Ministère de l'Enseignement Supérieur et De La Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohammed Boudiaf
Département de Génie des Matériaux

Examen final de : **Mathématiques 3** L2 GP(2021/2022) [Durée :**1h30min**]

Large

Exercice 01 : **(05 points)**

1) Calculer l'intégrale $I_1 = \int\int_{\mathbf{D}} \sin(\mathbf{x}) \cos \mathbf{y}\ \ \mathbf{dxdy}$, avec $D = \left[\mathbf{0}, \frac{\pi}{\mathbf{2}}\right]^{\mathbf{2}}$.

2) Calculer l'intégrale $I_2 = \int\int_C \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{1 + x^2 + y^2}} dxdy$, avec $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \mathbf{xy \geq 0},\ \mathbf{x^2 + y^2 \leq 4}\}$. **Tracer** C.

3) Calculer l'intégrale $I_3 = \int\int\int_V \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{(1 + z)^3}}\ dxdydz$,
avec $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \ \mathbf{0 \leq x \leq 1},\ \ \mathbf{0 \leq y \leq x},\ \mathbf{0 \leq z \leq y}\}$.

Exercice 02 : **(05 points)**

1) Etudier la nature des intégrales suivants : $I_1 = \int_0^1 \frac{\sqrt{\mathbf{t^3 + 1}}}{\mathbf{t^4 + t^2}} dt$, $I_2 = \int_0^1 \frac{\sin(\mathbf{t^2})}{\sqrt{\mathbf{t}}} \mathbf{dt}$.

2) Montrer que $J = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(\mathbf{t})}{\mathbf{1 + t^2}} dt$, converge, a) directement, b) par le critère de Riemann.

Exercice 03 : **(05 points)**

1) Résoudre l'équation différentielle suivante : $-\mathbf{z}' + \frac{\mathbf{z}}{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1 + x}} ....(E_1)$

2) Déduire la solution de l'équation différentielle (E_2) donnée par : $\mathbf{y}' + \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{y^2}}{\mathbf{1 + x}}$.

Exercice 04 : **(05 points)**

a) Retrouver l'original de la transformée de Laplace suivante : $F(p) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{(p + 3)(p + 2)^2}}$

b) Résoudre l'équation différentielle en utilisant la transformée de Laplace :
$\mathbf{y''(t) + 5y'(t) + 6y(t)} = \mathbf{e^{-2t}}$, *avec* $\mathbf{y'(0) = y(0) = 0}$. **Puis déduire la solution particulière**.

c) Montrer que $\mathcal{L}(\mathbf{cos}(\omega \mathbf{t}))(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{p^2} + \omega^{\mathbf{2}}}$ en utilisant les transformations de Laplace çi-dessous.

Indication :$\mathcal{L}(\mathbf{e^{at}})(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p - a}}, \mathbf{t \geq 0}$. $\mathcal{L}(\mathbf{t^n e^{at}})(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{(p-a)^{n+1}}}, \mathbf{t \geq 0}$
$\mathcal{L}(f^{(n)}(t))(p) = \mathbf{p^n \mathcal{L}(f)(p) - p^{n-1} f(0^+) - p^{n-2} f'(0^+)} - \cdots - \mathbf{f^{(n-1)}(0^+)}$

Bon 😊
courage!

Dr. I.Medjadj

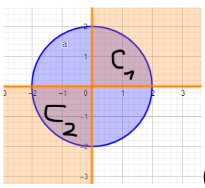
Ministère de l'Enseignement Supérieur et De La Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohammed Boudiaf
Département de Génie des Matériaux

Faculté de chimie L2 Maths3

Solution d'Examen(2021/2022)

Solution Exercice 01 :

1) $I_1 = \int\int_D \sin(x)\cos y dxdy = \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin(x)dx \times \int_0^{\pi/2} \cos(y)dy}_{\textbf{(0.25pt)}} = \underbrace{\left[-\cos(x)\right]_0^{\pi/2}\left[\sin(y)\right]_0^{\pi/2}}_{(0.5pt)} = \underbrace{1}_{\textbf{(0.25pt)}}$



2) (0.25*2=**0.5**) suivant le domaine $C = C_1 \cup C_2$ on passe au coordonnées polaires :

$\begin{cases} x = r\cos(x)...(\textbf{0.25pt}), \ |J| = r...(\textbf{0.25pt}) \\ y = r\sin(x)....(\textbf{0.25pt}) \ , \end{cases}$ où $C_1 = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2, r \in [0,2], \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]\}...(\textbf{0.25pt})$, $C_2 = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2, r \in [0,2], \theta \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]\}...(\textbf{0.25pt})$ L'intégrale devient :

$$I_2 = \underbrace{\int_0^2 \frac{r^2}{1+r^2}dr[\int_0^{\pi/2}\cos(\theta)d\theta + \int_\pi^{3\pi/2}\cos(\theta)d\theta]}_{\textbf{(0.25pt)}} = \underbrace{\left[r - \arctan(r)\right]_0^2[\left[\sin(\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\sin(\theta)\right]_\pi^{\frac{3\pi}{2}}]}_{\textbf{(0.25pt)}} = \underbrace{0}_{\textbf{(0.25pt.)}}$$

Autre Méthode : Le domaine est symétrique par rapport à O l'origine....**(1pt)** et d'autre part, pour tout couple (x,y) de D, on a $f(-x,-y) = -f(x,y)$..... **(1pt)**. On a donc $I_3 = 0$ ....**(0.5pt)**

$$\begin{aligned} 3)I_3 &= \overbrace{\int_0^1 \left[\int_0^x \left(\int_0^y \frac{1}{(1+z)^3}dz\right)dy\right]dx}^{\textbf{(0.25)}} = \overbrace{-\frac{1}{2}\int_0^1 \left[\int_0^x \left[(1+z)^{-2} - 1\right]_0^y dy\right]dx}^{\textbf{(0.25pt)}} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^1 x\left[\left[(1+y)^{-1} + y\right]_0^x\right]dx}_{\textbf{(0.25pt)}} = \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^1 \left[(1+x)^{-1} + x - 1\right]dx}_{\textbf{(0.25pt)}} = \underbrace{\frac{1}{2}[\ln(1+x) + \frac{x^2}{2} - x]_0^1}_{\textbf{(0.25pt)}} = \underbrace{\frac{1}{2}(ln(2) - \frac{1}{2})}_{\textbf{(0.25pt)}} \end{aligned}$$

Solution Exercice 02 : 1.)a)on a $\frac{\sqrt{t^3+1}dt}{t^4+t^2} = \frac{\sqrt{t^3+1}dt}{t^2(1+t^2)} \sim^0 \frac{1}{t^2}..(\textbf{0.5pt})$, au $v(0)$

$\underbrace{\int_0^1 \frac{1}{t^2}, \text{ diverge intégrale de Riemann 2ème espèce } \alpha = 2 > 1}_{\textbf{(0.5pt)}}$ on déduit que : I_1 est divergente...**(0.25pt)**

b) De même $\frac{\sin(t^2)}{\sqrt{t}} \sim^0 t^{\frac{3}{2}}..(\textbf{0.5pt})$, $\underbrace{\int_0^1 t^{3/2}dt \text{ est une intégrale simple convergente}}_{\textbf{(0.5pt)}}$, alors :$\underbrace{I_2 \text{ converge}}_{\textbf{(0.25)}pt}$.

2) Soit $x > 0$, calculons l'intégrale : $\int_0^x \frac{\arctan(t)}{1+t^2}dt$ sous la forme $\overbrace{\int u'u = u^2/2}^{}$, **(0.5)pt**

$J = \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left[\arctan^2(t)/2\right]_x^0}_{\textbf{(0.25)pt}} = \arctan^2(x)/2 = \underbrace{\frac{\pi^2}{8}}_{\textbf{(0.5)pt}}$ d'où la convergence.

Par le critère de Riemann : $\overbrace{\frac{\arctan(t)}{1+t^2} \sim \frac{\frac{\pi}{2}}{t^2}}^{\textbf{(0.5)pt}}$ au $v(+\infty)$ car $\overbrace{\lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{\arctan(t)}{1+t^2}}{\frac{\frac{\pi}{2}}{t^2}} = 1}^{\textbf{(0.25)pt}}$.

$\underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}, \text{ converge intégrale de Riemann 1ère espèce } \alpha = 2 > 1}_{\textbf{(0.5pt)}}$ ainsi J converge.

Solution Exercice 03 : 1) on résout d'abord l'équation homogène : $\overbrace{(E_h) : -z' + \frac{z}{x} = 0}^{\textbf{(0.25)pt}}$ on a : $\underbrace{\frac{dz}{dx} = z/x}_{\textbf{(0.25)pt}} \underbrace{\Rightarrow \ln|z| = \ln|x| + c}_{\textbf{(0.25)pt}} \Rightarrow \underbrace{z = Kx}_{\textbf{(0.25)pt}}, \underbrace{k = \pm e^c, c \in \mathbb{R}}_{\textbf{(0.25)pt}}$. On cherche ensuite une solutio particulière en ulilisant la méthode de la variation de la constante notée M.V.C, on pose $\overbrace{z(x) = k(x)x}^{\textbf{(0.25)pt}}$ En remplaçant dans (E_1) on aura :

$$\overbrace{-xk'(x) - k(x) + k(x) = \frac{1}{1+x}}^{\textbf{(0.25)pt}} \Rightarrow \overbrace{k(x) = -\int \frac{1}{x(x+1)}dx}^{\textbf{(0.25)pt}} = \overbrace{-a\ln|x| - b\ln|x+1|}^{\textbf{(0.5)pt}} = \overbrace{\ln|1+x| - \ln|x|}^{\textbf{(0.5)pt}}.$$

Ainsi $\overbrace{z_p = x\ln|\frac{1+x}{x}|}^{\textbf{(0.25)pt}}$, $\overbrace{y_g = xk + x\ln|\frac{1+x}{x}|}^{\textbf{(0.25)pt}}$.

2)(E_2) **c'est une différentielle de Bernoulli..(0.25pt)**, $\overbrace{\text{on } E_2 \text{ divise par} y^2}^{\textbf{(0.25)pt}}$, on aura :$\overbrace{y'y^{-2} + \frac{y^{-1}}{x} = \frac{1}{1+x}}^{\textbf{(0.25)pt}}$, puis on pose $\overbrace{z = y^{-1}}^{\textbf{(0.25)pt}} \Rightarrow \overbrace{z' = -y'y^{-2}}^{\textbf{(0.25)pt}}$ on obtient (E_1) ainsi la solution $y = z^{-1} = (xk + x\ln|\frac{1+x}{x}|)^{-1}$...**(0.25)pt)**.

Solution Exercice 04 : A)La décompoition : $F(p) = \frac{1}{(p+3)(p+2)^2} = \frac{a}{p+3} + \frac{b}{p+2} + \frac{c}{(p+2)^2}$...**(0.25)*3=0.75pt)**
$a = \lim_{p\to-3} \frac{1}{(p+2)^2} = 1$..**(0.25pt)**, $c = \lim_{p\to-2} \frac{1}{p+3} = 1$..**(0.25pt)**. $b = -a = -1$..**(0.25pt)**.
$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p)) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{p+3}) - \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{p+2}) + \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{(p+2)^2})$...**(0.25pt)** car $\mathcal{L}^{-1}$ est **linéaire**
$\mathbf{y(t) = e^{-3t} - e^{-2t} + te^{-2t}, t \geq 0}$**....(0.75pt)**
B)$y'' + 5y' + 6y' = e^{-2t}, y'(0) = y(0) = 0$..$(E)$. En appliquant la transformée de Laplace à (E) on aura :
$\mathcal{L}(y'' + 5y' + 6y) = \mathcal{L}(e^{-2t}) = \frac{1}{p+2}$..**(0.25pt)**, $\mathcal{L}(y'') = p^2F(p) - y'(0) - py(0) = p^2F(p)$..**(0.25pt)**,
$\mathcal{L}(y') = pF(p) - y(0) = pF(p)$..**(0.25pt)** $\mathcal{L}(y) = F(p)$ on pose $F(p) = Y$ on remplaçe dans l'équation on obtient : $\underbrace{p^2F(p) + 5pF(p) + 6F(p) = \frac{1}{p+2}}_{\textbf{(0.25)pt}} \Leftrightarrow \underbrace{Y = \frac{1}{(p+3)(p+2)^2}}_{\textbf{(0.25)pt}}$ ainsi d'après la question précédente
$y(t) = e^{-3t} - e^{-2t} + te^{-2t}, t \geq 0$....**(0.25pt)**. La solution particulière est $y_p = te^{-2t}$....**(0.25pt)**
c)$\underbrace{\cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}}_{\textbf{(0.25)pt}} \Rightarrow \mathcal{L}(\cos(\omega t))(p) = \underbrace{\frac{1}{2}[\mathcal{L}(e^{i\omega t})(p) + \mathcal{L}(e^{-i\omega t})(p)]}_{\textbf{(0.25)pt}} = \underbrace{\frac{1}{2}[\frac{1}{p+i\omega} + \frac{1}{p-i\omega}]}_{\textbf{(0.25)pt}} = \frac{p}{p^2+a^2}$.

Dr. Medjadj