, de la part de plusieurs chercheurs, beaucoup de zones d'ombre demeurent quant à la question de son audibilité. Une formulation rigoureuse capable de décrire les différents phénomènes inhérents à la distorsion de phase fait encore défaut. Pour cette raison, les organismes de normalisation spécialisés dans la qualité des équipements audio, ne se sont pas encore penchés sur le problème de la distorsion de phase, en émettant des exigences ou des recommandations à l'adresse des fabricants.

#### 4.7.2 Audibilité des distorsions non linéaires

La complexité combinée de la non-linéarité du haut-parleur et du système auditif humain, fait que les seuils d'audibilité de distorsion exprimés en termes de la distorsion harmonique et de la distorsion d'intermodulation, sont très influencés par le choix des signaux d'essai employés [Voishvillo et al., 2004]. Certainement, ceci ne contribue guère vers une convergence des différents résultats obtenus par les chercheurs, à même d'aboutir à un consensus autour d'une vision générale sur l'audibilité des distorsions non linéaires dans les haut-parleurs. Cet état de fait justifie clairement la déficience des méthodes de mesures, et des recommandations publiées par les organisations de normalisation, à leurs tête la *Commission Électrotechnique Internationale (CEI)* (International Electrotechnical Commission (IEC))<sup>1</sup>.

Du reste, dans la section 4.2.1 de la norme IEC 60107-2 :1997 [IEC, 1997], le haut-parleur est décrit quand même comme la principale source de distorsion non linéaire audible dans le système de restitution sonore dans les récepteurs de télévision. L'examen des deux seules normes CEI [IEC, 1986a;b], traitant des valeurs limites de la distorsion dans les haut-parleurs et dans les casques respectivement, nous a permis de retenir les constatations suivantes :

- les deux normes datent de 1986, en premières éditions, avec des reconfirmations annuelles systématiques jusqu'à 2018<sup>2</sup>, comme dernière date de stabilité<sup>3</sup>. Cela sous-

---

1. La CEI est une organisation internationale de normalisation créée en 1906, dont le siège est à Genève (Suisse). Elle prépare et publie des Normes internationales pour toutes les technologies électriques, électroniques et connexes. Les normes CEI couvrent une vaste gamme de technologies et services y afférents : production et distribution d'énergie, électronique, magnétisme et électromagnétisme, électroacoustique, multimédia, télécommunications et technologie médicale, ainsi que les disciplines générales associées telles que la terminologie et les symboles, la compatibilité électromagnétique, mesure et performance, fiabilité, conception et développement, sécurité et environnement.

2. Les pages web des deux normes dans le site de la CEI ont été consultées le 19/02/2018 : <https://webstore.iec.ch/publication/2520> (norme IEC 60581-7 :1986), <https://webstore.iec.ch/publication/2518> (norme IEC 60581-10 :1986).

3. La date de stabilité (stability date), est une date émise périodiquement pour une publication normative donnée jusqu'à laquelle, son contenu restera inchangé. À cette date, la publication sera reconfirmée, retirée, remplacée par une édition révisée ou modifiée [IEC].

entend, qu’aucune révision ou modification n’a été apportée depuis la date de publication de ces premières éditions ;

- les deux normes émettent des valeurs limites de la distorsion harmonique caractéristique totale, comme seule caractéristique d’évaluation des distorsions dans les transducteurs électroacoustiques considérés, ce qui est en décalage avec toutes les conclusions des récentes recherches décrivant la distorsion harmonique, au profit d’autres métriques censées représenter avec plus de fidélité l’audibilité des distorsions ;
- les valeurs limites respectives pour les deux transducteurs sont données dans le tableau suivant :

Haut-parleurs <sup>1</sup>	<ul style="list-style-type: none"> <li>— de 250 Hz à 1000 Hz <math>\leq 2\%</math></li> <li>— au-dessous de 1 kHz à 2 kHz <math>\leq 2\%</math> décroissant linéairement jusqu’à <math>\leq 1\%</math> par rapport à une échelle logarithmique de fréquence</li> <li>— de 2 kHz à 6,3 kHz <math>\leq 1\%</math></li> </ul> <p>Les crêtes de distorsion isolées (3 au maximum) dépassant la limite des tolérances respectives ne seront pas prises en considération à moins que leur largeur, à la limite de tolérance, ne soit supérieure à 1/3 d’octave</p>
Casques <sup>2</sup>	<p>Dans le domaine de fréquence de 100 Hz à 3000 Hz</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\leq 1\%</math> à un niveau de pression acoustique de 94 dB (re 20 <math>\mu\text{Pa}</math>)</li> <li><math>\leq 3\%</math> à un niveau de pression acoustique de 100 dB (re 20 <math>\mu\text{Pa}</math>)</li> </ul> <p>On ne tient pas compte de pointes isolées dépassant les limites de tolérance (3 maximum) si elles n’excèdent pas un tiers d’octave au niveau correspondant à ces limites de tolérance</p>

TABLEAU 4.1 – Valeurs limites de la distorsion harmonique caractéristique totale des haut-parleurs et des casques dans les équipements et systèmes électroacoustiques haute-fidélité [IEC, 1986a;b].

En dehors des publications normatives, Colloms [Colloms, 1991] affirme que dans les amplificateurs, des niveaux inférieurs à 0,1% pour la distorsion harmonique et la distorsion d’intermodulation puissent être audibles, tandis que des niveaux de 1% sont complètement inaudibles dans les haut-parleurs.

Par ailleurs, Rossi [Rossi, 2007] désigne les distorsions d’intermodulation et par différences des fréquences pour responsables de la dégradation audible par rapport à la distorsion harmonique, du fait de la production de nouvelles composantes inharmo- niques. Selon Rossi [Rossi, 2007], à des taux de distorsion d’intermodulation de 0,2%, la distorsion est audible, ressentie comme une perte de «clarté» ou de «netteté» par les auditeurs. En plus de sa constatation de la prévalence de la distorsion harmonique en pratique, Rossi avance des valeurs du taux d’intermodulation en guise de recomman- dations pratiques. Pour un système audio complet, les taux d’intermodulation IMD

---

1. Essais réalisés pour une pression acoustique dans une bande de fréquence déterminée, de 90 dB à une distance de 1 m en utilisant un domaine de fréquence fixé de 100 Hz à 8000 Hz.

2. Essais réalisés pour des tensions caractéristiques :  $\leq 2,5$  V (pour les casques définis par une tension),  $\leq 5$  V (pour les casques définis par une impédance).

se situent comme suit :  $< 1\%$  pour les applications professionnelles ;  $< 3\%$  pour les applications domestiques ; et  $< 5\%$  pour les systèmes de sonorisation.

Dans le § 4.6, nous avons montré que malgré sa popularité, la THD commence à perdre du terrain devant d'autres caractéristiques comme le taux d'intermodulation ou des métriques spécifiques proposées par les chercheurs. Somme toute, la compréhension améliorée des phénomènes psychoacoustiques et du système auditif humain, a aidé à faire avancer beaucoup de nouvelles techniques basées sur l'audibilité des sons et des distorsions en particulier, telles que les techniques de compression de données audio sans perte (comme FLAC, WMA Lossless ou Dolby TrueHD)<sup>1</sup>, ou avec perte (comme AAC, MP3 ou OGG Vorbis)<sup>2</sup>, ou le système naissant de radiodiffusion sonore numérique DAB (Digital Audio Broadcasting).

## 4.8 Conclusion

Le haut-parleur est un transducteur électroacoustique, souffrant d'une non-linéarité reliée à son fonctionnement et sa structure, et dont il n'a pas réussi à s'en défaire même après près d'un siècle de son invention.

Dans ce chapitre nous avons surtout montré la complexité des distorsions comme effets des caractéristiques non linéaires dans le haut-parleur électrodynamique en particulier, et dans les systèmes non linéaires de façon générale. Ainsi, il a été important de décrire clairement les différents types de distorsion : distorsion linéaire, distorsion non linéaire, distorsion d'amplitude, distorsion de fréquence, etc. De chaque type de distorsion en découle une méthode d'évaluation appropriée, et ayant fait l'objet parfois de plusieurs normes qui continuent de recevoir des révisions et des mises à jour.

Dans cette thèse, la distorsion représente l'objet de la modélisation, dans le système haut-parleur identifié. Par conséquent, nous nous devons d'explorer les différentes causes responsables des distorsions présentes dans le haut-parleur. Il a été ainsi question des différentes sources des distorsions non linéaires dans le haut-parleur électrodynamique, énoncées selon leurs origines : électromagnétiques, mécaniques et acoustiques. Nous avons montré également l'insuffisance de certaines méthodes d'évaluation objective comme la distorsion harmonique ou la distorsion harmonique totale pour l'évaluation des distorsions, ce qui a poussé les ingénieurs à imaginer d'autres méthodes capables de fournir une information plus riche sur les distorsions, et notamment faciles d'interprétation. Une évaluation perceptive s'est même imposée afin de tenir compte de l'aspect subjectif des mesures de distorsion, pour une meilleure description des distorsions, en corrélation étroite avec les caractéristiques non linéaires réelles du haut-parleur.

Le prochain chapitre abordera le problème important de la modélisation des haut-parleurs électrodynamiques. Les différentes approches de modélisation qui ont été développées au fil des années y sont décrites.

---

1. FLAC (Free Lossless Audio Codec), WMA Lossless (Windows Media Audio Lossless).

2. AAC (Advanced Audio Coding), MP3 (Moving Picture Experts Group-1/2 Audio Layer III).

# CHAPITRE 5

## État de l'art de la modélisation du haut-parleur électrodynamique

### 5.1 Introduction

Ce chapitre constitue une revue des différents modèles des haut-parleurs électrodynamiques linéaires et non linéaires qui ont été développés durant les quarante dernières années, et qui ont majoritairement été mis en œuvre lors des phases de conception des haut-parleurs.

En général, les modèles abordés sont une extension naturelle de méthodes de modélisation déjà connues, et qui ont fait leurs preuves dans divers domaines. Toutefois, le haut-parleur électrodynamique comme objet de cette modélisation, imprimera sans doute son influence sur les différentes méthodes adoptées, par la nature de son comportement multidomaines, et par les connaissances *a priori* capitalisées jusque-là depuis les premières théories développées dans les années 1950.

Ainsi, il est difficile de s'atteler au développement d'un modèle complet du haut-parleur électrodynamique. A ce titre, chaque modèle ne peut tenir compte que d'un seul aspect des différents comportements du haut-parleur, ce qui aiderait parfois au choix de la méthode de modélisation, et imposerait les outils de son développement.

Dans la seconde section, sont énumérées les multiples raisons qui motivent les chercheurs à modéliser le haut-parleur. La troisième section est consacrée à l'approche paramétrique qui compte sept modèles du haut-parleur. Les modèles sont traités différemment selon leur importance, et sont : les modèles à paramètres localisés, les séries de Volterra analytiques, les modèles à espace d'état non linéaire, les modèles numériques, les modèles NARMAX, les modèles à temps discret et les modèles des systèmes à Hamiltonien à ports.

L'approche non paramétrique de modélisation fera l'objet de la quatrième section, à laquelle appartiennent trois types de modèles du haut-parleur : les modèles de Volterra non paramétriques, les modèles basés sur la déconvolution non linéaire et les modèles fréquentiels.

En dernier, nous concluons ce chapitre par l'approche semi-paramétrique de modélisation qui est la moins représentée, avec les modèles structurés en blocs.

## 5.2 Modélisation du haut-parleur électrodynamique

A peine quelques années après l'invention du haut-parleur, sa modélisation s'est naturellement imposée dans sa phase de conception et est devenue essentielle pour les raisons suivantes :

1. Mieux connaître le comportement du haut-parleur considéré comme une charge (impédance) en fonction de la fréquence pour l'optimisation du gain de l'amplificateur de puissance [Sturtzer, 2013] ;
2. Améliorer la compréhension du fonctionnement du haut-parleur de façon globale, et compléter les connaissances sur les mécanismes de transduction électromécanique et mécano-acoustique du haut-parleur électrodynamique afin de :
  - évaluer les performances du haut-parleur lors de sa conception, en associant les paramètres du modèle aux paramètres physiques [Merit, 2010] ;
  - choisir la meilleure topologie pour la conception de l'amplificateur de puissance, qui tient compte des différents défauts du haut-parleur (gain variable, contre-réaction, etc.) ;
  - choisir la meilleure enceinte pour le haut-parleur utilisé, capable de fournir la reproduction sonore souhaitée, en ayant à agir sur le type de l'enceinte<sup>1</sup>, la forme, les dimensions et les matériaux choisis. ;
  - proposer une solution appropriée pour la compensation des distorsions non linéaires, par la prise en compte de la non-linéarité des paramètres du modèle du haut-parleur ;
  - intégrer le haut-parleur dans le cadre d'une stratégie ou solution technique spécifique comme l'auralisation, le contrôle actif du bruit (CAB) ou l'annulation d'écho acoustique.

Motivés par l'une ou l'autre des raisons citées plus haut de la modélisation, les chercheurs ont pu tirer profit des développements opérés dans les divers domaines des sciences et de la technologie, concernant la modélisation des différents systèmes dynamiques non linéaires. Des dizaines de méthodes de modélisation ont ainsi pu être développées ou adaptées, pour représenter les différents comportements linéaires et non linéaires du haut-parleur électrodynamique. Les différents modèles rencontrés dans la littérature, ont été réunis dans les trois approches classiques de la modélisation, à savoir, l'approche paramétrique, l'approche non paramétrique, et l'approche semi-paramétrique.

## 5.3 Approche paramétrique de modélisation (boîte blanche)

L'approche paramétrique aboutissant sur un modèle de connaissance, fut la principale approche utilisée pour la représentation des haut-parleurs électrodynamiques depuis leur invention, et qui dominait encore jusqu'aux années 1980 [Brunet, 2014]. Cette approche s'appuie essentiellement sur le modèle à paramètres localisés construit à partir des différentes lois physiques régissant les divers mécanismes impliqués dans

---

1. Il existe plusieurs types d'enceintes : enceinte close, enceinte bass-reflex, enceinte ouverte (baffle plan), enceinte à radiateur passif, etc., dont le choix est dicté par plusieurs paramètres et des calculs rigoureux, selon le type de haut-parleurs utilisés et l'application..

le fonctionnement du haut-parleur. Depuis leur début, l'objectif des modèles paramétriques est de prédire le comportement du haut-parleur à travers la détermination des différentes grandeurs (paramètres) électro-mécano-acoustiques employées, exprimées en basses fréquences et pour un fonctionnement en petits signaux<sup>1</sup>. Par ailleurs, l'approche paramétrique s'est élargie au fil du temps pour couvrir d'autres types de modèles, tous développés autour d'une base de connaissances physiques, offrant des modèles exprimés à l'aide de paramètres pourvus d'un sens physique et aisément interprétables dans le contexte comportementale du haut-parleur, comme les modèles basés sur la série de Volterra, ou l'espace d'état, les modèles numériques ou les modèles génériques NARMAX, etc. Ces modèles ont été fondamentalement développés afin de prendre en considération le comportement non linéaire des haut-parleurs électrodynamiques, autrefois négligé par souci de simplicité ou faute de méthodes appropriées permettant une représentation sérieuse et rigoureuse des différents phénomènes mis en jeu dans le fonctionnement global du haut-parleur.

### 5.3.1 Modèle à paramètres localisés

Le modèle à paramètres localisés étant de loin le plus employé pour la modélisation du comportement du haut-parleur électrodynamique, a fait l'objet de moult améliorations à la fois sur les domaines fréquentielles considérés, sur les amplitudes de travail ou selon que la non-linéarité soit considérée ou non. Compte tenu de leur importance pour la compréhension du fonctionnement du haut-parleur électrodynamique, les modèles à paramètres localisés linéaires et non linéaires feront l'objet dans les sections suivantes de cette thèse d'un développement plus détaillé, où l'on traite les différents mécanismes physiques, utiles pour l'explication des différentes sources de distorsion traités.

#### 5.3.1.1 Modèle linéaire à paramètres localisés

Les tout premiers modèles du haut-parleur ont été proposés par des ingénieurs électriciens, mettant à profit les propriétés linéaires des circuits électriques réalisés à l'aide de résistances, de condensateurs, et de bobines. Des ingénieurs acousticiens comme les américains Harry Ferdinand Olson (1901 – 1982) et Leo L. Beranek (1914–2016) ont été les premiers à utiliser les circuits acoustiques analogiques pour l'analyse et la conception des enceintes des haut-parleurs. Beranek a fourni une bonne base pour l'analyse théorique et J. F. Novak a effectué de nombreux calculs établis sur la base de nouvelles hypothèses simplificatrices, ce qui a abouti à une solution pratique pour la réponse d'un haut-parleur dans une enceinte [Novak, 1959; Thiele, 1971]. En 1961, s'appuyant sur le modèle simplifié établi par Novak, l'ingénieur australien Albert Neville Thiele (1920 – 2012) a décrit de façon concrète l'obtention de la réponse des haut-parleurs en les simulant comme des filtres électriques.

Les études faites sur des circuits équivalents de haut-parleurs dans des enceintes à évent, ont démontré l'analogie entre la réponse acoustique basse fréquence des haut-

---

1. Certains auteurs posent le seuil de 1 V pour l'excitation du haut-parleur comme limite pour un fonctionnement en petits signaux. Selon [Sturtzer, 2013] citant Klippel, la limite de la région des petits signaux est estimée à 10 % du déplacement maximal de la membrane. Au fait, nous pensons comme ces auteurs qui avancent que le domaine des petits signaux se situe là où le comportement du haut-parleur demeure linéaire, et c'est une règle générale raisonnable, valable pour tous types de haut-parleur (gamme fréquentielle, technologie et dimensions).

parleurs électrodynamiques et la réponse des filtres passe-haut. Les hypothèses simplificatrices utilisées pour cette équivalence sont justifiées dans la pratique et les techniques employées sont très simples [Thiele, 1971].

À partir de 1972, le scientifique et électroacousticien américain Richard H. Small (1935 –), tout en continuant sur les traces de A. N. Thiele, a publié plusieurs articles dans l'AES (Audio Engineering Society) dans lesquels [Small, 1973], il a surtout procédé à la formulation mathématique des paramètres de performance des haut-parleurs électrodynamiques, plus connus plus tard par les paramètres de Thiele-Small. A partir du début des années 1970, ces paramètres sont devenus de véritables standards d'industrie, et sont donnés par les fabricants de haut-parleurs dans des fiches techniques, utiles pour les concepteurs des systèmes à haut-parleurs. Les paramètres de Thiele-Small sont également incontournables pour la simulation de diverses grandeurs du haut-parleur électrodynamique telles que la position, la vitesse ou l'accélération de la membrane, l'impédance électrique ou la pression sonore rayonnée.

Le modèle analogique à paramètres (éléments) localisés permet ainsi de modéliser le haut-parleur électrodynamique à l'aide de schémas équivalents en utilisant les paramètres de Thiele-Small. Il s'agit de la modélisation des haut-parleurs électrodynamiques montés sur un écran infini<sup>1</sup>, considérés uniquement en basses fréquences ou à des fréquences où les dimensions du système rayonnant du haut-parleur sont faibles par rapport à la longueur d'onde d'intérêt [Jumppanen, 2013]<sup>2</sup>.

Les modèles employés sont basés sur l'analogie avec les circuits électriques pour décrire le comportement en basses fréquences des haut-parleurs électrodynamiques, en décrivant les grandeurs de sortie comme la vitesse de la membrane ou la puissance sonore rayonnée en fonction de la tension d'entrée aux bornes de la bobine mobile. Le modèle est construit sur la base du couplage des parties électrique, mécanique et acoustique du haut-parleur, où chacune est composée de paramètres localisés propres à son domaine.

Le couplage entre les parties électrique et mécanique et entre les parties mécanique et acoustique est réalisé à l'aide de deux transformateurs parfaits, respectivement ( $B| : 1$ ) et ( $1 : S$ ) [Kaddour et al., 2003], ce qui a pu aboutir sur le modèle linéaire à paramètres localisés du haut-parleur électrodynamique. La partie électrique décrit les relations entre le courant et la tension dans la bobine mobile. La partie mécanique décrit les relations entre la force et la vitesse engendrées par la suspension amortie et la masse de la membrane. La partie acoustique quant à elle, décrit le rayonnement sonore de la membrane.

Un tel modèle tente de représenter le comportement réel du haut-parleur et offre une représentation directe des relations physiques qui régissent son fonctionnement et les différents couplages. Le modèle à paramètres localisés permet en outre toute modification sur sa structure, selon les connaissances acquises à propos des paramètres et leurs interactions. Toutefois, lors de sa mise en œuvre, les ingénieurs ont senti en pratique un écart évident entre les résultats expérimentaux sur les haut-parleurs et les réponses prédites avec les modèles linéaires à paramètres localisés. Ces limites du modèle linéaire

---

1. L'écran acoustique est une surface plane acoustiquement réfléchissante, d'épaisseur et de dimensions bien définies, employé pour la séparation entre les rayonnements avant et arrière du haut-parleur [IEC, 2007]. L'écran infini est une plaque de très grandes dimensions, qui sert à isoler les ondes avant et arrière pour éviter toute perturbation des ondes avant du haut-parleur.

2. En basses fréquences, la membrane du haut-parleur électrodynamique est supposée rigide, et le haut-parleur est assimilé à un piston [Jumppanen, 2013].

à paramètres localisés, ont été aussitôt justifiées par la négligence des caractéristiques non linéaires de plusieurs éléments du haut-parleur électrodynamique, tels que sa suspension, les phénomènes magnétiques, les phénomènes thermiques, etc. [Bouvier et al., 2016].

Nous allons décrire dans ce qui suit les différentes parties qui constituent le modèle linéaire à paramètres localisés du haut-parleur électrodynamique selon le synoptique de la Figure 5.1, en fonction des divers éléments propres à chaque système, et avec lesquels sont exprimés les paramètres localisés du modèle linéaire :

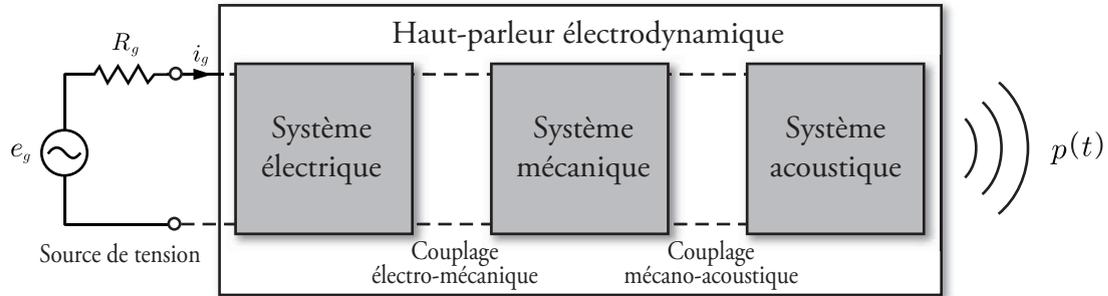


FIGURE 5.1 – Schéma synoptique du modèle linéaire à paramètres localisés du haut-parleur électrodynamique.

### 5.3.1.1.1 Système électrique

Le haut-parleur électrodynamique considéré est supposé être alimenté par un amplificateur, se comportant comme une source de tension réelle, de tension à vide  $e_g$  et de résistance interne  $R_g$ . Le système électrique peut être représenté par la résistance électrique  $R_e$ , équivalente aux pertes dans le moteur, en série avec l'inductance de la bobine mobile  $L_e$ . L'ensemble du système peut être modélisé électriquement par le circuit analogue suivant (Figure 5.2) :

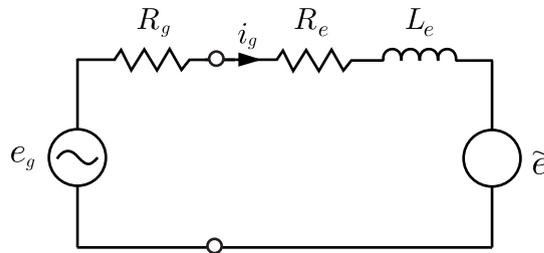


FIGURE 5.2 – Circuit équivalent analogue du système électrique du haut-parleur électrodynamique.

La loi des mailles de Kirchhoff nous permet d'écrire l'équation électrique suivante :

$$e_g = R_g i_g + R_e i_g + L_e \frac{di_g}{dt} + \tilde{e} \quad (5.1)$$

avec

$\tilde{e} = Blv$  : est la force contre électromotrice f.c.é.m. induite dans la bobine par son déplacement dans le champ magnétique de l'aimant permanent  $B$  à la vitesse  $v$ .

Toutefois, il importe de rappeler que cette approximation de l'impédance du haut-parleur par une résistance en série avec une inductance, quoique elle a été adoptée dès le début pour la représentation du circuit électrique du haut-parleur électrodynamique, elle souffrait d'un écart flagrant constaté entre la courbe expérimentale de l'impédance et la courbe obtenue à l'aide du circuit électrique équivalent notamment dans la région des hautes fréquences. Dans [Thiele, 1971], Thiele proposait à la place de l'unique inductance, une inductance en parallèle avec une résistance représentant les pertes par courant de Foucault dans la plaque de fond et la plaque de champ, tout en notant que son effet demeure faible dans les basses fréquences.

Depuis, il a été clair que le modèle utilisé jusque-là était incomplet tant qu'il négligeait le comportement du haut-parleur dans la région des hautes fréquences. La représentation  $R_e$  en série avec  $L_e$  ne tenait tout simplement pas compte de la présence de toutes les pièces métalliques et magnétiques qui entourent la bobine mobile. La présence des courants de Foucault dans les structures entourant la bobine mobile, tend à réduire l'inductance de la bobine et à augmenter les pertes en hautes fréquences [Dodd et al., 2004].

Par conséquent, les chercheurs ont proposé plusieurs modèles de l'impédance de la bobine, afin de s'approcher le plus possible de sa courbe réelle. Nous avons triés quelques-uns de ces modèles les plus usuels qui peuvent être représentés à l'aide d'un circuit équivalent<sup>1</sup>, afin de les décrire succinctement :

**Modèle L2R :** Initialement proposé par Thiele [Thiele, 1971], le modèle comporte l'inductance  $L_e$  en série avec une autre inductance  $L_2$  (appelée para-inductance de la bobine) shuntée par une résistance  $R_2$ , représentant la résistance électrique due aux pertes additionnelles causées par les courants de Foucault (Figure 5.3). Peu précis, ce modèle a toutefois été longtemps employé dans les simulations et repris par plusieurs auteurs [Klippel, 2005; 2006; Ravaud et al., 2010].

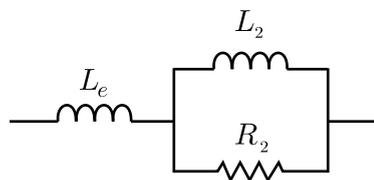


FIGURE 5.3 – Modèle avec pertes L2R de l'impédance électrique du haut-parleur.

Pour le modèle L2R, la loi des mailles de Kirchhoff pour les deux mailles disponibles, faisant circuler les deux courants  $i_g$  et  $i_2$  (Figure 5.4), permet d'écrire :

---

1. Au fait, plusieurs modèles de l'impédance sont purement analytiques et ne peuvent être représentés à l'aide d'éléments localisés et par la suite à l'aide d'un circuit électrique équivalent, comme les modèles de Leach [W. M. Leach, 2002], celui de Wright [Wright, 1990] ou de Thorborg [Thorborg et al., 2007]

$$\begin{cases} e_g = R_g i_g + R_e i_g + L_e \frac{di_g}{dt} + R_2 i_g - R_2 i_2 + \tilde{e} \\ 0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - R_2 i_g \end{cases} \quad (5.2)$$

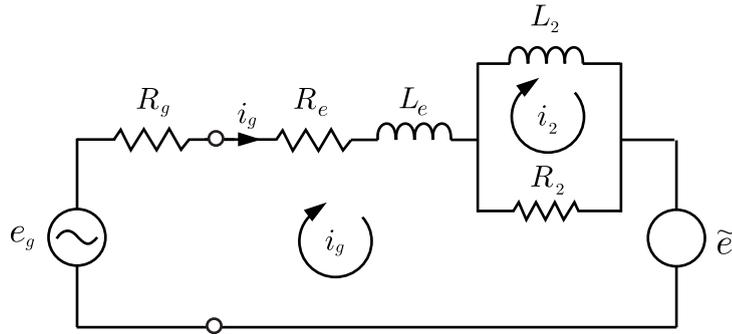


FIGURE 5.4 – Circuit équivalent analogue du système électrique du haut-parleur électrodynamique selon le modèle L2R.

**Modèle L3R :** D'après [Mateljan and Sikora, 2012], ce modèle a été développé par A. N. Tihiele en 2004, et il est une extension du modèle L2R, où un réseau L3||R3 a été ajouté en série avec le schéma L2R (Figure 5.5). Il permet cependant une sensible amélioration de l'approximation de l'impédance du haut-parleur, mais au prix d'une complexité accrue dans le calcul des paramètres du modèle.

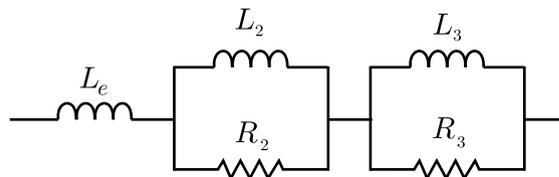


FIGURE 5.5 – Modèle avec pertes L3R de l'impédance électrique du haut-parleur.

### 5.3.1.1.2 Couplage électro-mécanique

Dans le haut-parleur électrodynamique, il existe également un système électromagnétique représenté physiquement par le moteur du haut-parleur, qui convertit l'énergie électrique en une force mécanique. Un aimant permanent produit un champ magnétique  $B$  d'intensité constante. Quand un courant électrique  $i_g$  est appliqué à la bobine mobile, il produit dans l'entrefer une force électromagnétique, qui s'exprime à l'aide de la loi de Laplace :  $F_L = Bli$ , et qui agit en même temps sur la bobine mobile. Le couplage entre la bobine mobile traversée par le courant et le champ magnétique créé par l'aimant permanent, est caractérisé par le facteur de force  $Bl$ .

Lors du déplacement de la bobine mobile dans le champ magnétique radial en coupant les lignes de flux, une tension contre électromotrice  $e$  proportionnelle à la vitesse est générée (Loi de Lentz) :  $v = \tilde{e}/Bl$  (Figure 5.6).

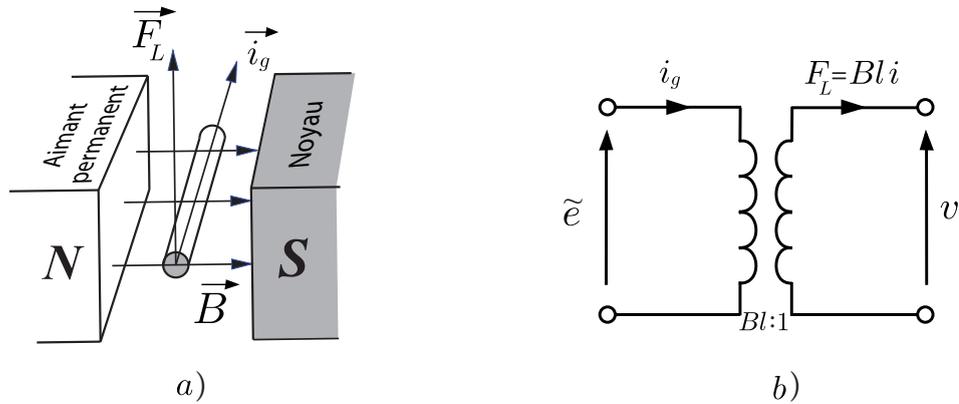


FIGURE 5.6 – Couplage électro-mécanique : a) Modèle physique, b) Circuit équivalent analogue.

### 5.3.1.1.3 Système mécanique

En considérant l'hypothèse du piston rigide évoquée précédemment, comme mode de fonctionnement de la membrane du haut-parleur de masse  $M_{ms}$ , reliée aux pièces fixes du haut-parleur par les suspensions interne et externe de compléance  $C_{ms}$ , avec un amortissement fluide de coefficient  $R_{ms}$  (Figure 5.7(a, b)).

Ainsi, le haut-parleur électrodynamique peut être modélisé mécaniquement par le schéma de la Figure 5.7(c) :

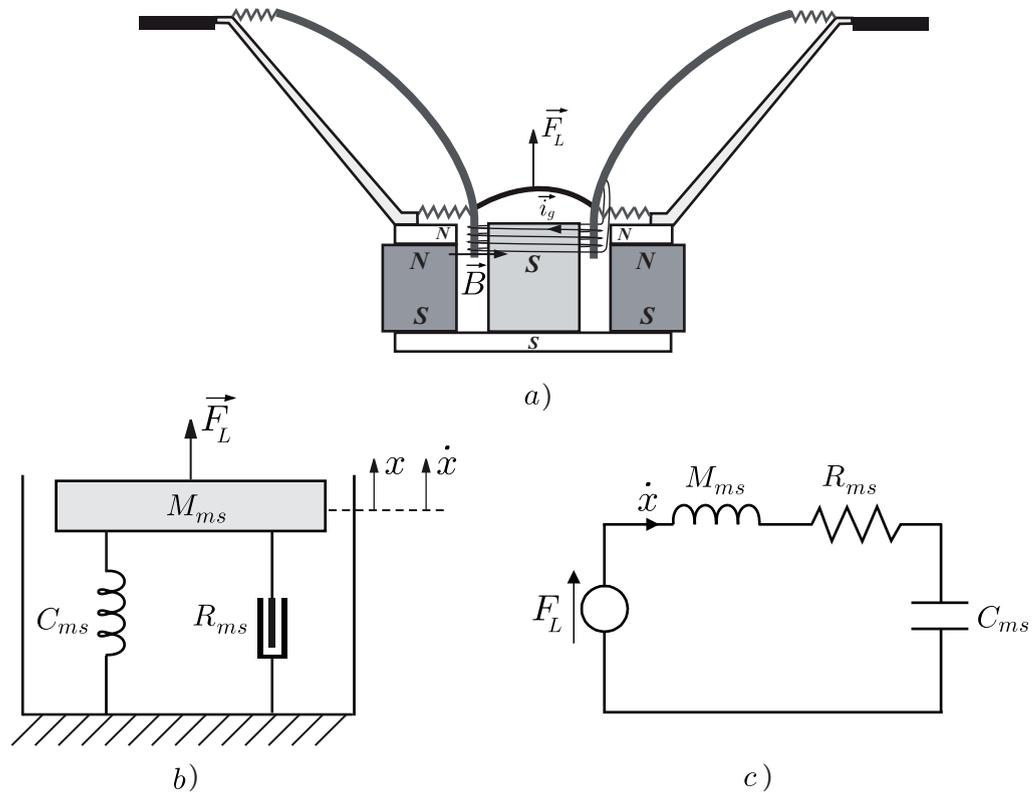


FIGURE 5.7 – Système mécanique : a) Système réel, b) Modèle physique, et c) Circuit équivalent analogue.

En tenant compte de la force de Laplace qui fait déplacer la bobine mobile dans l'entrefer qui a été exprimée précédemment, produite par le passage du courant électrique  $i_g$  dans la bobine mobile et l'induction magnétique générée, et en tenant compte des différentes forces introduites par la masse  $M_{ms}$ , la résistance  $R_{ms}$  et la compliance  $C_{ms}$ , la loi de la dynamique sur l'ensemble mobile permet d'écrire l'équation mécanique suivante :

$$\sum \vec{F}_{ext} = M_{ms} \ddot{x} \quad (5.3)$$

$$Bli - R_{ms}\dot{x} - \frac{1}{C_{ms}}x = M_{ms}\ddot{x} \quad (5.4)$$

Cette force agit sur la bobine mobile et la membrane. Le mouvement de la membrane est limité par la suspension, qui agit comme un ressort, en fournissant une force dont la direction est opposée à celle du déplacement. Une partie de l'énergie est absorbée en tant que friction. Cela fait agir le haut-parleur comme un système masse-ressort-amortisseur, soit un pendule amorti.

#### 5.3.1.1.4 Couplage mécano-acoustique

La force de Laplace  $F_L$  exprimée plus haut accélère la bobine, la membrane et l'air qui l'entoure. Ainsi, la membrane du haut-parleur d'une surface effective  $S_D$  peut être considérée comme un piston qui fait déplacer l'air à l'aide de mouvements d'avant en arrière créant respectivement des zones de compression et de dépression devant la membrane. Ces mouvements de la membrane sont le résultat de la conversion de la force  $F_L$  et la vitesse  $v$  mécaniques en pression acoustique  $p$  et en débit volumique acoustique  $q$ . Les équations de cette conversion sont les suivantes (Figure 5.8) :

$$p = \frac{F_L}{S_D} = \frac{Bli}{S_D} \quad (5.5)$$

$$q = vS_D \quad (5.6)$$

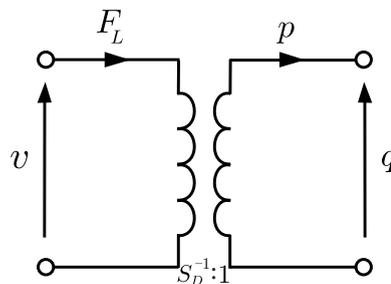


FIGURE 5.8 – Circuit équivalent analogue du couplage mécano-acoustique.

#### 5.3.1.1.5 Système acoustique

Quoique la grande partie de l'énergie apportée au moteur du haut-parleur soit dissipée sous forme de chaleur ( $R_e$ ), ou de friction ( $R_{ms}$ ), la fraction d'énergie restante

s'échappe cependant du système sous forme d'une onde acoustique rayonnée. La taille de la membrane par rapport à la longueur d'onde de l'onde sonore détermine la quantité d'énergie rayonnée.

L'impédance représentant la charge d'air sur la membrane du haut-parleur supposé être monté sur un écran infini est composée d'une partie due au rayonnement sonore, et une partie réactive en raison de la masse d'air qui déplacée radialement. La charge d'air agissant sur la membrane peut être modélisée à l'aide d'une impédance  $Z_{ar}$  ou d'une admittance  $Y_{ar} = Z_{ar}^{-1}$  (Figure 5.9).

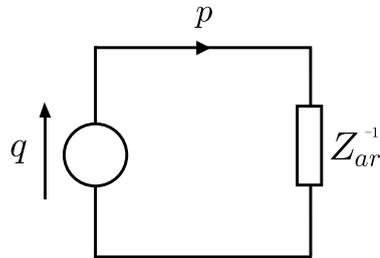


FIGURE 5.9 – Circuit équivalent analogue du système acoustique.

### 5.3.1.1.6 Circuit équivalent analogue complet du système électro-mécano-acoustique

La Figure 5.10 représente le schéma du circuit équivalent analogue complet du système électro-mécano-acoustique du haut-parleur électrodynamique monté sur écran infini dans lequel nous avons adopté le modèle L2R pour l'impédance électrique, avec sa source de tension, et construit à l'aide de couplages par transformateurs biportes, dans lequel les parties mécaniques et acoustiques sont en analogie inverse (admittances).

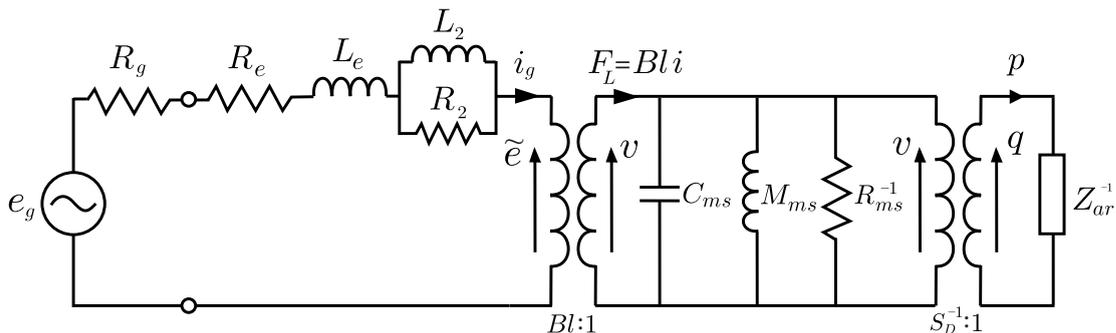


FIGURE 5.10 – Circuit équivalent analogue complet du système électro-mécano-acoustique du modèle linéaire du haut-parleur électrodynamique.

### 5.3.1.2 Modélisation non linéaire du haut-parleur électrodynamique

Dans la région de linéarité, le haut-parleur électrodynamique est normalement exploité en régime dit de *petits signaux*, et est caractérisé par les fameux paramètres de Thiele-Small, largement employés pour la description des différentes performances du haut-parleur à la fois par les fabricants et par les utilisateurs. Le fonctionnement

en *larges signaux* du haut-parleur, modifie ses différentes caractéristiques, et rend les paramètres de Thiele-Small inutiles.

Dans la section 4.4 du chapitre précédent, nous avons énuméré les différentes sources de non-linéarités présentes dans le haut-parleur électrodynamique. Certaines sources de ces non-linéarités sont plus pertinentes dans le processus de modification de la linéarité du comportement du haut-parleur comme : le facteur de force, la compliance et l'auto-inductance.

Nous avons constaté précédemment que la majorité de ces paramètres non linéaires dépendent de la position  $x$  de la membrane du haut-parleur. Dans la littérature, nous pouvons rencontrer toutefois le même traitement concernant les sources de non-linéarité dans le haut-parleur mais avec une dépendance par rapport au courant électrique<sup>1</sup>. Il importe au passage de mentionner qu'il existe une relation bijective entre le courant électrique  $i$  et la position de la membrane  $x$ , ce qui permet d'exprimer indifféremment les différents paramètres non linéaires en fonction du courant électrique ou de la position [Ravaud et al., 2010]<sup>2</sup>.

En dehors des exemples des modèles linéaires à paramètres localisés abordés précédemment, la thèse de Kaizer [Kaizer, 1986] fait office de référence notoire dans le domaine, maintes fois utilisée par les chercheurs comme point de départ dans leurs travaux de modélisation. Pour le développement de son modèle en basses fréquences, Kaizer a procédé à l'écriture des équations différentielles du modèle non linéaire à paramètres localisé du haut-parleur électrodynamique, en remplaçant les principaux paramètres non linéaires  $Bl$ ,  $k$  et  $L_e$  par leur développement en série du second ordre. D'autres auteurs, comme [Al-Ali, 1999] et [Ravaud et al., 2010] ont développé des modèles non linéaires à paramètres localisés dans les domaines temporel et fréquentiel afin de modéliser les différentes distorsions du haut-parleur et la conception de stratégies de compensation des non-linéarités. On peut citer également les travaux des auteurs [Dobrucki, 2011; Schneider, 2015] qui ont construit leurs modèles non linéaires à paramètres localisés dans le domaine temporel pour la modélisation des distorsion dans le haut-parleur.

Dans ce qui suit, nous allons reprendre parmi les sources abordées précédemment, celles dont la contribution est effective dans la non-linéarité du haut-parleur électrodynamique, et qui peut être explicitement exprimée à l'aide de termes modifiés ou ajoutés dans le modèle linéaire développé dans la section précédente.

### 5.3.1.2.1 Non-linéarités du système électrique

#### Facteur de force

Le facteur de force  $Bl$  décrit le couplage entre la partie électrique et mécanique du haut-parleur électrodynamique. Il varie en fonction de la valeur du champ magnétique dans l'entrefer, en décroissant à chaque fois que les spires de la bobine mobile quittent l'entrefer à la position de repos [Quaeghebeur, 2007; Sturtzer, 2013]. Cette dépendance de  $Bl$  en fonction de la position  $x$  de la bobine mobile permet de noter le facteur de force par  $Bl(x)$ , qui est une fonction non linéaire invariable dans le temps et qui peut

---

1. Le courant électrique est utilisé en raison de la facilité pratique, d'estimer les paramètres du haut-parleur en fonction du courant.

2. Dans la section 2.2 de l'article [Ravaud et al., 2010], est explicitée la relation entre le courant électrique  $i$  et la position de la membrane  $x$ .

être représentée la forme de régression polynomiale suivante [Sturtzer, 2013; Sturtzer et al., 2012] :

$$Bl(x) = Bl_0 + Bl_1x + Bl_2x^2 + \dots \quad (5.7)$$

En pratique, l'expression ci-dessus de  $Bl(x)$  est approximée en la tronquant jusqu'au second ordre [Kaizer, 1986].

A cause de la dépendance du facteur de force de la position de la bobine, la Force électromagnétique de Laplace qui agit sur la bobine mobile est désormais également fonction de la position et s'écrit :  $Bl(x)i$  [Kaizer, 1987]. Aussi, le facteur de force non linéaire entraîne une non-linéarité de la force contre électromotrice (f.c.é.m.) induite dans la bobine, qui peut ainsi être notée :  $\tilde{e} = Bl(x)v$  [Sturtzer, 2013].

### 5.3.1.2.2 Non-linéarités du système mécanique

#### Suspension

Si la compliance mécanique de la suspension du haut-parleur (suspension interne (spider) et suspension externe (surround)), fait office de constante de proportionnalité dans la formule de la force de rappel de la suspension pour le fonctionnement en petits signaux (domaine linéaire), par contre, en larges signaux (ou grandes amplitudes), elle ne peut être constante à cause de sa dépendance du déplacement  $x$  de l'équipage mobile. La compliance mécanique  $C_{ms}(x)$  est ainsi une fonction non linéaire qui peut être représentée par une régression polynomiale [Sturtzer, 2013] :

$$C_{ms}(x) = C_{ms0} + C_{ms1}x + C_{ms2}x^2 + \dots \quad (5.8)$$

Comme les paramètres non linéaires précédents, cette expression de  $C_{ms}(x)$  peut en pratique être approximée par troncature au second ordre [Kaizer, 1986].

### 5.3.1.2.3 Bilan global des non-linéarités dans le modèle du haut-parleur électrodynamique

L'énumération précédente des différents paramètres non linéaires dans le modèle du haut-parleur électrodynamique, et l'introduction de paramètres nouveaux due au fonctionnement en larges signaux du haut-parleur, permettent de les résumer ainsi :

- facteur de force :  $Bl(x)$  ;
- force de Laplace :  $Bl(x)i$  ;
- force contre électromotrice :  $\tilde{e} = Bl(x)v$  ;
- auto-inductance :  $L_e(x)$  ;
- force de réluctance :  $F_x = -\frac{1}{2}i^2 \frac{dL_e(x)}{dx}$  ;
- force électromotrice induite dans la bobine :  $U = L_e(x) \frac{di}{dt} + i \frac{dL_e(x)}{dx} \frac{dx}{dt}$  ;
- inductance de la bobine avec perte : modèle L2R avec  $L_e(x)$ ,  $R_2(x)$  et  $L_2(x)$  ;
- compliance mécanique :  $C_{ms}(x)$ .

La considération de ces différents paramètres non linéaires dans la formulation du haut-parleur, aboutit aux équations suivantes régissant le fonctionnement global d'un modèle non linéaire du haut-parleur électrodynamique, monté sur écran infini avec un modèle L2R pour l'impédance électrique (Figure 5.11) :

$$\begin{cases} e_g = R_g i_g + R_e i_g + L_e(x) \frac{di_g}{dt} + i_g \frac{dL_e(x)}{dx} \frac{dx}{dt} + R_2(x) i_g - R_2(x) i_2 + \tilde{e}(x) \\ 0 = R_2(x) i_2 + L_2(x) \frac{di_2}{dt} - R_2(x) i_g \\ Bl(x)i = M_{ms}\ddot{x} + R_{ms}\dot{x} + \frac{1}{C_{ms}(x)}x - \frac{1}{2}i^2 \frac{dL_e(x)}{dx} \end{cases} \quad (5.9)$$

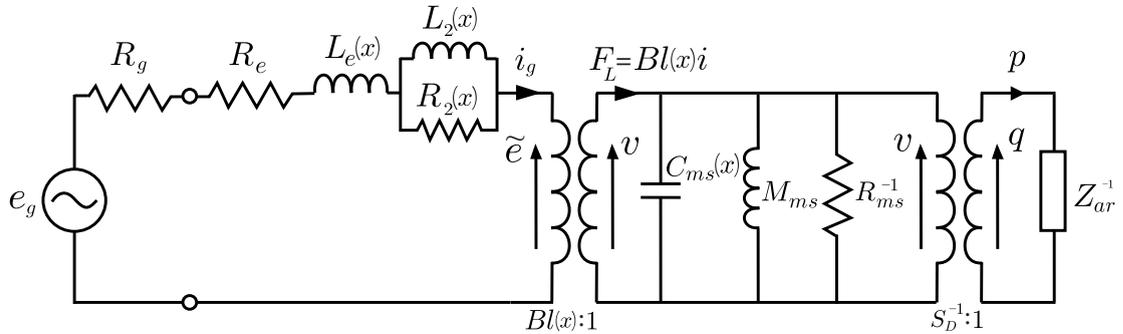


FIGURE 5.11 – Circuit équivalent analogue complet du modèle non linéaire du haut-parleur électrodynamique.

### 5.3.2 Série de Volterra analytique

Le haut-parleur électrodynamique considéré comme un système dynamique non linéaire, a pu bénéficier du paradigme de Volterra présenté en détail dans le second chapitre de cette thèse, reposant sur les séries de Volterra permettant une représentation polynômiale des principales grandeurs du haut-parleur en fonction des différents paramètres électro-mécano-acoustiques. Le formalisme de Volterra est employé dans sa plus grande majorité dans le cadre de la modélisation non paramétrique dans une philosophie d'identification en boîte noire du système haut-parleur, consistant essentiellement dans l'estimation paramétrique. Cependant, cette même base du formalisme de Volterra, peut en outre être mise à profit pour une modélisation paramétrique, à l'aide de la résolution des équations différentielles obtenues par le développement en série de Volterra, pour l'obtention de solutions analytiques. Cette dernière méthode de modélisation appelée série de Volterra analytique, demeure très minoritaire dans le domaine de la modélisation des haut-parleurs électrodynamiques, à cause principalement de l'extrême difficulté voire l'impossibilité de la résolution analytique des équations différentielles obtenues, à l'exemple du travail réalisé par [Schurer, 1997], qui a procédé à l'obtention des solutions des équations différentielles dans le domaine fréquentiel. Un second exemple à citer, est le travail de M. Tsujikawa *et al.* [Tsujikawa et al., 2000], qui ont construit un modèle des distorsions harmoniques dans le domaine fréquentiel à partir de la série de Volterra analytique du second ordre, utilisée avec des multi-sinaux sinusoïdaux, en vue de la construction d'une stratégie de compensation des non-linéarités dans le haut-parleur.

### 5.3.3 Modèle à espace d'état non linéaire

Le recours à l'espace d'état comme méthode de représentation du comportement non linéaire du haut-parleur, s'est naturellement imposé avec l'introduction des différentes

stratégies de compensation des distorsions non linéaires. En effet, la représentation en espace d'état largement utilisé en automatique et pour la commande des systèmes en général, est un moyen rapide et efficace pour la capture du comportement faiblement non linéaire du haut-parleur. L'espace d'état en temps continu ou discret, est utilisé lorsque toutes les variables d'état peuvent être observées ou estimées (courant électrique dans la bobine, tension à l'entrée du haut-parleur, accélération de la membrane, etc.). Cela permet en outre de tenir compte des principales grandeurs électro-mécano-acoustiques, en plus des paramètres de Small et Thiele, ce qui permet à l'aide d'une méthodologie confirmée de déduire les réponses du système, tout en gardant un sens physique pour les différents paramètres employés. Parmi les auteurs qui ont utilisé l'espace d'état comme outil de modélisation des haut-parleurs, nous pouvons citer [Gao and Snelgrove, 1991] qui a utilisé la représentation en espace d'état de la série de Volterra temporelle, afin de modéliser les distorsions du haut-parleur et compenser ses non-linéarités. Aussi, dans sa thèse de Ph. D, Brunet [Brunet, 2014] a mis à profit l'espace d'état polynômial à ordre fractionnaire pour l'identification dans les domaines temporel et fréquentiel, des paramètres non linéaires du haut-parleur à l'aide d'un algorithme des moindres carrés.

### 5.3.4 Modèles numériques

Le modèle numérique est le résultat de l'implémentation d'un modèle mathématique représentatif du comportement dynamique du haut-parleur électrodynamique dans un ordinateur numérique. Par exemple, la méthode des éléments finis (MEF) utilisée pour la résolution numérique des équations aux dérivées partielles, permet la détermination de solutions approchées dans le domaine spatial du comportement du haut-parleur. Cela revient concrètement à prédire les modes vibratoires de la membrane du haut-parleur électrodynamique. Plusieurs auteurs se sont servi de la MEF, particulièrement pour la modélisation du rayonnement acoustique de la membrane du haut-parleur [Kou; Kaizer, 1986; Karjalainen et al., 1998].

### 5.3.5 Modèles NARMAX

Le modèle NARMAX (Non linéaire Auto-Régressif à Moyenne Ajustée avec entrée eXogène)<sup>1</sup> fut introduit au début des années 1980. De nombreux types de modèles linéaires et non linéaires existants, comme AR, ARX, ARMA, ARMAX, le modèle Volterra et les modèles structurés en blocs, peuvent être considérés comme des cas particuliers du modèle NARMAX [Billings, 2013].

Le modèle NARMAX est défini par :

$$y(t) = F[y(t-1), \dots, y(t-n_y), u(t-d), \dots, u(t-d-n_u), e(t-1), \dots, e(t-n_e)] + e(t) \quad (5.10)$$

avec

$y(t)$  : la sortie au temps  $t$

---

1. En anglais : Nonlinear Auto Regressive Moving Average with eXternal inputs.

$n_y$  : nombre de pôles (retard maximum de la sortie)

$n_u$  : nombre de zéros plus 1 (retard maximum de l'entrée)

$n_e$  : nombre des coefficients du termes du bruit (retard maximum du bruit)

$d$  : nombre d'échantillons d'entrée qui se produisent avant que l'entrée n'affecte la sortie, également appelée temps mort ou retard du système

$y(t-1) \dots y(t-n_y)$  : sorties précédentes dont dépend la sortie en cours

$u(t-d) \dots (t-d-n_u)$  : entrées précédentes et retardées dont dépend la sortie courante

$e(t-1) \dots e(t-n_e)$  : bruit blanc perturbateur (défini comme une erreur de prédiction :  $e(t) = y(t) - \hat{y}(t)$ )

$F[\cdot]$  : fonction non linéaire<sup>1</sup>

Pour les haut-parleurs, le modèle NARMAX peut être de type paramétrique, s'il s'appuie sur une connaissance *a priori*, permettant un sens physique aux paramètres du modèle, comme il peut être non paramétrique en absence d'une connaissance *a priori*, et qui exige une taille importante des différents signaux (entrée, sortie) pour pouvoir capter le maximum d'informations sur le comportement du système à modéliser. L'avantage principal des modèles NARMAX est leur parcimonie<sup>2</sup> [Billings, 2013]. L'utilisation du modèle NARMAX reste toutefois rarissime pour la modélisation des haut-parleurs, essentiellement à cause de la difficulté de l'implémentation des stratégies de compensation ou de commande, qui s'appuient sur le modèle NARMAX. Nous mentionnons à titre d'exemple le travail de [Jang and Kim, 1994], où est modélisé le haut-parleur à l'aide d'un modèle NARMAX dans les domaines temporel et fréquentiel pour la prédiction de la réponse en fréquence du haut-parleur.

### 5.3.6 Modèle à temps discret

Depuis son début jusqu'à il y a une vingtaine d'années, le haut-parleur était cloîtré dans son rôle de restitution sonore dans une enceinte acoustique, faisant partie d'un système de reproduction purement analogique.

Aujourd'hui, le haut-parleur est un transducteur en pleine métamorphose, que ce soit par ses dimensions (ordinateurs portables, tablettes, smartphones, etc.), ou par sa fonction (contrôle actif du bruit, systèmes d'auralisation à base de convolution non linéaire, enceintes de monitoring, audio automobile, etc.). Cette métamorphose du haut-parleur, est aussi celle de tous les étages en amont qui sont devenus au fur et à mesure majoritairement numériques (stockage des données, lecture des données, filtrage, effets sonores, égalisation, linéarisation, etc.). Ainsi, une implémentation pratique des différents filtres et traitements ne peut être réalisée que sur des processeurs numériques. De surcroît, l'intégration des algorithmes des différents traitements numériques des étages en amont, exige du modèle du haut-parleur qu'il soit forcément à temps discret. Ceci

---

1. La structure de cette fonction peut être approchée à l'aide de modèles polynomiaux, de modèles rationnels, de réseaux neuronaux, de logique floue ou par développement en ondelettes [Billings, 2013].

2. La parcimonie (parsimony) est la capacité pour un modèle, à utiliser le minimum de données ou de paramètres (simplicité) pour atteindre une précision descriptive du système réel. On parle d'équilibre entre la qualité de l'ajustement (goodness of fit) et la parcimonie. La parcimonie est d'autant plus importante s'il est difficile ou impossible de réaliser de longues expériences ou à mettre en œuvre un modèle à partir de données de très grande taille.

est d'autant plus vraisemblable, si l'on compte utiliser des structures pour le modèle du haut-parleur comme des filtres non récursifs à réponse impulsionnelle finie FIR, ou la transformée en  $Z$  de fonctions de transfert qui aboutirait sur des filtres récursifs à réponse impulsionnelle infinie IIR. Nous pouvons citer les deux auteurs [Bright, 2002; Knudsen et al., 1989] qui ont utilisé des modèles à temps discret, dont les paramètres ont été estimés à l'aide d'un algorithme des moindres carrés pour le premier travail, et à l'aide d'un algorithme adaptatif LMS à erreur de sortie pour le second travail.

### 5.3.7 Modèles des systèmes à Hamiltonien à ports

Le formalisme des systèmes Hamiltoniens à ports (port-Hamiltonian systems) fut introduit en théorie des systèmes au début des années 1990, pour l'analyse, la commande et la modélisation des systèmes physiques complexes à paramètres localisés ou distribués [Duijndam et al., 2009]. Les modèles des systèmes à Hamiltonien à ports sont employés exclusivement par l'équipe de T. Hélie de l'IRCAM, pour la modélisation des haut-parleurs électrodynamiques en raison de sa convenance aux systèmes multi-physiques interconnectés et sa capacité à incorporer des non-linéarités tout en conservant les lois de conservation sous-jacentes [Falaize and Thomas, 2014].

## 5.4 Approche non paramétrique de modélisation (boîte noire)

Après une longue dominance des méthodes paramétriques pour la modélisation des haut-parleurs électrodynamiques, les approches non paramétriques ou dites globales, sont apparues en force au début des années 1990, notamment avec la généralisation des procédés numériques d'expérimentation utilisés pour l'identification des systèmes haut-parleurs. En effet, avec des méthodes comme le modèle de Volterra non paramétrique ou la méthode de déconvolution, il aurait été impossible de les mettre en œuvre sans la performance des calculateurs numériques et des outils de traitement de données récents. En absence de toute connaissance *a priori* à propos des différents phénomènes mis en jeu dans les différents comportements du système haut-parleur, l'approche non paramétrique s'intéresse particulièrement au couple entrée-sortie pour la détermination d'un modèle.

### 5.4.1 Modèles de Volterra non paramétriques

Le modèle basé sur la série de Volterra est sûrement l'un des plus populaires pour la représentation des systèmes dynamiques non linéaires dans plusieurs domaines, toutefois, son attractivité reste néanmoins très restreinte pour la modélisation des non-linéarités du haut-parleur électrodynamique. Cela peut être expliqué fondamentalement par sa complexité et la difficulté de sa mise en œuvre, mais aussi pour la lourdeur de son implémentation, surtout lorsque le formalisme de Volterra est exprimé dans le domaine temporel, et l'ordre de non-linéarité ou l'étendue de mémoire de la série de Volterra sont très grands. D'autres auteurs choisissent une représentation du comportement du haut-parleur à l'aide du modèle de Volterra fréquentiel, à l'exemple de D. Bard [Bard, 2005], qui a effectué une extraction expérimentale des noyaux de Volterra fréquentiels en vue de construire une stratégie de compensation des non-linéarités dans le haut-parleur. Nous trouvons aussi un exemple sur le contrôle de l'écho acoustique figurant dans un

chapitre de livre des auteurs G. Enzner *et al.* [Enzner et al., 2014], évoquant la modélisation de la non-linéarité des haut-parleurs des téléphones portables pour l'annulation de l'écho, à l'aide de différents modèles de Volterra adaptatifs : linéaire, du second ordre et un autre du troisième ordre. Le dernier exemple est un document de brevet de K. Lashkari [Lashkari, 2011], où l'auteur présente parmi plusieurs méthodes basées sur des structures de type Volterra-Wiener-Hammerstein, un procédé de la modélisation et l'égalisation du haut-parleur à l'aide d'un filtre de Volterra adaptatif du premier et du second ordre.

### 5.4.2 Déconvolution non linéaire

La déconvolution linéaire demeure l'outil le plus connu pour la détermination de la réponse impulsionnelle d'un système linéaire invariant SLI, en connaissance de ses deux signaux d'entrée et de sortie. Appliquée à des systèmes même faiblement non linéaires, la déconvolution linéaire ne permet pas la reproduction des distorsions harmoniques, ni autres effets non linéaires. Ainsi, au début des années 2000, le professeur italien Angelo Farina de l'université de Parme, a développé une méthode de déconvolution non linéaire, qui peut être mise en œuvre dans plusieurs domaines de l'acoustique, et qui constitue une solution qui peut être employée pour décrire le comportement non linéaire – même s'il est faible – de systèmes dynamiques non linéaires tels que les haut-parleurs électrodynamiques ou les environnements acoustiques des salles. Pour ce faire, Farina a brillamment su combiner le formalisme de Volterra à la méthode de déconvolution non linéaire en utilisant les noyaux de Volterra diagonaux.

La déconvolution non linéaire avec les noyaux de Volterra diagonaux est une technique de filtrage numérique (appelée également noyaux de Volterra vectoriels). Cette méthode peut être perçue comme étant une version réduite de la représentation générale de Volterra d'un système non linéaire.

Alors que l'approche générale de Volterra requiert l'usage de noyaux matriciels, ayant une dimension égale à l'ordre du noyau. L'approche du noyau de Volterra diagonal quant à elle, utilise des vecteurs monodimensionnels d'ordre quelconque.

La formule générale de la série de Volterra tronquée d'ordre fini  $N$  et à mémoire finie  $M$ , représentant la sortie  $y$  d'un système non linéaire, étant excité par un signal d'entrée  $x$  s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 y(n) &= h_0 + \sum_{i_1=0}^{M-1} h_1(i_1) x(n - i_1) \\
 &+ \sum_{i_1=0}^{M-1} \sum_{i_2=0}^{M-1} h_2(i_1, i_2) x(n - i_1) x(n - i_2) + \dots \\
 &+ \sum_{i_1=0}^{M-1} \sum_{i_2=0}^{M-1} \dots \sum_{i_N=0}^{M-1} h_N(i_1, i_2, \dots, i_N) \\
 &\quad x(n - i_1) x(n - i_2) \dots x(n - i_N)
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Dans cette formule, le signal d'entrée  $x$  est convolué linéairement avec le noyau  $h_1$  d'ordre 1, et les valeurs carrées des échantillons d'entrée sont convoluées avec la matrice

du second ordre  $h_2$ , etc.

En théorie, cette approche permet une représentation complète du comportement non linéaire du système, cela, dans l'hypothèse où il demeure invariant, où le développement de Volterra atteint un ordre assez élevé, et où la longueur du noyau  $M$  est assez grande pour pouvoir capturer toute la mémoire du système [Farina and Farina, 2007].

Toutefois, la charge de calcul requise à traiter une telle formule, tend à s'accroître considérablement avec l'ordre de non-linéarité et la longueur de mémoire de la série de Volterra. La simplification de la formule 5.11 apportée par Farina, se fait par la seule considération des coefficients de Volterra situés le long de la diagonale des matrices d'ordres supérieurs, faisant que la charge de calcul puisse désormais augmenter de façon linéaire avec l'ordre de non-linéarité, on aura ainsi :

$$y(n) = \sum_{i=0}^{M-1} h_1(i) x(n-i) + \sum_{i=0}^{M-1} h_2(i) x^2(n-i) + \dots + \sum_{i=0}^{M-1} h_N(i) x^N(n-i) \quad (5.12)$$

Cette simplification est normalement accompagnée d'une forte détérioration de l'exactitude des résultats de calcul. En pratique, la plupart des coefficients de Volterra en dehors de la diagonale sont plutôt souvent très proches de zéro, ce qui explique que cette convolution de Volterra réduite est généralement très satisfaisante d'un point de vue perceptuel. En général, l'avantage offert par la possibilité d'étendre la simulation à des ordres supérieurs, est bien plus important que l'erreur due à l'abandon des coefficients situés en dehors de la diagonale [Farina and Farina, 2007].

Concrètement, la méthode de déconvolution non linéaire avec noyaux de Volterra diagonaux est basée sur la mesure de la réponse du système à un signal d'excitation de type balayage sinusoïdal exponentiel (ESS : exponential sweep sine). Cette approche permet d'obtenir le signal de sortie  $y$  en partant de la convolution séparée de la réponse impulsionnelle linéaire, la réponse impulsionnelle non linéaire de second ordre, la réponse impulsionnelle non linéaire de troisième ordre, jusqu'à l'ordre considéré et enfin en ajoutant tous les résultats précédents. Chaque réponse impulsionnelle d'ordre donné est convoluée avec le signal d'entrée élevé à la puissance correspondante (Figure 5.12).

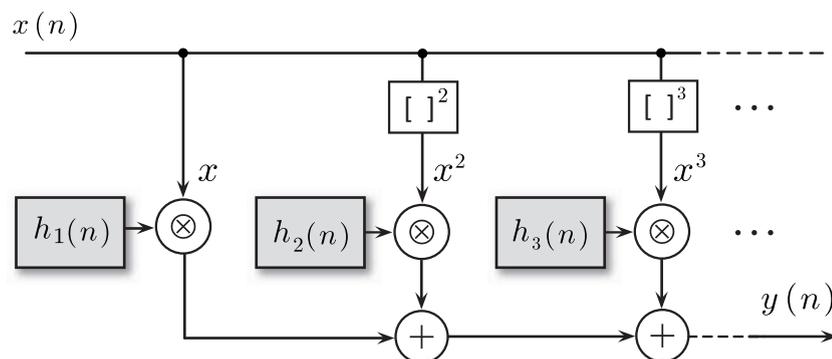


FIGURE 5.12 – Décomposition d'un système non linéaire à l'aide de la convolution non linéaire.

Dans le but de déterminer la réponse impulsionnelle globale  $h(n)$  du haut-parleur, on

utilise le signal inverse (appelé aussi retourné temporel)  $x^{-1}(n)$  du signal d'excitation  $x(t)$  tel que :

$$x(n) * x^{-1}(n) = \delta(n) \quad (5.13)$$

$\delta(n)$  étant l'impulsion de Dirac. La réponse impulsionnelle s'écrit alors :

$$h(n) = x^{-1}(n) * y(n) \quad (5.14)$$

C'est le produit de convolution du signal inverse  $x^{-1}(n)$  avec la réponse du haut-parleur  $y(n)$ , ou autrement, la déconvolution de  $x(n)$  et de  $y(n)$  (Figure (5.13)).

Le haut-parleur comme système non linéaire à mémoire peut être décrit par des noyaux de Volterra d'ordre  $N$ . La réponse impulsionnelle globale  $h(t)$  peut être séparée en plusieurs réponses impulsionnelles partielles  $h_i(n)$ . Les composantes fréquentielles de distorsion  $H_i(\omega)$  sont obtenues à partir de réponses impulsionnelles appropriées à l'aide de la transformée de Fourier  $FT[h_i(n)]$  [Farina and Farina, 2007].

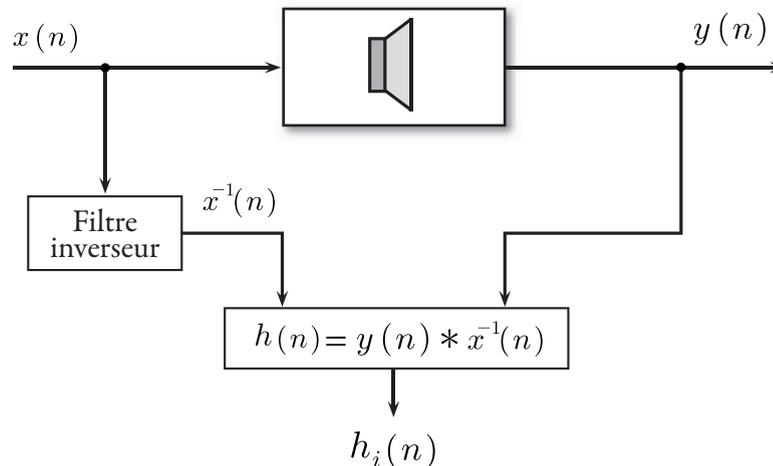


FIGURE 5.13 – Schéma d'identification à l'aide de la méthode de déconvolution non linéaire.

Cette méthode a suscité beaucoup d'intérêt chez plusieurs auteurs, grâce à sa simplicité théorique, malgré son procédé expérimental qui est d'une mise en œuvre assez laborieuse, en plus d'un traitement des signaux plutôt avancé. Dans [Farina et al., 2001; Michaud, 2012; Novák, 2009], les auteurs se sont intéressés à la méthode de déconvolution non linéaire, respectivement en vue de simuler l'auralisation d'environnements acoustiques et pour la modélisation des distorsions.

### 5.4.3 Modèles fréquentiels

Il est incontestable que l'analyse temporelle est un outil fondamental pour l'obtention d'informations précieuses sur le système réel, à l'aide de méthodes usuelles et une instrumentation performante. En revanche, une analyse fréquentielle sur laquelle peut être construit un modèle, s'avère d'autant plus cruciale si l'on arrive à bien choisir les outils appropriés, afin de capter les traits les plus pertinents du comportement fréquentiel du système à modéliser.

Le modèle fréquentiel, certes, requiert plus de soin pour sa mise en place (méthodes de mesure difficiles, équipement spécifique, etc.), mais il peut être d'une grande utilité pour nous renseigner sur plusieurs aspects du système, comme la réponse en fréquence et les distorsions des réponses du système. Dans la littérature, nous trouvons par exemple le travail de [Mossi, 2012], dans lequel il a construit deux modèles fréquentiels, le premier est polynômial, à l'aide d'une combinaison de filtres polynomiaux et filtres FIR, et le second est un modèle fréquentiel basé sur l'analyse de Fourier, employés pour la prédiction des distorsions dans le cadre de l'annulation de l'écho acoustique dans un canal de communication.

## 5.5 Approche semi-paramétrique de modélisation (boîte grise)

Dans le cas du haut-parleur, cette classe d'approches de modélisation est représentée uniquement par les modèles structurés en blocs. L'approche semi-paramétrique se sert des connaissances *a priori*, qui sont soit partielles ou incomplètes, de la physique régissant le fonctionnement du haut-parleur électrodynamique.

### 5.5.1 Modèles structurés en blocs

Les modèles structurés en blocs sont le résultat des travaux d'analyse et d'identification des systèmes dynamiques non linéaires menés par différents chercheurs, en se basant essentiellement sur la série de Volterra.

Dans le premier chapitre, nous avons souligné le rôle du mathématicien Norbert Wiener dans l'élaboration de beaucoup de théories pour la modélisation des systèmes non linéaires, qui ont permis de réaliser des avancées réelles dans le domaine de la modélisation et de la théorie de l'estimation en général.

Tous ces travaux ont abouti sur de nouvelles méthodes développées, dans le but réduire la complexité des modèles de Volterra, qui sont basées sur des structures en blocs, où l'on sépare la linéarité de la non-linéarité, et le comportement statique du comportement dynamique dans ces systèmes. Les modèles structurés en blocs les plus connus sont les modèles de Wiener et de Hammerstein. Ces modèles structurés en blocs ont fait leurs preuves dans plusieurs domaines, tels que la communication, la modélisation des capteurs, la modélisation biomédicale, etc. Les auteurs qui ont tenté d'adapter ces modèles pour la modélisation des haut-parleurs ne sont pas légion, sans doute à cause de la difficulté de leur implémentation dans des approches de linéarisation. Nous pouvons citer pour exemple, [Ihlenburg, 1985] qui a utilisé un modèle Wiener-Hammerstein dans les domaines temporel et fréquentiel afin d'apporter une nouvelle approche sur la modélisation des haut-parleurs.

## 5.6 Conclusion

Dans le présent chapitre un état de l'art de la modélisation du haut-parleur électrodynamique a été présenté. Partant des différentes théories générales concernant la modélisation non linéaire, abordées dans les chapitres précédents, nous nous sommes intéressés dans ce chapitre aux différents types de modèles utilisés pour les haut-parleurs électrodynamiques, que nous avons puisés de la littérature traitant la modélisation des haut-parleurs électrodynamiques, dont les résultats des travaux ont été produits durant les quatre dernières décennies. Ces modèles du haut-parleur s'inscrivent dans les

trois approches de modélisation connues : paramétrique, non paramétrique et semi-paramétrique.

L'examen des différents travaux de la littérature sur la modélisation des haut-parleurs électrodynamiques, a montré un intérêt partagé pour les multiples modèles employés, qui peut être expliqué par les différents motifs que nous avons présenté individuellement pour chaque type de modèle, et qui nous pouvons résumer ici :

- profil académique et bagage théorique de l'auteur ;
- objectif de la modélisation et son application ;
- facilité de l'installation du procédé expérimental ;
- facilité de l'implémentation du modèle dans les différentes stratégies adoptées selon les objectifs ;
- capacité d'intégration du modèle du haut-parleur au milieu de modèles d'autres systèmes qui l'entourent (enceinte, amplificateur, circuit de commande, filtres, égalisateur, système de linéarisation, etc).

Cet intérêt partagé pour les différents modèles, a naturellement guidé notre démarche pour la qualité de développement des présentations des différents modèles. Ainsi, des modèles comme les modèles à paramètres localisés ont été abordés avec détail, compte tenu de leur importance pour la compréhension générale du fonctionnement et des différents comportements du haut-parleur électrodynamique.

Enfin, nous avons jugé utile de présenter un récapitulatif sous forme de tableau (Tableau 5.1) de l'ensemble du travail réalisé dans cet état de l'art, en rassemblant les trois approches de modélisation avec les différents modèles de la littérature, tout en reportant les différents domaines d'étude employés (temps, fréquence, espace d'état, etc.), si le modèle traité est linéaire ou non linéaire, les objectifs ciblés par chaque étude. A ce titre, nous avons profité, pour situer le modèle proposé dans cette thèse (cellules en grisé du tableau), parmi les autres modèles de la littérature, et qui sera largement développé dans le chapitre suivant.

#### Légende du Tableau 5.1

- **Domaine :**

$t$  : temps continu,  $n$  : temps discret,  $f$  : fréquence,  $x$  : espace,  $ee$  : espace d'état

- **Objectifs de la modélisation**

**PS&T**      Modélisation des paramètres de Small et Thiell

**Dist**        Modélisation des distorsions

**RF**          Réponse en fréquence

**VA**          Modélisation vibroacoustique

**Therm**      Modélisation thermique

**Aur**        Auralisation et qualité sonore

**Comp**      Compensation ou égalisation

**CAB**        Contrôle actif du bruit

**AEA**        Annulation d'écho acoustique

**Mod**        Perfectionnement des méthodes de modélisation et d'identification

Approche de modélisation	Méthode principale de modélisation	Méthode auxiliaire de modélisation	Domaine $t/n/f/x/ee$	Modélisation linéaire/non linéaire	Objectifs de la modélisation	Référence
	Modèle à paramètres localisés	Paramètres de Small et Thiele	t	NL	Dist, RA	[Kaizer, 1986]
			t, f	NL	Dist, Comp	[Al-Ali, 1999]
			t, f	NL	Dist	[Ravaud, 2010]
			t	NL	Dist	[Schneider, 2015]
			t	NL	Dist	[Dobrucki, 2011]
			t, f	NL	Therm	[Chapman, 1998]
			t, f, x	I, NL	Therm	[Klippel, 2004a]
			t	NL	PS&I'	[Isai, 2013]
			t	NL	Comp	[Gao, 1991]
			t	NL	Comp	[Ribeiro, 2005]
			t	NL	Mod	[Bouvier, 2016]
			f	NL	Comp	[Schurer, 1997]
Paramétrique	Série de Volterra analytique	Multi-signaux sinusoidaux	f	NL	Dist, Comp	[Ishikawa, 2000]
		Algorithme LMS adaptatif	f	NL	Dist, Comp	[Gao, 1991]
		Algorithme adaptatif basé sur les moindres carrés	t, f	NL	RF, Mod	[Brunet, 2014]
		FEM	x	NL	Comp	[Kaizer, 1986]
		FEM	x	L	RA	[Koudela, 2013]
		FEM, BEM	f, x	L	VA	[Karjalainen, 1998]
			t, f	NL	RF	[Jang, 1994]
			t	I	PS&T	[Knudsen, 1989]
			n	NL	CAB	[Bright, 2002]
			ee	NL	Mod	[Falaize, 2014]
			t	NL	Dist, RF	Cette thèse
		Non paramétrique	Modèle de Volterra non paramétrique	Algorithmes adaptatifs LMS et RLS (N = 3)	t	NL
Algorithmes adaptatifs (N = 1, 2)	f			NL	Comp	[Bard, 2005]
Algorithmes adaptatifs (N = 1, 2, 3)	t			NL	AFA	[Fazner, 2014]
	t			NL	Aur	[Farina, 2001]
	t			NL	Dist	[Novák, 2009]
	t			NL	Aur	[Michaud, 2012]
	f			NL	Dist, AFA	[Mossi, 2012]
	t			NL	Mod	[Hegde, 2002]
	t			NL	Mod	[Ilegde, 2002]
	t			NL	Mod	
	t			NL	Mod	
Semi-paramétrique	Modèles structurés en blocs adaptatif			Modèle de Wiener + algorithme adaptatif	f	NL
		Modèle de Hammerstein-Wiener + algorithme adaptatif	t	NL	Mod	[Hegde, 2002]

TABLEAU 5.1 – Tableau récapitulatif des différents modèles du haut-parleur électrodynamique dans la littérature.

## Troisième partie

Contributions à l'identification du  
système haut-parleur et à la  
modélisation de ses distorsions

# CHAPITRE 6

## Identification du système haut-parleur à l'aide des filtres de Volterra adaptatifs

### 6.1 Introduction

L'identification du système haut-parleur n'est pas une finalité en soi, sans que l'on puisse l'associer à une application bien déterminé sur le système réel. Dans notre travail, cette identification est employée afin de modéliser les distorsions non linéaires du haut-parleur. Cependant, l'identification en tant que composante du processus de modélisation, requiert une étape ultime de validation<sup>1</sup>, qui consiste à comparer les distorsions modélisées obtenues avec les différents noyaux de Volterra estimés, avec les distorsions mesurées du même haut-parleur identifié.

Dans la première partie de ce chapitre, sont présentés les différents résultats de mesure réalisés sur le haut-parleur électrodynamique, qui ont permis en général sa caractérisation et plus précisément de quantifier sa non-linéarité. Les méthodes de mesure employées sont celles utilisées couramment pour la caractérisation des systèmes non-linéaires, avec toutefois des adaptations spécifiques pour le cas du système haut-parleur, comme la fonction de cohérence, les distorsions harmoniques, la THD et la distorsion d'intermodulation.

La seconde partie de ce chapitre est réservée au procédé d'identification du système haut-parleur à l'aide des filtres de Volterra adaptatifs. Il est clair que l'objectif final ciblé par cette identification, réside en premier lieu dans la modélisation des distorsions non linéaires dans le haut-parleur, mais aussi de manière implicite, la réalisation d'une comparaison multiparamétrique des deux algorithmes adaptatifs associés au filtre de Volterra pour l'identification du haut-parleur. Il s'agit d'évaluer les performances des deux algorithmes adaptatifs LMS et RLS, en fonction des paramètres suivants :

1. Quatre étendues de mémoire de la série de Volterra :  $M = 1, 2, 3$  et  $4$  ;
2. Trois types de signaux d'excitation : bruit blanc gaussien de puissance à croissance linéaire (BGCLIN), bruit blanc gaussien de puissance à croissance logarithmique (BG-CLOG) et le bruit blanc gaussien uniforme (BGUNI).

---

1. La validation des modèles de distorsion fera l'objet de la dernière section du chapitre 7.

3. Deux fréquences d'échantillonnage : 24 kHz et 96 kHz.

Afin de parvenir à cela, plusieurs considérations pratiques liées à l'identification du système haut-parleur sont abordées, qui sont des éléments indispensables pour l'implémentation des filtres de Volterra adaptatifs. Dans les deux dernières sous-sections, nous présentons de manière précise les méthodes avec lesquelles nous sommes parvenus à implémenter les deux filtres de Volterra adaptatifs LMS et RLS, en décrivant leurs structures et tout le formalisme requis pour leur mise en œuvre.

## 6.2 Évaluation de la non-linéarité et mesure des distorsions dans le haut-parleur

Dans le chapitre 4, nous avons décrit amplement les différentes méthodes d'évaluation objective des distorsions non linéaires dans le haut-parleur électrodynamique. Certaines de ces méthodes, sont encadrées par des textes normatifs qui décrivent avec minutie les procédés de mesure, mais le plus important c'est qu'ils fournissent des métriques servant à l'objectivisation des phénomènes de distorsion dans le haut-parleur. Se basant sur toute cette batterie d'outils d'évaluation, la présente section est consacrée à l'évaluation de la non-linéarité et à la mesure des distorsions dans le haut-parleur. Cette évaluation est concrétisée à l'aide de différentes méthodes telles que la courbe caractéristique, la fonction de cohérence, les distorsions harmoniques et la distorsion d'intermodulation, mais d'autres caractéristiques comme la réponse en fréquence qui demeure très utile pour la compréhension générale du comportement dynamique du haut-parleur.

### 6.2.1 Procédé expérimental général de mesure

#### 6.2.1.1 Description du procédé expérimental

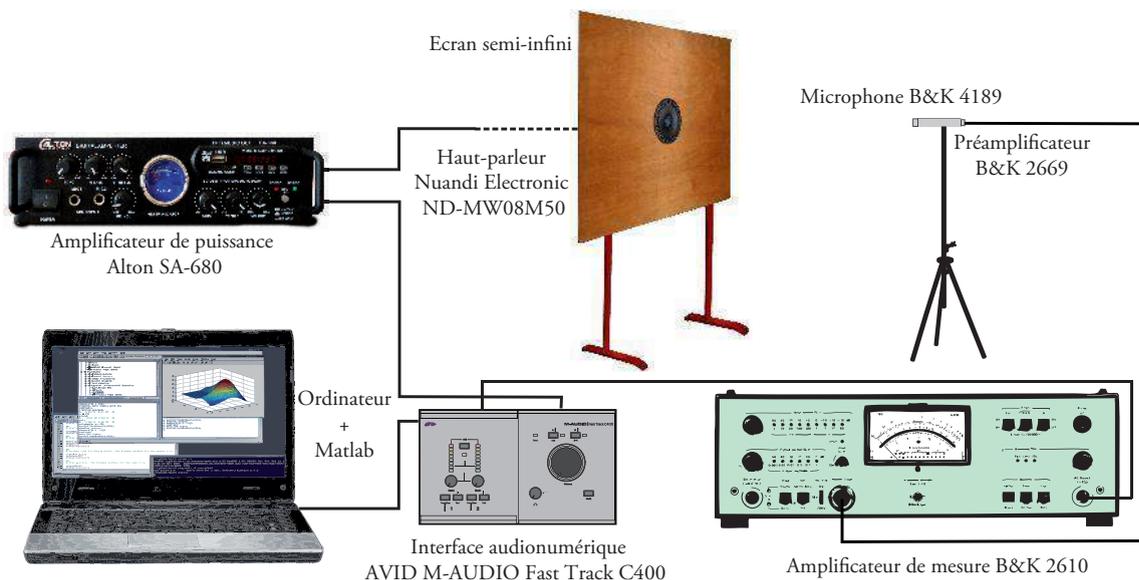


FIGURE 6.1 – Procédé expérimental général de mesure.

Le procédé expérimental général de mesure ayant servi à la réalisation des différentes mesures du présent chapitre est donnée dans la Figure 6.1 ci-dessus. Un ordinateur portable a été utilisé pour l'envoi et l'enregistrement des signaux, ainsi que leur stockage. L'ordinateur commande ou reçoit des données numériques directement d'une interface audionumérique AVID M-AUDIO Fast Track C400 (l'annexe A rassemble les principales caractéristiques du matériel expérimental utilisé), à des fréquences d'échantillonnage allant de 24 à 96 kHz avec une résolution de 24 bits.

Dans la voie d'émission, les signaux de sortie analogique de l'interface audionumérique sont amplifiés à l'aide d'un amplificateur de puissance ALTON SA-680 d'une performance acceptable concernant les distorsions (THD (1kHz) < 0,5 % (4–6 Ohms)), qui commande un haut-parleur électrodynamique de la marque Nuandi Electronic modèle ND-MW08M50. Ce haut-parleur de 8 pouces (~20 cm) que nous avons choisi pour notre travail de thèse, est de type woofer-médium, de 8 Ohms et 110 W, et surtout présentant une bande passante entre 90 Hz – 8800 Hz, correspondant à notre gamme fréquentielle d'intérêt pour l'étude des distorsions non linéaires.

Le haut-parleur employé est monté sur un écran semi-infini en bois contre-plaqué de forme rectangulaire de 5 mm d'épaisseur, de forme rectangulaire 120 × 150 cm, au centre duquel est logé le haut-parleur à une hauteur de 145 cm du sol.

La voie de réception commence du côté capteur avec un microphone 1/2 pouce de haute précision en champ libre de marque Brüel & Kjær type 4189, associé à son préamplificateur Brüel & Kjær type 2669. Le signal de sortie du préamplificateur est adapté et amplifié à l'aide d'un amplificateur de mesure Brüel & Kjær type 2610, qui envoie un signal à numériser vers l'interface audionumérique, qui achemine les signaux numériques vers l'ordinateur via le port USB, pour être enregistrés, traités et sauvegardés.

Pour la totalité des expériences menées, le haut-parleur utilisé et les autres haut-parleurs qui ont servi pour la préparation des tests, ont subi systématiquement une phase de mise en fonctionnement d'une durée variable selon la durée de mise au repos du haut-parleur et de la température ambiante de la salle. Cela repose sur l'excitation des haut-parleurs, à l'aide d'un bruit blanc d'une tension moyenne située au milieu de la dynamique de commande. Cette opération mentionnée dans la plupart des textes normatifs des haut-parleurs (principalement la norme IEC 60268-5 [IEC, 2007]), sert à préchauffer l'équipage mobile des haut-parleurs, et de rendre sa température proche à celle d'un haut-parleur ayant servi à une durée d'écoute suffisante, afin de s'affranchir de l'effet mémoire thermique, qui rend le comportement des haut-parleurs inégal selon leur conditions d'utilisation.

D'autre part, il importe de signaler la réalisation de l'opération d'étalonnage de l'ensemble des équipements, utilisés dans les différents procédés de mesure et d'identification. Cela concerne l'étalonnage de la sortie du microphone dans l'interface audionumérique, en y intégrant la courbe de compensation fournie en fichier numérique avec le microphone. Il a été procédé également à l'étalonnage du VU-mètre sonométrique de l'amplificateur de mesure Brüel & Kjær type 2610, qui nous a été d'une grande utilité pendant les expériences. Enfin, il fallait que le résultat des différents réglages et étalonnages se reflète dans l'exactitude des valeurs des niveaux de pressions acoustiques et des amplitudes des tensions électriques, lus dans les graphes sous environnement Matlab<sup>TM</sup>.

D'autres détails d'ordres pratiques ou purement métrologiques seront donnés dans

les sections suivantes, quand cela est nécessaire suivant la spécificité de chaque type de mesure.

### 6.2.1.2 Ambiance acoustique

L'ensemble des expériences qui ont servi à la fois à la mesure des différentes caractéristiques du haut-parleur, et à son identification, ont été menées dans le laboratoire d'acoustique. Il importe en outre de décrire les diverses conditions acoustiques, dans lesquelles ont été réalisées toutes les expériences de notre travail, et dont dépend la qualité des données mesurées et surtout le type de prétraitement à choisir.

Pratiquement, cela revient à trouver des solutions pour contourner la condition de mesure dans une chambre anéchoïque, difficile à avoir la plupart du temps. Une méthode s'est ainsi imposée, plus connue sous le nom de *condition en champ libre simulé en demi-espace*. La mesure en champ libre simulé en demi-espace figure dans la norme IEC 60268-5 [IEC, 2007]. Elle permet en absence de chambre anéchoïque, de s'approcher des conditions de mesure en champ libre dans une salle normale, en réunissant les conditions suivantes :

1. utiliser un écran semi-infini construit selon la norme IEC 60268-5 (voir annexe A), afin de s'affranchir des réflexions arrière du haut-parleur, en formant un espace en *demi-espace* ;
2. dans le cas où le microphone est placé loin du haut-parleur, à une distance qui répond par exemple, à la règle du quadruple de la dimension maximale de la surface rayonnante du haut-parleur, ainsi il faut utiliser un prétraitement adéquat des données permettant de *simuler le champ libre*. Cela consiste à utiliser un fenêtrage temporel pour séparer les sons directs (réverbérations précoces), des sons réfléchis (réverbérations tardives).
3. dans une condition de *champ proche*, employée afin de s'affranchir des réverbérations tardives de la salle découlant des réflexions, il est recommandé de placer le microphone à une distance relativement proche du haut-parleur dans sa direction axiale (entre 1 et 5 cm).

Enfin, selon les conditions de mesure, nous avons choisi l'une ou l'autre entre la seconde et la troisième condition, en plus de la première condition qui demeure quant à elle impérative, pour effectuer nos mesures.

## 6.2.2 Mesure de la courbe caractéristique

### 6.2.2.1 Description de la méthode de mesure

Il a été montré dans le chapitre 4, que la courbe caractéristique peut être d'une grande utilité pour une évaluation première de la non-linéarité des haut-parleurs. Le montage de la Figure 4.13, a servi pour la mise en œuvre de l'expérience tout en suivant le procédé expérimental de la Figure 6.2.

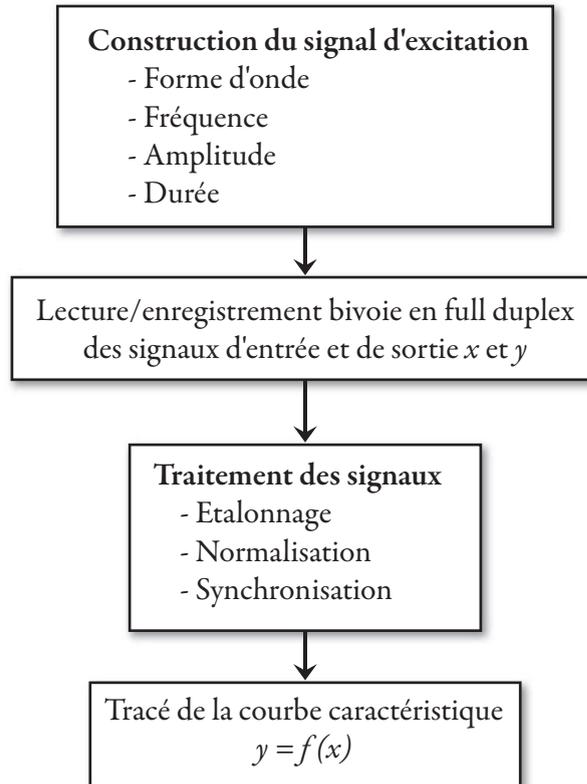


FIGURE 6.2 – Procédé expérimental de mesure de la courbe caractéristique.

L'expérience repose essentiellement sur une mesure bivoice<sup>1</sup> en mode full-duplex<sup>2</sup> à l'aide de l'interface audionumérique utilisée, qui consiste à commander le haut-parleur à l'aide d'un signal sinusoïdal de 1000 Hz, de sept différents niveaux amplitudes pendant une durée de 5 secondes. Un signal est ensuite mesuré à la sortie du microphone placé à 2 cm dans l'axe du haut-parleur, à une fréquence d'échantillonnage de 96 kHz.

Les signaux mesurés ont reçu différents traitements avant de les tracer :

- **Étalonnage** : il permet de visualiser les signaux avec les valeurs réelles des amplitudes, et surtout de pouvoir calculer la valeur efficace pour la tension électrique, et le niveau de la pression acoustique (SPL) pour la pression acoustique mesurée par le microphone (dB) ;
- **Normalisation** : elle permet de se soumettre des grandes disparités dans les ordres de grandeur des valeurs des amplitudes, et sans laquelle, il est impossible de tracer ensemble la tension électrique et la pression acoustique, ni même d'obtenir la courbe caractéristique à partir des deux signaux ;
- **Synchronisation** : opération consistant à éliminer le décalage temporel entre les deux signaux mesurés, dû essentiellement au temps de latence de la chaîne de mesure,

1. Dual channel measurement en anglais, technique réalisée à l'aide d'un procédé de mesure sur un système sous test, reposant sur la mesure simultanée de l'entrée  $x$  et de la sortie  $y$  du système.

2. Caractéristique d'une carte son à pouvoir lire et enregistrer simultanément des fichiers audio (signaux numériques).

et qui doit être réalisée parfois à un échantillon près afin d'optimiser la qualité du tracé de chaque courbe.

### 6.2.2.2 Analyse des résultats

Les Figures 6.3 à 6.9, montrent les résultats expérimentaux des mesures bivoie, avec la tension électrique à l'entrée du haut-parleur comme signal d'entrée ( $x$ ), et la pression acoustique mesurée par le microphone comme signal de sortie ( $y$ ).

Les Figures de gauche (a), représentent ensemble les deux signaux temporels d'entrée ( $x$ ) et de sortie ( $y$ ). Elles permettent de montrer le degré de déformation de la forme d'onde des sorties par rapport à celles des entrées en fonction des valeurs de la tension d'entrée. Ainsi, l'observation de ces signaux temporels permet de remarquer une croissante détérioration dans les formes d'onde des signaux de sortie avec le niveau de la tension électrique à l'entrée du haut-parleur. Cette déformation est surtout accompagnée par une présence accrue d'harmoniques dans les signaux des niveaux de tension électriques les plus élevés (Figures 6.8 et 6.9).

Les Figures de droite (b) quant à elles, montrent les courbes caractéristiques obtenues par le tracé de la fonction  $y = f(x)$ , à partir des signaux d'entrée et de sortie normalisés et synchronisés. Pour un souci d'optimisation de la qualité des courbes, un nombre fini de 10000 échantillons a été utilisé pour tous les signaux tracés. L'examen des différents tracés obtenus, permet de confirmer les observations faites sur les figures de gauche précédemment. Effectivement, nous pouvons aisément remarquer la forte non-linéarité de la courbe caractéristique de la Figure 6.3 correspondant à la tension d'entrée la plus faible (0,25 V), avec deux grandes boucles d'hystérésis<sup>1</sup> dans les deux régions  $[-0,6 ; -1]$  et  $[0,6 ; 1]$  de la tension électrique, mais également cette épaisseur qui résulte de la multiplicité du tracé<sup>2</sup> de la courbe, ayant pour origine la forte modulation des deux signaux mesurés par la tension d'alimentation (50 Hz).

Pour les autres courbes caractéristiques, la multiplicité du tracé disparaît progressivement avec le niveau de la tension d'entrée, mais les boucles d'hystérésis prennent différentes formes et tailles selon les niveaux de la tension, avec toutefois une nette distinction des deux courbes des Figures 6.6 et 6.7 avec les niveaux respectifs de tension de 3 et 4,5 V, avec des boucles d'hystérésis les moins nombreuses et les plus étroites. Ceci peut nous renseigner sur la faible non-linéarité du haut-parleur pour ces niveaux moyens de la tension d'entrée, correspondant aux deux niveaux de la pression sonore de 93 et 96 dB respectivement.

---

1. Les boucles d'hystérésis dans les courbes caractéristiques sont représentatives des écarts entre les deux formes d'onde, avec une taille qui est directement liée à l'écart horizontal (temps) et vertical (amplitudes).

2. La multiplicité du tracé est synonyme de l'irrégularité de la forme d'onde d'au moins un des deux signaux le long de l'axe du temps.

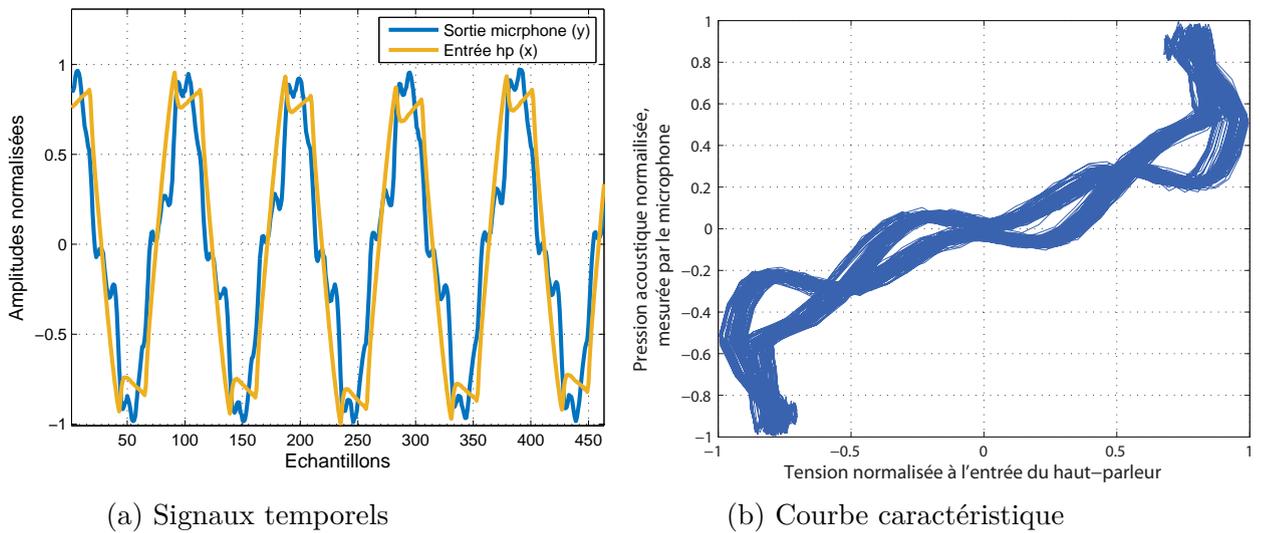


FIGURE 6.3 – Résultats expérimentaux de la mesure bivoie avec la tension électrique à l'entrée du haut-parleur ( $V_{rms} = 0,25$  V), et la pression acoustique à la sortie du microphone (SPL = 72 dB).

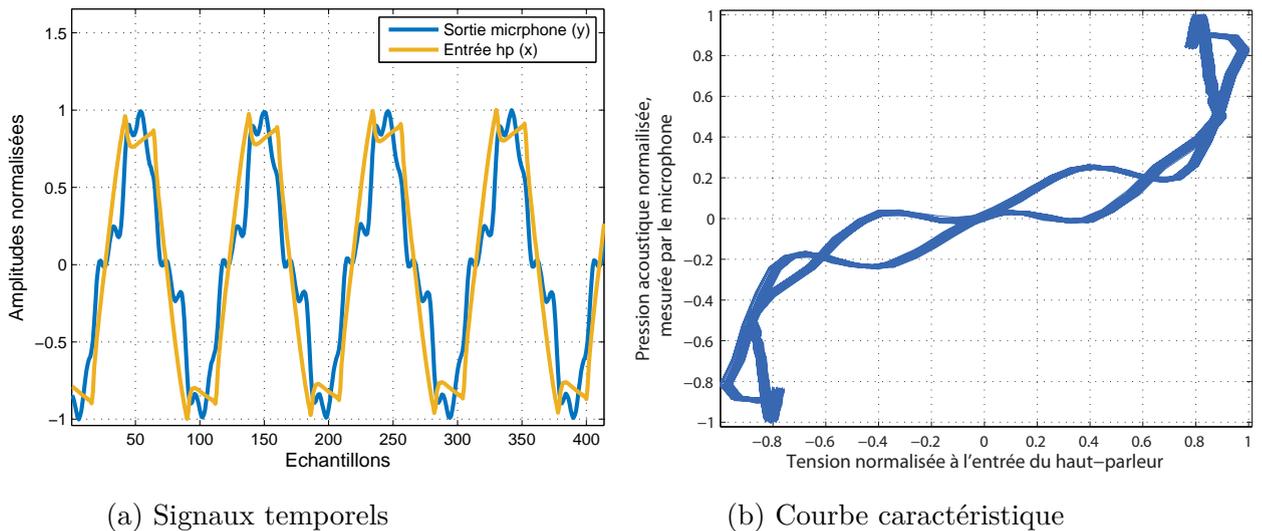


FIGURE 6.4 – Résultats expérimentaux de la mesure bivoie avec la tension électrique à l'entrée du haut-parleur ( $V_{rms} = 1$  V), et la pression acoustique à la sortie du microphone (SPL = 81 dB).

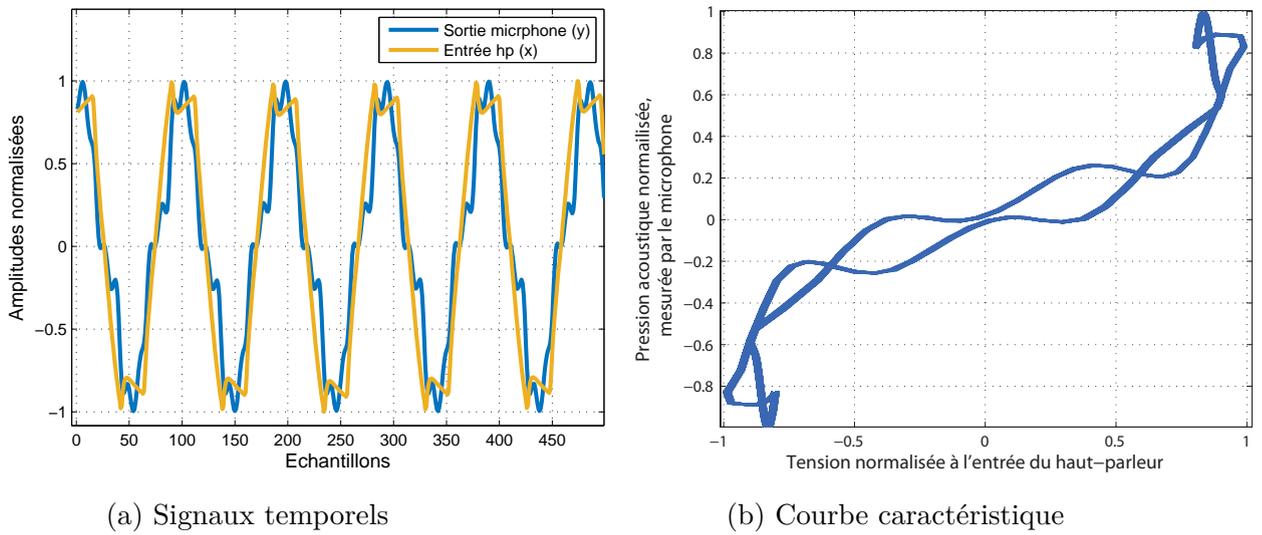


FIGURE 6.5 – Résultats expérimentaux de la mesure bivoie avec la tension électrique à l'entrée du haut-parleur ( $V_{rms} = 1,5 \text{ V}$ ), et la pression acoustique à la sortie du microphone ( $SPL = 87 \text{ dB}$ ).

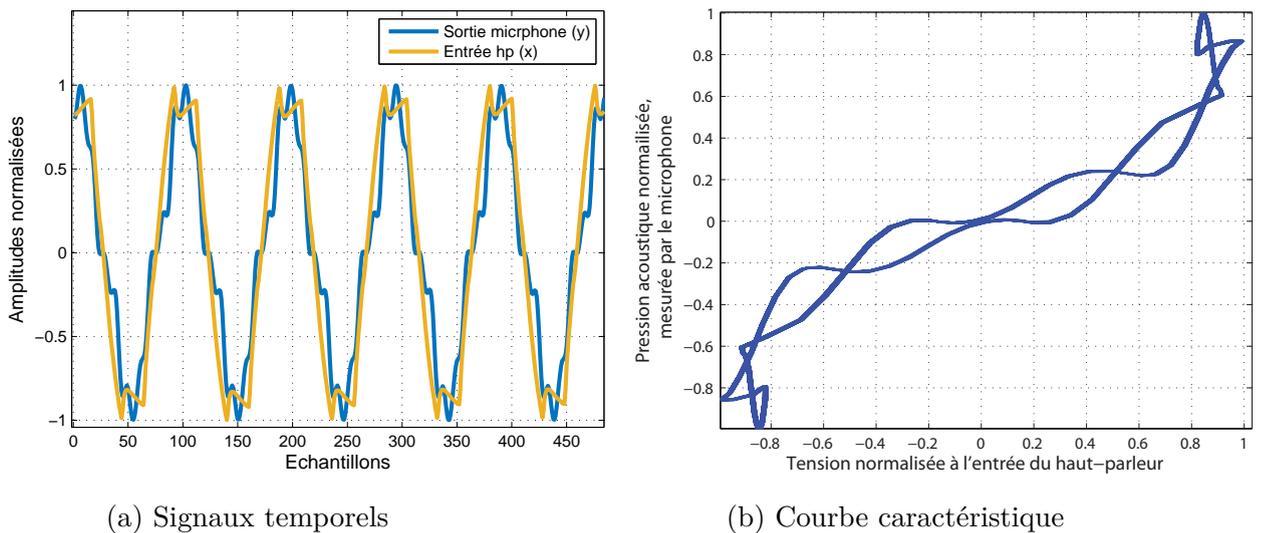


FIGURE 6.6 – Résultats expérimentaux de la mesure bivoie avec la tension électrique à l'entrée du haut-parleur ( $V_{rms} = 3 \text{ V}$ ), et la pression acoustique à la sortie du microphone ( $SPL = 92 \text{ dB}$ ).

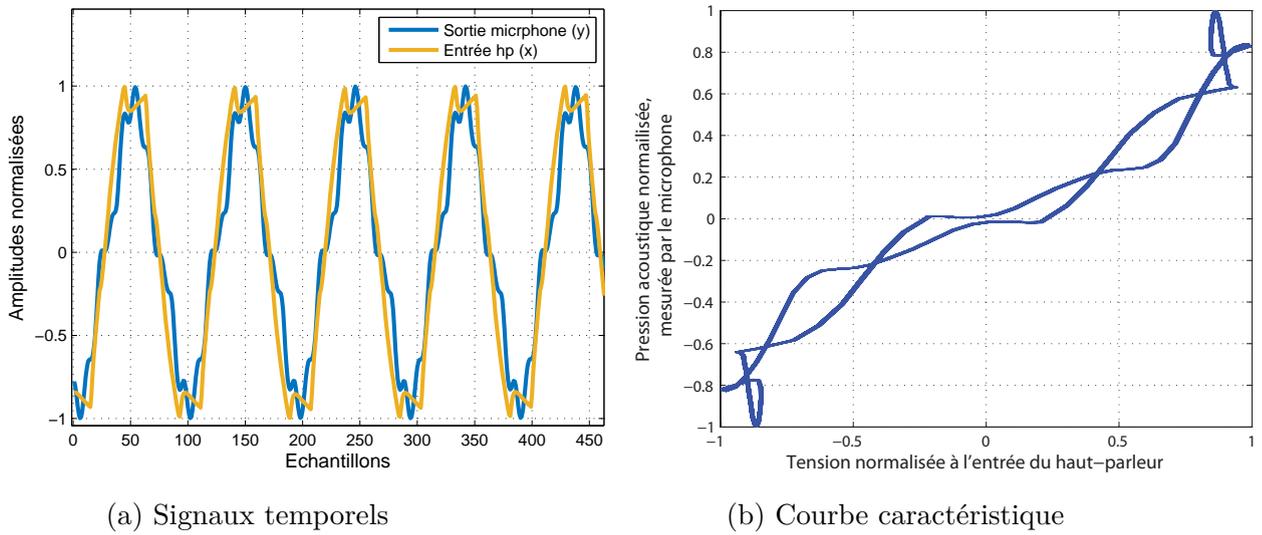


FIGURE 6.7 – Résultats expérimentaux de la mesure bivoie avec la tension électrique à l'entrée du haut-parleur ( $V_{rms} = 4,5 \text{ V}$ ), et la pression acoustique à la sortie du microphone (SPL = 96 dB).

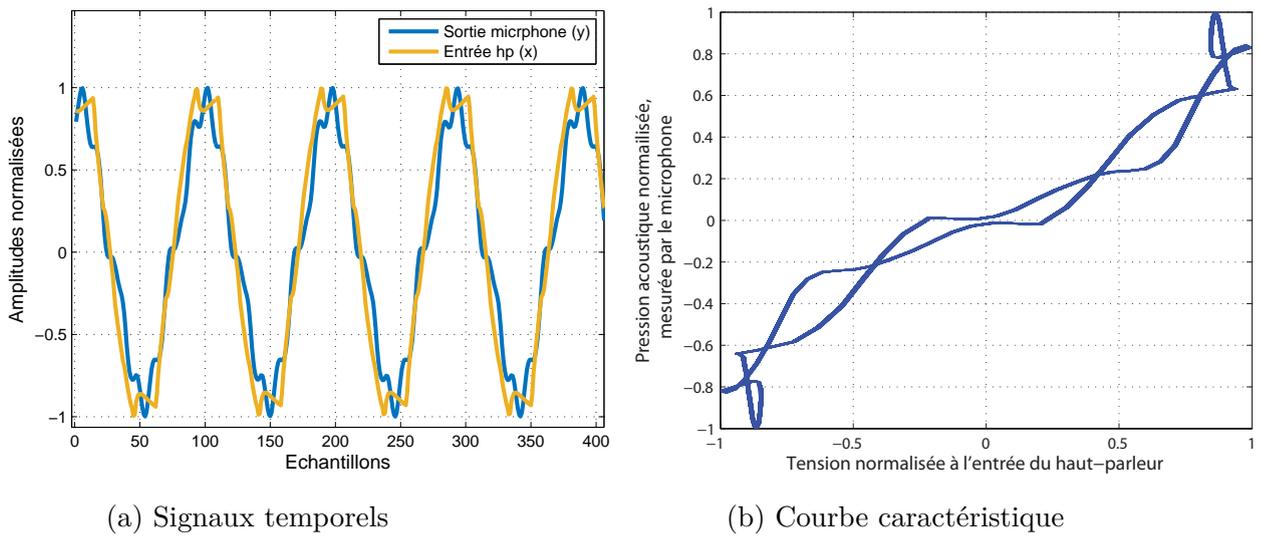


FIGURE 6.8 – Résultats expérimentaux de la mesure bivoie avec la tension électrique à l'entrée du haut-parleur ( $V_{rms} = 6 \text{ V}$ ), et la pression acoustique à la sortie du microphone (SPL = 99 dB).

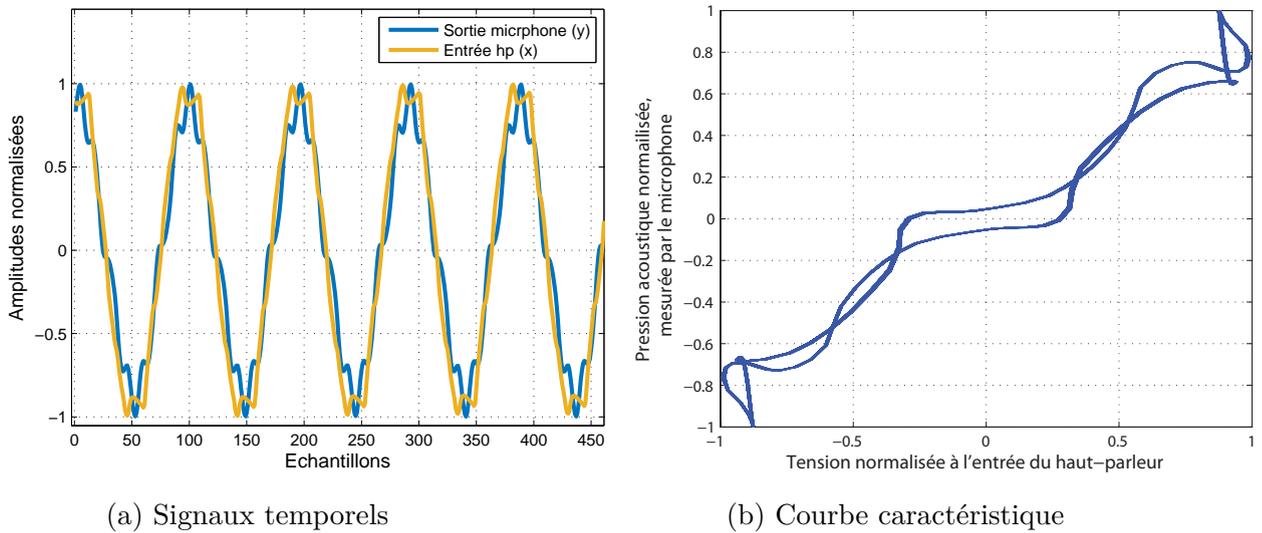


FIGURE 6.9 – Résultats expérimentaux de la mesure bivoie avec la tension électrique à l'entrée du haut-parleur ( $V_{rms} = 7,5$  V), et la pression acoustique à la sortie du microphone (SPL = 101 dB).

### 6.2.3 Fonction de cohérence

Le rapport de cohérence représente pour un système dynamique la part de la puissance cohérente (contribuant à la linéarité du système) par rapport à la puissance totale de sortie du système. La présence de bruit ou de réponses supplémentaires (non linéairement liées à l'excitation) dans la réponse du système dynamique considéré diminuera la cohérence [Braun, 2008].

Un autre avantage non négligeable de la fonction de cohérence, c'est qu'elle tient compte du comportement non linéaire du haut-parleur dans le domaine fréquentiel, en considérant la contribution de la totalité des composantes fréquentielles du signal d'excitation en analyse large bande dans la transformation non linéaire du système.

#### 6.2.3.1 Description de la méthode de mesure

Le procédé expérimental de la Figure 6.10 ci-dessous, montre les étapes requises pour la mesure de la fonction de cohérence, à l'aide du banc de mesure de la Figure 4.13.

Le signal d'excitation  $x(n)$  utilisé est de type bruit blanc gaussien de moyenne nulle, d'une durée de 3 secondes. La mesure est effectuée en champ proche, en plaçant le microphone à 2 cm du haut-parleur dans la direction axiale. La mesure de la fonction de cohérence, est réalisée également avec une mesure bivoie en mode full-duplex, avec une fréquence d'échantillonnage de 96 kHz. Les deux signaux mesurés sont ensuite synchronisés pour les préparer pour la suite des traitements.

Une qualité correcte des graphes de la fonction de cohérence, à même de nous donner la possibilité de tirer des conclusions sur la non-linéarité du haut-parleur, requiert un réglage précis de la fonction *miscohere* de Matlab<sup>TM</sup>, qui doit être effectué dans un compromis entre la qualité informative de la fonction de cohérence et la charge de

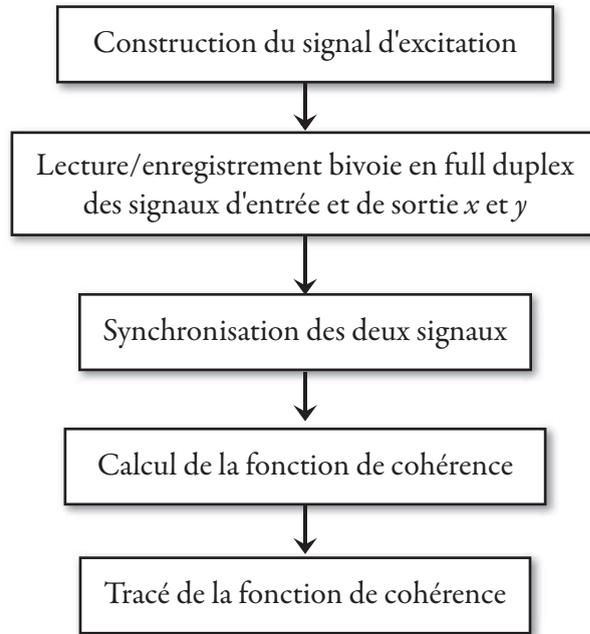


FIGURE 6.10 – Procédé expérimental de mesure de la fonction de cohérence.

calcul inhérente au nombre très grand d'échantillons. Pour le calcul de la fonction de cohérence, basée sur le calcul des densités spectrales des signaux  $x(n)$  et  $y(n)$ , et de la densité interspectrale de puissance des deux signaux (Equation 4.3), une fenêtre de Hanning de 1024 échantillons a été utilisée, avec une résolution fréquentielle de 1024 points et un nombre nul d'échantillons qui sont en chevauchement entre des segments contigus des signaux (paramètre *noverlap* de la fonction Matlab *mscohere*).

Enfin, comme pour la mesure de la courbe caractéristique dans la section précédente, la fonction de cohérence a été calculée et tracée pour sept différents niveaux de la tension électrique présente à l'entrée du haut-parleur.

### 6.2.3.2 Analyse des résultats

Le calcul de la fonction de cohérence correspondant aux sept niveaux considérés de la tension électrique d'entrée, a abouti aux graphes des deux Figures 6.11 et 6.12, montrant les sept courbes de la fonction de cohérence en représentation bidimensionnelle et en graphe en cascade (waterfall) respectivement.

En limitant l'analyse à 10 kHz, nous nous assurons de la couverture de la gamme fréquentielle du haut-parleur employé (90 – 8800 Hz). Ainsi, cela a permis de se rendre compte de la valeur fluctuante de la cohérence tout au long de l'axe des fréquences suivant le niveau de la tension considérée. En effet, cela nous a permis de formuler les observations suivantes :

- L'ensemble des courbes se situe dans la gamme de fréquence entre 280 et 9600 Hz ;
- Les niveaux les plus élevés (6 et 7) de la tension présentent des creux importants au milieu des graphes, révélateurs d'une sévère non-linéarité du haut-parleur dans les moyennes fréquences lorsque la tension à son entrée augmente ;

- Les niveaux les plus faibles (1 et 2) de la tension présentent des creux modérés au milieu des graphes, significatifs d'une non-linéarité moyenne du haut-parleur dans ces moyennes fréquences pour des tensions très faibles ;
- D'après les graphes, il est clair que les trois courbes des niveaux 3, 4 et 5 présentent une meilleure linéarité sur une bonne partie de la gamme fréquentielle, notamment entre 3000 et 9600 Hz, et qui diminue toutefois avec la fréquence à partir de 3000 Hz, jusqu'à une chute brusque à partir de 1000 Hz pour le niveau 3 et à partir de 300 Hz pour les niveaux 4 et 5.

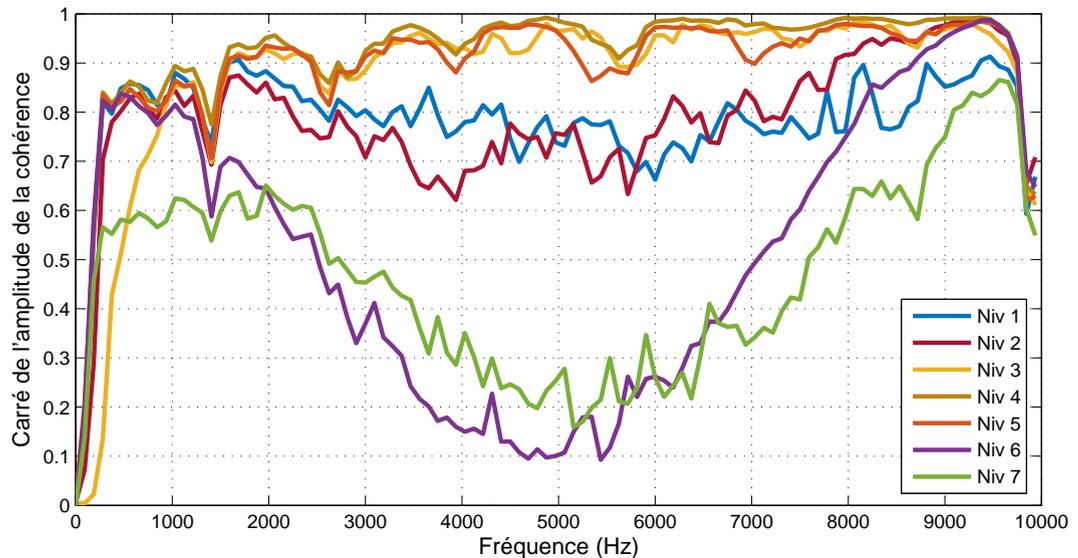


FIGURE 6.11 – Graphes de la fonction de cohérence en fonction des niveaux de la tension d'entrée du haut-parleur.

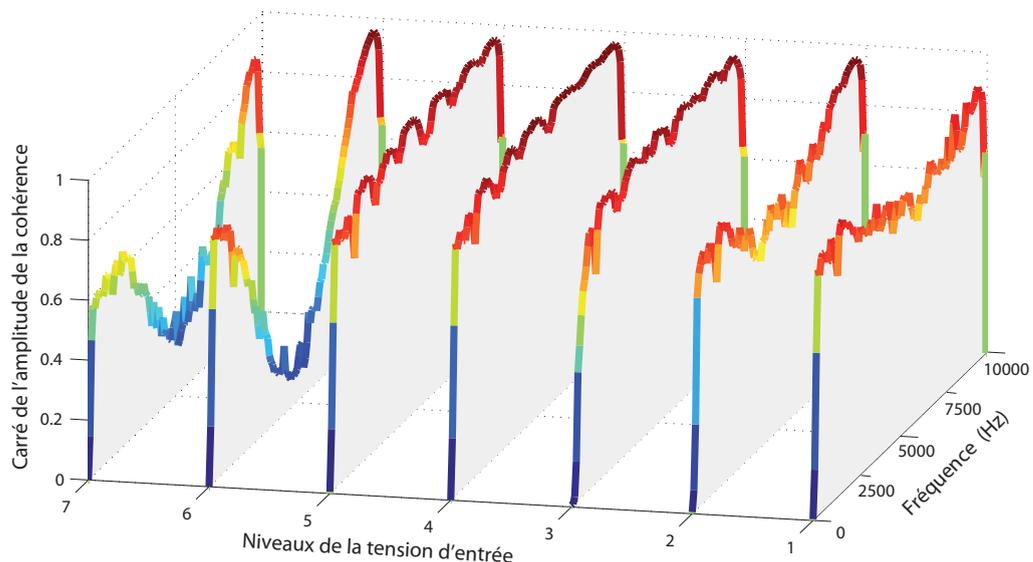


FIGURE 6.12 – Graphe en cascade de la fonction de cohérence en fonction des niveaux de la tension d'entrée du haut-parleur.

### 6.2.4 Mesure de la réponse en fréquence

La réponse en fréquence est une donnée qualitative du comportement dynamique d'un système. En acoustique, elle représente la caractéristique amplitude-fréquence, donnant l'amplitude de la grandeur de sortie d'un système donné en fonction de la fréquence, en réponse à un signal d'excitation spécifique. La réponse en fréquence occupe ainsi une place particulière en ingénierie audio pour la caractérisation des équipements et des circuits (amplificateur, crossover, microphone, haut-parleur, etc.).

En pratique, la disponibilité de la réponse en fréquence est indispensable pour la compréhension des différents phénomènes de distorsions dans le haut-parleur. Nous présentons dans cette section, les résultats de la mesure de la réponse en fréquence du haut-parleur considéré, que nous utiliserons plus tard.

#### 6.2.4.1 Description de la méthode de mesure

Plusieurs techniques existent pour la mesure de la réponse en fréquence du haut-parleur. Pour ce faire, nous avons porté notre choix sur la technique de la réponse impulsionnelle, qui a largement fait ses preuves durant les dernières années, devant les autres techniques traditionnelles, telles que le balayage sinusoïdal ou celle de la déconvolution avec un bruit blanc comme excitation.

La technique de mesure utilisée consiste à exciter le haut-parleur à l'aide d'une impulsion de Dirac. Si l'on se soustrait à l'effet de la salle, le microphone fournit ainsi la réponse impulsionnelle. Dès lors, la réponse en fréquence du haut-parleur est déduite en appliquant la transformée de Fourier rapide (FFT) à la réponse impulsionnelle obtenue précédemment.

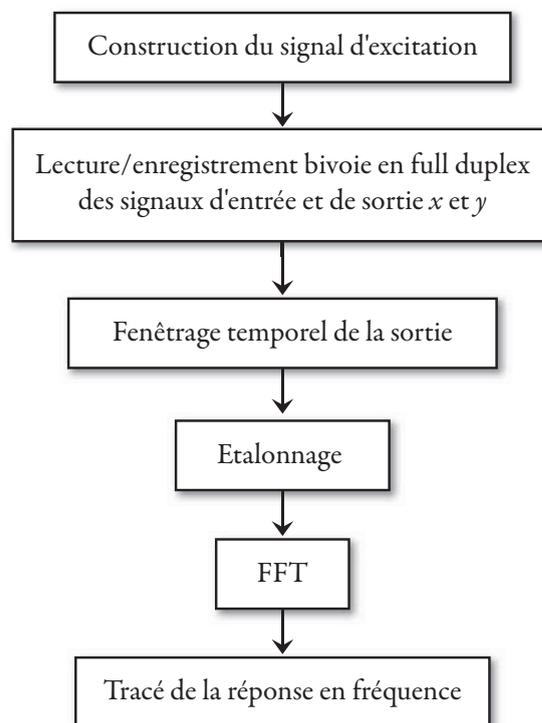


FIGURE 6.13 – Procédé expérimental de mesure de la réponse en fréquence.

Le procédé expérimental détaillé de la mesure en fréquence est présenté dans la Figure 6.13 ci-dessus. Cela commence par la construction du signal d'excitation, sous forme d'une impulsion de Dirac, dont la durée de 0,9 ms et une amplitude de 7 Vrms ont été fixées à l'issue de plusieurs essais, afin de pouvoir exciter le haut-parleur le plus vigoureusement possible, sans pour autant le détruire ou modifier ses caractéristiques, et bien sûr avoir la meilleure réponse à la sortie du microphone.

Le procédé de lecture/enregistrement est réalisé en bivoie en mode full-duplex à une fréquence d'échantillonnage de 96 kHz, à l'aide de l'interface audionumérique AVID M-AUDIO Fast Track C400. Le microphone est placé à 50 cm du haut-parleur, d'où la nécessité de l'application d'un fenêtrage temporel en vue de simuler le champ libre, en filtrant toutes les réverbérations inutiles de la salle, tel qu'il a été décrit dans la section 6.2.1.2 (Figure 6.14).

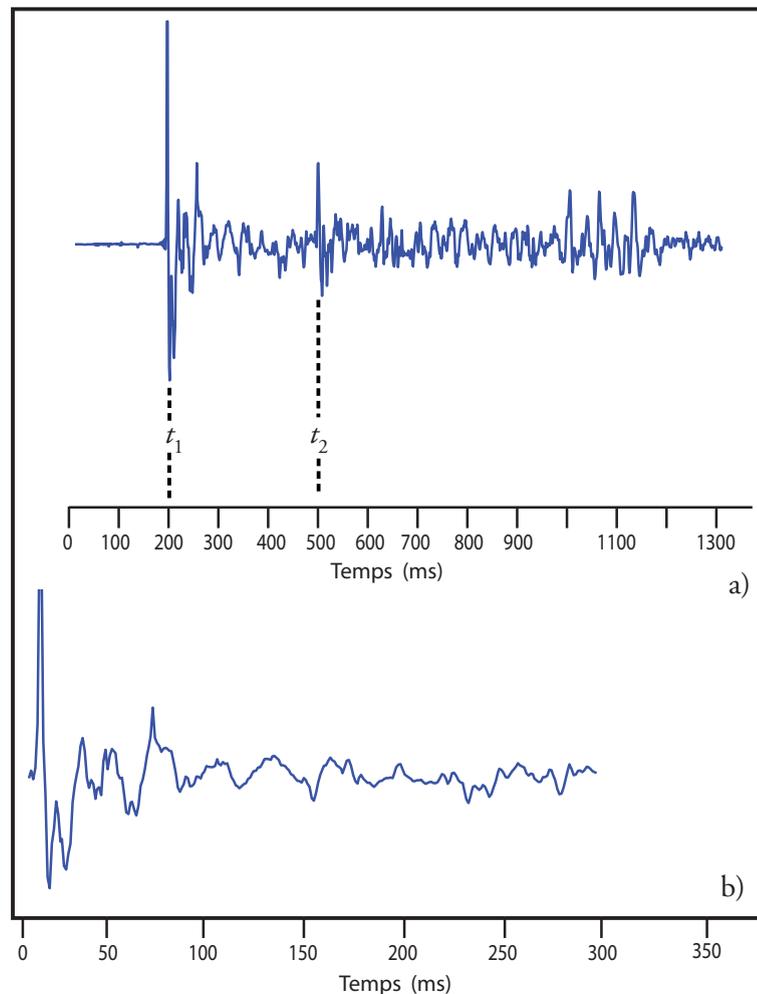


FIGURE 6.14 – a) Fenêtrage temporel de la réponse impulsionnelle mesurée, entre les instants  $t_1$  et  $t_2$ , b) Résultat du fenêtrage temporel.

La réponse impulsionnelle obtenue par fenêtrage temporel de la sortie brute du microphone, est ensuite étalonnée pour représenter la pression acoustique en Pascal (Pa). La réponse en fréquence du haut-parleur est obtenue en appliquant la FFT à la réponse

impulsionnelle étalonnée précédemment. La réponse en fréquence est sous forme d'un spectre d'amplitude du niveau de la pression acoustique exprimée en dB SPL, d'une résolution fréquentielle de 5,86 Hz. Sa courbe est enfin tracée à l'aide de Matlab<sup>TM</sup>, et fera l'objet d'analyse dans la section suivante.

#### 6.2.4.2 Analyse des résultats

La réponse en fréquence mesurée est montrée dans la Figure 6.15. Si on la compare avec la réponse en fréquence fournie par le fabricant (Annexe A), on peut d'emblée observer une grande similitude entre les allures des deux graphes, et entre les ordres de grandeurs des valeurs des deux niveaux de pression sonore (dB SPL).

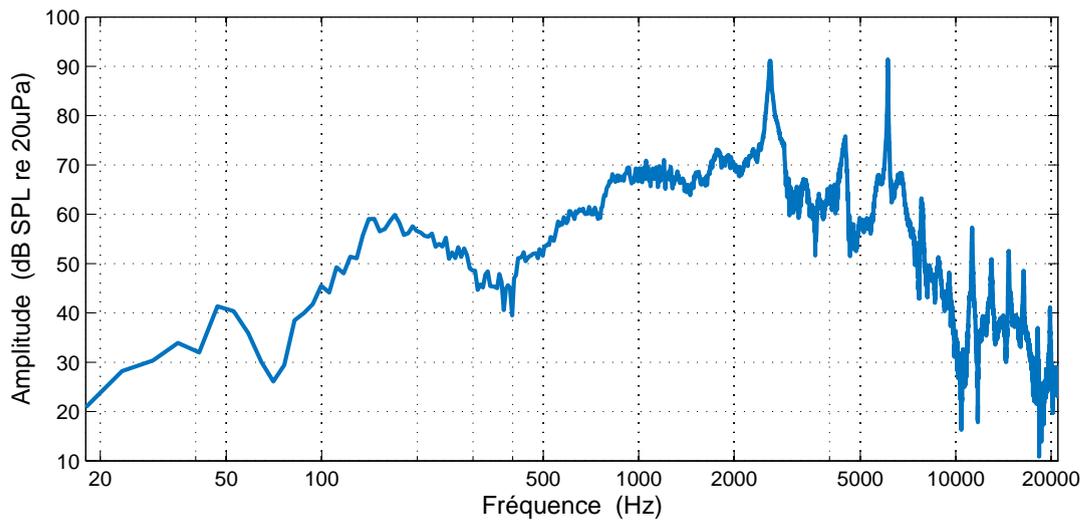


FIGURE 6.15 – Réponse en fréquence mesurée du haut-parleur, obtenue avec la méthode de la réponse impulsionnelle.

Nous résumons ci-après l'analyse de la réponse en fréquence mesurée dans les points suivants :

**1. Sensibilité dynamique :** En plus de la similitude évidente que nous venons de mentionner, entre les courbes des deux réponses en fréquence, mesurée et celle du fabricant, nous nous intéressons ici particulièrement à la sensibilité dynamique (gain en fonction de la fréquence) de la réponse en fréquence mesurée. Pour un électroacousticien averti, il suffit d'un bref aperçu de l'allure de la réponse en fréquence, pour saisir le rendu sonore du haut-parleur (son tonitruant (fréquences graves accentuées), son nasal (fréquences moyennes accentuées) ou son strident (fréquences aiguës accentuées)). En considérant la réponse en fréquence illustrée de la Figure 6.16, nous constatons que la plage de fréquence [826 – 9000 Hz] est la plus audible de notre haut-parleur woofermédium, avec des pics de sensibilité très grandes montant jusqu'à 92 dB SPL, à 2590 Hz, 4490 Hz et 6100 Hz. Le creux centré autour de 500 Hz déjà présent dans la courbe du fabricant, s'est un peu accentué dans la courbe mesurée en s'enfonçant jusqu'à la fréquence 400 Hz. Cependant, le plateau approximatif de la courbe du fabricant entre

150 et 3000 Hz n'est pas très visible sur la courbe mesurée, ce qui donne des écarts importants de la sensibilité de la réponse en fréquence entre 50 et 70 dB SPL.

**2. Bande passante :** faute de plateau d'allure régulière, la bande passante est obtenue de façon graphique en s'éloignant de tous les creux de la zone médiane de la courbe de la réponse en fréquence, ce qui nous donne approximativement une bande passante qui va de 90 Hz à 9200 Hz (Figure 6.16), et qui reste raisonnablement très proche de celle donnée par le fournisseur à savoir [90 – 8800 Hz].

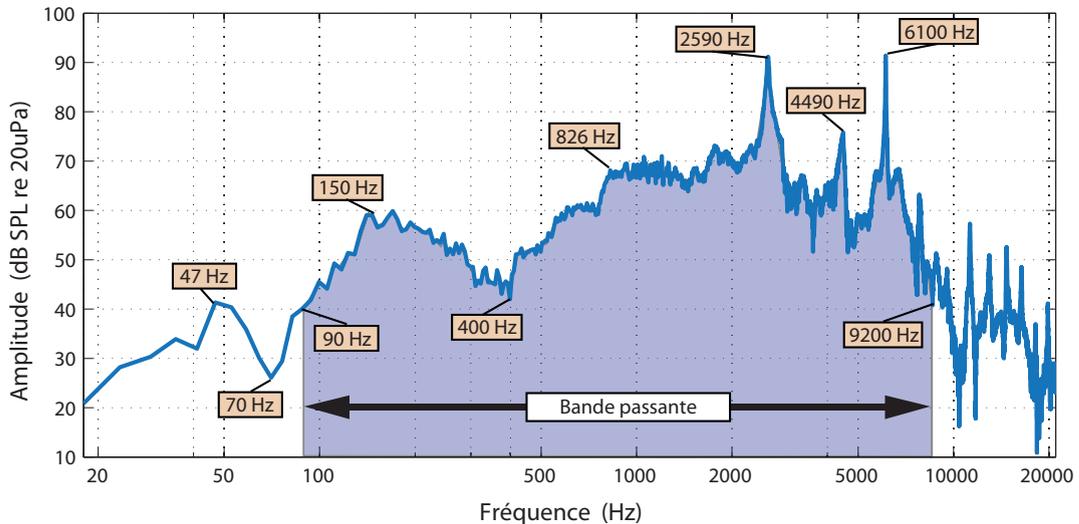


FIGURE 6.16 – Illustration des principales fréquences et de la bande passante dans la réponse en fréquence mesurée du haut-parleur.

### 6.2.5 Mesure des distorsions harmoniques et de la distorsion harmonique totale

Si la distorsion harmonique est connue comme étant la technique la plus ancienne et la plus répandue pour la mesure de la non-linéarité d'amplitude, elle était autrefois, le seul moyen suffisant pour évaluer les non-linéarités des haut-parleurs électrodynamiques. Ainsi, même si aujourd'hui il existe plusieurs métriques complémentaires pour cette évaluation des distorsions, la distorsion harmonique et la THD demeurent à cet égard, les premiers indicateurs affichés par les fabricants des haut-parleurs et des autres équipements concernés par les distorsions.

Dans cette thèse, la distorsion harmonique et la THD sont au cœur de notre stratégie de modélisation des distorsions des haut-parleurs électrodynamiques à l'aide des filtres de Volterra adaptatifs. Aussi, une grande partie du travail qui a servi à la mesure de ces distorsions harmoniques, sera repris plus tard pour leur prédiction après l'identification du système haut-parleur.

#### 6.2.5.1 Description de la méthode de mesure

La description de la méthode de mesure des distorsions harmoniques et de la THD est basée sur le procédé expérimental de la Figure 6.17 ci-après.

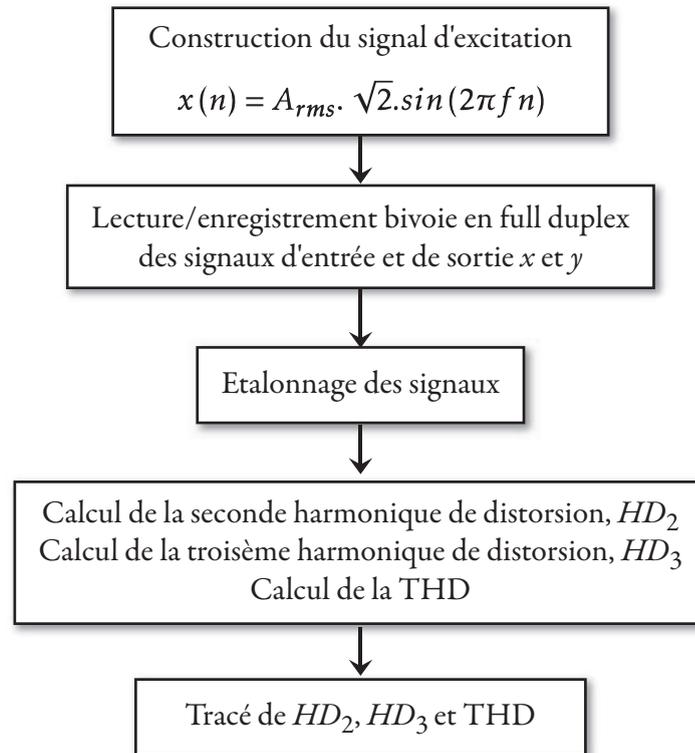


FIGURE 6.17 – Procédé expérimental de mesure des distorsions harmoniques et de la THD.

Les mesures ont été effectuées en conditions ambiantes, où le haut-parleur sous test de type woofer-médium, monté sur un écran semi-infini, est placé à une distance moyenne au milieu de la salle, loin des surfaces réfléchissantes.

Compte tenu du nombre important de mesures, nous avons adopté la mesure en champ proche, afin d'éviter le traitement systématique des signaux par fenêtrage temporel, en plaçant le microphone à 2 cm du haut-parleur dans sa direction axiale.

Le balayage fréquentielle est réalisée sur la gamme de fréquence 37 - 10400 Hz, et pour une meilleure lisibilité des spectres, nous avons prévu deux résolutions fréquentielles pour nos mesures, ainsi les fréquences sont incrémentées d'un pas de 20 Hz entre 37 et 537 Hz, et d'un pas de 200 Hz entre 600 et 10400 Hz, permettant ainsi un balayage à l'aide de 76 points fréquentiels.

Les mesures de distorsions ont été réalisées pour 3 niveaux d'amplitude de la tension électrique d'entrée ; à savoir ; 1, 4 et 7 Vrms. Pour les mesures nous avons utilisé une fréquence d'échantillonnage de 96 kHz, un nombre maximal d'harmoniques considérées égal à 4, et une durée de 1 seconde pour chaque son de balayage.

Les différents signaux à l'entrée du haut-parleur et à la sortie du microphone sont enregistrés simultanément grâce à la technique de lecture/enregistrement bivoie en full duplex. La réponse à la sortie du microphone est ensuite étalonnée, en convertissant les amplitudes sans signification en pression acoustique exprimée en Pascal, qui va être utilisée dans les différentes formules.

La seconde et la troisième composantes de la distorsion harmonique ( $HD_2$  et  $HD_3$ ), ainsi que la THD sont calculées à l'aide des formules fournies par la norme IEC 60268-5:2007 [IEC, 2007] :

$$HD_2 = \frac{p_2}{\sqrt{\sum_{i=1}^N p_i^2}} 100 \%, \quad HD_3 = \frac{p_3}{\sqrt{\sum_{i=1}^N p_i^2}} 100 \%$$

et

$$THD = \frac{\sqrt{\sum_{i=2}^N p_i^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^N p_i^2}} 100 \%$$

Où  $p_i$  est la valeur efficace de la pression acoustique en Pascal, de la composante fréquentielle considérée d'ordre  $i$ , et  $N$  est le nombre maximal d'harmoniques considérées.

Concrètement, le procédé de la Figure 6.17, est implémenté à l'aide d'un code Matlab<sup>TM</sup> avec une *boucle for*, qui traite pour chacune des 76 prévués, un son pur d'une fréquence incrémentable. A la fin de la boucle, les trois vecteurs de 76 valeurs des pourcentages de  $HD_2$ ,  $HD_3$  et THD sont formés. Les vecteurs sont ensuite tracés en fonction des 76 fréquences de balayage, ce qui donne les courbes des spectres présentées dans la section suivante.

### 6.2.5.2 Analyse des résultats

Les résultats des mesures des distorsions harmoniques et de la THD sont représentés dans les Figures de 6.18 à 6.23. Les Figures 6.18, 6.19 et 6.20 représentent respectivement les distorsions  $HD_2$ ,  $HD_3$  et THD mesurées pour les 3 niveaux de la tension électrique de l'excitation.

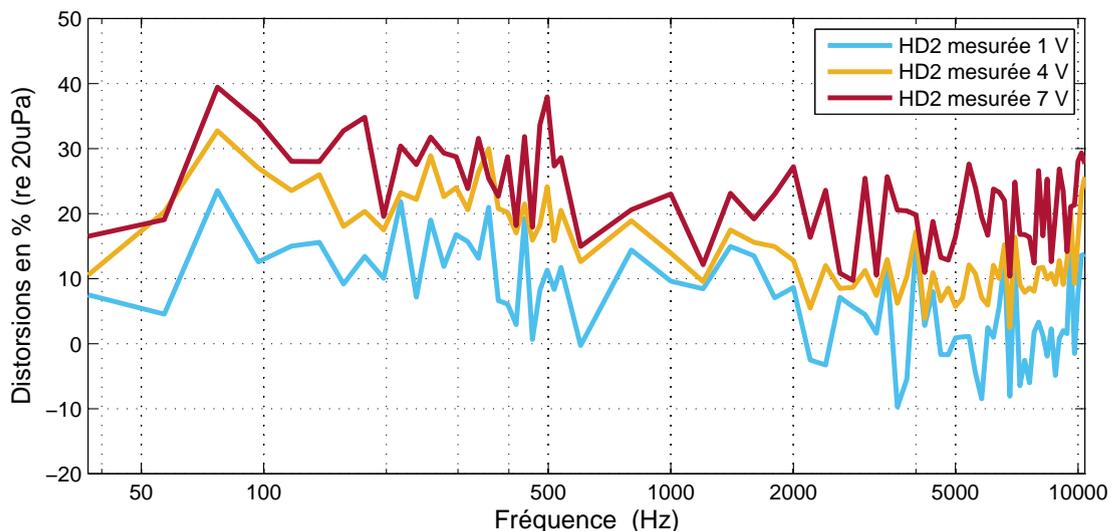


FIGURE 6.18 – Secondes composantes de la distorsion harmonique ( $HD_2$ ) mesurées, obtenues avec 1, 4 et 7 Vrms.

La première chose à remarquer est que pour les trois figures, les pourcentages des métriques de distorsion sont proportionnels à la tension de l'entrée. Les écarts des pourcentages diminuent au fur et à mesure que les fréquences augmentent, rendant les distorsions presque confondues en hautes fréquences. D'autre part, nous pouvons remarquer que les distorsions sont les plus grandes en basses fréquences entre 50 et 500 Hz, elles sont de moindre valeurs en moyennes fréquences, mais elles augmenteront de nouveau à partir de 4 à 5 kHz mais à un degré inférieur que celui en basses fréquences.

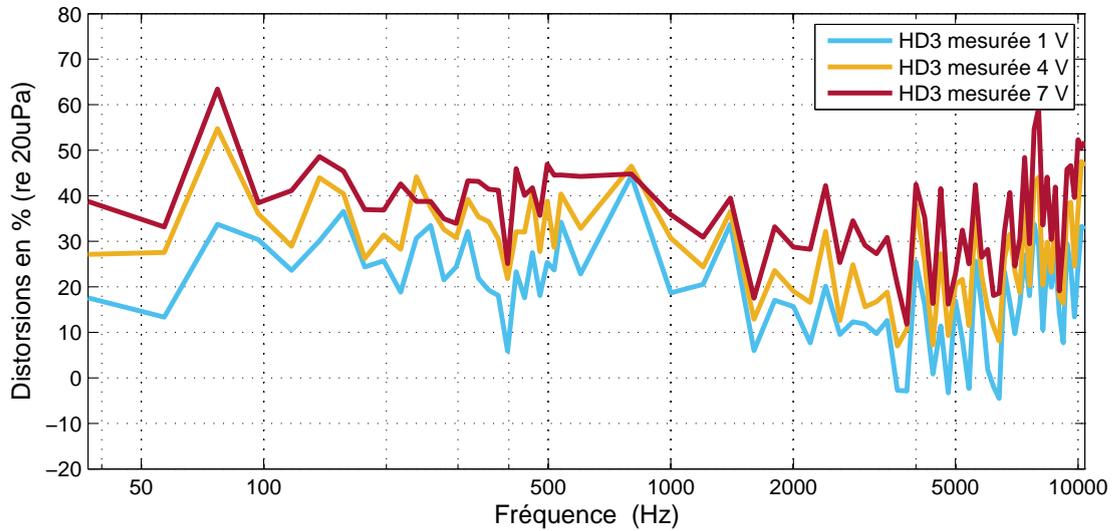


FIGURE 6.19 – Troisièmes composantes de la distorsion harmonique ( $HD_3$ ) mesurées, obtenues avec 1, 4 et 7 Vrms.

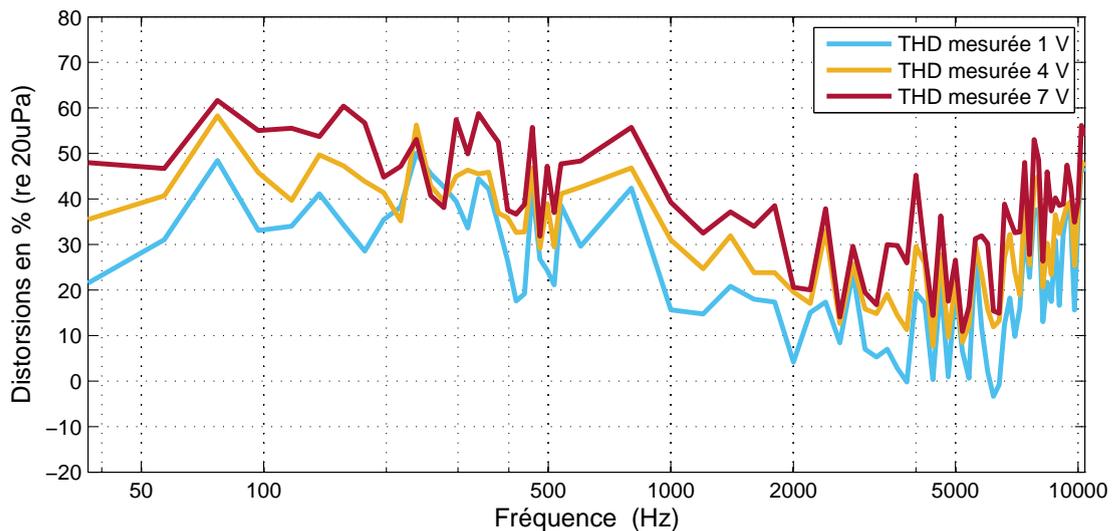


FIGURE 6.20 – Distorsions harmoniques totales (THD) mesurées, obtenues avec 1, 4 et 7 Vrms.

Les Figures 6.21 , 6.22 et 6.23 montrent les trois types de distorsion obtenus respectivement des niveau d'entrée 1, 4 et 7 Vrms. Les trois figures ont en commun la dominance des courbes THD, suivie de celle de la troisième composante de la distorsion  $HD_3$ , et vient toujours en dernier la courbe de la seconde composante de la distorsion harmonique  $HD_2$ . L'écart entre les trois courbes augmente avec la tension d'entrée, ainsi dans les courbes de la Figure 6.23, nous remarquons que les courbes se distinguent nettement les unes des autres notamment en basses et moyennes fréquences avec des pourcentages allant de 20 à 60 %.

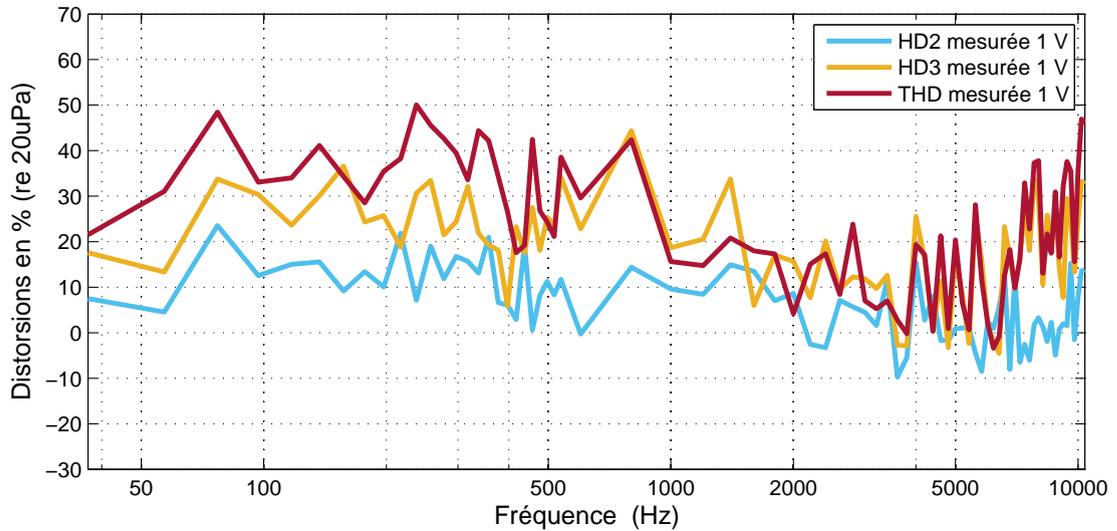


FIGURE 6.21 – Distorsions harmoniques ( $HD_2$ ,  $HD_3$  et THD) mesurées, obtenues avec 1 Vrms.

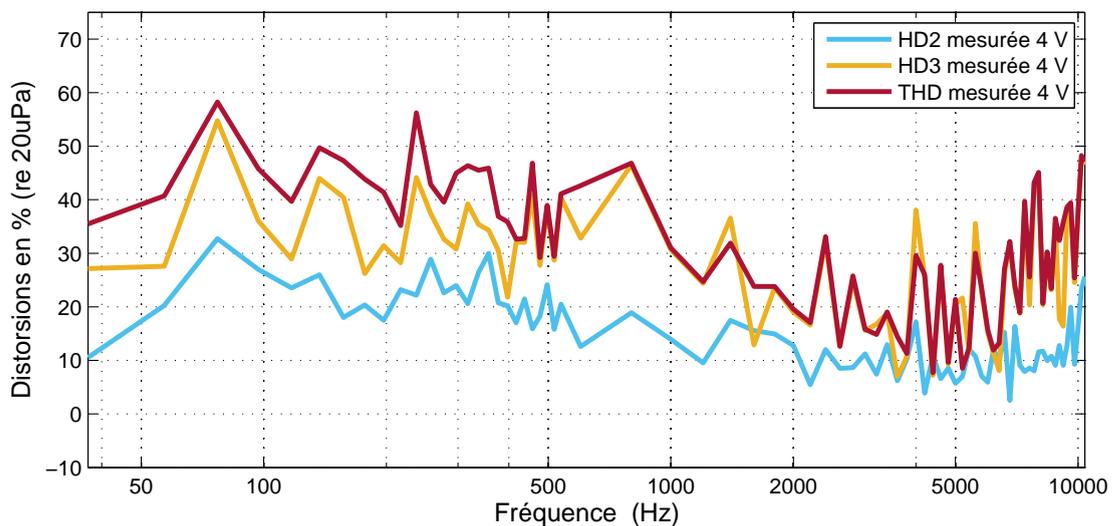


FIGURE 6.22 – Distorsions harmoniques ( $HD_2$ ,  $HD_3$  et THD) mesurées, obtenues avec 4 Vrms.

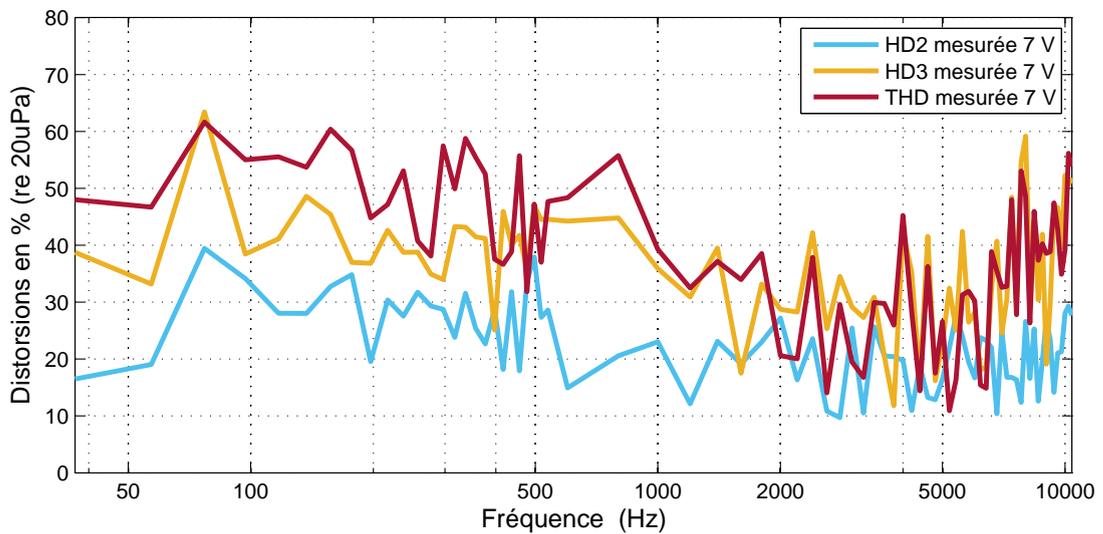


FIGURE 6.23 – Distorsions harmoniques ( $HD_2$ ,  $HD_3$  et THD) mesurées, obtenues avec 7 Vrms.

### 6.2.6 Mesure des distorsions d'intermodulation

Conséquemment à la description approfondie des deux métriques dans le quatrième chapitre, il est avéré que la distorsion d'intermodulation n'occupe pas la même place que les distorsions harmoniques, que ce soit dans la littérature ou en industrie. Toutefois, nous avons évoqué l'intérêt grandissant de certains chercheurs pour la distorsion d'intermodulation, qui serait la seule métrique dans certains cas (système non linéaires polynomiaux statiques [Voishvillo et al., 2004]), en situation grâce à son mode de test multifréquentiel, de représenter un indicateur performant des distorsions dans le haut-parleur, dû au fait qu'il ne soit pas liée à l'excitation de manière harmonique. D'ailleurs, d'autres auteurs comme Rossi [Rossi, 2007], discrédite totalement les mesures basées sur la distorsion harmoniques, en faveur de la distorsion d'intermodulation, qui la qualifie, selon lui, de responsable de la dégradation audible dans le haut-parleur électrodynamique.

La distorsion d'intermodulation constitue le second principal objet de la modélisation derrière les distorsions harmoniques dans cette thèse. Les mesures de la distorsion d'intermodulation décrites ci-après, serviront dans les étapes d'identification et de modélisation traitées dans les prochains chapitres.

#### 6.2.6.1 Description de la méthode de mesure

Le procédé expérimental de mesure de la distorsion d'intermodulation est schématisé dans la Figure 6.24 ci-après. Les mesures ont été effectuées dans les mêmes conditions que celles des mesures précédentes des distorsions harmoniques, en l'occurrence, le lieu et le placement du microphone.

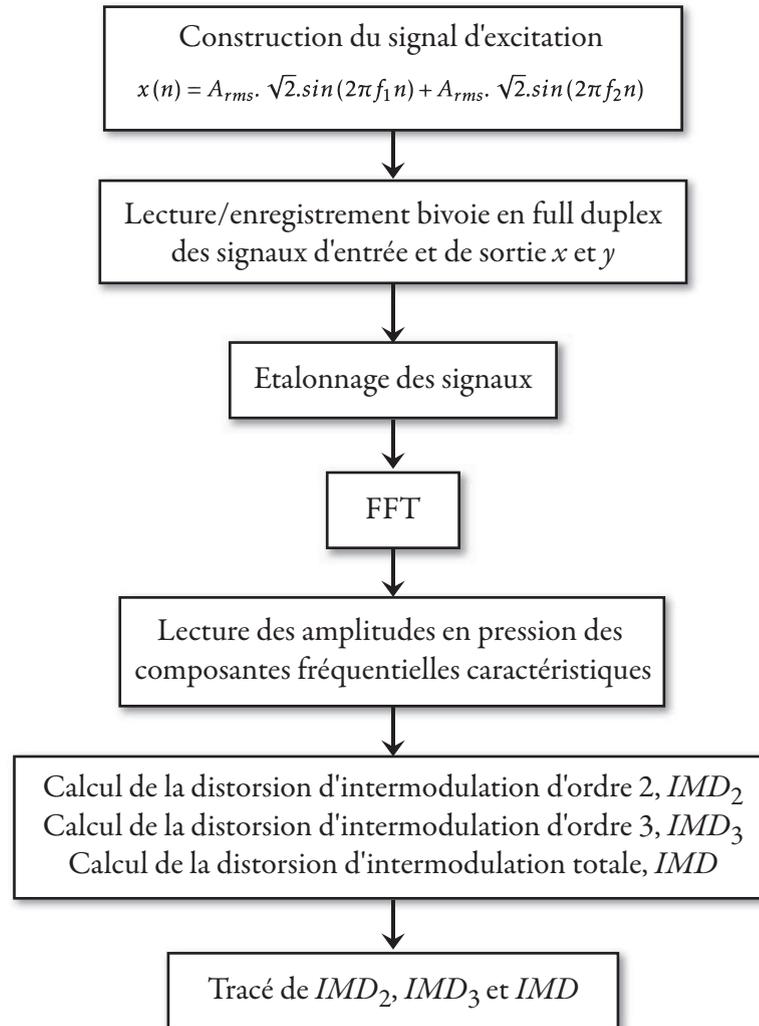


FIGURE 6.24 – Procédé expérimental de mesure des distorsions d’intermodulation.

La gamme de fréquence de mesure demeure la même pour nos mesures entre 37 et 10400 Hz. La distortion d’intermodulation a été mesurée également pour trois paliers d’amplitude de la tension électrique d’entrée : 1, 4 et 7 Vrms. Le signal d’excitation a été construit conformément à l’énoncé de la norme IEC 60268-5 :2007 [IEC, 2007]. A ce titre, nous avons opté pour que  $f_1$  soit égale à la fréquence de résonance du haut-parleur sous test, et  $f_2$  aura pour valeur 8,5 fois la valeur de  $f_1$ . La fréquence de résonance du haut-parleur a été déterminée à partir de l’impédance du haut-parleur, que nous avons mesurée en appliquant le programme *Limp* de la suite *Arta*<sup>1</sup> spécialisée dans les mesures et analyses audio dans les systèmes acoustiques et de communication. Sur les courbes de la Figure 6.25, on peut lire directement la fréquence indiquée par le curseur jaune, la valeur de la fréquence de résonance du haut-parleur qui est de 77,89 Hz, correspond à la fréquence de la pointe en basses fréquences du module de l’impédance du haut-parleur.

Ayant la valeur de la fréquence  $f_1$  égale à 77,89 Hz, la fréquence  $f_2$  prend ainsi la valeur 662,07 Hz. D’autre part, nous avons choisi la même amplitude pour ces deux

1. <http://www.artalabs.hr/>

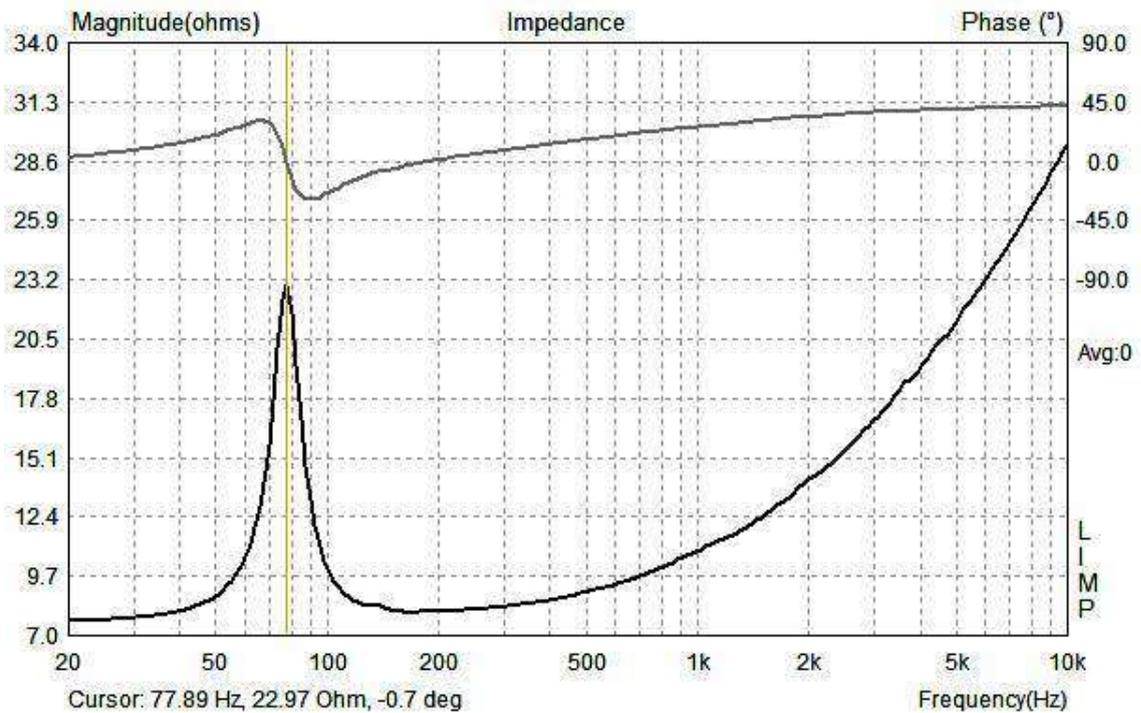


FIGURE 6.25 – Courbes expérimentales du module et de la phase de l'impédance du haut-parleur woofer-médium Nuandi Electronic modèle ND-MW08M50.

composantes fréquentielles du signal d'excitation, qui sera d'une durée de 0,5 seconde, échantillonné à 96 kHz.

Le signal d'excitation du haut-parleur et la réponse microphonique ont été enregistrés simultanément par la méthode de lecture/enregistrement bivoie en full duplex. La réponse du microphone est étalonnée, afin de pouvoir exploiter le signal de sortie en tant que pression acoustique exprimée en Pascal.

Le spectre de la pression acoustique est obtenu en appliquant la FFT à la pression temporelle de sortie. L'étape la plus sensible qui intervient à ce stade est l'identification de toutes les fréquences caractéristiques utilisées dans les différentes formules de calcul, afin de relever leurs amplitudes. Ceci n'est d'autant pas plus facilité par la grande résolution fréquentielle de 0,18 Hz, mais dont le bénéfice n'est pas à démontrer pour la précision des spectres.

La seconde et la troisième composantes de la distorsion d'intermodulation ( $IMD_2$  et  $IMD_3$ ) sont calculées à l'aide des formules de la norme IEC 60268-5 :2007 [IEC, 2007] :

$$IMD_2 = \frac{p_{(f_2-f_1)} + p_{(f_2+f_1)}}{p_{f_2}} 100 \% , \quad IMD_3 = \frac{p_{(f_2-2f_1)} + p_{(f_2+2f_1)}}{p_{f_2}} 100 \%$$

Où  $p$  est la valeur efficace de la pression acoustique en Pascal, du produit d'intermodulation considéré, et  $N$  est le nombre maximal d'harmoniques considérées.

La distorsion d'intermodulation totale est quant à elle calculée à l'aide de la formule de la norme SMPTE RP120-1983 :

$$IMD = \frac{\sum_{i=1}^N [p(f_2 - if_1) + p(f_2 + if_1)]}{p_{f_2}} 100 \%$$

L'ensemble des spectres obtenus pour les 3 niveaux de la tension d'entrée ont été tracés à l'aide de Matlab<sup>TM</sup>. Les spectres et les valeurs des différentes distorsions d'intermodulation sont présentés dans la section d'après.

### 6.2.6.2 Analyse des résultats

La Figure 6.26 montre les spectres de la distorsion d'intermodulation de la pression acoustique en réponse au signal d'excitation composé, construit conformément à la norme IEC 60268-5 :2007. Il est clair que les amplitudes des spectres augmentent au fur et à mesure que les tensions d'excitation augmentent. Ainsi, les pics de l'IMD 7 V, sont nettement au-dessus des pics des autres spectres notamment entre 500 et 3000 Hz, alors que les pics de l' $IMD_1$ , peinent à sortir de la ligne de base en basses et hautes fréquences, ce qui correspond forcément à des valeurs de pourcentages très inférieures pour cette tension d'entrée.

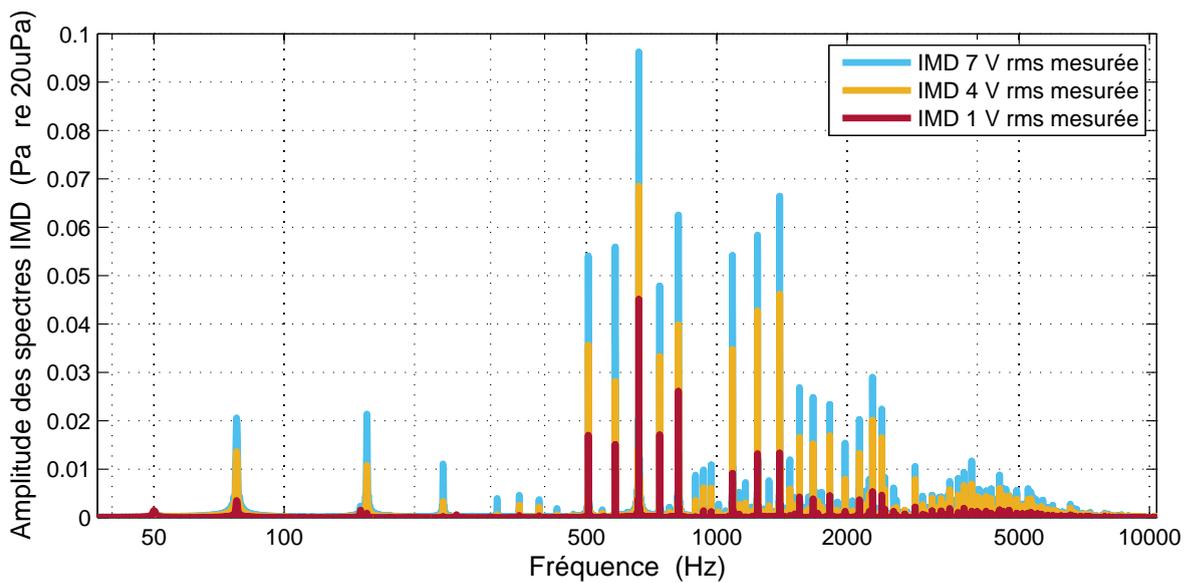


FIGURE 6.26 – Spectres de distorsion d'intermodulation (IMD) mesurées, obtenues avec 1, 4 et 7 Vrms.

Dans le Tableau 6.1 ci-après, nous trouvons les valeurs des distorsion d'intermodulation  $IMD_2$ ,  $IMD_3$  et  $IMD$  pour les trois niveaux de tension d'entrée en pourcentages et en décibels. Le tableau confirme les résultats de la figure précédente, en l'occurrence, l'augmentation des distorsions avec le niveau de la tension d'entrée. Cependant, pour les trois niveaux c'est les valeurs de l' $IMD_3$  qui sont en tête devant celle de l' $IMD_2$ . L'ordre de grandeur général des résultats semble quand même assez élevé, comparé aux valeurs usuelles.

	1 Vrms	4 Vrms	7 Vrms
$IMD_2$	71,31% ou -2,94 dB	89,69% ou -0,95 dB	107,85% ou 0,66 dB
$IMD_3$	95,61% ou -0,39 dB	110,23% ou -0,39 dB	121,30% ou 1,68 dB
<b>IMD</b>	119,28% ou 1,53 dB	142,11% ou 1,53 dB	162,31% ou 4,21 dB

TABLEAU 6.1 – Valeurs des distorsions d’intermodulation mesurées, obtenues avec 1, 4 et 7 Vrms.

### 6.3 Identification du haut-parleur à l’aide des filtres de Volterra adaptatifs

#### 6.3.1 Considérations pratiques de l’identification

Objectivement, le cœur du travail d’identification du système haut-parleur réside dans la détermination des noyaux du filtre de Volterra. Les coefficients du filtre de Volterra (ou ses noyaux), sont les éléments de concentration du comportement dynamique du système identifié, et équivalents de la notion de la réponse impulsionnelle pour les systèmes linéaires.

Le choix du filtre de Volterra comme outil pour l’identification du haut-parleur, s’est appuyé sur leur convenance pour les systèmes dynamiques faiblement non linéaires comme le haut-parleur électrodynamique, mais principalement sur la propriété qui caractérise la sortie de la série de Volterra, qui dépend de manière linéaire des coefficients du filtre lui-même. En d’autres termes, le filtre de Volterra peut être interprété comme une extension des filtres linéaires pour le cas des systèmes non linéaires.

Suite à cette théorisation sur les filtres de Volterra, largement abordée, il convient de passer à la démarche pratique de l’identification du haut-parleur. La conception des expériences d’identification requiert plusieurs choix à faire, tels que le choix des signaux d’excitation, la fréquence d’échantillonnage, le type de traitements des signaux nécessaires ou la longueur des filtres. Dans les sous-sections qui vont suivre, nous allons aborder tous ces choix à faire, et d’autres considérations pratiques qui font partie intégrante du procédé d’identification du haut-parleur électrodynamique à l’aide des filtres de Volterra adaptatifs.

##### 6.3.1.1 Fréquence d’échantillonnage

La valeur maximale de la fréquence d’échantillonnage dépend de la performance du matériel employé, en l’occurrence le périphérique chargé de la conversion analogique/numérique et numérique/analogique (carte son, carte DSP, interface audionumérique, . . .). Par contre, la valeur minimale doit être choisie conformément au théorème d’échantillonnage de Shannon, selon la bande de fréquence du signal d’excitation, afin de se prémunir du risque de repliement spectral qui peut être causé par le convertisseur analogique-numérique CAN, dont l’effet peut être désagréable dans la gamme audible. Dans ce cas la fréquence d’échantillonnage doit être supérieure au double de la fréquence maximale utile (fréquence de Nyquist  $f_{Nqst}$ ). Dans le cas non linéaire, la

fréquence d'échantillonnage doit en plus, être à même de capturer soigneusement un nombre approprié d'harmoniques du signal d'entrée [Worden and Tomlinson, 2001].

La fréquence d'échantillonnage fait partie avec d'autres paramètres de l'étude comparative des deux filtres de Volterra adaptatifs. Ainsi, comme énoncé dans l'introduction du chapitre, nous avons porté notre choix pour les deux fréquences d'échantillonnage 24 kHz et 96 kHz. La fréquence 24 kHz, est le choix juste conforme au théorème de Shannon, en considérant la fréquence supérieure de la bande passante mesurée du haut-parleur 9200 Hz, comme fréquence de Nyquist. La seconde fréquence 96 kHz, est une fréquence de sur-échantillonnage<sup>1</sup>, choisie comme étant le maximum permis par de l'interface audionumérique utilisée. Ce sur-échantillonnage à 96 kHz s'explique à l'aide de mobiles d'ordre général connus en traitement numérique du signal, tels :

1. Sa capacité à améliorer la résolution<sup>2</sup> du CAN, par rapport à la résolution d'origine. A cet effet, la résolution additionnelle apportée par le passage à une fréquence de sur-échantillonnage  $f_{os}$  par rapport à celle d'une fréquence d'échantillonnage originale  $f_s$  est donnée par la formule [SiliconLabs, 2013] :

$$N_{ad} = \ln(f_{os}/f_s) / \ln(4) \quad (6.1)$$

Correspondant à notre cas, où  $f_{os}/f_s = 96000 \text{ Hz}/24000 \text{ Hz} = 4$ ,  $N_{ad} = 1 \text{ bit}$ .

2. Aussi, pour un facteur de sur-échantillonnage  $k$ <sup>3</sup>, l'amélioration de la résolution  $N$  augmente le rapport signal sur bruit SNR, selon la formule [SiliconLabs, 2013; TexInstruments, 1998] :

$$SNR \text{ (dB)} \approx 6,02 \times N + 1,76 + 10 \times \log_{10}(k) \quad (6.2)$$

Ainsi, pour le cas du sur-échantillonnage proposé, avec un facteur  $k$  égal à environ 10 (96000 Hz/9200 Hz), l'amélioration du SNR est de 10 dB ;

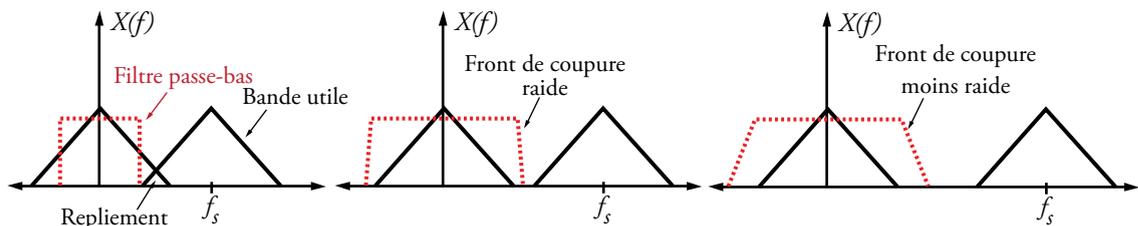


FIGURE 6.27 – Illustration de l'intérêt du sur-échantillonnage pour la conception des filtres anti-repliement des ADC.

3. Le sur-échantillonnage peut être très profitable pour la simplification de la structure du filtre anti-repliement placé devant l'ADC, ainsi on peut se contenter d'un simple

1. Echantillonnage d'un signal à une fréquence très élevée, beaucoup plus que ne l'exigerait le Théorème de Shannon.

2. La résolution est le nombre de bits utilisés pour représenter numériquement un signal analogique.

3. Le facteur de sur-échantillonnage est donné par :  $k = f_s/f_{Nqst}$ .

filtre RC comme filtre anti-repliement, du fait qu'un front de coupure (roll-off) plus raide n'est plus nécessaire grâce à l'espacement des bandes utiles successives sur l'axe des fréquences (Figure 6.27 ci-dessus) ;

En second lieu, le sur-échantillonnage a été choisi, spécifiquement en rapport avec l'objectif de cette thèse, selon les points suivants :

1. Le besoin en estimation de noyaux de Volterra de très haute résolution, qui offrent de larges possibilités dans les problèmes d'optimisation <sup>1</sup> ;
2. Des produits de distorsions significatifs sont générés en dehors de la bande passante du haut-parleur, ainsi un sur-échantillonnage permet d'évaluer la sévérité de ces composantes non linéaires [Birkett, 1997], dépassant la fréquence de Nyquist ;
3. La fréquence d'échantillonnage est l'un des paramètres de la comparaison multiparamétrique des deux algorithmes adaptatifs de Volterra. Par conséquent, il sera question d'évaluer la performance d'identification et la qualité des modèles, obtenues avec une fréquence d'échantillonnage très basse (24 kHz) fixée avec une application stricte du théorème de Shannon, et avec une autre fréquence de valeur quadruple de la première (96 kHz).

### 6.3.1.2 Choix du signal d'excitation

Le choix du signal d'entrée est fondamental car déterminant pour la nature et la précision des caractéristiques du système identifié, à partir d'une expérience d'identification. Dans la construction de l'excitation, la prise en compte de certaines considérations pratiques s'impose, telles que les limites techniques de l'instrumentation (dynamique, fréquence d'échantillonnage, etc.), la facilité d'implémentation, la sensibilité des paramètres du modèle aux caractéristiques du stimulus, etc.[Ed., 1981].

Dans cette thèse, le choix a été porté sur le bruit blanc gaussien BBG à bande limitée comme signal d'excitation, un choix qui se justifie par les points suivants :

- le BBG possède naturellement une bande de fréquence bien supérieure à celle de tous les systèmes à identifier ;
- grâce à leur richesse spectrale, les signaux d'excitation basés sur le bruit contribuent à la rapidité de la convergence des algorithmes adaptatifs [Loriga et al., 2017; Nascimento, 2014] ;
- la persistance : une propriété de certains stimuli à l'exemple du BBG, dans le contexte de l'identification des systèmes, apparue dans les années 1960, qui exige du stimulus, la capacité d'excitation de tous les modes dynamiques<sup>2</sup> du système à identifier, afin d'assurer la convergence des paramètres du modèle [Narendra and Annaswamy, 2012].

En vue de l'identification du système haut-parleur, nous avons utilisé trois variantes du BBG, à savoir, le BBG de puissance à croissance linéaire (BGCLIN), le BBG de puissance à croissance logarithmique (BGCLOG) et le BBG uniforme (BGUNI).

---

1. Allusion est faite ici à l'objet du chapitre 8.

2. Par modes dynamiques, cela sous-entend les états spatio-temporels excités autour de l'état d'équilibre, dans les systèmes dynamiques. Cette excitabilité des modes dynamiques est d'autant plus difficile dans les systèmes dynamiques non linéaires comme le haut-parleur électrodynamique.

La Figure 6.28, montre l'organigramme de la méthode utilisée pour la construction des trois stimuli. La première étape consiste à construire un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance unitaire, en utilisant les deux fréquences d'échantillonnage 24 kHz et 96 kHz, avec des durées respectives de 28 et 7 secondes. Le signal ainsi construit, est ensuite filtré à l'aide d'un filtre passe-bande FIR [47 - 10400 Hz] à fenêtre de Hamming d'une longueur de 12000 points, afin d'obtenir un BBG à bande limitée entre 47 et 10400 Hz, noté  $x_{bg}$ , couvrant la bande passante du haut-parleur (90 - 9200 Hz). Enfin, pour l'obtention du bruit blanc gaussien de puissance à croissance linéaire (BGCLIN) et le BBG de puissance à croissance logarithmique (BGCLOG), le bruit blanc gaussien à bande limitée  $x_{bg}$ , est multiplié respectivement par deux fonctions, la première linéaire en fonction du temps, et la seconde exponentielle. Le bruit blanc gaussien uniforme (BGUNI) est quant à lui le même signal  $x_{bg}$  déjà construit.

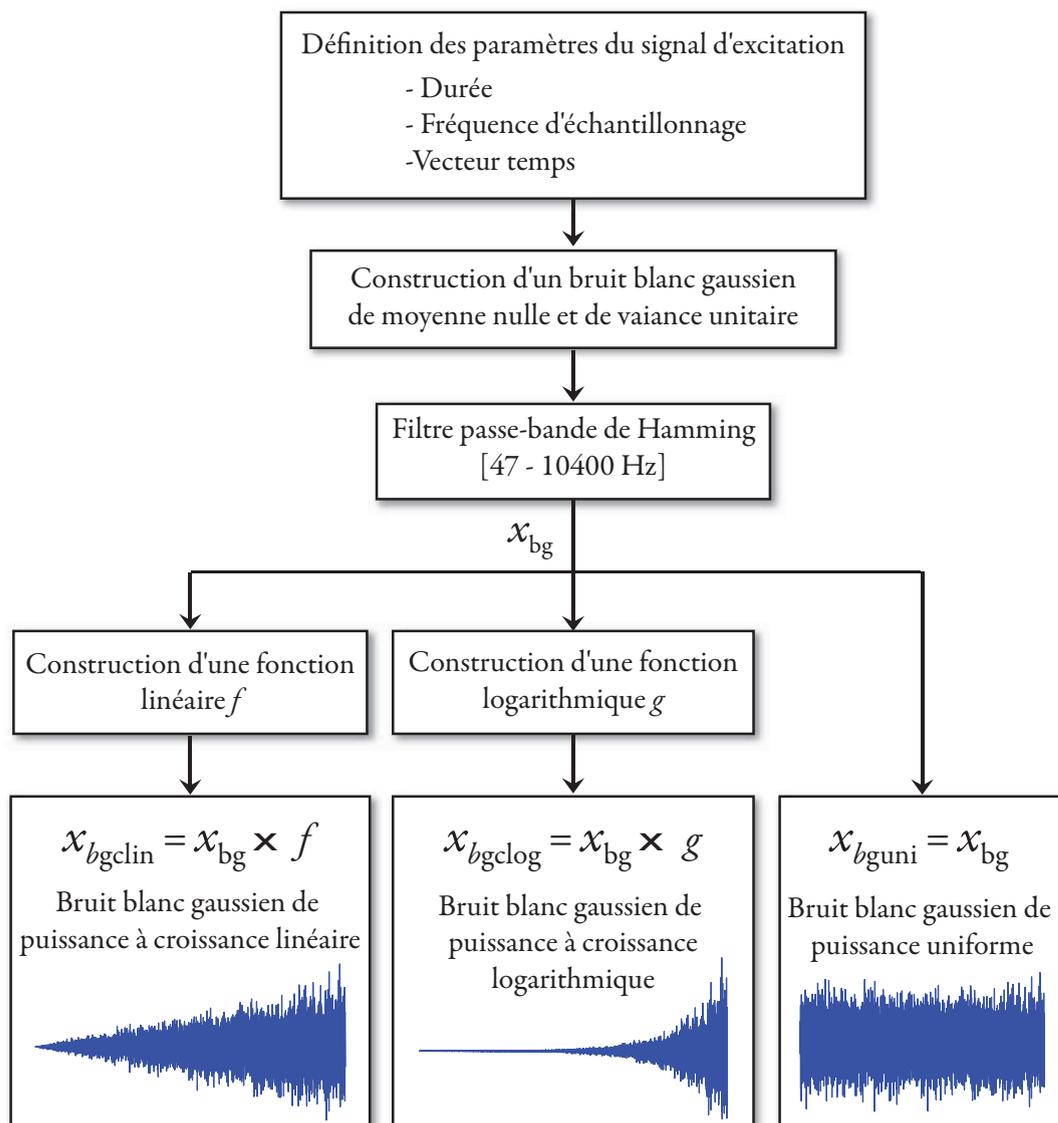


FIGURE 6.28 – Organigramme de la construction des trois signaux d'excitation utilisés dans le procédé d'identification.

### 6.3.1.3 Charge de calcul

Aborder la question de la charge de calcul prend tout son sens avec l'emploi de la série de Volterra comme outil de description des non-linéarités du haut-parleur. De surcroît, ceci n'est pas simplifié par certains choix du paramétrage des filtres de Volterra adaptatifs, ce qui a engendré un besoin réel en ressources matérielles pour le calcul des noyaux de Volterra, la modélisation des distorsions et le problème d'optimisation, comme la vitesse de calcul, ou la mémoire. Parmi les facteurs susceptibles d'accroître la charge de calcul dans cette thèse :

- le recours à une fréquence d'échantillonnage variable jusqu'à 96 kHz ;
- des durées des signaux d'excitation d'une durée jusqu'à 45 secondes ;
- choix du troisième ordre de non-linéarité ( $N = 3$ ) dans la série de Volterra ;
- des étendues de mémoire de la série de Volterra  $M = 1, 2, 3$  et 4 ;
- balayage haute résolution de l'erreur de prédiction pour l'ajustement précis de la valeur du facteur d'oubli dans le filtre Volterra RLS adaptatif, dans le but d'améliorer la qualité des noyaux de Volterra estimés.

Face à cette charge de calcul accrue, accumulée avec la complexité du procédé d'identification, nous étions contraints d'avoir recours à l'une ou l'autre des deux solutions suivantes selon l'importance du calcul prévu pour l'implémentation des différents programmes développés :

**1. Calcul parallèle sur un ordinateur multiprocesseur :** cette solution a été réservée à des codes temporaires pour tester les différents algorithmes utilisés, avec une charge de calcul modérée. Nous avons utilisé pour cela un ordinateur portable, doté d'un processeur Intel Core i3-370M (2.4 GHz), 2 cœurs / 4 threads et une mémoire vive de 4 Go DDR3 1066 MHz, faisant tourner Matlab<sup>TM</sup> 8.4 R2014b. Dans cette solution nous avons utilisé un calcul parallèle mettant à profit les deux cœurs de l'ordinateur portable.

**2. Calcul haute performance (HPC<sup>1</sup>) :** pour les codes à forte charge de calcul, nous avons eu recours aux services du centre de calcul haute performance HPC IBN BAJA de l'USTO-MB. La machine utilisée est un supercalculateur de 32 nœuds IBM x3550 à biprocesseurs x86-64 bits Xeon E5-2620 @ 2.00 GHz de 8 cœurs / 16 threads chacun, où y est installé un système d'exploitation Linux Red Hat (RHEL 6.2), et Matlab<sup>TM</sup> 7.13 R2011b 64 bits. Le calcul haute performance a été très profitable pour l'avancement de notre travail, divisant ainsi le temps de calcul parfois jusqu'à dix par rapport à l'ordinateur personnel, mais offrant surtout la possibilité de travailler avec des vecteurs et des matrices, tel qu'il n'ait été absolument pas possible de le faire autrement grâce à la très grande mémoire offerte par le HPC Ibn Baja.

### 6.3.1.4 Procédé expérimental d'identification

Le procédé expérimental qui a servi à l'identification du système haut-parleur, est le même utilisé pour les mesures des différentes caractéristiques du haut-parleur donné dans la Figure 6.1.

---

1. En anglais : High-Performance Computing.

Le système à identifier est un haut-parleur électrodynamique de 8 pouces woofer-médium Nuandi Electronic modèle ND-MW08M50 avec une réponse en fréquence mesurée entre 90 et 9200 Hz. Le choix du type de haut-parleur a été dicté par le fait que la plage de fréquence la plus touchée par les distorsions dans le haut-parleur électrodynamique est celle des basses fréquences. Ce constat fait l'unanimité auprès des chercheurs, et a été confirmé par les résultats de mesures que nous avons menées. Alors qu'un haut-parleur de type woofer-médium était le meilleur choix, dû à sa grande sensibilité en basses fréquences, mais aussi sa réponse en fréquence qui peut couvrir les moyennes fréquences jusqu'à pratiquement 9 kHz.

L'identification est connue pour être une expérimentation qui conduit à un modèle du système réel. Le procédé expérimental d'identification consiste ainsi à mesurer la réponse du haut-parleur aux signaux d'excitation d'identification construits auparavant. Afin de se concentrer sur les seuls paramètres définis pour l'étude comparative des algorithmes de Volterra adaptatifs, il a été décidé d'utiliser un seul niveau de la tension d'entrée de 4 Vrms, fixé à l'aide de l'amplificateur de puissance pour la totalité des signaux d'excitation.

Les diverses mesures du procédé expérimental d'identification, ont été réalisées en champ proche, une technique selon la norme IEC 60268-5 [IEC, 2007], est capable de simuler le champ libre autour du haut-parleur, en plaçant le microphone à 2 cm du haut-parleur dans sa direction axiale.

En outre, il faut dire que l'opération centrale du procédé expérimental réside dans la technique de lecture/enregistrement simultanée des données à des cadences d'échantillonnage de 24 et 96 kHz. Pour ce faire, la majorité des cartes son actuelles sont capables de réaliser cette opération, mais la qualité des données recueillies est le plus souvent très insuffisante pour un travail de recherche. Pour cette raison, nous nous sommes dotés d'une interface audionumérique capable de répondre à toutes les exigences techniques de notre travail, et de fournir des données de très grande qualité. Il s'agit de l'interface audionumériques Fast Track C400 de la marque M-Audio, qui a pris la place pivotale dans notre procédé expérimental, idoine pour des mesures bivoie en mode full-duplex, avec une résolution maximale de 24 bit, une fréquence d'échantillonnage jusqu'à 96kHz, et surtout une distorsion avoisinant les 0,002 % à 1 kHz pour les entrées microphone et les sorties analogiques.

Compte tenu de la taille des signaux générés, et de la capacité mémoire de l'ordinateur utilisé, la longueur des signaux d'excitation et de leurs réponses correspondantes variaient selon la fréquence d'échantillonnage employée. Ainsi, avec la fréquence d'échantillonnage de 24 kHz, une durée de mesure de 28 secondes a été adoptée, alors qu'avec la fréquence d'échantillonnage de 96 kHz, une durée de mesure de 7 secondes a été utilisée. Les deux signaux mesurés ainsi simultanément deviendront la principale matière première, nourrissant les algorithmes adaptatifs de Volterra, qui seront implémentés dans les sections suivantes.

## 6.3.2 Construction du filtre de Volterra

### 6.3.2.1 Paramètres du filtre de Volterra

Dans le second chapitre de cette thèse consacré entièrement à l'étude de la série de Volterra, en partant d'une série mathématique déduite de la série de Taylor, un

formalisme complet basé sur la série de Volterra, a été construit à même de représenter des systèmes non linéaires les plus complexes, utilisés en biologie, en communication et dans divers systèmes d'ingénierie.

Partant de la série de Volterra à temps discret en sa forme brute, nous avons réussi après moult transformations et simplifications basées sur des hypothèses à aboutir à une série de Volterra triangulaire, qui est causale d'ordre de non-linéarité  $N$ , de mémoire  $M$  et à noyaux symétriques (Équation 2.22), que l'on rappelle ici :

$$\begin{aligned}
 y(n) = & \sum_{i_1=0}^{M-1} h_1(i_1) x(n-i_1) \\
 & + \sum_{i_1=0}^{M-1} \sum_{i_2=i_1}^{M-1} h_2(i_1, i_2) x(n-i_1) x(n-i_2) + \dots \\
 & + \sum_{i_1=0}^{M-1} \sum_{i_1=i_2}^{M-1} \dots \sum_{i_N=i_{N-1}}^{M-1} h_N(i_1, i_2, \dots, i_N) x(n-i_1) x(n-i_2) \dots x(n-i_N)
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Il a été démontré que la complexité de la série de Volterra augmente de manière exponentielle avec l'ordre de non-linéarité  $N$  et l'étendue de mémoire  $M$ . Par conséquent, le choix de ces deux paramètres est une opération sensible, dont dépend entièrement l'applicabilité de la série de Volterra, mais aussi la convergence des filtres adaptatifs avec laquelle ils sont construits. Nous présentons ci-après un développement traitant des deux paramètres d'une manière concrète, afin de mieux les employer dans la simulation des filtres de Volterra adaptatifs :

**1. Ordre de non-linéarité :** L'ordre de non-linéarité qui rappelons-le, n'est autre que le nombre de noyaux de la série de Volterra, fournit une information sur le degré de complexité de la non-linéarité du système considéré, s'il est grand, on se trouve face à une non-linéarité sévère. Un ordre de non-linéarité judicieusement choisi, permet de décrire de façon juste le comportement dynamique du système identifié, et de cerner ses traits caractéristiques.

Selon [Schurer et al., 1996], l'un des traits caractéristiques d'un modèle Volterra du second ordre est sa non-linéarité asymétrique<sup>1</sup>, laquelle en plus de sa production d'harmoniques d'ordre pair, donne lieu à plusieurs phénomènes dégradant, comme le redressement des variations en hautes fréquences et les réponses asymétriques au changement de grandes amplitudes de signe opposé. Les auteurs [Schurer et al., 1996], ajoutent que dans de nombreux systèmes physiques réels, les non-linéarités dominantes sont symétriques, et dans la mesure où les harmoniques qui y sont présentes diminuent généralement d'intensité avec un ordre croissant, il s'ensuit que la génération de troisième harmonique est normalement l'un des effets non linéaire les plus prononcés dans ces systèmes. Ainsi, les auteurs affirment que les modèles de Volterra de troisième ordre sont précisément à l'origine de ces phénomènes et peuvent être considérés comme la classe

---

1. Une non-linéarité symétrique introduit des harmoniques d'ordre impair ( $3^e$ ,  $5^e$ ,  $7^e$ ,...), alors qu'une non-linéarité asymétrique est celle qui génère des harmoniques d'ordre pair ( $2^e$ ,  $4^e$ ,  $6^e$ ,...).

de modèles non linéaires générale, et la plus simple capable de décrire le comportement de ces systèmes.

En complément, dans la même référence [Schurer et al., 1996], les auteurs citent le travail des chercheurs Cherry et Snelgrove (1998), qui ont utilisé des modèles de Volterra du troisième ordre pour décrire trois types de distorsion dans les filtres passe-bande électroniques : la compression<sup>1</sup>, la désensibilisation<sup>2</sup> et la distorsion d'intermodulation. Ainsi, en présentant les résultats de la caractérisation expérimentale de ce filtre et en estimant les termes requis pour sa fonction de transfert de Volterra de troisième ordre, ils concluent que les estimations de distorsion obtenues à partir de ces termes correspondent bien à la distorsion mesurée.

Nous pouvons citer aussi une étude rapportée par les auteurs [Enzner et al., 2014], concernant la modélisation de la non-linéarité des haut-parleurs des téléphones portables pour l'annulation de l'écho, à l'aide de cinq différents modèles parmi lesquels, des modèles de Volterra linéaires, du second ordre et un autre du troisième ordre. A partir des résultats obtenus pour l'annulation de l'écho dans les haut-parleurs, ils ont conclu que les résultats du filtre de Volterra du second ordre ne sont pas très loin de ceux du filtre linéaire, alors que les résultats obtenus avec le filtre du troisième ordre sont nettement meilleurs. Ils ont ainsi montré que la non-linéarité du haut-parleur est d'au moins du troisième ordre.

Enfin, dans un document de brevet [Lashkari, 2011], l'auteur soutient qu'il est généralement admis que les haut-parleurs peuvent être suffisamment modélisés à l'aide d'un modèle de Volterra du second ou du troisième ordre.

Il va sans dire qu'une synthèse de ce qui a été rapporté par l'ensemble des auteurs que nous venons de citer, aboutit au fait que le troisième ordre de non-linéarité dans le modèle de Volterra, est le plus approprié pour la description de la majorité des systèmes physiques réels, mais également pour le haut-parleur électrodynamique. Compte tenu de cette conclusion, nous avons choisi de fixer l'ordre de non-linéarité de la série de Volterra à l'ordre trois, afin d'orienter l'étude autour d'autres paramètres que nous avons déjà cités, requérant plus de clarification sur la manière de les choisir.

**2. L'étendue de mémoire :** L'étendue de mémoire  $M$  représente le nombre de coefficients des noyaux de la série de Volterra. La mémoire comme paramètre fondamental du modèle de Volterra, rend compte de la façon dont dépend la réponse d'un système dynamique des entrées des instants précédents. Elle est directement liée aux éléments conservatifs à même de stockage d'énergie dans le système réel à modéliser. Formellement, la mémoire délimite l'intervalle de temps dans lequel les entrées précédentes sont susceptibles d'influencer la sortie actuelle du système, et est représentée, par les variables d'intégration  $\tau_i$  en continu, et les coefficients  $i_p$  en discret, qui sont des retards représentatifs de l'effet mémoire.

---

1. La compression est un effet dynamique agissant sur un circuit ou un système électronique pour limiter la dynamique de son signal de sortie. Elle peut être volontaire (en audio, pour la recherche de compatibilité avec les systèmes de transmission ou d'enregistrement en aval), ou involontaire, constituant une source de dégradation du signal [de Nanteuil, 2008].

2. En ang. *desensitization*, terme du domaine de la communication radio, signifiant qu'un signal est d'une amplitude tellement grande qu'il modifie les conditions de fonctionnement de l'étage d'entrée du récepteur en lui faisant perdre sa sensibilité [Pilloud, 2007].

Dans la littérature, il est le plus souvent utilisé une seule étendue de mémoire pour l'identification du haut-parleur, dans diverses applications de la modélisation. Dans notre travail, une volonté d'explorer l'effet de l'étendue de mémoire sur la qualité de la modélisation des distorsions dans le système haut-parleur, nous a conduits à considérer quatre valeurs pour ce paramètre, c.-à-d.,  $M = 1, 2, 3$  et  $4$ . Ainsi, les deux filtres de Volterra adaptatifs LMS et RLS seront simulés successivement à l'aide de quatre étendues de mémoire pour le troisième ordre de non-linéarité de la série de Volterra.

### 6.3.2.2 Implémentation du filtre de Volterra

Tout en long des sections du second chapitre de cette thèse, nous avons réussi à construire le filtre de Volterra, à partir de la série de Volterra causale, tronquée et triangulaire d'ordre de non-linéarité  $N$ , et de mémoire  $M$ . Le filtre de Volterra fait partie de la classe des filtres non linéaires polynomiaux non récurrents, et est devenu au fil des années l'outil de prédilection dans divers domaines pour la modélisation et l'analyse des systèmes dynamiques faiblement non linéaires.

Le filtre de Volterra est une somme de plusieurs convolutions multidimensionnelles, avec une sortie qui dépend linéairement des coefficients de ses noyaux, ce qui rend les méthodes développées pour la conception des filtres linéaires multidimensionnels, exploitables pour la conception des filtres de Volterra.

Dans le troisième chapitre, nous avons discuté dans la section 3.5 de l'avantage de l'adoption d'une structure FIR pour les noyaux de Volterra, si l'on compte en estimer les coefficients à l'aide d'un filtrage optimal au sens de Wiener, avec la MMSE comme critère d'optimisation. Ce choix combiné dans notre entreprise d'identification, MSE-FIR entraîne une fonction de coût quadratique par rapport aux coefficients du filtre optimal, et assure une solution de Wiener unique.

Des filtres de Volterra de coefficients des noyaux suivant une topologie FIR, sont estimés au sens de Wiener, dont la sortie est donnée par :

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} w(n) x(n-k) = \mathbf{w}^T(n) \mathbf{x}(n) \quad (6.4)$$

avec  $\mathbf{x}(n) = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-N+1)]^T$ , le vecteur d'entrée en ligne à retard,  $\mathbf{w}(n) = [w_0(n), w_1(n), \dots, w_{N-1}(n)]^T$ , le vecteur des coefficients du noyau, et  $y(n)$  est l'échantillon estimé à la sortie du noyau.

Nous disposons à présent de tous les éléments requis pour la construction du filtre de Volterra :

- un filtre basé sur la série de Volterra triangulaire, causale et à noyaux symétriques ;
- ordre de non-linéarité fini égal à 3 ;
- étendue de mémoire finie prenant les valeurs : 1, 2, 3 et 4 ;
- noyaux de Volterra de structure FIR.

Avec de telles données arrêtées, l'équation 6.3 réécrite précédemment, énonçant la sortie d'une série de Volterra triangulaire, causale d'ordre de non-linéarité  $N$ , de

mémoire  $M$  et à noyaux symétriques, devient celle d'un système non linéaire d'une étendue de mémoire  $M$ , et du troisième ordre de non-linéarité, qui est donnée par :

$$\begin{aligned}
 y(n) &= \sum_{i_1=0}^{M-1} h_1(i_1) x(n-i_1) \\
 &+ \sum_{i_1=0}^{M-1} \sum_{i_2=0}^{M-1} h_2(i_1, i_2) x(n-i_1) x(n-i_2) \\
 &+ \sum_{i_1=0}^{M-1} \sum_{i_2=0}^{M-1} \sum_{i_3=0}^{M-1} h_3(i_1, i_2, i_3) x(n-i_1) x(n-i_2) x(n-i_3) \quad (6.5)
 \end{aligned}$$

Le vecteur d'entrée du noyau linéaire (ordre 1) de mémoire  $M$  noté  $\mathbf{x}_1(n)$ , composé de  $M$  éléments, s'écrit :

$$\mathbf{x}_1^T(1, M) = [x(n) \quad x(n-1) \quad \cdots \quad x(n-M+1)] \quad (6.6)$$

La matrice d'entrée du noyau quadratique (ordre 2) de mémoire  $M$ , noté  $\mathbf{x}_2(n)$ , composé de  $(M^2 + M)/2$  éléments, s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_2(M, M) &= \mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_1 \\
 &= \begin{bmatrix} x^2(n) & x(n)x(n-1) & \cdots & x(n)x(n-M+1) \\ 0 & x^2(n-1) & \cdots & x(n-1)x(n-M+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x^2(n-M+1) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Le tenseur d'entrée du noyau cubique (ordre 3) de mémoire  $M$ , noté  $\mathbf{x}_3(n)$ , composé de  $(M^3 + M^2)/2$  éléments, s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_3(M, M, M) &= \mathbf{x}_2^T x(n) + \mathbf{x}_2^T x(n-1) + \cdots + \mathbf{x}_2^T x(n-M+1) \\
 &= \begin{bmatrix} x^3(n) & x^2(n)x(n-1) & \cdots & x^2(n)x(n-M+1) \\ 0 & x(n)x^2(n-1) & \cdots & x(n)x(n-1)x(n-M+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x(n)x^2(n-M+1) \end{bmatrix} + \cdots \\
 &+ \begin{bmatrix} x(n-1)x^2(n) & x(n)x^2(n-1) & \cdots & x(n)x(n-1)x(n-M+1) \\ 0 & x^3(n-1) & \cdots & x^2(n-1)x(n-M+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x(n-1)x^2(n-M+1) \end{bmatrix} + \cdots \\
 &+ \begin{bmatrix} x(n-M+1)x^2(n) & x(n-M+1)x(n)x(n-2) & \cdots & x(n)x^2(n-M+1) \\ 0 & x(n-M+1)x^2(n-1) & \cdots & x(n-1)x^2(n-M+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x(n-2)x^3(n-M+1) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

De même pour les noyaux du filtre de Volterra, le noyau linéaire de mémoire  $M$ , noté  $\mathbf{h}_1$ , de  $M$  éléments, s'écrit :

$$\mathbf{h}_1^T(1, M) = [h_1(0; n) \quad h_1(1; n) \cdots h_1(M-1; n)]$$

Le noyau quadratique  $\mathbf{h}_2$  de Volterra de mémoire  $M$ , de  $(M^2 + M)/2$  éléments, s'écrit :

$$\mathbf{h}_2(M, M) = \begin{bmatrix} h_2(0, 0; n) & h_2(0, 1; n) & \cdots & h_2(0, M-1; n) \\ 0 & h_2(1, 1; n) & \cdots & h_2(1, M-1; n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & h_2(M-1, M-1; n) \end{bmatrix}$$

Le noyau cubique de Volterra  $\mathbf{h}_3$  de mémoire  $M$ , de  $(M^3 + M^2)/2$  éléments, s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_3(M, M, M) = & \begin{bmatrix} h_2(0, 0, 0; n) & h_2(0, 0, 1; n) & \cdots & h_2(0, 0, M-1; n) \\ 0 & h_2(0, 1, 1; n) & \cdots & h_2(0, 1, M-1; n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & h_2(0, M-1, M-1; n) \end{bmatrix} + \cdots \\ & + \begin{bmatrix} h_2(1, 0, 0; n) & h_2(1, 0, 1; n) & \cdots & h_2(1, 0, M-1; n) \\ 0 & h_2(1, 1, 1; n) & \cdots & h_2(1, 1, M-1; n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & h_2(1, M-1, M-1; n) \end{bmatrix} + \cdots \\ & + \begin{bmatrix} h_2(M-1, 0, 0; n) & h_2(M-1, 0, 1; n) & \cdots & h_2(M-1, 0, M-1; n) \\ 0 & h_2(M-1, 1, 1; n) & \cdots & h_2(M-1, 1, M-1; n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & h_2(M-1, M-1, M-1; n) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pour chaque valeur de l'étendue de mémoire, il faut prévoir préalablement le nombre de coefficients dans chaque noyau, et le nombre total de noyaux de la série de Volterra considérée. La connaissance de ces nombres est indispensable pour la construction du filtre de Volterra, car déterminante dans la formation du vecteur d'entrée et de ses composantes partielles, ainsi que la sortie totale et les sorties partielles qui la composent, issues de chaque noyau.

En se basant sur les différentes formules de la section 2.3.5.2 du chapitre 2, le nombre des coefficients dans les différents noyaux de la série de Volterra symétrique a été calculé. Ainsi, le nombre de coefficients de chaque noyau d'ordre donné peut être calculé à l'aide de la combinaison avec répétition  $C_N^M$  de l'ordre de non-linéarité  $N$  et de mémoire  $M$  :

$$C_{\text{sym}}(N, M) = C_N^M = \binom{M+N-1}{N} = \frac{(M+N-1)!}{N!(M-1)!} \quad (6.7)$$

De même, le nombre total des coefficients  $C_{\text{sym/tot}}$  dans tous les noyaux est donné par la somme de tous les coefficients précédents :

$$C_{\text{sym/tot}}(N, M) = \sum_{i=1}^N C_{\text{sym}}(i, M) \quad (6.8)$$

En employant les deux formules précédentes, avec un ordre de non-linéarité fixe ( $N = 3$ ), et pour les quatre étendues de mémoire 1, 2, 3 et 4, nous obtenons les différents nombres des coefficients des noyaux, donnés dans le Tableau 6.2.

Étendue de mémoire $M$	Nombre de coefficients linéaires	Nombre de coefficients quadratiques	Nombre de coefficients cubiques	Nombre total de coefficients
1	1	1	1	3
2	2	3	4	9
3	3	6	10	19
4	4	10	20	34

TABLEAU 6.2 – Calcul du nombre de coefficients des noyaux d'ordres 1, 2 et 3, et 4 du nombre total de coefficients des noyaux de la série de Volterra considérée.

Dans ce qui suit, pour chaque étendue de mémoire, nous allons détailler la structure du filtre de Volterra que l'on compte mettre à profit dans la simulation des filtres de Volterra adaptatifs LMS et RLS. Par conséquent, pour chacune des quatre valeurs de  $M$ , sont donnés le vecteur d'entrée  $\mathbf{x}(n)$  avec les trois vecteurs d'entrées partielles  $\mathbf{x}_1(n)$ ,  $\mathbf{x}_2(n)$ , et  $\mathbf{x}_3(n)$ , pour chaque ordre de non-linéarité, le vecteur des coefficients du filtre  $\mathbf{w}(n)$ , les échantillons de sorties partielles issus des produits des éléments de l'entrée  $\mathbf{x}(n)$  et des coefficients du filtre de Volterra  $\mathbf{w}(n)$  ainsi que l'échantillon de la sortie totale  $y(n)$ . La structure du filtre pour chaque cas est également donnée, permettant de représenter la topologie du filtre avec tous les signaux énoncés.

### 1. Filtre de Volterra pour $N = 3$ et $M = 1$

#### a. Vecteur d'entrée

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(n) &= [x(n)]^T \\ \mathbf{x}_2(n) &= [x(n)^2]^T \\ \mathbf{x}_3(n) &= [x(n)^3]^T \\ \mathbf{x}(n) &= [\mathbf{x}_1; \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_3] = [x(n); x(n)^2; x(n)^3]^T \end{aligned}$$

**b. Vecteur des coefficients des noyaux du filtre**

$$\mathbf{w}(n) = [w_0(n); w_{00}(n); w_{000}(n)]^T$$

**c. Sortie du filtre**

$$\begin{aligned} y_0(n) &= w_0(n)^T x(n) \\ y_{00}(n) &= w_{00}(n)^T x(n)^2 \\ y_{000}(n) &= w_{000}(n)^T x(n)^3 \\ y(n) &= y_0(n) + y_{00}(n) + y_{000}(n) \end{aligned}$$

**d. Topologie**

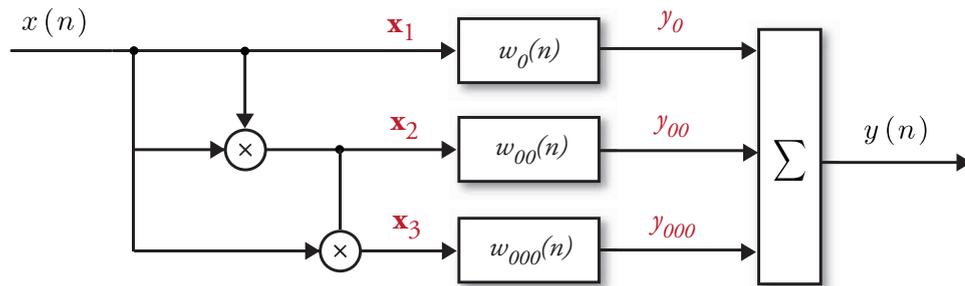


FIGURE 6.29 – Topologie du filtre de Volterra du troisième ordre ( $N=3$ ), avec une étendue de mémoire  $M = 1$ .

**2. Filtre de Volterra pour  $N = 3$  et  $M = 2$**

**a. Vecteur d'entrée**

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(n) &= [x(n); x(n-1)]^T \\ \mathbf{x}_2(n) &= [x(n)^2; x(n)x(n-1); x(n-1)^2]^T \\ \mathbf{x}_3(n) &= [x(n)^3; x(n)^2x(n-1); x(n)x(n-1)^2; x(n-1)^3]^T \\ \mathbf{x} &= [\mathbf{x}_1; \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_3] = [x(n); x(n-1); x(n)^2; x(n)x(n-1); x(n-1)^2; \\ &\quad x(n)^3; x(n)^2x(n-1); x(n)x(n-1)^2; x(n-1)^3]^T \end{aligned}$$

**b. Vecteur des coefficients des noyaux du filtre**

$$\mathbf{w}(n) = [w_0(n); w_1(n); w_{00}(n); w_{01}(n); w_{11}(n); w_{000}(n); w_{001}(n); w_{011}(n); w_{111}(n)]^T$$

c. Sortie du filtre

$$\begin{aligned}
 y_0(n) &= w_0(n)^T x(n) \\
 y_1(n) &= w_1(n)^T x(n-1) \\
 y_{00}(n) &= w_{00}(n)^T x(n)^2 \\
 y_{01}(n) &= w_{01}(n)^T x(n) x(n-1) \\
 y_{11}(n) &= w_{11}(n-1)^T x(n-1)^2 \\
 y_{000}(n) &= w_{000}(n)^T x(n)^3 \\
 y_{001}(n) &= w_{001}(n)^T x^2(n) x(n-1) \\
 y_{011}(n) &= w_{011}(n)^T x(n) x(n-1)^2 \\
 y_{111}(n) &= w_{111}(n)^T x(n-1)^3
 \end{aligned}$$

$$y(n) = y_0(n) + y_1(n) + y_{00}(n) + y_{01}(n) + y_{11}(n) + y_{000}(n) + y_{001}(n) + y_{011}(n) + y_{111}(n)$$

d. Topologie

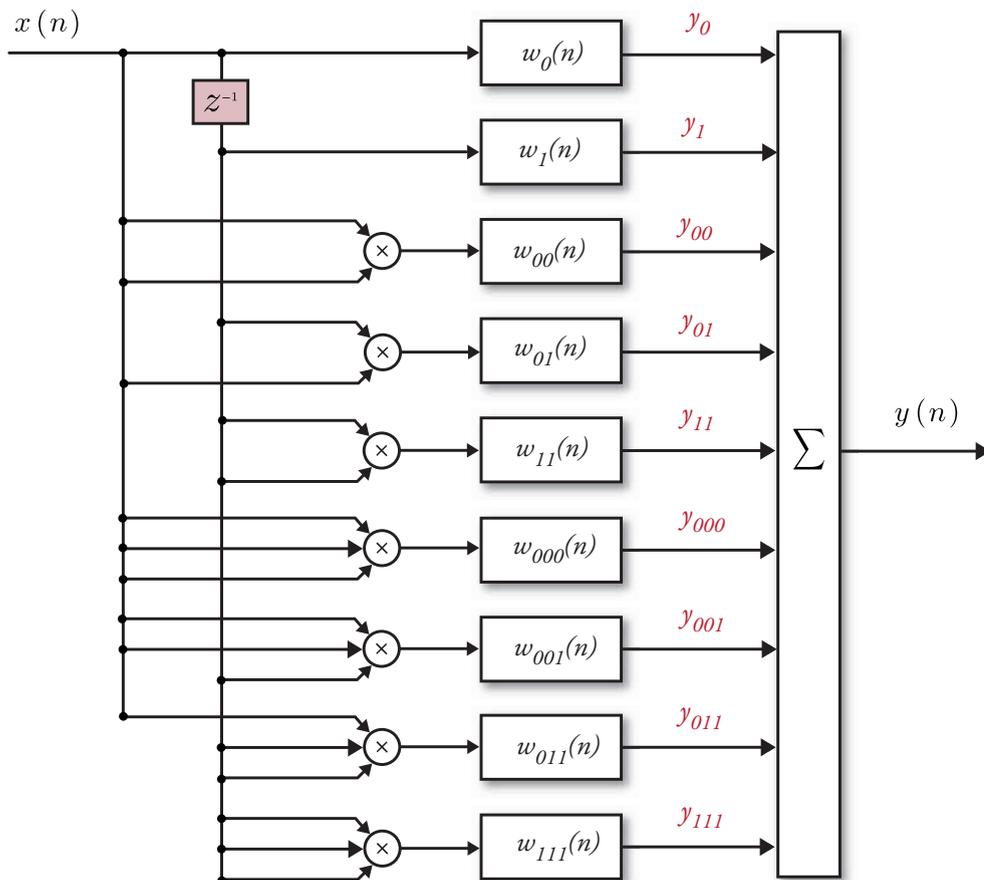


FIGURE 6.30 – Topologie du filtre de Volterra du troisième ordre ( $N=3$ ), avec une étendue de mémoire  $M = 2$ .

### 3. Filtre de Volterra pour $N = 3$ et $M = 3$

#### a. Vecteur d'entrée

$$\mathbf{x}_1(n) = [x(n); x(n-1); x(n-2)]^T$$

$$\mathbf{x}_2(n) = [x(n)^2; x(n)x(n-1); x(n)x(n-2); x(n-1)^2; x(n-1)x(n-2); x(n-2)^2]^T$$

$$\mathbf{x}_3(n) = [x(n)^3; x(n)^2x(n-1); x(n)^2x(n-2); x(n)x(n-1)^2; x(n)x(n-1)x(n-2); \\ x(n)x(n-2)^2; x(n-1)^3; x(n-1)^2x(n-2); x(n-1)x(n-2)^2; x(n-2)^3]^T$$

$$\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1; \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_3] = [x(n); x(n-1); x(n-2); x(n)^2; x(n)x(n-1); x(n)x(n-2); \\ x(n)^2x(n-2); x(n)x(n-1)^2; x(n)x(n-1)x(n-2); \\ x(n)x(n-2)^2; x(n-1)^3; x(n-1)^2x(n-2); \\ x(n-1)x(n-2)^2; x(n-2)^3]^T$$

#### b. Vecteur des coefficients des noyaux du filtre

$$\mathbf{w}(n) = \begin{bmatrix} w_0(n); w_1(n); w_2(n); w_{00}(n); w_{01}(n); w_{02}(n); w_{11}(n); w_{12}(n); \\ w_{22}(n); w_{000}(n); w_{001}(n); w_{011}(n); w_{111}(n) \end{bmatrix}^T$$

#### c. Sortie du filtre

$$y_0(n) = w_0(n)^T x(n)$$

$$y_1(n) = w_1(n)^T x(n-1)$$

$$y_2(n) = w_2(n)^T x(n-2)$$

$$y_{00}(n) = w_{00}(n)^T x(n)^2$$

$$y_{01}(n) = w_{01}(n)^T x(n)x(n-1)$$

$$y_{02}(n) = w_{02}(n)^T x(n)x(n-2)$$

$$y_{11}(n) = w_{11}(n)^T x(n-1)^2$$

$$y_{12}(n) = w_{12}(n)^T x(n-1)x(n-2)$$

$$y_{22}(n) = w_{22}(n)^T x(n-2)^2$$

$$y_{000}(n) = w_{000}(n)^T x(n)^3$$

$$y_{001}(n) = w_{001}(n)^T x(n)^2x(n-1)$$

$$y_{002}(n) = w_{002}(n)^T x(n)^2x(n-2)$$

$$y_{011}(n) = w_{011}(n)^T x(n)x(n-1)^2$$

$$y_{012}(n) = w_{012}(n)^T x(n)x(n-1)x(n-2)$$

$$y_{022}(n) = w_{022}(n)^T x(n)x(n-2)^2$$

$$y_{111}(n) = w_{111}(n)^T x(n-1)^3$$

$$y_{112}(n) = w_{112}(n)^T x(n-1)^2x(n-2)$$

$$y_{122}(n) = w_{122}(n)^T x(n-1)x(n-2)^2$$

$$y_{222}(n) = w_{222}(n)^T x(n-2)^3$$

$$y(n) = y_0(n) + y_1(n) + y_2(n) + y_{00}(n) + y_{01}(n) + y_{02}(n) + y_{11}(n) + y_{12}(n) + \\ y_{22}(n) + y_{000}(n) + y_{001}(n) + y_{002}(n) + y_{011}(n) + y_{012}(n) + \\ y_{022}(n) + y_{111}(n) + y_{112}(n) + y_{122}(n) + y_{222}(n)$$

#### d. Topologie

Voit Figure (6.31) ci-après.

### 4. Filtre de Volterra pour $N = 3$ et $M = 4$

#### a. Vecteur d'entrée

$$\mathbf{x}_1(n) = [x(n); x(n-1); x(n-2); x(n-3)]^T$$

$$\mathbf{x}_2(n) = [x(n)^2; x(n)x(n-1); x(n)x(n-2); x(n)x(n-3); \\ x(n-1)^2; x(n-1)x(n-2); x(n-1)x(n-3); x(n-2)^2; \\ x(n-2)x(n-3); x(n-3)^3]^T$$

$$\mathbf{x}_3(n) = [x(n)^3; x(n)^2x(n-1); x(n)^2x(n-2); x(n)^2x(n-3); x(n)x(n-1)^2; \\ x(n)x(n-1)x(n-2); x(n)x(n-1)x(n-3); x(n)x(n-2)^2; \\ x(n)x(n-2)x(n-3); x(n)x(n-3)^2; x(n-1)^3; x(n-1)^2x(n-2); \\ x(n-1)^2x(n-3); x(n-1)x(n-2)^2; x(n-1)x(n-2)x(n-3); \\ x(n-1)x(n-3)^2; x(n-2)^3; x(n-2)^2x(n-3); \\ x(n-2)x(n-3)^2; x(n-3)^3]^T$$

$$\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1; \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_3] = [x(n); x(n-1); x(n-2); x(n-3); x(n)^2; x(n)x(n-1); \\ x(n)x(n-2); x(n)x(n-3); x(n-1)^2; x(n-1)x(n-2); \\ x(n-1)x(n-3); x(n-2)^2; x(n-2)x(n-3); x(n-3)^3; \\ x(n)^3; x(n)^2x(n-1); x(n)^2x(n-2); x(n)^2x(n-3); \\ x(n)x(n-1)^2; x(n)x(n-1)x(n-2); x(n)x(n-3)^2; x(n-1)^3; \\ x(n)x(n-1)x(n-3); x(n)x(n-2)^2; x(n)x(n-2)x(n-3); \\ x(n-1)^2x(n-2); x(n-1)^2x(n-3); x(n-1)x(n-2)^2; \\ x(n-1)x(n-2)x(n-3); x(n-1)x(n-3)^2; x(n-2)^3; \\ x(n-2)^2x(n-3); x(n-2)x(n-3)^2; x(n-3)^3]^T$$

#### b. Vecteur des coefficients des noyaux du filtre

$$\mathbf{w}(n) = \begin{bmatrix} w_0(n); w_1(n); w_2(n); w_3(n); w_{00}(n); w_{01}(n); w_{02}(n); w_{03}(n); \\ w_{11}(n); w_{12}(n); w_{13}(n); w_{22}(n); w_{23}(n); w_{33}(n); w_{000}(n); \\ w_{001}(n); w_{002}(n); w_{003}(n); w_{011}(n); w_{012}(n); w_{013}(n); w_{022}(n); \\ w_{023}(n); w_{033}(n); w_{011}(n); w_{111}(n); w_{112}(n); w_{113}(n); \\ w_{122}(n); w_{123}(n); w_{133}(n); w_{222}(n); w_{223}(n); w_{233}(n); w_{333}(n) \end{bmatrix}^T$$

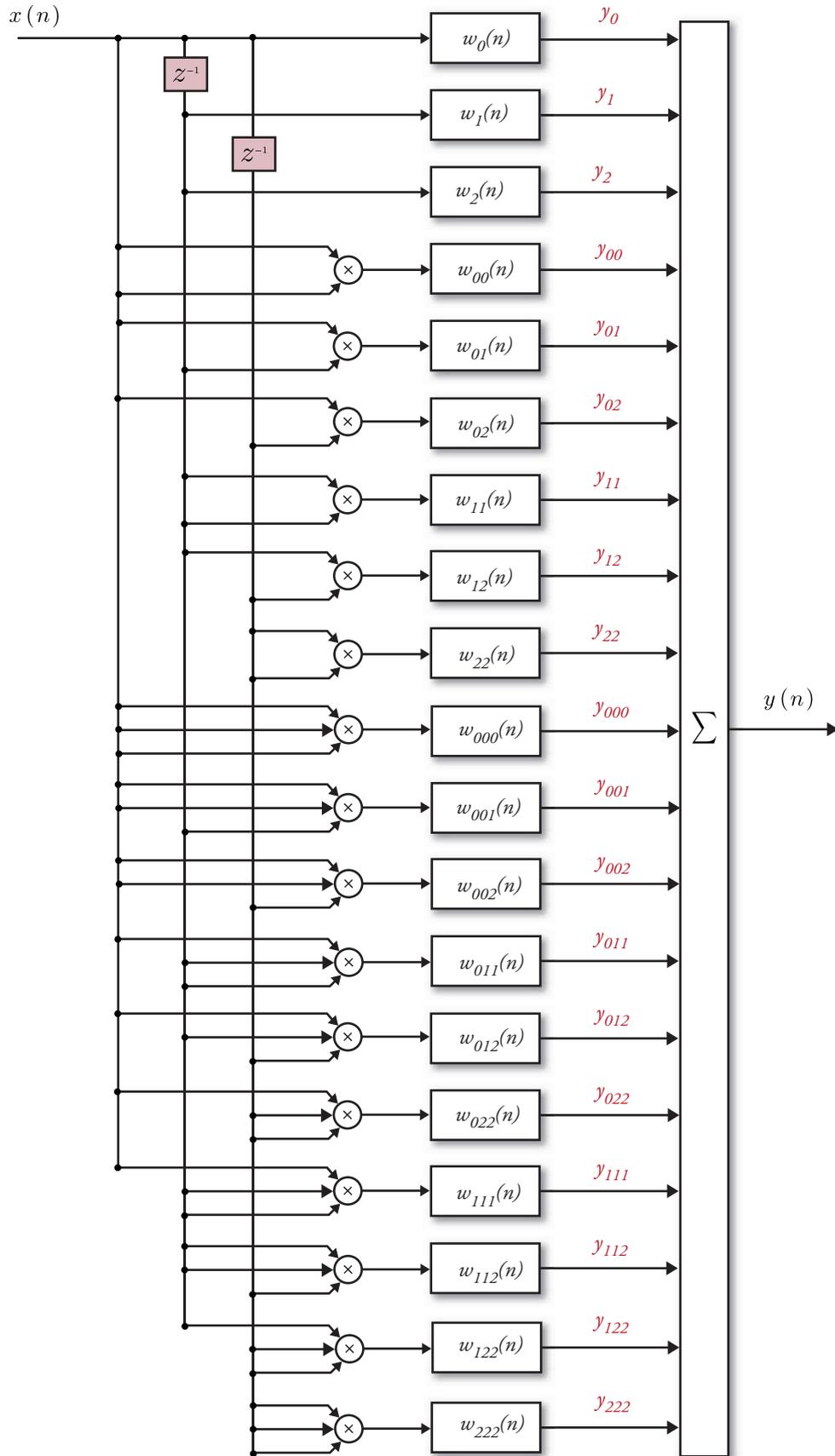


FIGURE 6.31 – Topologie du filtre de Volterra du troisième ordre ( $N=3$ ), avec une étendue de mémoire  $M = 3$ .

**c. Sortie du filtre**

$$\begin{aligned}
 y_0(n) &= w_0(n)^T x(n) \\
 y_1(n) &= w_1(n)^T x(n-1) \\
 y_2(n) &= w_2(n)^T x(n-2) \\
 y_3(n) &= w_3(n)^T x(n-3) \\
 y_{00}(n) &= w_{00}(n)^T x(n)^2 \\
 y_{01}(n) &= w_{01}(n)^T x(n)x(n-1) \\
 y_{02}(n) &= w_{02}(n)^T x(n)x(n-2) \\
 y_{03}(n) &= w_{03}(n)^T x(n)x(n-3) \\
 y_{11}(n) &= w_{11}(n)^T x(n-1)^2 \\
 y_{12}(n) &= w_{12}(n)^T x(n-1)x(n-2) \\
 y_{13}(n) &= w_{13}(n)^T x(n-1)x(n-3) \\
 y_{22}(n) &= w_{22}(n)^T x(n-2)^2 \\
 y_{23}(n) &= w_{23}(n)^T x(n-2)x(n-3) \\
 y_{33}(n) &= w_{33}(n)^T x(n-3)^2 \\
 y_{000}(n) &= w_{000}(n)^T x(n)^3 \\
 y_{001}(n) &= w_{001}(n)^T x(n)^2x(n-1) \\
 y_{002}(n) &= w_{002}(n)^T x(n)^2x(n-2) \\
 y_{003}(n) &= w_{003}(n)^T x(n)^2x(n-3) \\
 y_{011}(n) &= w_{011}(n)^T x(n)x(n-1)^2 \\
 y_{012}(n) &= w_{012}(n)^T x(n)x(n-1)x(n-2) \\
 y_{013}(n) &= w_{013}(n)^T x(n)x(n-1)x(n-3) \\
 y_{022}(n) &= w_{022}(n)^T x(n)x(n-2)^2 \\
 y_{023}(n) &= w_{023}(n)^T x(n)x(n-2)x(n-3) \\
 y_{033}(n) &= w_{033}(n)^T x(n)x(n-3)^2 \\
 y_{111}(n) &= w_{111}(n)^T x(n-1)^3 \\
 y_{112}(n) &= w_{112}(n)^T x(n-1)^2x(n-2) \\
 y_{113}(n) &= w_{113}(n)^T x(n-1)^2x(n-3) \\
 y_{122}(n) &= w_{122}(n)^T x(n-1)x(n-2)^2 \\
 y_{123}(n) &= w_{123}(n)^T x(n-1)x(n-2)x(n-3) \\
 y_{133}(n) &= w_{133}(n)^T x(n-1)x(n-3)^2 \\
 y_{222}(n) &= w_{222}(n)^T x(n-2)^3 \\
 y_{223}(n) &= w_{223}(n)^T x(n-2)^2x(n-3) \\
 y_{233}(n) &= w_{233}(n)^T x(n-2)x(n-3)^3 \\
 y_{333}(n) &= w_{333}(n)^T x(n-3)^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y(n) = & y_0(n) + y_1(n) + y_2(n) + y_3(n) + y_{00}(n) + y_{01}(n) + y_{02}(n) \\
 & + y_{03}(n) + y_{11}(n) + y_{12}(n) + y_{13}(n) + y_{22}(n) + y_{23}(n) + y_{33}(n) \\
 & + y_{000}(n) + y_{001}(n) + y_{002}(n) + y_{003}(n) + y_{011}(n) + y_{012}(n) \\
 & + y_{013}(n) + y_{022}(n) + y_{023}(n) + y_{033}(n) + y_{111}(n) + y_{112}(n) \\
 & + y_{113}(n) + y_{122}(n) + y_{123}(n) + y_{133}(n) + y_{222}(n) + y_{223}(n) \\
 & + y_{233}(n) + y_{333}(n)
 \end{aligned}$$

#### d. Topologie

Voir Figure (6.32) ci-après.

### 6.3.3 Simulation des filtres de Volterra adaptatifs LMS et RLS

Le filtre de Volterra du troisième ordre a été construit dans les sections précédentes. L'identification du haut-parleur nécessite désormais de combiner le filtre de Volterra construit avec les deux algorithmes adaptatifs LMS et RLS. Dans le dessein de mener une comparaison multiparamétrique à base des deux algorithmes adaptatifs, plusieurs variantes seront réalisées de la sorte, en changeant les paramètres considérés.

En conséquence, la combinaison des deux algorithmes adaptatifs (LMS et RLS), des deux fréquences d'échantillonnage (24 et 96 kHz), des trois signaux d'excitation (BGCLIN, BGCLOG et BGUNI) et des quatre étendues de mémoire ( $M = 1, 2, 3$  et  $4$ ), fournit quarante-huit (48) variantes du filtre de Volterra adaptatif. Ces filtres obtenus, seront simulés à l'aide des paramètres propres à chaque filtre, afin de pouvoir générer les résultats attendus. Les simulations des différents filtres de Volterra adaptatifs LMS et RLS, sont réalisées suivant les organigrammes de programmation des Figures 6.33 et 6.34 respectivement, qui ont servi à la l'écriture des codes Matlab<sup>TM</sup>. Les deux organigrammes partagent une bonne partie des étapes de simulation, hormis celles spécifiques au calcul des différents paramètres des algorithmes proprement dits. La description de ces étapes est présentée ici :

**1. Chargement des signaux du procédé expérimental d'identification :** Dans cette première étape des organigrammes, sont chargés les signaux mesurés précédemment dans le procédé expérimental d'identification, contenant le signal d'excitation choisi, accompagné de la réponse du haut-parleur correspondante, appelée désormais *signal désiré*.

**2. Entrée des paramètres de simulation :** Elle consiste à saisir les valeurs de la fréquence d'échantillonnage  $f_s$  voulue 24 ou 96 kHz, et la valeur de l'étendue de mémoire entre les quatre valeurs possibles.

**3. Affectation de la longueur du vecteur d'entrée :** A l'aide de deux instructions conditionnelles successives, et les valeurs de la fréquence d'échantillonnage  $f_s$  et celle de l'étendue de mémoire  $M$ , une longueur du vecteur d'entrée est affectée selon ces deux valeurs, prenant en compte la charge de calcul générée avec chaque choix du

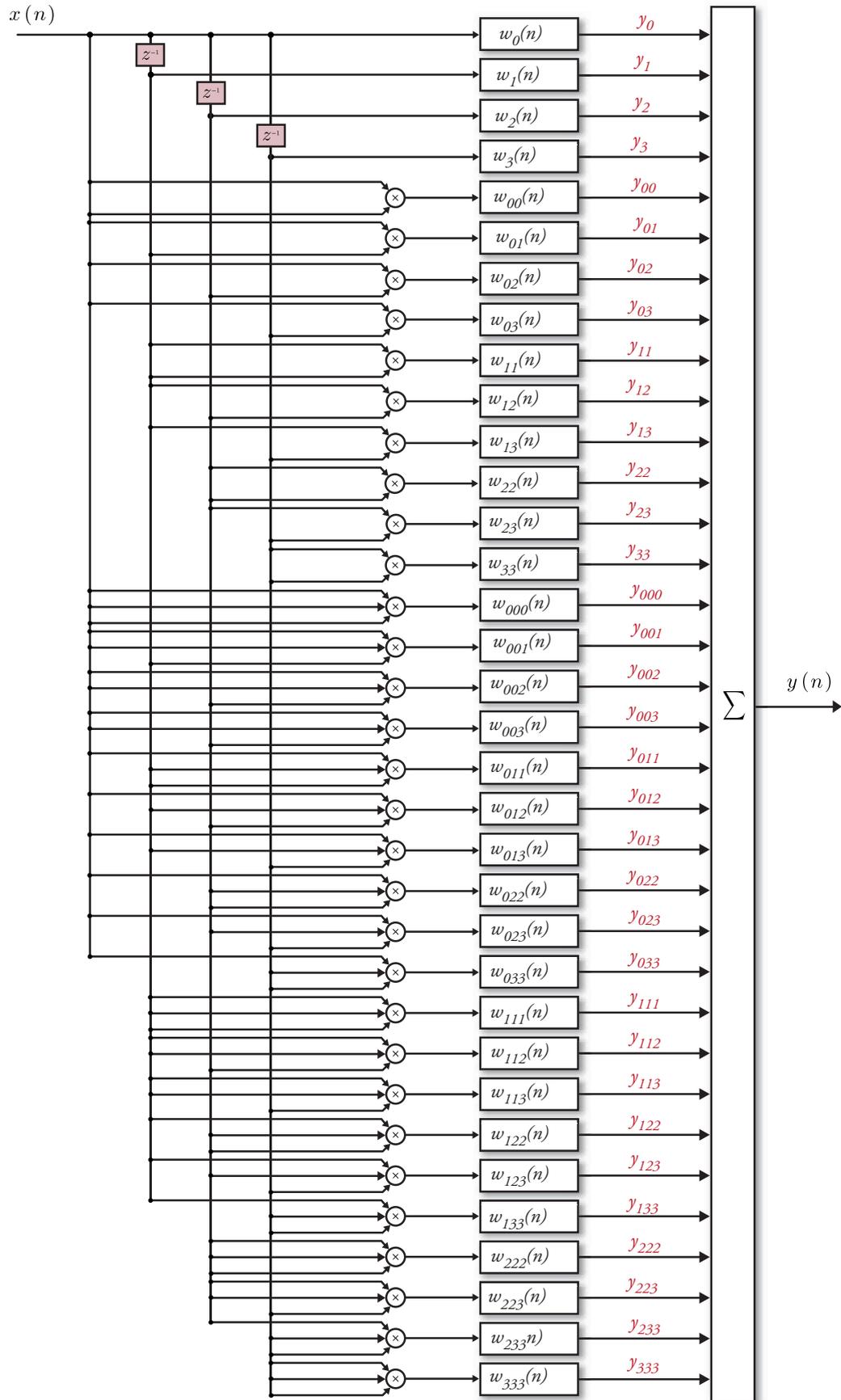


FIGURE 6.32 – Topologie du filtre de Volterra du troisième ordre ( $N=3$ ), avec une étendue de mémoire  $M = 4$ .

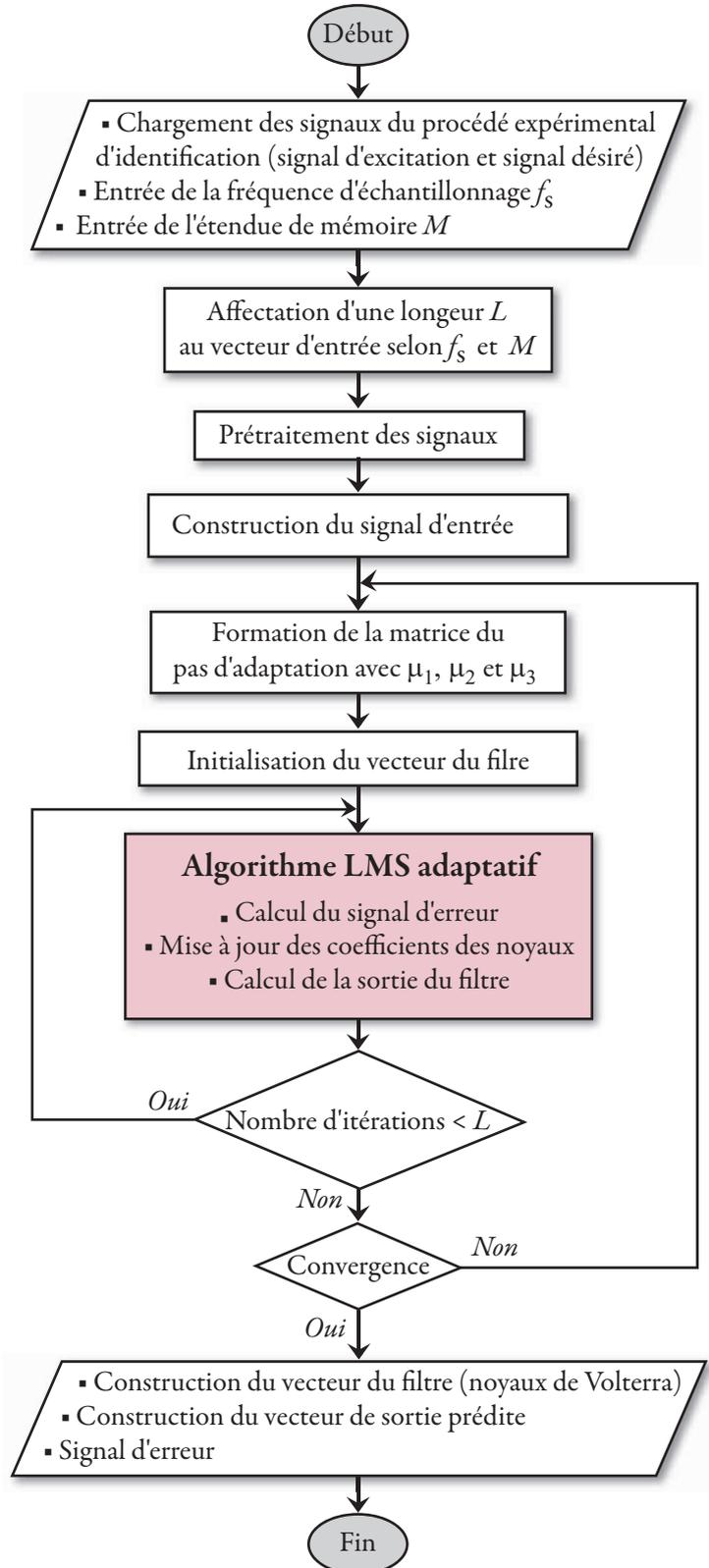


FIGURE 6.33 – Organigramme de programmation de l'algorithme du filtre de Volterra adaptatif LMS du troisième ordre de non-linéarité, servant à l'identification du haut-parleur.

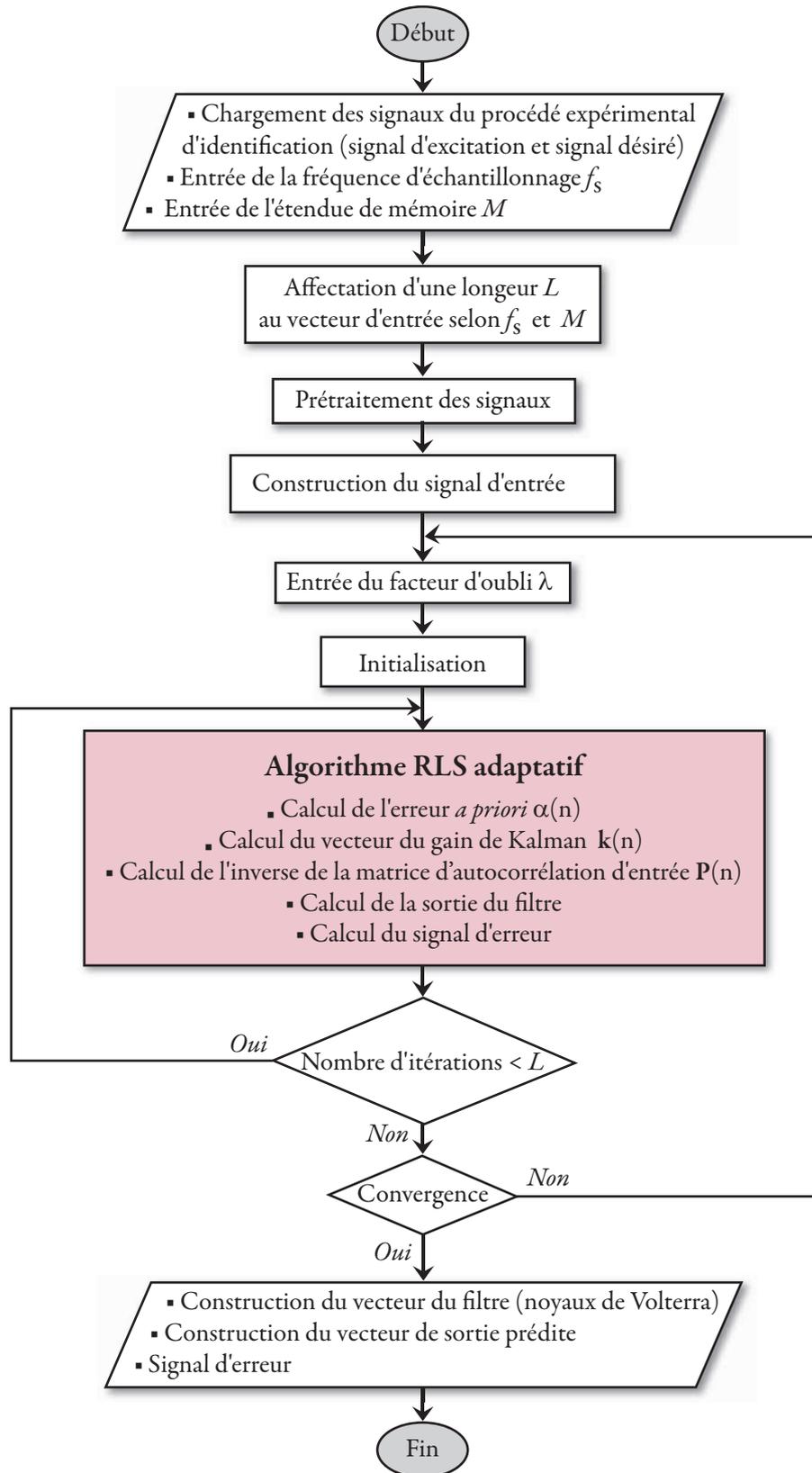


FIGURE 6.34 – Organigramme de programmation de l'algorithme du filtre de Volterra adaptatif RLS du troisième ordre de non-linéarité, servant à l'identification du haut-parleur.

couple  $f_s/M$ . Les longueurs des vecteurs propres aux deux algorithmes LMS et RLS sont données dans les Tableaux 6.3 et 6.4 respectivement.

Étendue de mémoire $M$	Longueur du vecteur d'entrée en nombre d'échantillons	
	$f_s = 24$ kHz	$f_s = 96$ kHz
1	450000	450000
2	450000	450000
3	450000	240000
4	260000	145000

TABLEAU 6.3 – Longueurs du vecteur d'entrée utilisées dans la simulation du filtre de Volterra adaptatif LMS.

Étendue de mémoire $M$	Longueur du vecteur d'entrée en nombre d'échantillons	
	$f_s = 24$ kHz	$f_s = 96$ kHz
1	450000	450000
2	450000	360000
3	450000	180000
4	220000	100000

TABLEAU 6.4 – Longueurs du vecteur d'entrée utilisées dans la simulation du filtre de Volterra adaptatif RLS.

**4. Prétraitement des signaux :** Les signaux d'excitation et les réponses correspondantes sont d'abord étalonnés, afin de pouvoir affecter une unité adéquate pour chaque signal de valeurs significatives. Les signaux d'entrée et de sortie sont ensuite synchronisés. Cela commence par corriger les différents retards dus à la latence de l'interface audionumérique et des retards introduits par l'amplificateur de puissance et la propagation du son. Ensuite, vient le calage temporel des deux signaux afin de faire coïncider leurs débuts respectifs.

**5. Construction des coefficients du vecteur d'entrée :** Le signal d'excitation prétraité sera tronqué à la longueur affectée précédemment. Il sera ainsi utilisé pour la construction des coefficients du vecteur d'entrée correspondant aux trois ordres de non-linéarité (voir section 6.3.2.2).

## 6. Entrée des paramètres de calcul des algorithmes

### 6.1 Formation de la matrice du pas d'adaptation dans l'algorithme LMS :

Le choix de la valeur du pas d'adaptation, en plus qu'il doit répondre aux conditions connues de convergence en moyenne et de stabilité, il doit être facilement pris, du moins sur un intervalle restreint de valeurs. En résumé, l'extension de la condition donnée dans la formule 3.45 dans la section 3.6.1.1 du troisième chapitre, permet d'écrire pour un filtre de Volterra adaptatif LMS du troisième ordre la condition :

$$0 < \mu_1, \mu_2, \mu_3 < \frac{2}{\lambda_{max}} \quad (6.9)$$

où  $\lambda_{max}$  est la valeur maximale des valeurs propres de la matrice d'autocorrélation d'entrée  $\mathbf{R}_x$ .

Pour plus de commodité et suite à un constat d'une différence négligeable après plusieurs tests effectués, entre la convergence obtenue avec des pas d'adaptation  $\mu_1, \mu_2$  et  $\mu_3$  différents, et les résultats obtenus avec des valeurs identiques, nous avons opté pour une seule valeur du pas d'adaptation pour les trois paramètres. La détermination des valeurs des pas d'adaptation, commence ainsi par le calcul de la quantité  $2/\lambda_{max}$ . Un balayage de plusieurs valeurs est ensuite effectué à l'intérieur de l'intervalle donné par la condition précédente, jusqu'à obtenir la meilleure convergence du filtre de Volterra adaptatif LMS, et les meilleurs résultats des modèles de distorsion du haut-parleur.

**6.2 Entrée du facteur d'oubli dans l'algorithme RLS :** Dans le chapitre trois, nous avons vu que l'initialisation de l'algorithme RLS, exige en autres, d'arrêter une valeur pour le facteur d'oubli  $\lambda$ , pour que l'algorithme puisse tendre vers la solution de Wiener. Le facteur d'oubli d'une valeur entre 0 et 1 ( $0 < \lambda < 1$ ), représente en quelque sorte la vitesse avec laquelle le filtre oublie les échantillons précédents. Un facteur d'oubli égal à 1, signifie de ce fait une mémoire infinie. Par conséquent, un poids exponentiellement décroissant est appliqué comme pondération aux erreurs passées, ainsi théoriquement, le biais tend vers zéro lorsque le nombre d'itérations de l'algorithme croît, et ce dernier tend vers la solution de Wiener. La valeur de  $\lambda$  a été ainsi choisie après plusieurs essais avec des valeurs proches de 1. Les valeurs retenues sont celles qui permettent la convergence la plus rapide du filtre de Volterra adaptatif RLS, et les meilleurs résultats des distorsions prédites du haut-parleur.

**7. Initialisation des algorithmes :** Concernant l'algorithme LMS, sont initialisés :

- le vecteur d'entrée  $\mathbf{x}(0)$   $\mathbf{x}(0)$  ;
- le vecteur du filtre  $\mathbf{w}(0)$   $\mathbf{w}(0)$  .

Dans l'algorithme RLS, il y a lieu d'initialiser :

- le vecteur d'entrée  $\mathbf{x}(0)$  ;
- le vecteur du filtre  $\mathbf{w}(0)$  ;
- inverse de la matrice d'autocorrélation de l'entrée  $\mathbf{P}(0)$ .

## 8. Algorithmes adaptatifs

**8.1 Algorithme LMS adaptatif :** L'algorithme de Volterra adaptatif LMS qui a servi à la simulation du filtre d'identification se résume comme suit :

ALGORITHME 6.1 – Algorithme de Volterra adaptatif LMS.

---

### Notations :

- $\mathbf{x}(n)$  : vecteur d'entrée ( $L \times 1$ ) à l'étape  $n$
- $\mathbf{w}(n)$  : vecteur des coefficients ( $L \times 1$ ) à l'étape  $n$

$d(n)$  : signal désiré à l'étape  $n$

$y(n)$  : signal de sortie estimé du filtre à l'étape  $n$

$\mu_1, \mu_2$  et  $\mu_3$  : pas d'adaptation

**Initialisation :**

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{w}(0) = [0, 0, \dots, 0]^T$$

**Calcul :** Pour chaque instant  $n = 1, 2, \dots, L$

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu e(n) \mathbf{x}(n)$$

$$y(n) = \mathbf{w}^T(n) \mathbf{x}(n)$$

$$e(n) = d(n) - y(n)$$


---

**8.1 Algorithme RLS adaptatif :** L'algorithme de Volterra adaptatif RLS utilisé pour la simulation du filtre d'identification est donné par :

ALGORITHME 6.2 – Algorithme de Volterra adaptatif RLS.

---

**Notations :**

$\mathbf{x}(n)$  : vecteur d'entrée ( $L \times 1$ ) à l'étape  $n$

$\mathbf{w}(n)$  : vecteur des coefficients ( $L \times 1$ ) à l'étape  $n$

$d(n)$  : signal désiré à l'étape  $n$

$y(n)$  : signal de sortie estimé du filtre à l'étape  $n$

$\mathbf{P}(n)$  inverse de la matrice d'autocorrélation de  $x(n)$  à l'étape  $n$

$\delta$  : facteur de régularisation pour l'initialisation de  $\mathbf{P}(0)$

$\mathbf{I}$  matrice identité ( $L \times L$ )

$\mathbf{k}(n)$  : vecteur du gain de Kalman ( $L \times 1$ ) à l'étape  $n$

$\alpha(n)$  : erreur *a priori* à l'étape  $n$

$e(n)$  : erreur *a posteriori* à l'étape  $n$

$\lambda$  : facteur d'oubli ( $0 \ll \lambda \leq 1$ )

**Initialisation :**

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{w}(0) = [0, 0, \dots, 0]^T$$

$$\mathbf{P}(0) = \delta^{-1} \mathbf{I}$$

**Calcul :** Pour chaque instant  $n = 1, 2, \dots, L$

$$\alpha(n) = d(n) - \mathbf{w}(n-1) \mathbf{x}^T(n)$$

$$\mathbf{k}(n) = \frac{\mathbf{P}(n-1) \mathbf{x}(n)}{\lambda + \mathbf{x}^T(n) \mathbf{P}(n-1) \mathbf{x}(n)}$$

$$\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}(n-1) + \alpha(n) \mathbf{k}(n)$$

$$\mathbf{P}(n) = \frac{1}{\lambda} [\mathbf{P}(n-1) - \mathbf{k}(n) \mathbf{x}^T(n) \mathbf{P}(n-1)]$$

$$y(n) = \mathbf{w}^T(n) \mathbf{x}(n)$$

$$e(n) = d(n) - y(n)$$


---

**9. Nombre d'itérations et convergence :** Le nombre d'itérations pour chaque algorithme est égal à la longueur du vecteur d'entrée, à celle du nombre des noyaux de Volterra calculés et aussi à la longueur de la sortie prédite. Théoriquement, la rapidité de la convergence est liée au nombre d'itérations requis pour atteindre la solution optimale de Wiener, seulement en pratique, la convergence n'est nullement un paramètre aussi prévisible et facile à saisir. La convergence dans les systèmes non linéaires et non stationnaires, même à un degré moindre, reste une entreprise laborieuse, compliquée davantage par le nombre très grand d'itérations utilisées dans les simulations. En conséquence, l'échec d'une convergence lors des simulations, renvoie systématiquement à l'étape du choix d'une nouvelle valeur des pas d'adaptation  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  et  $\mu_3$  de l'algorithme LMS, et du facteur d'oubli  $\lambda$  pour l'algorithme RLS, là où commence toute une série de manœuvres autour des conditions et critères de choix décrits auparavant.

**10. Résultats :** A la fin de la simulation des algorithmes adaptatifs LMS et RLS, il est désormais possible de récolter les différents résultats produits. Les principaux résultats sont le vecteur total du filtre  $\mathbf{w}(n)$ , constitué des coefficients des trois noyaux de Volterra partiels. Le second résultat est la sortie prédite  $y(n)$ , obtenue par la sommation de la réponse partielle des produits matricielles des coefficients du vecteur d'entrée, avec les coefficients des noyaux correspondants (voir § 6.3.2.2). Ces deux premiers résultats seront employés ultérieurement pour la comparaison avec les résultats expérimentaux. Le dernier résultat généré, est l'erreur de prédiction  $e(n)$  formée au fil des itérations des algorithmes, qui sera d'une grande utilité pour l'évaluation de la qualité des simulations et surtout celle des modèles à prédire.

## 6.4 Conclusion

Ce chapitre est le premier de la dernière partie de cette thèse, qui portait sur l'identification du système haut-parleur à l'aide des filtres de Volterra adaptatifs. Dans la première partie du chapitre, nous avons présenté les principales méthodes expérimentales de l'évaluation de la non-linéarité des distorsions dans le haut-parleur. D'abord, il a été question de présenter le procédé expérimental général de mesure, qui a servi à toutes les mesures effectuées, tout en décrivant l'instrumentation mise à profit et surtout en évoquant les conditions de mesures et autres considérations pratiques d'ordre métrologique. La première méthode d'évaluation est la courbe caractéristique. Elle a permis d'identifier le type de non-linéarité du haut-parleur utilisé, qui est de type polyharmonique, avec une allure générale de type sigmoïde inverse<sup>1</sup>, avec la présence de légères boucles d'hystérésis dans les régions moyennes.

En second lieu, la fonction de cohérence a permis de tirer les conclusions suivantes :

- la non-linéarité dépend de la fréquence de travail du haut-parleur et de son niveau d'excitation ;
- la non-linéarité est faible pour les niveaux moyens de la tension d'entrée (entre 1,5 et 5 V), et les moyennes et hautes fréquences ;

---

1. [Cabot et al., 2005] explique la forme en sigmoïde inverse de la courbe caractéristique comme la prédominance d'harmoniques, qui sont en opposition de phase par rapport à la composante fondamentale de la réponse.

- la non-linéarité s'accroît avec les valeurs qui sont très grandes ou très faibles de la tension d'entrée ;
- les basses et très basses fréquences ( $< 280$  Hz) sont les régions les plus touchées par la non-linéarité sévère dans le haut-parleur.

D'autre part, à partir de la mesure de la réponse en fréquence, il a été possible de sortir avec les conclusions qui suivent :

- il existe une grande similitude entre les allures de la réponse en fréquence mesurée, et celle fournie par le fabricant, et même en ce qui concerne les ordres de grandeurs des valeurs des deux niveaux de pression sonore ;
- la sensibilité dynamique du haut-parleur est très grande entre 826 et 9000 Hz ;
- la bande passante du haut-parleur woofer-médium utilisé a été située expérimentalement, entre 90 Hz à 9200 Hz, qui est très proche de celle donnée par le fournisseur, à savoir, entre 90 et 8800 Hz.

La mesure des distorsions harmoniques et d'intermodulation ont permis de conclure que :

- les valeurs des distorsions harmoniques sont proportionnelles à la tension d'entrée, et les écarts des pourcentages diminuent au fur et à mesure que les fréquences augmentent ;
- les distorsions harmoniques sont les plus grandes en basses fréquences entre 50 et 500 Hz, elles sont de moindres valeurs en moyennes fréquences, mais elles augmentent de façon sensible à partir de 4 à 5 kHz ;
- la courbe de la THD est la plus dominante, suivie de celle de la troisième composante de la distorsion harmoniques  $HD_3$ , et vient toujours en dernier la courbe de la seconde composante de la distorsion harmonique  $HD_2$  ;
- l'écart entre les trois courbes de distorsion harmoniques augmente avec la tension d'entrée ;
- les amplitudes des spectres de distorsion d'intermodulation augmentent avec le niveau des tensions d'excitation ;
- quel que soit le niveau d'entrée, les valeurs de l' $IMD_3$  sont toujours supérieures à celles de l' $IMD_2$ .

Dans la seconde partie du chapitre, nous nous sommes attelés à la question de l'identification du haut-parleur à l'aide des filtres de Volterra adaptatifs. D'abord, plusieurs considérations pratiques se sont imposées pour l'exécution ultérieure de la simulation des filtres de Volterra adaptatifs. A ce titre, au sortir d'une synthèse approfondie, nous avons choisi les deux fréquences 24 et 96 kHz comme fréquences d'échantillonnage pour notre recherche, et trois types de signaux d'excitation, qui sont le bruit blanc gaussien de puissance à croissance linéaire (BGCLIN), le bruit blanc gaussien de puissance à croissance logarithmique (BGCLOG) et le bruit blanc gaussien uniforme (BGUNI).

Le choix de certains paramètres de simulation, pousse à s'inquiéter pour la mise en œuvre des différents filtres construits, ce qui nous a obligés à nous pencher sur le problème de la charge de calcul afin de trouver les solutions les plus appropriées.

Enfin, dans la dernière section nous avons pu mettre en pratique l'essentiel de ce que nous avons traité dans les deux premières parties de cette thèse, qui étaient consacrées à l'étude bibliographique et à l'état de l'art relatifs au sujet de notre travail, mais particulièrement aux divers développements théoriques menés dans les différents chapitres. La construction du filtre de Volterra a ainsi été achevée, après un choix étudié des différents paramètres constructifs de la série de Volterra et des filtres adaptatifs en général. La simulation des 48 variantes des filtres de Volterra adaptatifs LMS et RLS a été conduite, afin de permettre la production des différents vecteurs des filtres à base des noyaux de Volterra, des sorties prédites et aussi des signaux d'erreur.

Dans le chapitre suivant, tous ces résultats issus de la simulation, seront mis à profit pour la prédiction des distorsions harmoniques, d'intermodulation et de la réponse en fréquence. En outre, ils feront l'objet d'une comparaison minutieuse avec les résultats expérimentaux obtenus précédemment, pour l'évaluation de la qualité des simulations et pour la validation des différents résultats trouvés.

# CHAPITRE 7

## Modélisation des distorsions et de la réponse en fréquence du haut-parleur

### 7.1 Introduction

A l'aide des noyaux de Volterra estimés formant le filtre des coefficients du haut-parleur identifié, on peut procéder à la modélisation de toute une panoplie de métriques et de différents paramètres du haut-parleur électrodynamique. Pour notre part, nous avons choisi la modélisation des distorsions et de la réponse en fréquence du haut-parleur, comme application de l'identification du haut-parleur. Dès lors, ce chapitre sert à décrire la modélisation des métriques choisies du haut-parleur, à l'analyse des différents résultats de prédiction, et à l'évaluation de la performance des méthodes d'identification adoptées.

Dans la seconde section du chapitre, la méthodologie ayant servi à l'obtention des différents modèles est décrite et concerne :

1. La modélisation des distorsions harmoniques : distorsion harmonique total (THD), seconde composante de la distorsion harmonique ( $HD_2$ ) et la troisième composante de la distorsion harmonique ( $HD_3$ ).
2. La modélisation des distorsions d'intermodulation : spectre d'intermodulation, valeurs de la distorsion d'intermodulation totale (IMD) et les seconde et troisième composantes de la distorsion d'intermodulation ( $IMD_2$  et  $IMD_3$ ).
3. La réponse en fréquence du haut-parleur.

Compte tenu du degré de complexité des trois métriques modélisées, et dans le but d'évaluer la qualité générale de la modélisation, nous estimons que les distorsions harmoniques sont de première importance par rapport aux deux autres métriques, en raison de leur importance dans la caractérisation des distorsions non linéaires du haut-parleur, mais aussi pour leur nombre et la complexité entraînée par l'allure des courbes et l'ordre de grandeur des échelles de pourcentages des distorsions. Les distorsions d'intermodulation se placent en seconde position dans la détermination de la qualité de la modélisation, suivies en dernier par les réponses en fréquence prédites. La troisième section s'intéresse à la présentation détaillée de tous les résultats des 48 filtres adaptatifs de Volterra LMS et RLS conçus. L'analyse de ces résultats fait l'objet de la quatrième section, où l'on s'intéresse à l'exactitude des différents modèles prédits. La dernière section

été réservée à l'évaluation comparative de la performance exposée par les différentes stratégies d'identification exécutées.

## 7.2 Mise en œuvre des modèles

La modélisation de certaines métriques du haut-parleur a requis une identification basée sur les filtres de Volterra adaptatifs LMS et RLS. L'élément fondamental et indispensable pour modéliser ces métriques, sont les filtres estimés, formés des coefficients des noyaux de Volterra obtenus suite aux simulations réalisées.

Le schéma de la Figure 7.1 montre la procédure qui a permis la modélisation des distorsions harmoniques. Notons que les éléments de cette procédure sont tout à fait les mêmes que ceux employés pour la mesure des distorsions harmoniques, hormis le haut-parleur qui a été remplacé par le filtre de Volterra estimé  $\mathbf{w}(n)$ . Concrètement, l'algorithme 6.17 utilisé pour la mesure des distorsions harmoniques, a été repris pour intégrer le filtre estimé par le biais de ses coefficients des noyaux de Volterra. Le signal d'excitation de balayage fréquentiel fait office d'entrée du filtre de Volterra estimé, afin de recueillir la sortie prédite  $y_p(n)$  requise pour le calcul de la distorsion harmonique total (THD), la seconde composante de la distorsion harmonique ( $HD_2$ ) et la troisième composante de la distorsion harmonique ( $HD_3$ ).

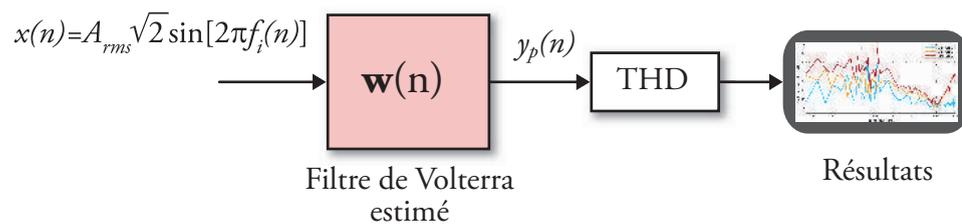


FIGURE 7.1 – Schéma de la procédure de modélisation des distorsions harmoniques à l'aide des filtres de Volterra adaptatifs.

De même, la Figure 7.2 schématise la modélisation des distorsions d'intermodulation à l'aide des filtres de Volterra adaptatifs. Le procédé expérimental de la Figure 6.24, a été réutilisé pour la modélisation des distorsions d'intermodulation, pour remplacer le haut-parleur en tant que système réel, par le filtre estimé issu de son identification. Le signal composite à l'entrée du filtre  $\mathbf{w}(n)$ , donne lieu à une réponse prédite  $y_p(n)$ , afin de l'exploiter pour l'obtention des spectres et des différentes valeurs de la distorsion d'intermodulation totale (IMD), et la seconde et la troisième composantes de la distorsion d'intermodulation ( $IMD_2$  et  $IMD_3$ ).

Enfin, pour la modélisation de la réponse en fréquence, le procédé expérimental de la Figure 6.13 a servi de la même manière, en y intégrant le filtre de Volterra estimé (Figure 7.3) en remplacement du haut-parleur. A partir de la sortie prédite du filtre excité à l'aide d'une impulsion de Dirac, est obtenue la réponse en fréquence après son passage à travers un code FFT.

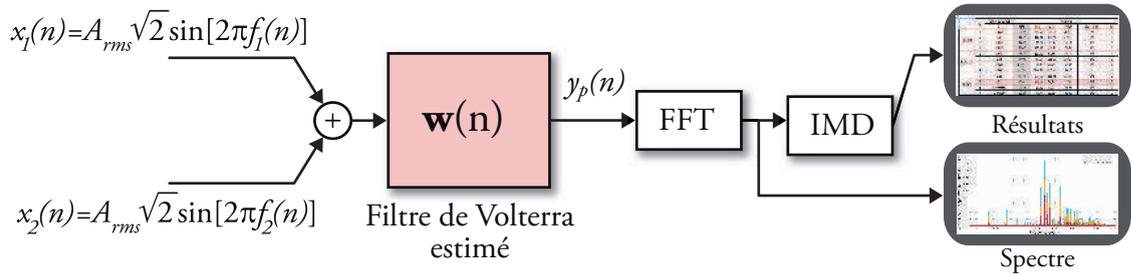


FIGURE 7.2 – Schéma de la procédure de modélisation des distorsions d'intermodulation à l'aide des filtres de Volterra adaptatifs.

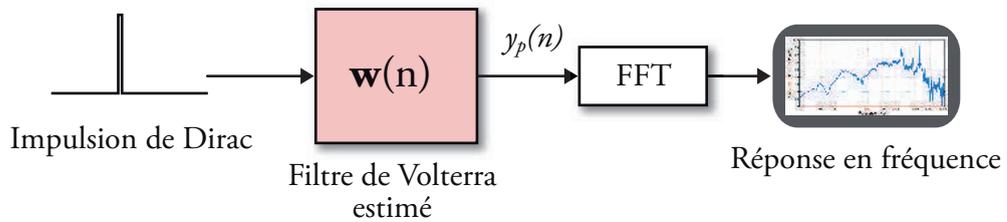


FIGURE 7.3 – Schéma de la procédure de modélisation de la réponse en fréquence à l'aide des filtres de Volterra adaptatifs.

### 7.3 Modélisation des métriques du haut-parleur à l'aide des filtres de Volterra adaptatifs

La modélisation des différentes métriques du haut-parleur à l'aide des noyaux de Volterra estimés, lors de la simulation des 48 filtres de Volterra, a permis de fournir les meilleurs résultats possibles obtenus pour chaque valeur de l'étendue de mémoire avec les différents types d'excitation. Ces résultats sont présentés dans les Tableaux de 7.2 à 7.5, et les Figures de 7.4 à 7.11. Nous trouvons ainsi dans les Tableaux, les résultats numériques des meilleures prédictions des distorsions harmoniques et de la réponse en fréquence, obtenus avec les valeurs des pas d'adaptation  $\mu_1, \mu_2$  et  $\mu_3$  ou les facteurs d'oubli  $\lambda$ , de la MSE, et en fonction du type des signaux d'excitation et de l'étendue de mémoire.

Dans les deux dernières colonnes des tableaux, sont reportées les notes attribuées aux différentes courbes prédites, établies sur la base d'un système de notation subjective qui a été mis en place, qui sert à l'évaluation subjective de la qualité des courbes des distorsions, et celle de la réponse en fréquence, en les comparant avec les courbes mesurées correspondantes. Le tableau 7.1 présente les détails du système de notation subjective.

Notons que pour l'évaluation subjective de la qualité des courbes des distorsions harmoniques, deux notes sont employées séparées d'une barre oblique (./.), où la première à gauche désigne la qualité de la courbe, tandis que la seconde représente le degré de rapprochement de l'ordre de grandeur de la valeur des pourcentages des distorsions comparé, avec à celui de l'échelle des courbes expérimentales.

Nous présentons dans ce qui suit quatre groupes de résultats de la modélisation

Désignation subjective	Pas ressemblant	Peu ressemblant	Assez ressemblant	Très ressemblant
Note	0	1	2	3

TABEAU 7.1 – Système de notation subjective mis en place pour l'évaluation de la qualité des courbes prédites.

correspondant aux algorithmes RLS et LMS et les fréquences d'échantillonnage 24 et 96 kHz.

### 7.3.1 Résultats de la modélisation avec le filtre de Volterra LMS adaptatif et $f_s = 24$ kHz

A considérer les résultats du tableau 7.2, nous pouvons observer ce qui suit :

- les valeurs très faibles de la MSE ( $8,85 \cdot 10^{-6}$ ), ne correspondent pas aux meilleurs résultats obtenus ;
- le signal BGUNI a permis les meilleurs modèles de distorsions harmoniques, mais aucune note de 2/2 ou plus ;
- le signal BGUNI avec  $M = 4$ , a offert les meilleurs modèles des distorsions (Figure 7.4), mais la réponse en fréquence correspondante ne sort pas du lot (Figure 7.5) ;
- par contre, les meilleures valeurs de la distorsion d'intermodulation ont été obtenues avec le signal BGCLIN et  $M = 1, 2$  et 4 ;
- le tableau ne comporte aucune réponse en fréquence prédite comparable à la réponse mesurée, avec une note de 0 pour les 12 filtres.

Signaux	$M$	Paramètres LMS	Résultats					
		$\mu_{1,2,3}$	MSE	IMD	IMD2	IMD3	Dist. harm.	RF
BGCLIN	1	0,0714	2,089	236,97	37,3	234,02	1/0	0
	2	0,0333	2,065	119,64	34,4	114,59	1/0	0
	3	0,0905	2,069	183,71	87,33	161,63	1/0	0
	4	0,081	0,956	8,36	8,08	2,13	0	0
BGCLOG	1	0,0905	$8,85 \cdot 10^{-6}$	0,42	0,38	0,18	0	0
	2	0,0619	$8,85 \cdot 10^{-6}$	0,31	0,28	0,13	0	0
	3	0,0619	$8,85 \cdot 10^{-6}$	0,18	0,16	0,08	0	0
	4	0,0238	0,003	0,25	0,23	0,11	0	0
BGUNI	1	0,0238	0,098	38,05	5,92	37,59	1/0	0
	2	0,0428	0,089	19,14	6,45	18,02	2/0	0
	3	0,0904	0,089	38,6	2,45	38,52	1/0	0
	4	0,0667	0,082	52,99	31,67	42,48	2/1	0

TABEAU 7.2 – Résumé des résultats de modélisation de l'algorithme de Volterra LMS avec  $f_s = 24$  kHz

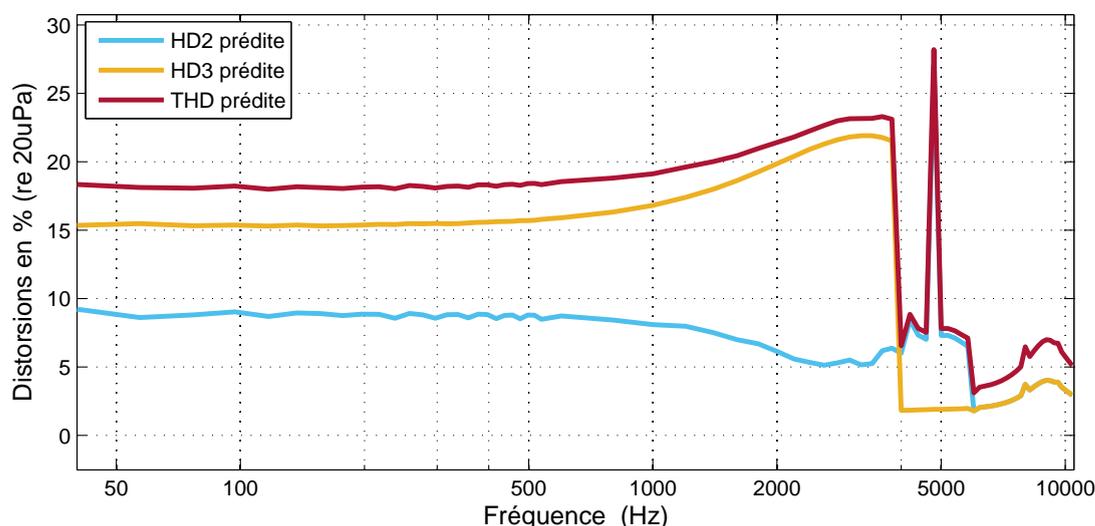


FIGURE 7.4 – Distorsions harmoniques ( $HD_2$ ,  $HD_3$  et THD) prédites correspondant à la meilleure note subjective (2/1), obtenues avec l’algorithme de Volterra LMS avec le signal BGUNI,  $f_s = 24$  kHz,  $M = 4$  et  $\mu_{1,2,3} = 0,0667$ .

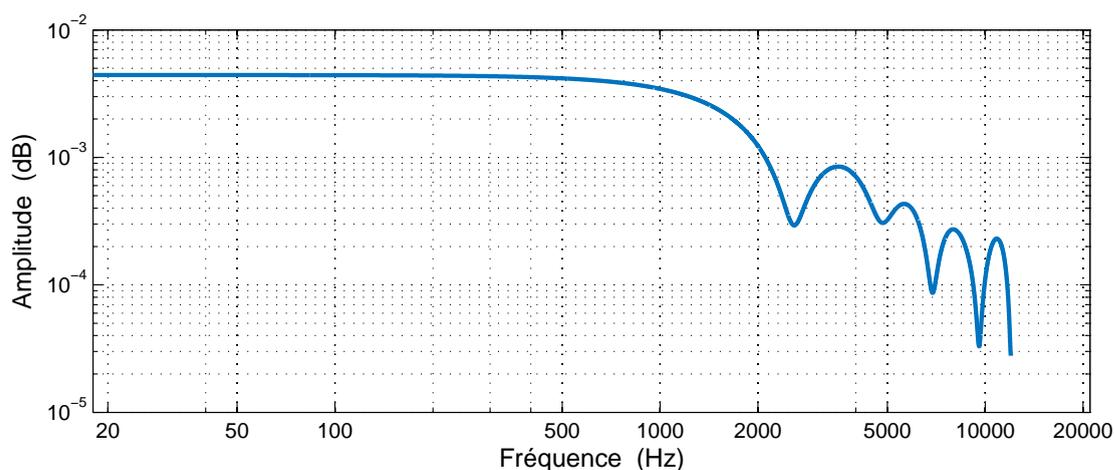


FIGURE 7.5 – Réponse en fréquence prédite correspondant à la meilleure note subjective (2/1), obtenue avec l’algorithme de Volterra LMS avec le signal BGUNI,  $f_s = 24$  kHz,  $M = 4$  et  $\mu_{1,2,3} = 0,0667$ .

### 7.3.2 Résultats de la modélisation avec le filtre de Volterra LMS adaptatif et $f_s = 96$ kHz

L’examen des résultats du tableau 7.3, permet de formuler les observations suivantes :

- le signal BGUNI a permis les meilleurs modèles de distorsions harmoniques, mais également aucune note de 2/2 ou plus ;
- le signal BGUNI avec  $M = 2$ , a donné les meilleurs modèles des distorsions (Figure 7.6), avec une note de 1 pour la réponse en fréquence correspondante, comprenant

- tout de même la descente à 10 kHz (Figure 7.7) ;
- les valeurs prédites de la distorsion d’intermodulation les plus proches des valeurs expérimentales ont été obtenues avec le signal BGCLIN et  $M = 2$  ;
  - le tableau comporte 11/12 notes de 1 pour la réponse en fréquence prédite, bien meilleur que le cas précédent avec une totalité de douze zéros.

Signaux	$M$	Paramètres LMS	Résultats					
		$\mu_{1,2,3}$	MSE	IMD	IMD2	IMD3	Dist. harm.	RF
BGCLIN	1	0,0667	2,446	390,78	62,66	385,72	1/0	1
	2	0,0667	2,438	118,05	17,96	116,68	1/2	1
	3	0,0333	1,085	8,6	6,45	5,69	0	1
	4	0,0095	0,487	9,66	5,46	7,97	0	1
BGCLOG	1	0,0619	0,038	0,98	0,92	0,34	0	1
	2	0,0428	0,037	1,13	1,08	0,34	0	1
	3	0,0238	0,001	1,15	1,04	0,49	0	1
	4	0,0333	$2,54 \cdot 10^{-4}$	1,32	1,17	0,62	0	1
BGUNI	1	0,0714	1,37	14,43	6,33	12,97	1/0	1
	2	0,0523	1,361	26,22	5,95	25,54	2/0	1
	3	0,0009	0,089	25,86	1,95	25,79	1/0	0
	4	0,0523	1,181	57,02	47,97	30,82	1/2	1

TABLEAU 7.3 – Résumé des résultats de modélisation de l’algorithme de Volterra LMS avec  $f_s = 96$  kHz

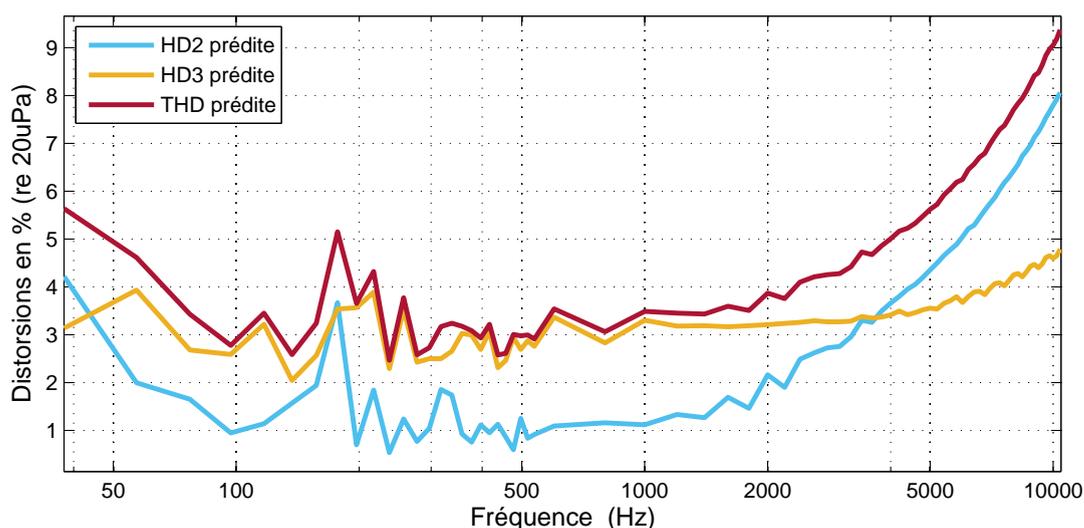


FIGURE 7.6 – Distorsions harmoniques ( $HD_2$ ,  $HD_3$  et THD) prédites correspondant à la meilleure note subjective (2/2), obtenues avec l’algorithme de Volterra LMS avec le signal BGUNI,  $f_s = 96$  kHz,  $M = 2$  et  $\mu_{1,2,3} = 0,0523$ .

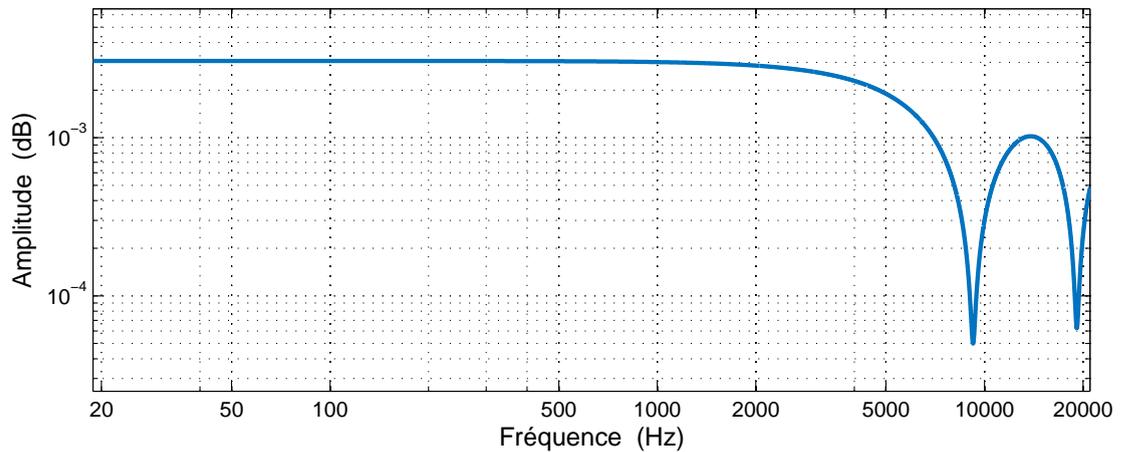


FIGURE 7.7 – Réponse en fréquence prédite correspondant à la meilleure note subjective (2/2), obtenue avec l’algorithme de Volterra LMS avec le signal BGUNI,  $f_s = 96$  kHz,  $M = 2$  et  $\mu_{1,2,3} = 0,0523$ .

### 7.3.3 Résultats de la modélisation avec le filtre de Volterra RLS adaptatif et $f_s = 24$ kHz

Les résultats consignés dans le Tableau 7.4, nous ont permis de tirer les observations suivantes :

- les meilleurs modèles des distorsions harmoniques sont fournis par les deux signaux d’excitation BGCLIN et BGUNI, capitalisant ensemble cinq notes supérieures ou égales à 2/2 ;

Signaux	$M$	Paramètres RLS	Résultats					
		$\lambda$	MSE	IMD	IMD2	IMD3	Dist. harm.	RF
BGCLIN	1	0,88	1,461	243,38	153,2	189,11	2/3	0
	2	0,94	1,207	316,24	257,98	182,91	2/2	0
	3	0,9	0,325	167,28	98,18	135,44	2/2	0
	4	0,9999999	0,718	23,1	22,32	5,95	0	0
BGCLOG	1	0,99999	$8,85 \cdot 10^{-6}$	0,33	0,16	0,29	0	0
	2	0,9999	$8,84 \cdot 10^{-6}$	982,14	981,23	42,34	0	0
	3	0,9999	$8,84 \cdot 10^{-6}$	397,95	392,17	67,58	0	0
	4	0,9999	$8,88 \cdot 10^{-6}$	1,29	1,01	0,81	0	0
BGUNI	1	0,9	0,072	59,87	32,92	50,01	2/1	0
	2	0,88	0,031	63,59	28,28	56,95	2/2	0
	3	0,99	0,071	62,68	17,52	60,18	2/2	0
	4	0,99999	0,087	66,38	62,29	22,94	0	0

TABLEAU 7.4 – Résumé des résultats de modélisation de l’algorithme de Volterra RLS avec  $f_s = 24$  kHz

- le signal BGCLIN avec  $M = 1$ , a produit les meilleurs modèles des distorsions avec une note maximale du tableau de 2/3, faisant ressortir un ordre de grandeur acceptable des pourcentages de distorsion (Figure 7.8); mais avec une réponse en fréquence correspondante dissemblable avec la courbe mesurée avec son creux précoce en hautes fréquences à partir de 4 kHz (Figure 7.9);
- l'ensemble des valeurs prédites de la distorsion d'intermodulation présentées dans le tableau, est d'une dissimilitude évidente par rapport aux valeurs expérimentales;
- il a été attribué une note de 0 pour les douze réponses en fréquence prédites.

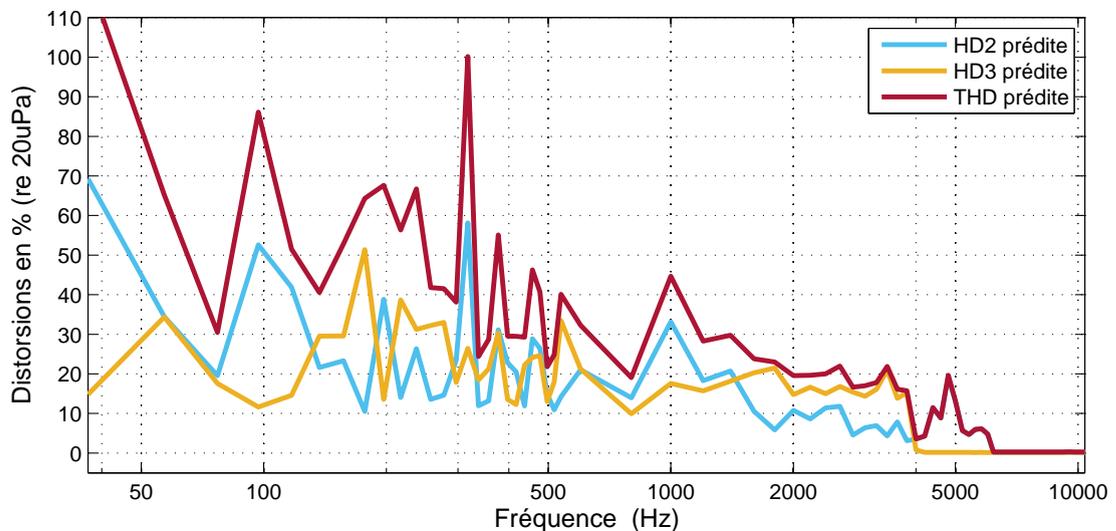


FIGURE 7.8 – Distorsions harmoniques ( $HD_2$ ,  $HD_3$  et THD) prédites correspondant à la meilleure note subjective (2/3), obtenues avec l'algorithme de Volterra RLS avec le signal BGCLIN,  $f_s = 24$  kHz,  $M = 1$  et  $\lambda = 0,88$ .

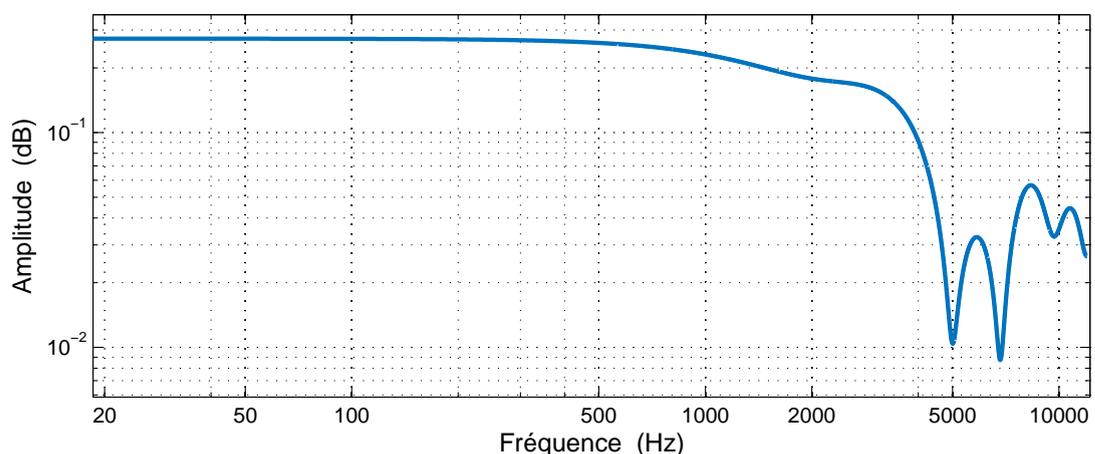


FIGURE 7.9 – Réponse en fréquence prédite correspondant à la meilleure note subjective (2/3), obtenue avec l'algorithme de Volterra RLS avec le signal BGCLIN,  $f_s = 24$  kHz,  $M = 1$  et  $\lambda = 0,88$ .

### 7.3.4 Résultats de la modélisation avec le filtre de Volterra RLS adaptatif et $f_s = 96$ kHz

L'analyse du tableau 7.5 permet d'énoncer les observations suivantes :

- il est évident ici, que l'algorithme RLS avec la fréquence d'échantillonnage  $f_s = 96$  kHz représentent une combinaison intéressante pour les modèles de distorsions harmoniques, avec sept notes égales ou plus de 2/2, obtenus indifféremment avec les trois types de signaux d'excitation ;

Signaux	$M$	Paramètres RLS	Résultats					
		$\lambda$	MSE	IMD	IMD2	IMD3	Dist. harm.	RF
BGCLIN	1	0,8995	1,472	388,57	138,17	363,17	2/3	1
	2	0,92	0,647	442,04	383,74	219,41	2/3	3
	3	0,9999	0,662	65,21	2,13	65,18	1/2	1
	4	0,9999	0,247	145,04	127	70,06	1/2	1
BGCLOG	1	0,999	0,037	127,52	93,99	86,18	1/2	1
	2	0,95	0,004	218,6	183,19	119,27	3/2	3
	3	0,9998	$3,72 \cdot 10^{-4}$	71,86	25,14	67,32	2/2	2
	4	0,9998	$1,72 \cdot 10^{-4}$	2152,02	2149,74	99,12	0/1	1
BGUNI	1	0,88	0,746	245,81	218,36	112,88	2/3	2
	2	0,922	0,501	141,37	78,74	117,41	3/3	3
	3	0,99999999	1,216	27,3	13,65	23,64	1/2	1
	4	0,999934	1,213	51,76	32,09	40,61	2/2	2

TABLEAU 7.5 – Résumé des résultats de modélisation de l'algorithme de Volterra RLS avec  $f_s = 96$  kHz

- le signal BGUNI avec  $M = 2$ , a fourni d'excellents modèles de distorsions (Figure 7.10), recevant la seule note complète 3/3 sur les quatre tableaux ;
- le tableau comporte le nombre de valeurs prédites de la distorsion d'intermodulation les plus proches des valeurs expérimentales pour l'ensemble des 48 cas. Le cas le plus intéressant est obtenu avec la combinaison BGUNI/96 kHz avec  $M = 2$  avec un facteur d'oubli  $\lambda = 0,922$  ;
- le tableau ne comporte aucun 0 pour la réponse en fréquence prédite, bien au contraire, il existe trois notes de 2 et trois autres notes maximales de 3, où l'une d'elles a obtenu avec la même combinaison ayant donné les meilleures modèles prédits des distorsions harmoniques et distorsions d'intermodulation, en l'occurrence, le signal BGCLIN et  $M = 2$  avec un facteur d'oubli  $\lambda = 0,922$  (Figure 7.11).

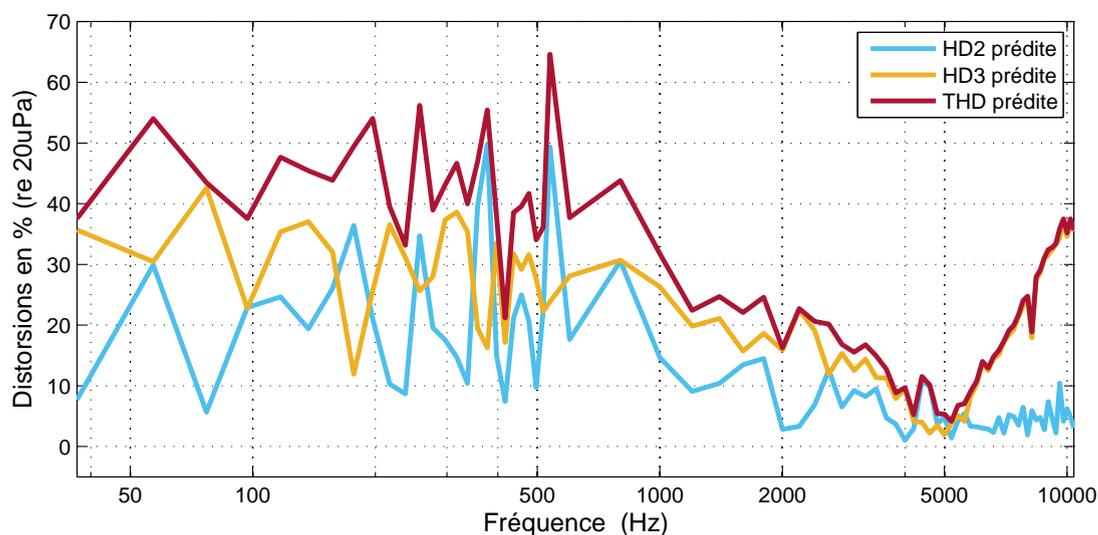


FIGURE 7.10 – Distorsions harmoniques ( $HD_2$ ,  $HD_3$  et THD) prédites correspondant à la meilleure note subjective (3/3), obtenues avec l’algorithme de Volterra RLS avec le signal BGUNI,  $f_s = 96$  kHz,  $M = 2$  et  $\lambda = 0,922$ .

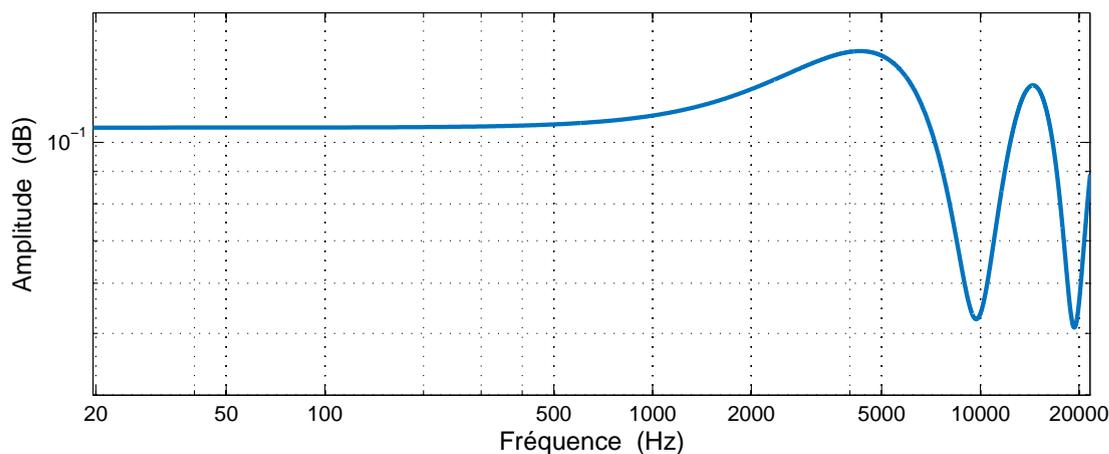


FIGURE 7.11 – Réponse en fréquence prédite correspondant à la meilleure note subjective (3/3), obtenue avec l’algorithme de Volterra RLS avec le signal BGUNI,  $f_s = 96$  kHz,  $M = 2$  et  $\lambda = 0,922$ .

## 7.4 Analyse et exactitude des modèles prédits

### 7.4.1 Analyse des distorsions harmoniques

L’analyse des résultats des distorsions harmoniques prédites, présentés dans la section précédente, permet d’avancer les conclusions suivantes :

- la première chose à remarquer dans les résultats des distorsions harmoniques est l’incapacité de la fréquence d’échantillonnage 24 kHz pour les deux algorithmes d’identification, à donner des courbes de prédiction proches des courbes expérimentales.

- L'algorithme RLS a néanmoins permis quelques résultats de qualité moyenne avec les signaux BGUNI, alors que l'algorithme LMS s'avérait être incapable de donner des courbes qui ressemblent même vaguement aux courbes de distorsion mesurées ;
- l'examen des quatre tableaux, permet de constater qu'indifféremment du type de signal d'excitation, l'étendue de mémoire  $M = 2$ , a fourni le plus grand nombre de meilleures notes subjectives ( $\geq 2/2$ ) pour les distorsions harmoniques prédites ;
  - en considérant les quatre groupes de filtres, il existe manifestement une corrélation entre le type des signaux d'excitation et la qualité des prédictions des distorsions harmoniques. Au fait, c'est le signal BGUNI qui a permis de fournir les meilleurs résultats, suivi du BGCLIN. En revanche, le BGCLOG s'est montré totalement incapable de donner lieu à des prédictions acceptables ;
  - la distinction des prédictions des distorsions harmoniques obtenus avec la combinaison RLS/96 kHz est sans appel. De toute évidence, c'est le signal BGUNI qui permet les meilleurs courbes, tant pour leur allure que l'ordre de grandeur des distorsions en pourcentage. Ce constat peut être aisément confirmé à l'aide des Figures 7.12 à 7.14.

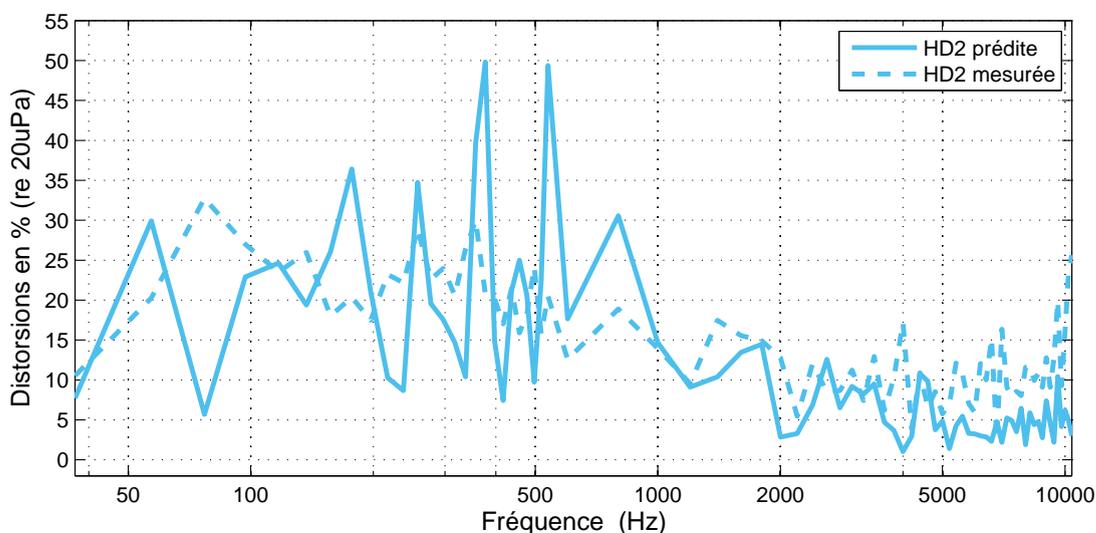


FIGURE 7.12 – Superposition de la seconde distorsion harmonique ( $HD_2$ ) mesurée avec la seconde distorsion harmonique prédite correspondant à la meilleure note subjective (3/3), obtenue avec l'algorithme de Volterra RLS avec le signal BGUNI,  $f_s = 96$  kHz,  $M = 2$  et  $\lambda = 0,922$ .

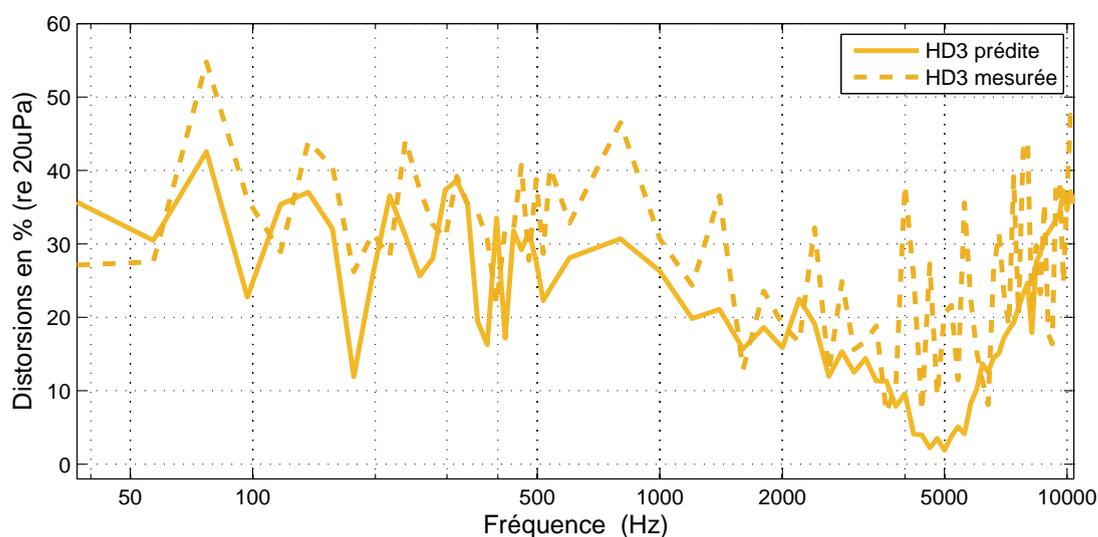


FIGURE 7.13 – Superposition de la troisième distorsion harmonique ( $HD_3$ ) mesurée avec la troisième distorsion harmonique prédite correspondant à la meilleure note subjective (3/3), obtenue avec l’algorithme de Volterra RLS avec le signal BGUNI,  $f_s = 96$  kHz,  $M = 2$  et  $\lambda = 0,922$ .

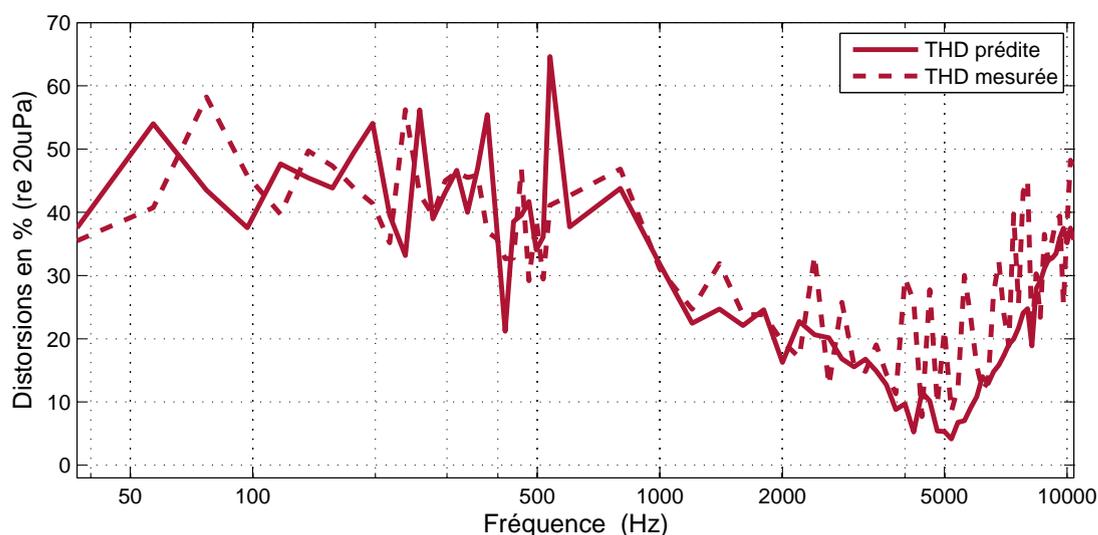


FIGURE 7.14 – Superposition de la distorsion harmonique totale (THD) mesurée avec la distorsion harmonique totale prédite correspondant à la meilleure note subjective (3/3), obtenue avec l’algorithme de Volterra RLS avec le signal BGUNI,  $f_s = 96$  kHz,  $M = 2$  et  $\lambda = 0,922$ .

#### 7.4.2 Analyse des distorsions d’intermodulation

Contrairement aux distorsions harmoniques, il a été constaté que la plupart des filtres simulés se sont montrés incapables de fournir des prédictions acceptables des distorsions

d'intermodulation. La meilleure prédiction enregistrée, a été possible avec la valeur de  $\lambda = 0,922$  dans l'algorithme RLS/96 kHz avec un signal BGUNI, celui qui a fourni les meilleures notes subjectives pour les distorsions harmoniques et la réponse en fréquence. Dans le Tableau 7.6, nous pouvons remarquer une proximité acceptable entre les trois couples de valeurs, notamment celles de l' $IMD_2$ , avec un écart de moins de 11 %.

$\lambda$	IMD (%)		IMD2 (%)		IMD3 (%)	
	Mesurée	Prédite	Mesurée	Prédite	Mesurée	Prédite
0,922	<b>119,28</b>	141,37	<b>89,69</b>	78,74	<b>95,61</b>	117,41

TABLEAU 7.6 – Comparaison des valeurs des distorsions d'intermodulation mesurées avec les valeurs des distorsions d'intermodulation prédites, obtenues avec l'algorithme RLS adaptatif pour le signal BGUNI,  $f_s = 96$  kHz,  $M = 2$  et  $\lambda = 0,922$ , correspondant à la meilleure note subjective.

### 7.4.3 Analyse de la réponse en fréquence

A propos de la réponse en fréquence, l'analyse de ses résultats de prédiction à l'aide des filtres simulés permet d'énoncer ce qui suit :

- les constats formulés précédemment pour les distorsions harmoniques, peuvent être facilement repris ici pour décrire la qualité des prédictions de la réponse en fréquence. Cela a trait avec les meilleures courbes prédites de la réponse en fréquence qui ont été obtenues avec les étendues de mémoire  $M = 2$ , et avec le signal BGCLIN, et de manière importante avec le BGUNI;

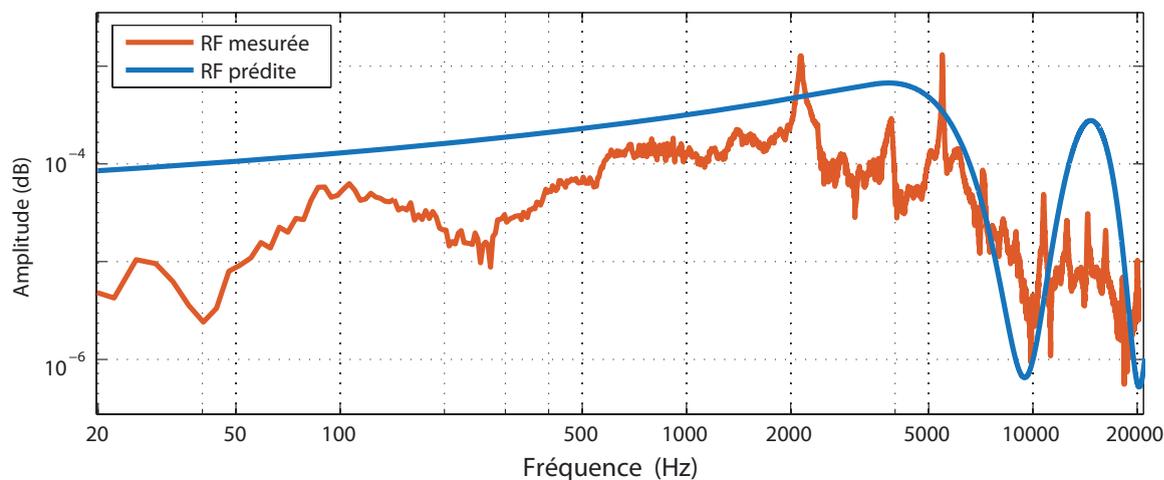


FIGURE 7.15 – Superposition de la réponse en fréquence mesurée avec la réponse en fréquence prédite, obtenue avec l'algorithme RLS adaptatif pour le signal BGUNI,  $f_s = 96$  kHz,  $M = 2$  et  $\lambda = 0,922$ , correspondant à la meilleure note subjective.

- la Figure 7.15 représente la réponse en fréquence expérimentale du haut-parleur, avec celle prédite à l'aide du meilleur cas parmi les 48 résultats de prédiction obtenus, à savoir, celui à l'aide l'algorithme RLS avec le signal BGUNI et une étendue de

mémoire  $M = 2$ , utilisant un facteur d'oubli et  $\lambda = 0,922$ . La superposition des deux courbes montre clairement la concordance de l'allure générale lissée de la réponse prédite, avec une montée à partir des basses fréquences jusqu'à 6 ou 7 kHz, pour ensuite inscrire un creux dans l'intervalle entre 7 et 13 kHz, et ce avec les mêmes ordres de grandeurs de l'amplitude dans l'échelle des ordonnées.

## 7.5 Évaluation de la performance et validation des filtres adaptatifs

### 7.5.1 Convergence et stabilité

Dans le troisième chapitre, nous avons montré dans le développement théorique que si l'excitation  $x(n)$  et le signal désiré  $d(n)$  sont des processus ergodiques conjointement stationnaires, l'estimation du vecteur des coefficients  $\mathbf{w}(n)$  basée sur une approche des moindres carrés, tend vers la solution optimale de Wiener, à mesure que la longueur du vecteur d'entrée tend vers l'infini. La pratique est certes différente des énoncés théoriques, basés sur des formalismes analytiques, cependant une évaluation de la performance des filtres adaptatifs utilisés s'impose, en étroite relation avec la qualité des modèles prédits des diverses métriques du haut-parleur. A ce titre, la courbe d'apprentissage est un outil utilisé pour l'évaluation des performances des filtres adaptatifs, notamment la vitesse de convergence, l'erreur en régime permanent et la stabilité. C'est une courbe représentant la MSE du filtre adaptatif en fonction du temps ou des itérations.

Nous procédons dans ce qui suit à l'évaluation des performances des quatre filtres adaptatifs LMS et RLS, ceux qui ont fourni les meilleures prédictions des trois métriques du haut-parleur, selon leur convergence et leur stabilité.

#### 7.5.1.1 Algorithme LMS

Les performances des filtres adaptatifs LMS dépendent essentiellement de trois facteurs :

1. Les pas d'adaptation  $\mu_{1,2,3}$ .
2. Les valeurs propres  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{L-1}$  de la matrice d'autocorrélation de l'entrée  $\mathbf{R}_x$ .
3. La longueur  $L$  des noyaux de Volterra.

Nous utilisons les résultats illustrés par les Figures 7.16 et 7.17, pour discuter de la convergence/stabilité du meilleur filtre adaptatif estimé à l'aide des algorithmes LMS/24 kHz d'un point de vue prédictif. La Figure 7.16 montre, le signal désiré avec la sortie du filtre et le signal d'erreur en fonction des itérations de l'algorithme adaptatif. Elle permet surtout de montrer un signal d'erreur qui diminue au fur et à mesure que les itérations augmentent, et aussi un écart net entre le signal désiré et la sortie du filtre. La courbe d'apprentissage montre en outre une convergence très lente qui ne commence qu'à partir de 10000 itérations environ, en se stabilisant autour d'une MSE de 0,1 dB, avec une puissance résiduelle importante de l'erreur, due au choix d'une valeur des pas d'adaptation  $\mu_{1,2,3} = 0,0667$ , assez grande, si l'on sait que la valeur de  $\mu_{max}$  est de 0,0952. Le Tableau 7.2 du groupe de filtres LMS/24 kHz, nous renseigne que les

algorithmes ayant permis les meilleurs résultats de prédictions, avaient une convergence qui avait produit des valeurs de la MSE entre 0,05 et 0,1.

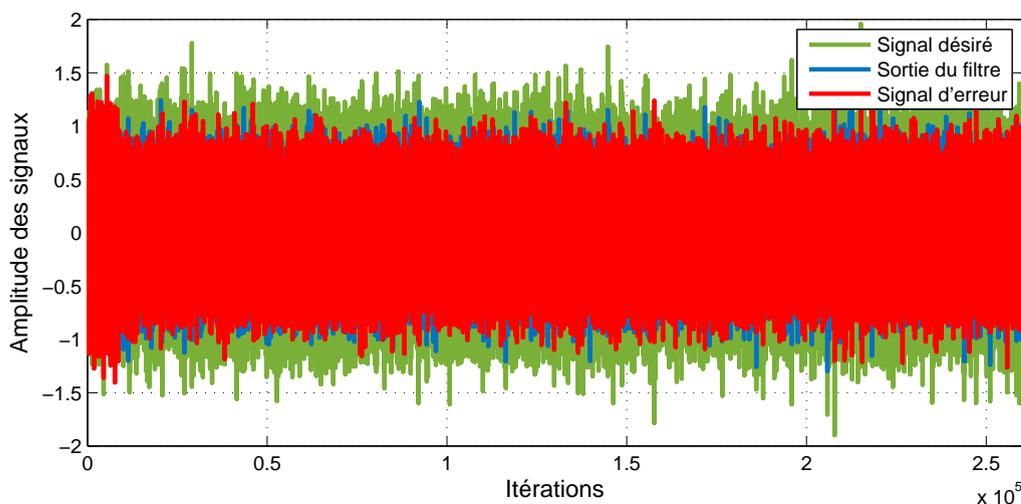


FIGURE 7.16 – Représentation temporelle simultanée du signal désiré, la sortie du filtre et du signal d’erreur, obtenus avec l’algorithme LMS adaptatif pour le signal BGUNI,  $f_s = 24$  kHz,  $M = 4$  et  $\mu_{1,2,3} = 0,0667$ , correspondant à la meilleure note subjective LMS/24 kHz.

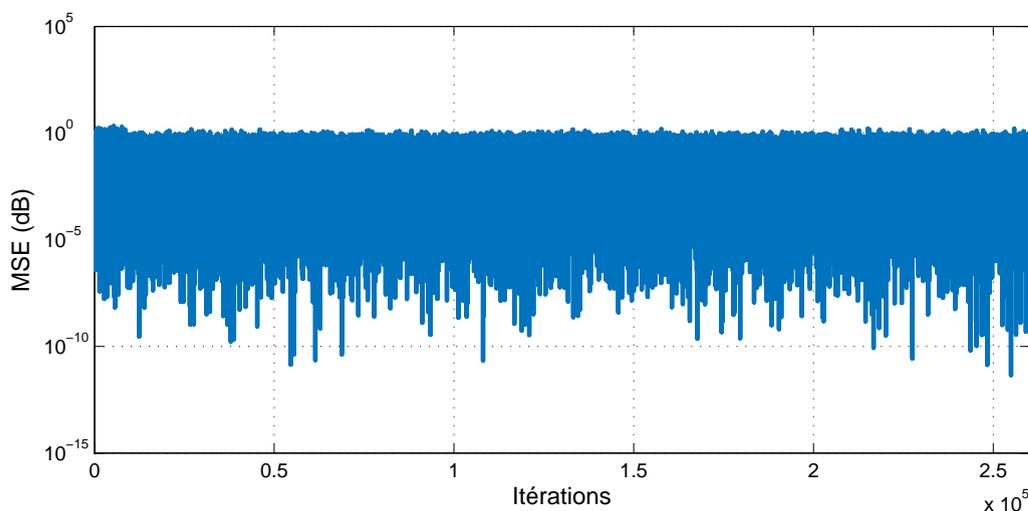


FIGURE 7.17 – Courbe d’apprentissage de l’algorithme LMS adaptative, obtenue avec un signal BGUNI,  $f_s = 24$  kHz,  $M = 4$  et  $\mu_{1,2,3} = 0,0667$ , correspondant à la meilleure note subjective LMS/24 kHz.

De même, les Figures 7.18 et 7.19, sont relatives à l’algorithme LMS adaptatif pour le signal BGUNI avec  $f_s = 96$  kHz,  $M = 4$  et des pas d’adaptation d’une valeur intermédiaire  $\mu_{1,2,3} = 0,0523$ , par rapport à la valeur de  $\mu_{max}$  de 0,0952, correspondant à la meilleure note subjective de la combinaison LMS/96 kHz. La Figure 7.18 montre une

conformité acceptable entre le signal désiré et le signal de sortie du filtre. A remarquer en outre une convergence plus rapide que celle obtenue avec 24 kHz, opérée dès les 700 itérations, mais toujours avec une erreur résiduelle très importante autour d'environ une MSE d'une valeur de 7 dB. De même, les résultats du Tableau 7.3 relatif au groupe de filtres LMS/96 kHz, montre un intervalle  $0,05 < \text{MSE} < 1,5$  pour les algorithmes convergents ayant pu fournir des résultats de prédictions acceptables.

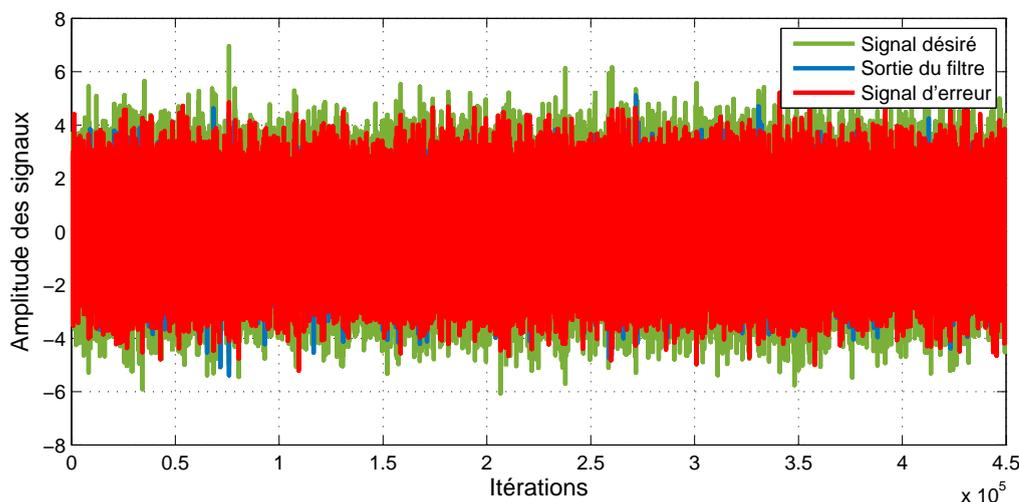


FIGURE 7.18 – Représentation temporelle simultanée du signal désiré, la sortie du filtre et du signal d'erreur, obtenus avec l'algorithme LMS adaptatif pour le signal BGUNI,  $f_s = 96$  kHz,  $M = 4$  et  $\mu_{1,2,3} = 0,0523$ , correspondant à la meilleure note subjective LMS/96 kHz.

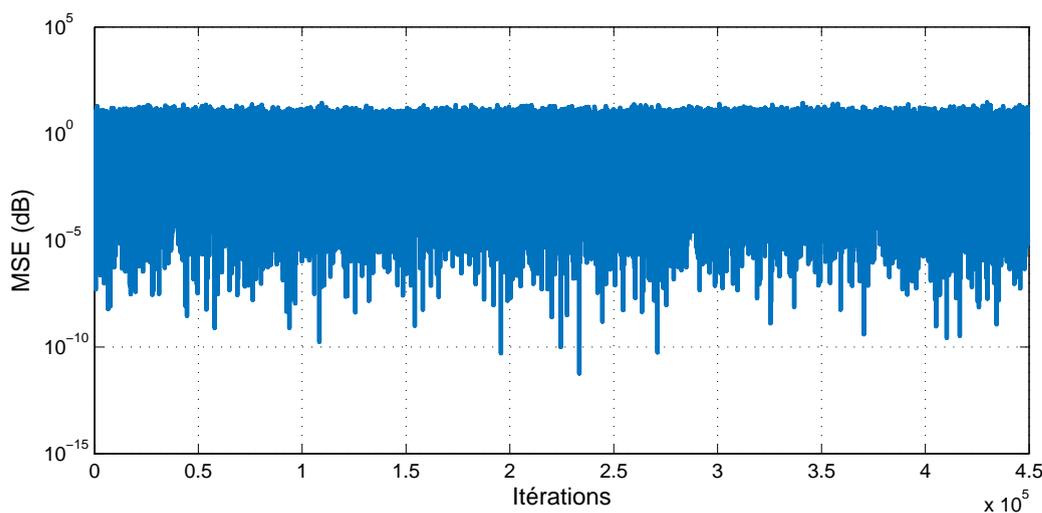


FIGURE 7.19 – Courbe d'apprentissage de l'algorithme LMS adaptative, obtenue avec un signal BGUNI,  $f_s = 96$  kHz,  $M = 2$  et  $\mu_{1,2,3} = 0,0523$ , correspondant à la meilleure note subjective LMS/96 kHz.

### 7.5.2 Algorithme RLS

Les performances des filtres adaptatifs RLS, dépendent des facteurs suivants :

1. Le facteur d'oubli  $\lambda$ .
2. La longueur  $L$  des noyaux de Volterra.

De plus, la vitesse de convergence de l'algorithme RLS selon les deux types d'approches : convergence en moyenne ou en moyenne quadratique, est indépendante de la matrice  $\mathbf{R}_x$  ou de ses valeurs propres, ce qui représente un énorme avantage pour la performance. Le choix du facteur d'oubli  $\lambda$  est capital pour les performances de l'algorithme. Un facteur  $\lambda$  de faible valeur permet une poursuite (tracking) efficace des variations rapides des coefficients estimés, mais rend l'algorithme sensible au bruit. Souvent les auteurs recommandent pour  $\lambda$  des valeurs entre 0,9 et 0,999.

Les Figures 7.20 et 7.21, représentent les trois signaux issus du filtre estimé, et la courbe d'apprentissage de l'algorithme RLS adaptatif pour le signal BGCLIN avec  $f_s = 24$  kHz,  $M = 1$  et  $\lambda = 0,88$ , correspondant à la meilleure note subjective de la combinaison RLS/24 kHz. La Figure 7.20 montre un écart moyen entre le signal désiré et le signal de sortie du filtre. La courbe d'apprentissage montre une convergence très lente qui débute qu'à partir de 25000 itérations, avec une erreur résiduelle importante d'une MSE autour d'environ 10 dB. En outre, les résultats du Tableau 7.4 du groupe de filtres RLS/24 kHz, présente un intervalle  $0,03 < \text{MSE} < 1,5$  des algorithmes convergents, ayant pu donner des résultats de prédictions acceptables, à l'exception des filtres avec une étendue de mémoire  $M = 4$ .

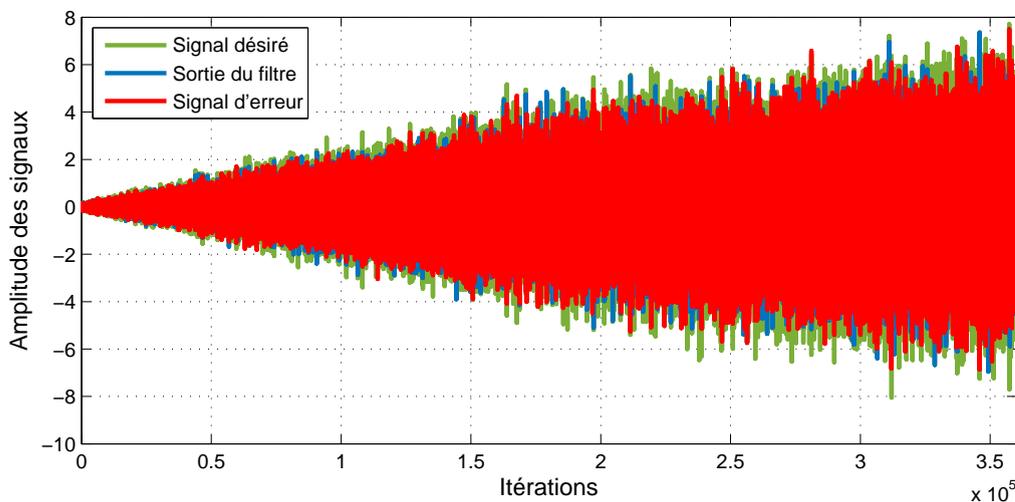


FIGURE 7.20 – Représentation temporelle simultanée du signal désiré, la sortie du filtre et du signal d'erreur, obtenus avec l'algorithme RLS adaptatif pour le signal BGCLIN,  $f_s = 24$  kHz,  $M = 1$  et  $\lambda = 0,88$ , correspondant à la meilleure note subjective RLS/24 kHz.

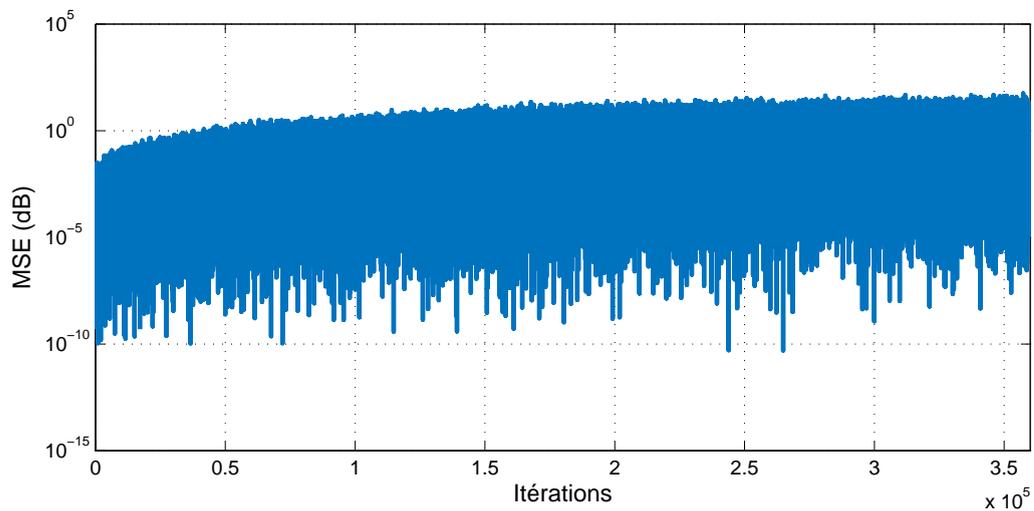


FIGURE 7.21 – Courbe d’apprentissage de l’algorithme RLS adaptative, obtenue avec un signal BGCLIN,  $f_s = 24$  kHz,  $M = 1$  et  $\lambda = 0,88$ , correspondant à la meilleure note subjective RLS/24 kHz.

Les Figures 7.22 à 7.25, sont propres à l’algorithme RLS adaptatif pour le signal BGUNI avec  $f_s = 96$  kHz,  $M = 2$  et  $\lambda = 0,922$ , correspondant à la meilleure note subjective de la combinaison RLS/96 kHz. La Figure 7.22 représente la totalité des trois signaux considérés, et montre une uniformité du signal d’erreur tout au long des itérations, et la présence de quelques sursauts dans les trois signaux, en raison de la sensibilité de l’algorithme au bruit. Les Figures 7.22 et 7.23 montrent respectivement le début et la fin des signaux, avec une vue rapprochée de la Figure 7.22. Nous voulons à l’aide de ces deux figures, souligner la précocité de la convergence de l’algorithme dès les premières centaines d’itérations (100 à 200), avec une bonne concordance entre le signal désiré et la réponse du filtre vers la fin des itérations. La courbe d’apprentissage confirme clairement cette convergence très rapide, installant une erreur stable résiduelle d’une MSE autour d’une valeur approximative de 1,3 dB, assez faible par rapport aux valeurs précédentes. Enfin, les résultats du Tableau 7.5 du groupe de filtres RLS/96 kHz, montre que les valeurs de la MSE entre 0,02 et 1,5 des algorithmes convergents, ont pu donner les meilleurs résultats de prédiction des métriques du haut-parleur.

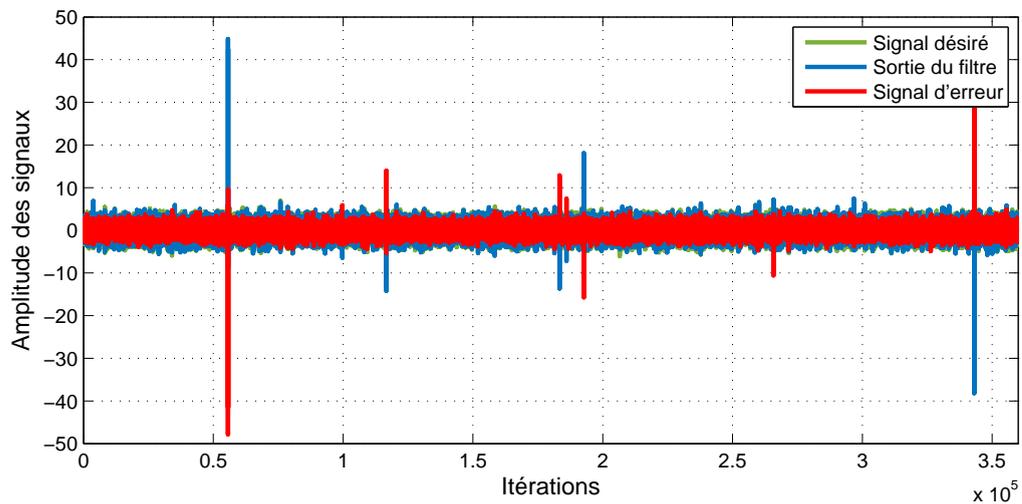


FIGURE 7.22 – Représentation temporelle simultanée du signal désiré, la sortie du filtre et du signal d'erreur, obtenus avec l'algorithme RLS adaptatif pour le signal BGUNI,  $f_s = 96$  kHz,  $M = 2$  et  $\lambda = 0,922$ , correspondant à la meilleure note subjective RLS/96 kHz.

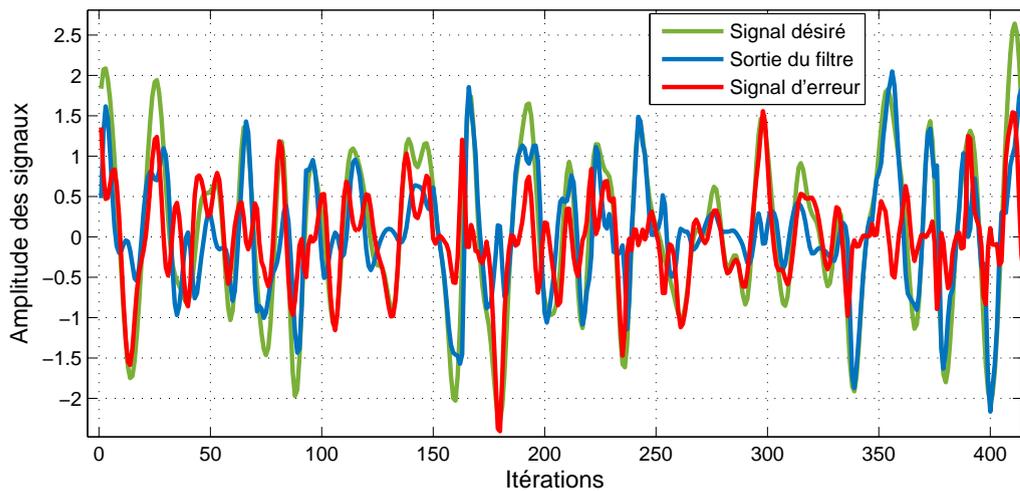


FIGURE 7.23 – Vue rapprochée de la représentation temporelle simultanée du signal désiré, la sortie du filtre et du signal d'erreur (début des itérations), obtenus avec l'algorithme RLS adaptatif pour un signal BGUNI,  $f_s = 96$  kHz,  $M = 2$  et  $\lambda = 0,922$ , correspondant à la meilleure note subjective RLS/96 kHz.

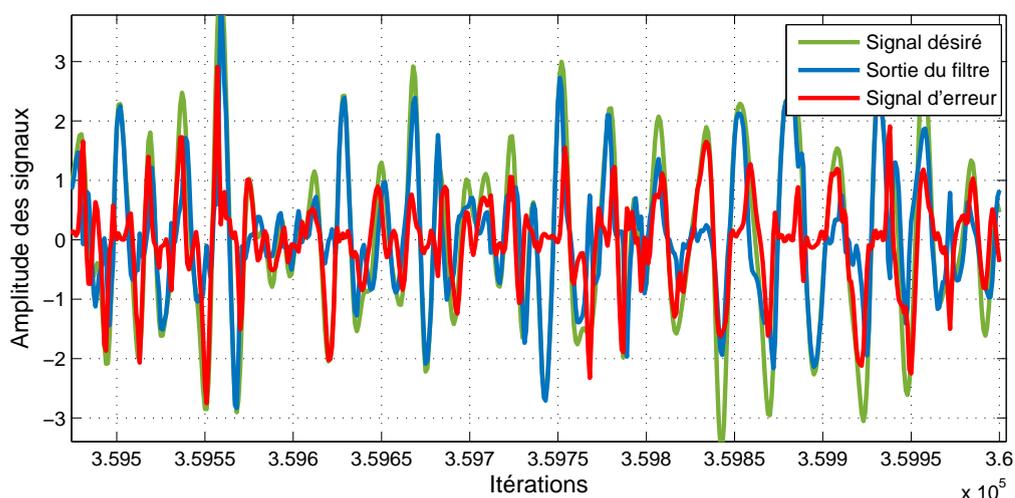


FIGURE 7.24 – Vue rapprochée de la représentation temporelle simultanée du signal désiré, la sortie du filtre et du signal d’erreur (fin des itérations), obtenus avec l’algorithme RLS adaptatif pour un signal BGUNI,  $f_s = 96$  kHz,  $M = 2$  et  $\lambda = 0,922$ , correspondant à la meilleure note subjective RLS/96 kHz.

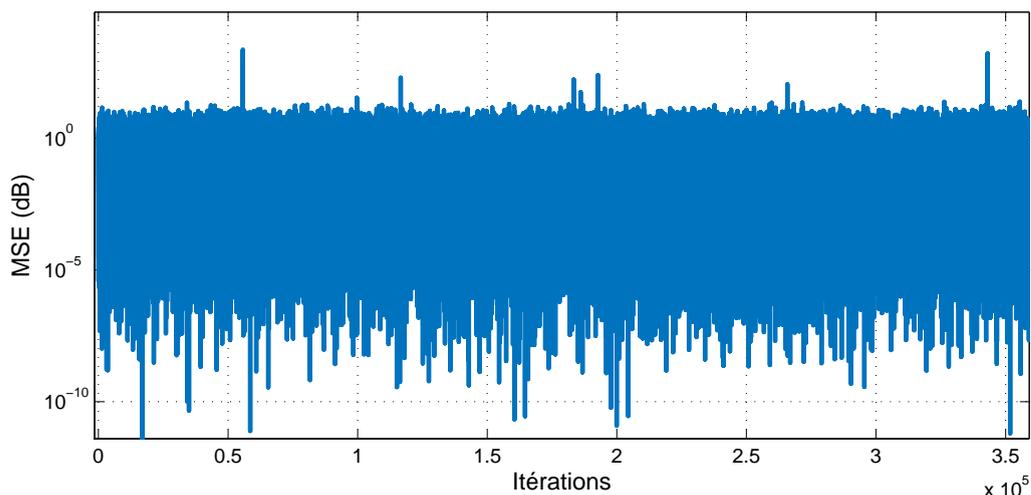


FIGURE 7.25 – Courbe d’apprentissage de l’algorithme RLS adaptative, obtenue avec un signal BGUNI,  $f_s = 96$  kHz,  $M = 2$  et  $\lambda = 0,922$ , correspondant à la meilleure note subjective RLS/96 kHz.

### 7.5.3 Complexité

La complexité est particulièrement importante dans les applications à base des algorithmes adaptatifs dans un mode opératoire en temps réel. La mise en œuvre des systèmes en temps réel, se confrontent à certaines limitations matérielles, qui peuvent affecter ses performances. Un algorithme très complexe nécessitera ainsi des ressources

matérielles bien plus importantes, à cause à la fois du nombre d'opérations arithmétiques effectuées par itération et la précision requise pour leur calcul.

La complexité des algorithmes peut être évaluée à l'aide de diverses méthodes et exprimée à l'aide de plusieurs unités. La manière la plus simple, est de mesurer le nombre d'opérations arithmétiques requises pour le calcul d'un algorithme (multiplications et additions). Une autre unité est également utilisée est le FLOPS, pour désigner le nombre d'opérations en virgule flottante par seconde (en anglais, FLoating-Point Operations per Second), pour la mesure de la performance des ordinateurs et des algorithmes de calcul scientifique nécessitant des calculs en virgule flottante.

Le Tableau 7.7, renseigne sur le nombre d'opérations arithmétiques nécessaires par itération, des filtres adaptatifs linéaires LMS et RLS de  $L$  coefficients. Ainsi, l'algorithme LMS requiert  $L+1$  additions et  $2L$  multiplications, avec une occupation mémoire avec les données de  $2L$ , alors que l'algorithme RLS a besoin de  $L^2+L$  additions et  $2L^2+3L+50$  multiplications, avec une occupation mémoire  $L^2+3$ .

Par conséquent, l'algorithme LMS est un algorithme  $O(N_c)$ , c.-à-d., sa complexité de calcul augmente linéairement avec  $N_c$ . Où  $N_c$  est le nombre de coefficients du filtre estimé, et  $O(\cdot)$  désigne l'ordre de grandeur. Alors que l'algorithme RLS est un algorithme  $O(N_c^2)$ , et sa complexité de calcul augmente de manière quadratique avec le nombre de coefficients  $N_c$ .

	<b>LMS</b>	<b>RLS</b>
<b>Nombre d'additions/itération</b>	$L + 1$	$L^2 + L$
<b>Nombre de multiplications/itération</b>	$2L$	$2L^2 + 3L + 50$
<b>Occupation mémoire</b>	$2L$	$L^2 + 3L$
<b>Complexité de calcul</b>	$O(N_c)$	$O(N_c^2)$

TABLEAU 7.7 – Complexité en nombre d'opérations arithmétiques nécessaires par itération, des filtres adaptatifs linéaires LMS et RLS de  $L$  coefficients.

Cependant, en considérant le filtre de Volterra adaptatif du troisième ordre, de  $L$  coefficients et de mémoire  $M$ , avec un nombre de coefficients dans chaque noyau d'ordre  $N$ , donné par la combinaison avec répétition  $C_N^M = [(M + N - 1)!/N!(M - 1)!]$ , il est évident que le nombre d'opérations de calcul nécessaires pour l'implémentation des algorithmes adaptatifs va considérablement augmenter.

Pour cela, nous avons mesuré le nombre d'opérations en virgule flottante par seconde, de nos deux algorithmes de Volterra adaptatifs LMS et RLS, en utilisant un code Matlab<sup>TM</sup> spécifique dont les détails sont données dans la référence [Qian, 2015].

Le Tableau 7.8 présente le nombre de FLOPS, de deux blocs les plus consommateurs en ressources matérielles dans les deux algorithmes de Volterra adaptatifs LMS et RLS employés. D'abord, le tableau montre les nombres de FLOPS de la partie des codes chargée de la construction des coefficients du vecteur d'entrée, ensuite la partie principale ayant pour rôle le calcul des coefficients du filtre (mise à jour des coefficients des noyaux de Volterra), avec  $L$  étant le nombre d'itérations<sup>1</sup> des deux codes.

1. Identique également à la longueur des filtres estimés et celle des vecteurs d'entrée.

Algorithme LMS				Algorithme RLS			
<b>Construction des coefficients du vecteur d'entrée</b>							
	$M = 1$	$M = 2$	$M = 3$	$M = 4$			
$X_1$	0L	0L	0L	0L			
$X_2$	2L	5L	9L	14L			
$X_3$	2L	10L	26L	52L			
<b>Total</b>	4L	15L	35L	66L			
<b>Calcul des coefficients du filtre</b>							
$y(n) = \mathbf{w}^T(n) \mathbf{x}(n)$	6L		$\alpha(n) = d(n) - \mathbf{w}(n-1) \mathbf{x}^T(n)$	7L			
$e(n) = d(n) - y(n)$	1L		$\mathbf{k}(n) = \frac{\mathbf{P}(n-1) \mathbf{x}(n)}{\lambda + \mathbf{x}^T(n) \mathbf{P}(n-1) \mathbf{x}(n)}$	18L			
$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu e(n) \mathbf{x}(n)$	40L		$\mathbf{P}(n) = \frac{1}{\lambda} [\mathbf{P}(n-1) - \mathbf{k}(n) \mathbf{x}^T(n) \mathbf{P}(n-1)]$	53L			
			$\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}(n-1) + \alpha(n) \mathbf{k}(n)$	31L			
			$y(n) = \mathbf{w}^T(n) \mathbf{x}(n)$	7L			
<b>Total</b>		47L	<b>Total</b>				116L
<b>Nombre de FLOPS total des algorithmes</b>							
$M = 1$	$M = 2$	$M = 3$	$M = 4$	$M = 1$	$M = 2$	$M = 3$	$M = 4$
51L	62L	82L	113L	120L	131L	151L	182L

TABLEAU 7.8 – Complexité en nombre de FLOPS requis pour les algorithmes adaptatifs de Volterra LMS et RLS utilisés.

Avec des nombres de FLOPS de l'algorithme LMS pratiquement égaux à la moitié de ceux de l'algorithme RLS, le tableau montre de manière palpable, le besoin très faible en charge de calcul de l'algorithme LMS, du fait qu'il ne nécessite ni calcul de la fonction de corrélation ni l'inversion de sa matrice, ce qui le rend simple et facile par rapport à l'algorithme RLS et à beaucoup d'autres algorithmes adaptatifs. Toutefois, la complexité de l'algorithme RLS, reste au détriment de la vitesse de convergence qu'il offre.

### 7.5.4 Validation

La validation est l'étape ultime du procédé d'identification. Dès lors, valider un modèle consiste principalement à juger s'il convient pour l'objectif ou l'application visés. D'autre part, la validation permet d'évaluer l'exactitude avec laquelle le modèle arrive à décrire la dynamique du système identifié en fournissant des prédictions les plus proches possibles des réponses du système réel. Cette exactitude peut être mesurable à l'aide de différents critères, que l'on trouve dans la littérature de l'identification et la modélisation des systèmes. Cependant, lorsqu'il s'agit de modèles générant des prédictions sous une forme spécifique (images, courbes, modes propres, etc.), il devient difficile d'évaluer

leur exactitude à l'aide de critères numériques issus d'approches statistiques, utilisant les résultats de modélisation sous forme de données numériques. Dans ce cas, deux méthodes sont utilisées pour la validation de ces modèles spécifiques :

1. La validation par la comparaison des prédictions du modèle conçu avec les réponses du système réel.
2. La validation à l'aide de nouvelles données expérimentales, constituées de l'excitation et de la réponse du système réel, mesurées dans les mêmes conditions que les mesures ayant servi à l'identification du système. En excitant le modèle à l'aide d'une nouvelle séquence d'entrée, on compare par la suite la réponse prédite avec celle de la nouvelle réponse du système réelle. Cette validation permet une appréciation qualitative des résultats de la modélisation.

En considérant nos résultats de modélisation, à vrai dire, la première méthode de validation a déjà été exécutée tout au long de ce chapitre, en ayant comparé les modèles prédits des différentes métriques du haut-parleur avec celles mesurées. Concernant la seconde méthode, nous avons exploité une séquence de 90000 échantillons non utilisée, issue de la même séquence globale de données qui a donné la séquence utilisée pour l'identification. Pour la validation, le meilleur filtre de Volterra adaptatif est utilisé, à savoir, celui avec l'algorithme RLS/96 kHz, et le signal d'excitation de type BGUNI avec un facteur d'oubli  $\lambda = 0,922$ .

Dans la Figure 7.26, en considérant un zoom sur un échantillon d'environ 550 échantillons, nous remarquons une bonne concordance entre le signal de validation expérimental et la réponse prédite issue du filtre estimée, avec toutefois un écart présent dans les portions de forte variabilité du signal expérimental, dû à une capacité de poursuite insuffisante de la part de l'algorithme adaptatif. Les résultats des deux méthodes de validation employées, montrent clairement la validé du procédé d'identification mis en place, des filtres estimés et des prédictions des différentes métriques du haut-parleur identifié.

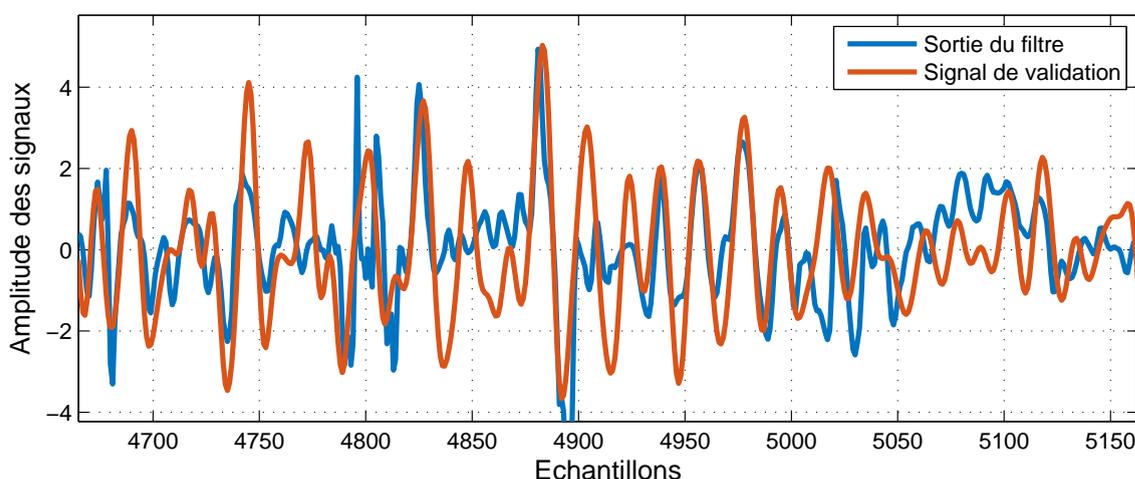


FIGURE 7.26 – Comparaison du signal expérimental de validation avec la réponse prédite du filtre pour la validation.

## 7.6 Conclusion

Les observations et les analyses des résultats de la modélisation des trois types de métriques du haut-parleur obtenus dans ce chapitre, permettent de tirer les conclusions suivantes :

- parmi les quatre valeurs de l'étendue de mémoire  $M$ , c'est la valeur  $M = 2$  qui a permis les meilleures prédictions, suivie de  $M = 1$  et  $2$  indifféremment ;
- parmi les deux fréquences d'échantillonnage utilisées, il a été constaté une nette prédominance des résultats obtenus avec la fréquence 96 kHz devant ceux obtenus avec 24 kHz, pour les deux algorithmes adaptatifs ;
- parmi les trois types de signaux d'excitation, bon nombre de résultats ont clairement montré l'avantage du signal BGUNI, indifféremment des algorithmes adaptatifs et des fréquences d'échantillonnage utilisés. Quoiqu'à un degré moindre, le signal BGCLIN a permis aussi des résultats acceptables pour la prédiction des trois métriques ;
- parmi les deux algorithmes adaptatifs mis à profit, le nombre de meilleurs résultats de prédiction fourni par chaque algorithme, avantage nettement l'algorithme RLS sur son antagoniste l'algorithme LMS, tant sur un aspect très connu de la convergence, mais surtout concernant la qualité des prédictions observée ;
- parmi les trois métriques du haut-parleur modélisées, les distorsions harmoniques et la THD ont montré beaucoup plus de disposition à la prédiction avec des résultats très satisfaisants avec certains filtres estimés. En second rang de la prédictibilité, il a été quand même observé un certain nombre de réponses en fréquence dont la courbe ressemble assez près de la courbe mesurée avec des ordres de grandeurs respectifs très rapprochées. Les distorsions d'intermodulation ont toutefois présenté une certaine inconvénience pour la prédiction, en ayant obtenu un nombre réduit de valeurs prédites des trois indicateurs des distorsions d'intermodulation, comparables aux valeurs expérimentales ;
- concernant la performance des filtres adaptatifs construits à base des deux algorithmes de Volterra adaptatifs LMS et RLS, plusieurs des caractéristiques des deux algorithmes que l'on trouve abondamment dans des études comparatives dans la littérature, ont été confirmées, telles que la supériorité de la convergence et de la stabilité de l'algorithme RLS par rapport à celles de l'algorithme LMS. De plus, à propos d'autres aspects de cette performance d'exécution, comme la complexité, nous avons montré cela de façon pratique et précise, en calculant la complexité en nombre de FLOPS pour les codes des deux algorithmes utilisés, ce qui a révélé une complexité de l'algorithme RLS plus réduite de moitié, comparée à celle de l'algorithme LMS ;
- nombre des écarts enregistrés dans les prédictions des modèles des métriques du haut-parleur sont dus à :
  - bruit additif de diverses sources, compliquant l'opération de filtrage adaptatif basée sur l'hypothèse d'absence de bruit ;
  - non stationnarité de la dynamique du haut-parleur, laquelle même faible donne lieu à des sources d'instabilité, et des variabilités sensibles des propriétés des signaux au cours du fonctionnement du haut-parleur, introduisant une difficulté de la poursuite des variations rapides de l'amplitude, et à trouver un compromis entre la convergence et la stabilité ;

- distorsions harmoniques introduites par les autres équipements du procédé expérimental de mesure et d'identification, comme l'amplificateur de puissance et l'amplificateur de mesure.

Ce dernier point nous invite à réfléchir à travailler cette qualité de la prédiction des modèles obtenus. Dans le chapitre huit, dernier de cette thèse, nous tentons, à juste titre, de proposer des solutions en ce sens, à même d'apporter des améliorations dans les algorithmes adaptatifs utilisés pour l'estimation des coefficients des filtres.

# CHAPITRE 8

## Nouvelle méthode PVRP d'ajustement du facteur d'oubli

### 8.1 Introduction

L'estimation des coefficients d'un filtre adaptatif ne constitue pas en soi un objectif ultime, mais juste une étape du processus de modélisation. Il est difficile de porter un quelconque jugement sur l'évaluation de la qualité de l'estimation sur le simple fait d'appliquer un critère sur les données d'estimation récoltées (sortie du filtre, signal d'erreur, etc.). Sans une application précise qui met à profit les coefficients du filtre, dans le cadre de la modélisation ou de la prédiction, la vraie qualité de l'estimation ne peut ressortir.

Dans ce dernier chapitre de cette thèse, nous présentons une nouvelle méthode de post-estimation appelée méthode PVRP (Peak Value-RMS Product), pour l'ajustement de la valeur du facteur d'oubli dans le filtre de Volterra adaptatif RLS. Cette méthode se présente sous la forme d'un algorithme basé sur la métrique PVRP, qui exploite le signal d'erreur obtenu à partir de l'estimation des noyaux de Volterra d'un système non linéaire et peu variant dans le temps. La méthode que nous proposons améliore le choix de la valeur du facteur d'oubli dans l'algorithme d'adaptation RLS. Son applicabilité particulière pour les systèmes non linéaires variant dans le temps, vise à améliorer la capacité de poursuite des variations de l'entrée, entraînant des perturbations dans les signaux d'erreur d'estimation et où les métriques telles que l'erreur quadratique moyenne (MSE) sont limitées.

Dans la seconde section de ce chapitre, nous exposons la problématique liée au recours systématique à la MSE comme outil de prédilection pour l'évaluation de l'estimation basée sur le signal d'erreur. La troisième section traite du développement de la méthode PVRP proposée. Nous expliquons le contexte de son développement, pour la construction de la métrique PVRP. L'algorithme de minimisation de la PVRP est ensuite considéré. Dans la quatrième section, la méthode PVRP est mise en œuvre avec les filtres estimés issus de l'identification du haut-parleur considéré, afin de prédire ses différentes métriques mesurées auparavant. La cinquième section concerne la détermination de la valeur ajustée du facteur d'oubli. L'efficacité de la méthode PVRP est évaluée sur le système haut-parleur utilisé, en comparant les courbes et valeurs de ses métriques prédites avec les leurs correspondant obtenus par voie d'expérience.

Enfin, nous présentons dans la dernière section les résultats des simulations et leurs discussions.

## 8.2 Problématique de la généralité de l'optimisation MSE

L'étude des systèmes dynamiques non linéaires est davantage compliquée s'ils sont décrits en termes d'au moins un paramètre qui varie avec le temps. Face à la réalité des systèmes dynamiques non linéaires et non stationnaires, de nouvelles techniques d'identification ont été développées, à l'exemple des méthodes adaptatives apparues au milieu du siècle passé. L'efficacité des méthodes adaptatives appliquées à l'identification des systèmes dynamiques est désormais un fait indiscutable dans différents domaines [Benkada et al., 2018].

Parmi les différentes méthodes adaptatives, les techniques récursives d'estimation de paramètres se sont imposées dans le cas des systèmes stochastiques variables dans le temps ou non linéaires ou lorsque l'estimation hors ligne exige trop de temps de calcul ou d'espace mémoire [Lindoff and Holst, 1999]. L'algorithme RLS est l'estimateur récursif le plus connu et le plus utilisé dans cette catégorie de méthodes récursives d'identification, dont le principe de base est la minimisation du signal d'erreur obtenu de la différence entre la réponse du filtre et la réponse du système réel.

Depuis le début de la théorie de l'estimation, le choix le plus trivial d'une fonction d'erreur permettant l'évaluation des estimateurs, est l'erreur quadratique moyenne MSE. Schetzen [Schetzen, 1974] a souligné l'importance de l'analyse de l'erreur dans le processus d'identification des systèmes.

Cependant, les travaux centrés exclusivement sur la MSE et son rôle dans les algorithmes adaptatifs RLS ne sont pas légion. Lindoff [Lindoff, 1997; Lindoff and Holst, 1999], est parmi les rares auteurs qui se sont penché sur cette question mais uniquement pour les systèmes linéaires stationnaires. Il propose dans ses travaux un critère de choix du facteur d'oubli de la méthode RLS, dépendant du nombre d'observations, permettant de minimiser l'erreur quadratique moyenne MSE pour le cas d'un système linéaire stationnaire.

Dans [Mosca, 1995], l'auteur avance une relation sommaire entre la méthode RLS et le nombre de mesures précédentes, avec une recommandation sur l'intervalle typique des valeurs du facteur d'oubli.

Dans des schémas de modélisation de systèmes réels comme la plupart des systèmes acoustiques, qui sont non linéaires et non stationnaires, les métriques conventionnelles utilisées jusque-là pour évaluer la qualité des filtres adaptatifs non linéaires doivent être reconsidérés.

La remise en cause des méthodes statistiques purement énergétiques comme seuls moyens d'évaluation des estimateurs n'est pas récente. En effet, dans plusieurs domaines du traitement de signal, et notamment en traitement d'images une vague de critiques vis-à-vis de ces métriques, est apparue vers la fin des années 1980. On peut consulter à ce titre, le remarquable traité réalisé par Bernd Girod sous sa fameuse formule-titre "What's Wrong with Mean-squared Error?", faisant l'objet d'un chapitre de livre sur l'imagerie numérique [Girod, 1993], et qui a été depuis reprise maintes fois par plusieurs chercheurs. Suite à cet épisode, une panoplie de nouvelles méthodes a vu le jour, prenant

en considération la perception humaine et s'accordant plus étroitement avec la qualité subjective des images.

Cet état de fait nous a donné à penser à une solution permettant de mieux tenir compte de la nature particulière des signaux d'erreur issus des filtres adaptatifs non linéaires utilisés pour l'identification des systèmes non linéaires et non stationnaires. Nous avons ainsi développé un critère empirique applicable au signal d'erreur obtenu avec un filtre Volterra RLS adaptatif basé sur la fonction coût des moindres carrés pondérée exponentiellement. Cette solution ne concerne pas l'opération d'estimation à proprement dit, mais l'utilisation de son résultat (post-estimation) [Benkada et al., 2018]. La méthode proposée est développée à partir de l'examen des résultats de modélisations obtenus. Elle est capable de fournir une forte corrélation entre l'exactitude des modèles et les paramètres du filtre Volterra RLS adaptatif utilisé, notamment le facteur d'oubli de l'algorithme adaptatif RLS, qui joue un rôle important dans la convergence du filtre et la qualité des noyaux de Volterra obtenus. Ainsi, le critère proposé a été utilisé pour l'identification d'un système haut-parleur, connu pour sa non-linéarité et non-stationnarité. A ce titre, le critère empirique développé a permis d'ajuster avec précision la valeur du facteur d'oubli dans le filtre Volterra adaptatif RLS, afin d'améliorer la qualité des noyaux de Volterra estimés, et d'obtenir des prédictions des distorsions très proches des distorsions réelles mesurées expérimentalement.

L'algorithme adaptatif RLS fournit une solution exacte en résolvant un problème déterministe des moindres carrés. Basé sur une fonction de coût des moindres carrés exponentiellement pondérée  $J(n)$ , l'algorithme RLS calcule à chaque instant, la fonction de coût  $J(n)$ , et tend à la minimiser pour ajuster les coefficients du filtre  $w(n)$  une fois que les coefficients précédents  $w(n-1)$  sont disponibles [Nascimento, 2014; Ogunfunmi, 2007] :

$$J(n) = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} [d(i) - \mathbf{w}^T(n) \mathbf{x}(i)]^2 \quad (8.1)$$

$$J(n) = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} e^2(i) \quad (8.2)$$

Où  $\lambda$  est le facteur d'oubli ( $0 \ll \lambda \leq 1$ ), et  $e(n)$  est l'erreur *a posteriori*.

La valeur du facteur d'oubli  $\lambda$  définit la mémoire du système et est directement liée à :

- la convergence de l'algorithme d'adaptation et l'aptitude du filtre à suivre les variations temporelles dans le signal d'entrée ;
- la stabilité du filtre estimé.

Le facteur d'oubli  $\lambda$ , s'il est sommairement une mesure de la mémoire de l'algorithme d'adaptation ; il s'agit cependant d'un paramètre de conception crucial du filtre d'adaptation RLS. Sa valeur devrait être inférieure à un, et doit être choisie avec soin [Diniz, 2008; Lu, 2004].

Dans le critère donné dans l'équation 8.2, un facteur d'oubli inférieur à un, va pondérer les anciens échantillons de l'erreur plus faiblement que les nouveaux, ceci est utile dans des situations où le système est variant dans le temps où des variations instantanées

du signal d'entrée rendent la considération des anciens échantillons moins appropriée. Ainsi, une faible valeur de  $\lambda$  conduit à une poursuite rapide des paramètres variant dans le temps mais une sensibilité élevée au bruit [Carlsson, 2016]. Habituellement, une valeur  $\lambda = 1$  est appropriée pour les signaux invariants dans le temps [Lu, 2004].

En l'absence de critères rigoureux pour le choix du facteur d'oubli, chaque auteur recommande une gamme de valeurs typiques valables dans les conditions d'application de la méthode RLS pour un système donné. Ainsi, par exemple, certains recommandent  $0,95 < \lambda < 0,9995$  [Lu, 2004], où d'autres suggèrent  $0,98 < \lambda < 0,995$  [Mosca, 1995], ou  $0,95 < \lambda < 0,995$  [Lindoff, 1997], et finalement  $0,94 < \lambda < 0,999$  [Carlsson, 2016].

Le problème de minimisation est donné par :

$$w(n+1) = \arg \min_w J(n) \quad (8.3)$$

### 8.3 Contexte de développement de la méthode PVRP

L'examen des courbes prédites des distorsions obtenues avec les différents filtres de Volterra adaptatifs RLS, montre généralement un défaut de corrélation entre la qualité (exactitude) des prédictions obtenues et les valeurs de  $\lambda$  optimisées à l'aide de la courbe d'apprentissage basée sur la MSE.

Ainsi, l'observation attentive des différents paramètres des signaux d'erreur des filtres de Volterra adaptatifs RLS, tels que l'amplitude ou plus précisément l'enveloppe et la forme d'onde, avec les différentes valeurs de facteur d'oubli, révèle une différence totale avec les graphes des signaux d'erreur traditionnels obtenus avec les méthodes adaptatives d'identification pour les systèmes linéaires ou non-linéaires invariants dans le temps. La Figure 8.1 est un exemple typique de la forme des signaux d'erreur obtenus, avec un aspect impulsionnel évident, et une irrégularité de l'enveloppe inhérente à la non stationnarité du système réel identifié.

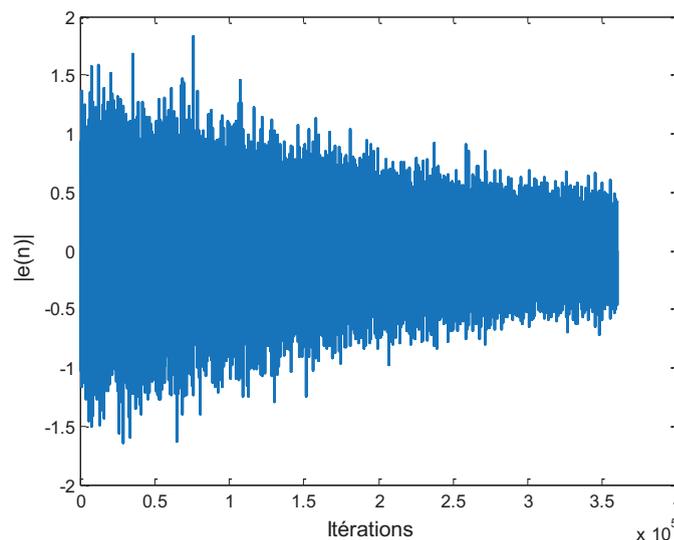


FIGURE 8.1 – Exemple du signal d'erreur du filtre de Volterra adaptatif RLS, obtenu avec un signal BGUNI/96 kHz et  $\lambda = 0,99$ .

Afin de tenir compte de la nature singulière des signaux d'erreurs obtenus, nous développons dans ce chapitre une nouvelle méthode, dont le rôle est d'améliorer le choix du facteur d'oubli  $\lambda$  en ajustant sa valeur avec une grande exactitude autour de la valeur optimisée. Une valeur exacte du facteur d'oubli dans l'algorithme RLS, est très déterminante dans la qualité d'estimation à l'aide du filtre de Volterra adaptatif RLS. Cet ajustement sous-entend la capacité à garantir une corrélation entre l'exactitude des modèles de distorsions du haut-parleur et la valeur choisie du facteur d'oubli.

## 8.4 Description de la métrique PVRP

Notre méthode d'ajustement du facteur d'oubli est principalement fondée sur une nouvelle métrique. Basée sur de simples indicateurs temporels du signal. Cette métrique permet, à partir du produit de la valeur crête et de la valeur efficace, d'améliorer le choix de la valeur du facteur d'oubli utilisée dans l'algorithme du filtre de Volterra adaptatif RLS [Benkada et al., 2018].

Le signal d'erreur égal à l'écart entre le signal de sortie du filtre adaptatif et le signal désiré, réponse du système à identifier, est idéalement un signal à énergie finie avec une amplitude évanouissante. Pratiquement, le signal d'erreur prend rarement cette forme théorique, avec toutefois un aspect impulsionnel plus ou moins important et une énergie infinie.

Ces deux derniers attributs du signal, à savoir, le caractère impulsionnel et l'énergie du signal, représentent les caractéristiques dégradantes principales du signal d'erreur, en raison du défaut de poursuite des variations rapides du signal d'entrée. La métrique proposée est basé sur l'observation empirique des résultats obtenus. Elle combine le rôle des deux caractéristiques dégradantes dans la détérioration du signal d'erreur, cela se traduit formellement par le produit de la valeur crête pour l'aspect impulsionnel, et de la valeur efficace représentant l'énergie du signal d'erreur. Ce produit valeur crête-valeur efficace, que l'on notera **PVRP (Peak Value-RMS Product)**, est donné par :

$$\text{PVRP} = e_{\text{pv}} \times e_{\text{rms}} \quad (8.4)$$

Où la valeur crête (peak value)  $e_{\text{pv}}$  est donnée par

$$e_{\text{pv}} = \frac{e_{\text{max}} - e_{\text{min}}}{2} \quad (8.5)$$

Avec  $e_{\text{min}}$ ,  $e_{\text{max}}$  sont les erreurs minimum et maximum respectivement.

La valeur efficace de l'erreur (RMSE) est donnée par

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{k=1}^L e_k^2(n)} \quad (8.6)$$

Où  $L$  est la longueur du signal d'erreur.

## 8.5 Algorithme de minimisation du PVRP

La métrique PVRP est à la base d'un algorithme permettant l'utilisation de la méthode proposée pour l'amélioration du choix du facteur d'oubli, qui est une étape cruciale pour la réalisation des filtres adaptatifs en général. Une valeur judicieusement choisie de  $\lambda$  donnerait des coefficients des filtres identifiés, permettant un modèle épuré du système sous test, et une meilleure prédiction de ses réponses.

Cela revient à minimiser le signal d'erreur à la sortie du filtre adaptatif, à la fois d'un point de vue énergétique en minimisant l'un des paramètres énergétique de l'erreur (valeur efficace, variance, MSE, etc.), et également minimiser son caractère impulsionnel qui reste présent même avec une énergie faible du signal d'erreur si le système à identifier n'est pas tout à fait stationnaire. L'algorithme 8.1 ci-dessous, transcrit en code Matlab<sup>TM</sup>, permet de minimiser la valeur de la métrique PVRP avec un balayage sur la gamme la plus probable du facteur d'oubli selon l'application. Ce balayage des valeurs de  $\lambda$  est un balayage haute résolution, permettant une couverture maximale des impulsions du signal d'erreur, dont l'occurrence est imprévisible et qui sont réparties sur toute la gamme des valeurs de  $\lambda$ , et ainsi de tirer la valeur ajustée du facteur d'oubli  $\lambda_{\text{adj}}$ .

ALGORITHME 8.1 – Algorithme de minimisation du PVRP.

---

### Notations :

- $P$  : nombre de points de balayage de  $\lambda$
- $e_{\min}$ ,  $e_{\max}$  : erreurs minimale et maximale
- $e_{\text{pv}}$ ,  $e_{\text{rms}}$  : valeur crête et RMSE
- $\text{idx\_PVRP}_{\min}$  : index de la valeur minimale du PVRP
- $\lambda_{\text{adj}}$  : valeur ajustée du facteur d'oubli

### Initialisation :

```

 $\lambda = \text{linspace}(\lambda_{\min}, \lambda_{\max}, P)$ 
for  $i = 1 : P$ 
  for  $j = 1 : L$ 
    Exécuter l'algorithme RLS en utilisant  $\lambda_i$ 
     $e_{\max}(\lambda_i) = \max [e(\lambda_i)]$ 
     $e_{\min}(\lambda_i) = \min [e(\lambda_i)]$ 
     $e_{\text{pv}}(\lambda_i) = (e_{\max}(\lambda_i) - e_{\min}(\lambda_i))/2$ 
     $e_{\text{rms}}(\lambda_i) = \text{sqrt}(\text{mean}(e(\lambda_i).^2))$ 
  end
   $e_{\text{pv}}(\lambda) = [e_{\text{pv}}(\lambda_{\min}) \cdots e_{\text{pv}}(\lambda_i) \cdots e_{\text{pv}}(\lambda_{\max})]$ 
   $e_{\text{rms}}(\lambda) = [e_{\text{rms}}(\lambda_{\min}) \cdots e_{\text{rms}}(\lambda_i) \cdots e_{\text{rms}}(\lambda_{\max})]$ 
end
PVRP( $\lambda$ ) =  $e_{\text{pv}} \times e_{\text{rms}}$ 
PVRP $_{\min}$  =  $\min [\text{PVRP}(\lambda)]$ 

```

---

```

idx_PVRP_min = find(PVRP(λ) == PVRP_min)
λ_adj = λ(idx_PVRP_min)
    
```

---

## 8.6 Application de l'ajustement du facteur d'oubli

Nous considérons un filtre de Volterra adaptatif RLS du troisième ordre et d'étendue de mémoire  $M = 2$ , avec un signal d'excitation de type BGUNI. Une fréquence d'échantillonnage de 96 kHz est employée, laquelle en plus de son emploi précédemment pour l'estimation de noyaux de Volterra, elle permettra ici d'utiliser un balayage à haute résolution du signal d'erreur en fonction du facteur d'oubli à l'aide du calcul haute performance.

L'algorithme de minimisation PVRP est ensuite appliqué au signal d'erreur obtenu après l'opération d'estimation du noyau de Volterra, afin de déduire la valeur ajustée du facteur d'oubli, qui est capable de nous fournir les prédictions souhaitées des distorsions du système haut-parleur.

Selon l'algorithme de minimisation PVRP développé ci-dessus, un balayage PVRP a été effectué en fonction du facteur d'oubli. Ce balayage a été réalisé en plusieurs étapes avec un nombre croissant d'itérations. Nous avons d'abord réalisé un balayage pour des valeurs de  $\lambda$  entre 0 et 1, à l'aide de 100 points (nombre d'itérations de la boucle de balayage), afin de voir l'allure générale du graphe PVRP en fonction du facteur d'oubli  $\lambda$ . Après l'utilisation de 1000 itérations (1000 points de balayage), nous avons pu constater que les valeurs de la PVRP pour  $\lambda < 0,8$ , n'étaient pas représentées sur le graphe, correspondant à des valeurs soit infinies (inf), ou (NaN : "Not a Number") caractéristiques de l'instabilité à l'intérieur de l'intervalle  $[0 - 0,8]$ . Ces balayages préliminaires ont permis ainsi de réaliser un balayage final en haute résolution avec 3000 itérations, centré sur le même intervalle  $[0,8 - 1]$  des valeurs de  $\lambda$  (Figure 8.2).

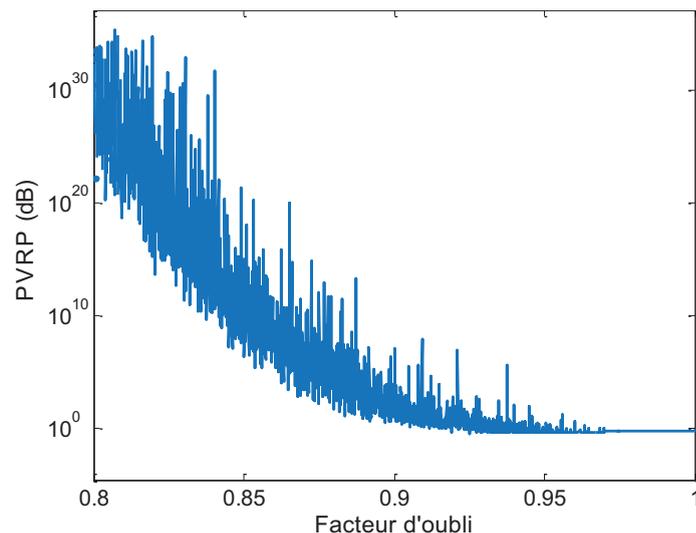


FIGURE 8.2 – Le PVRP en fonction du balayage du facteur d'oubli entre 0,8 et 1, pour un filtre de Volterra adaptatif RLS/96 kHz du troisième ordre avec  $M=2$  et avec un signal de type BGUNI.

L'examen de la Figure 8.2, montre qu'il a été permis à l'aide de ce balayage haute résolution d'obtenir des valeurs d'une grande précision du PVRP allant jusqu'à  $6,66.10^{-5}$ . Le PVRP commence avec des valeurs très grandes à partir de  $\lambda \approx 0,8$ , pour ensuite diminuer jusqu'à une valeur de 0,5 pour  $\lambda = 1$ , en passant par un intervalle de valeurs du creux de la courbe entre  $\lambda = 0,9$  et 0,94, et notamment avec un minimum pour la valeur  $\lambda = 0,924975$ , qui représente la valeur ajustée du facteur d'oubli  $\lambda_{adj}$ .

## 8.7 Discussion des résultats de simulation

L'analyse des résultats obtenus est basée sur la comparaison des diverses métriques prédites du haut-parleur, obtenues avec différentes valeurs du facteur d'oubli  $\lambda$ , avec les courbes et les valeurs expérimentales. Les Figures 8.3 à 8.12, montrent les courbes prédites des distorsions harmoniques, de la THD et des réponses en fréquence pour des valeurs du facteur d'oubli autour de la valeur ajustée  $\lambda_{adj}$ .

L'examen des cinq figures des distorsions harmoniques montre que les courbes prédites de la Figure 8.7 ( $\lambda = 0,924975$ ), ressemblent incontestablement aux courbes expérimentales. En outre, si abstraction est faite des ordres de grandeur des pourcentages de distorsion, les courbes des Figures 8.5, 8.9 et 8.11 ( $\lambda = 0,90256$ ,  $\lambda = 0,9414$  et  $\lambda = 0,98$  respectivement) présentent une certaine similitude avec les courbes expérimentales, cependant ceux de la Figure 8.3 ( $\lambda = 0,85$ ), ne représentent aucune similitude avec les courbes expérimentales. Les Figures 8.13, 8.14 et 8.15 sont des superpositions des courbes prédites et expérimentales, pour chacune des trois métriques. Ces figures montrent clairement la concordance entre les courbes prédites et les courbes mesurées pour toutes les métriques.

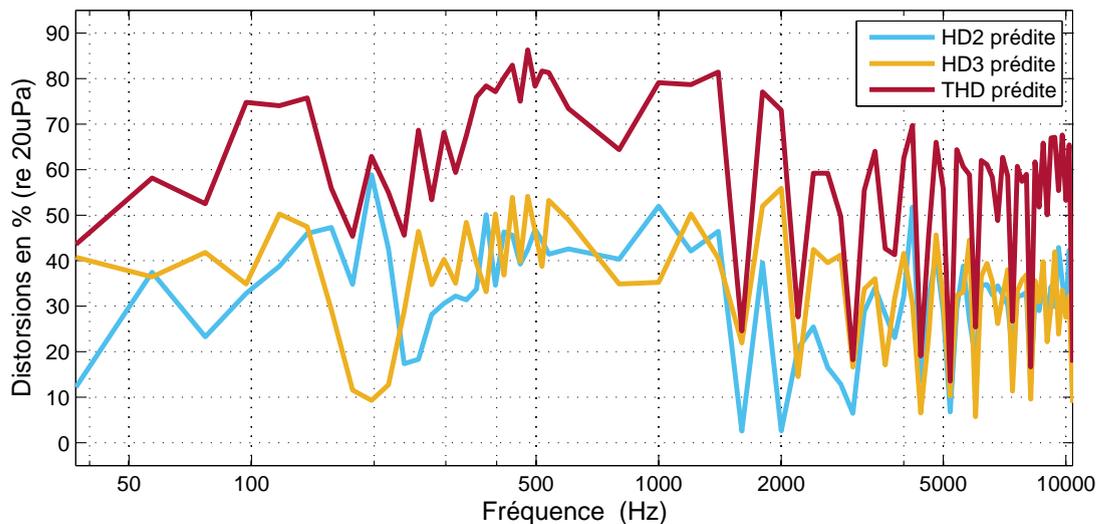


FIGURE 8.3 – Courbes prédites de la THD et des composantes de distorsion harmonique  $HD_2$  et  $HD_3$  ( $\lambda = 0,85$ ,  $MSE = 3,5381e+12$  et  $PVRP = 1,2478e+15$ ).

Par ailleurs, en comparant les cinq courbes prédites de la réponse en fréquence avec celles mesurées, nous remarquons d'emblée la même forme pour l'ensemble des courbes

prédites, cependant seule la courbe 8.8 obtenue avec  $\lambda = 0,924975$ , concorde avec celle de la courbe la plus proche de la courbe mesurée notamment dans la région des basses et moyennes fréquences (voir les deux courbes superposées de la Figure 8.16).

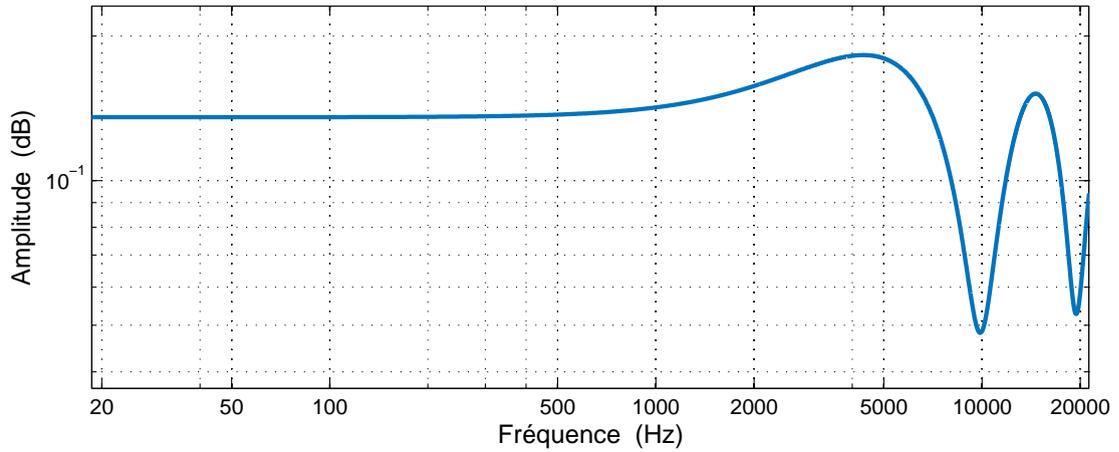


FIGURE 8.4 – Courbe prédite de la réponse en fréquence ( $\lambda = 0,85$ ,  $MSE = 3,5381e+12$  et  $PVRP = 1,2478e+15$ ).

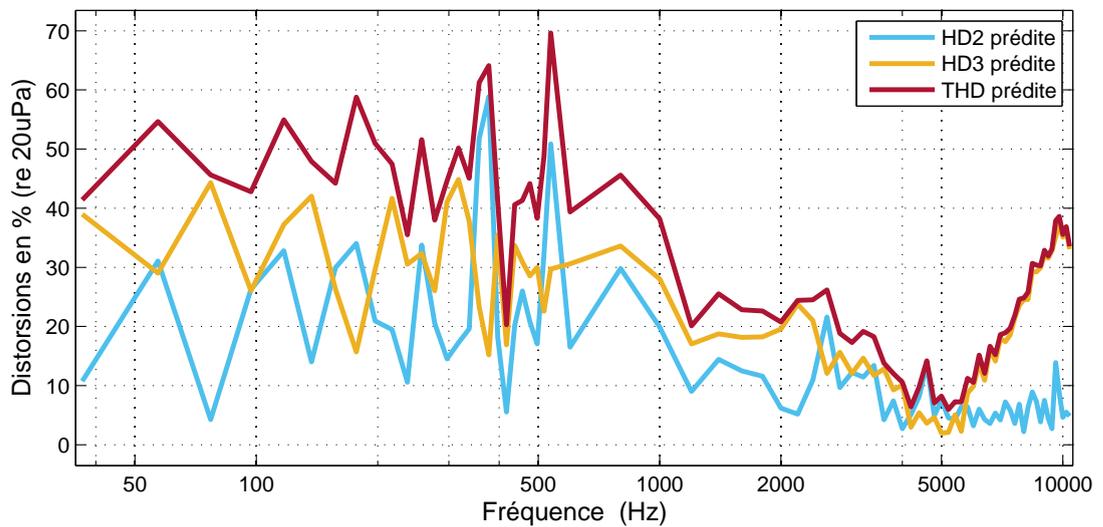


FIGURE 8.5 – Courbes prédites de la THD et des composantes de distorsion harmonique  $HD_2$  et  $HD_3$  ( $\lambda = 0,90256$ ,  $MSE = 0,0373$  et  $PVRP = 13,1876$ ).

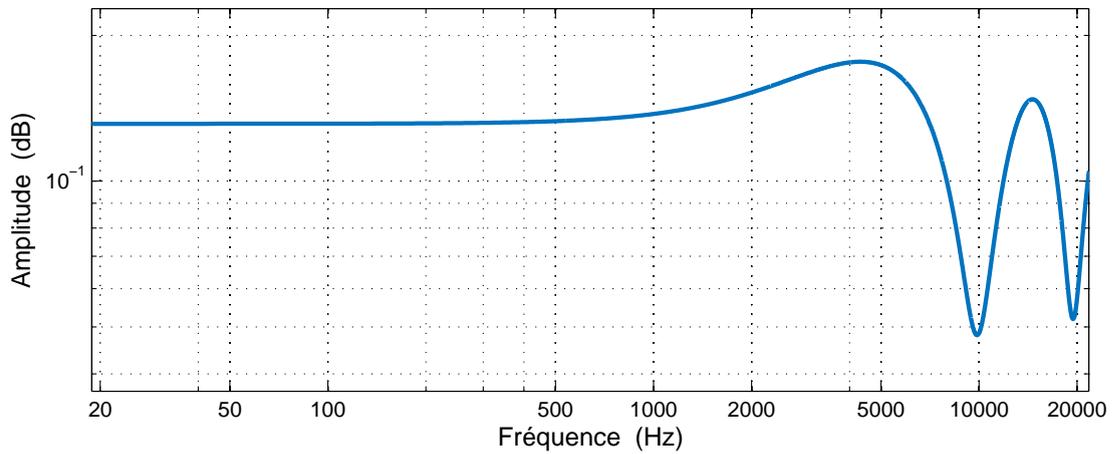


FIGURE 8.6 – Courbe prédite de la réponse en fréquence ( $\lambda = 0,90256$ ,  $MSE = 0,0373$  et  $PVRP = 13,1876$ ).

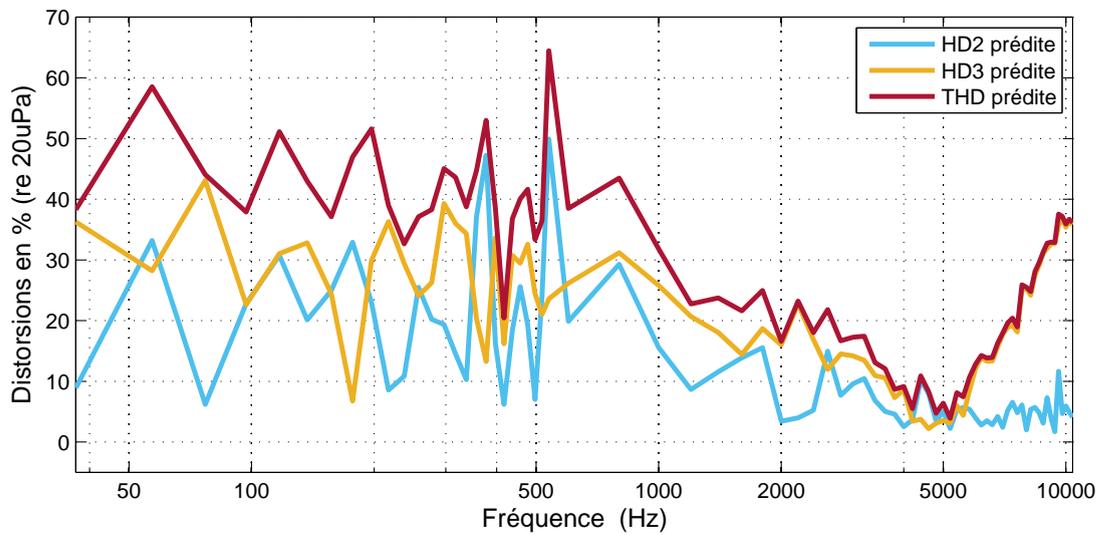


FIGURE 8.7 – Courbes prédites de la THD et des composantes de distorsion harmonique  $HD_2$  et  $HD_3$  ( $\lambda = 0,924975$ ,  $MSE = 0,0463$  et  $PVRP = 0,4146$ ).

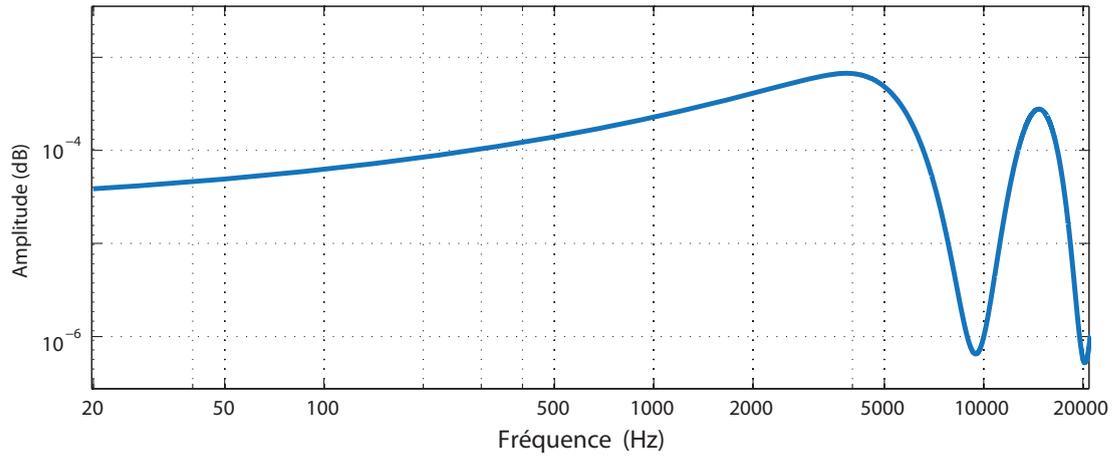


FIGURE 8.8 – Courbe prédite de la réponse en fréquence ( $\lambda = 0,924975$ ,  $MSE = 0,0463$  et  $PVRP = 0,4146$ ).

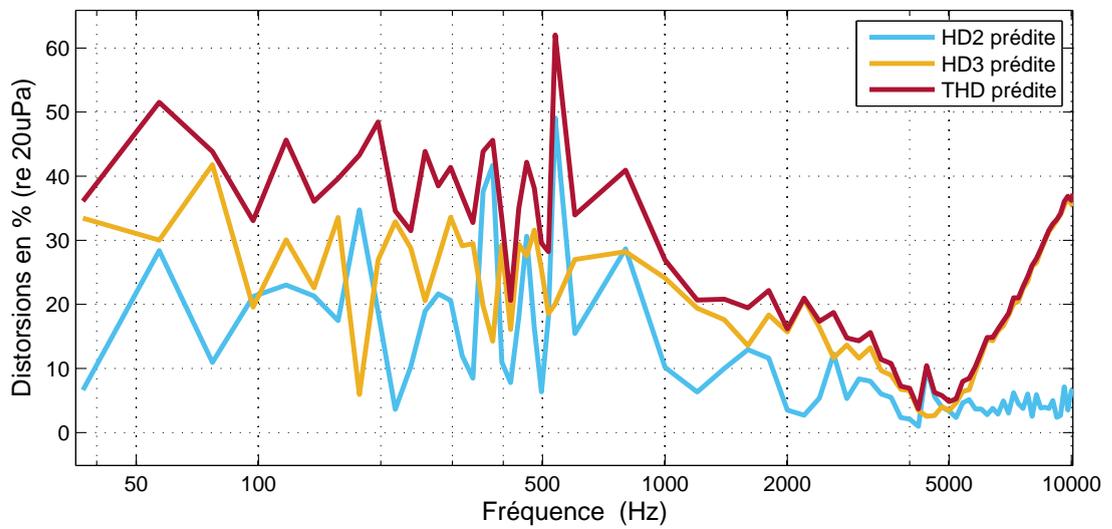


FIGURE 8.9 – Courbes prédites de la THD et des composantes de distorsion harmonique  $HD_2$  et  $HD_3$  ( $\lambda = 0,9414$ ,  $MSE = 0,0574$  et  $PVRP = 0,4626$ ).

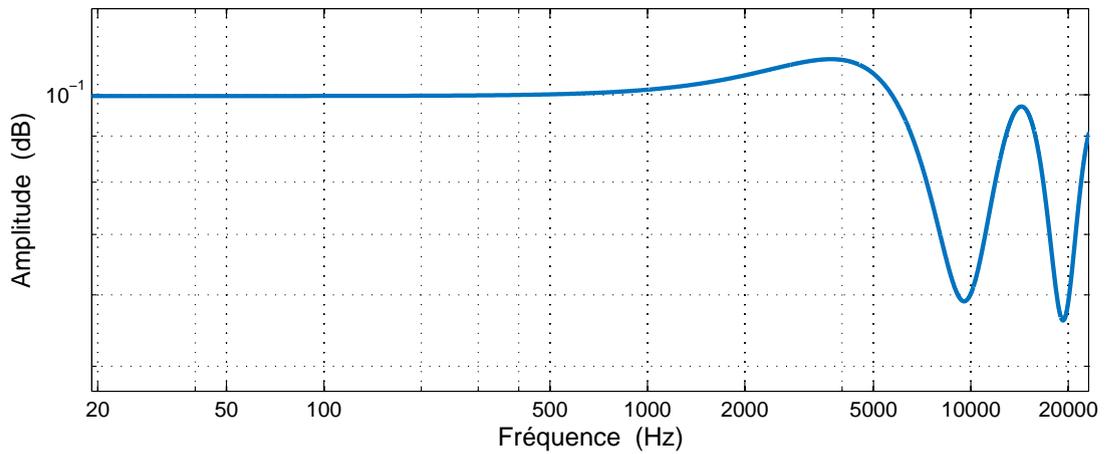


FIGURE 8.10 – Courbe prédite de la réponse en fréquence ( $\lambda = 0,9414$ ,  $MSE = 0,0574$  et  $PVRP = 0,4626$ ).

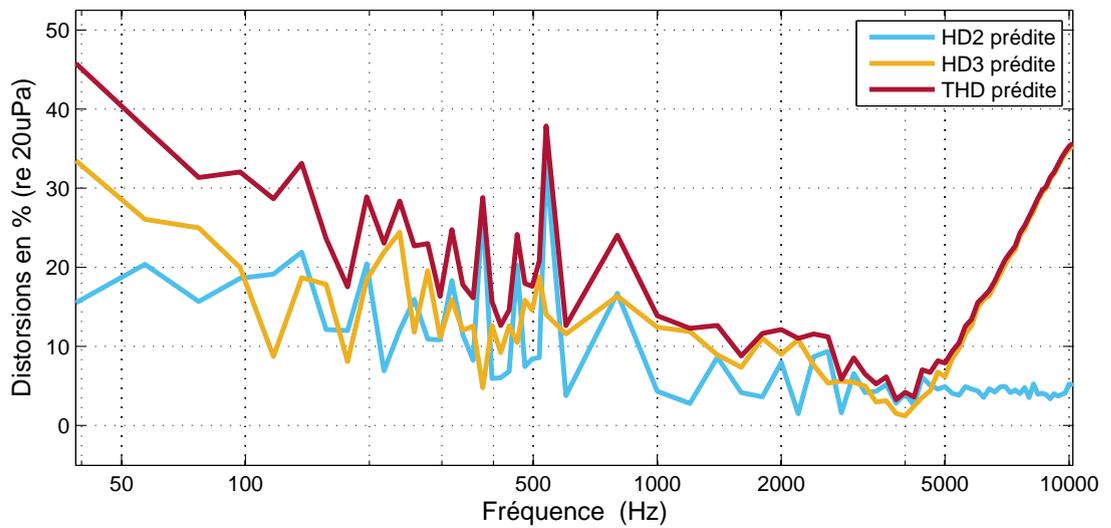


FIGURE 8.11 – Courbes prédites de la THD et des composantes de distorsion harmonique  $HD_2$  et  $HD_3$  ( $\lambda = 0,98$ ,  $MSE = 0,0961$  et  $PVRP = 0,6$ ).

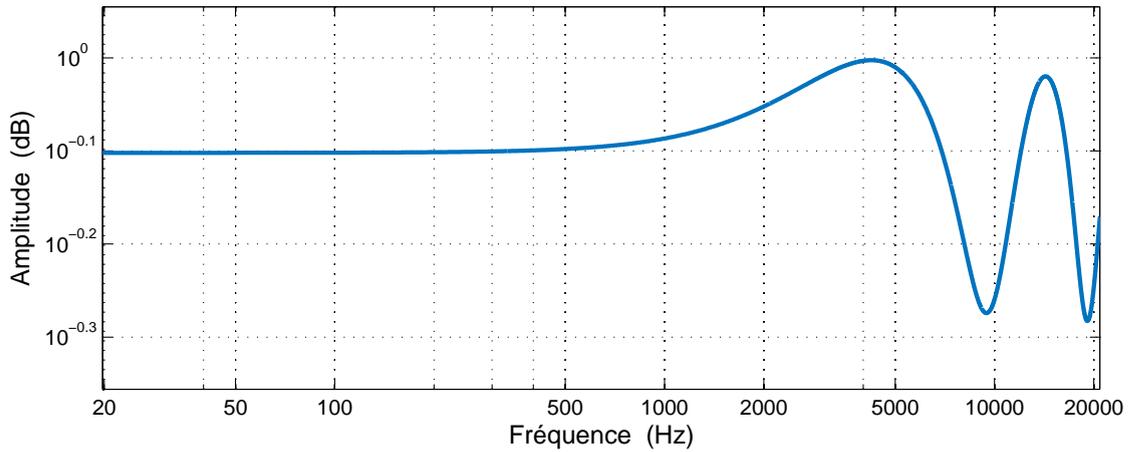


FIGURE 8.12 – Courbe prédite de la réponse en fréquence ( $\lambda = 0,98$ ,  $MSE = 0,0961$  et  $PVRP = 0,6$ ).

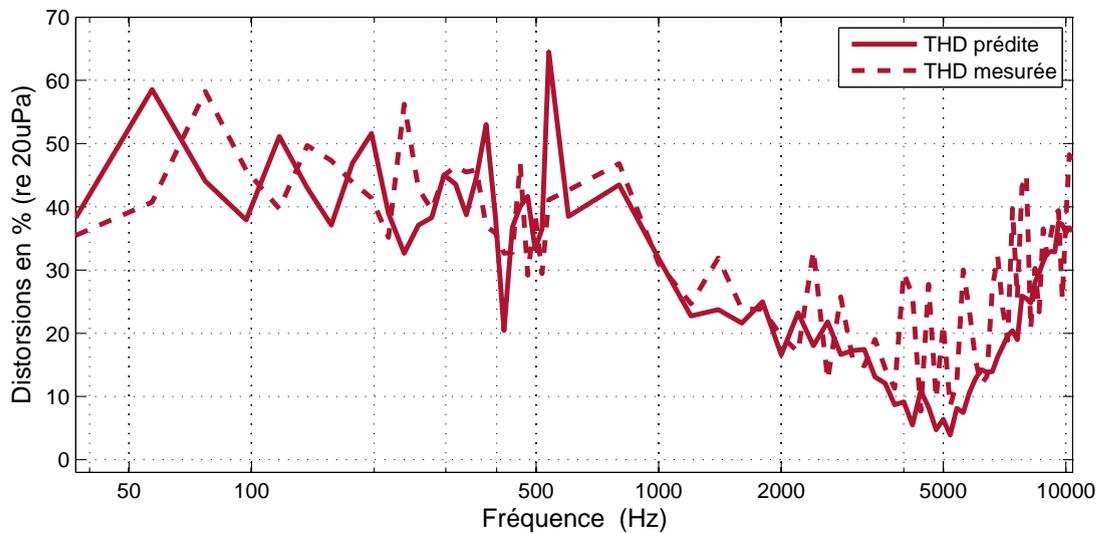


FIGURE 8.13 – Superposition de la distorsion harmonique totale (THD) mesurée avec la distorsion harmonique totale prédite, obtenue avec l'algorithme de Volterra RLS avec le signal BGUNI,  $f_s = 96$  kHz,  $M = 2$  et  $\lambda = 0,924975$ .

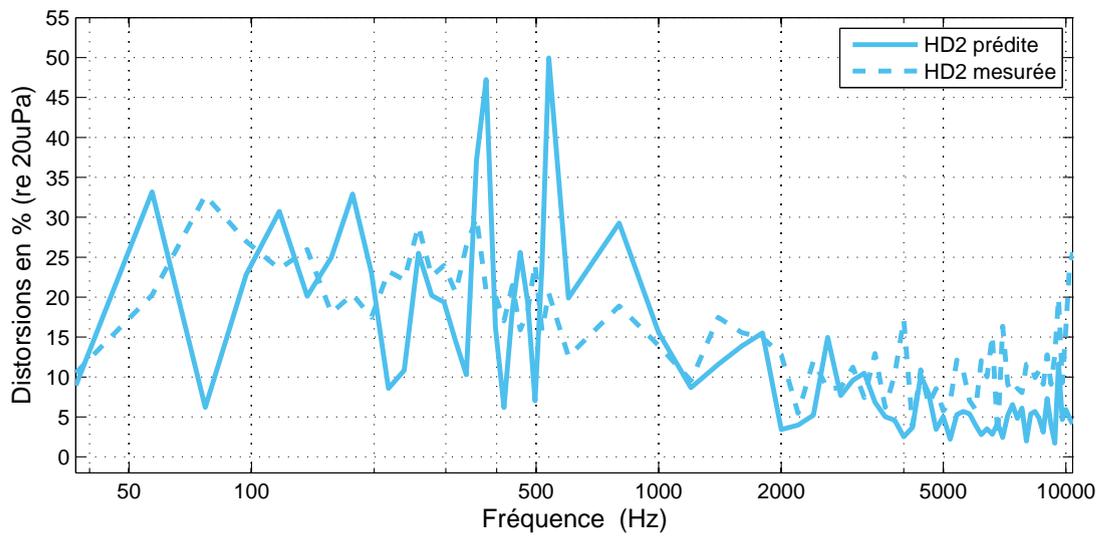


FIGURE 8.14 – Superposition de la seconde distorsion harmonique ( $HD_2$ ) mesurée avec la seconde distorsion harmonique prédite, obtenue avec l’algorithme de Volterra RLS avec le signal BGUNI,  $f_s = 96$  kHz,  $M = 2$  et  $\lambda = 0,924975$ .

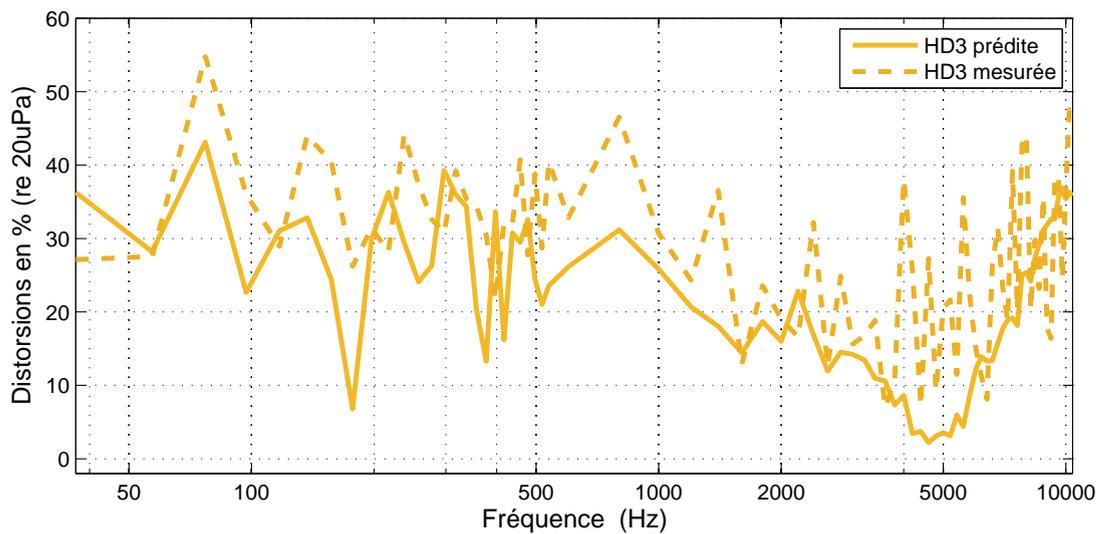


FIGURE 8.15 – Superposition de la seconde distorsion harmonique ( $HD_3$ ) mesurée avec la troisième distorsion harmonique prédite, obtenue avec l’algorithme de Volterra RLS avec le signal BGUNI,  $f_s = 96$  kHz,  $M = 2$  et  $\lambda = 0,924975$ .

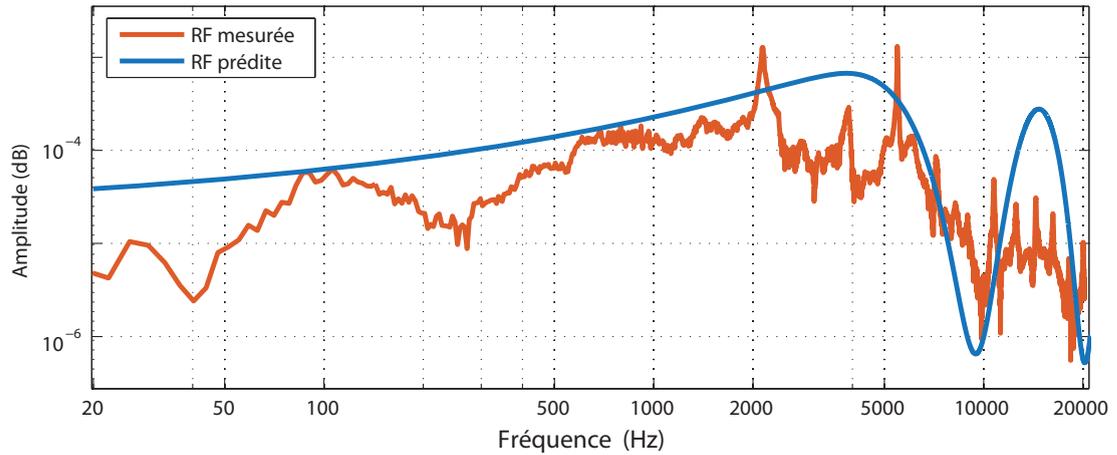


FIGURE 8.16 – Superposition de la réponse en fréquence mesurée avec la réponse en fréquence prédite, obtenue avec l’algorithme RLS adaptatif pour le signal BGUNI,  $f_s = 96$  kHz,  $M = 2$  et  $\lambda = 0,924975$ .

Les résultats de prédiction des distorsions d’intermodulation sont consignés dans le Tableau 8.1 ci-dessous. L’examen de ces résultats, montre une nette correspondance entre les trois couples de valeurs de la distorsion d’intermodulation prédites et mesurées, obtenues avec les deux valeurs de  $\lambda$  : 0,924975 et 0,9414.

$\lambda$	IMD (%)		IMD2 (%)		IMD3 (%)	
	Mesurée	Prédite	Mesurée	Prédite	Mesurée	Prédite
0,85	<b>119,28</b>	160,67	<b>89,69</b>	115,84	<b>95,61</b>	111,33
0,90256		139,2		76,26		116,45
0,924975		138,86		78,02		114,86
0,9414		114,79		83,5		118,29
0,98		149,55		84,58		123,33

TABLEAU 8.1 – Comparaison des valeurs des distorsions d’intermodulation mesurées avec les valeurs des distorsions d’intermodulation prédites, obtenues avec l’algorithme RLS adaptatif pour différentes valeurs de  $\lambda$  pour le signal BGUNI,  $f_s = 96$  kHz,  $M = 2$ .

Le Tableau 8.2 rassemble pour les cinq cas étudiés, les valeurs du PVRP et de la MSE pour chaque valeur correspondante de  $\lambda$ . Si on tient compte des meilleurs résultats obtenus avec  $\lambda_{\text{adj}} = 0,924975$ , parmi les cinq exemples, cela correspond à la valeur la plus petite du PVRP dans le tableau (PVRP = 0,4146). Alors, que la valeur minimale de la MSE = 0,0373, n’a pas réussi à fournir des résultats satisfaisants attendus selon ce critère de minimisation de l’erreur. Cela montre clairement l’efficacité de cette méthode d’ajustement du facteur d’oubli, qui a permis de tenir compte de la particularité de la nature du signal d’erreur d’estimation dans le cas des systèmes dynamiques non linéaires variant dans le temps.

$\lambda$	MSE	PVRP
0,85	$3,54 \cdot 10^{12}$	$1,25 \cdot 10^{15}$
0,90256	0,0373	13,1876
0,924975	0,0463	0,4146
0,9414	0,0574	0,4626
0,98	0,0961	0,6

TABLEAU 8.2 – Valeurs de la MSE et du PVRP pour les valeurs pertinentes du facteur d'oubli.

## 8.8 Conclusion

Dans ce chapitre, une nouvelle méthode pour l'ajustement de la valeur du facteur d'oubli dans les filtres de Volterra adaptatifs RLS a été proposée et développée.

La méthode proposée, à savoir la méthode du produit de la valeur crête et de la valeur efficace PVRP, est construite à partir de métriques simples du signal, c'est-à-dire la valeur crête et la valeur efficace, utilisées dans un algorithme d'ajustement permettant sa minimisation. Cette méthode améliore le choix de la valeur du facteur d'oubli utilisée dans l'algorithme du filtre de Volterra adaptatif RLS, pour l'identification de systèmes dynamiques à non stationnarité réduite.

Enfin, grâce à un algorithme basé sur un très grand nombre d'itérations pour permettre une meilleure précision dans le balayage du facteur d'oubli, combiné à des signaux suréchantillonnés, les résultats obtenus ont montré un très bon accord entre les métriques prédites du haut-parleur et les courbes et valeurs expérimentales. Ceci est la preuve de l'efficacité de la méthode proposée pour ajuster la valeur du facteur d'oubli dans les filtres adaptatifs RLS Volterra dans le cas de systèmes non linéaires peu variant dans le temps.

# Conclusion générale et perspectives

## Conclusion générale

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à l'identification des systèmes non linéaires à l'aide des filtres de Volterra adaptatifs. Nous avons choisi comme exemple d'application, le haut-parleur électrodynamique, un transducteur électroacoustique connu depuis son invention pour sa non-linéarité, comme beaucoup de capteurs et de transducteurs réels. L'effet direct de cette non-linéarité se matérialise sous forme de distorsions non linéaires, si embarrassantes pour les utilisateurs des systèmes à haut-parleurs en matière de gêne, d'inconfort à l'écoute et de manque d'intelligibilité, mais surtout pour les ingénieurs de conception de ces transducteurs, cherchant continuellement des solutions pour au moins les réduire à défaut de les annuler. En se basant sur cette identification, nous nous sommes donnés comme objectif, la modélisation de différentes métriques du haut-parleur électrodynamique : la distorsion harmonique totale THD, les composantes de distorsion harmoniques seconde  $HD_2$  et troisième  $HD_3$ , les distorsions d'intermodulation ( $IMD_2$ ,  $IMD_3$  et  $IMD$ ) et la réponse en fréquence.

En associant le formalisme de Volterra avec les deux principaux filtres adaptatifs LMS et RLS, nous avons construit un procédé d'identification complet et opérationnel des systèmes non linéaires. Le procédé d'identification dans sa globalité tient compte de la caractéristique faiblement non linéaire, dont sont caractérisés certains systèmes dynamiques non linéaires comme le haut-parleur électrodynamique, et en même temps prendre en considération le caractère non stationnaire des haut-parleurs réels qui est souvent négligé pour des raisons simplificatrices.

Nous avons mis à profit un grand nombre de résultats des travaux antérieurs en relation avec notre travail de thèse, afin de mieux cerner les différents facettes de la problématique, et afin de proposer les solutions les plus appropriées, capables de fournir des modèles des distorsions et de la réponse en fréquence les plus exacts possibles.

Des recherches bibliographiques et théoriques approfondies, nous ont été d'une grande utilité pour aborder un formalisme des plus complexes comme le formalisme de Volterra, et surtout aux détails de sa mise en œuvre qui ne sont pas explicités dans les références bibliographiques. A ce titre, un apport théorique important a été réalisé concernant la modélisation non linéaire et le modèle de Volterra. Ceci est requis si l'on compte maîtriser tous les aspects de la série de Volterra utilisée au centre d'une méthode complète d'identification, employée pour la modélisation de différents systèmes dynamiques faiblement non linéaires.

Le premier chapitre a permis d'énoncer un certain nombre de notions et de définitions fondamentales pour la suite de la thèse. Nous avons voulu souligner l'importance de la

non-linéarité dans les différents domaines de la science et des techniques modernes, et surtout, la particularité des systèmes non linéaires par rapport aux systèmes linéaires. Les différentes caractéristiques non linéaires, ont été amplement abordées, regroupées dans deux classes principales : la non-linéarité d'amplitude, et la non-linéarité de fréquence.

L'identification et les différentes étapes nécessaires pour cette procédure ont été détaillées. Ces différentes étapes ont été mises à profit dans la dernière partie de la thèse dédiée à l'application expérimentale. Nous avons présenté respectivement les différentes catégories de modèles linéaires et non linéaires, en mettant en avant la spécificité de chaque type de modélisation et le contexte de leur emploi. Les différents types de modèles ont été illustrés à l'aide d'exemples de méthodes usuelles ou parfois très spécifiques, servant à la modélisation des différents systèmes, selon la disponibilité des connaissances *a priori* sur le comportement du système dynamique réel sous identification.

Le second chapitre a servi de base pour le formalisme de Volterra, autour duquel tourne le modèle de Volterra adaptatif employé dans cette thèse. Le chapitre a été en outre l'occasion de montrer la complexité de la série de Volterra, en abordant ses différentes propriétés, qui sont essentielle à la fois pour sa compréhension et surtout sa mise en application sur des systèmes réels. Bien que la série de Volterra puisse être utilisée pour la description de la dynamique d'un large éventail de systèmes non linéaires, son emploi a toutefois été restreint à une catégorie de systèmes dynamiques dont la mémoire est courte, et la non-linéarité est relativement modérée. Il a été question également dans ce chapitre, de souligner l'importance de la capacité d'implémentation de la série de Volterra sous forme de filtre, dans laquelle un maximum de soin doit être apporté aux divers éléments de la série, tels que l'ordre de non-linéarité et l'étendue de mémoire, susceptibles de faire déborder le nombre de coefficients des noyaux, et du coup, accroître la charge de calcul.

Dans le troisième chapitre, nous nous sommes intéressés à l'étape centrale de la procédure d'identification à l'aide des filtres de Volterra adaptatifs, qui est l'estimation des noyaux. Il a été souvent question dans ce chapitre, du filtre de Wiener, qui est un outil incontournable dans le traitement de signal d'aujourd'hui, et qui est à l'origine de toutes les méthodes adaptatives développées. La solution de Wiener a été ensuite déterminée, par la résolution de l'équation de Wiener-Hopf, qui constitue le fondement des algorithmes LMS et RLS présentés. L'importance du choix de la structure des noyaux de Volterra en tant que filtres variables dans l'algorithme adaptatif, a été montrée, dépendant des performances requis en termes de convergence, de stabilité et de facilité d'implémentation. La présentation détaillées des algorithmes LMS et RLS, a permis de déduire les deux filtres de Volterra adaptatifs correspondant aux deux algorithmes. Nous avons évoqué les questions de la convergence, la stabilité et de l'initialisation des algorithmes adaptatifs étudiés, qui sont importants pour l'implémentation des algorithmes, qui seront mis à profit dans les chapitres suivants avec des systèmes dynamiques réels.

Dans le quatrième chapitre nous avons surtout montré la complexité des distorsions comme effet des caractéristiques non linéaires des systèmes en général. Ainsi, il a été important de décrire clairement les différents types de distorsion : distorsion linéaire, distorsion non linéaire, distorsion d'amplitude, distorsion de fréquence, etc. Chaque type de distorsion est accompagné d'une méthode d'évaluation appropriée, et ayant fait

l'objet parfois de plusieurs normes qui continuent de recevoir des révisions et des mises à jour.

Dans cette thèse, la distorsion non linéaire représente l'objet principal de la modélisation, dans le système haut-parleur identifié. Par conséquent, nous nous devons d'explorer les différentes causes responsables des distorsions présentes dans le haut-parleur. Il a été montré également l'insuffisance de certaines méthodes d'évaluation objective comme la distorsion harmonique ou la distorsion harmonique totale, ce qui a poussé les ingénieurs à imaginer d'autres méthodes objectives capables de fournir une information plus riche sur les distorsions, et surtout faciles d'interprétation. Une évaluation perceptive s'est même imposée afin de tenir compte de l'aspect subjectif des mesures de distorsion, afin de décrire au mieux les distorsions, en étroite corrélation avec les caractéristiques non linéaires réelles du haut-parleur.

Le chapitre cinq est en soi une monographie sur l'état de l'art de la modélisation du haut-parleur électrodynamique. Les différents types de modèles utilisés pour les haut-parleurs électrodynamiques sont considérés, en exploitant la richesse de la littérature dans le domaine. Les travaux des chercheurs qui se sont penchés sur la question de la modélisation des haut-parleurs électrodynamiques, durant les quatre dernières décennies, convergent autour de trois principales approches : paramétrique, non paramétrique et semi-paramétrique. Compte tenu de leur importance pour la compréhension du comportement général du haut-parleur électrodynamique, les modèles à paramètres localisés ont été abordés avec détail dans cette thèse. Nous avons enfin présenté une synthèse de cet état de l'art sur la modélisation du haut-parleur.

Le sixième chapitre, de la dernière partie de cette thèse, est consacré à l'identification du système haut-parleur à l'aide des filtres de Volterra adaptatifs. Nous l'avons entamé par la description des principales méthodes expérimentales de l'évaluation de la non-linéarité et des distorsions dans le haut-parleur, que sont : la courbe caractéristique, la fonction de cohérence, la réponse en fréquence, la mesure des distorsions harmoniques et de la distorsion harmonique totale et enfin la mesure des distorsions d'intermodulation. A l'aide des techniques d'évaluation employées, il nous a été possible de mieux saisir les non-linéarités du haut-parleur sous test. L'essentiel des informations tirées se résume comme suit :

- la non-linéarité du haut-parleur utilisé, qui est de type polyharmonique, avec une allure générale de type sigmoïde inverse ;
- la non-linéarité est étroitement liée à la fréquence de travail du haut-parleur et de son niveau d'excitation ;
- la bande passante du haut-parleur utilisé a été estimée expérimentalement entre 90 Hz à 9200 Hz ;
- les valeurs des distorsions harmoniques sont proportionnelles aux niveaux de la tension d'entrée ;
- la courbe de la THD est prédominante, d'abord par rapport à la troisième composante de la distorsion harmoniques  $HD_3$ , ensuite par rapport à la seconde composante de la distorsion harmonique  $HD_2$  ;
- la troisième composante de la distorsion d'intermodulation  $IMD_3$ , est supérieure à la seconde composante  $IMD_2$ .

Le chapitre a été l'occasion aussi pour examiner plusieurs considérations pratiques inhérentes à la simulation ultérieure des filtres de Volterra adaptatifs. En vue de la simulation des filtres de Volterra adaptatifs, ces considérations pratiques ont permis de porter le choix sur les deux fréquences d'échantillonnage de 24 et 96 kHz, et l'adoption de trois types de signaux d'excitation, que sont le bruit blanc gaussien de puissance à croissance linéaire (BGCLIN), le bruit blanc gaussien de puissance à croissance logarithmique (BGCLOG) et le bruit blanc gaussien uniforme (BGUNI). La construction du filtre de Volterra a consisté en l'obtention de 48 variantes des filtres de Volterra adaptatifs LMS et RLS. Ces filtres une fois simulés, ils ont permis l'estimation des vecteurs des filtres de coefficients constitués des noyaux de Volterra.

Dans le chapitre sept, nous avons mené une analyse des résultats de prédiction des différentes métriques du haut-parleur, et cela nous amène à tirer les conclusions suivantes :

- la valeur  $M = 2$  de l'étendue de mémoire, a permis les meilleures prédictions, juste suivie de la valeur  $M = 1$  ;
- il a été constaté une nette supériorité des résultats obtenus avec la fréquence 96 kHz devant ceux obtenus avec 24 kHz ;
- quels que soient les algorithmes adaptatifs et les fréquences d'échantillonnage employés, les résultats ont formellement montré l'avantage du signal BGUNI, devant le signal BGCLIN et BGCLOG ;
- parmi les deux algorithmes adaptatifs utilisés, l'algorithme RLS a permis le plus grand nombre résultats satisfaisants de prédiction, comparé aux résultats obtenus avec l'algorithme LMS
- sur les trois métriques prédites du haut-parleur, les distorsions harmoniques et la THD ont constitué les meilleurs résultats de modélisation à l'aide des filtres estimés, suivis des réponses en fréquence avec des courbes d'allures très acceptables par rapport à la courbe mesurée, avec des ordres de grandeurs très rapprochées. Les résultats de la prédiction des distorsions d'intermodulation se sont par contre révélés assez hétéroclites, là où les meilleurs résultats ont été réalisés avec seulement deux ou trois filtres parmi les 48 simulés.

La fin du chapitre était dédiée à l'évaluation des algorithmes de Volterra adaptatifs LMS et RLS, et l'avantage de l'algorithme RLS sur l'algorithme LMS en termes de convergence et de la stabilité a été affirmé. Nous avons montré en outre de manière concrète, en calculant la complexité en nombre de FLOPS des deux algorithmes utilisés, la complexité décrie de l'algorithme LMS par rapport à l'algorithme RLS, qui pouvait varier du simple au double, selon la nature des opérations arithmétiques exécutées. Compte tenu des insuffisances constatées dans certains résultats de prédiction des métriques du haut-parleur, nous nous sommes livrés à dresser, dans ce qui suit, les principaux facteurs qui y contribuent :

- bruit additionnel d'origines diverses, rendant difficile l'opération de filtrage adaptatif, supposant l'absence de bruit ;
- le comportement peu stationnaire du haut-parleur, pouvant causer des instabilités et une variation des propriétés des signaux au cours du fonctionnement du haut-parleur, ce qui entraîne une mauvaise poursuite des variations rapides de l'amplitude ;

– introduction de distorsions harmoniques par les équipements du procédé expérimental de mesure et d'identification, tels que l'amplificateur de puissance et l'amplificateur de mesure.

Dans le dernier chapitre, une nouvelle méthode pour l'ajustement de la valeur du facteur d'oubli dans les filtres de Volterra adaptatifs RLS a été présentée.

La méthode proposée, à savoir la méthode du produit de la valeur crête et de la valeur efficace PVRP, est construite à partir de métriques simples du signal, c'est-à-dire la valeur crête et la valeur efficace, utilisées dans un algorithme d'ajustement permettant la minimisation de la métrique PVRP. Cette méthode améliore le choix de la valeur du facteur d'oubli utilisée dans l'algorithme du filtre de Volterra adaptatif RLS.

Un haut-parleur électrodynamique a été utilisé comme système dynamique non linéaire peu variant dans le temps, pour étudier l'efficacité de la méthode proposée, afin de modéliser plusieurs métriques du haut-parleur, en se basant sur les filtres estimés à l'aide des filtres de Volterra adaptatif. Grâce à un algorithme basé sur un très grand nombre d'itérations, il a été permis d'effectuer un balayage du facteur d'oubli d'une très grande précision. Les résultats obtenus montrent un très bon accord entre les différentes métriques prédites du haut-parleur et les courbes et valeurs expérimentales. Ceci est la preuve de l'efficacité de la méthode proposée pour ajuster la valeur du facteur d'oubli dans les filtres adaptatifs RLS Volterra dans le cas de systèmes non linéaires peu variant dans le temps.

Enfin, notre travail s'est porté sur l'identification et la modélisation, appliquées au haut-parleur électrodynamique en tant qu'exemple de système dynamique faiblement non linéaire, et s'est basé sur des développements théoriques, des expériences, des simulations, des analyses, des études comparatives et des recherches pour l'amélioration des résultats de prédiction obtenus.

La qualité des résultats de prédiction trouvés, montre de façon claire que les modèles des Volterra adaptatifs conviennent parfaitement pour la modélisation des systèmes dynamiques faiblement non linéaires. Les modèles de Volterra adaptatifs combinent à la fois les avantages de la série de Volterra et celles des techniques adaptatives. L'efficacité de la série de Volterra repose sur les deux propriétés clés que sont l'ordre de non-linéarité et la mémoire. L'ordre de non-linéarité est représentatif de la complexité du système, alors que la mémoire est caractéristique du degré d'influence du passé du système sur son comportement dynamique actuel.

D'autre part, la contribution des techniques adaptatives est indiscutable dans le procédé d'identification, grâce à leur principe théorique basé sur les filtres de Wiener, qui reposent sur la résolution de l'équation de Wiener-Hopf, qui constitue le fondement des différentes approches d'estimation : approche par moindres carrés comme les algorithmes RLS, Fast RLS, Square-root RLS, etc., ou les approches du gradient stochastique à l'exemple des algorithmes LMS, NLMS, Leaky LMS, etc. Nous nous sommes rendu compte lors de leur mise œuvre, de la flexibilité des deux filtres adaptatifs LMS et RLS, et de leur parfaite convenance pour une implémentation programmable. Le filtrage adaptatif est tout à fait adapté pour une estimation en temps réel, nécessitant une connaissance approfondie de la nature du signal.

A ce titre, nous avons montré dans notre travail, en tenant compte des résultats

trouvés, que cette combinaison : série de Volterra/techniques adaptatives, a montré beaucoup d'efficacité et a réussi à fournir des prédictions des différentes métriques prédites du haut-parleur, d'une qualité très satisfaisante, que nous pu améliorer à l'aide de la nouvelle méthode PVRP développée. Nous pouvons estimer ainsi que notre travail a pu répondre à l'ensemble des questionnements de la problématique initiale de cette thèse, et surtout nous avons réussi à trouver ce compromis parmi les 48 filtres de Volterra adaptatifs LMS et RLS utilisés, tel qu'il a été énoncé dans l'hypothèse de notre travail, en l'occurrence, un compromis qui réside dans les résultats de prédiction des distorsions harmoniques, des distorsions d'intermodulation et de la réponse en fréquence, obtenus avec la série de Volterra du troisième ordre de non-linéarité et d'une étendue de mémoire  $M = 2$ , combinée à l'algorithme RLS, en utilisant une fréquence d'échantillonnage de 96 kHz et un signal d'excitation de type BGUNI avec un facteur d'oubli  $\lambda = 0,922$ .

## Perspectives

Un procédé complet et opérationnel d'identification du système haut-parleur à l'aide des filtres de Volterra adaptatifs a été développé. Ce procédé d'identification, a servi à la prédiction des différentes distorsions non linéaires dans le haut-parleur électrodynamique ; distorsion harmonique totale, composantes harmoniques de distorsion, distorsion d'intermodulation et la réponse en fréquence, à l'aide des noyaux de Volterra estimés d'une qualité très satisfaisante obtenus notamment avec l'algorithme d'adaptation RLS. Les modèles de de prédictions développés ont montré clairement un remarquable accord avec les courbes et les valeurs expérimentales, ce qui est très encourageant pour ouvrir l'horizon du sujet de recherche de cette thèse.

Par conséquent, comme perspectives de ce travail, il faut envisager de :

- se consacrer au problème de la compensation des distorsions non linéaires dans le haut-parleur électrodynamique, qui est une suite naturelle et logique du présent travail de thèse. Cependant, cette compensation doit réutiliser le même formalisme de Volterra adaptatif mis à profit dans cette thèse, afin de garder l'homogénéité d'un travail complet englobant : l'identification, la modélisation et la linéarisation ;
- ne pas se contenter du haut-parleur électrodynamique comme seule application, et exemple de système dynamique faiblement non linéaire, pour ainsi pouvoir vérifier la validité du procédé d'identification développé avec d'autres des systèmes différents ;
- convertir le procédé d'identification construit dans le domaine fréquentiel. Cela permet la modélisation d'autres paramètres très divers du haut-parleur autres que les distorsions et la réponse en fréquence, comme les paramètres de Small et Thiele ;
- étendre l'application de la méthode PVRP, servant à l'ajustement du facteur d'oubli dans l'algorithme RLS, à d'autres systèmes non linéaires utilisant des signaux d'excitations autres que le bruit blanc gaussien employé, afin d'optimiser son algorithme et de pouvoir le généraliser.

# Annexe A

## Caractéristiques du matériel expérimental

### A.1 Haut-parleur woofer-médium Nuandi Electronic modèle ND-MW08M50



FIGURE A.1 – Le haut-parleur woofer-médium Nuandi Electronic ND–MW08M50.

<b>Utilisation</b>	Home Theatre, Karaoké, Scène
<b>Puissance nominale</b>	110 W
<b>Diamètre de la bobine</b>	50 mm
<b>Diamètre de la membrane</b>	8 pouces
<b>Sensibilité</b>	94 dB
<b>Impédance</b>	8 Ohms
<b>Réponse en fréquence</b>	90 Hz - 8800 Hz

TABLEAU A.1 – Principales caractéristiques du haut-parleur woofer-médium Nuandi Electronic ND–MW08M50.

Paramètre	Symbole	Valeur	Unité
Fréquence de résonance	Fs	92	Hz
Résistance en courant continu de la bobine	Re	5,4	Ohm
Facteur de qualité mécanique	Qms	7,6	
Facteur de qualité électrique	Qes	0.48	
Facteur de qualité total	Qts	0,45	
Compliance mécanique	Cms	0,13	mm/N
Résistance mécanique des pertes de la suspension	Rms	1,75	Kg/s
Masse mobile effective	Mms	22,9	g
Efficacité demi-espace	Eff	1,3	%
Facteur de force	BL	12,2	T.m
Volume d'air équivalent à l'élasticité de la suspension Cas	Vas	8,3	litres
Surface de piston efficace	Sd	0,0214	m <sup>2</sup>
Excursion linéaire maximale	Xmax	5	mm
Inductance de la bobine mobile	Le	0,29	mH
Produit du rendement par la bande passante	EBP	192	

TABLEAU A.2 – Paramètres de Thiele et Small du haut-parleur woofer-médium Nuandi Electronic modèle ND-MW08M50.

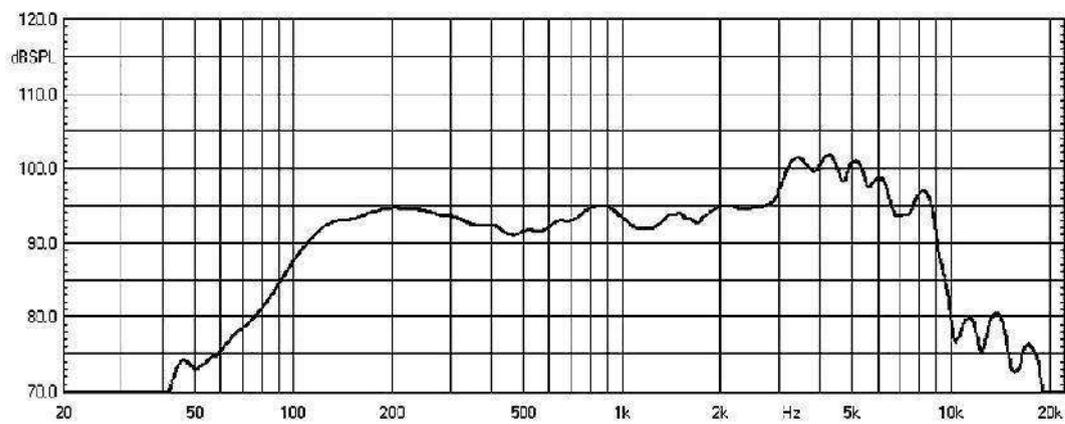


FIGURE A.2 – Courbe de la réponse en fréquence du haut-parleur.

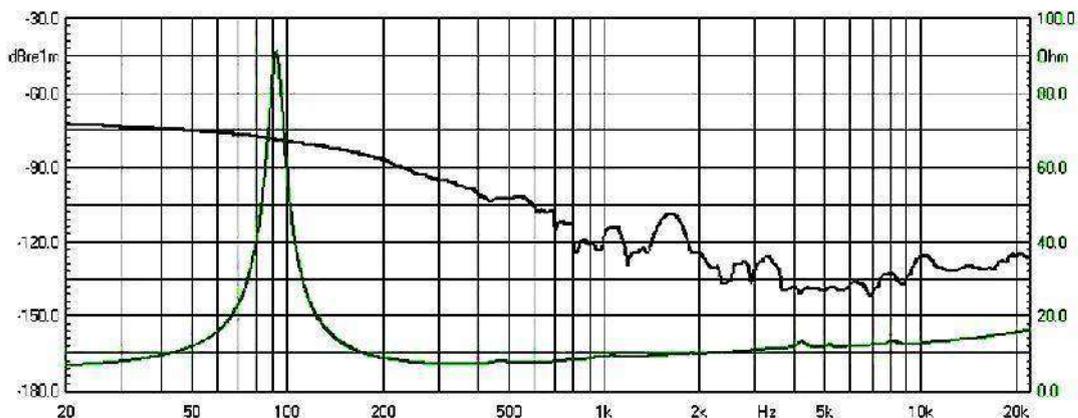


FIGURE A.3 – Courbes du module et de la phase de l'impédance du haut-parleur.

## A.2 Écran semi-infini

Le haut-parleur est monté sur un écran semi-infini en bois contre-plaqué de forme rectangulaire  $120 \times 150$  cm, au centre duquel est logé le haut-parleur à une hauteur de 145 cm du sol.

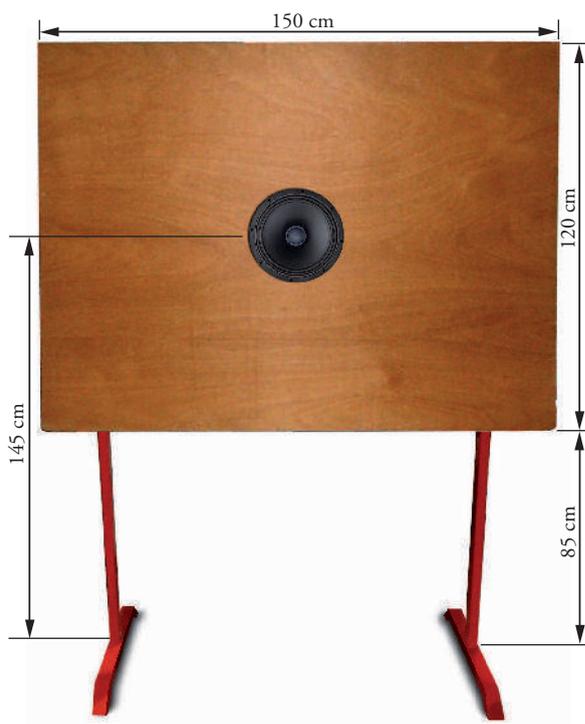


FIGURE A.4 – Écran semi-infini avec le haut-parleur.

### A.3 Interface audionumérique AVID M-AUDIO Fast Track C400

L'interface audionumérique utilisée dans nos mesures est une interface audio à 4 entrées et 6 sorties qui se connecte à l'ordinateur via un USB 2.0. Cette interface est dotée de connexions analogiques et numériques de haute qualité, de ports MIDI, de fonctions sophistiquées de contrôle et de monitoring, ainsi que d'une qualité audio exceptionnelle à des fréquences d'échantillonnage allant jusqu'à 96 kHz avec une résolution de 24 bits.



FIGURE A.5 – Image de l'interface audionumérique AVID M-AUDIO Fast Track C400.

<b>Transfert données</b>	USB 2.0
<b>Entrées</b>	2 Mic/Line XLR/TRS, 2 Inst TRS, 1 S/PDIF In, 1 Midi In
<b>Sorties</b>	1 S/PDIF Out, 4 Line out balanced analog RCA, 1 Midi Out
<b>Échantillonnage</b>	96 kHz
<b>Résolution</b>	24 bits
<b>Distorsion microphone</b>	0.0020% (-94dB) @ -1dBFS, 1kHz -106dB, A-weighted
<b>Impédance microphone</b>	50dB 2.2k ohms unbalanced, 4.4k ohms balanced
<b>Distorsion sortie analogique</b>	0.0022% (-93dB) @ -1 dBFS, 1kHz -106dB, A-weighted

TABLEAU A.3 – Principales caractéristiques de l'interface audionumérique AVID M-AUDIO Fast Track C400.

## A.4 Amplificateur de mesure Brüel & Kjær type 2610



FIGURE A.6 – Image de l'amplificateur de mesure Brüel & Kjær type 2610.

<b>Gammes de mesure</b>	10 $\mu$ V à 30V, 100 $\mu$ V à 300V avec atténuateur 10 :1
<b>Gamme fréquentielle</b>	2Hz à 200kHz ( $\pm 0,5$ dB), 10Hz à 50kHz ( $\pm 0,2$ dB)
<b>Gain</b>	-30 à +100 dB avec pas de 10 $\pm 0,05$ dB
<b>Impédance d'entrée</b>	1M $\Omega$    70pF
<b>Impédance de sortie</b>	$\sim 100\Omega$
<b>Polarisation microphone</b>	0,28 et 200 V d'une source de 20M $\Omega$
<b>Distorsion harmonique</b>	< 0,01% à 1kHz, < 0,1% à 50kHz. Charge Max. 50k $\Omega$    200pF
<b>S/N</b>	$\sim 100$ dB à la position Référence "100mV"

TABLEAU A.4 – Principales caractéristiques de l'amplificateur de mesure Brüel & Kjær type 2610.

### Caractéristiques importantes

#### Gammes de mesure :

10 V à 30 V FSD.

#### Gamme de fréquence (sans filtres) :

2 Hz à 200 kHz (0,5 dB)

10 Hz à 50 kHz (0,2 dB)

#### Gain (pour sortie 1V FSD) :

De -30 à +100 dB sélectionnable sur des pas de 10 0,05 dB

#### Distorsion harmonique :

Section d'entrée : < 0,01 % à 1 kHz, < 0,1 % à 50 kHz. charge Max. 5 k || 200 pF

Section de sortie : < 0,1 % à 1 kHz. < 0,3 % à 50 kHz. charge Max. 10 k || 200 pF

#### Rapport signal sur bruit :

Approximativement 100 dB à la position de référence "100 mV".

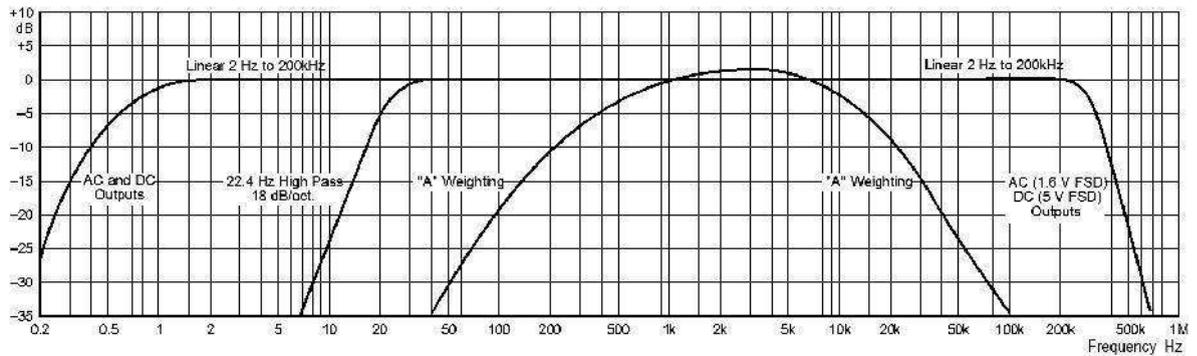


FIGURE A.7 – Réponse en fréquence de l'amplificateur de mesure Brüel & Kjær type 2610.

### A.5 Microphone 1/2" Brüel & Kjær type 4189

C'est un microphone universel d'une gamme fréquentielle de 20 kHz, conçu pour les mesures de haute précision en champ libre avec une sensibilité élevée.



FIGURE A.8 – Microphone 1/2" Brüel & Kjær type 4189

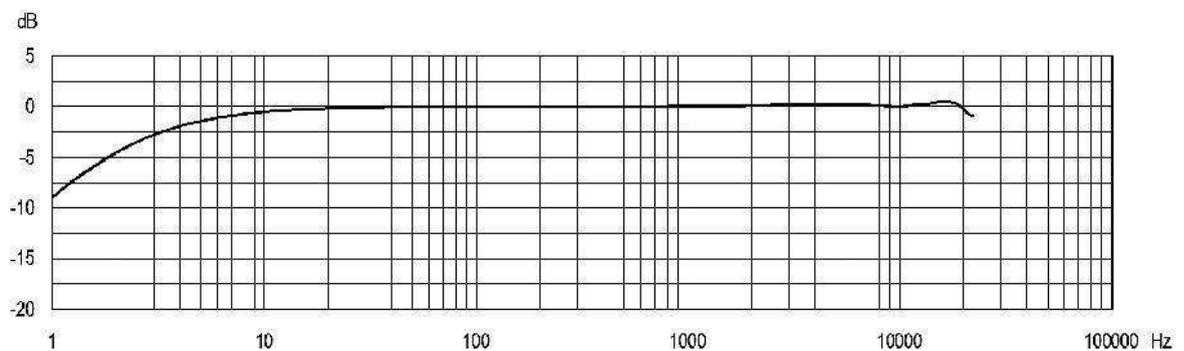


FIGURE A.9 – Réponse en fréquence du Microphone 1/2" Brüel Kjær type 4189.

Réponse	Champ libre
Sensibilité	50 mV/Pa
Gamme fréquentielle	6,3 Hz à 20 kHz
Polarisation	0 V (pré-polarisé)
Norme	IEC 651 Type 1
Distorsion limite 3 %	146 dB
Température	-30 à +150°C

TABLEAU A.5 – Principales caractéristiques du Microphone 1/2" Brüel Kjør type 4189.

## A.6 Amplificateur de puissance ALTON SA-680



FIGURE A.10 – Amplificateur de puissance ALTON SA-680 utilisé.

### A.6.1 Caractéristiques importantes

Puissance électrique : 120 W

Réponse en fréquence : 80 Hz – 16 kHz

THD (1kHz) < 0,5 % (4–6 Ohms)

Gain : 20 dB

# Bibliographie

- Norme Internationale IEC 60581-10 Équipements et systèmes électroacoustiques haute fidélité; Valeurs limites des caractéristiques - Dixième partie : Casques. Première édition, Septembre 1986a.
- Norme Internationale IEC 60581-7 Équipements et systèmes électroacoustiques haute fidélité; Valeurs limites des caractéristiques - Septième partie : Haut-parleurs. Première édition, Mai 1986b.
- Norme Internationale IEC 268-2 1991, Equipements pour systèmes électroacoustiques – Partie 2 : Explications des termes généraux et méthodes de calcul. Amendement 1, Mai 1991.
- Norme Internationale IEC 60107-2, Méthodes de mesure applicables aux récepteurs de télévision - Partie 2 : Voies son - Méthodes générales et méthodes pour voies monophoniques. Deuxième édition, Février 1997.
- Norme Internationale ISO 226 :2003, Acoustique – Lignes isosoniques normales. Second édition, 2003.
- International Standard IEC 60268-5, Sound system equipment – Part 5 : Loudspeakers. Edition 3.1, Septembre 2007.
- Norme Internationale IEC 60268-16, Equipements pour systèmes électroacoustiques - Partie 16 : Evaluation objective de l'intelligibilité de la parole au moyen de l'indice de transmission de la parole. Edition 4.0, Septembre 2011.
- K. M. Al-Ali. *Loudspeakers : Modeling and Control*. Ph. d. thesis, engineering-mechanical, University of California at Berkeley, 1999.
- ATILF, CNRS, and Université de Lorraine. Dictionnaire du TLFi : Trésor de la langue Française informatisé [en ligne]. Disponible sur : <http://www.atilf.fr/tlfi>, 2017. Consulté le 05 octobre 2017.
- S. Banerjee, L. Rondoni, and M. Mitra, editors. *Applications of Chaos and Nonlinear Dynamics in Science and Engineering*, volume 2. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012.

- D. Bard. *Compensation des non-linéarités des systèmes haut-parleurs à pavillon*. Thèse de Doctorat Es Sciences, Faculté Sciences et Techniques de l'Ingénieur, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2005.
- J. F. Barrett. The Use of Functionals in the Analysis of Non-linear Physical Systems. *Journal of Electronics and Control*, 15(6) :567–615, 1963.
- E. Bedrosian and S. O. Rice. Application of volterra-system analysis. P-4800, 1972.
- A. Benkada, A. Kaddour, and S. Karoui. Forgetting Factor Adjustment in RLS Adaptive Volterra Filter using a New Peak Value-RMS Product Method : Loudspeaker Distortion Modeling Case. *International Journal of Applied Engineering Research*, 13(8) :6297–6305, 2018.
- B. P. Bezruchko and D. A. Smirnov. *Extracting Knowledge From Time Series : An Introduction to Nonlinear Empirical Modeling*. Springer Series in Synergetics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2010.
- S. A. Billings. *Nonlinear System Identification : NARMAX Methods in the Time, Frequency, and Spatio-Temporal Domains*. Wiley, 1 edition, 2013.
- A. N. Birkett. *Nonlinear Adaptive Filtering with Application to Acoustic Echo Cancellation*. Ph.D. Thesis, Carleton University, 1997.
- F. Bolaños. Measurement and Analysis of Subharmonics and Other Distortions in Compression Drivers . In *Audio Engineering Society Convention 118*, May 2005.
- P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J. P. Richard, F. Rotella, and I. Zambettakis. *Modélisation et identification des processus, Tome 1*. Collection : Méthodes et pratiques de l'ingénieur. dirigé par P. Borne, Paris, 1992.
- J. Borwick, editor. *Loudspeaker and Headphone Handbook*. Reed Educational and Professional Publishing Ltd, Devon, 3rd edition, 2001.
- D. Bouvier, T. Hélie, and D. Roze. Représentation en séries de Volterra d'un modèle passif de haut-parleur électrodynamique avec suspension non-linéaire et perspectives pour identification. In *Congrès Français d'Acoustique*, Juin 2016.
- S. Braun. *Discover Signal Processing : An Interactive Guide for Engineers*. John Wiley Sons Ltd, 2008.
- A. Bright. *Active control of loudspeakers : an investigation of practical applications*. Ph.d. thesis, Acoustic Technology, Technical University of Denmark, Lyngby, Denmark, 2002.
- P. Brunet. *Nonlinear system modeling and identification of loudspeakers*. Ph. d. thesis, Northeastern University, Boston (Mass.), 2014.
- G. Budura. Nonlinear systems identification using the Volterra model. *Annals of the University of Craiova, Series : Automation, Computers, Electronics and Mechatronics*, 2(29)(1), 2005.

- H. J. Butterweck. About Doppler nonlinearities in loudspeakers. In *International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP-89*, pages 2061–2063, May 1989.
- R. C. Cabot, B. Hofer, and R. Metzler. *Standard Handbook of Broadcast Engineering*, chapter 13.3 : Nonlinear Audio Distortion. McGraw-Hill video/audio series McGraw-Hill standard handbooks. McGraw-Hill Professional, 2005.
- B. Carlsson. *Recursive identification*. Uppsala Universitet Institutionen För Informationsteknologi, September 2016.
- M. Colloms. *High performance loudspeakers*. Pentech Press Limited, London, 4th edition, 1991.
- P.-L. de Nanteuil. *Dictionnaire encyclopédique du son*. Dunod, Paris, May 2008.
- P. S. R. Diniz. *Adaptive filtering : Algorithms and practical implementation*. Springer, 3rd ed. edition, 2008.
- A. Dobrucki. Nonlinear Distortions in Electroacoustic Devices. *Archives of Acoustics*, 32(2) :437–460, 2011.
- M. Dodd, W. Klippel, and J. Oclew-Brown. Voice Coil Impedance as a Function of Frequency and Displacement. In *Audio Engineering Society Convention 117*, Oct 2004.
- V. Duindam, A. Macchelli, S. Stramigioli, and H. Bruyninckx. *Modeling and Control of Complex Physical Systems : The Port-Hamiltonian Approach*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.
- M. Dunn. *The Volterra Series and its Application*. Mark Dunn (Standard Copyright License), 3rd edition, 2005.
- P. Eykhoff Ed. Trends and Progress in System Identification. In *IFAC Series for Graduates, Research Workers and Practising Engineers*. Elsevier Ltd, 1981.
- G. Enzner, H. Buchner, A. Favrot, and F. Kuech. *Image, Video Processing and Analysis, Hardware, Audio, Acoustic and Speech Processing*, chapter Chapter 30 : Acoustic Echo Control. Academic Press Library in Signal Processing : Volume 4. Academic Press, 1 edition, 2014.
- A. Falaize and H. Thomas. Modélisation d’un haut-parleur électrodynamique : approche dans le cadre des Systèmes à Hamiltoniens à Ports. In *12e Congrès Français d’Acoustique*, Poitiers, France, Apr 2014.
- A. Farina and A. Farina. Real-Time Auralization Employing a Not-Linear, Not-Time-Invariant Convolver. In *Audio Engineering Society Convention 123*, New York, USA, Oct 5–8 2007.
- A. Farina, A. Bellini, and E. Armelloni. Non-Linear Convolution : A New Approach For The Auralization Of Distorting Systems. In *110th Audio Engineering Society Convention Paper*, Amsterdam, The Netherlands, May 12–15 2001.

- G. Favier and T. Bouilloc. Identification de modèles de Volterra basée sur la décomposition PARAFAC. In *GRETSI' 2009*, 2009.
- M. Fréchet. *Sur quelques points du calcul fonctionnel*. Thèse de doctorat ès sciences, sciences mathématiques, Faculté des sciences de Paris, 1906.
- A. Fuchs. *Nonlinear Dynamics in Complex Systems Theory and Applications for the Life-, Neuro- and Natural Sciences*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.
- L. Gan. *Adaptive Digital Predistortion of Nonlinear Systems*. Doctoral thesis, Faculty of Electrical and Information Engineering, Graz University of Technology, Austria, April 2009.
- F. X.Y. Gao and W. M. Snelgrove. Adaptive Linearization of A Loudspeaker. In *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, pages 3589–3592, May 14–17 1991.
- A. Gelb, V. Vander, and E. Wallace. *Multiple-input describing functions and nonlinear system design*. McGraw-Hill Electronic Sciences Series. McGraw-Hill book Company, New York, 1968.
- B. Girod. *Digital Images and Human Vision*, chapter What's Wrong with Mean-squared Error, pages 207–220. Bradford Books. The MIT Press, London, 1993.
- G. C. Goodwin and R. L. Payne. Dynamic System Identification : Experiment Design and Data Analysis. In *Mathematics in Science and Engineering*, volume 136. Academic Press, New York, 1977.
- J. W. Graham and L. Ehrman. Nonlinear System Modeling and Analysis with Applications to Communications Receivers. Technical report, Signatron, Inc, US Department of Commerce, June 1973. Prepared for Rome Air Development Center, Distributed by National Technical Information Service.
- Harper Collins Publishers. Collins free online dictionary [en ligne]. Disponible sur : <http://www.collinsdictionary.com>, 2017. Consulté le 05 octobre 2017.
- M. H. Hayes. *Statistical Digital Signal Processing and Modeling*. John Wiley Sons, 1996.
- S. Haykin. *Adaptive filter theory*. Prentice-Hall, New Jersey, 3rd edition, 1996.
- V. Hegde, C. Radhakrishnan, D. J. Krusienski, and W. K. Jenkins. Architectures and algorithms for nonlinear adaptive filters. In *Conference Record of the Thirty-Sixth Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers, Pacific Grove*, volume 2, pages 1015–1018, CA, USA, 2002.
- IEC. [international electrotechnical commission (IEC) [en ligne].
- L. Ihlenburg. Nichtlineare modelle fur elektroakustische ubertragungseinrichtungen. *Acta Acustica united with Acustica*, 57(4-5) :226–237(7), 1 April 1985.

- H. K. Jang and K. J. Kim. Identification of Loudspeaker Nonlinearities Using the NARMAX Modeling Technique. *J. Audio Eng. Soc.*, 42(1/2) :50–59, 1994.
- J. Jouhaneau. Haut-parleurs. *Techniques de l'ingénieur : Traité Télécoms*, base documentaire : E 5170, 10 mars 1993.
- P. Jumppanen. Lumped parameter analysis of a dynamic loudspeaker [en ligne]. Disponible sur : [http://www.har-bal.com/wp-content/uploads/Speaker\\_theory.pdf](http://www.har-bal.com/wp-content/uploads/Speaker_theory.pdf), 2013. Consulté le 27 Août 2017.
- A. Kaddour, J. M. Rouvaen, and M. F. Belbachir. Electrodynamic loudspeaker modelling and characterization. *Electronic Journal "Technical Acoustics"*, <http://www.ejta.org>, (20), 2003.
- T. Kailath. *Lectures on Wiener and Kalman filtering, International Centre for Mechanical Sciences*, volume No. 140. Springer-Verlag Wien GmbH, 2nd edition, 1981.
- A. J. M. Kaizer. *On the design of broadband electro-dynamical loudspeakers and multi-way loudspeaker systems*. Ph.d. thesis, Technical University of Eindhoven, 1986.
- A. J. M. Kaizer. Modeling of the Nonlinear Response of an Electrodynamic Loudspeaker by a Volterra Series Expansion. *Journal of the Audio Engineering Society*, Loudspeakers Vol 4 Transducers, measurement and evaluation vol. 32 vol 39 1984-1991 :pp. 84–96, June 1987.
- M. Karjalainen, V. Ikonen, A. Jarvinen, P. Maijala, L. Savioja, and A. Suuacute. Comparison of Numerical Simulation Models and Measured Low-Frequency Behavior of a Loudspeaker. In *Audio Engineering Society Convention 104*, May 16–19 1998.
- J. Katzenelson and L. A. Gould. The design of nonlinear filters and control systems. Part 1, journal = Information and Control. 5(2) :108–143, 1962.
- A. Y. Kibangou. *Modèles de Volterra à complexité réduite : estimation paramétrique et application à l'égalisation des canaux de communication*. Thèse de docteur en sciences, Université de Nice-Sophia Antipolis, France, Janvier 2005.
- W. Klippel. Loudspeaker nonlinearities – causes, parameters, symptoms. In *Audio Engineering Society Convention 119*, Oct 2005.
- W. Klippel. Tutorial : Loudspeaker Nonlinearities — Causes, Parameters, Symptoms. *J. Audio Eng. Soc.*, 54(10) :907–939, Oct. 2006.
- M. H. Knudsen, J. Grue Jensen, V. Julskjaer, and P. Rubak. Determination of Loudspeaker Driver Parameters Using a System Identification Technique. *J. Audio Eng. Soc.*, 37(9) :700–708, 1989.
- M. N. Kunchur. Probing the temporal resolution and bandwidth of human hearing. *Proceedings of Meetings on Acoustics*, 2(1) :050006, 2007.
- F. Lamnabhi-Lagarrigue. Volterra and Fliess Series Expansions for Nonlinear Systems. In *Encyclopedia of Life Support Systems EOLSS*. 2009.

- I. D. Landau and A. Besançon-Vauda. *Identification des systèmes*. Hermes Science Europe Ltd, Paris, 2001.
- K. Lashkari. Modified Volterra-Wiener-Hammerstein (MVWH) method for loudspeaker modeling and equalization. United States Patent, Jan. 18 2011. Patent No. : US 7.873,172 B2.
- B. Lindoff. On the Optimal Choice of the Forgetting Factor in the Recursive Least Squares Estimator. In *CiteSeerX*. April 1997.
- B. Lindoff and J. Holst. Convergence analysis of the RLS identification algorithm with exponential forgetting in stationary ARX-structures. *Int. J. Adapt. Control Signal Process.*, pages 1–22, 1999.
- L. Ljung. *System Identification : Theory for the User*. PTR Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J, 2nd edition, 1999.
- A. Loriga, P. Moyassari, D. Bernardini, G. Landi, F. Venturini, and E. Dumont. Non-linear Volterra model of a loudspeaker behavior based on Laser Doppler Vibrometry. *CoRR*, abs/1703.00384, 2017.
- S. Low and M. O. J. Hawksford. A Neural Network Approach to the Adaptive Correction of Loudspeaker Nonlinearities. In *Audio Engineering Society Convention 95*, Oct 1993.
- X. Lu. *Acoustic echo cancellation over nonlinear channels*. Phd thesis, Department of Electrical Computer Engineering McGill University, Montreal, Canada, January 2004.
- I. Mateljan and M. Sikora. Estimation of Loudspeaker Driver Parameters. In *"5th Congress of Alps-Adria Acoustics Association, Petřane, Croatia, Sep 12 – 14 2012*.
- V. J. Mathews. Adaptive polynomial filters. *IEEE Signal Processing Magazine*, 8(3) : 10–26, July 1991.
- J. H. McClellan, R. W. Schafer, and M. A. Yoder. *Signal Processing First*. Pearson/Prentice Hall, 2003.
- B. Merit. *Contribution à l'identification des non-linéarités des moteurs de haut-parleurs électrodynamiques sur la réalisation de moteurs tout aimant*. Thèse de doctorat en acoustique, Université du Maine, Le Mans, France, Septembre 2010.
- P.-Y. Michaud. *Distorsions des systèmes de reproduction musicale : protocole de caractérisation perceptive*. Thèse de doctorat, acoustique, Université Aix-Marseille, France, 2012.
- J. Moir. Just detectable distortion levels. *Wireless World*, 87(1541), February 1981.
- E. Mosca. *Optimal, Predictive, and Adaptive Control*. Prentice Hall International Edition, 1995.

- M. I. Mossi. *Non-linear AEC with loudspeaker modelling and pre-processing*. Phd of science thesis, University of Nice - Sophia Antipolis (France), Specialty : Automatics, Signal and Image Processing, Oct 17 2012.
- M. Najim. Systèmes non linéaires Méthode du premier harmonique. *Techniques de l'ingénieur : Traité Mesures et Contrôle*, Base documentaire : R7190, 10 mars 1998.
- K. S. Narendra and A. M. Annaswamy. *Stable Adaptive Systems*. Dover Publication, 2012.
- H. Nascimento. Adaptive filters. In R. Chellappa and S. Theodoridis, editors, *Signal Processing Theory and Machine Learning*, volume 1 of *Academic Press Library in Signal Processing*, chapter Chapter 12. Elsevier Ltd., Waltham, 2014.
- J. F. Novak. Performance of enclosures for low-resonance high-compliance loudspeakers. *IRE Transactions on Audio*, AU-7(1) :5–13, January 1959.
- A. Novák. *Identification of nonlinear systems in acoustics*. PhD thesis, Université du Maine, 2009.
- T. Ogunfunmi. *Adaptive Nonlinear System Identification : The Volterra and Wiener Model*. Springer, Santa Clara, USA, 2007.
- Oxford University Press. Oxford free online dictionary [en ligne]. Disponible sur : <https://en.oxforddictionaries.com>, 2017. Consulté le 05 octobre 2017.
- O. Pilloud. *Le radio-amateur : Préparation à l'examen technique, manuel de référence*. Paris, 3e éd. édition, 2007.
- I. Pitas and A. N. Venetsanopoulos. Nonlinear Digital Filters : Principles and Applications. In *The Springer International Series in Engineering and Computer Science*, volume 84. Kluwer Academic Publishers, Boston, Massachusetts, U.S.A., 1990.
- A. D. Poularikas and Z. M. Ramadan. *Adaptive filtering primer with Matlab<sup>TM</sup>*. Electrical Engineering Primer Series. CRC Press, taylor francis edition, 2006.
- B. A. Procházka, J. Uhlíř, P. W. J. Rayner, and N. G. Kingsbury. *Signal Analysis and Prediction*. Applied and Numerical Harmonic Analysis Series. Springer Science+Business Media, New York, 1998.
- H. Qian. Counting the Floating Point Operations (FLOPS). MATLAB Central File Exchange, No. 50608, Ver. 1.0, June 30 2015.
- N. Quaegebeur. *Vibrations non linéaires et rayonnement acoustique de structures minces de type haut-parleur*. Doctorat de l'école polytechnique, École Nationale Supérieure de Techniques Avancées - Unité de Mécanique, 25 octobre 2007.
- R. Ravaud, G. Lemarquand, T. Roussel, and V. Lemarquand. Ranking of the nonlinearities of electrodynamic loudspeakers. *archives of acoustics*, 35(1) :49–66, Jan 2010.

- R. A. Ribeiro, A. J. Serralheiro, and M. S. Piedade. Application of Kalman and RLS adaptive algorithms to non-linear loudspeaker controller parameter estimation : a case study. In *Proceedings. (ICASSP '05). IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, volume 3, pages iii/145–iii/148, 2005.
- M. Rossi. *AUDIO*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, 2007.
- W. J. Rugh. *Nonlinear system theory : The Volterra/Wiener approach*. Johns Hopkins University Press, Battimore, 1981.
- M. Schetzen. *Some problems in nonlinear theory*. Dsc thesis, Research Laboratory of Electronics, Department of Electrical Engineering, MIT, Cambridge-Massachusetts, July 6 1962.
- M. Schetzen. Measurement of the Kernels of a Non-linear System of Finite Order. *International Journal of Control*, 1(3) :251–263, 1965.
- M. Schetzen. A theory of non-linear system identification. *International Journal of Control*, 20(4) :577–592, 1974.
- M. Schetzen. Nonlinear system modeling based on the wiener theory. In *Proceedings of IEEE*, volume 69, page 1557–1573, December 1981.
- H. Schneider. *Improving sound systems by electrical means*. Ph.d. thesis, Department of Electrical Engineering Electronics Group (ELE), Technical University of Denmark, March 2015.
- H. Schurer. *Linearization of Electroacoustic Transducers*. Phd thesis, Laboratorium vor Netzwerktheorie, Universiteit Twente, 1997.
- H. Schurer, C. H. Slump, and O. E. Herrmann. Digital Compensation of Nonlinear Distortion in Loudspeakers. In *Proc. ProRISC/IEEE Benelux workshop on Circuits, Systems and Signal Processing*, pages 277–284, 1996.
- D. Self. *Audio Power Amplifier Design*. Focal Press, 6th edition, 2013.
- SiliconLabs. Improving ADC resolution by oversampling and averaging. Technical report, Silicon Laboratories Inc., 2013. AN118, Rev. 1.3 7/13.
- T. S. D. Singh and A. Chatterjee. A comparative study of adaptation algorithms for nonlinear system identification based on second order Volterra and bilinear polynomial filters. *Measurement*, 44(10) :1915 – 1923, December 2011.
- Richard H. Small. Vented-Box Loudspeaker Systems–Part 1 : Small-Signal Analysis. *J. Audio Eng. Soc*, 21(5) :363–372, 1973.
- J. Stoddard and G. Birpoutsoukis. Gaussian Process Regression for Generalized Frequency Response Function Estimation. *arXiv preprint arXiv :1710.09828*, 2017.
- E. Sturtzer. *Modélisation en vue de l'intégration d'un système audio de micro puissance comprenant un haut-parleur MEMS et son amplificateur*. Thèse de doctorat, L'institut national des sciences appliquées de Lyon, Avril 2013.

- E. Sturtzer, G. Pillonnet, G. Lemarquand, and N. Abouchi. Comparison between voltage and current driving methods of a micro-speaker. *Applied Acoustics*, 73(11) :1087 – 1098, 2012.
- S. Temme. Audio Distortion Measurements. Technical Report BO 0385-11, Brüel Kjær Application Note, 1993.
- TexInstruments. Oversampling Techniques using the TMS320C24x Family. Technical report, Texas Instruments Europe, June 1998. Literature Number : SPRA461.
- Neville Thiele. Loudspeakers in Vented Boxes : Part 1. *J. Audio Eng. Soc.*, 19(5) : 382–392, May 1971.
- K. Thorborg, C. J. Struck, and A. D. Unruh. An Improved Electrical Equivalent Circuit Model for Dynamic Moving Coil Transducers. In *Audio Engineering Society Convention 122, Vienna – Austria*, May 5 – 8 2007.
- C. Toumazou, N. Battersby, and S. Porta, editors. *Circuits and Systems Tutorials : Iscas '94*. Wiley-IEEE Press, London, 1995.
- P. T. Troughton. *Simulation Methods for Linear and Nonlinear Time Series Models with Application to Distorted Audio Signals*. Phd thesis, Department of Engineering, Clare College, University of Cambridge, UK, June 1999.
- Y.-T. Tsai, Y. Lee, and J. H. Huang. Precision Identification of Nonlinear Damping Parameter for a Miniature Moving-Coil Transducer. *World Academy of Science, Engineering and Technology*, 79 :990–994, July 27 2013.
- J. Tsimbinos. *Identification and Compensation of Nonlinear Distortion*. Phd thesis, Institute for Telecommunications Research, School of Electronic Engineering, University of South Australia, February 1995.
- M. Tsujikawa, T. Shiozaki, Y. Kajikawa, and Y. Nomura. Identification and elimination of second-order nonlinear distortion of loudspeaker systems using digital Volterra filter. In *2000 10th European Signal Processing Conference*, pages 1–4, Tampere, Finland, April 2000.
- L. Vega and H. Rey. *A Rapid Introduction to Adaptive Filtering*. Springer Briefs in Electrical and Computer Engineering. Springer Heidelberg, 2013.
- D. Viault and B. Boucher. Systèmes non linéaires Méthode du premier harmonique. *Techniques de l'ingénieur. Informatique industrielle*, base documentaire : R7190, 10 Janvier 1983.
- A. Voishvillo, A. Terekhov, E. Czerwinski, and S. Alexandrov. Graphing, Interpretation, and Comparison of Results of Loudspeaker Nonlinear Distortion Measurements. *J. Audio Eng. Soc.*, 52(4) :332–357, April 2004.
- V. Volterra. *Theories of Functionals and of Integral and Integro-differential Equations*. Luigi Fantappiè, Blackie Son Limited, London, Glasgow, 1930. Authorized translation by M. LONG.

- Z. Vukić, L. Kuljača, D. Đonlagić, and S. Tešnjak. Nonlinear control systems. *Control Engineering Series*, 13, 2003.
- Jr. W. M. Leach. Loudspeaker Voice-Coil Inductance Losses : Circuit Models, Parameter Estimation, and Effect on Frequency Response. *J. Audio Eng. Soc*, 50(6) :442–450, 2002.
- K. Worden and G. R. Tomlinson. *Nonlinearity in Structural Dynamics Detection, Identification and Modelling*. Insitute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 2001.
- J. R. Wright. An Empirical Model for Loudspeaker Motor Impedance. *J. Audio Eng. Soc*, 38(10) :749 – 754, 1990.
- P. C. Young. *Recursive Estimation and Time-Series Analysis : An Introduction for the Student and Practitioner*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2nd edition, 2011.
- A. Zaknich. *Principles of Adaptive Filters and Self-learning Systems*. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing. Springer-Verlag, London, 2005.
- S. Zhao. *Performance Analysis and Enhancements of Adaptive Algorithms and Their Applications*. Phd thesis, School of Computer Engineering, Nanyang Technological University, Singapore, 2009.

## التعرف على الأنظمة اللاخطية الضعيفة باستخدام نماذج فولتيرا التكيفية: نمذجة تشوهات مكبرات الصوت.

الهدف من هذه الرسالة هو تطوير شكلية كاملة مبنية على نموذج فولتيرا، من أجل التعرف على مكبر الصوت الكهروديناميكي، كنظام لاخطي ضعيف. الغرض من ذلك هو نمذجة التشوهات اللاخطية (التشوه التوافقي الكلي، المكونات التوافقية وتشوه التضمين البيني) و إستجابة التردد لمكبر الصوت، إنطلاقاً من نتائج التعرف.

تم التعرف على مكبر الصوت باستخدام مرشحين تكيفيين لفولتيرا من نوع LMS و RLS. يتمثل ذلك في تقدير نوى فولتيرا، وفقاً لإشارات إدخال و مستويات إشارات إدخال مختلفة، لتردد الاستيعان، ونطاقات ذاكرة مختلفة لسلسلة فولتيرا. وقد أتاحت دراسة مقارنة للإمكانيات المختلفة التي توفرها المتغيرات المختلفة للمرشحات التي تم بناؤها، التحقق من أفضل طوبولوجيا للمرشحات التي تم إنجازها والتي يمكن أن تعطي أفضل جودة لنماذج تشوهات مكبر الصوت المنتبأ بها.

تم تطوير طريقة جديدة لتعديل قيمة عامل النسيان في مرشحات RLS التكيفية لفولتيرا. تم بناء الطريقة المقترحة المسماة حاصل ضرب قيمة الذروة وقيمة الجذر المتوسط (Peak Value-RMS Product) PVRP من خصائص بسيطة للإشارة، مستخدمة في خوارزمية تعديل لتقليل قيمة مقياس PVRP. أثبتت طريقة PVRP التي تم تطويرها فعاليتها في نمذجة تشوهات مكبر الصوت، مع مطابقة أفضل بين نماذج التشوهات المنتبأ بها والمنحنيات التجريبية للتشوهات.

### الكلمات الرئيسية:

التعرف، نظام لاخطي ضعيف، النمذجة، مكبر الصوت الكهروديناميكي، تشوه لاخطي، نموذج فولتيرا، مرشح تكيفي.

## Identification des systèmes faiblement non linéaires à l'aide des modèles de Volterra adaptatifs : Modélisation des distorsions des haut-parleurs

L'objectif de cette thèse est le développement d'un formalisme complet basé sur le modèle de Volterra, en vue de l'identification du haut-parleur électrodynamique, en tant que système faiblement non linéaire. La finalité est de modéliser les distorsions non linéaires (distorsion harmonique totale, composantes harmoniques, et distorsion d'intermodulation) et la réponse en fréquence du haut-parleur, à partir des résultats d'identification.

L'identification du haut-parleur a été réalisée à l'aide des filtres adaptatifs de Volterra LMS et RLS. Elle consiste en l'estimation des noyaux de Volterra, en fonction de différents signaux d'excitation, de niveaux d'excitation, de la fréquence d'échantillonnage, et de diverses étendues de mémoire de la série de Volterra. Une étude comparative des différentes possibilités offertes par les différentes variantes des filtres construits, a permis de valider les meilleures topologies de filtres réalisés qui ont pu donner la meilleure qualité des modèles prédits des distorsions du haut-parleur.

Une nouvelle méthode pour l'ajustement de la valeur du facteur d'oubli dans les filtres de Volterra adaptatifs RLS a été développée. La méthode proposée appelée produit de la valeur crête et de la valeur efficace PVRP (Peak Value-RMS Product), est construite à partir de caractéristiques simples du signal, utilisées dans un algorithme d'ajustement permettant la minimisation de la métrique PVRP. La Méthode PVRP développée, s'est montrée fort efficace pour la modélisation des distorsions du haut-parleur, avec un meilleur accord entre les distorsions prédites et les courbes expérimentales des distorsions.

### Mots-clés :

Identification, système faiblement non linéaire, modélisation, haut-parleur électrodynamique, distorsion non linéaire, modèle de Volterra, filtre adaptatif.

## Identification of weakly non-linear systems using adaptive Volterra models: Modeling of loudspeaker distortions.

The objective of this thesis is the development of a complete formalism based on the Volterra model, for the identification of the electrodynamic loudspeaker, as a weakly non-linear system. The purpose is to model the nonlinear distortions (total harmonic distortion, harmonic components, and intermodulation distortion) and frequency response of the loudspeaker, from the results of identification.

The loudspeaker identification was made using LMS and RLS adaptive Volterra filters. It consists of the estimation of Volterra kernels, based on different excitation signals, excitation levels, sampling frequency, and various memory spans of the Volterra series. A comparative study of the different possibilities offered by the different variants of the filters built, made it possible to validate the best topologies of filters realized which could give the best quality of the predicted distortions models of the loudspeaker.

A new method for adjusting the forgetting factor value in the RLS Volterra adaptive filters has been developed. The proposed method called Peak Value-RMS Product (Peak Value-RMS Product) is built from simple signal characteristics, used in an adjustment algorithm that minimizes PVRP metrics. The PVRP method developed proved to be very effective in modeling loudspeaker distortion, with a better agreement between the predicted distortions and the experimental distortion curves.

### Keywords :

Identification, weakly nonlinear system, modeling, electrodynamic loudspeaker, nonlinear distortion, Volterra model, adaptive filter.