Chapitre 1 : Logique, Ensemble et Applications

Ce premier chapitre, commun aux deux modules d'Algèbre et d'Analyse, traite des quelques notions et des concepts de bases dont vous aurez besoin durant le reste du cours de mathématiques. Beaucoup de ces notions n'ont pas été vues au lycée et reviendront de façon rémanente tout au long du programme de mathématiques. Il faudra donc les assimiler et se familiariser avec elles au travers d'exercices nombreux et variés.

Tirée de :

Cours 1 : Logique, Ensembles et applications par AIT AMRANE R. (2013-2014).

Note de Cours : Cours de M. DIB (2011-2012).

Résumé par : BELFODIL Aymen & BELFODIL Adnane

Remerciement à :

CHERIFI Yanis

GHERBI Adel

TABLE DES MATIERES

I. LOGIQUE :

1. ASSERTION ET PREDICAT

1.1. DEFINITION : ASSERTION

Une **assertion** est un énoncé dont on peut dire, sans ambiguïté, s'il est vrai ou faux.

On lui attribue la valeur de vérité : $\begin{cases} V\ (ou\ 1)\ s'il\ est\ Vrai \\ F\ (ou\ 0)\ s'il\ est\ Faux \end{cases}$

Remarque :

1. Certaines assertions sont déclarées vraies à priori : ce sont les **axiomes**. Sinon la véracité d'une assertion doit résulter d'une **démonstration**.

2. On dit que deux assertions P,R sont **logiquement équivalentes** et on note $P \equiv R$, si elles ont la même valeur de vérité.

1.2. DEFINITIONS :

Les assertions démontrées (les résultats des démonstrations) sont appelées, suivant leur importance, **théorèmes** ou **propositions**.
Un **lemme** est un résultat préalable utile à une démonstration plus conséquente.
Un **corollaire** est une assertion vraie qui découle d'une démonstration précédente.

1.3. PREDICAT :

Un **prédicat** est un énoncé ***P*** contenant une ou plusieurs lettres x, y, n, ... appelées **variables**, telles que lorsqu'on remplace chacune de ces variables par un élément d'un ensemble donné, on obtient une **assertion**.

Exemple :

1. 6 est multiple de **3** : **Assertion** dont la valeur logique est V (ou 1)
2. n est diviseur de **9** : **Prédicat**

- **a.** Si on remplace **n** par 3 on obtient : **P(3)** = 3 est diviseur de 9 : **assertion** (V)
- **b.** Si on remplace **n** par 4 on obtient : **P(4)** = 4 est diviseur de 9 : **assertion** (F)

2. CONNECTEURS LOGIQUE :

2.1. DEFINITION : NEGATION :

La **négation** d'une assertion P est une assertion notée $non\ (P)$, $\bar{P}$ ou $\neg P$ et se lit « non P », qui est vraie si P est fausse, et fausse sinon.

2.2. DEFINITION : CONJONCTION ET DISJONCTION :

Soient P et R deux assertions.
1. La **Conjonction** de deux assertions P et R est une assertion notée $(P \wedge R)$ et se lit «P et R», qui est vraie lorsque les deux assertions P et R sont vraies, et fausse sinon.
2. La **Disjonction** de deux assertions P et R est une assertion notée $(P \vee R)$ et se lit «P ou R», qui est vraie lorsqu'au moins une des deux assertions P ou R sont vraies, et fausse sinon.

2.3. DEFINITION : IMPLICATION ET EQUIVALENCE:

Soient P et R deux assertions.
1. L'**Implication** de P vers R est une assertion notée $(P \implies R)$ qui se lit «P implique R». Elle est fausse lorsque P est vraie et R est fausse, et vraie sinon.
2. L'**Equivalence** de P et de R est une assertion notée $(P \iff R)$ qui se lit «P équivaut à R». Elle est vraie si P et R sont logiquement équivalentes, et fausse sinon.

Remarque :

1. Dans L'implication $P \implies R$: P est dite **condition suffisante** et R est dite **condition nécessaire** de l'implication.
2. L'implication $R \implies P$ s'appelle **l'implication réciproque** de $P \implies R$.
3. En pratique, si P, Q et R sont trois assertions, alors :
   a. $(P \implies Q)$ et $(Q \implies R)$ se note $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$.
   b. $(P \iff Q)$ et $(Q \iff R)$ se note $P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow R$.

2.4. TABLE DE VERITE :

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	**V**	V	V	V	V
V	**F**	F	V	F	F
F	**V**	F	V	V	F
F	**F**	F	F	V	V

2.5. DEFINITION : TAUTOLOGIE ET ANTILOGIE

Une **tautologie** est une assertion qui est toujours vraie quel que soit la valeur de vérité des assertions élémentaires qui la compose.
Une **Antilogie** est une assertion qui est toujours fausse quel que soit la valeur de vérité des assertions élémentaires qui la compose.

Exemple :
1. $P \vee \overline{P}, P \Rightarrow P \wedge R$ sont des **Tautologie.**
2. $P \wedge \overline{P}, P \Leftrightarrow \overline{P}$ sont des **Antilogie.**

2.6. PROPRIETES DES CONNECTEURS :

2.6.1. Proposition 1 :

Soients P,Q et R trois assertion, on a :
1. $\overline{\overline{P}} \equiv P$
2. **Commutativité de $\wedge$ et $\vee$:**
   a. $P \wedge R \equiv R \wedge P$
   b. $P \vee R \equiv R \vee P$
3. **Associativité de $\wedge$ et $\vee$:**
   a. $P \wedge Q \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$
   b.$P \vee Q \vee R \equiv P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$

2.6.2. Proposition 2 :

Soient P, Q et R deux propositions, on a :
1. Distributivité :
   a. $\mathrm{P} \wedge (\mathrm{Q} \vee \mathrm{R}) \equiv (\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) \vee (\mathrm{P} \wedge \mathrm{R})$
   b. $\mathrm{P} \vee (\mathrm{Q} \wedge \mathrm{R}) \equiv (\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}) \wedge (\mathrm{P} \vee \mathrm{R})$
2. Lois de Morgan :
   a. $\overline{P \wedge Q} \equiv \overline{P} \vee \overline{Q}$
   b. $\overline{P \vee Q} \equiv \overline{P} \wedge \overline{Q}$

2.6.3. Proposition 3 :

Soient P, Q et R deux propositions, on a :
1. L'implication : $(P \Rightarrow Q) \equiv \overline{P} \vee Q$
2. Négation de l'implication : $non\ (P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \overline{Q}$
3. Transitivité de l'implication : $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \Longrightarrow (P \Longrightarrow R)$
4. L'équivalence : $\boldsymbol{P} \Leftrightarrow \boldsymbol{Q} \equiv (\boldsymbol{P} \Longrightarrow \boldsymbol{Q}) \wedge (\boldsymbol{Q} \Longrightarrow \boldsymbol{P})$

Remarque : la démonstration des Propositions 2 et 3 se fait à l'aide de la table de vérité.

3. QUANTIFICATEURS LOGIQUES :

3.1. QUANTIFICATEURS :

A partir d'un prédicat $P(x)$ à une variable x dans un ensemble E, on peut construire de nouvelles assertions dites **assertions quantifiées** en utilisant les **quantificateurs** «'$\exists$' il existe» et «'$\forall$' quel que soit» :

1. ($\forall x \in E : P(x)$) qui se lit «quel que soit l'élément x de E,$P(x)$». Cette assertion est vraie lorsque l'assertion $P(x)$ est vraie pour tout élément a de E.
2. ($\exists x \in E : P(x)$) qui se lit « il existe un élément x de E,$P(x)$». Cette assertion est vraie lorsque l'assertion $P(x)$ est vraie pour au moins un élément a de E.
3. ($\exists! x \in E : P(x)$) qui se lit «il existe un unique élément x de E, $P(x)$». Cette assertion est vraie lorsque l'assertion $P(x)$ est vraie pour un unique élément a de E.

Remarque : On peut construire des assertions avec plusieurs quantificateurs, notamment sue des prédicats à plusieurs variables $P(x, y, z, \dots)$, dans ce cas on prendra garde à **l'ordre** de ces quantificateurs.

($\forall x \exists y\ P(x, y)$) Veut dire que pour tout x il y'aura un y pour lequel $P(x, y)$ est vérifié; or $\exists y \forall x\ P(x, y)$ veut dire qu'il existe un y pour lequel tout x vérifie$P(x, y)$), ainsi ($\forall x \exists y\ P(x, y)$) n'est pas synonyme de $\left(\exists y \forall x\ P(x, y)\right)$.

3.2. NEGATION D'UNE PROPOSITION QUANTIFIEE:

Soit $P(x)$ un prédicat à une variable x dans un ensemble E. On a :

1. $\neg \left(\forall x\ P(x)\right) \Leftrightarrow \exists x\left(\neg P(x)\right)$
2. $\neg \left(\exists x\ P(x)\right) \Leftrightarrow \forall x\left(\neg P(x)\right)$

II. LOGIQUE DU RAISONNEMENT :

Pour affirmer qu'une proposition R est vraie, on fait un raisonnement ou une démonstration. Pour cela, on utilise des propositions que l'on sait déjà être vraie et l'on en déduit la proposition R grâce à un petit nombre de règles précises.

1. RAISONNEMENT PAR HYPOTHESE AUXILIAIRE :

Si la proposition P est vraie et si la proposition $(P \Rightarrow R)$ est vraie, alors la proposition R est vraie. $(P \wedge (P \Rightarrow R)) \Rightarrow R$

Remarque :

1. Une démonstration de $P \Rightarrow R$ est introduite par « supposons P » et se termine par donc « R ».
2. Pour démontrer une proposition de la forme $(\forall x \in E: R)$ on commence par soit $(x \in E)$ et on termine par $donc\ R$.
3. Démontrer une proposition de la forme $(\exists x \in E: R)$ est en général un problème difficile, car on pourra rarement utiliser un théorème général d'existence. Il n'y aura alors pas d'autres techniques que le recours à une construction explicite d'un tel élément.

2. RAISONNEMENT PAR CONTRE-EXEMPLE :

Un raisonnement par contre-exemple sert à démontrer qu'une proposition quantifiée de la forme $(\forall x \in E: R)$ est fausse. Pour cela, on démontre que sa négation est vraie.
On a vu que : $non\ (\forall x \in E: P(x)) \Leftrightarrow \big(\exists x \in E: non\ P(x)\big)$.
Ainsi, pour montrer que $(\forall x \in E: P(x))$ est une proposition fausse, la méthode consiste à exhiber un élément x de E ne vérifiant pas $P(x)$.

3. RAISONNEMENT PAR CONTRAPOSE :

Un raisonnement par contraposé consiste à démontrer la contraposé de la proposition $P \Rightarrow R$ $(\bar{R} \Rightarrow \bar{P})$. Pour cela, on fait l'hypothèse que $\bar{R}$ est vraie et l'on démontre que $\bar{P}$ est vraie.
Exemple : $n^2\ pair \Rightarrow n\ pair$ sa contraposé $n\ impair \Rightarrow n^2\ impair$, ce dernier est plus facile a démontré.

4. RAISONNEMENT CAS PAR CAS :

Il s'applique lorsqu'on veut démontrer une implication de la forme$(P \vee Q) \implies R$. La structure du raisonnement est :
Premier cas : supposons que P est vraie … donc R.
Deuxième cas : supposons que Q est vraie … donc R.

Astuce : on a $P \implies (Q \vee R) \equiv P \wedge \neg Q \implies R$

Exercice : Montrer $(x^2 - 9 > 0) \implies (x^2 - x - 2 > 0)$

Solution : L'hypothèse $x^2 - 9 > 0$ se décompose en deux cas :
1. **Si $\boldsymbol{x > 3}$** : comme $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$ et comme le produit de deux facteurs strictement positives est strictement positive alors $x^2 - x - 2 > 0$.
2. **Si $\boldsymbol{x < -3}$** $\implies (x-2) < 0 \; et \; (x+1) < 0 \implies (x-2)(x+1) > 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 > 0$.

5. RAISONNEMENT PAR ABSURDE :

Pour montrer qu'une proposition P est vraie, un raisonnement par l'absurde consiste à montrer que sa négation, la proposition P, entraîne une proposition R et son contraire R.
Il s'appuie sur l'équivalence logique : $((\bar{P} \implies R) \wedge (\bar{P} \implies \bar{R})) \Leftrightarrow P$
En pratique, on suppose la proposition P comme étant vraie et on cherche alors une proposition (noté R ci-dessus) qui, sous ces hypothèses, serait à la fois vraie et fausse.
On dit que l'on a obtenu une **contradiction** ou que c'est **contradictoire**.
Exercice : Démontrer que la somme d'un rationnelle et d'un irrationnelle est irrationnelle.

Solution : Soient $\in \mathbb{Q} \; et \; y \notin \mathbb{Q}$, montrons que $x + y \notin \mathbb{Q}$.
Supposons que $x + y \in \mathbb{Q}$ Donc $\exists\, a, b \in \mathbb{Z} \;\; x + y = \frac{a}{b}$, comme $x \in \mathbb{Q}$ donc
$\exists\, c, d \in \mathbb{Z} \;\; x = \frac{c}{d}$ d'où $y = \frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ donc $y = \frac{ad - bc}{bd} \Rightarrow \exists\, e, f \in \mathbb{Z}$
$(e = ad - cd \; et \; f = bd) \; tel \; que : y = \frac{e}{f} \implies y \in \mathbb{Q}$ or $y \notin \mathbb{Q}$ ce qui est absurde.
Ainsi $x + y \notin \mathbb{Q}$.

Remarque :

1. Pour montrer qu'une implication $P \Longrightarrow Q$ est vraie, on fait les hypothèses que P est vraie et Q est fausse et on montre que cela conduit à une contradiction. Les deux hypothèses P vraie et Q fausse ne peuvent donc pas être vérifiées en même temps. Cela signifie que l'une des deux au moins n'est pas vraie, autrement dit P est fausse ou bien Q est vraie. Cette affirmation exprime exactement que l'implication $P \Longrightarrow Q$ est vraie.

2. Pour prouver une proposition sous la forme $\exists!\, x \in E: P(x)$ est unique il suffit de supposer (par absurde), qu'il existe x_1, x_2 distinct telle que $P(x_1)$ et $P(x_2)$ et d'arriver à $x_1 = x_2$.

6. RAISONNEMENT PAR RECURRENCE :

De nombreux résultats s'expriment sous la forme «$\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$». Une démonstration par récurrence permet de montrer qu'une telle assertion quantifiée est vraie.

Son principe exprime le fait que si la propriété $P(0)$ est vraie et si l'implication «$P(n) \implies P(n+1)$» est vraie, alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

La méthodologie consiste à :

1. Vérifier que la propriété $P(0)$ est vraie ;
2. Puis démontrer que si la propriété $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie. La propriété $P(n)$ supposée vraie est appelée hypothèse de récurrence.

Exercice :

Soit $S_n = \sum_{i=1}^{n} i$ .Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

Solution : raisonnons par récurrence :

1. P(0) vérifié car $S_1 = 1 = \frac{0\times 1}{2}$
2. **Hypothèse de récurrence :** Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$ $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ et montrons que $P(n+1)$ Vrai

On a :

$$S_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) = S_n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right)$$

Ainsi : $S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ D'où $P(n+1)$ Vrai. CQFD

Remarque :

1. Un raisonnement par récurrence peut être utilisé si la propriété $P(n)$ n'est vraie qu'à partir d'un certain rang n_0, où n_0 désigne un entier naturel non nécessairement égal à 0. Dans ce cas précis, la première étape consistera à montrer que la propriété $P(n_0)$ est vraie.

2. Dans certaines démonstrations par récurrence l'hypothèse de récurrence devient : la propriété $\forall k \leq n : P(k)$ (**Récurrence forte).**

III. ENSEMBLES :

1. GENERALISEES SUR LES ENSEMBLES :

1.1. DEFINITION : ENSEMBLE

Un ensemble E est une collection d'objets bien déterminés qu'on appelle éléments.
Il y a deux façons de décrire un ensemble : ou bien en se donnant la liste de ses éléments, ou bien en se donnant une propriété qui caractérise les éléments de cet ensemble.

1.2. DEFINITION : CARDINAL

On appelle cardinal d'un ensemble E le nombre d'éléments de E, noté$card(E)$, $|E|$ ou $\#E$.

1.3. DEFINITION : ENSEMBLE VIDE

Un ensemble E est dit **vide** lorsqu'il ne contient aucun élément et est noté $\emptyset$

1.4. DEFINITION : ENSEMBLE DE PARTIES

L'ensemble des parties de E noté $P(E)$ est l'ensemble des sous-ensembles de E qu'on peut former et on a $card(P(E)) = 2^{card(E)}$

Exemple :

Soit $E = \{1,2\}$, l'ensemble $P(E) = \{ \emptyset , \{1\} , \{2\} , \{1,2\} \}$ et $|P(E)| = 4$

2. RELATIONS ENTRE ENSEMBLES :

2.1. L'INCLUSION :

Soient $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ deux parties d'un ensemble$\boldsymbol{E}$. On dit que $\boldsymbol{A}$ est inclut dans $\boldsymbol{B}$ et on note $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$ ssi $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E} : \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}$

Remarque :

1. $A \subsetneq B \Leftrightarrow (A \subset B \; et \; B \not\subset A)$
2. $A \subset B \Leftrightarrow \bar{B} \subset \bar{A}$
3. $A \not\subset B \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E} : \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \; et \; \boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{B}$

2.2. L'EGALITE :

Soient $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ deux parties d'un ensemble$\boldsymbol{E}$. On dit que $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont égaux et on note $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ ssi ($\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}$). C'est-à-dire si l'on a simultanément ($\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$) et ($\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{A}$). Dans le cas contraire on dit qu'ils sont distincts et on note $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{B}$.

3. OPERATIONS DANS P(E) :

Soit A et B deux parties de E.

3.1. L'INTERSECTION :

L'intersection de $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$, noté $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$ et se lit $\boldsymbol{A}$ ***inter*** $\boldsymbol{B}$, la partie de $\boldsymbol{E}$ définie par :
$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E} / \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \ \wedge \ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}\}$

Proposition :

1. $A \cap B \ \subset A \; et \; A \cap B \ \subset B$
2. $si \; A \subset B \; alors \; A \cap B = A$
3. Si A, B sont finies on a : $0 \leq card(A \cap B) \leq \min(card(A), card(B))$

3.2. LA REUNION :

La réunion de $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$, noté $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ et se lit $\boldsymbol{A}$ ***union*** $\boldsymbol{B}$, la partie de $\boldsymbol{E}$ définie par :
$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E} / \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \ \vee \ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}\}$

Proposition :

1. $A \ \subset A \cup B \; et \; B \ \subset A \cup B$
2. $si \; A \subset B \; alors \; A \cup B = B$
3. Si A, B sont finies on a : $card(A \cup B) = \mathrm{card(A)} + card(B) - card(A \cap B)$

3.3. LE COMPLEMENTAIRE :

Le complémentaire de A noté $\bar{A}^E$ ou $C_E A$, la partie de E définie par :
$C_E A = \{x \in E / x \notin A\}$

Proposition :

1. $A \cap \bar{A}^E = \ \emptyset \; et \; A \cup \bar{A}^E = E$
2. $A = \ \emptyset \ \Leftrightarrow \bar{A}^E = E$
3. Si A, B sont finies on a : $Card(\bar{A}^E) = card(E) - card(A)$

Règles de calcul :

Pour toute partie A, B, C d'un ensemble E, nous avons les règles de calcule suivantes :

1. $A \cup (B \cap C) = (A \ \cup B) \cap (A \cup C)$
2. $A \cap (B \cup C) = (A \ \cap B) \cup (A \cap C)$
3. $A \cup B \cup C \ = A \cup (B \cup C) = \ (A \ \cup B) \cup C$
4. $A \cup B = \ B \cup A$ et $A \cap B = \ B \cap A$
5. $A \cup A = \ A$ et $A \cap A = \ A$
6. $\bar{\bar{A}} = A$
7. $\overline{A \cup B} = \ \bar{A} \cap \bar{B}$
8. $\overline{A \cap B} = \ \bar{A} \cup \bar{B}$
9. $A \subset B \ \Leftrightarrow \bar{B} \subset \bar{A}$
10. $A \cup (B \vartriangle C) = (A \ \cup B) \vartriangle (A \cup C)$

11. $A \cap (B \vartriangle C) = (A \cap B) \vartriangle (A \cap C)$

3.4. LA DIFFERENCE :

La différence de $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$, noté $\boldsymbol{A \backslash B}$ ou $\boldsymbol{A - B}$ et se lit $\boldsymbol{A\ moins\ B}$, la partie de $\boldsymbol{E}$ définie par : $\boldsymbol{A \backslash B = A \cap \overline{B} = \{x \in E / x \in A\ \wedge\ x \notin B\}}$

Proposition :

1. $\boldsymbol{A - B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B}$
2. Si A, B sont finies on a : $card(A - B) = card(A) - card(A \cap B)$

3.5. LA DIFFERENCE SYMETRIQUE :

La différence symétrique de $\boldsymbol{A}$ et de $\boldsymbol{B}$, noté $\boldsymbol{A\Delta B}$ est la partie de $\boldsymbol{E}$ définie par :
$\boldsymbol{A\Delta B = B\Delta A = (A \cup B)/(A \cap B) = (A/B) \cup (B/A) = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)}$

Proposition :

1. $A\Delta B\Delta C = (A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$
2. $A\Delta B = \emptyset \Leftrightarrow (A \cup B) - (A \cap B) = \emptyset \Leftrightarrow A = B$
3. Si A, B sont finies on a : $card(A\Delta B) = card(A) + card(B) - 2card(A \cap B)$

Remarque : Littéralement si $x\epsilon A\Delta B$ alors on a soit $x\epsilon A$,soit $x\epsilon B$ pas les deux.

4. PARTITION D'UN ENSEMBLE :

Définition :

Soit E un ensemble non vide, et soit $\varepsilon \subset P(E)$ telle que $\varepsilon = \{E_i \subset\ E \ / \ 1 \leq i \leq n\}$. On dit que ε est une partition de E ssi :

1. $\forall i, j \epsilon [\![1, n]\!], i \neq j : E_i \cap E_j = \emptyset \ (Disjoint)$
2. $\forall i \in \left[[1, n]\right] E_i \neq \ \emptyset$
3. $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = E$

5. PRODUIT CARTESIEN :

Définition :

Soient $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F}$ deux ensembles, le produit cartésien de $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{F}$ est l'ensemble $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$ telle que : $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) / \ \boldsymbol{x\epsilon E}\ \boldsymbol{et}\ \boldsymbol{x\epsilon F}\}$, les éléments de $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$ sont dit couple.

Proposition :

Si $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F}$ sont finies on a : $\boldsymbol{card}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}) = \boldsymbol{card}(\boldsymbol{E}) \times \boldsymbol{card}(\boldsymbol{F})$.

Remarque :

1. Soient $E_1, E_2, \dots, E_n$ n ensembles, le produit cartésien des ensembles E_i est l'ensemble : $\prod_{i=1}^{n} E_i = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \forall x \in [\![1, n]\!] : x_i \in E_i\}$, les éléments de $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ sont dit n-uplets.

2. Dans le cas où les E_i sont égaux à E on note $\prod_{i=1}^{n} E_i = E^n$

IV. LES RELATIONS

1. RELATION BINAIRES:

1.1. DEFINITION : RELATION BINAIRE

Soient E, F deux ensembles non vides.
Une relation binaire $\mathcal{R}$ de E vers F est la donnée d'un triplet (E, F, Ω) où $\Omega \subset E \times F$.
E S'appelle l'ensemble de départ, F l'ensemble d'arrivée et Ω le graphe de la relation ; si le couple $(a, b) \in \Omega$ on dit que a est en relation avec b et on note $a \mathcal{R} b$.

1.2. DEFINITIONS : PROPRIETES D'UNE RELATION

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire dans E (de E vers E). Alors :
a. $\mathcal{R}$ **réflexive :** $\forall x \in E : x \mathcal{R} x$
b. $\mathcal{R}$ **Symétrique:** $\forall (x, y) \in E^2 : x R y \Rightarrow y R x$
c. $\mathcal{R}$ **Antisymétrique :** $\forall (x, y) \in E^2 : (x R y) \wedge (y R x) \Rightarrow x = y$
d. $\mathcal{R}$ **Transitive :** $\forall (x, y, z) \in E^3 : (x R y) \wedge (y R z) \Rightarrow x R z$
e. $\mathcal{R}$ **Circulaire :** $\forall (x, y, z) \in E^3 : (x R y) \wedge (y R z) \Rightarrow z R x$

2. RELATION D'EQUIVALENCE :

2.1. DEFINITION : RELATION D'EQUIVALENCE

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire dans E.On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'**équivalence** dans E si et seulement si $\mathcal{R}$ est : Réflexive, Symétrique et transitive.

2.2. CLASSE D'EQUIVALENCE :

2.2.1. Définition :

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence dans E.
On appelle classe d'équivalence de a ($a \in E$) noté $cl(a)$ ou $\dot{a}$ l'ensemble $\dot{a} = \{x \in E \ / \ x R a\}$; $\dot{a}$ est la classe d'équivalence de a *modulo* $\mathcal{R}$. L'élément a est dit représentant de la classe $\dot{a}$.

2.2.2. Proposition :

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence dans E. $a, b \in E$. On a :
1. $a R b \Leftrightarrow \dot{a} = \dot{b}$
2. $a \not{R} b \Leftrightarrow \dot{a} \cap \dot{b} = \emptyset$

2.2.3. L'ensemble quotient E/R

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence dans un ensemble E.L'ensemble quotient E par $\mathcal{R}$. est l'ensemble noté $E/\mathcal{R}$ telleque : $E/\mathcal{R} = \{\dot{x} | x \in E\}$, $E/\mathcal{R}$ forme une partition de E.

3. RELATION D'ORDRE:

3.1. DEFINITION : RELATION D'ORDRE

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire dans E.On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'**ordre** dans E si et seulement si $\mathcal{R}$ est : Réflexive, Antisymétrique et transitive.

Remarque : Si $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E. On note souvent $x\mathcal{R}y$ par $x \leq y$ et l'on dit que x est infèrieur ou égale à y.

Attention : La relation $<$ définit dans $\mathbb{R}$ n'est pas une relation d'ordre car elle n'est pas **réflexive.**

3.2. ORDRE TOTALE ET PARTIEL :

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'**ordre** dans un ensemble E, on dit que :

1. L'ordre est dit **totale** si et seulement si $\forall (a, b) \in E^2 : a \, \mathcal{R} \, b$ ou $b \, \mathcal{R} \, a$
2. L'ordre est dit **Partiel** si et seulement si l'ordre n'est pas **totale** autrement dit :
$\exists (a, b) \in E^2 : a \not\mathcal{R} \, b$ et $b \not\mathcal{R} \, a$

3.3. ELEMENTS PARTICULIERS :

Soit A une partie d'un ensemble ordonné E (c-à.-d. : $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre totale sur E) donc A ordonné.

1. on dit que A est une **partie majorée** de E si et seulement si $\exists a \in E / \forall x \in A : x \, R \, a$ (a est dit **majorant**)
2. on dit que A est une **partie minorée** de E si et seulement si $\exists a \in E / \forall x \in A : a \, R \, x$ (a est dit **minorant**)
3. si a est un majorant de A et $a \in A$ alors a est unique.
4. si a est un minorant de A et $a \in A$ alors a est unique.
5. le plus petit des **majorant** de A est dit **la borne supérieur** de A
6. le plus petit des **minorant** de A est dit **la borne inferieur** de A

V. APPLICATION :

1. FONCTION :

1.1. DEFINITION : FONCTION

Soient E, F deux ensembles non vides.

Une fonction f de E vers F est une Relation binaire telle que $\forall a \in E$ a est en relation avec 1 élément au plus de F, on note :

1. $f : E \to F$; On dit que E est l'ensemble de départ, F est l'ensemble d'arrivé.
2. $E \xrightarrow{f} F$

Si x est en relation avec y, on note : $y = f(x)$ (**Ecriture fonctionnel)** avec $x \in E$ et $\in F$. On dit que y est l'image de x par f et x est l'antécédent (l'image réciproque) de y par f.

1.2. DEFINITION : DOMAINE DE DEFINITION

Soient E, F deux ensembles non vides, f une fonction de E vers F. Le domaine de définition de f est l'ensemble noté D_f telle que :

$D_f = \{x\ tq\ \exists\,!\,y \in F / \ y = f(x)\}$

Remarque : Soient E, F, E', F' des ensembles ; $f : E \to F$, $g : E' \to F'$ deux fonctions, on dit que les fonctions f, g sont égales ssi : $E = E', F = F'$ et $\forall x \in E : g(x) = f(x)$.

2. APPLICATION :

2.1. DEFINITION : APPLICATION

Soient E, F deux ensembles non vides.

Une application f de E vers F est une fonction telle que $D_f = E$ Autrement dit :

$\forall x \in E, \exists!\, y \in F : y = f(x)$

Notation : Soit E un ensemble non vide, l'application de E vers E qui à tout élément x de E associe x se note Id_Eet s'appelle l'**application identité** de E.

2.2. IMAGE DIRECTE, IMAGE RECIPROQUE :

Soient E, F deux ensembles non vides, une application $f : E \to F$, $A \subset E$ et $B \subset F$.

1. L'image directe : $f(A) = \{f(x) \in F / \, x \in A\}$

2. L'image réciproque : $f^{-1}(B) = \{x \in E / \, f(x) \in B\}$

> **Remarque :** l'écriture $f^{-1}(B)$ ne signifie pas que l'application f^{-1} existe.

2.3. QUELQUE PROPRIETES DES APPLICATIONS :

Soient E, F deux ensembles non vides, une application $f : E \to F$, $A_1 \subset E$, $A_2 \subset E$, $B_2 \subset F$et $B_2 \subset F$.

1. $f^{-1}(F) = E$
2. $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$
3. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
4. $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$
5. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
6. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
7. $A_1 \subset f^{-1}(f(A_1))$
8. $f(f^{-1}(B_1)) \subset B_1$

> **Attention :**
>
> 1. $y \in f(A) \Rightarrow \exists x \in A / y = f(x)$ mais il reste toujours possible qu'il y a des $x \notin A \, / \, y = f(x)$
>
> 2. L'image (respectivement l'antécédent) d'un ensemble est un ensemble.
>
> 3. Si $f : E \to F$ est une application quelconque alors $f^{-1}\big(f(A)\big) = A$ n'est pas toujours Vraie.

2.4. INJECTIVITE, SURJECTIVITE ET BIJECTION :

2.4.1. Injectivité :

Définition :
Une application $f : E \to F$ est dite **injective** si et seulement si : $\forall x_1, x_2 \in E, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
Autrement dit :
1. $\forall x_1, x_2 \in E, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
2. $\forall y \in F$,il existe **au plus** un antécédent $x \in E \,/\, y = f(x)$

Proposition :
1. f injective $\Leftrightarrow f^{-1}\big(f(A)\big) = A$ pour tout $A \subseteq E$
2. f injective $\Rightarrow f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ pour tout A_1, A_2 de E.

2.4.2. Surjectivité :

Définition :
Une application $f : E \to F$ est dite **surjective** si et seulement si : $\forall y \in F, \exists x \in E \Rightarrow f(x) = y$

Proposition :
1. f surjective $\Leftrightarrow f(E) = F$
2. f surjective $\Leftrightarrow \forall y \in B \Rightarrow f^{-1}(B) \neq \emptyset$
3. f surjective $\Leftrightarrow f\big(f^{-1}(B)\big) = B$ pour tout $B \subseteq F$

2.4.3. Bijection :

Définition :
Une application $f : E \to F$ est dite **bijective** si et seulement si : f est **injective** et **surjective**.
Formulé différemment une application $f : E \to F$ est **bijective** s'il existe une application $f^{-1} : E \to F$ Telle que :

1. $f\big(f^{-1}(F)\big) = F \;\Leftrightarrow f \circ f^{-1} = id_f \;\Leftrightarrow\; \forall y \in F\; f\big(f^{-1}(y)\big) = y.$
2. $f^{-1}\big(f(E)\big) = E \;\Leftrightarrow f^{-1} \circ f = id_E \;\Leftrightarrow\; \forall x \in E\; f^{-1}\big(f(x)\big) = x.$

Remarque : on peut toujours faire des restrictions dans E, F pour que l'application f devient bijective c.-à-d. : trouver $A \subseteq E$ et $B \subseteq F$ telle que $f : E \to F$ bijective.

2.5. APPLICATION COMPOSE

2.5.1. Définition :

Soient E, F et G 3 ensembles non vides ; $f : E \to F$ et $g : F \to G$ 2 applications, l'application $g \circ f$ est une application de E vers G telle que :
$\forall x \in E \ (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$

Remarque : le $\circ$ est une Loi associatif.

2.5.2. Proposition :

Soient E, F et G 3 ensembles non vides ; $f : E \to F$ et $g : F \to G$ 2 applications :
1. f et g injectives $\Rightarrow f : E \to Ff : E \to F$ injective
2. f et g surjectives $\Rightarrow g \circ f$ surjective
3. f et g bijectives $\Rightarrow g \circ f$ bijective

Remarque :
1. Soit $A \subseteq E$; $f(A) \neq \emptyset \ \Leftrightarrow A \neq \emptyset$
2. Soit $B \subseteq F$; $B \neq \emptyset \nRightarrow f^{-1}(B) \neq \emptyset$ mais $f^{-1}(B) \neq \emptyset \Rightarrow B \neq \emptyset$

2.5.3. Définition : Application inverse :

Soient E, F deux ensembles ; $f : E \to F$ une application bijective.
On définit l'application $f^{-1} : F \to E$ l'application inverse de f telle que :
1. $f^{-1} \circ f = Id_E$
2. $f \circ f^{-1} = Id_F$

Remarque : l'application f^{-1} existe ssi f est bijective.