République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعـلـيـم العـالـي والبـحـث العـلـمـي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE d'ORAN Mohamed Boudiaf

Faculté des Sciences

Département de Mathématique

Spécialité : Mathématique ***Option : systèmes dynamiques et géométrie différentielle***

Mémoire

Présenté par

Melle BEGOUG Hanane

Pour l'obtention du diplôme de Magister en ***Mathématique***

Thème

Sur une Certaine Classe de Systèmes Diffèrentiels Fractionnaires Positifs

Soutenue le 04/07/2013 devant la commission d'examen composée de :

Qualité	**Nom et Prénoms**	**Grade**	**Etb d'origine**
Président	M ZEKRI Nourelldine	Professeur	USTO Oran
Encadreur	M BOUAGADA Djillali	M.conf. A	UMAB Mostaganem
Examinateur	M ELOSMANI Mohamed	M.conf A	ENSET Oran
Examinateur	M BOUHASSOUNE Abdelkader	M.conf. A	Unive Esénia Oran
Examinatrice	Mme HIBER DJAHIDA	M conf A	USTO Oran

Année universitaire : 2011/2012

Remerciement :

Je remercie Allah le tout puissant de m'avoir donné le courage et la volonté de mener ce travail.

Mes remerciements à Monsieur BOUAGADA DJILLALI, Maître de conférences A à l'université de Mostaganem pour ses indications qui m'ont beaucoup aidé à apprécier le travail malgré ses occupations.

Je lui suis reconnaissante pour la confiance qu'il m'a accordée tout au long de ce travail, pour son rôle important dans l'accomplissement de ce mémoire.

Je tiens à remercier Monsieur ZEKRI NOURELLDINE Professeur à l'université d'Oran Mohamed Boudiaf pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ma soutenance, ainsi que Messieurs BOUHASSOUNE Abdelkader Maître de conférences A à l'université Es-senia d'Oran et ELOSMANI MOHAMED Maître de conférences A à l'université d'Oran ENSET d'Oran, ainsi que madame HIBER DJAHIDA Maître de conférences A à l'université d'Oran Mohamed Boudiaf, pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'examiner mon manuscrit de mémoire.

Enfin j'adresse un grand merci à Monsieur BOUAMRANE RACHID pour tout ce qu'il a fait pour nous, de nous avoir aidé et encouragé dans les moments les plus difficiles que nous avons vécu, sans lui ce magister n'aurait jamais vu la lumière.

Je lui en suis très reconnaissante.

Avant tout et en premier lieu je remercie « Allah » car toute chose est accomplie grâce à sa volonté. Alors Elhamdou li Allah pour l'achèvement et la réussite de ce projet.

En deuxième lieu, je tiens à remercier mes encadreurs pour l'intérêt qu'ils m'ont portée tout au long de mes recherches ainsi que pour leur aides et précisions.

Je tiens à remercier aussi tous les membres de ma famille qui ont su me soutenir et me remonter le moral quand c'était nécessaire.

Enfin, je remercie tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin, à la bonne réalisation de ce modeste travail.

Table des Matières

Notation 0.0.1

$$\mathbb{R}_+^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \diagup \forall i \in \ \mathbb{Z}_n,\ x_i \in \ \mathbb{R}_+ \right\}$$

L'ensemble des vecteurs à n *dimensions avec des composants réels positifs ou nuls (non-négatives)*

$\mathbb{Z}_+$: $\{0, 1, 2, 3, ...,\}$ *L'ensemble des entiers positifs*

L : *la transformée de Laplace*

L^{-1} : *la transformée inverse de Laplace*

D^α : *la dérrivée fractionnaire d'ordre* α

$\mathbb{C} = \left\{\lambda\ ,\ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \diagup \lambda = x + iy\ \right\}$, *L'ensemble des nombres complexes*

$\sum$: *Somme directe fini ou infini des fonctions ou des variables*

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...,\}$ *l'ensemble des entiers naturels*

$\Gamma(\alpha)$: *Fonction de Gamma -Euler*

0.1 Introduction

Récemment une nouvelle classe de systèmes linéaires fractionnaires a été introduite par de nombreux scientifiques. Nous essayerons de faire rappeler certains concepts élémentaires concernant l'étude de systèmes positifs. Une analyse de ces systèmes fera l'objet des chapitres complémentaires. Notre principal objectif est l'étude des modèles à dérivées fractionnaires positifs, nous dériverons des caractérisations sur la positivité de ce type de systèmes. Dans ce large domaine de nombreux problèmes ont déjà été étudiés et le sont encore actuellement.

Citons que dans [22] et [23] des développements sur le problème de contrôle ont été dérivés. On s'intéresse dans les chapitres qui suivent à l'étude de la positivité pour les cas des systèmes fractionnaires; tout en étendant aux cas à temps variantes. le problème de la stabilité est en fin étudier dans ce mémoire.

0.1.1 Historique

En 1695 L'Hôpital a écrit à Leibniz en lui demandant sur une notion particulière qu'il avait utilisé dans ces publications pour la n-iéme dérivée d'une fonction linéaire $f(x) = x$; $\frac{D^n x}{Dx^n}$

L'Hopital a posé à Leibniz la question suivante: « comment sera la n-iéme dérivée d'une fonction linéaire lorsque $n = \frac{1}{2}$? »

Et Leibniz lui a répondu :« un paradoxe apparent dans laquelle un jour des conséquences utiles en seront tirées ». Par ces paroles le calcul fractionnaire est né.

Après la première inquisition de L'Hôpital et Leibniz, le calcul fractionnaire a été principalement une étude réservée pour les meilleurs esprits en mathématiques. Fourier, Euler, Laplace sont parmi les nombreux qui se mêlait avec le calcul fractionnaire et les conséquences mathématiques.

Beaucoup ont trouvé, en utilisant leur propre notation et méthodologie, Les célèbres définitions qui ont été popularisés dans le monde du calcul fractionnaire (pas encore le monde comme un ensemble) sont celles de Riemann-Liouville et Grunwald-Letnikov. Alors que le nombre des définitions actuelles sont sans doute aussi nombreux que les hommes et les femmes qui étudient ce champ, ils sont pour la plupart des variations sur ces thèmes. La théorie mathématique applicable à l'étude du calcul fractionnaire a été développée avant la fin du $20ème$

siècle. Toute fois, il est dans les 100 dernières années que les bonds les plus intrigantes dans l'application d'ingénierie et des sciences ont été trouvés. Les mathématiques dans certains cas, ont dû changer pour répondre aux exigences de la réalité physique.

Caputo a reformulé la définition classique de la dérivé fractionnaire de Riemann-Liouville afin d'utiliser les conditions initiales d'ordre entier pour résoudre son équation différentielle d'ordre fractionnaire. Aussi récemment qu'en 1996, Kolowankar a reformulé à nouveau la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, afin de différentier les fonctions fractales différentiables.

La réponse de Leibniz, qui a été basée sur des études au cours des 300 années écoulées, a prouvé au moins la moitié droite. Il est clair que dans le $20ème$ siècle en particulier, de nombreuses applications et manifestations physiques du calcul fractionnaire ont été trouvées. Cependant, ces applications et les connaissances en mathématiques entourant les calculs fractionnaires sont loin d'être paradoxales. Alors que la signification physique est difficile (sans doute impossible) à saisir, les définitions eux-mêmes ne sont pas plus rigoureuses que celles de leurs homologues à l'ordre entier.

La compréhension des définitions et l'utilisation du calcul fractionnaire sera rendue plus claire pour discuter rapidement certaines définitions mathématiques nécessaires mais relativement simples qui seront posés dans l'étude de ces concepts. Il s'agit de la fonction Gamma, la fonction Bêta, La transformée de Laplace, et la fonction Mittag-Leffler qui est une généralisation de la fonction exponentielle et sont abordés dans ce qui suit.

Dans de nombreux systèmes physiques les variables sont par nature positifs or les modèles usuels en particulier linéaire n'intègrent en général pas cette contrainte. Des modèles particuliers ont été développés par de nombreux scientifique, les modèles à compartiments pour la médecine et la biologie, les modèles électriques (circuits RLC), d'autres modèles apparaissent dans le domaine des sciences sociales, en micro et macro économie, en manufacture, en science de la communication et de l'information, les processus industriels impliquant des réacteurs chimiques, voir [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10].

Dans la première partie de ce mémoire, nous étudions les systèmes linéares positifs. La principale propriété de ces systèmes est que si l'état initial est positif (ou au moins non-négatif), alors la trajetoire d'état se situe entièrement dans l'orthant non-négatif. Notons que les systèmes positifs sont définis dans des cônes et non pas dans des espaces linéaires. En conséquence, certaines propriétés connus des systèmes linéaires ne peuvent être appliqueés pour les systèmes positifs. Une vue d'ensemble de ces systèmes est donnée dans [11] *et* [12], nos principales références pour cette théorie. Dans ce

large domaine de nombreux problèmes ont déjà été étudiés et le sont encore actuellement.

Partie I

Notions générales

Chapitre 1

Dérivation et intégration fractionnaire

L'objectif de ce chapitre dans un premier temps est de mettre en évidence les bases théoriques des dérivées d'ordre fractionnaire, les principales propriétés de l'opérateur de dérivation fractionnaire. Plusieurs approches et définitions ont été le fruit de contributions de mathématiciens de renommée. Dans ce mémoire, on va se limiter aux trois approches les plus populaires et les plus praticables qui sont celles de $Grünwald - Letnikov$, de $Riemann - Liouville$ et enfin l'approche de $Caputo$

Un aperçu sur la transformée de Laplace et ses propriétés sera bénéfique pour les chapitres qui vont suivre.

1.1 Fonctions spécifiques pour la dérivation non entière

Dans cette section, nous présentons les fonctions $Gamma\ Euler$ et $Mittag - Leffler$, qui seront utilisées dans les autres chapitres. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire.

1.1.1 La fonction Gamma : $\gamma\left(P, \frac{1}{\lambda}\right)$

Définition 1.1.1 *La loi exponentielle représente un cas particulier de la famille de la loi Gamma.*

La loi Gamma Γ est généralement une loi à deux paramètres, λ le paramètre d'échelle, et p le paramètre de forme.

La fonction Gamma d'Euler est exprimée par :

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-1} dx \qquad / \; p \in \mathbb{R}$$

Elle est liée à la factorielle par $\Gamma(p+1) = p!$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

Pour des valeurs non entières de $p > 0$, $\Gamma(p)$ vérifie la relation

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$$

en effet, par intégration par partie on a

$$\begin{aligned} \Gamma(p+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-x} x^p dx \\ &= \left[-e^{-x} x^p\right]_0^{+\infty} + p \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-1} dx \\ &= 0 + p \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-1} dx \\ &= p\Gamma(p) \end{aligned}$$

1.1.2 Exponentielle de Mittag-Leffler

Définition 1.1.2 *On appelle exponentielle de Mittag-Leffler et on note $E_\alpha(.)$ la fonction suivante*

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1+\alpha k)}. \quad \textit{pour } z \in \mathbb{C} \textit{ et } \alpha > 0$$

On remarque bien sur que E_1 est l'exponentielle usuelle :

$$E_1(z) = \exp(z)$$

La forme :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \; \alpha > 0 \; , \; \beta > 0$$

est une forme la plus généralisée de la fonction de Mittag-Leffler, mais pas toujours une nécessité lorsque utilisé avec des équations différentielles.

1.2 Définitions et propriétés

1.2.1 Dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov

La dérivée d'ordre fractionnaire d'ordre p tell que $0 < p < n$ de Grünwald-Letnikov est donnée par :

$$\begin{aligned} {}_{GL}D^{P} f(t) &= \lim_{h \to 0} h^{-p} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{p}{k} f(t - kh) \\ avec \binom{p}{k} &= \frac{p(p-1)....(p-k+1)}{k!} \end{aligned}$$

mais :

$$\begin{aligned} (-1)^k p(p-1)....(p-k+1) &= (-p)(-p+1)....(-p+k-1) \\ &= \frac{\Gamma(-p+k)}{\Gamma(-p)} \end{aligned}$$

Donc pour tout $p > 0$ non entier on généralise la formule de Grünwald-Letnikov comme suit:

$${}_{GL}D^{P} f(t) = \lim_{h \to 0} h^{-p} \sum_{k=0}^{+n} \frac{\Gamma(-p+k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-p)} f(t - kh)$$

et

$${}_{GL}D^{-P} f(t) = \lim_{h \to 0} h^{p} \sum_{k=0}^{+n} \frac{\Gamma(p+k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(p)} f(t - kh) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau)\, d\tau$$

avec $kh = t - \tau$

1.2.2 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Soient n un entier positif, $p \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(p) > 0$ et $n-1 < p < n$, f une fonction localement intégrable sur l'intervalle $[t_0, +\infty[$, la dérivée de Riemann-Liouville d'ordre p de f est définie par

$$_{RL}D^P f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^{t} (t-\tau)^{n-p-1} f(\tau)\, d\tau$$

1.2.3 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

D'un autre coté Caputo a introduit une autre formule de la dérivée d'ordre Fractionnaire définie par :

$$\begin{aligned} _{C}D^P f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_{0}^{t} (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau)\, d\tau \quad avec\ (\ p \geq 0\ et\ n-1 \leq p < n,\ n \in \mathbb{N}^*) \\ et\ \frac{d^n}{dt^n} f &\in L_1[a,b] \end{aligned}$$

Les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec dérivées de Caputo accepte la même forme comme pour les équations différentielles d'ordre entier, i.e., contient les valeurs limites des dérivées d'ordre entier des fonctions inconnus en la borne inférieure $t = a$.

1.2.4 Comparaison entre les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et Grünwald-Letnikov :

On a:

$$_{RL}D^P f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^{t} (t-\tau)^{n-p-1} f(\tau)\, d\tau$$

Si on passe par les intégrations par parties et des différentiations répétées on trouve:

$$\begin{aligned} _{RL}D^P f(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau)\, d\tau \quad (1.2.1) \\ &= {}_{GL}D^P f(t) \end{aligned}$$

d'après (1.2.1) on remarque qu'il ya une équivalence entre la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov et la dérivé fractionnaire de Riemann-Liouville.

1.2.5 Comparaison entre les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et Caputo :

Soit ($p \geq 0$ et $n-1 \leq p \leq n,\ n \in \mathbb{N}^*$) on a la dérivée fractionnaire de Caputo définie par :

$$\begin{aligned}
{}_C D^P f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_0^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau)\, d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-p-1} f(\tau)\, d\tau \ - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} \\
&= {}_{RL}D^P f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)}
\end{aligned}$$

Si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, 2, \ldots.., n-1$ on aura ${}_C D^P f(t) = {}_{RL} D^P f(t)$

Comme il ya une égalité entre la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et la dérivée fractionnaire de Caputo. Il existe aussi une diférence dans les propriétés. Nous avons dans la dérivé fractionnaire de Caputo

$${}_C D^P \left(\left({}_C D^q \right) f(t) \right) = {}_C D^{P+q} f(t), \ \ (q = 0, 1, 2, \ldots.; \quad n-1 < p < n)$$

Quant à la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

$${}_{RL} D^q \left(\left({}_{RL} D^p \right) f(t) \right) = {}_{RL} D^{P+q} f(t), \ \ (q = 0, 1, 2, \ldots.; \quad n-1 < p < n)$$

Chapitre 2

Transformation de Laplace des dérivées fractionnaires

La transformée de *Laplace* est un outil très puissant qui permet de convertir une équation différentielle en une équation linéaire algébrique où disparaissent les formes dérivées. Une telle pratique permet de transposer le problème de l'espace de temps vers un espace des phases, de le résoudre dans cet espace puis transposer de nouveau la solution vers le monde réel par la transformée inverse de *Laplace*.

2.1 Transformation de Laplace et convolution

Définition 2.1.1 *La transformation de Laplace est une application qui a une fonction $f(t)$ de l'espace des temps est associée une fonction $F(\lambda)$ de l'espace des phases telle que :*

$$\begin{aligned} L[f(t)] &= F(\lambda) \\ &= \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t) f(t)\, dt \ ; \ \lambda \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Soit f une fonction du temps. La transformation de Laplace de f est la fonction F de la variable complexe λ définie par

$$F(\lambda) = \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t) f(t)\, dt \tag{2.1.1}$$

Si F désigne la transformation de Laplace, on note $F = L(f)$ et $f = L^{-1}(F)$.

On utilise de même la notion suivante $F \subset f$. On dit que F est la transformée de f et que f est l'original de F

Pour l'existence de l'intégrale (2.1.1) la fonction doit être d'ordre exponentiel. Ce qui veut dire qu'il existe deux constantes positives tells que

$$e^{-\lambda t}|f(t)| \leq K \quad \textit{pour tout } t > T.$$

Cette dernière à une dérivé $n - i\grave{e}me$ qui est donnée par :

$$\begin{aligned} L\{f^n(t)\} &= \lambda^n \tilde{f}(\lambda) - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{n-k-1} f^{(k)}(0) \\ &= \lambda^n \tilde{f}(\lambda) - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f^{(n-k-1)}(0) \end{aligned}$$

La transformée de Laplace de la convolution de deux fonctions $f(t)$ *et* $g(t)$ est:

$$f(t) \quad * g(t) = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau \tag{2.1.2}$$

soit,

$$L\{f(t) \quad * g(t); \lambda\} = F(\lambda) G(\lambda)$$

2.2 Transformation de Laplace des dérivées fractionnaires

2.2.1 Transformée de Laplace de la dérivée de Grünwald-Letnikov

soit f une fonction qui possède la transformée de Laplace $F(\lambda)$ pour $0 \leq p < 1$

On considère le cas $0 \leq p < 1$.

$${}_0^{GL}D_t^P f(t) = \frac{f(0) t^{-p}}{\Gamma(1-p)} + \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_0^t (t-\tau)^{-p} f'(\tau) d\tau$$

alors

$$L\left[{}_{0}^{GL}D_t^P f(t)\right](\lambda) = \frac{f(0)}{\lambda^{1-p}} + \frac{1}{\lambda^{1-p}}\left[\lambda F(\lambda) - f(0)\right]$$
$$= \lambda^p F(\lambda)$$

$$\mathcal{L}\left\{D^P f(t)\right\} = \lambda^p F(\lambda)$$

2.2.2 Transformée de Laplace de la dérivée de Riemann-Liouville

Si f possède la transformée de Laplace $F(\lambda)$ alors :

$$\mathcal{L}\left\{{}_{RL}D^P f(t)\right\}(\lambda) = \lambda^P F(\lambda) - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k \left({}_{RL}D^{P-k-1} f(t)\right)_{t=0} \quad avec \;\; n-1 \leq p < n$$

L'application de la transformation de Laplace de dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville est limitée à cause de l'absence de l'interprétation physique de valeurs limitées des dérivées d'ordre fractionnaire pour $t = 0$

2.2.3 Transformée de Laplace de la dérivée de Caputo

la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo est définie par :

$$\mathcal{L}\left\{{}_{C}D^P f(t)\right\}(\lambda) = \lambda^P F(\lambda) - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{p-k-1} \left[\frac{d^k f(t)}{dt^k}\right]_{t=0} \quad avec \;\; n-1 < p < n \qquad (2.2.1)$$

Chapitre 3

Quelques concepts des matrices positifs

3.1 Polynôme caractéristique

Soit $A = (a_{ij})$ et E sont des matrices de n× m, le polynôme caractéristique est

$$\det(E\lambda - A) = z^r + a_{r-1}z^{r-1} + \cdots + a_1 z - a_0$$

3.2 Matrices non négatives

Définition 3.2.1 *Une matrice est non-negative (notation $A \succeq 0$) si toutes les éléments de A sont non négatifs ($a_{ij} \succeq 0$ pour tout i, j) Une matrice non-négative peut représenter une matrice de transition pour une chaîne de Markov. Une matrice rectangulaire non-négative peut être approchée par une décomposition avec deux autres matrices non-négatives par le biais de factorisation de matrice non-négative.*

3.3 Matrices positives

Définition 3.3.1 *Une matrice est dite positive (notation $A > 0$) si toute les éléments de A sont non négatifs ($a_{ij} > 0$ pour tout i, j). Une matrice positive est une matrice dans laquelle tous* *les éléments sont supérieurs à zéro. L'ensemble des matrices positives est un sous-ensemble de toutes le matrices non-négatives. Une matrice positive n'est pas la même que celle d'une matrice définie positive. Une matrice qui est à la fois non-négative et semi-définie positive est appelé matrices doublement non-négatives.*

3.4 Matrices de Metzler

Définition 3.4.1 *Une matrice* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *pour* $n \in \mathbb{Z}_+$ *est dite de Metzler*

Si $\forall i, j \in \mathbb{Z}_+, i \neq j : a_{ij} \in \mathbb{R}_+ \quad (a_{ij} \geq 0)$ *c-a-d toutes ses entrées hors diagonales sont non négatives*

Exemple 1

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Proposition 3.4.1 *Une matrice* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *pour* $n \in \mathbb{Z}_+$ *est de Metzler ssi il existe une constante* $\alpha \in \mathbb{R}$ *telle que* $(A + \alpha I) \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$

Proposition 3.4.2 *Une matrice* A *est de Metzler ssi* $\forall t \geq 0,\ \exp(At) \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$.

Proposition 3.4.3 *ou de manière équivalante,* $\forall t \geq 0$, *l'orthant positif* $\mathbb{R}_+^n$, *est* $\exp(At)$ *−invariant c'est à dire,* $\forall t \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^n, \exp(At)\, x \in \mathbb{R}_+^n$

Preuve. *Nécessité: Supposons que* A *est une matrice de Metzler on peut trouver un réel* $\alpha \succ 0$ *telque* $(A + \alpha I_n) \succ 0$.

Sachant que

$$(A + \alpha I_n) - (\alpha I_n) = (-\alpha I_n) + (A + \alpha I_n),$$

il s'ensuit que

$$e^{At} = e^{(A+\alpha I_n)t - (\alpha I_n)t}$$

$$= e^{(A+\alpha I_n)t} . e^{(-\alpha I_n)t} \in e^{(A+\alpha I_n)t} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$$

du fait que $\quad e^{(A+\alpha I_n)t} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$

Suffisance : Supposons que $\forall t \geq 0, e^{At} \geq 0,$ *ainsi, puisque*

$$A = \frac{d}{dt}\left(e^{At}\right)\Big|_{t=0} = \lim_{t\longrightarrow 0_+} \frac{e^{At} - I}{t}$$

Prenons comme e_j *le* j *èmes vecteur de la base canonique nous obtenous pour* $i \neq j$

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \lim_{t\longrightarrow 0_+} \frac{\left\langle e^{At}e_j - e_j, e_i\right\rangle}{t} \\ &= \lim_{t\longrightarrow 0_+} \left\{ \frac{\left\langle e^{At}e_j - e_j, e_i\right\rangle}{t} - \frac{\langle e_j, e_i\rangle}{t} \right\} \\ &= \lim_{t\longrightarrow 0_+} \frac{\left\langle e^{At}e_j - e_j, e_i\right\rangle}{t} \geq 0, \end{aligned}$$

Puisque $\langle e_j, e_i\rangle = 0,$*donc* $a_{ij} \geq 0,$*pour* $i \neq j$ *alors* $e^{At}x \in \mathbb{R}_+^n$ ∎

Partie II

Systèmes positifs standards

Dans cette section, nous allons nous intéressé à la classe des systèmes invariants dans le temps à temps continu. Nous introduisons par suite une nouvelle classe de systèmes qui est la classe des systèmes positifs. Notons que cette classe est particulière importante et fascinante, qu'on retrouve dans l'ingénierie, en sciences sociales, en électronique, les variables d'états représentent typiquement une population, quantité de marchandise, masse, chimiques etc. Ces systèmes peuvent être modélisés en tant que systèmes positifs dans lesquels la trajectoire d'état est toujours positive toutes les fois que l'état initiale est positif. Une vue d'ensemble de la situation actuelle de la théorie des systèmes positifs est donnée dans [1] et [2]. Nous nous basons sur ces différentes références pour donner des définitions et caractérisations des systèmes positifs en temps continu.

Chapitre 4

Systèmes linéaires standards à temps invariants

Considérons le système linéaire standard à temps invariant suivant,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) & = & Cx(t) \quad + Du(t) \end{cases} \tag{4.0.1}$$

où:

→ $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur d'état

→ $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée

→ $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie

→ E, A, B et C sont des matrices réelles de dimensions appropriées.

Pour tout $t \geqslant t_0$, nous obtenons,

Trajectoire d'état:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau \tag{4.0.2}$$

Réponse du système:

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + C\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau + D(\tau) \tag{4.0.3}$$

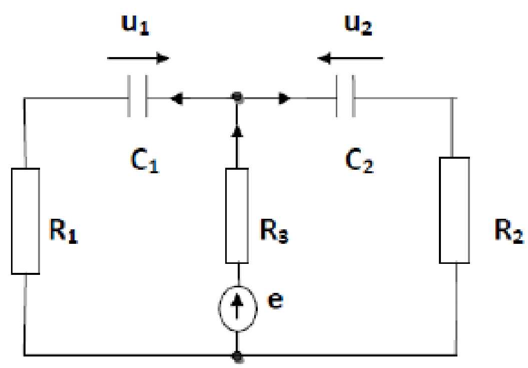
Matrice de réponse impulsionnelle:

$$G(t, t_0) = Ce^{A(t-t_0)}B + D\delta(t - t_0) \tag{4.0.4}$$

4.1 Positivité

4.1.1 Exemples pratique de systèmes positifs

Exemple 2 *Considérons le circuit électrique représenté par la figure1 avec les paramètres donnés* $R_1,\ R_2, R_3, C_1, C_2$ *et une source de tension* $e = e(t)$



$Fig.1$

Choisir les tensions $u_1 = u_1(t)$ *,* $u_2 = u_2(t)$ *comme variables d'état et la sortie* $y = y(t)$ *, on peut écrire les équations suivantes*

$$R_1 C_1 \dot{u}_1 + u_1 + R_3 (C_1 \dot{u}_1 + C_2 \dot{u}_2) = e \tag{4.1.1}$$

$$R_3 (C_1 \dot{u}_1 + C_2 \dot{u}_2) + u_2 + R_2 C_2 \dot{u}_2 = e$$

et

$$y = u_1 + u_2 \tag{4.1.2}$$

A partir de ces équations (4.1.2) *et* (4.1.3) *que nous avons*

$$\begin{bmatrix} (R_1+R_3)\,C_1 & , & R_3C_2 \\ R_3C_1 & , & (R_2+R_3)\,C_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e$$

et

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + Be \tag{4.1.3}$$

$$y = C\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{4.1.4}$$

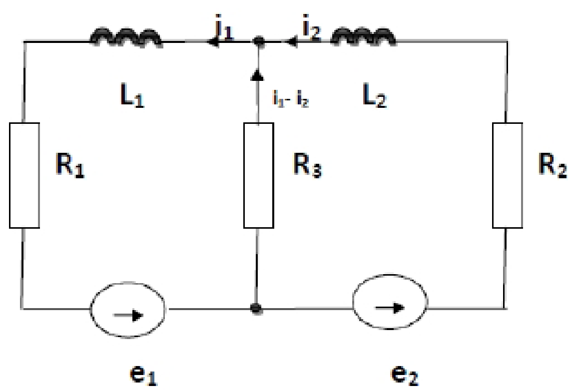
où

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_2+R_3}{C_1[R_1(R_2+R_3)+R_2R_3]}, & \frac{R_3}{C_1[R_1(R_2+R_3)+R_2R_3]} \\ \frac{R_3}{C_2[R_1(R_2+R_3)+R_2R_3]} & -\frac{R1+R_3}{C_2[R_1(R_2+R_3)+R_2R_3]} \end{bmatrix} \tag{4.1.5}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{R_2}{C_1[R_1(R_2+R_3)+R_2R_3]}, \\ \frac{R_1}{C_2[R_1(R_2+R_3)+R_2R_3]} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

de (4.1.5)*, il s'ensuit que A est une matrice de Metzler et $B \in \mathbb{R}_+^{2\times 1}$, $C \in \mathbb{R}_+^{1\times 2}$. Par conséquent, le circuiti RLC est un bon exemple de système positif en temps continu et pour tous les* $u_1(0) \geq 0$, $u_2(0) \geq 0$ *et* $e(t) \geq 0$ *pour* $t \in T$ *nous avons* $u_1(t) \geq 0$, $u_2(t) \geq 0$ *et* $y(t) \geq 0$

Exemple 3 *Considérons le circuit électrique représenté par la figure2 avec les paramètres donnés* R_1, R_2, R_3, L_1, L_2 *et sources de tension.* $e_1 = e_1(t)$, $e_2 = e_2(t)$



$Fig.2$

On choisit les courants $i_1 = i_1(t)\,,\ i_2 = i_2(t)\,,$ *les variables d'état et* $y = C\begin{bmatrix} R_1 i_1 \\ R_2 i_2 \end{bmatrix}$ *la sortie, on peut écrire les équations suivantes*

$$\begin{aligned} R_3(i_1 - i_2) + R_1 i_1 + L_1\frac{di_1}{dt} &= e_1 \\ R_3(i_2 - i_1) + R_2 i_2 + L_2\frac{di_2}{dt} &= e_2 \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

et

$$y = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \tag{4.1.7}$$

de (4.1.6) *et* (4.1.7), *nous aurons*

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + B\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \tag{4.1.8}$$

$$y = C\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \tag{4.1.9}$$

où

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_1+R_3}{L_1} & , & \frac{R_3}{L_1} \\ \frac{R_3}{L_2} & , & -\frac{R_2+R_3}{L_2} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & , & 0 \\ 0 & , & \frac{1}{L_2} \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \tag{4.1.10}$$

De (4.1.10) *il s'ensuit que* A *est une matrice de Metzler et* $B, C \in \mathbb{R}_+^{2\times 2}$. *Par conséquent, le circuit est un exemple de système positif en temps continu et pour tous les* $i_1(0) \geq 0,\ i_2(0) \geq 0$ *et* $e_1(t) \geq 0,\ e_2(t) \geq 0$ *pour* $t \in T$ *nous avons* $i_1(t) \geq 0,\ i_2(t) \geq 0$ *et* $y(t) \in \mathbb{R}_+^2$.

4.1.2 Positivité externe

Tout d'abord, donnons la première définition de positivité de système linéaire, la positivité externe.

Définition 4.1.1 *On dit qu'un système linéaire standard est externement positif si la sortie correspondant à l'état initial nul est non-négative pour chaque entrée non-négative, i.e. pour,*

$x_0 = x\,(0) = 0$ *et pour tout* $u\,(t) \in \mathbb{R}_+^m,\ t \succeq 0,$ *On a* $y\,(t) \in \mathbb{R}_+^p,$ *pour* $t \succeq 0$

4.1.3 Positivité interne

A présent, nous pouvons donner la seconde définition de positivité, qui peut être appelée positivité interne

Définition 4.1.2 *le système* (4.0.1) *est dit internement positif si pour tout* $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ *et tout contrôle*

$u\,(t) \in \mathbb{R}_+^m$ *pour* $t \geqslant 0$ *on a* $x\,(t) \in \mathbb{R}_+^n$ et $y\,(t) \in \mathbb{R}_+^p$ *pour* $t \geqslant 0$

Cette définition indique que toutes les trajectoires émanant de n'importe quel point dans l'orthant non-négatif $\mathbb{R}_+^n$ (frontières incluses) de l'espace d'état $\mathbb{R}$, obtenues en appliquant une entrée non-négatif au système, demeurent dans l'orthant non-négatif et mènent à une sortie non-négative.

Remarque 1 *la positivité interne implique la positivité externe mais l'inverse n'est pas vrai*

4.1.4 Caractérisation

Théorème 4.1.1 [23]*(Condition pour la positivité externe) Un système linéaire est externement positif si et seulement si sa réponse impulsionnelle est non-négative, i.e.* $g\,(t) \in \mathbb{R}_+^{p\times m}$, *pour* $t \geqslant 0$

Théorème 4.1.2 *Le système* (4.0.1) *est internement positif si et seulement si A est une matrice de Metzler et* $B \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}_+^{p\times n}$ *et* $D \in \mathbb{R}_+^{p\times m}$

Preuve. supposons A de matzler, B,C et D positifs, on montre facilement que le système

est positif en utilisant la proposition (1.3.1)

pour la réceproque on se référe à [16] ■

4.2 Cas singulier

4.2.1 Trajectoire d'état de systèmes singuliers en temps continu

Considérons le système linéaire continu suivant,

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{4.2.1}$$

$$y(t) \quad = Cx(t) + Du(t) \tag{4.2.2}$$

où,

→ $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur d'état

→ $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée

→ $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie

→ E, A, B et C sont des matrices réelles de dimensions appropriées.

-le système (4.2.1) est dit singulier si $detE = 0$.

-Si $detE \neq 0$, alors le système (4.2.1) est dit standard

-Si $E = I_n$, le système est aussi appelé standard (ou explicite).

Définition 4.2.1 *le système* (4.2.1) *est dit régulier si et seulement si*

$$det(E_s - A) \neq 0 \tag{4.2.3}$$

pour un certain $s \in \mathbb{C}$.

Remarque 2 *Si* $detE \neq 0$, *alors en multipliant* (4.2.1) *par* E^{-1}, *on obtient le système suivant,*

$$\dot{x}(t) = E^{-1}Ax(t) + E^{-1}Bu(t) \tag{4.2.4}$$

$$y(t) = Cx(t) \quad + Du(t) \tag{4.2.5}$$

qui est un système explicite pour un système singulier, on supposera pour la suite que

$det(E_s - A) \neq 0$ *pour un certain* $s \in \mathbb{C}$. *Dans ce cas, on peut écrire la matrice résolvante* *comme unique série de Laurent autour de l'*∞ *[F.L.Lewis;1984; T.Kaczorek, 1993]*

$$(sE-A)^{-1} = s^{-1}\sum_{i=-\mu}^{\infty}\phi_i s^{-i} \tag{4.2.6}$$

où μ *est appelé indice de nilpotence du faisceau* $(sE-A)$ *voir* [3], [4] *et* [5]*,il est décrit par,*

$$\mu = rgE - deg\left[det\left(Es-A\right)\right] + 1 \tag{4.2.7}$$

ϕ_i *est appelée la matrice fondamentale de* (4.2.1)*. Il s'ensuit directement de la relation* (4.2.6) *que la matrice fondamentale* ϕ_i *satisfait les équations suivantes,*

$$E\phi_i - A\phi_{i-1} = \delta_{0i}I \tag{4.2.8}$$

$$\phi_i E - \phi_{i-1}A = \delta_{0i}I \tag{4.2.9}$$

Où δ_{0i} *est le delta de kronecker* [5], [6], [7] *et* [8]*.Dans* [8]*, l'auteur montre comment calculer les* ϕ_i *tout en supposant disponibles* ϕ_0 *et* ϕ_{-1}*. par contre, dans* [5]*, la matrice fondamentale est calculée à partir des matrices E et A en utilisant l'inverse de Drazin* [9]*, qui a été développé ensuite par T.Kaczorek voir* [10]*. Nous avons quelques propriétés de la matrice fondamentale.*

1. $\phi_i = 0, \quad pour \;\; i < -\mu,$
2. $$\phi_0 A\phi_i = \begin{cases}\phi_{i+1} & pour\ i \geqslant 0\\ 0 & pour\ i<0\end{cases}$$
3. $$-\phi_{-1}E\phi_i = \begin{cases}0 & pour\ i \geqslant 0\\ \phi_{-i-1} & pour\ i<0\end{cases}$$
4. $$\phi_i = (\phi_0 A)^i\,\phi_0, \quad pour\ i \geqslant 0$$
5. $$\phi_0 E\phi_i = \begin{cases}\phi_i & pour\ i \geqslant 0\\ 0 & pour\ i<0\end{cases}$$

6.

$$-\phi_{-1}A\phi_i = \begin{cases} 0 & pour\ i \geqslant 0 \\ \phi_i & pour\ i < 0 \end{cases}$$

7.

$$\phi_0 A\phi_i = \begin{cases} \phi_{i+1} & pour\ i \geqslant 0 \\ 0 & pour\ i < 0 \end{cases}$$

8.

$$-\phi_{i-1}E\phi_i = \begin{cases} 0 & pour\ i \geqslant 0 \\ \phi_{i\ -1} & pour\ i < 0 \end{cases}$$

Exemple 4 *Considérons les matrices E et A suivantes,*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors,

$$(Es - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -s \end{pmatrix}$$

Ici l'indice de nilpotence est $\mu = 2$. Les matrices fondamentales sont,

$$\phi_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

pour $i \geqslant 0$,

$$\phi_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\phi_{-2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Remarque 3 1. *Si* $E = I_n$, *alors*

$$\phi_i = 0 \qquad pour \quad i < 0 \tag{4.2.10}$$

$$\phi_i = A^i \quad pour \quad i \geqslant 0 \tag{4.2.11}$$

2. *Si* E *est inversible,*

$$(sE - A)^{-1} = \left(I - \left(s^{-1}E^{-1}A\right)\right)^{-1} E^{-1}s^{-1} = \left[\sum_{i=0}^{\infty} \left(E^{-1}A\right)^i s^{-i}\right] E^{-1}s^{-1} \tag{4.2.12}$$

On en déduit alors,

$$\begin{aligned}
\phi_i &= 0, \ pour \quad i \prec 0, \\
\phi_0 &= E^{-1}; \ \phi_1 = \left(E^{-1}A\right) E^{-1}; \\
\phi_2 &= E^{-1}A\phi_1 = \left(E^{-1}A\right)^2 E^{-1}; \\
& . \\
& . \\
& . \\
\phi_i &= \left(E^{-1}A\right) \phi_{i-1} = \left(E^{-1}A\right)^i E^{-1}, \ pour \ i \geqslant 0.
\end{aligned}$$

La solution $x(t)$ *du système* (4.2.1) *avec la condition initiale* $x(t_0) = x_0$ *et le contrôle* $u(.)$ *est* *donnée par (voir par exemple [11]) :*

$$x(t) = e^{\phi_0 A(t-t_0)} E x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\phi_0 A(t-\tau)} \phi_0 B u(\tau)\, d\tau + \sum_{j=1}^{\mu} \phi_{-j} \left(B u^{(j-1)} + E x_0 \delta^{(j-1)} \right) \tag{4.2.13}$$

Où $u^{(j)} = \frac{d^j u}{dt^i},\ j = 1, ..., \mu - 1.$

Preuve. *Par application de la transformée de Laplace à l'équation* (4.2.1) *on obtient,*

$$\begin{array}{lllllll} EsX(s) & - & Ex_0 & = & AX(s) & + & BU(s) \\ EsX(s) & - & AX(s) & = & Ex_0 & + & BU(s) \\ (Es - A) X(s) & & & = & Ex_0 & + & BU(s) \end{array}$$

Le système (4.2.1) *étant régulier, donc* $(Es - A)^{-1}$ *existe pour un certain nombre* $s \in \mathbb{C}$, *par suite*

$$X(s) = (Es - A)^{-1} (Ex_0 + BU(s))$$

de la relation (4.2.6) , *s'ensuit,*

$$\begin{aligned} X(s) &= \sum_{i=-\mu}^{\infty} \phi_i s^{-(i+1)} (Ex_0 + BU(s)) \\ X(s) &= \sum_{i=-\mu}^{\infty} \phi_i s^{-(i+1)} Ex_0 + \sum_{i=-\mu}^{\infty} \phi_i s^{-(i+1)} BU(s) \\ X(s) &= \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i s^{-(i+1)} Ex_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i s^{-(i+1)} BU(s) \ + \sum_{i=1}^{\mu} \phi_i s^{-(i+1)} Ex_0 + \sum_{i=1}^{\mu} \phi_i s^{-(i+1)} BU(s). \end{aligned}$$

Enfin, nous utiliserons la transformée inverse de Laplace et le théorème de convolution pour obtenir la solution du système, sachant que

$$L\left(e^{\phi_0 A t} \phi_0\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i s^{-(i+1)}$$

On aura alors,

$$\begin{aligned} x(t) &= Ex_0 e^{\phi_0 A t} \phi_0 + BL^{-1} \left[L\left(e^{\phi_0 A t} \phi_0\right) L[u(t)] \right] + Ex_0 \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-i} \delta^{(i-1)} + B \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-i} u^{(i-1)}(t) \\ x(t) &= Ex_0 e^{\phi_0 A t} \phi_0 + \left[\left(e^{\phi_0 A t} \phi_0\right) * B[u(t)] \right] + Ex_0 \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-i} \delta^{(i-1)} + B \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-i} u^{(i-1)}(t) \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$x(t) = e^{\phi_0 At}\phi_0 Ex_0 + \int_0^t e^{\phi_0 A(t-\tau)}\phi_0 Bu(\tau)\,d\tau + \sum_{i=1}^{\mu}\phi_{-i}\left(Bu^{(i-1)}(t) + Ex_0\delta^{(i-1)(t)}\right)$$

■

Exemple 5 *Si on considère le système* (4.2.1) *avec:*

$$\begin{aligned} E &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ C &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \ D = 2 \end{aligned}$$

alors,

$$det(Es - A) = -s,$$

Donc le système est régulier et l'indice de nilpotence $\mu = 2$, par conséquent les matrices fondamentales sont tels que,

$$\phi_{-2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \phi_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \phi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

par suite,

$$\phi_0 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ e^{\phi_0 A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

d'après la propriété 2, on obtient,

$$\phi_i = \phi_0 A\phi_{i-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ pour\ i \geq 0,$$

La solution du système est par suite donnée par,

$$x\left(t\right)=e^{\phi_0 At}\phi_0 Ex_0+\phi_{-1}Bu\left(t\right)+\phi_{-1}Ex_0+\phi_{-2}Bu^{(1)}\left(t\right)+\phi_{-1}Ex_0\delta^{(1)}\left(t\right)$$

$$x\left(t\right)=\left(\begin{array}{c}-u\left(t\right)-x_{2,0}\delta\left(t\right)-u^{(1)}\left(t\right)\\ -u\left(t\right)\\ x_{3,0}\end{array}\right)$$

Nous allons maintenant montré autre caractérisation qui nous permettra de vérifier l'existence de la solution de l'équation $(4.2.1)$.

Théorème 4.2.1 *Si la relation* $(4.2.3)$ *est vérifiée alors l'équation,*

$$\dot{x}=\phi_0 Ax+\phi_0 Bu+\sum_{j=1}^{\mu}\phi_{-j}\left(Bu^{(j)}+Ex_0\delta^{(j)}\right)\tag{4.2.14}$$

$x\left(0\right)=x_0$ *possèdent la même solution,*

$$x\left(t\right)=e^{\phi_0 At}\phi_0 Ex_0+\int_0^t e^{\phi_0 A(t-\tau)}\phi_0 Bu\left(\tau\right)d\tau+\sum_{j=1}^{\mu}\phi_{-j}\left(Bu^{(j-1)}+Ex_0\delta^{(j-1)}\right)\tag{4.2.15}$$

4.2.2 Réponse de systèmes singuliers en temps continu (*)

La sortie du système (4.2.1) est donnée par:

$$y\left(t\right)=Cx\left(t\right)+Du\left(t\right)$$

$$y\left(t\right)=Ce^{\phi_0 At}\phi_0 Ex_0+C\int_0^t e^{\phi_0 A(t-\tau)}\phi_0 Bu\left(\tau\right)d\tau+\sum_{j=1}^{\mu}C\phi_{-j}\left(Bu^{(j-1)}+Ex_0\delta^{(j-1)}\right)+Du\left(t\right)\tag{4.2.16}$$

En substituant $x_0=0$ et $u\left(t\right)=\delta\left(t\right)$ dans $(4.2.16)$, on obtient la réponse impulsionnelle $g\left(t\right)$ du système (4.2.1)

$$g\left(t\right)=\begin{cases}Ce^{\phi_0 At}\phi_0 B & \textit{pour } t>0\\ Ce^{\phi_0 At}\phi_0 B+\sum_{j=1}^{\mu}C\phi_{-j}\left(B\delta^{(j-1)}\left(t\right)+D\delta\left(t\right)\right) & \textit{pour } t=0\end{cases}$$

La matrice de transfert du système est,

$$T(s) = C(Es - A)^{-1} B + D \tag{4.2.17}$$

Une substitution de (4.2.6) dans (4.2.17) donne,

$$T(s) = \sum_{i=0}^{\infty} C\phi_i B s^{-(i+1)} + \sum_{j=1}^{\mu} C\phi_{-j} B s^{(j-1)} + D \tag{4.2.18}$$

Si on remplace la propriété 4 dans (4.2.18), on obtient,

$$T(s) = C\left[\sum_{i=0}^{\infty} (\phi_0 A)^i s^{-(i+1)}\right] \phi_0 B + \sum_{j=1}^{\mu} C\phi_{-j} B s^{(j-1)} + D \tag{4.2.19}$$

enfin, en appliquant, la transformée de Laplace, on aura alors la relation $(*)$

4.2.3 Positivité de systèmes linéaires singuliers en temps continu

Positivité externe

Nous considérons maintenant le cas de la positivité externe pour des systèmes linéaires singuliers à temps continu.

Définition 4.2.2 *Le système singulier* (4.2.1) *est dit externement positif si pour* $x_0 = 0$ *et tout contrôle non-négatif* $u(t) \geq 0$ *avec* $u^{(j)}(t) \geq 0$ *pour* $j = 1, ..., \mu - 1$ *pour* $t \in \mathbb{R}_+$, *la sortie est aussi non-négative i.e* $y(t) \geq 0$ *pour* $t > 0$.

Une caractérisation de la positivité externe de systèmes linéaires singuliers est donnée par le théorème suivant.

Théorème 4.2.2 $[T.Kaczorek]$*Le système singulier* (4.2.1) *avec* $D = 0$ *est dit externement positif si et seulement si*

sa réponse impulsionnelle $g(t)$ *est non-négative i.e* $g(t) \in \mathbb{R}_+$ *pour* $t \in \mathbb{R}_+$,

Positivité interne

Maintenant, nous allons donner la définition de la positivité interne de systèmes linéaires singuliers en temps continu.

Définition 4.2.3 *Le système singulier* (4.2.1) *est dit internement positif si pour tout état initial admissible* $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ *et tout contrôle non-négatif* $u(t) \geq 0$ *avec* $u^{(j)}(t) \geq 0, \quad j = 1, ..., \mu - 1$ *pour* $t \in \mathbb{R}_+^n$, *l'état* $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$ *et la sortie* $y(t) \in \mathbb{R}_+^p$ *pour* $(t) \geq 0$.

Remarque 4 *Un système singulier internement positif est toujours externement positif.*

Partie III

Systèmes Linéaires Fractionnaires à temps continu

Introduction

La première définition de la dérivée fractionnaire a été introduite par Liouville et Riemann à la fin de la 19-ème siècle ($Nishimoto$, 1984; $MillerandRoss$, 1993; $Podlubny$, 1999)

Cette idée a été utilisé par les ingénieurs pour la modélisation des différents processus dans la fin des années 1960 ($Vinagreetal$, 2002; $VinagreandFeliu$, 2002; $Zaborowsky\ and\ Meylaov$, 2001). Les mathématiques fondamentales du calcul fractionnaire sont donnés dans les monographies ($Miller\ and\ Ross$, 1993; $Nishimoto$, 1984; *Podlubny*, 1999; *Oldham and Spanier*, 1974; *Oustalup*, 1993). Les déterminations de l'ordre fractionnaire ont été développés par (*Oustalup*, 1993; *Podlubny et al.* 1997).. Une généralisation du filtre de Kalman pour les systèmes d'ordre fractionnaire est proposée dans (Sierociuk and Dzieli´nski, 2006). D'autres applications de systèmes d'ordre fractionnaire peuvent être trouvés dans (Engheta, 1997; Ostalczyk,2000; Ostalczyk, 2004a; Ostalczyk, 2004b; Ferreira and Machado, 2003; Moshrefi-Torbati and Hammond, 1998; Reyes-Melo et al.,2004; Riu et al., 2001; Sjberg and Kari, 2002; Vinagre et al., 2002; Samko et al., 1993) Dans (Ortigueira, 1997), une méthode a été donné pour le calcule de la réponse impulsionnelle de la réponse en fréquence pour les fractions des systèmes linéaires en temps discret standard (non positive) . Les polynômes fractionnaires et les systèmes nD ont été étudiées dans (Gałkowski and Kummert, 2005). Dans l'article [13] est introduite une nouvelle classe de systèmes positives fractionnaire en temps continu décrit par des équations état , des conditions nécessaires et suffisantes seront mis en place pour la positivité interne et externe .(224 Kaczorek T.)

Le but de ce chapitre est de faire une étude analytique des systèmes linéaires fractionnaires à temps continu.

Définition 4.2.4 *Un système linéaire fractionnaire en temps continu d'ordres α au sens de Caputo est défini par les équation d'état suivante:*

$$\begin{cases} {}_C D^{\alpha} x(t) & = & Ax(t) + Bu(t) & & n-1 \prec \alpha \ \leq n \\ y(t) & = & Cx(t) + Du(t) & & \\ x(0) = x_0 & , & \dot{x}(0) = x_1, & .... \quad ...., & x^{(n-1)}(0) = x_{n-1} \end{cases} \tag{4.2.20}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ *sont respectivement les variables d'état, d'entrée et* *de sortie* $A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}, D \in \mathbb{R}^{p\times m}$

Chapitre 5

Solution des Systèmes Positifs à Dérivées Fractionnaires

Théorème 5.0.3 *La solution de la premiére équation du système* (4.2.20) *est donnée par:*

$$x\left(t\right)=\sum_{i=0}^{n-1}\Phi_{i}\left(t\right)x_{i}+\int_{0}^{t}\Phi\left(t-\tau\right)Bu\left(\tau\right)d\tau \tag{5.0.1}$$

$$x_{i}=x^{(i)}\left(0\right),\ i=0,1........,n-1 \tag{5.0.2}$$

où

$$\Phi_{i}\left(t\right)=\sum_{i=0}^{n-1}A^{k}\frac{t^{\alpha k+i}}{\Gamma\left(\alpha k+i+1\right)},\ i=0,1,....n-1 \tag{5.0.3}$$

$$\Phi\left(t\right)=t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(At^{\alpha}\right). \tag{5.0.4}$$

$E_{\alpha,\alpha}\left(At^{\alpha}\right)$ *est la fonction matrice de Mittag-Leffler à deux paramètres.*

Preuve. En appliquant la transformée de Laplace à l'équation d'état, on obtient

$$\mathcal{L}\left[{}_{C}D^{\alpha}x\left(t\right)\right]=\mathcal{L}\left[Ax(t)+Bu(t)\right]$$

d'après la formule (2.2.1)

$$\mathcal{L}\left[{}_{C}D^{\alpha}x\left(t\right)\right]=\lambda^{\alpha}X\left(\lambda\right)-\sum_{i=0}^{n-1}\lambda^{\alpha-i-1}\left[D^{(i)}x\left(0\right)\right]=AX\left(\lambda\right)+BU\left(\lambda\right)$$

où

$$\begin{aligned} X(\lambda) &= \mathcal{L}(x(t)) \\ U(\lambda) &= \mathcal{L}(u(t)) \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \lambda^{\alpha} X(\lambda) - AX(\lambda) &= \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^{\alpha-i-1} \left[D^{(i)} x(0)\right] + BU(\lambda) \\ |\lambda^{\alpha} I_n - A| \, X(\lambda) &= \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^{\alpha-i-1} \left[D^{(i)} x(0)\right] + BU(\lambda) \end{aligned}$$

comme $\lambda^{\alpha} I_n - A$ est régulière , alors

$$X(\lambda) = |\lambda^{\alpha} I_n - A|^{-1} \left[\sum_{i=0}^{n-1} \lambda^{\alpha-i-1} \left[D^{(i)} x(0)\right] + BU(\lambda)\right]$$

or

$$|\lambda^{\alpha} I_n - A|^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \lambda^{-(k+1)\alpha} \tag{5.0.5}$$

il s'ensuit

$$X(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \lambda^{-(k\alpha+1)} x_0 + \sum_{k=0}^{\infty} A^k \lambda^{-(k\alpha+2)} x_1 + ... + \sum_{k=0}^{\infty} A^k \lambda^{-(k\alpha+n)} x_{n-1} + \sum_{k=0}^{\infty} A^k \lambda^{-(k+1)\alpha} BU(\lambda) \tag{5.0.6}$$

En appliquant la transformée inverse de *Laplace*, on obtient

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}[X(\lambda)] = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \mathcal{L}^{-1}\left[\lambda^{-(k\alpha+1)}\right] x_0 + \sum_{k=0}^{\infty} A^k \mathcal{L}^{-1}\left[\lambda^{-(k\alpha+2)}\right] x_1 + ... + \\ & \sum_{k=0}^{\infty} A^k \mathcal{L}^{-1}\left[\lambda^{-(k\alpha+n)}\right] x_{n-1} + \sum_{k=0}^{\infty} A^k \mathcal{L}^{-1}\left[\lambda^{-(k+1)\alpha} BU(\lambda)\right] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \Phi_i(t)\, x_i + \int_0^t \Phi(t-\tau)\, Bu(\tau)\, d\tau \end{aligned}$$

où

$$\Phi_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \mathcal{L}^{-1}\left[\lambda^{-(k\alpha+i+1)}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^{\alpha k+i}}{\Gamma(\alpha k+i+1)} \qquad i = 0, 1, ..., n-1$$

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \mathcal{L}^{-1}\left[\lambda^{-(k+1)\alpha}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma[(k+1)\alpha]} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma[(k+1)\alpha]} t^{\alpha-1} \tag{5.0.7}$$

$$= t^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma[(k\alpha+\alpha)]} \tag{5.0.8}$$

$$= t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(At^{\alpha}) \tag{5.0.9}$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Maintenant nous étudions deux types de systèmes qui sont les systèmes positifs à dérivées fractionnaires standard et singuliers.

Dans tout ce qui suit, on va se limiter au cas $0 < \alpha \leq 1$

5.1 Solutions des systèmes standards à temps continu

Soit le système suivant

$$\begin{aligned} D^{\alpha} x(t) &= Ax(t) + Bu(t) \qquad & 0 < \alpha \leq 1 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \qquad & x(0) = x_0 \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

→ $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur d'état

→ $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée

→ $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie

→ E, A, B et C sont des matrices réelles de dimensions appropriées.

et notons $x(0) = x_0$ l'état à l'instant $t = 0$. l'état du système à l'instant t est donné par

$$\begin{cases} x(t) = \Phi_0(t) x_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau) Bu(\tau) d\tau \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{5.1.2}$$

avec

$$\Phi_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} = E(At^{\alpha}) \tag{5.1.3}$$

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma[(k+1)\alpha]} \tag{5.1.4}$$

et pour la sortie $y(t)$ il suffit de remplacer (5.1.2) dans la seconde équation du système (5.1.1) on trouve,

$$y(t) = C\Phi_0(t)x_0 + \int_0^t C\Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau + Du(t) \tag{5.1.5}$$

comme $0 < \alpha \leq 1$ alors $n = 1$, d'après la formule (5.0.1) on a,

$$x(t) = \Phi_0(t)x_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

c'est l'état du système à l'instant t.

Remarque 5 *De (5.1.3) et (5.1.4)pour $\alpha = 1$, nous avons*

$$\Phi_0(t) = \Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{\Gamma(k+1)} = e^{At}.$$

Remarque 6 *d'après le thèorème de Cayley-Hamilton on a*

$$\det[\lambda^{\alpha} I_n - A] = (\lambda^{\alpha})^n + a_{n-1}(\lambda^{\alpha})^{n-1} + ... + a_1\lambda^{\alpha} + a_0, \tag{5.1.6}$$

aussi

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + ... + a_1 A + a_0 I = 0. \tag{5.1.7}$$

Exemple 6 *D'après la formule de solution avec $0 \prec \alpha \leq 1$ et*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u(t)=1(t)=\begin{cases} 1 & pour \quad t\succ 0 \\ 0 & pour \quad t\prec 0 \end{cases} \tag{5.1.8}$$

de l'utilisation de (5.1.3)et (5.1.4) nous obtenons

$$\phi_0(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(\alpha k+1)}=I_2+\frac{At^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \tag{5.1.9}$$

$$\phi(t)=I_2\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+A\frac{t^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} \tag{5.1.10}$$

depuis

$$A^k=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad pour \quad k=2,3,...$$

donc la solution devient avec $u(t)=1$

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi_0(t)\,x_0+\int_0^t (t-\tau)Bu(\tau)d\tau \\ x(t) &= x_0+\frac{At^{\alpha}x_0}{\Gamma(\alpha+1)}+\int_0^t\left(\frac{B(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+\frac{AB(t-\tau)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)}\right)d\tau \\ x(t) &= x_0+\frac{At^{\alpha}x_0}{\Gamma(\alpha+1)}+\left[\frac{Bt^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)}+\frac{ABt^{2\alpha}}{2\alpha\Gamma(2\alpha)}\right] \end{aligned}$$

on a $\alpha\Gamma(\alpha)=\Gamma(\alpha+1)$

Remarque 7

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0+\frac{At^{\alpha}x_0}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{Bt^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{ABt^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \\ 1+\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5.2 Condition de Positivité

5.3 Positivité de Systèmes Linéaires Standard

5.3.1 Cas des systèmes à temps Continu

Positivité Interne

Définition 5.3.1 *Le système* (5.1.1) *est un système internement positive fractionnaire si et seulement si* $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$ *et* $y(t) \in \mathbb{R}_+^p$ *pour* $t \geq 0$ *pour toutes les conditions initiales* $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ *et toutes les entrées* $u(t) \in \mathbb{R}_+^m, t \geq 0$, $A = (a_{ij})$ *est une matrice carrée réelle de Metzler (Engheta, 1997; Kaczorek, 2002).*

Lemme 5.3.1 *Soit* $A \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ *et* $0 < \alpha \leq 1$ *puis*

$$\Phi_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} \in \mathbb{R}_+^{n\times n} \text{ pour } t \geq 0 \tag{5.3.1}$$

$$\text{et } \Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma[(k+1)\alpha]} \in \mathbb{R}_+^{n\times n} \text{ pour } t \geq 0 \tag{5.3.2}$$

si et seulement si A *est une matrice de Metzler*

Preuve. *(Nécessité) de l'expansion*

$$\begin{aligned} \Phi_0(t) &= I_n + \frac{At^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + ..., \\ \Phi(t) &= I_n \frac{t^{(\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)} + A\frac{t^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} + ... \end{aligned}$$

il s'ensuit que $\Phi_0(t) \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ *et* $\Phi(t) \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ *pour* $t > 0$ *si seulement si* A *est une matrice de Metzler*

(Suffisance) Il est bien connu dans (Kaczorek, 2002) que

$$e^{At} \in \mathbb{R}_+^{n\times n} \quad \text{pour} \quad t \geq 0 \tag{5.3.3}$$

si et seulement si A *est une matrice de Metzler*

Nous pouvons écrire (5.3.1)

$$\begin{aligned}\Phi_0(t) - e^{At^\alpha} &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(At^\alpha)^k}{\Gamma(k\alpha+1)} - \frac{(At^\alpha)^k}{k!}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k!\,(At^\alpha)^k - \Gamma(k\alpha+1)\,(At^\alpha)^k}{\Gamma(k\alpha+1)\,k!} \geq 0 \quad pour \quad t \geq 0\end{aligned} \tag{5.3.4}$$

depuis $k! \geq \Gamma(k\alpha+1)$ *pour* $0 \prec \alpha \leq 1$

de (5.3.3) *et* (5.3.4) *nous avons donc* $\Phi_0(t) \geq e^{At^\alpha}$ *pour* $t \geq 0$ *et la démonstration est similaire pour* $\Phi(t)$ ■

Théorème 5.3.1 *Le système* (5.1.1) *est un système internement positive fractionnaire à temps continu si et seulement si* A *est une matrice de Metzler et* $B \in \mathbb{R}_+^{n\times m}, C \in \mathbb{R}_+^{p\times n}, D \in \mathbb{R}_+^{p\times m}$

Preuve. *(Suffisance) d'après la solution du système (5.1.1) de forme* (5.1.2) *et* $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$, $t \geq 0$ *si* $\Phi(t) \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ *et* A *est une matrice de Metzler puisque* $\Phi_0(t) \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$, $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ *et* $u(t) \in \mathbb{R}_+^m, t \geq 0$

(Nécessité) Soit $u(t) = 0, t \geq 0$ *et* $x_0 = e_i$ *(le i-ème colonne de la matrice Identité* I_n *) .La trajectoire du système ne quitte pas l'orthant* $\mathbb{R}_+^n$ *seulement si* $x^\alpha(0) = Ae_i \geq 0$

ce qui implique $a_{ij} > 0$ *pour* $i \neq j$ *alors la matrice* A *doit être une matrice de Metzler. Pour la même raison* $x_0 = 0$, *nous avons* $x^\alpha(0) = B\ u(0) \geq 0$, *ce qui implique* $B \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$, *puisque* $u(0) \in \mathbb{R}_+^m$ *peuvent être arbitraires. A partir de (5.1.1) et* $u(t) = 0, t \geq 0$ *on a* $y(0) = Cx_0 \geq 0$ *et* $C \in \mathbb{R}_+^{p\times n}$, *puisque* $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$. *De même en supposant* $x_0 = 0$ *on obtient* $y(0) = Du(0) \geq 0$ *et* $D \in \mathbb{R}_+^{p\times m}$ *puisque* $u(0) \in \mathbb{R}_+^m$. ■

Nous considérons maintenant le cas de la positivité externe pour des systèmes linéaires fractionnaires à temps continu.

Positivité externe

Définition 5.3.2 *Le système* (5.1.1) *est un système externement positive si et seulement si la sortie correspondant à l'état initial nul est non nègative pour chaque entrée, ie on a* $y(t) \in \mathbb{R}_+^p$, $t \geq 0$ *pour toutes les entrées* $u(t) \in \mathbb{R}_+^m$, $t \geq 0$ *et* $x_0 = 0$.

La matrice de réponse impulsionnelle du système (5.1.1) *est donnée par*

$$g(t) = C\Phi(t)B + D\delta(t) \qquad \textit{pour } t \geq 0 \tag{5.3.5}$$

si on remplace (5.1.2) *dans* (5.1.1) *pour* $x_0 = 0$, *on trouve*

$$y(t) = \int_0^t C\Phi(t-\tau)Bu(\tau)\,d\tau + Du(t), \qquad t \geq 0 \tag{5.3.6}$$

de la formule (5.3.5) *on a* (5.3.6) *pour* $u(t) = \delta(t)$.

Définition 5.3.3 (*Condition pour la positivité externe*) *Un système linéaire est externement positif si et seulement si sa réponse impulsionnelle* (5.3.5) *est non négative, ie*

$$g(t) \in \mathbb{R}_+^{p\times m}, \ \textit{pourt} \geq 0 \tag{5.3.7}$$

avec,

$$g(t) = \begin{cases} e^{\phi_0 At}\phi_0 B & \textit{pour} \quad t > 0 \\ e^{\phi_0 At}\phi_0 B + \sum\limits_{j-1}^{\mu} C\phi_{-j}\left[B\delta^{(j-1)}(t) + D\delta(t)\right] & \textit{pour} \quad t = 0 \\ \textit{car si on suppose} \ \ x_0 = 0 \ \ \textit{et} \ \ u(t) = \delta(t) & \end{cases} \tag{5.3.8}$$

la nécessité de la condition (5.3.7) *s'ensuit immédiatement à partir de la définition* (4.4.2).*La sortie* $y(t)$ *du système* (5.1.1) *avec des conditions initiales égales à zéro pour toute entrée* $u(t)$ *est donné par la formule*

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)\,d\tau \tag{5.3.9}$$

ce qui peut être obtenu par la substitution de (5.3.5) *dans* (5.3.6). *Si la condition* (5.3.7) *est remplie* $u(t) \in \mathbb{R}_+^m$ *puis de* (5.3.9), *nous avons* $y(t) \in \mathbb{R}_+^p, t \geq 0$. *De* (5.3.5) *et* (5.3.1) *il en résulte que si* A *est une matrice de* $Metzler$ *et* $B \in \mathbb{R}_+^{n\times m}, C \in \mathbb{R}_+^{n\times p}$, $D \in \mathbb{R}_+^{p\times m}$, *la reponse impulionnelles* (5.3.5) *est positif ou nul. Par conséquent, nous avons les deux corollaires suivants:*

Corollaire 5.3.2 *La réponse impulsionnelle du système* (5.3.5) *est internement positif si la solution du* (5.1.1) *est positif ou nul.*

Corollaire 5.3.3 *La positivité interne du système fractionnaire* (5.1.1) *est aussi la positivité externe.*

5.4 Systèmes à temps variants

Parallèlement à ce qui à été caractérisé en terme de positivité interne et positivité externe pour différents systèmes (standards et singuliers), nous proposons une extension des résultats aux cas des systèmes à temps variant.

Nous considérons dans ce qui suit un modéle à temps variable et continu définit par:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & A(t)\,x(t) & + & B(t)\,u(t) \\ y(t) & = & C(t)\,x(t) & + & D(t)\,u(t) \\ x(t_0) & = & x_0 & & \end{cases} \tag{5.4.1}$$

ou $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est un vecteur d'entrée (commande ou contrôle) et $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est un vecteur de sortie

$A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ et $D(t)$ sont des matrices réelles de dimensions appropriées

5.4.1 Solution du problème

Une solution du modèle satisfaisant la condition initiale $x(t_0) = x_0$ est donneé par [14]

$$x(t) = \phi(t, t_0)\,x_0 + \int_{t_0}^{t} \phi(t,\tau)\,B(t)\,u(\tau)\,d\tau \tag{5.4.2}$$

où $\phi(t, t_0)$ est la matrice fondamentale et qui est définie par:

$$\phi(t, t_0) = I_n + \int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau + \int_{t_0}^{t} A(\tau) \int_{t_0}^{\tau} A(\tau_1)\,d\tau_1 d\tau + ... \tag{5.4.3}$$

d'après [14], si $A(t_1)A(t_2) = A(t_2)A(t_1)\,,\ t_1, t_2 \in [t_0, +\infty[$

d'où la condition (5.4.3) devient,

alors

$$\bar{\phi}(t, t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(\tau)\, d\tau\right) \tag{5.4.4}$$

Remarque 8 *Si* $A(t) = A$

$$\phi(t, t_0) = \exp A(t - t_0) = e^{A(t-t_0)} \tag{5.4.5}$$

Proposition 5.4.1 *La matrice fondamentale satisfait l'équation différentielle suivante:*

$$\dot{\phi}(t, t_0) = A(t)\,\phi(t, t_0) \tag{5.4.6}$$

$$\phi(t_0, t_0) = I_n \tag{5.4.7}$$

Preuve. On dérive (5.4.3) et on trouve:

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}(t, t_0) &= A(t) + A(t)\int_{t_0}^{t} A(\tau)\, d\tau + A(t)\int_{t_0}^{t} A(\tau)\int_{t_0}^{\tau} A(\tau_1)\, d\tau_1 d\tau + \ldots.. \\
\dot{\phi}(t, t_0) &= A(t)\left[I_n + \int_{t_0}^{t} A(\tau)\, d\tau + \int_{t_0}^{t} A(\tau)\int_{t_0}^{\tau} A(\tau_1)\, d\tau_1 d\tau + \ldots..\right] \\
\dot{\phi}(t, t_0) &= A(t)\,\phi(t, t_0)
\end{aligned}$$

■

5.4.2 Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle de système (5.4.1) est:

$$g(t, \tau) = C(t)\,\phi(t, \tau)\,B(t) + D(t)\,\delta(t - \tau) \tag{5.4.8}$$

pour $t \geq \tau,$ et $\delta(t)$ l'impulsion de Dirac.

La sortie du système, s'écrit en fonction de la réponse comme suit,

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} g(t,\tau)\, u(\tau)\, d\tau, \qquad t \geq t_0 \tag{5.4.9}$$

5.5 Positivité

Nous allons dans ce qui suit proposé une définition de positivité adaptée aux cas des systèmes variant dans le temps et à temps continu.

Nous commencerons par la positivité externe:

5.5.1 Positivité externe

Définition 5.5.1 *Le système* (5.4.1) *est dit externement positif si pour tout* $u(t) \in \mathbb{R}_+^m,\ t \geq t_0$ *et toute condition initiale nulle* $(x_0 = 0)$, *la sortie du système* $y(t) \in \mathbb{R}_+^p$ *pour* $t \geq t_0$.

Théorème 5.5.1 *Le système* (5.4.1) *est externement positif si et seulement si*

$$g(t) \in \mathbb{R}_+^{p \times m} \quad \text{pour } t \geq t_0 \tag{5.5.1}$$

Preuve. *la nécessité découle immédiatement de la définition* (4.6.1) *et la définition de la réponse impulsionnelle. Pour montrer la suffisance, supposons que*(5.5.1) *détient. Puis, à partir de* (5.4.9), *pour* $u(t) \in \mathbb{R}_+^m, t \geq t_0$ *nous avons* $y(t) \in \mathbb{R}_+^p$ *pour* $t \geq t_0$. ■

5.5.2 Positivité interne

Définition 5.5.2 *Le système* (5.4.1) *est internement positif si pour tout* $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ *et tous* $u(t) \in \mathbb{R}_+^m$, *l'état de vecteur* $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$ *et* $y(t) \in \mathbb{R}_+^p$ *pour* $t \geq t_0$.

Remarque 9 *Tous système internement positif est externement positif*

Lemme 5.5.1 *La matrice fondamentale satisfait,*

$$\phi(t, t_0) \in \mathbb{R}_+^{n \times n} \quad \text{pour } t \geq t_0, \tag{5.5.2}$$

si et seulement si les entrées hors diagonale $a_{ij},\ i \neq j, \quad i,j = 1,.....,n.$ *de la matrice* $A(t)$ *satisfont à la condition*

$$\int_{t_0}^{t} a_{ij}(\tau)\,d\tau \geq 0 \qquad pour \quad i \neq j, \qquad i,j = 1,.....,n. \tag{5.5.3}$$

Preuve. *Tout d'abord, nous allons montré que* (5.5.3) *implique* (5.5.2). *Soit* x_i *(resp.* $z_i(t)$*) le i-ème composant du vecteur* $x(t)$ *(resp* $z(t)$*) et*

$$x_i(t) = z_i(t) \exp\left(\int_{t_0}^{t} a_{ii}(\tau)\,d\tau\right), \qquad i,j = 1,.....,n. \tag{5.5.4}$$

La substitution de (5.5.4) *dans* (5.4.1) *pour* $u(t) = 0,\ t \geq t_0$ *donc (Ratajczak, 1967)*

$$\dot{z}(t) = \bar{A}(t)\, z(t), \tag{5.5.5}$$

où $\bar{A}(t) = [\bar{a}_{ij}(t)] \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\bar{a}_{ij}(t) = \begin{cases} a_{ij}(t) \exp\left(\int_{t_0}^{t} [a_{jj}(\tau) - a_{ii}(\tau)]\,d\tau\right) & pour \quad i \neq j, \\ 0 & pour \quad i = j, \end{cases} \tag{5.5.6}$$

de (5.5.4), *il s'ensuit que*

$$z_i(t_0) = x_i(t_0) \geq 0 \qquad pour \quad i = 1,.....,n \quad si \quad x_0 \in \mathbb{R}^n_+. \tag{5.5.7}$$

En utilisant (5.4.2) *pour* $u(t) = 0,\ t \geq t_0$ *et* (5.4.3) *pour* (5.5.5), *nous obtenons alos,*

$$z(t) = \bar{\phi}(t, t_0)\, z_0, \tag{5.5.8}$$

où

$$\bar{\phi}(t, t_0) = I_n + \int_{t_0}^{t} \bar{A}(\tau)\,d\tau + \int_{t_0}^{t} \bar{A}(\tau) \int_{t_0}^{\tau} \bar{A}(\tau_1)\,d\tau_1 d\tau + ... \tag{5.5.9}$$

de (5.5.6) *il s'ensuit que si* (5.5.3) *est vérifiée, alors* $\bar{A}(\tau) \in \mathbb{R}^{n\times n}_+$, *et par* (5.5.9) *ce qui implique*

$\bar{\phi}(t,t_0) \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ et $z(t) \in \mathbb{R}_+^n$, $t \geq t_0$ pour tout $z_0 \in \mathbb{R}_+^n$. Donc,à partire de (5.5.4) *et* (5.5.7)*, nous avons $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$, $t \geq t_0$ pour toute $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$. Par conséquent* (5.5.3) *implique* (5.5.2)*. La nécessité suit immédiatement* (5.4.4) *et le fait que $\bar{\phi}(t,t_0) \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ seulement si $\int_{t_0}^{t} \bar{A}(\tau)\,d\tau$ est une matrice de Metzler pour $t \geq t_0$(Kaczorek, 1998a)* ■

Remarque 10 *Si la matrice $A(t)$ est indépendante de t, c'est à dire $A(t) = A = [a_{ij}]$ et $a_{ij} \geq 0$ pour $i \neq j$ alors A est une matrice de Metzler (Farina et Rinaldi, 2000; Kaczorek, 2001) et $\phi(t,t_0) = \exp(A(t-t_0))$.*

Théorème 5.5.2 *Le Système* (5.4.1) *est internement positif si et seulement si*

i) Les entrées hors diagonale de $A(t)$ satisfonte (5.5.3)*,*

ii) $B(t) \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$, $C(t) \in \mathbb{R}_+^{p\times n}$, $D(t) \in \mathbb{R}_+^{p\times m}$ pour $t \geq 0$.

Preuve. Necesité: soit $u(t) = 0$ pour t$\geqslant t_0$ et x$_0$=e$_j$, la trajectoirene peut quitté l'orthant

positif $\mathbb{R}_+$ seulement si

$\dot{x}(t) = A(t_0)\mathrm{e}_j \geq 0.$ et ceci implique $(4.5.3)$.

pour la méme raisons, pour $x_0 = 0$ nous avons $\dot{x}(t_0) = Bu(t_0) \geq 0.$ et ceci implique $B(t) \in \mathbb{R}_+^{n\times m}, t \geq t_0$

du fait que $u(t) \in \mathbb{R}_+^m, t \geq 0.$ pour $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$.

on procéde de la méme maniere pour $y(t)$

suffisance: si $(4.5.3)$ et satisfaite on montre facilemant que le système est positif. ■

Chapitre 6

Stabilité des systèmes linéaires à temps continu

L'étude de la stabilité est d'une importance capitale dans l'étude des systèmes et des systèmes asservis. Voici des définitions intuitives;

Définition 6.0.3 *Un système est stable si, légèrement perturbé de sa position déquilibre, il y revient. il est instable, s'il s'en éloigne.*

Définition 6.0.4 *Un système linéaire est dit externement stable si la sortie du système forcée sa sortie pour* $(x(0) = 0)$, *est bornée pour chaque entrée bornée.*

6.1 Stabilité asymptotique de systèmes positifs standards

Soit le système linéaire à temps continu suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & Ax(t) \quad t \in \mathbb{R}_+ \\ y(t) & = & Cx(t) \end{cases} \tag{6.1.1}$$

→ $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur d'état

→ $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie

→ A et C sont deux matrices réelles de dimensions appropriées.

Théorème 6.1.1 *Le système* (6.1.1) *est asymptotiquement stable si sa solution* $x(t) = e^{At}x_0$ *satisfait la condition*

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} e^{At}x_0 = 0 \quad \textit{pour tout } x_0 \in \mathbb{R}_+.$$

en pratique, après certaines perturbations, ce système ne s'eloigne pas trop de son point d'équilibre et il vient après un certains temps.

Théorème 6.1.2 $[T.Kaczorek]$*Le système* (6.1.1) *est asymptotiquement stable si seulement si les propositions suivantes sont équivalentes.*

1-Les valeurs propres de la matrice A *sont à partie réelle négative ie;*

$$\operatorname{Re}\lambda_k < 0, \ \forall k \in 1, ..., n.$$

2-$\det(\lambda I_n - A) \neq 0 \quad$ *pour* $|\lambda| \geq 1$

3-Le rayon spectrale de la matrice A *est inferieur à 1 ie*

$$\rho(A) < 1, \ \textit{avec } \rho(A) = \max_{1\leq k\leq n}(|\lambda_k|)$$

4-Tout les coeffécients du polynôme caractiristique, $\hat{a}_i$ *avec* $i = 0, ..., n-1$ *de*

$$p_{\hat{A}}(\lambda) = \det\left(I_n - \lambda\hat{A}\right), \ \textit{et}$$

$$\det(I_n - \lambda(A - I_n)) = \det(I_n(\lambda+1) - A) = \lambda^n + \hat{a}_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + \hat{a}_1\lambda + \hat{a}_0 \ \textit{sont positifs}$$

5-Tout les mineurs principales de la matrice $\bar{A} = I_n - A$, *tel que*

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & ... & \bar{a}_{1n} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & ... & \bar{a}_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & . & . \\ . & . & & . \\ \bar{a}_{n1} & \bar{a}_{n2} & ... & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix} \quad \textit{sont positifs}$$

ie, $|\bar{a}_{11}| > 0$ *et* $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \det(A) > 0.$

6- Il exist un vécteur $\bar{x} > 0$ *tel que* $[A - I_n]\,\bar{x} < 0.$

Théorème 6.1.3 *: Stabilité de Lyaponov*

Le système (6.1.1) *est asymptotiquement stable (ou les valeurs propres de* A *sont à parties réelles négatives) si seulement si pour toute matrice symétrique définie positive* Q*, il existe une matrice* P *symétrique définie positive satisfisant l'équation de Lyaponov:*

$$A^T P + PA + Q = 0.$$

Preuve. *voir [15]* ■

6.2 Stabilité asymptotique des systèmes linéaires singuliers positifs

Nous étendons les résultats, vus précedement au cas singulier

Soit le système linéaire à temps continu suivant:

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) & = & Ax(t) \quad t \in \mathbb{R}_+ \\ y(t) & = & Cx(t) \end{cases} \tag{6.2.1}$$

où,

→ $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur d'état

→ $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie

→ E, A *et* C sont des matrices réelles de dimensions appropriées.

Théorème 6.2.1 *Le système* (6.2.1) *est asymptotiquement stable si seulement si sa solution* $x(t) = e^{\phi_0 A t} E x_0$ *satisfait la condition,*

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{t \to \infty} e^{\phi_0 A t} E x_0 = 0 \qquad \textit{pour tout } x_0 \in \mathbb{R}_+.$$

Autrement dit

$$\lim_{t\to\infty} e^{\phi_0 At} = 0 \quad d'ou \quad \lim_{t\to\infty} \|\phi_0(t)\| = 0.$$

et pour les memes raisons, nous aurons la caractérisation suivante;

Théorème 6.2.2 [*T.Kaczorek*] *Le système* (6.2.1) *est asymptotiquement stable si et seulement si les propositions suivantes sont équivalentes.*

1-Les valeurs propres de la matrice A sont à partie réelle négative ie;

$$\operatorname{Re}\lambda_k < 0, \ \forall k \in 1, ..., n.$$

2-Tout les coeffécient du polynôme caractiristique, $\hat{a}_i$ avec $i = 0, ..., n-1$ de

$$p_{\hat{A}}(\lambda) = \det\left(EI_n - \hat{A}\right) = \det\left(E\lambda - (A - E)\right)$$

$$\det\left(E(\lambda - I_n) - A\right) = \lambda^n + \hat{a}_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + \hat{a}_1\lambda + \hat{a}_0 \text{ sont positifs}$$

3-Tout les mineurs principales de la matrice $\bar{A} = EI_n - A$,

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & ... & \bar{a}_{1n} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & ... & \bar{a}_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ \bar{a}_{n1} & \bar{a}_{n2} & ... & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{sont positifs}$$

ie, $|\bar{a}_{11}| > 0$ *et* $\begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} \end{vmatrix} > 0, et \det(A) > 0$

4- Il exist un vécteur $\bar{x} > 0$ tel que $[A - EI_n]\bar{x} < 0$.

5-Le rayon spectrale de la matrice A est inferieur à 1 ie $\rho(A) < 1$.

6-existe'il un vecteurs $\bar{x} > 0$ tel que $[A - EI_n]\bar{x} < 0$.

6.3 Stabilité asymptotique des systèmes positifs fractionnaires standard

Soit le système linéaire à temps continu suivant:

$$\begin{cases} D^{\alpha}x(t) & = & Ax(t) & 0 < \alpha \leq 1 \\ y(t) & = & Cx(t) & t \in \mathbb{R}_+ \end{cases} \tag{6.3.1}$$

où,

→ $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur d'état

→ $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie

→ A *et* C sont deux matrices réelles de dimensions appropriées.

Théorème 6.3.1 $[T.Kaczorek]$ *Le système* (6.3.1) *est asymptotiquement stable si sa solution* $x(t) = \phi_0(t)\, x_0$ *satisfait la condition*

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} \phi_0(t)\, x_0 \ \ ou \ \ \lim_{t\to\infty} \|\phi_0(t)\| = 0 \ pour\ tout\ x_0 \in \mathbb{R}_+.$$

Théorème 6.3.2 $[T.Kaczorek]$ *Le système* (6.3.1) *est asymptotiquement stable si les propositions suivantes sont équivalentes.*

1-Les valeurs propres de la matrice A_α *Sont à partie real négative ie;*

$$\operatorname{Re}\lambda_k < 0,\ \forall k \in 1, ..., n.$$

2-$\det(I_n - \lambda A_\alpha) \neq 0$ *pour* $|\lambda| \geq 1$ *avec* $\lambda \in \mathbb{C}$

3-Tout les mineurs principales de la matrice $\bar{A} = I_n - A_\alpha = I_n - A - I_n\alpha = I_n(1-\alpha) - A$ *tel que:*

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & ... & \bar{a}_{1n} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & ... & \bar{a}_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ \bar{a}_{n1} & \bar{a}_{n2} & ... & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix} \quad sont\ positifs$$

$|\bar{a}_{11}| > 0$ *et* $\begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} \end{vmatrix} > 0$,*et* $\det\left(\bar{A}\right) > 0$

4–Le rayon spectrale de la matrice A_α inferieur à 1 ie $\rho(A) < 1$.

5-Tout les coeffécients $\hat{a}_i$ avec $i = 0, ..., n-1$ de

$$p_{\hat{A}}(\lambda) = \det\left(\lambda I_n - \hat{A}\right) = \det\left(\lambda I_n - (A_\alpha - I_n)\right) = \det\left(\lambda I_n - (A + \alpha I_n - I_n)\right).$$

$$\det\left(I_n(\lambda - \alpha + 1) - A\right) = \lambda^n + \hat{a}_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + \hat{a}_1\lambda + \hat{a}_0 \text{ \textit{sont positifs}}$$

6-existe t-il un vecteur $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}_+^n$ tel que:

$(A_\alpha - I_n)\bar{x}_0 = (A + I_n\alpha - I_n)\bar{x}_0 = (A + I_n(\alpha - 1))\bar{x}_0 < 0.$

Partie IV

Conclusion générale

L'étude que nous avons menée dans ce mémoire est organisée en deux parties, nous avons commencé par rappeler la solution d'un système linéaire standard à temps continu ainsi que des conditions nécessaires et suffisantes de positivité; pour ensuite entamer l'objet de notre travail qui est la théorie des systèmes linéaires fractionnaires à temps continu qui s'avère nouvelle et qui attirent l'attention d'un grand nombre de chercheurs.

La solution du système singulier a fait de même l'objet d'une section à part. Nous avons cependant caractérisé des conditions nécessaires et suffisantes pour la positivité de cette classe de systèmes.

Dans la dernière partie de ce mémoire, nous nous sommes, intéressé à une autre classe de systèmes, qui est la classe des systèmes fractionnaires positifs

Le principal objectif était d'étendre les résultats sur la positivité des chapitres précédents à ce type de systèmes; plus particulièrement au cas des systèmes singuliers. Pour enfin, procéder

à l'analyse de la stabilité. Malgré ces développements, certains axes méritent des réflexions plus approfondies et les perspectives demeurent nombreuses.

Bibliographie

[1] T.Kaczorek, Positive linear systems and their relationship with electrical circuits, XX-SPETO : 33-41. 1997.

[2] R.F.Brown, Biomedical systems analysis via compartemental concepts (Abacus Press, Tunbridge Wells, 1985).

[3] R.B.Chase and N.J.Aquilano, Production and operations management (Irwin, Chicago, 1995).

[4] D.G.Luenberger, Introduction to dynamic systems : Theory, Models and Applications (Academic Press,New york, 1976).

[5] V.G. Rumchev and A.L. Konin, Decision support systems for manpower planning :Mathematical Models (Radio and Communication Press, Moscow, 1984), (in russian).

[6] S.P. Sethi and G.L. Thompson, Optimal control theory : Applications to Management Science (Matrinus Nijo , Boston, 1981).

[7] F. Szidarovsky and A.T. Bahill, Linear systems theory (CRC Press, London, 1992).

[8] T.E. Vollman et al., Manufacturing planning and control systems (Irwin, IL, 1992).

[9] L.Cacceta and V.G. Rumchev, A Survey of reachability and controllability for positive linear systems, Annals of Operation Research 98, 101-122, 2000.

[10] Jan H. Van Schuppen, Control and system theory of positive systems, version feb.13, 2007.

[11] T.Kaczorek, Positive 1D and 2D systems, Springer Verlag, Berlin, Academy 2002. 431 pages.

[12] L.Farina, S.Rinaldi, Positive linear systems : Theory and Applications, Wiley, New York, 2000.

[13] FRACTIONAL POSITIVE CONTINUOUS-TIME LINEAR SYSTEMS AND THEIR REACHABILITY Sci.,2008, vol.18,No.2,223-228

[14] Fr.Gantmacher T_1et T_2

[15] N.K.Son and D.Hinrichsen, Stability radii of positive discrete-time systems, Proc.Third International Conference on approximation and optimization, Puebla, Mexico 1-13.

[16] Djillali BOUAGADA, Thèse de Doctorat d'état, Systèmes Différentiels Singuliers Positifs et LMIs 2007

[17] Samir LADACI, Thèse de Doctorat d'état, CONTRIBUTION A LA COMMANDE ADAPTATIVE D'ORDRE FRACTIONNAIRE, Année : 2007

[18] Adam Loverro, Fractional Calculus: History, De¯nitions and Applications for the Engineer, May 8, 2004

[19] Kamel Haouam, Existence et non-existence de solutions des équations différentielles fractionnaires, Septembre 2007

[20] xuru.org, Introductory Notes on Fractional Calculus, July 31, 2006

[21] Ibrahima N'DOYE, G en eralisation du lemme de Gronwall-Bellman pour la stabilisation des syst emes fractionnaires, 23 fevrier 2011.

[22] Saliha Marir Mémoire de magister-2011, probléme de contrabilité des systèmes différentiels fractionnaires.

[23] Amina djellalili Mémoire de magister-2011, etude et caractérisation des systèmes différentiels linéaires positifs.