Table des Matières

0.1 Introduction 5

I Notions générales **7**

1 Notions générales **8**

1.1 Rappels d'algèbre linéaire 8

1.1.1 Notions de bases 8

1.1.2 Polynome caractéristique d'une matrice: 10

1.1.3 Produit matriciel de Kronecker 10

1.1.4 Exponentielle d'une matrice 12

1.2 Rappels danalyse 13

1.2.1 Convexité 13

1.2.2 La transformée de Laplace 14

II Systèmes linéaires à temps continu **19**

2 Systèmes linéaires standards à temps continu (SLTI) **20**

2.1 Description d'un système linéaire standard à temps continu (SLTI) 20

2.1.1 Solution du système 22

2.1.2 Matrice de transition 24

2.1.3 Matrice de réponse impulsionnelle 25

2.1.4 Matrice de transfert 27

3 systèmes linéaires singuliers à temps continu **31**
3.1 Description d'un système linéaire singulier à temps continu 31
3.1.1 La matrice fondamentale 34
3.1.2 Solution du système 36
3.1.3 Matrice de transformation 39

III Stabilité et LMI **42**

4 Stabilité des systèmes **43**
4.1 Stabilité des systèmes linéaires (méthode indirecte) 43
4.1.1 Différentes définitions de stabilité 44
4.1.2 Stabilité des systèmes linéaires standards (LTI) 45
4.1.3 Stabilité des systèmes linéaires singuliers à temps continu 47
4.1.4 Différents types de stabilité 48

5 Inégalités matricielles linéaires **49**
5.1 Inégalités matricielles linéaires (IMLs) 49
5.1.1 Complément de Schur 53
5.1.2 Application du complément de Shcur 54
5.1.3 Plusieurs problèmes pouvant se formuler sous forme IML 55

6 Stabilité des systèmes par les IMLs **59**
6.1 Stabilité des systèmes par les IMLs 59
6.1.1 La deuxième méthode de Lyapunov (méthode directe) 59
6.1.2 Stabilité des systèmes standars à temps continu 61
6.1.3 Stabilité des systèmes singuliers à temps continu 63
6.1.4 D-stabilité d'une matrice 68

Remerciements

Je remercie ***ALLAH*** *le tout puissant de m'avoir donné le courage et la volonté et surtout la santé de mener ce travail .*

Mes remerciements à Monsieur BOUAGADA DJILLALI, Maître de Conférence A à l'université de Mostaganem pour ses indications qui m'ont beaucoup aidé à apprécier le travail malgré ses occupations .

Je lui suis reconnaissante pour la confiance qu'il m'a accordé tout au long de ce travail, pour son rôle important dans l'accomplissement de ce mémoire et surtout pour sa patience.

Je tiens à remercier monsieur ZEKRI Noureddine Professeur à l'université d'Oran Mohamed Boudiaf pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ma soutenance ainsi que Messieurs OULD ALI MOHAND Maître de Conférence A à l'université de Mostaganem et ELOSMANI MOHAMED Maître de Conférence A à l' ENSET, ainsi que Madame HIBER DJAHIDA Maître de Conférence A à l'université d'Oran Mohamed Boudiaf, pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'examiner mon mémoire.

Enfin j'adresse un grand merci à monsieur BOUAMRANE RACHID pour tout ce qu'il a fait pour nous et de nous avoir aidé et encouragé dans les moments les plus difficiles, sans lui ce magister n'aurait jamais vu la lumière.

Notations

$\mathbb{N}$	L'ensemble des entiers naturels
$\mathbb{R}^+$	L'ensemble des nombres réels positifs
$\mathbb{R}^n$	L'espace des vecteurs à n composantes réelles
${\mathbb{R}^n}_*$	L'espace des vecteurs non nuls à n composantes réelles
$\mathbb{R}^{n\times m}$	L'espace des matrices réelles de dimension $n \times m$
$Re\,(\lambda)$	Partie réelle de $\lambda \in \mathbb{C}$
$det\,(A)$	déterminant de A
A^T	Transposée de matrice
I_n	Matrice identité d'ordre n
A^{-1}	Inverse de matrice
0_n	Matrice nulle d'ordre n
$\sigma(A)$	Spectre de A
£	Transformée de Laplace
$£^{-1}$	Transformée inverse de Laplace
$u^{(i)}$	La dérivée d'ordre i de la fonction u.
$\otimes$	Le produit de Kronecker.

Abréviations

IML	Inégalités matricielles linéaires.
$SLTI$	Systèmes linéaires standards invariants dans le temps.
$SLSC$	Systèmes linéaires singuliers à temps continu.

0.1 Introduction

Durant presque plus de trois siècles, la théorie de la stabilité des systèmes dynamiques a été développée en tant que théorie pure utile pour les mathématiciens et les physiciens.

En conséquent l'étude des inégalités matricielles linéaires (en anglais Linear matrix inequalities: LMI) dans le contexte des systèmes dynamiques et de contrôle est apparut, probablement avec le début des travaux d'Aleksendre Lyapunov dans les recherches qu'il a effectué concernant la stabilité des mouvements [1]. Autour des années 1890, Lyapunov a mis au point une méthode d'analyse des propriétés du mouvement de certains systèmes dynamiques autour d'un point d'attraction .

Dans les années 40-50 Lur'e , Postnikov et d'autres en union soviétique appliquèrent la méthode de Lyapunov à de véritables problèmes de commande et résolurent les LMI qui se posairent à eux à la main, voir [2], [9]

Depuis ces découvertes, beaucoup de contributions autant théoriques que pratiques ont montré l'importance des systèmes stables et leurs intérêt dans différentes disciplines telles que l'électricité, l'automatique, le traitement de signal , etc. voir [19] .

Tout ceci a permis de mettre en œuvre des méthodes et des approches efficaces et réalisables. Les progrès réalisés dans le domaine algorithmique ont permis le développement d'outils de résolutions numériques (LMITool Box, LMITool , SeDuMi,. . .) [4] et [7] . Actuellement un effet important s'attache à formuler des problèmes de commande à des classes distinctes avec le formalisme LMI.

L'objectif du chapitre 1 est de rappeler certains concepts élémentaires concernant l'étude des systèmes dynamiques. Une analyse de ces systèmes fera l'objet des chapitres 2, 3 et 4.

Nous rappelons également dans la dernière partie du chapitre 1, la définition de la transformée de Laplace et quelques de ses propriétés. Nous exposons en parallèle dans le chapitre 5 la définition d'une LMI et ses propriétés tout en donnant un bref historique.

Enfin nous adapterons dans le chapitre6 les résultats obtenus aux systèmes linéaires standards et singuliers à temps continu et leur stabilité à l'aide des LMI.

Présentation du mémoire

Ce mémoire est organisé en trois parties. La première partie comportera des notions de base d'algèbre linéaire et d'analyse.

L'objectif de la deuxième partie est de rappeller certains concepts élémentaires concernant l'identification des systèmes linéaires standards et singuliers à temps continu.

La troisième partie illustre la notion de stabilité pour le cas standard, pour ensuite caractériser cela à des systèmes singuliers, en évoquant par le mème biais la définition de l'approche LMI et des caractérisations pour la stabilité des systèmes standards où les résultats seront étendus à des systèmes singuliers.

On s'intéresse dans le chapitre [3] au problème de solvabilté. Dans une autre section nous essayerons de répondre à ce même problème pour le cas des systèmes linéaires singuliers qui sont des systèmes trés particuliers, qu'on retrouve dans de nombreuses applications pratiques, citons par exemple, dans le cas des circuits interconnectés entre eux.

Partie I

Notions générales

Chapitre 1

Notions générales

Dans un premier temps, nous allons redéfinir, dans un cadre plus théorique, les notions nécessaires d'algèbre linéaire et d'analyse qui seront utilisées pour mieux envisager les problèmes.

1.1 Rappels d'algèbre linéaire

L'étude des matrices est tout à fait ancienne. Leibnitz est l'un des fondateurs de l'analyse qui a développé la théorie des déterminants en 1693 pour faciliter la résolution des équations différentielles.

Les matrices sont maintenant utilisées pour de multiples applications et servent notamment à représenter les coefficients d'équations linéaires.

1.1.1 Notions de bases

Définition 1.1.1 *Une matrice* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *est symétrique si et seulement si*

$$A^T = A$$

Définition 1.1.2 *Soit une matrice* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *symétrique*

-On dit que A est positive (ou semi-définie positive) si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : x^T A x \geq 0$$

-On dit que A est négative (ou semi-définie négative) si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : x^T A x \leq 0$$

-On dit que A est définie –positive si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad x \neq 0 : x^T A x \succ 0$$

-On dit que A est définie-négative si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad x \neq 0 : x^T A x \prec 0$$

Propriétés

$A \succ 0$ équivaut à dire que $-A \prec 0$ (on peut toujours se ramener à un problème de positivité(ou de négativité)

$A \succ 0, \; B \succ 0$ implique que $A + B \succ 0$ (cette propriété se démontre facilement à partir de la définition)

$$A \succ 0 \text{ équivalent à dire que } \forall x \in \mathbb{R}^n \;\; x \neq 0 : x^T A x \succ 0$$

Définition 1.1.3 *Soit A une matrice carrée de degré n ; un nombre complexe $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A si et seulement si il existe un vecteur propre $v \in \mathbb{C}^n$, $v \neq 0$ tel que $Av = \lambda v$.*

L'ensemble des valeurs propres de A , est appelé le spectre de A et est noté $\sigma(A)$, et v est appelé le vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Théorème 1.1.1 *Une matrice A symétrique est positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.* $\sigma(A) \subset \mathbb{R}^+$.

Remarque 1 *On définit aussi la positivité stricte et on dit qu'une matrice symétrique est définie – positive si toutes ses valeurs propres sont strictement positives ; ce qui est équivalent* *à dire que la forme quadratique correspondante est telle que*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad x \neq 0 : x^T A x \succ 0$$

1.1.2 Polynome caractéristique d'une matrice:

Définition 1.1.4 *Soit A une matrice carrée à coefficients dans un corps $\mathbb{k} = (\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. Le polynôme caractéristique de A est le polynôme $P_\lambda(A)$ à coefficients dans $\mathbb{k} = (\mathbb{R} ou \mathbb{C})$ défini par :*

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) \tag{1.1.1}$$

c'est un polynôme de degré égal à n et dont le coefficient du monôme de degré n est égal à $(-1)^n$.

Théorème 1.1.2 *λ est une valeur propre de A si et seulement si*

$$P_A(\lambda) \ = 0.$$

Théorème 1.1.3 *(Cayley-Hamilton) :Si A est une matrice carrée de dimension n et $P_\lambda(A)$ son polynôme caractéristique alors*

$$P_A(A) \ = 0. \tag{1.1.2}$$

1.1.3 Produit matriciel de Kronecker

Définition 1.1.5 *Le produit de Kronecker noté $\otimes$ de deux matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ est défini par*

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \dots & a_{nn}B \end{pmatrix}$$

Exemple 1 *Avec les matrices A et B suivantes*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on obtient

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Propriétés

Nous citerons quelques propriétés du produit de Kronecker, où A, B, C, D sont des matrices de dimensions appropriées et $\alpha \in \mathbb{C}$.

1. Multiplication par un scalaire:

$$\alpha(A \otimes B) = (\alpha A) \otimes B = A \otimes (\alpha B)$$

2. Associativité

$$(A \otimes B) \otimes = A \otimes (B \otimes C)$$

3. Distributivité à droite et à gauche sur l'addition:

$$(A + B) \otimes C = (A \otimes B) \otimes (A \otimes C) \text{ et } A \otimes (B + C) = (A \otimes B) + (A \otimes C)$$

4. Distributivité sur le produit matriciel:

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$$

5. Transposition

$$(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$$

6. Si A et B sont des matrices carrées d'ordres respectifs m et n , alors

- $det(A \otimes B) = \det(B \otimes A) = \det(A)^m \det(B)^n$
- $trace(A \otimes B) = trace(B \otimes A) = trace(A)trace(B)$

• A et B (semi-) définies positives (négatives)$\Longrightarrow$ $A \otimes B$ (semi-) définies positives (négatives)

• Inversion (si les matrices sont inversibles)

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$$

1.1.4 Exponentielle d'une matrice

Définition 1.1.6 ***Définition 1.1.7*** *Soit A une matrice carrée réelle de dimension n . On définit l'exponentielle de A par la matrice*

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \tag{1.1.3}$$

C'est une série normalement convergente dans l'espace des matrices carrées réelles $M_n(\mathbb{R})$ et on définit sur cet espace une norme $\|A\| = \sup \mid a_{ij} \mid$ $i = 1 \ldots .n$, $j = 1 \ldots .n$.

où les (a_{ij}) désignent les coefficients de la matrice A.

En effet ,

$$\| \sum_{k=p}^{q} \frac{A^k}{k!} \| \leq \sum_{k=p}^{q} \| \frac{A^k}{k!} \| \leq \sum_{k=p}^{q} \frac{\| A^k \|}{k!} \leq e^{\|A\|} \tag{1.1.4}$$

Exemple 2 $exp\left[diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\right] = diag(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, ..., e^{\lambda n})$

En particulier $exp(0_n) = I_n$

Exemple 3 $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *où a, b, c sont des réels non nuls.*

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'ou le degré de nilpotence $\mu = 2$

ainsi

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + ... \frac{A^n}{n!} + ... = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^A = \begin{pmatrix} 1 & a & ac+b \\ 0 & 1 & 2c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 1.1.1 *Soient A et B deux matrices carrées réelles de même dimensions $n \times n$,*

1-. Si A et B commutent, c'est-à-dire $A \times B = B \times A$ alors

$$e^{A+B} = e^A \times e^B$$

2- e^A est inversible et $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

3- A et e^A commutent c'est à dire $A \times e^A = e^A \times A$

4- La fonction $f(t) = e^{At}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est telle que

$$\acute{f}(t) = A \times e^{At} = e^{At} \times A.$$

1.2 Rappels danalyse

La notion de convexité est très importante dans l'étude des optimums et d'autres domaines. Comme beaucoup d'algorithmes de recherche d'optimum, cette propriété des ensembles convexes et des fonctions convexes améliore ainsi la portée des algorithmes d'optimisations.

Dans la plupart des cas , on rencontre des problèmes qui n'ont pas de solutions analytiques mais du fait de leur convexité, ils peuvent être résolus numériquement.

1.2.1 Convexité

Définition 1.2.1 *(Ensemble convexe)*

Un ensemble E est dit convexe si et seulement si ,

$$\forall \lambda \in [0;1] \quad \forall\ (x_1, x_2) \in\ E^2,\ \lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2 \in E$$

Remarque 2 *D'un point de vue géométrique, on peut conclure que, si deux points sont dans un convexe$E$, alors, tous les points du segment reliant ces deux points sont dans E*

Exemple 4 • $\mathbb{R}^n$*l'espace vectoriel de dimension n est un ensemble convexe.*

- *Toute boule fermée $B(a,\varepsilon)$ de centre $a \in \mathbb{R}^n$et de rayon $\varepsilon \succ 0$ est un ensemble convexe.*

Si $x_1, x_2 \in B$ et $\lambda \in [0;1]$ alors

$\| (1-\lambda) x_1 + \lambda x_2 - a\| = \| (1-\lambda) x_1 + \lambda x_2 - (1-\lambda) a - \lambda a\| \leq \| (1-\lambda)(x_1 - a) + \lambda (x_2 - a) \|$

$\leq (1-\lambda) \|x_1 - a\| + \lambda \|x_2 - a\| \leq (1-\lambda) \varepsilon + \lambda\varepsilon = \varepsilon$

Définition 1.2.2 *(Fonction convexe)*

Une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe si et seulement si

-E est un ensemble convexe

- $\forall \lambda \in [0;1] \quad \forall\ (x_1, x_2) \in E^2, \ \ f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x_2)$

1.2.2 La transformée de Laplace

La transformée de Laplace est un outil qui permet de convertir une équation différentielle en une équation linéaire ou disparaissent les formes dérivées.Une telle pratique permet de transposer le problème de l'espace de temps vers un espace des phases, de le résoudre dans cet espace puis transposer de nouveau la solution par la transformée inverse de Laplace.

Définition 1.2.3 *La transformée de Laplace est une application qui à une fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ de l'espace de temps, associe une fonction F de l'espace de phases définie par*

$$\pounds \left[f(t) \right] = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \qquad , \ s \in \mathbb{C} \tag{1.2.1}$$

Théorème 1.2.1 *(Existence)*

Si une fonction $f(t)$ est continue par morçeaux sur l'intervalle $[0;+\infty[$et est bornée sur cet intervalle, i.e.pour tout $t \succ 0$

$$\mid f(t) \mid \leq K e^{at} \tag{1.2.2}$$

où Ket a sont des réels positifs ; alors la transformée de Laplace de $f(t)$ existe pour toute phase $Re(s) \succ a$

Preuve. $f(t)$ continue par morceaux sur l'intervalle $[0;+\infty[$ alors $e^{-st}f(t)$ est intégrable, alors

$$0 \leq \mid \pounds\left[f(t)\right] \mid = \mid \int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt \ \mid \leq \int_0^{+\infty} \mid e^{-st}f(t) \mid dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} \mid f(t) \mid dt$$

pour la convergence de$\int_0^{+\infty} e^{-st} \mid f(t) \mid dt$, il faut imposer à$\mid f(t) \mid$de croitre moins vite que e^{-st} ne décroit quand $t \to 0$, donc si on choisit $\mid f(t) \mid \leq Ke^{at}$ pour tout t alors,

$$\int_0^{+\infty} \mid e^{-st}f(t) \mid dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-st}Ke^{at}dt = \frac{K}{s-a} \tag{1.2.3}$$

sous la condition $Re(s) \succ a$. ■

Remarque 3 *L'ensemble* $\{s \in \mathbb{C} \ / \ \mathrm{Re}(s) \succ a\}$ *s'appelle le demi- plan de convergence.*

Exemple 5 $f(t) = \cos\theta t \qquad F(s) = \pounds\left[f(t)\right] = \frac{s}{s^2+\theta^2}$.

Propriétés de la transformée de Laplace

Nous citerons ci dessous quelques propriétés de la transformée de Laplace que nous allons utiliser dans les démonstrations des chapitres suivants.

1. La transformée de Laplace est une application linéaire, i.e.

Pour toutes fonctions $f$et g admettant des transformées de Laplace, et pour tous réels α et β :

$$\pounds\left[\alpha f(t) + \beta g(t)\right] = \alpha\pounds\left[f(t)\right] + \beta\pounds\left[g(t)\right]$$

2. Sous les mêmes conditions on a,

$$\pounds\left[(f * g)(t)\right] = \pounds\left[f(t)\right].\pounds\left[g(t)\right] \tag{1.2.4}$$

où * désigne le produit de convolution défini par

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t g(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

f et g étant des fonctions continues sur $[0;+\infty[$

3. Si $F(s)$ et $G(s)$ désignent la transformée de Laplace de$f$ et g respectivement alors,

$$\pounds\left[f(t)\right] = F(s) \Leftrightarrow f(t) = \pounds^{-1}\left[F(s)\right]$$

$$\pounds\left[(f*g)(t)\right] = F(s)G(s) \Leftrightarrow (f*g)(t) = \pounds^{-1}\left[F(s)G(s)\right]$$

$\pounds^{-1}$désigne l'opérateur inverse de Laplace défini par

$$\begin{aligned} \pounds^{-1}\left[F(s)\right] &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st}F(s)ds \\ &= \frac{1}{2\pi i}\lim_{T\longrightarrow+\infty}\int_{c-iT}^{c+iT} e^{st}F(s)ds \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

où c est choisi de telle façon que l'intégrale converge, ce qui implique que c doit être supérieur à la partie réelle de toute singularité de $F(s)$.

Théorème 1.2.2 *Soit f une fonction dérivable, avec f et $\acute{f}$ à croissance exponentielle on a*

$$\pounds[\dot{f}(t)] = s\pounds[f(t)] - f(0)$$

et par récurrence, on a la formule

$$\pounds\left(f^{(n)}\right) = s^s\pounds(f) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}\acute{f}(0)... - f^{(n-1)}(0).\ \textit{pour tout } n\in\mathbb{N}^*$$

Preuve. En utilisant l'intégration par partie du nombre $\int\limits_0^A \acute{f}(s)e^{-st}dt$ avec $A\succ 0$,et sachant que

$$\pounds[\dot{f}(t)] = \int\limits_0^{+\infty}\acute{f}(s)e^{-st}dt$$

on a

$$\int\limits_0^A \acute{f}(s)e^{-st}dt = \left[f(s)e^{-st}\right]_0^A + s\int\limits_0^A f(s)e^{-st}dt$$

donc

$$\begin{aligned}
\pounds[\dot{f}(t)] &= \int\limits_0^{+\infty} \acute{f}(s)e^{-st}dt = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_0^{A} \acute{f}(s)e^{-st}dt = \lim_{A\to+\infty}[\left[f(s)e^{-st}\right]_0^A + s\int\limits_0^{A} f(s)e^{-st}dt] \\
&= -f(0) + s\int\limits_0^{+\infty} f(s)e^{-st}dt = s\pounds(f) - f(0).
\end{aligned}$$

■

Le calcul matriciel et la transformée de Laplace

Proposition 1.2.1 *Pour toute matrice A et pour tout $t \succeq 0$*

$$\pounds\left(e^{At}\right) = [sI - A]^{-1}$$

Preuve.

Définition 1.2.4 *On sait que*

$$\frac{d}{dt}\left(e^{At}\right) = Ae^{At}$$

En appliquant la transformée de Laplace à l'équation (1.2.8) , on obtient

$$\begin{aligned}
\pounds\left[\frac{d}{dt}\left(e^{At}\right)\right] &= \pounds\left[Ae^{At}\right] \\
s\pounds\left[e^{At}\right] - e^{A0} &= A\pounds\left[e^{At}\right] \\
[sI - A]\,\pounds\left[e^{At}\right] &= I \\
\pounds\left[e^{At}\right] &= [sI - A]^{-1}.
\end{aligned}$$

■

Remarque 4 *On peut utiliser la transformée inverse de Laplace $\pounds^{-1}$ pour calculer e^{At} d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.*

$$e^{At} = \pounds^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right]$$

Exemple 6

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\
\det(sI-A) &= s(s+2) \\
(sI-A)^{-1} &= \frac{1}{\det(sI-A)} com^T(sI-A) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
e^{At} &= \pounds^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right] = \begin{pmatrix} \pounds^{-1}(\frac{1}{s}) & \pounds^{-1}(\frac{1}{s(s+2)}) \\ \pounds^{-1}(0) & \pounds^{-1}(\frac{1}{s+2}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Partie II

Systèmes linéaires à temps continu

Chapitre 2

Systèmes linéaires standards à temps continu (SLTI)

2.1 Description d'un système linéaire standard à temps continu (SLTI)

Dans de nombreuses applications fondées sur la propagation des ondes, ou en électromagnétisme, on simplifie considérablement les problèmes étudiés en faisant des hypothèses sur la manière dont un système déforme un signal. Deux des hypothèses les plus importantes sont la linéarité et l'invariance dans le temps. Elles semblent, du moins à notre échelle, bien représenter de nombreux systèmes physiques.

En général un système contrôlable dont la variable d'état est x, l'espace d'état est $\mathbb{R}^n$ la variable d'entrée est u et l'espace d'entrée $\mathbb{R}^m$, la variable de sortie est y , et l'espace de sortie $\mathbb{R}^p$, est donnée par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= g(x(t), u(t)) \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

où

f est une fonction de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ vers $\mathbb{R}^m$et g est une fonction de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ vers $\mathbb{R}^p$.

Si$f$et$g$sont linéaires, on obtient un système linéaire, car

si f est linéaire il existe des matrices associées A: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et B: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, telles que

$$f\ (x(t), u(t)) = Ax(t) + Bu(t)$$

et si g est linéaire, il existe des matrices associées $C : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $D : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ telles que

$$g(x(t), u(t)) = Cx(t) + Du(t)$$

et les équations correspondantes au système linéaire sont

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Définition 2.1.1 *Un système linéaire standard à temps continu $(SLTI)$ est donné par*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{2.1.2}$$

où

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *est la matrice d'évolution*

$B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *est la matrice d'entrée (de commande).*

$C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ *est la matrice de sortie*

$D \in \mathbb{R}^{p\times m}$ *est la matrice de transmission*

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ *est la variable d'entrée ;* $y(t) \in \mathbb{R}^p$*est la variable de sortie.*

Exemple 7 $\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \end{cases}$

Les propriétés d'un SLTI

Lorsqu'un système est linéaire et invariant dans le temps (SLTI) on a les propriétés suivantes :

- Si l'entrée $x(t)$ produit une sortie $y(t)$, quand on applique une entrée $kx(t)$, la sortie sera $ky(t)$ .Si deux entrées $x_1(t)$ et $x_2(t)$ engendrent deux sorties $y_1(t)$ et $y_2(t)$, alors $x_1(t)+x_2(t)$ engendrera $y_1(t) + y_2(t)$, c'est la linéarité.
- S'il ya invariance dans le temps, une translation de l'entrée $x(t) \longrightarrow x(t-\tau)$ se traduira par une même translation dans le temps de la sortie $y(t) \longrightarrow y(t - \tau)$.

Remarque 5 *Notez que la multiplication d'un signal par une fonction du temps est une opération linéaire, mais pas une opération invariante dans le temps*

2.1.1 Solution du système

Théorème 2.1.1 *Considérons le système*(2.1.4) *et notons l'état initial du système* $x(t_0) = x_0$ *; à l'instant t l'état du système est donné par :*

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

et la sortie s'exprime par:

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + C\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

Preuve. posons

$$z\ (t) = e^{-At}x(t)$$

alors

$$x(t) = e^{At}z(t)$$

par dérivation on obtient

$$\dot{x}(t) = Ae^{At}z(t) + e^{At}\dot{z}(t) \tag{2.1.3}$$

par identification avec l'équation d'évolution

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

et aprés simplification

$$\dot{z}(t) = e^{-At}Bu(t)$$

et par intégration on obtient

$$z(t) = \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

donc

$$\begin{aligned}
x(t) &= e^{At}\left[\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau\right] \\
&= e^{At}\left[e^{-At_0}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau\right] \\
&= e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau
\end{aligned}$$

Pour obtenir la sortie, il suffit de noter

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

donc

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + C\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t).$$

■

2 ^{ème}méthode pour déterminer la solution du système :

En appliquant la transformée de Laplace à l'équation (1) du système dynamique (2.1.4) , on obtient

$$\begin{aligned}
\pounds\left[x(t)\right] &= \pounds\left[Ax(t)+Bu(t)\right]\\
sX(s)-x(0) &= A\pounds\left[x(t)\right]+B\pounds\left[u(t)\right]\\
sX(s)-x(0) &= AX(s)+BU(s)\\
sX(s)-x(0) &= x(0)+BU(s)\\
\left[sI-A\right]X(s) &= x(0)+Bu(s)\\
X(s) &= \left[sI-A\right]^{-1}x(0)+\left[sI-A\right]^{-1}BU(s)
\end{aligned}$$

En appliquant la transformée inverse de Laplace $\pounds^{-1}$ à la dernière équation, on obtient

$$\begin{aligned}
\pounds^{-1}\left[X(s)\right] &= \pounds^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right]x(0)+\pounds^{-1}(sI-A)^{-1}Bu(s)]\\
x(t) &= e^{At}x_0+e^{At}*Bu(t)\\
x(t) &= e^{At}x_0+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

et c'est l'état du système (2.1.4) à l'instant t , avec un temps initial $t_0=0$.

2.1.2 Matrice de transition

Définition 2.1.2 *Considérons le système homogène*

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=Ax(t) \\ x(t_0)=x_0 \end{cases} \tag{2.1.4}$$

donc

$$x(t)=e^{A(t-t_0)}x \tag{2.1.5}$$

La matrice de transition

$$\phi(t,t_0)=\phi(t-t_0,0)=e^{A(t-t_0)}$$

de dimension $(n\times n)$ *est appelée matrice de transition du système.*

Propriétés de la matrice de transition

Nous citerons quelques propriétés de la matrice de transition

1) La matrice de transition est solution de l'équation homogène

$$\phi(t, t_0) = A\phi(t, t_0)$$

2) Relation de semi groupe : Etant donné trois instants :t_0, t_1, t_2, on a

$$\phi(t_2, t_0) = \phi(t_2, t_1) \times \phi(t_1, t_0)$$

3) La matrice de transition $\phi(t, t_0)$ est inversible et

$$\phi^{-1}(t, t_0) = \phi(t_0, t)$$

4) La matrice de transition est dérivable et

$$\frac{d}{dt}\phi(t, t_0) = \phi(t, t_0)A$$

ainsi que

$$\frac{d}{dt}\phi^{-1}(t, t_0) = -\phi^{-1}(t, t_0)A$$

2.1.3 Matrice de réponse impulsionnelle

Pour un système linéaire à temps invariant, si les hypothèses de linéarité et d'invariance temporelle sont vérifiées, on peut caractériser le système par sa réponse impulsionelle.

Définition 2.1.3 *La matrice impulsionnelle d'un système linéaire à temps invariant , notée $h(t)$ est le signal qu'on obtient en sortie si on applique en entrée une impulsion de Dirac , qui a la définition suivante*

$$\int_{-a}^{a} \delta(t)f(t)dt = f(0) \tag{2.1.6}$$

Proposition 2.1.1 *Soit le système*

$$\begin{cases} \dot{x}\ (t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

La matrice $h(t)$ est donnée par

$$h(t) = Ce^{At}B + D\delta(t) \tag{2.1.7}$$

Preuve. Posons pour tout $t \in [0, \varepsilon]\ , t \geq 0$

$$\begin{aligned}
u(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ . \\ \frac{1}{\varepsilon} \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} \\
u(t) &= 0 \ \text{ sinon} \\
\delta(t) &= \begin{cases} 0, \text{ si t} \neq 0 \\ \frac{1}{\varepsilon}, \text{ si t} = 0 \end{cases} \\
u(t) &= \delta(t)e_i \\
y(t) &= Ce^{At}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} e^{-A\tau}Be_i d\tau + D\delta(t)e_i \\
&= Ce^{At}\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}e^{-A\tau}Be_i d\tau + D\delta(t)ei \\
&= \left[Ce^{At}B + D\delta(t)\right] ei \\
&= h(t)e_i \quad .
\end{aligned}$$

■

Remarque 6 *A chaque instant t, h(t) est une matrice de dimension p×m .L'élément (i ,j) donne la relation entre la $i^{\text{ème}}$entrée et la $j^{\text{ ème}}$sortie à l'instant t.*

2.1.4 Matrice de transfert

Soit le système dynamique

$$\begin{cases} \dot{x}\ (t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

On rappelle que la matrice de transfert n'est définie que pour des conditions initiales nulles

$$x(0) = 0$$

L'application de la transformée de Laplace à l'équation de l'état du système donne

$$\begin{aligned} X(s) &= AX(s) + BU(s) && (2.1.8) \\ [sI - A]\,X(s) &= BU(s) \\ X(s) &= [sI - A]^{-1}\,BU(s) && (2.1.9) \end{aligned}$$

L'application de la transformée de Laplace à l'équation de sortie du système donne

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

où

$$\begin{aligned} X(s) &= \pounds(x(t)) \\ Y(s) &= \pounds(y(t)) \\ U(s) &= \pounds(u(t)) \end{aligned}$$

en substituant (2.1.13) dans (2.1.14), on obtient

$$\begin{aligned} Y(s) &= C\,[sI - A]^{-1}\,BU(s) + DU(s) \\ Y(s) &= \Big[C\,[sI - A]^{-1}\,B + D\Big]\,U(s) \end{aligned}$$

En posant

$$G(s) = C\,[sI - A]^{-1}\,B + D$$

alors

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

d'où la définition suivante

Définition 2.1.4 *La matrice* $G(s) \in \mathbb{C}^{p\times m}$ *définie par*

$$G(s) = C\,[sI - A]^{-1}\,B + D \;\; = \frac{N(s)}{P(s)} \tag{2.1.10}$$

est appelée matrice de transfert du système dynamique liant l'entrée $U(s)$ *à la sortie* $Y(s)$ *où* $s \in \mathbb{C}$ *est la variable de Laplace;* $N(s) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *est une matrice de numérateurs ; alors que* $P(s)$ *est le polynôme caractéristique de* A

Remarque 7 *La notion de matrice de transfert n'est définie que pour des conditions initiales nulles,et elle permet de représenter le comportement dynamique d'un système de manière algébrique en le caractérisant sans aucune information de la nature de l'entrée ou de sortie du système. La transformée de Laplace permet de relier la matrice de réponse impulsionnelle et la matrice de transfert par :*

$$G(s) = \pounds\ \ [h\ (t)]$$

car

$$\begin{aligned} \pounds\ \ [h\ (t)] &= C\pounds[e^{At}]B + D\pounds[\delta(t)] \\ &= C(sI - A)^{-1}B + D \end{aligned}$$

du fait que

$$\pounds\ \ \left[e^{At}\right] = (sI - A)^{-1}\ \ et\ \pounds\,[\delta(t)]$$

d'où le théorème suivant:

Théorème 2.1.2 *La réponse d'un système linéaire à temps continu avec des conditions initiales nulls, don't la matrice de transfert est* $G(s)$ *est donnée par l'intégrale de convolution suivante*

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_0^t h(\tau)u(t-\tau)d\tau \tag{2.1.11}$$

Preuve. En appliquant l'opérateur inverse de Laplace $\pounds^{-1}$ à (2.1.15), et tenant compte de(2.1.14), on a

$$\begin{array}{rcl} \pounds^{-1}\left[Y(s)\right] & = & \pounds^{-1}\left[G(s)U(s)\right] \\ y(t) & = & h(t) * u(t) \\ y(t) & = & \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau \\ & = & \int_0^t h(\tau)u(t-\tau)d\tau. \\ & & . \end{array}$$

■

Exemple 8 *voici un exemple de calcul de matrice de transfert*

On considère le système définie dans (2.1.4)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \end{cases}$$

Sa matrice de transfert est

$$
\begin{aligned}
G(s) &= C\left[sI - A\right]^{-1} B + D \\
G(s) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+1 & -1 \\ 0 & s+2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
G(s) &= \begin{pmatrix} \frac{2s^2+9s+9}{s^2+3s+2} \\ \frac{s+3}{s^2+3s+2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Chapitre 3

systèmes linéaires singuliers à temps continu

3.1 Description d'un système linéaire singulier à temps continu

Ce chapitre traite les systèmes linéaires singuliers à temps continu, et cette classe de systèmes est particulière et importante dans divers domaines tels la théorie des systèmes et de contrôle, qui a permis en œuvre des méthodes et des approches pour l'identification et la commande des systèmes posés par la physique et les sciences de l' ingénieur.

Le but de ce chapitre est de faire une étude analytique des systèmes singuliers : leur définition et leurs caractérisations ainsi que la solvabilité de ces systèmes.

Définition 3.1.1 *Un système linéaire singulier à temps continu est de type*

$$\begin{cases} E\ \dot{x}\ (t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{3.1.1}$$

où

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ *est le vecteur d'état.*

$u(t) \in \mathbb{R}^m$ *est le vecteur d'entrée.*

$y(t) \in \mathbb{R}^p$ *est le vecteur de sortie.*

E, A, B, C, D sont des matrices réelles de dimensions appropriées, et E est généralement non inversible.

Définition 3.1.2 *Le système est dit singulier si $detE = 0$*

-Dans le cas contraire, c'est-à-dire si $detE \neq 0$ il est dit standard.

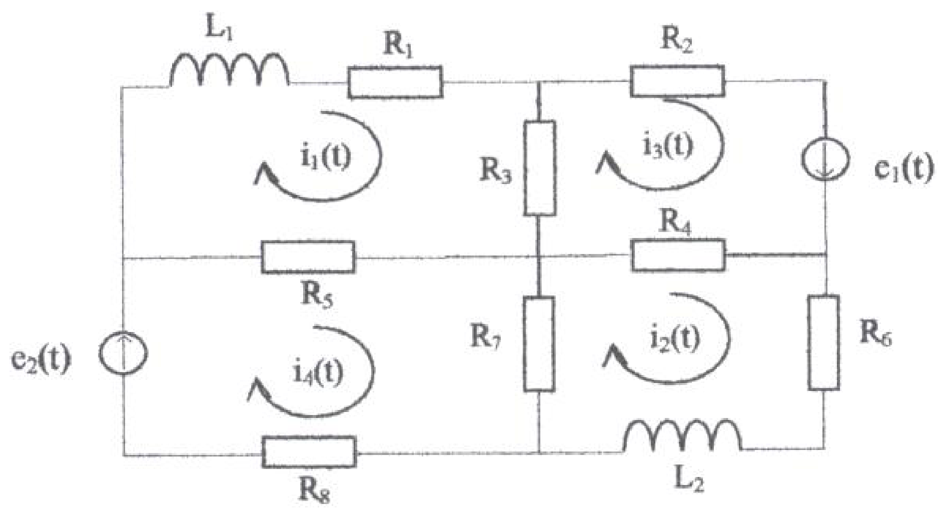
-Si $E = I_n$, le système est aussi appelé standard(ou explicite).

En effet si $detE \neq 0$, alors en multipliant à gauche la première équation du système (3.1.1) *par E^{-1}, on obtient le systrème suivant*

$$\begin{cases} \dot{x}\ (t) = E^{-1}Ax(t) + EBu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{3.1.2}$$

qui est un système explicite.

Exemple 9 *(Circuit RL)*



$Figure.3.1 - circuitRL$

Considérons le circuit à quatre mailles représenté par la figure (3.1)

où,

R_i $i = 1, 2, 3...8$ sont les résistances données .

L_1, L_2 les inductances, et e_1, e_2 les sources de voltage,

Et on note par i_1, i_2, i_3, i_4 *les intensités du courant dans les quatre mailles.*

En appliquant la loi des mailles, on obtient alors

$$\begin{aligned}
L_1\frac{di_1(t)}{dt} &= -(R_1+R_3+R_5)i_1(t)+R_3i_3(t)+R_5i_4(t)\\
L_2\frac{di_2(t)}{dt} &= -(R_4+R_6+R_7)i_2(t)+R_4i_3(t)+R_7i_4(t)\\
0 &= R_3i_1(t)+R_4i_2(t)-(R_2+R_3+R_4)i_3(t)+e_1\\
0 &= R_5i_1(t)+R_7i_2(t)-(R_5+R_7+R_8)i_4(t)+e_2
\end{aligned}$$

et si on pose $x_1(t)=i_1(t), x_2(t)=i_2(t), x_3(t)=i_3(t)$ *on peut cependant écrire les quatre équations sous la forme suivante :*

$$E\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$$

avec

$$E=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad ,\ A=\begin{bmatrix}-\frac{R_{11}}{L_1}&0&-\frac{R_{13}}{L_1}&-\frac{R_{14}}{L_1}\\0&-\frac{R_{22}}{L_2}&-\frac{R_{23}}{L_2}&-\frac{R_{24}}{L_2}\\R_{31}&R_{32}&-R_{33}&0\\R_{41}&R_{42}&0&-R_{44}\end{bmatrix}$$

$$x(t)=\begin{pmatrix}i_1(t)\\i_2(t)\\i_3(t)\\i_4(t)\end{pmatrix}\quad ,\quad u(t)=\begin{pmatrix}e_1(t)\\e_2(t)\end{pmatrix}$$

où

$$\begin{aligned}
R_{11} &= R_1+R_3+R_5\ ,\ R_{22}=R_4+R_6+R_7\ ,\ R_{24}=R_{42}=R_7\\
R_{13} &= R_{31}=R_3\ \ ,\ R_{14}=R_{41}=R_5\ ,\ R_{23}=R_{32}=R_4\\
R_{33} &= R_2+R_3+R_4\ ,\ R_{44}=R_5+R_7+R_8
\end{aligned}$$

nous avons donc un système linéaire singulier

3.1.1 La matrice fondamentale

Définition 3.1.3 *Le système est dit régulier si et seulement si* $det(E-sA) \neq 0$ *pour un certain* $s \in \mathbb{C}$

Pour un système singulier, on supposera par la suite que pour un certain $s \in \mathbb{C}$, $det(E-sA)$ $\neq 0$.

Dans ce cas on peut écrire la matrice résolvante comme unique série de Laurent autour de l' ∞

$$(sI-A)^{-1} = \sum_{i=-\mu}^{+\infty} \phi_i s^{-(i+1)} \tag{3.1.3}$$

où μ *est appelé indice de nilpotence du faisceau* $(sE-A)$ *et il est décrit par*

$$\mu = rgE - \deg\left[\det(Es-A)\right] + 1$$

ϕ_i *est appelée la matrice fondamentale de* (3.1.1)*. Il s'ensuit directement de la relation* (3.1.3) *que la matrice fondamentale satisfait les équations suivantes:*

$$\begin{aligned} E\phi_i - A\phi_{i-1} &= \delta_{0i}I_n \\ \phi_i E - \phi_{i-1}A &= \delta_{0i}I_n \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

où δ_{i0} *est le delta de Kronecker.*

Remarque 8 *Pour calculer les* ϕ_i *nous supposons disponibles* ϕ_0 *et* ϕ_1*..Par contre dans d'autres méthodes , la matrice fondamentale est calculée à partir des matrices E et A.*

Propriétés :

Nous avons quelques propriétés de la matrice fondamentale

1. $\phi_I = 0 \text{ pour} i \prec -\mu$
2. $\phi_0 A\phi_i = \begin{cases} \phi_{i+1} \text{ pour} i \geq 0 \\ 0 \quad \text{pour } i \prec 0 \end{cases}$
3. -$\phi_{-1}E\phi_i = \begin{cases} 0 \text{ pour} i \geq 0 \\ \phi_{-i-1} \quad \text{pour} i \prec 0 \end{cases}$
4. $\phi_i = (\phi_0 A)^i \phi_0$, pour i≥ 0

5. $\phi_0 E\phi_i = \begin{cases} \phi_i & \text{pour } i \geq 0 \\ 0 & \text{pour } i \prec 0 \end{cases}$

6. $-\phi_{-1} A\phi_i = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \geq 0 \\ \phi_i & \text{pour } i \prec 0 \end{cases}$

7. $\phi_0 A\phi_i = \begin{cases} \phi_{i+1} & \text{pour } i \geq 0 \\ 0 & \text{pour } i \prec 0 \end{cases}$

8. $-\phi_{i-1} E\phi_i = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \geq 0 \\ \phi_{i-1} & \text{pour } i \prec 0 \end{cases}$

Exemple 10 *Considérons les matrices E et A suivantes*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

alors

$$(sE - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -s \end{pmatrix}$$

Ici l'indice de nilpotence est $\mu = 2$. Les matrices fondamentales sont

$$\phi_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{pour } i \geq 0$$

$$\phi_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\phi_{-2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Remarque 9 1. *Si* $E = I_n$, *alors*

$$\begin{aligned}\phi_i &= 0 \text{ pour } i \prec 0 \\ \phi_i &= A^i \text{ pour } i \geq 0\end{aligned}$$

2. *Si* E *est inversible ,*
$(sE - A)^{-1} = (I - (s^{-1}E^{-1}A))^{-1}E^{-1}s^{-1} = \left[\sum_i (E^{-1}A)^i s^{-i}\right] E^{-1}s^{-1}]$
on en déduit alors:
$\phi_i = 0$ *pour* $i \prec 0$,$\phi_0 = E^{-1}$,
$\phi_2 = E^{-1}A\phi_i = (E^{-1}A)^2E^{-1}$,......, $\phi_i = (E^{-1}A)\phi_{i-1} = (E^{-1}A)^iE^{-1}$ *pour* $i \geq 0$

.

3.1.2 Solution du système

Théorème 3.1.1 *La solution du système*(3.1.1),*avec la condition initiale* $x(t_0) = x_0$ *et le contrôle* $u(.)$ *est donnée par*

$$x(t) = e^{\phi_0 A(t-t_0)}Ex_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\phi_0 A(t-t_0)}\phi_0 Bu(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^{\mu} \phi_{-j}(Bu^{(j-1)} + Ex_0\delta^{(j-1)})$$

où

$$u^{(j)} = \frac{d^j u}{dt^j}, j = 1, ..., \mu - 1$$

Preuve. Par application de la transformée de Laplace à l'équation(1) du système (3.1.1)

on obtient,

$$\pounds\left[E\dot{x}(t)\right] = \pounds\left[Ax(t) + Bu(t)\right]$$

donc

$$\begin{aligned} EsX(s) - Ex_0 &= AX(s) + BU(s) \\ EsX(s) - AX(s) &= Ex_0 + BU(s) \\ (Es - A)X(s) &= Ex_0 + BU(s) \end{aligned}$$

Le système étant régulier, donc $(Es - A)^{-1}$ existe pour un certain nombre $s \in \mathbb{C}$, par suite ,

$$X(s) = (Es - A)^{-1}(Ex_0 + BU(s))$$

De la relation , il s'ensuit que

$$\begin{aligned} X(s) &= \sum_{i=-\mu}^{+\infty} \phi_i s^{-(i+1)}(Ex_0 + BU(s)) \qquad (3.1.5) \\ X(s) &= \sum_{i=-\mu}^{+\infty} \phi_i s^{-(i+1)} Ex_0 + \sum_{i=-\mu}^{+\infty} \phi_i s^{-(i+1)} BU(s)) \\ X(s) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \phi_i s^{-(i+1)} Ex_0 + \sum_{i=0}^{+\infty} \phi_i s^{-(i+1)} BU(s) + \sum_{i=0}^{+\infty} \phi_i s^{-(i+1)} Ex_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} \phi_i s^{-(i+1)} BU(s) \end{aligned}$$

Enfin nous utiliserons la transformée inverse de Laplace et le théorème de convolution pour obtenir la solution du système (3.1.1), sachant que

$$\pounds\left(e^{\phi_0 At}\phi_0\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \phi_i s^{-(i+1)} \qquad (3.1.6)$$

on aura alors ,

$$\begin{aligned} x(t) &= Ex_0 e^{\phi_0 At}\phi_0 + B\pounds^{-1}\left[\pounds(e^{\phi_0 At}\phi_0)\pounds(u(t)\right] + Ex_0 \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-i}\delta^{(i-1)} + B\sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-i}u^{(i-1)}(t) \\ x(t) &= Ex_0 e^{\phi_0 At}\phi_0 + \left[(e^{\phi_0 At}\phi_0)Bu(t)\right] + Ex_0 \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-i}\delta^{(i-1)} + B\sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-i}u^{(i-1)}(t)Ex_0\delta^{(i-1)}(t)). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$x(t) = Ex_0 e^{\phi_0 At}\phi_0 + \int_0^t e^{\phi_0 A(t-\tau)}\phi_0 Bu(\tau)d\tau + \sum_{i=1}^{\mu}\phi_{-i}\delta^{(i-1)}(\sum_{i=1}^{\mu}\phi_{-i}(Bu^{(i-1)}(t) + Ex_0\delta^{(i-1)}(t)).$$

■

Exemple 11 *Si on considère le système* (3.1.1) *avec*

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad D = (2)$$

alors $det(sE-A) = -s$ *, donc le système est régulier et l'indice de nilpotence , par conséquent les matrices fondamentales sont tels que,*

$$\phi_{-2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \phi_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \phi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

par suite

$$\phi_0 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad e^{\phi_0 A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d'aprés la propriété (2) *, on obtient ,*

$$\phi_i = \phi_0 A \phi_{i-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \textit{ pour } \ i \geq 0$$

La solution du système est donnée par

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\phi_0 At}\phi_0 Ex_0 + \phi_{-1}Bu(t) + \phi_{-1}Ex_0 + \phi_{-2}Bu(t) + \phi_{-1}Ex_0\delta^{(1)}(t) \\ x(t) &= \begin{pmatrix} -u(t) - x_{2,0}\delta(t) - u^{(1)}(t) \\ -u(t) \\ x_{3,0}(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

3.1.3 Matrice de transformation

Considérons le système singulier

$$\begin{cases} E\ \dot{y}\ (t) = Ay(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{3.1.8}$$

En posant

$$y(t) = Tx(t) \tag{3.1.9}$$

$T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est dite la matrice de transformation telle que

$$ET = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad AT = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \tag{3.1.10}$$

Et on peut écrire le système sous forme

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1x_1(t) + A_2x_2(t) \\ 0 = A_3x_1(t) + A_4x_4(t) \end{cases} \tag{3.1.11}$$

où

$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur décomposé , avec $x_1(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$ et $n_1 + n_2 = n$

Les matrices A_i $i = 1, 2, 3, 4$ sont des matrices à dimensions appropriés.

Remarque 10 *Si le système est régulier i.e* $det(sE - A) \neq 0$,*le système définie par* (3.1.14) *admet une solution et la forme de la solution est*

$$x(t) = \phi_0 Ax + \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-1} Ex_0 \delta^{(i)} \tag{3.1.12}$$

et

$$\begin{aligned} det(sE - A) &= \det(sI - A_1)\det(-A_4 - A_3(sI - A_1)^{-1}A_2) \\ &= \det A_4 \det(sI - A_1) - A_2 A_4^{-1} A_3) \neq 0 \end{aligned} \tag{3.1.13}$$

Donc la condition de régularité du système exige A_4 *que soit inversible.*

Exemple 12 *On considère un système singulier avec*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad E = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

On suppose que $det(sI - A) \neq 0$*pour un certain* $s \in \mathbb{C}$

De la condition $\quad ET = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On obtient $\quad T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$Et\ avec\ \ AT = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}\ ,\ on\ aura$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\ ,\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\ ,\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\ \ det A_4 \neq 0$$

Partie III

Stabilité et LMI

Chapitre 4

Stabilité des systèmes

4.1 Stabilité des systèmes linéaires (méthode indirecte)

Un bref historique Alexandre Mikhailovich Lyapunov est né le 25 Mai 1857 à Moscow, et a publié son travail « Le problème général de la stabilité » ou' il étudia la stabilité des systèmes mécaniques autour d'un point d'attraction, et ce travail a servi à l'obtention du diplôme de doctorat en 1892 à l' Université de Moscow.

Introduction: pour un système la notion de stabilité est essentielle, intuitivement on dit que c'est la capacité du système à se maintenir autour d'un point de fonctionnement, dit le point d'équilibre.

Pour étudier la stabilité des systèmes linéaires nous allons utiliser les deux méthodes de Lyapunov (1892) ; la première méthode est basée sur l'examen des valeurs propres (méthode indirecte), et la deuxième méthode c'est chercher une bonne fonction dite la fonction de Lyapunov.

Une notion qui est primordiale dans l'étude de la stabilité est la notion de point d'équilibre.

Nous nous sommes basés dans notre étude sur les références [7] , [5] , [3] , [1] .

Définition 4.1.1 *Soit le système autonome à temps invariant*

$$\begin{cases} \dot{x}\ (t) = f\,(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{4.1.1}$$

où

$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction qui est localement Liptchizienne.*

(autonome c'est-à-dire que f *ne dépend pas de* t*)*

Un point d'équilibre noté par $x_e \in \mathbb{R}^n$ *est la solution de l'équation* $f(x) = 0$ *; et on note par* $X_e = \{x \in \mathbb{R}^n /\ f(x) = 0\}$ *l'ensemble des points d'équilibres du système*

Exemple 13 *Soit le système différentiel suivant*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2 - x_1^2 \\ \dot{x}_2 = x_1(1 + x_1 - 2x_2) = 0 \end{cases}$$

Le système est de la forme $x^{\cdot}(t) = f(x(t))$ *donc c'est un système autonôme*

Pour chercher les points d'équilibres du système on résoud l'équation $f(x) = 0$

on pose

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_1^2 = 0 \\ x_1(1 + x_1 - 2x_2) = 0 \end{cases}$$

on trouve

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 = 0 \quad \textit{et si } x_1 \neq 0 \ \textit{ il vient } 1 + x_2 = 2x_2 \\ \textit{donc } x_1 &= x_2 = 1 \ \textit{ ou bien } x_1 = -1\ ;\ x_2 = 0 \end{aligned}$$

d'où il ya trois points d'équilibres :

$$x_e^1(0,0)\ ,\ x_e^2(1,1)\ ,\ x_e^3(-1,0)$$

4.1.1 Différentes définitions de stabilité

Considérons le système autonome $(4.1.1)$ avec un point d'équilibre $x_e \in D$.

Le système est dit :

1) Stable si pour tout $\varepsilon \succ 0$, il existe $\delta \succ 0$ tel que :

$$\| x_0 - x_e \| \prec \delta \Rightarrow \| x(t) - xe \| \prec \varepsilon$$

2) Asymptotiquement stable s'il est stable et il existe $\delta \succ 0$, tel que, Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ qui satisfait

$$\| x_0 - x_e \| \prec \delta$$

la solution du système (3.1) satisfait

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = x_e$$

3) Exponentielle stable s'il existent $M \in \mathbb{R}_+$ et $\alpha \succ 0$ tel que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ autour de x_e, et pour tout $t \in [t_0; +\infty[$

$$\|x(t) - x_e\| \leq M e^{-\alpha(t-t_0)} \|x_0 - x_e\|$$

4.1.2 Stabilité des systèmes linéaires standards (LTI)

Considérons le systéme linéaire à temps invariant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Dans un premier temps nous allons ignorer l'équation de sortie

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

et posons $u(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, (la variable d'entrée est nulle), on s'intéresse dans ce cas à la stabilité des solutions du système homogène

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{4.1.2}$$

avec

La solution est $x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 = \phi(t,t_0)x_0$ (cf chapitre 2)

Pour ce système le point d'équilibre candidat est $x_e = 0$ avec $detA \neq 0$ (une condition nécessaire pour que le point d'équilibre soit isolé et null).

Définition 4.1.2 *Soit le système autonome à temps invariant*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

1) *Le système est dit asymptotiquement stable si et seulement si*

$$\sigma(A) \subset \mathbb{C}^- = \{\lambda \in \mathbb{C}/\operatorname{Re}(\lambda) \prec 0\}$$

Remarque 11 *Nous donnerons par la suite une preuve détaillée du résultat.*

Proptiétés: Le domaine de stabilité des systémes qu'on note $\mathbb{C}_{stab}$ a ces deux propriétés

1. $\lambda \in \mathbb{C}_{stab} \Longrightarrow \lambda^- \in \mathbb{C}_{stab}$
2. $\mathbb{C}_{stab}$ est un ensemble convexe.

Exemple 14 *Pour le système différentiel*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x_1 + 2x_2 - x_1^2 \\ \dot{x}_2 = x_1(1 + x_1 - 2x_2) \end{cases}$$

Dans ce cas les points d'équilibres sont $X_e = \left\{x_e^1(0,0) \;\; , \;\; x_e^2(1,1) \;\; , \;\; x_e^3(-1,0)\right\}$. *Etudions la stabilité du point d'équilibre* $x_e^2(1,1)$, *d'abord nous allons linéariser le système en chacun des points d'équilibres, pour cela on calcule la matrice Jacobienne en un point quelconque* $(x_1;x_2)$.*Le système différentiel est linéarisé au point c'est-à-dire en remplacant par son* *dévelopement de Taylor du 1^er ordre*

$$\dot{x} = Df(x_e)(x - x_e) + f(x_e)$$

on pose

$$u = x - x_e$$

$$u = Jac(x_e)u$$

on obtient qui s'appelle le linéarisé du système

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) = -1 - 2x_1 & \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 1 + 2x_1 - 2x_2 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 2 & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 2 \end{cases}$$

Au point $x_e^2(1,1)$ *, la matrice Jacobienne* $Jac(x_e) = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ *et le polynôme caractéristique est*

$$p(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + 4)$$

donc les valeurs propres sont $\lambda_1 = -1$ $\lambda_2 = -4$ *et le point d'équilibre* $x_e^2(1,1)$ *est asymptotiquement stable.*

Remarque 12 *La méthode indirecte ne permet pas de dire si l'équilibre est stable ou instable si la matrice A comporte au moins une valeur propre nulle et aucune valeur propre à partie réelle strictement positive.*

4.1.3 Stabilité des systèmes linéaires singuliers à temps continu

Définition 4.1.3 *la forme générale d'un système singulier à temps continu peut s'écrire comme*

$$\begin{cases} E\ \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{4.1.3}$$

où:

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ *est la varible d'état*

$x(t_0) = x_0$ *est la condition initiale du système autonome*

$E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *est une matrice singulière* $(det E = 0)$, *et* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Remarque 13 *La matrice* E *peut etre régulière* $(det E \neq 0)$, *où* $E = I_n$, *mais dans cette partie du chapitre on va étudier seulement le cas où* $det E = 0$.

4.1.4 Différents types de stabilité

1) Stabilité asymptotique

Définition 4.1.4 *Le système donné par* (4.3.1) *est dit asymptotiquement stable si pour toute condition initiale* $x(t_0) = x_0$

$$x(t) \longrightarrow 0 \text{ quand } t \longrightarrow +\infty$$

2) Stabilité exponentielle

Définition 4.1.5 *Le système* (4.3.1)*est exponentiellement stable s'il existe deux nombres réels positifs* α, β*tels que*

$$\| x(t) \| \leq \alpha e^{-\beta t} \| x(0) \| \quad \forall t \succ 0$$

La première méthode de Lyapunov (méthode indirecte)

Théorème 4.1.1 *(Analyse des valeurs propres)*

Le système donné par (4.3.1) *est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propre* λ_i $,i = 1, ...n$ *de la matrice* $(sE - A)$ *sont à parties réelles négatives*

i.e

$$\sigma(E, A) \subset \mathbb{C}^- = \{\lambda/\lambda \in \mathbb{C}, \quad Re(\lambda) \prec 0\}$$

Remarque 14 $\sigma(E, A) = \{s/s \in \mathbb{C}; \det(sE - A) = 0\}$. *On note que* $\sigma(I, A) = \sigma(A)$

Théorème 4.1.2 *Le système donné par* (4.3.1) *avec* $A = I_n$ *est exponentiellement stable si et seulement si les valeurs propres de* E *sont à parties réelles négatives*

$$\sigma(E) \subset \mathbb{C}^- = \{\lambda/\lambda \in \mathbb{C}, \ Re(\lambda) \prec 0\}$$

Chapitre 5

Inégalités matricielles linéaires

5.1 Inégalités matricielles linéaires (IMLs)

L'étude des inégalités matricielles linéaires IMLs (en anglais linear matrix inequality), est maintenant couramment employée dans le contexte des systèmes dynamiques et de contrôle, ils ont apparut avec les recherches d'Alekxandre Lyapunov autour des années 1890, concernant la stabilité des mouvements autour d'un point d'équilibre.

Dans les années 40-50 Lur'e , Postnikov et d'autres appliquèrent la méthode de Lyapunov à de véritables problèmes de commande et résolurent les LMI « à la main »

Dans les années 60,Yokubovic , Popov , Kalman, et d'autres réussirent à obtenir un critère graphique permettant de résoudre certaines familles de LMI, et plutard , dans les années 80, des mathématiciens montrent qu'il est possible de reformuler un problème LMI en un problème d'optimisation convexe que l'on peut résoudre numériquement

Enfin en1984, Karmarkar présente un nouvel algorithme beaucoup plus efficace que l'algorithme Ellipsoïde, redécouvre des méthodes de programmation linéaire, et ouvre la voie à la méthode des points intérieurs de Nesterov et Nemirovski.

Il faut aussi noter que l'approche LMI est numérique contrairement à l'approche Riccati qui peut être qualifiée d'analytique. Elle permet, tout comme l'approche Riccati , d'envisager des problèmes plus sophistiqués que le problème standard en utilisant des matrices de pondération. Même si la solution LMI semble plus complexe, elle autorise notamment à étendre les problèmes traités à la stabilité quadratique, la synthèse d'un correcteur sous contraintes , l'introduction de spésification sur les pôles du système bouclé, la minimisation directe de γ_∞.

Définition 5.1.1 *une inégalité matricielle linéaire est une expression de la forme*

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^{i=N} x_i F_i \prec 0 \tag{5.1.1}$$

où:

- $x = (x_1, x_2, ...x_n) \in \mathbb{R}^n$ *est un vecteur de degré n appelé variable de décision.*
- $F_0, F_1, F_2, ...F_N$ *sont des matrices réelles carrées et symétriques de* $\mathbb{R}^{n \times n}$.

(L'inégalité $\prec 0$ veut dire définie négative).

Remarque 15 *Dans certains cas les LMI's sont exprimées en fonction de matrices variables plutôt qu'a variables de décisions. Le problème consiste de trouver X*$\in \mathbb{R}^{n\times n}$ *telle que* $F(X) \prec 0$

.

Exemple 15 *Considérons le système homogène suivant :*$\dot{x} = Ax$. *Il s'agit de trouver une matrice réelle* $P = P^T \succ 0$ *de même dimension que A telle que* $A^T P + PA \prec 0$.

Traitons le cas $n = 2$, *pour mieux comprendre la situation*

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad et \qquad P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \\ P &= P^T \Leftrightarrow P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La condition de la positivité s'écrit alors

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x_1 P_1 + x_2 P_2 + x_3 P_3 \succ 0$$

Donc on obtient l'inégalité

$$A^T P + PA = x_1(A^T P_1 + P_1 A) + x_2(A^T P_2 + P_2 A) + x_3(A^T P_3 + P_3 A) \prec 0$$

Posons :$P = X$ et s'écrit alors,

$$F(X) = A^T X + XA = x_1 F_1 + x_2 F_2 + x_3 F_3 \prec 0$$

avec

$F_1 = A^T P_1 + P_1 A$; $F_2 = A^T P_2 + P_2 A$; $F_3 = A^T P_3 + P_3 A$

Remarque 16 1. *Une LMI non stricte est une inégalité matricielle linéaire ou $\prec 0$ dans () est remplacée par ≤ 0*

2. *Les inégalités $F(X) \succ 0$ et $G(X) \succ 0$ peuvent être récrites comme des inégalités :*

$$-\ F(X) \prec 0 \qquad et \quad F(X) -\ G(X) \prec 0$$

Propriétés 1. Un système de plusieurs IML's est une IML

$$F_1(x) \prec 0\ ,\ \ F_2(x) \prec 0\ ,\ .....\ ,\ F_p(x) \prec 0$$

$$\begin{pmatrix} F_1(x) & 0 & . & 0 \\ 0 & F_2(x) & . & . \\ . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & F_p(x) \end{pmatrix} \prec 0 \tag{5.1.2}$$

2 . L'ensemble des valeurs propres de $F(X)$ est simplement l'union de toutes les valeurs propres de

$$F_i(x) \quad i = 1, 2, ..., p$$

3. Tout x vérifiant l'inégalité $F(x) \prec 0$ satisfait aussi le système d'IMLs (5.1.2) et vice versa.

4. L'existence d'une solution à l'IML(5.1.1)définit un problème dit convexe car l'ensemble des solutions $\mathrm{S}_{sol} = \{x \in \mathbb{R}^n / F(x) \prec 0\}$est convexe.

En effet

On veut montrer que si $x_1, x_2 \in S$ et $\lambda \in [0;1]$ alors

$$(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \in S \ .$$

F étant affine, donc

$$F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \lambda F(x_1) + (1-\lambda)F(x_2) \prec 0.$$

Remarque 17 *D'autres inégalités peuvent aussi s'écrire sous la forme d'une LMI*

L'inégalité $F(x) \prec 0$*où* $F: \ V \to S$*, qui a* x *associe* $F(x) = F_0 + T(x)$*, est une forme affine*

avec :

V *est un* $\mathbb{R}-ev$ *et l'ensemble* $S = \left\{M \in \mathbb{R}^{n\times n}/M = M^T\right\}$

$F_0 \in S$ *, et* $T : V \to S$ *est une transformation linéaire.*

Ainsi si $dimV \prec +\infty$ *et* $\{e_1, e_2, ...e_n\}$ *est une base pour*V*, alors pour tout* $x \in V$ *peut etre représenter*

$$x = \sum_{i=1}^{i=n} x_i e_i$$

et on peut écrire

$$T(x) = T(\sum_{i=1}^{i=n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i T(e_i) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i F_i$$

avec $F_i = T(e_i)$ $i = 1, 2, ..., n$ *qui est un cas particulier de la formule* (5.1.1)

Proposition 5.1.1 *(Transformation congruente d'une matrice)*

Soit $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$*une matrice carrée , et* A *une matrice carrée inversible* ($detA \neq 0$)*; alors* $A^T MA$ *est appelée transformation congruente de* M *et on a le résultat suivant*

$$M \prec 0 \Longleftrightarrow A^T MA \prec 0 \tag{5.1.3}$$

En effet

Si $M \prec 0 \Longleftrightarrow x^T Mx \prec 0$ *pour tout* $x \neq 0$

$(detA \neq 0)$ *on pose* $y = A^{-1}x \Longleftrightarrow x = Ay$ *. Donc*

$y^T A^T M A y \prec 0$ *pour tout* $y \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ *, et c'est équivalent à dire que* $A^T M A \prec 0$.

5.1.1 Complément de Schur

Il s'agit d'un résultat préliminaire qui permettra, dans ce qui suit de simplifier des expréssions matricielles

Lemme 5.1.1 *La LMI* $\begin{pmatrix} P & S \\ S^T & R \end{pmatrix} \prec 0$ *où* $P = P^T et R = R^T$ *est équivalente à*

$$\begin{cases} P - SR^{-1}S^T \prec 0 \\ R \prec 0 \end{cases} \tag{5.1.4}$$

Preuve. La démonstration se fait facilement en multipliant à droite la matrice

$$\begin{pmatrix} P & S \\ S^T & R \end{pmatrix}$$

par la matrice

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -R^{-1}S^T & I \end{pmatrix}$$

on obtient par suite

$$\begin{pmatrix} P - SR^{-1}S^T & S \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

et à gauche la matrice $\begin{pmatrix} P - SR^{-1}S^T & S \\ 0 & R \end{pmatrix}$ par la transposée de la matrice $\begin{pmatrix} I & 0 \\ -R^{-1}S^T & I \end{pmatrix}$ qui est $\begin{pmatrix} I & -SR^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}$.
on obtient

$$\begin{pmatrix} P - SR^{-1}S^T & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

D'où

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -R^{-1}S^T & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} P & S \\ S^T & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -SR^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \prec 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} P - SR^{-1}S^T & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} P - SR^{-1}S^T \prec 0 \\ R \prec 0 \end{cases}$$

■

Remarque 18 *La matrice* $(P - SR^{-1}S^T)$ *est appelé complément de Schur de* R *dans* M*.*

Exemple 16 *Prenons une IML simple dans le plan*

$$x^2 + y^2 \prec 1 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \end{pmatrix} \succ 0$$

Si on pose $P = (1)$, $S = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *et* $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On a $P = P^T$ *et* $R = R^T \succ 0$*.Et d'après le complément de Schur nous assure que*

$$\begin{cases} P - SR^{-1}S^T \prec 0 \\ R \prec 0 \end{cases}$$

5.1.2 Application du complément de Shcur

Les régions LMI

On définit une classe de région dite : les régions IML

Définition 5.1.2 *Toute région du plan complexe qui peut se décrire par*

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} / A + Bz + B^T \bar{z} \prec 0 \right\}$$

pour $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *et* $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *est appelée région IML d'ordre n.*

Exemple 17 *Le disque D de centre ρ (sur l'axe r2el) et de rayon r est décrit par*

$$\begin{aligned} |z \ -\rho| \quad &\prec \quad r \\ &\Longleftrightarrow \quad (z-\rho)(z{-}\rho)-r^2 \prec 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad -r+(z-\rho)\frac{1}{r}(z-\rho) \prec 0 \end{aligned}$$

Par application du complément de Schur,il vient

$$\begin{pmatrix} -r & z-\rho \\ z-\rho & -r \end{pmatrix} \prec 0$$

Ce qui correspond à

$$A = \begin{pmatrix} -r & -\rho \\ -\rho & -r \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque 19 *À partir d'une formulation classique des régions usuelles, le complément de Schur permet souvent d'obtenir une formulation LMI.*

Propriétés: • Les régions IML sont convexes et symétriques par rapport à l'axe réel

- Toutes intersection de sous-régions IML est elle –même une région IML.

Remarque 20 *Le terme inégalité matricielle linéaire est utilisé dans la littérature sur les systèmes de contrôle, mais dans la terminologie n'est pas constante avec l'expréssion $F(x) \prec 0$que F n'est pas une fonction linéaire.Le terme inégalité matricielle affine peut mieux correspondre à la formulation.*

5.1.3 Plusieurs problèmes pouvant se formuler sous forme IML

La norme $\mathbf{H}_2$

En se basant des références [7] , [6] , [2] .

Définition 5.1.3 *Soit le système linéaire*

$$\begin{cases} x^{\cdot}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

La norme H $_2$d'un tel système est donnée par

$$\begin{aligned} \|G(s)\|_2 &= \sqrt{tr(CP_BC^T)} \\ &= \sqrt{tr(B^TP_CB)} \end{aligned} \tag{5.1.5}$$

Ou: $G(s)$ est la matrice de transfert du système définie dans le (cf chapitre 2) et P_C et P_B sont les

grammiens de Commandabilité et d'observabilité définis par :

$$\begin{aligned} P_C &= \int_0^{+\infty} e^{A\tau}BB^Te^{A^T\tau}d\tau \\ P_B &= \int_0^{+\infty} e^{A\tau}C^TCe^{A^T\tau}d\tau \end{aligned} \tag{5.1.6}$$

Qui sont solutions des équations

$$\begin{aligned} A^TP_B + P_BA + C^TC &= 0 \\ AP_C + P_CA^T + BB^T &= 0 \end{aligned} \tag{5.1.7}$$

Calcul de norme $\mathbf{H}_2$

Proposition 5.1.2 *La norme H_2d'un système (A, B, C, D) peut se calculer grâce à une formulation IML*

$$\|G(s)\|_2^2 = \min_{R=R^T, P=P^T} tr(R) \tag{5.1.8}$$

avec

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} AP + PA^T & B \\ B^T & -I \end{pmatrix} \prec 0 \\ \begin{pmatrix} R & CP \\ PC^T & P \end{pmatrix} \succ 0 \end{cases}$$

La norme $\mathbf{H}_\infty$

Définition 5.1.4 *La norme H_∞ d'un système est la norme induite par la norme H_2sur ses signaux ;*

C'est-à-dire que pour un système linéaire de vecteur d'entrée u et de sortie y,et de condition initiale nulle $x(0) = 0$,

$$\|G(s)\|_\infty = \max \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2} \tag{5.1.9}$$

avec

$$\|y\|_2 = \int_0^{+\infty} y^T y dt \tag{5.1.10}$$

Proposition 5.1.3 *La norme H_∞d'un système linéaire, peut être calculer grâce à une formulation IML*

$$\|G(s)\|_\infty = \min_{X \succ 0, X = X^T} \gamma \tag{5.1.11}$$

avec

$$\begin{pmatrix} A^T X + XA & XB & C^T \\ B^T X & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{pmatrix} \prec 0 \tag{5.1.12}$$

Lemme borne réel

comme vu précédemment, la norme ne peut être calculée analytiquement.Cependant,un correcteur stabilisant assurant une telle norme doit conduire le système bouclé à vérifier une condition nécessaire et suffisantequi nous est donnée par un lemme appelé lemme borné**.**

Proposition 5.1.4 *Le système linéaire*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

est non expansif, ie

$$\int_0^{+\infty} y^T y dt \leq \int_0^{+\infty} u^T u dt \qquad \textit{Pour toute} \;\; \textit{solution } x(0) = 0$$

Les propositions suivantes sont équivalentes (avec $\gamma \succ 0$)

1. *La matrice de transfert*

$$G(s) = C\,[sI - A]^{-1}\,B + D$$

vérifie

$$\|G(s)\|_\infty \prec \gamma$$

2. $\int_0^{+\infty} y^T y dt \leq \gamma \int_0^{+\infty} u^T u dt$

3. *La LMI suivante admet une solution en P*

$$\begin{array}{rcl} P & \succ & 0 \\ \begin{pmatrix} A^T P + PA + \frac{1}{\gamma} C^T C & PB + \frac{1}{\gamma} C^T D \\ B^T P - \frac{1}{\gamma} D^T C & \frac{1}{\gamma} D^T D - \gamma I \end{pmatrix} & \leq & 0 \end{array}$$

4. *La IML suivante admet une solution en P*

$$\begin{array}{rcl} P & \succ & 0 \\ \begin{pmatrix} A^T P + PA & PB & C^T \\ B^T P & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{pmatrix} & \prec & 0 \end{array}$$

Remarque 21 *On peut appliquer le lemme borne réel pour le calcul de la norme d'un système linéaire,en résolvant un problème de valeurs propres généralisées suivant*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} P & \succ & 0 \\ \begin{array}{cc} A^T P + PA + C^T C & PB + C^T D \\ B^T P + D^T C & D^T D \end{array} & \prec & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \\ R & \prec & \lambda I \end{array} \right.$$

Chapitre 6

Stabilité des systèmes par les IMLs

6.1 Stabilité des systèmes par les IMLs

Avec le début des travaux fondamentaux d'Alekxendre Lyapunov concernant la stabilité des mouvements , autour des années 1890, il a mis au point une méthode une méthode d'analyse des propriétés de certains systèmes dynamiques autour d'un point d'attraction.Il étudia la stabilité d'équations différentielles de la forme, et montre que celle-ci est stable si et seulement si il existe une matrice définie positive qui vérifie, aussi connue sous le nom d'inégalité de Lyapunov et qui est une LMI particulière.Lyapunov a aussi montré que cette inégalité peut être résolue analytiquement.

6.1.1 La deuxième méthode de Lyapunov (méthode directe)

Définition 6.1.1 *Soit un système différentiel de vecteur d'état* $x(t) \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Avec un point d'équilibre candidat ,

$$f(x_e) = 0$$

x_e est un point stable au sens de Lyapunov, s'il existe une fonction scalaire $V(x)$ Vérifiant les conditions suivantes :

1. $V(x) = 0 \Longleftrightarrow x = x_e$

2. $V(x) \succ V(x_e)$ *pour* $x \neq x_e$ *(la fonction de Lyapunov atteint un minimum global à l'équilibre* x_e *)*

3. $\frac{d}{dt}V(x) \prec 0$ *pour* $x \neq x_e$

Une telle fonction est dite fonction de l'énergie du système

Remarque 22 *A partir d'une condition initiale* x_0 *différente de* x_e *, la fonction d'énergie va décroitre jusqu'à atteindre son minimum qui correspond à l'unique point* x_e*; l'état du système tendra donc nécessairement vers* x_e*.*

Pour démontrer la stabilité par cette méthode, la difficulté réside dans le choix d'une bonne fonction de Lyapunov . Une classe de fonctions souvent utilisées sont les fonctions quadratiques

$$V(x) = (x - x_e)^T P(x - x_e)$$

avec

$$P = P^T \succ 0$$

on parle alors de stabilité quadratique.

Exemple 18 *Soit un système mécanique de masse* m*, connecté au sol par l'intermédiaire d'un ressort de raideur* k *et d'un amortisseur* f*. On note par* z *la position de la masse et par* $\dot{z}$ *sa vitesse .On considère que l'équilibre est obtenu pour* $z = 0$*.*

L'équation fondamentale de la dynamique donne

$$m\dot{z} = -kz - fz$$

L'état est compose de la position et de la vitesse

$$x = \begin{pmatrix} z \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

L'énergie du système est compose de l'énergie cinétique

$$E_c = \frac{1}{2} m z^2$$

et de l'énergie potentielle du ressort

$$E_p = \frac{1}{2} k z^2$$

on définit donc

$$V(x) = \frac{1}{2} m z^2 + \frac{1}{2} k z^2$$

et

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(V(x)) &= \frac{\partial V(x)}{\partial z} + \frac{\partial V(x)}{\partial z^{\cdot}} \\ &= k\ z\ \dot{z} + m\ \dot{z}\ \ddot{z} \\ &= z^{\cdot}(kz + (-kz - f z^{\cdot})) \\ &= -f z^{\cdot 2}. \end{aligned}$$

A terme la décroissance de l'énergie entraine la convergence de vers zéro

6.1.2 Stabilité des systèmes standars à temps continu

commentaire Considérons le système linéaire homogène

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Le point d'équilibre est $x_e = 0$.

En choisissant $V(x) = x^T P x$ avec $P = P^T \succ 0$, La condition de stabilité s'écrit alors

$$x^T (A^T P + PA) x \prec 0 \quad (x \neq 0)$$

c'est-à-dire que $A^TP + PA \prec 0$. Ce qui signifie que les valeurs propres de la matrice symétrique A^TP+PA sont réelles négatives. Donc dans ce cas la stabilité quadratique au sens de Lyapunov est équivalente à la stabilité classique au sens des systèmes linéaires (les valeurs propres à parties réelles négatives). D'ou le théorème suivant :

Théorème 6.1.1 *Le système* $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ *est stable si est seulement si il existe une matrice définie positive* P*, vérifiant le système IML suivant*

$$\begin{cases} P \succ 0 \\ A^TA + PA \prec 0 \end{cases} \tag{6.1.1}$$

Preuve. Choisissons la fonction de Lyapunov définie par $V(x) = x^TPx$ avec $P = P^T \succ 0$. On a

$$\frac{dV(x)}{dt} = x^{\cdot T}Px + x^TPx^{\cdot} + x^TP^{\cdot}x$$

et comme P ne dépend pas de t , on a $x^T\dot{P}x = 0$; on obtient alors

$$\begin{aligned} \frac{dV(x)}{dt} &= \dot{x}^TPx + x^TP\dot{x} \\ &= x^TA^TPx + x^TPAx \\ &= x^T(A^TP + PA)x \end{aligned}$$

donc

$$\frac{dV(x)}{dt} \prec 0 \Longleftrightarrow A^TP + PA \prec 0$$

En conséquence, on écrit la condition de stabilité au sens de Lyapunov sous forme d'une LMI

$$\begin{pmatrix} -P & 0 \\ 0 & A^TP + PA \end{pmatrix} \prec 0$$

■

Exemple 19 *(Retour d'état stabilisant)*

On cherche une commande de la forme $u = Kx$ *pour un système linéaire à temps continu*

$$\dot{x}\ (t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Le système s'écrit alors

$$\dot{x}\ (t) = (A + BK)x(t)$$

Il est stable s'il existe une matrice $P = P^T \succ 0$*vérifiant l'inégalité matricielle*

$$(A + BK)^T P + P(A + BK) \prec 0$$

La resolution du problem suppose de trouver simultanément les matrices K *et* P*. On voit que cette inégalité n'est pas linéaire à cause du terme* PBK*.*

Toutefois en multipliant à droite et à gauche l'inégalité par $R = P^{-1}$*on obtient*

$$R(A + BK)^T + (A + BK)R \prec 0$$

En effectuant le changement de variable $S = KR$ *, on se ramène à résoudre l'inégalité matricielle linéaire suivante :*

$$RA^T + S^T B + AR + BS \prec 0$$

Une fois determines R *et* S*, on détermine* $K = SP^{-1}$*.*

6.1.3 Stabilité des systèmes singuliers à temps continu

Définition 6.1.2 *Le système linéaire singulier à temps continu s'écrit comme*

$$\begin{cases} E\ \dot{x}\ (t) = Ax(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{6.1.2}$$

où

$x\,(t) \in \mathbb{R}^n$ *est la variable d'état/*

$x\,(t_0) = x_0$ *est la condition initiale du système.*

$E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *est une matrice singulière et* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Théorème 6.1.2 *Le système défini par* (6.1.2) *est asymptotiquement stable si et seulement si il existe une matrice* P *tel que*

$$\begin{cases} PA + A^T P \prec 0 \\ E^T P = PE \geq 0 \end{cases} \tag{6.1.3}$$

Preuve. Choisissant une fonction de Lyapunov V définie par

$$V(x) = x^T E^T P x \tag{6.1.4}$$

en appliquant la transposée à l'équation $E\dot{x} = Ax$

implique que

$$\dot{x}^T E^T = x^T A^T$$

en multipliant à droite cette dernière équation par la matrice P , on obtient ,

$$\dot{x}^T E^T P = x^T A^T P$$

On dérive la fonction V par rapport à t, sachant que E et P ne dépendent pas de t , on a

$$\begin{aligned} \frac{dV(x)}{dt} &= \dot{x}^T E^T P x + x^T E^T P \dot{x} \\ &= x^T A^T P x + x^T P E \dot{x} \\ &= x^T A^T P x + x^T P A x \\ &= x^T \left[A^T P + PA\right] x \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{dV(x)}{dt} &\prec 0 \Leftrightarrow x^T \left[A^T P + PA\right] x \prec 0 \quad , \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ x} \neq 0 \\ &\Leftrightarrow A^T P + PA \prec 0 \end{aligned}$$

En conséquence, on écrit la condition de stabilité au sens de Lyapunov sous forme d'une IML

$$\begin{pmatrix} -P & 0 \\ 0 & A^TP+PA \end{pmatrix} \prec 0$$

■

Exemple 20 *Soient les matrices,*

$$E=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},\ Q=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix},\ P=\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$$

donc

$$A^TP+PA=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}=-Q$$

par identification, on trouve

$$\begin{cases} -p_1+p_2=1 \\ -3p_2+p_4=0 \\ -4p_4=-12 \end{cases}$$

ceci implique que

$$P=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Donc la matrice P existe, il reste à montrer qu'elle est définie positive, on a $P{=}P^T$, il suffit de montrer que $\sigma(P)\subset\mathbb{R}_+^*$, d'aprés le théorème (1.1.1) *(cf chapitre 1)*

On a

$$\det(P-\lambda I)=\lambda^2-5\lambda+5\ ,\ \textit{dont les racines sont}\ \lambda_1=\frac{3}{2}\succ 0\ \textit{et}\ \lambda_2=\frac{7}{2}\succ 0$$

de plus il faut montrer que

$$E^TP=PE\geq 0$$

On a

$$\begin{aligned} E^T P &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \succ 0 \\ PE &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \succ 0 \end{aligned}$$

Théorème 6.1.3 *Le système donné par* (6.1.3) *est asymptotiquement stable si et seulement si il existe une unique solution P semi-définie positive de l'équation de Lyapunov, telle que:*

$$A^T PE + E^T PA \prec 0 \tag{6.1.5}$$

Preuve. Pour une fonction candidate de Lyapunov on pose

$$V(x) = x^T E^T PEx$$

La dérivée est

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T E^T PEx + x^T E^T PE\dot{x} \\ &= (E\dot{x})^T PEx + x^T E^T PE\dot{x} \end{aligned}$$

or

$$E\dot{x} = Ax$$

Ce qui donne,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= (Ax)^T PEx + x^T E^T PAx \\ &= x^T A^T PEx + x^T E^T PAx \\ &= x^T (A^T PE + E^T PA)x \end{aligned}$$

D'où:

$$\begin{aligned} x^T(A^T PE + E^T PA)x &\prec 0 \\ &\Leftrightarrow A^T PE + E^T PA \prec 0. \end{aligned}$$

■

Théorème 6.1.4 *Le système donné par* (6.1.3) *est asymptotiquement stable si et seulement si il existe une fonction de Lyapunov* P *telle que*

$$\operatorname{Re}(\lambda) \prec 0 \tag{6.1.6}$$

pour

$$PE = E^T P \tag{6.1.7}$$

Preuve. Pour une fonction de Lyapunov

$$V(x) = x^T E^T P x$$

La dérivée est

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T E^T P x + x^T E^T P \dot{x} \\ &= (E\dot{x})^T P x + x^T E^T P \dot{x} \end{aligned}$$

or

$$E\dot{x} = Ax = \lambda x, \text{ pour x} \neq 0 \text{ et } \lambda \text{ valeur propre de A.}$$

Donc,

$$\dot{V}(x) = (\lambda x)^T P x + x^T P \lambda x$$

car

$$PE = E^T P$$

Par suite, pour la stabilité asymptotique

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &\prec 0\\ &\Longleftrightarrow x^T\bar{\lambda}Px + x^TP\lambda x \prec 0\\ &\Longleftrightarrow x^TP(\bar{\lambda}+\lambda)x \prec 0\\ &\Longleftrightarrow x^TP2\operatorname{Re}(\lambda)\,x \prec 0\\ &\Longleftrightarrow \operatorname{Re}(\lambda) \prec 0.\end{aligned}$$

■

6.1.4 D-stabilité d'une matrice

Dans cette section on s'intéresse à la stabilité qui généralise en fait la stabilité asymptotique, nous exposerons des résultats garantissant la stabilité tout en se basant sur [6] .

D-stabilité des systèmes linéaires standards

Définition 6.1.3 *On dit d'une matrice A qu'elle est $D-$ stable si et seulement si toutes ses valeurs propres sont contenues dans la région D. Ce qui caractérise :*

Théorème 6.1.5 *Soit une région LMI définie par* (5.1.5) *, une matrice A est $D-$ stable si et seulement s'il existe une matrice*

$X_D = X_D^T \succ 0$ *, telle que*

$$M_D(A, X_D) = D_0 \otimes X_D + D_1 \otimes (AX_D) + D_1^T \otimes (X_DA^T) \prec 0 \tag{6.1.8}$$

Remarque 23 *Si $D_0 = 0$, $D_1 = D_1^T = 1$, on retrouve alors la condition de Lyapunov*

$$\begin{aligned}AX_D + X_DA^T &\prec 0\\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -X_D & 0 \\ 0 & AX_D + X_DA^T \end{pmatrix} \prec 0.\end{aligned}$$

D-stabilité des systèmes linéaires singuliers

Théorème 6.1.6 *Le problème des valeurs propres de la matrice* $(\lambda E - A)$ *est* $D-stable$ *, avec* E *non singulière,s'il existe une matrice* $Y_D = Y_D^T \succ 0$ *telle que*

$$M_D(Y_D) = D_0 \otimes (E^T Y_D E) + D_1 \otimes (E^T Y_D A) + D_1^T \otimes (A^T Y_D E) \prec 0 \tag{6.1.9}$$

Preuve. Ceci provient facilement de l'application des résultats de(6.1.9) au problème standard des valeurs propres de $E^{-1}A$ et la substitution $X = E^T Y E$. ■

Remarque 24 *Si* $D_0 = 0, D_1 = D_1^T = 1$ *et* $E = I$*, on retrouve alors la condition de Lyapunov*

$$\begin{aligned} AX_D + X_D A^T &\prec 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -X_D & 0 \\ 0 & AX_D + X_D A^T \end{pmatrix} \prec 0. \end{aligned}$$

Conclucion :

Dans cette partie, nous nous sommes interéssé au problème de stabilité. Des conditions nécessaires et suffisantes garantissent la stabilité sur la région D sont établis pour le cas standard que pour le cas singulier. Ceci en généralisant les conditiuons de Lyapunov.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons illustré de manière simple une théorie nommée : Stabilité des systèmes linéaires à temps continu à l'aide des IMLs

L'étude que nous avons mené est organisé en deux parties, nous avons commencé par rappeller la solution des systèmes linéaires standards et singuliers à temps continu, ainsi que des conditions nécéssaires et suffisantes de stabilité.

Par la suite on s'est penché à donner une approche LMI à des résultats connus et des caractérisations des deux systèmes, et cette approche a fait l'objet de divers problèmes pouvant se formuler à l'aide des LMIs, tels que le lemme borné réel, la norme H_2 , la norme H_∞.

Tout au long de ce mémoire, une analogie entre un système linéaire standard et un système linéaire singulier tous deux à temps continu a été faite pour déduire que tous les résultats sur la stabilité des systèmes linéaires standards sont étendus aux systèmes linéaires singuliers.

Malgré les dévelopements, certains axes méritent des réflexions plus approfondies et les perspectives demeurent nombreuses.

Bibliographie

[1] D.LJ DEBELJKOVIC and BUZUROVIC, Lyapunov Stability of linear continous singular systems. pages 247-268. 2011.

[2] Edouard Laroche, Analyse de la Robustesse et LMI, (). pages 1-17.

[3] D.Bouagada.Thèse de Doctorat.Systèmes Différentiels singuliers positifs et LMIs.

[4] Thibault Hilaire, L'optimisation convexe par la conception et l'analyse des lois de commande. (ARMINES.Aout 2003.)

[5] Lectures Notes of linear System Theory, (J.Lugeros.2009)

[6] Djilali Bouagada and Paul Van Dooren, Stability margins for generalized state systems (Applied Mathematics Letters.2006).

[7] Olivier Bachelier, Notions de base pour une initiation à la synthèse Robuste de correcteurs par approche LMI (cours . Mars 2009)

[8] Jan.H Van Schupper, Control and System Theory of positive systems. (CWI. Juin 2007).

[9] Carsten Scherer and Siep Weiland, Linear Matrix inequalities in control. (Fevrier 2005). pages

[10] Michel Queysanne, Algèbre. (ARMAND COLIN 1964)

[11] D.G.Luenberg, Introduction to dynamic systemd : Theory, Models and Applications (Academic Press, Neww york, 1976).

[12] F. Szidorovsky and A.T. Bahill, Linear Systems theory (CRC Press, London, 1992)

[13] T.Kaczorek, Positive linear systems and their relationship with electrical circuits, XX-SPETO : 33-41. 1997.

[14] L.Farina, S.Rinaldi, Positive linear systems: Theory and Applications, Wiley, New York, 2000.

[15] S.P Sethi and G.L. Thompson, Optimal control theory: Application to Managements Science (MatrinusNijoff, Boston, 1981)

[16] Y. Nesterov and A. Nemirovski, Interior-point polynomial methods in convex programming, SIAM. J. 1994.

[17] N.K.Son and D.Hinrichsen, Robust stability of positive continuous-time systems, Numer.Funct. Anal. Optim. 17, (1996), pp. 649-659.

[18] G.Verghese, P.Van Dooren and T.Kailath, Properties of the system matrix of a generalized state-space system, Int. J. Control, 1979, vol30, N°2, 235-243.

[19] M.Chilali and P.Gahinet, H1 Design with pole placement constraints : An LMI approach, IEEE, Trans. Automat. Control Vol 41, N°3 mars 1996, pp. 358-367.

[20] P.Gahinet, A.Nemirovski, A.J.Laub and M.Chilali, LMI Control Toolbox, The Math Woks Inc., 1995.

[21] Didier Henrion, Denis Arzelier, LMIs in systems control state-space methods, stastability analysis, Course on LMI optimization with applications in control. Part II.1

[22] L.Dai, Singular Control Systems, Lecture Notes in Control and Information

[23] MARIR Saliha, Controle des systèmes linéaires fractionnaires à temps continu, Mémoire de magister, 2010-2011

[24] Jacques Vélu (CNAM) MVA 101 Analyse et calcul matriciel