Algèbre I
L1 ING chimie

Meriem Henkouche

Sommaire

Chapitre 1

Notions de logique

1.1 La logique

1) **Les assertions**

   Définition 1.1.1 *Une assertion est une phrase soit vraie, soit fausse, puis les deux en même temps. «il pleut » assertion vraie ou fausse. « $2+2=4$ », assertion vraie.*
   «$5\times 4=20$ » assertion vraie.

   On range les différentes valeurs Vrai ou Faux dans une table de vérité : ‶1 ″ désigne Vrai. ‶0″

P
1
0

   désigne Faux. Pour la table de vérité de $\overline{P}$ qui est la négation de P on a :

$\overline{P}$
0
1

2) **La négation d'une relation :**
   Elle est définie de la manière suivante : La table de vérité est :

Si P est vraie	$\overline{P}$ est fausse
Si P est fausse	$\overline{P}$ est vraie

3) **Les connecteurs logiques** « et », « ou », « $\Longrightarrow$ », et « $\Longleftrightarrow$ » :

   a) L'opérateur «et » : **Conjonction**
      «P et Q »est vraie si P et Q le sont en même temps sinon « P et Q » est fausse. Cet opérateur est appelé conjonction logique. Il est noté $\wedge$. La table de vérité de « $P\wedge Q$ » est la suivante :

P	$\overline{P}$
1	0
0	1

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

On peut présenter la table de vérité sous une autre forme de tableau :

P \ Q	V	F
V	V	F
F	F	F

« V » désigne Vrai et « F » pour Faux.

Exemple 1.1.1

$$P: \quad 2 < 6$$

$$Q: \quad 2 \leq 3$$

$$P \wedge Q: \quad 2 \leq 3 < 6$$

b) L'opérateur «P ou Q» : **Disjonction**
«P ou Q» est vraie si au moins une des assertions est vraie. Cet opérateur est appelé disjonction logique et est noté $\vee$.

Exemple 1.1.2

$$P: \quad 1 < 3$$

$$Q: \quad 5 = 4 + 2$$

$$P \vee Q: \quad (1 < 3) \vee (5 = 4 + 2)$$

$P \vee Q$ est vraie.

La table de vérité de $P \vee Q$ (ou inclusif) :

TABLE 1.1 – $P \vee Q$ (Disjonction (ou inclusif))

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Le ou exclusif est vrai quand une assertion est vraie, et faux quand les deux sont vraies en même temps .

TABLE 1.2 – $P \vee Q$ (ou exclusif)

P	Q	$P \vee Q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

4) **L'implication**

$$P \Longrightarrow Q$$

Définition 1.1.2 *Pour deux assertions P et Q, on appelle $P \Longrightarrow Q$ l'assertion $(\neg P \vee Q)$. On dit aussi si P est vraie alors Q est vraie ou si P alors Q. $\neg P$ se note aussi $\overline{P}$.*

Pour l'assertion $\neg P$ ou Q on a la table de vérité suivante :

TABLE 1.3 – $P \Longrightarrow Q$

P	Q	$P \Longrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

5) **L'équivalence**
L'assertion $P \Longleftrightarrow Q$ est équivalente à «$(P \Longrightarrow Q)$ et $(Q \Longrightarrow P)$». On dit aussi «P et seulement si Q ». Cette assertion est vraie lorsque P et Q sont vraies ou P et Q sont fausses. On peut aussi écrire :

$$(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow P) \Longleftrightarrow P \Longleftrightarrow Q$$

Pour la table de vérité de $P \Longleftrightarrow Q$:

TABLE 1.4 – $P \Longleftrightarrow Q$

P	Q	$P \Longleftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Remarque 1.1.1

$$(P \Longrightarrow Q) \Longrightarrow \overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$$

On peut le montrer par la table de vérité.

6) **Propriétés**

i)

$$\overline{\overline{P}} = P \qquad P \wedge P \Longleftrightarrow P$$

ii)

$$P \wedge Q \Longleftrightarrow Q \wedge P, \qquad \text{loi est commutative}$$

iii)

$$P \vee Q \Longleftrightarrow Q \vee P, \qquad \text{loi est commutative}$$

iv)

$$(P \wedge Q) \wedge L \Longleftrightarrow (P \wedge (Q \wedge L)$$

v)

$$(P \vee Q) \wedge L \Longleftrightarrow (P \wedge L) \vee (P \wedge L)$$

vi)

$$(P \vee (Q \wedge L) \Longleftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee L)$$

vii)

$$[(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow L)] \Longleftrightarrow (P \Longrightarrow L)$$

7) **Les lois de Morgan :**
Soient les propositions suivantes P, Q :

1.

$$\overline{P} \vee \overline{Q} = \overline{P \wedge Q}$$

2.

$$\overline{P} \wedge \overline{Q} = \overline{P \vee Q}$$

La table de vérité :

TABLE 1.5 – Les lois de Morgan

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P} \vee \overline{Q}$	$P \wedge Q$	$\overline{P \wedge Q}$	$\overline{P} \wedge \overline{Q}$	$P \vee Q$	$\overline{P \vee Q}$
1	1	0	0	0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0	1	1	0	1

1.2 Prédicats

Définition 1.2.1 *On appelle prédicat tout énoncé contenant une ou plusieurs variables, et qui devient une proposition quand on substitue aux variables des objets concrets.*

Exemple 1.2.1 *1. L'entier n divise 2. (Cet enoncé est un prédicat).*

2. Le réel x est supérieur á 1. (Cet enoncé est un prédicat). Les prédicats sont souvent notés $P(x)$, $Q(x, y)$, $L(z), P(x, y, z), \ldots$ etc...
A partir d'un ou plusieurs prédicats, on peut en construire d'autres, dits prédicats composés, en utilisant la négation, la conjonction, la disjonction, l'implication et l'équivalence.

Exemple 1.2.2 *1.*

$$(x^2 = 25) \Longrightarrow ((x = 5) \vee (x = -5))$$

(Cet énoncé est un prédicat)

2.

$$(x \in \mathbb{N}) \wedge (x \leq 0) = 1 \Longrightarrow (x = 0)$$

(Cet énoncé est un prédicat)

3.

$$|x| = \left|y\right| \Longleftrightarrow [(x = y) \vee (x = -y)]$$

(Cet énoncé est un prédicat).

1.3 Les quantificateurs

1. $\forall$: pour tout
   Une assertion P peut dépendre d'un paramètre x, par exemple « $x^2 \geq 1$ » $P(x)$ est vraie ou fausse selon la valeur de x.
   $$\forall\, x \in E, \quad P(x)$$
   E est un ensemble non vide. Cette proposition dans certains cas peut être vraie comme fausse. $P(x)$ est un prédicat.

   Exemple 1.3.1 *«* $\forall\, x \in [0,+\infty[, x^2 \geq 0$ *» est une assertion vraie.*
   «$\forall\, x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 1$ *», cette assertion est fausse.*

2. Il existe : $\exists\, x \in E, P(x)$

   Exemple 1.3.2 $\exists\, x \in \mathbb{R},\ (x(x+1) > 0)$ *est vraie* *(Ex : $x = 2$)*

3. La négation des quantificateurs :
   $$\overline{\forall\, x \in E \quad P(x)} : \exists x \in E\, \overline{P(x)}$$

   Exemple 1.3.3
   $$\overline{(x \in [0,+\infty[, x^2 \geq 0)} = \exists\, x \in [0,+\infty[, x^2 < 0$$

1.4 Les raisonnements

1.4.1 Le raisonnement direct

Pour montrer que $P \Rightarrow Q$ est vraie, on suppose P vraie et on montre alors que Q est vraie.

1.4.2 Contraposée

Le raisonnement par contraposée est basé sur :
$$P \Longrightarrow Q \Leftrightarrow \overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$$
Quand on veut démontrer $P \Longrightarrow Q$ il suffit de démontrer $\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$.

Exemple 1.4.1 *Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que n^2 est pair alors n est pair.*
Supposons n impair montrons que n^2 est impair.
n impair $\Longrightarrow \exists\, k \in \mathbb{N}$, $n = 2k+1$, alors $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2l + 1$, avec $l = (2k^2 + 2k)$; donc n^2 est impair.

1.4.3 L'absurde

Le raisonnement par l'absurde pour démontrer que $P \Longrightarrow Q$ repose sur le principe suivant : On suppose P vraie et Q est fausse, et on cherche une contradiction. Ainsi si P est vraie alors Q doit être vraie, donc $P \Longrightarrow Q$ est vraie.

1.4.4 Contre-exemple

Pour montrer qu'une proposition est fausse, il suffit de donner un contre exemple.

Exemple 1.4.2
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x^2 - 25 \neq 0$$
Cette proposition est fausse car il existe $x_0 = 5$ tel que $5^2 - 5^2 = 0$.

1.4.5 Récurrence

Le principe de récurrence permet de montrer qu'une assertion $P(n)$ dépendant de n, est vraie pour tout $n \geq n_0$. Il s'effectue en trois étapes :

1. Initialisation : Pour $n = n_0$, on prouve $P(n_0)$.
2. Étape héridité : On suppose que pour $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie et on démontre alors, que l'assertion $P(n+1)$ au rang suivant $(n+1)$ est vraie.
3. Conclusion : Par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Exemple 1.4.3 *Montrer que :*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, 2^n > n$$

$$\forall n \geq 0,\ P(n) : 2^n > n$$

1. $n = n_0 = 0, \quad 2^0 = 1, \quad P(0)$ *est vraie.*
2. *Héridité :*
   Fixons $n \geq n_0$, *supposons que* $P(n)$ *soit vraie,* $2^n > n$ *et montrons que* $2^{n+1} > n+1$.
   En effet :
   $$2^{n+1} = 2^n \times 2 = 2^n + 2^n > n + 2^n > n+1$$
   car $2^n > n > 1$, *donc*
   $$2^{n+1} > n+1$$
3. *Conclusion : Par le principe de récurrence* $P(n)$ *est vraie pour tout* $n \geq 0$, $2^n > n$, *pour tout* $n \geq 0$.