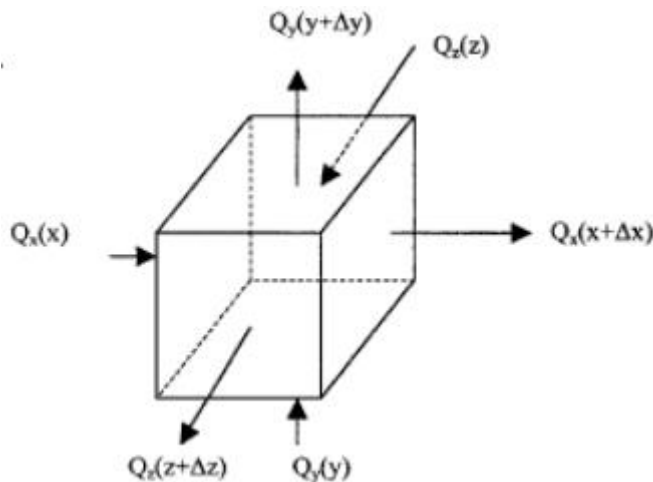


Questions de cours (4pts)

-Démontrer la relation suivante :

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T + \frac{q}{\lambda}$$



Bilan d'énergie thermique

L'énergie thermique est conservée dans un élément de volume dV (isotrope)

Entrée +Production =Sortie + Accumulation

$$Q_E + Q_p = Q_S + Q_{ac} \quad (1)$$

$$Q_R = Q_E - Q_S = A \text{ (constant)} \quad (2)$$

$$Q_{ac} = (Q_E - Q_S) + Q_p \quad (3)$$

$$\phi = -\lambda S \frac{dT}{dx} = \frac{Q}{dt} \text{ ce qui implique } Q = \phi dt$$

On calcul ($Q_E - Q_S$) :

Selon l'axe X :

$$Q_x = -\lambda dydz dt \frac{dT}{dx} ; S = dydz$$

$$Q_{x+\Delta x} = -\lambda dydz dt \frac{d(T+dT)}{dx} = -\lambda dydz dt \frac{dT}{dx} - \lambda dydz dt \frac{dT^2}{dx^2} dx$$

$$Q_x - Q_{x+\Delta x} = -\lambda dydz dx dt \frac{dT^2}{dx^2} = \lambda dV dt \frac{dT^2}{dx^2}$$

Selon l'axe Y :

$$Q_y = -\lambda dxdz dt \frac{dT}{dy} ; S = dxdz$$

$$Q_{y+\Delta y} = -\lambda dxdz dt \frac{d(T+dT)}{dy} = -\lambda dxdz dt \frac{dT}{dy} - \lambda dydz dt \frac{dT^2}{dy^2} dy$$



Département de Génie des Matériaux
Corrigé -Transfert de chaleur
L3/GP -Janvier 2024
Durée : 1h30



$$Q_y - Q_{y+dy} = -\lambda dydz dx dt \frac{dT^2}{dy^2} = \lambda dV dt \frac{dT^2}{dy^2}$$

Selon l'axe Z :

$$Q_z = -\lambda dydx dt \frac{dT}{dz} ; S = dydx$$

$$Q_{z+dz} = -\lambda dydx dt \frac{d(T+dT)}{dz} = -\lambda dydx dt \frac{dT}{dz} - \lambda dydx dt \frac{dT^2}{dz^2} dz$$

$$Q_z - Q_{z+dz} = -\lambda dydz dx dt \frac{dT^2}{dz^2} = \lambda dV dt \frac{dT^2}{dz^2}$$

$$Q_R = dQ_x + dQ_y + dQ_z$$

$$Q_R = Q_E - Q_S = \lambda dV dt \left(\frac{\partial T^2}{\partial x^2} + \frac{\partial T^2}{\partial y^2} + \frac{\partial T^2}{\partial z^2} \right) \dots \dots \dots (4) \text{ (1,5pts)}$$

La quantité de chaleur produite $Q_p = q dVdt \dots \dots \dots (5) \text{ (0,25 pt)}$

$$Q_{ac} = mCp dT = (\rho dV)Cp dT = (\rho dV)Cp \frac{dT}{dt} dt \dots \dots \dots (6) \text{ (0,25 pt)}$$

On remplace (4) ,(5) et (6) dans (3)

$$(\rho dV)Cp \frac{dT}{dt} dt = \lambda dV dt \left(\frac{\partial T^2}{\partial x^2} + \frac{\partial T^2}{\partial y^2} + \frac{\partial T^2}{\partial z^2} \right) + q dVdt$$

$$(\rho)Cp \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial T^2}{\partial x^2} + \frac{\partial T^2}{\partial y^2} + \frac{\partial T^2}{\partial z^2} \right) + q \quad \text{ (0,5 pt)}$$

On pose $\alpha = \frac{\lambda}{\rho Cp}$

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \left(\frac{\partial T^2}{\partial x^2} + \frac{\partial T^2}{\partial y^2} + \frac{\partial T^2}{\partial z^2} \right) + \frac{q}{\lambda}$$

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T + \frac{q}{\lambda} \quad \text{ (0,5 pt)}$$

2- Equation de poisson (1pt)

Cas particulier de l'équation :

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T + \frac{q}{\lambda}$$

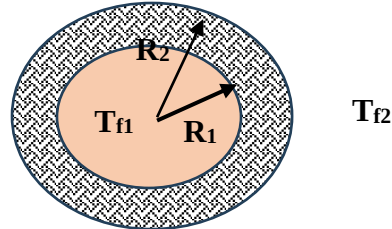
- Source interne et régime permanent

$$\nabla^2 T + \frac{q}{\lambda} = 0$$

Problème N°1(6pts)



Matériau solide



(ni d'accumulation ni production ,donc $\phi_{entrant} = \phi_{sortant}$)

$$\phi = \frac{(T_{f1}-T_1)}{\frac{1}{h_1 S_1}} = \frac{\lambda_1 2\pi L(T_1-T_2)}{\ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{(T_2-T_{f2})}{\frac{1}{h_2 S_2}} \quad (0,75pt)$$

$$S_1 = 2\pi R_1 L$$

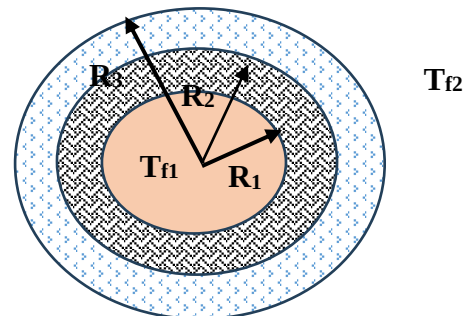
$$S_2 = 2\pi R_2 L$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{2\pi L(T_{f1}-T_{f2})}{\frac{1}{h_1 R_1} + \frac{\ln \frac{R_2}{R_1}}{\lambda_1} + \frac{1}{h_2 R_2}} \quad (0,75pt)$$



Couche isolante

$$\Rightarrow \phi = \frac{2\pi 0,5(400 - 160)}{\frac{1}{0,85 * 0,5} + \frac{\ln \frac{0,9}{0,5}}{1,2} + \frac{1}{1,5 * 0,9}}$$



$$\Rightarrow \phi = 210,385 \text{ W} \quad (0,5pt)$$

2- Calcul T_{f2}

($R_3 = R_2 + \text{épaisseur de la couche isolante}$)

La relation de nouveau flux est devenue :

$$\phi = \frac{2\pi L(T_3-T_{f2})}{\frac{1}{h_2 R_3}} \quad (0,75pt)$$

$$R_3 = 90 + 15 = 105 \text{ cm}$$

$$\phi = \frac{1}{2} \phi \text{ calculé} = 105,19 \text{ W}$$



Département de Génie des Matériaux
Corrigé -Transfert de chaleur
L3/GP -Janvier 2024
Durée : 1h30



$$T_{f2} = T_3 - \phi \frac{1}{2\pi L \cdot h_2 R_3} \quad (0,75\text{pt})$$

$$\Rightarrow T_{f2} = 170 - 105,19 \frac{1}{2\pi L \cdot h_2 R_3}$$

$$\Rightarrow T_{f2} = 148,73^\circ\text{C} \quad (0,5\text{pt})$$

3- Calcul le nouveau flux

$\lambda = aT^2 + b$; $\lambda = f(T)$. (On suppose qu'il n'y a pas une source d'énergie, ni accumulation)

$$\phi_E = \phi_S = A \text{ (constant).}$$

$$\phi = -\lambda S \frac{dT}{dr} \quad (S = 2\pi r L)$$

$$\phi = -(aT^2 + b) 2\pi r L \frac{dT}{dr} = A \Rightarrow -\int_{T_1}^{T_2} (aT^2 + b) dT = \frac{A}{2\pi L} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{3} T_1^3 + b T_1 \right) - \left(\frac{a}{3} T_2^3 + b T_2 \right) = \frac{A}{2\pi L} (\ln R_2) - (\ln R_1)$$

$$\Rightarrow \frac{a}{3} (T_1^3 - T_2^3) + b (T_1 - T_2) = \frac{A}{2\pi L} \ln \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow A = \phi = \frac{\frac{a}{3} (T_1^3 - T_2^3) + b (T_1 - T_2)}{\ln \frac{R_2}{R_1}} 2\pi L \quad (\text{watt}) \quad (1\text{pt})$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{\frac{a}{3} ((300)^3 - (280)^3) + b (300 - 280)}{\ln \frac{0,9}{0,5}} 2\pi L \quad ; a = 3 \cdot 10^{-5} \text{ et } b = 10$$

$$\Rightarrow \phi = 1338,07 \text{ W} \quad (1\text{pt})$$

Problème N°2 (6pts)

1-C'est un transfert de chaleur par convection libre, le fluide (air) circule avec sa propre vitesse.

(1pt)

2-

$$T_{\text{ref}} = (232 + 38) / 2 = 135 + 273 = 408 \text{ K} \quad (0,5\text{pt})$$

$$Ra = Gr * Pr = \frac{g \beta \Delta T L^3}{\nu^2} Pr \quad (0,5\text{pt})$$

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2 \text{ \& } \beta = 1 / T_{\text{ref}} \text{ (K}^{-1}\text{)}$$

Les propriétés de l'air à partir de tableau, après l'interpolation

$$\nu = 26,83 \cdot 10^{-6} \left(\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right) ; Pr = 0,688 \text{ et } \lambda = 0,034197 \text{ w/mK.}$$

$$\Rightarrow Ra = \frac{9,81 \cdot 2,45 \cdot 10^{-3} (505 - 311) (0,3)^3}{(26,83 \cdot 10^{-6})^2} * 0,688 = \frac{0,126}{(26,83 \cdot 10^{-6})^2} * 0,688$$

$$Ra = 1,2042527 \cdot 10^8 \quad (1\text{pt})$$



Département de Génie des Matériaux
Corrigé -Transfert de chaleur
L3/GP -Janvier 2024
Durée : 1h30



Calcul Nu

$$\overline{Nu} = 0,59 Ra^{0,25} \quad 10^4 \leq Ra \leq 10^9$$

$$\overline{Nu} = 61,80 \text{ (0,5pt)}$$

Calcul coefficient de convection h

$$\overline{Nu}_l = \frac{hL}{\lambda} \Rightarrow h = \frac{Nu_l \lambda}{L} = \frac{61,8 \times 0,034197}{0,3} = 7,04$$

$$h = 7,04 \text{ (w/m}^2\text{K)} \text{ (1 pt)}$$

$$S = L * L = 0,3 * 0,3 = 0,09 \text{ m}^2 \text{ (0,5 pt)}$$

Calcul de flux

$$\Phi = h S \Delta T \Rightarrow \Phi = 7,04 * 0,09 * 194 = 123,46 \text{ W (1 pt)}$$

Problème N°3 (4pts)

$$T(^{\circ}\text{F}) = 1,8 * T(^{\circ}\text{C}) + 32$$

$$\Rightarrow T = 1400^{\circ}\text{C}$$

$$\varepsilon = \frac{P}{\sigma S T^4} \text{ (0,5pt)}$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{83}{5,67 \times 10^{-8} (1400+273)^4} = 0,47 \Rightarrow \varepsilon = 0,47 \text{ (1 pt)}$$

$$\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ SI.}$$

2- Un corps noir son émissivité est 100% donc $\Rightarrow \varepsilon = 1$ (1 pt)

3 – Longueur d'onde maximale

Loi de Wien

$$\lambda_{\max} T = 2897,8 \text{ }\mu\text{mK} \text{ (0,5 pt)}$$

$$\Rightarrow \lambda_{\max} = \frac{2897,8}{(1400+273)} = 1,73 \text{ }\mu\text{m} = 1732 \text{ nm. (1 pt)}$$