Exercice 01

1) Les energies qui sont associées à chaque terme de l'equation

$a\ddot{x} \longrightarrow$ L'energie cinetique (0,25)

$b\dot{x} \longrightarrow$ L'energie de dissipation (0,25)

$cx \longrightarrow$ L'energie potentielle (0,25)

4/4

2) * L'equation caracteristique d'un systeme libre amorti $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ (0,25)

donc $a = 1$ et $b = 2\delta$, $c = \omega_0^2$ (0,25)

* Les solution qui correspondent au trois cas.

1) $\delta > \omega_0$: régime apériodique. (0,25)

La solution de l'equat diffe est de la forme : $x(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$

$$x(t) = A_1 e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}$$ (0,5)

2) $\delta = \omega_0$: régime critique. (0,25)

La solution $x(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\delta t}$ (0,25)

3) $\delta < \omega_0$: régime pseudo périodique (0,25)

* faible amortissement

La solution $x(t) = A e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$ (0,25)

avec ω est pseudo pulsation.

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$ (0,25)

3) Pour $b = 0$ l'equat devient $a\ddot{x} + cx = 0$ (0,25)

sa solution est $x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$

ou $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ (0,25)

* La signification physique de ce cas est systeme libre à un degré de liberte. (0,25)

non amorti (harmonique)

Exercice (2) 5/5 (0,5)

1) Le type du système est système libre non amorti (harmonique) à un degré de liberté.

2) * $E_c = \frac{1}{2} J_m \dot{\theta}^2$ avec $J = mL^2$

$\Rightarrow E_c = \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2$ (0,5)

* $E_p = E_{p(K)} + E_{p(K)} + E_{p(K)} = \frac{1}{2} K y^2 + \frac{1}{2} K y^2 + \frac{1}{2} K y^2$

faible oscillation $\Rightarrow \sin\theta = \theta$ et $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$

$y = L \sin\theta \Rightarrow y = L\theta$ (0,25)

$\Rightarrow E_p = \frac{1}{2} K L^2 \theta^2 + \frac{1}{2} K L^2 \theta^2 + \frac{1}{2} K L^2 \theta^2$

$\Rightarrow E_p = \frac{3}{2} K L^2 \theta^2$ (0,5)

* Lagrangien : $L = E_c - E_p = \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2 - \frac{3}{2} K L^2 \theta^2$ (0,5)

3) L'équat diffé du Mvt en fonction θ :

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = 0$ (0,25)

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = m L^2 \ddot{\theta}$ (0,25) / $\frac{\partial L}{\partial \theta} = -3 K L^2 \theta$ (0,25)

l'équat du Mvt s'écrit :

$m L^2 \ddot{\theta} + 3 K L^2 \theta = 0$ $/ mL^2$

(0,25) $\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{3K}{m}\theta = 0$ est de la forme $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$

4) Par identification : $\omega_0^2 = \frac{3K}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{3K}{m}}$ (0,25)

La période propre : (0,25) $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{3K}{m}}$ (0,25)

La fréquence propre : $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ (0,25) $= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3K}{m}}$ (0,25)

5) La solution de l'équat est de la forme

$$\theta(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad 0{,}5$$

Exercice 03 : 5/…

1) * $E_c = \frac{1}{2} J_m \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m a^2 \cdot \dot{\theta}^2$ 0,25

* $E_p = \frac{1}{2} K x_{(K)}^2$ 0,25 avec $x_{(K)} = 3a \sin\theta$

pour des faible oscillation

$\sin\theta = \theta \Rightarrow x_{(K)} = 3a\theta$ 0,25

$\Rightarrow E_p = \frac{1}{2} K (3a\theta)^2 \Rightarrow E_p = \frac{9}{2} K a^2 \theta^2$ 0,25

* $E_D = \frac{1}{2} \mu \dot{x}_{(\mu)}^2$ avec $x_\mu = 2a \sin\theta = 2a\theta$ 0,25

$\Rightarrow E_D = \frac{1}{2} \mu (2a\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2} \mu 4 a^2 \dot{\theta}^2 = 2\mu a^2 \dot{\theta}^2$ 0,25

2) L'équat différ de Mvt :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}\right) + \frac{\partial E_p}{\partial \theta} + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{\theta}} = 0 \quad 0{,}5$$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}\right) = m a^2 \ddot{\theta}$ 0,25 / $\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = 9 K a^2 \theta$ 0,25

$\frac{\partial E_D}{\partial \dot{\theta}} = 4 \mu a^2 \dot{\theta}$ 0,25

L'équat s'écrit :

$m a^2 \ddot{\theta} + 4\mu a^2 \dot{\theta} + 9 K a^2 \theta = 0$ $/ma^2$

$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{4\mu}{m} \dot{\theta} + \frac{9K}{m} \theta = 0$ 0,5

est de la forme : $\ddot{\theta} + 2\delta \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$ 0,25

par identification : $2\delta = \frac{4\mu}{m} \Rightarrow \delta = \frac{2\mu}{m}$ 0,25

$\omega_0^2 = \frac{9K}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{9K}{m}}$ 0,25

Sa solution pour $\delta \ll \omega_0$

$$\theta(t) = A e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$$ 0,5

avec $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ pseudo pulsation 0,25

Exercice (4) 6/6

1) $E_C = E_{Cm_1} + E_{Cm_2} = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2$ / $x = R\theta$

$\Rightarrow E_C = \frac{1}{2} m_1 R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 R^2 \dot{\theta}^2$ / $m_1 = m_2$

$\Rightarrow E_C = m_1 R^2 \dot{\theta}^2$ 0,25

* $E_P = E_{P(K)} + E_{P(m_1)} + E_{P(m_2)}$

$= \frac{1}{2} K x^2 - \cancel{m_1 g h} + \cancel{m_2 g h}$ 0,25

$\Rightarrow E_P = \frac{1}{2} K R^2 \theta^2$ 0,25

* $E_D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2 = \frac{1}{2} \alpha R^2 \dot{\theta}^2$ 0,25

2) le lagrangien : $L = E_C - E_P = m_1 R^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} K R^2 \theta^2$ 0,25

l'equat diffé du Mvt

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{\theta}} = M_f$$ 0,5

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 2 m_1 R^2 \ddot{\theta}$ 0,25 / $\frac{\partial L}{\partial \theta} = -K R^2 \theta$ 0,25

$\frac{\partial E_D}{\partial \dot{\theta}} = \alpha R^2 \dot{\theta}$ 0,25

l'equat s'ecrit : $2 m_1 R^2 \ddot{\theta} + \alpha R^2 \dot{\theta} + K R^2 \theta = RF$ / $2 m_1 R^2$

$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{\alpha}{2 m_1} \dot{\theta} + \frac{K}{2 m_1} \theta = \frac{F_0}{2 m_1 R} \cos(\Omega t)$ 0,5 est de la forme : $\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = A_0\cos(\Omega t)$ 0,25

par identification $2\delta = \frac{\alpha}{2m_1} \Rightarrow \delta = \frac{\alpha}{4m_1}$ 0,25

coefficient d'amortissement

La pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{2m_1}}$ 0,25

$$A_0 = \frac{f_0}{2m_1R}$$ 0,25

3) La solution permanente :

$$\theta_p(t) = A(\Omega)\cos(\Omega t + \varphi)$$ 0,5

avec $A(\Omega) = \dfrac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}}$ 0,25

$$\Rightarrow A(\Omega) = \frac{f_0}{2m_1R\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}}$$ 0,25

et $\varphi = -\mathrm{Arctg}\dfrac{2\delta\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)}$ 0,5

4) La pulsation de résonnance :

$$\left.\frac{dA(\Omega)}{d\Omega}\right|_{\Omega=\Omega_R} = 0$$ 0,25

$$\Rightarrow \Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$ 0,25