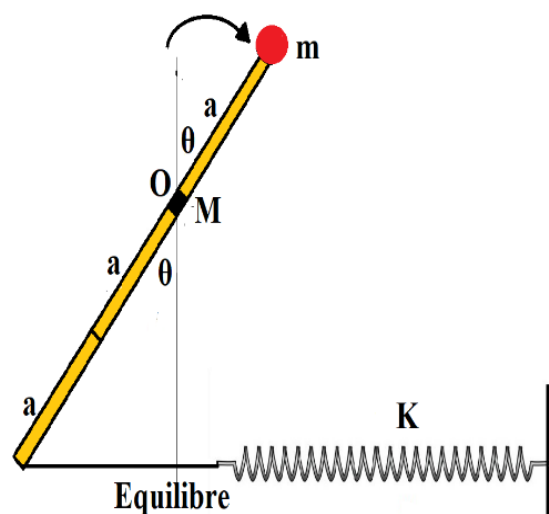


Exercice 01 : 04 points

Considérons une barre de longueur $3a$ et de masse M .
À son extrémité haute, une masse ponctuelle m est fixée, tandis qu'à son extrémité basse, un ressort de constante K est attaché. Le système oscille autour du point O . Les valeurs données sont :

$$a = 40 \text{ cm}, M = 3 \text{ kg}, m = 0,3 \text{ kg et } K = 100 \text{ N/m.}$$

1-Trouver la solution générale si on donne à $t=0$
 $\theta(t) = 12^\circ$ et $\dot{\theta}(t) = 0$ et l'énergie totale ainsi que la vitesse maximale.



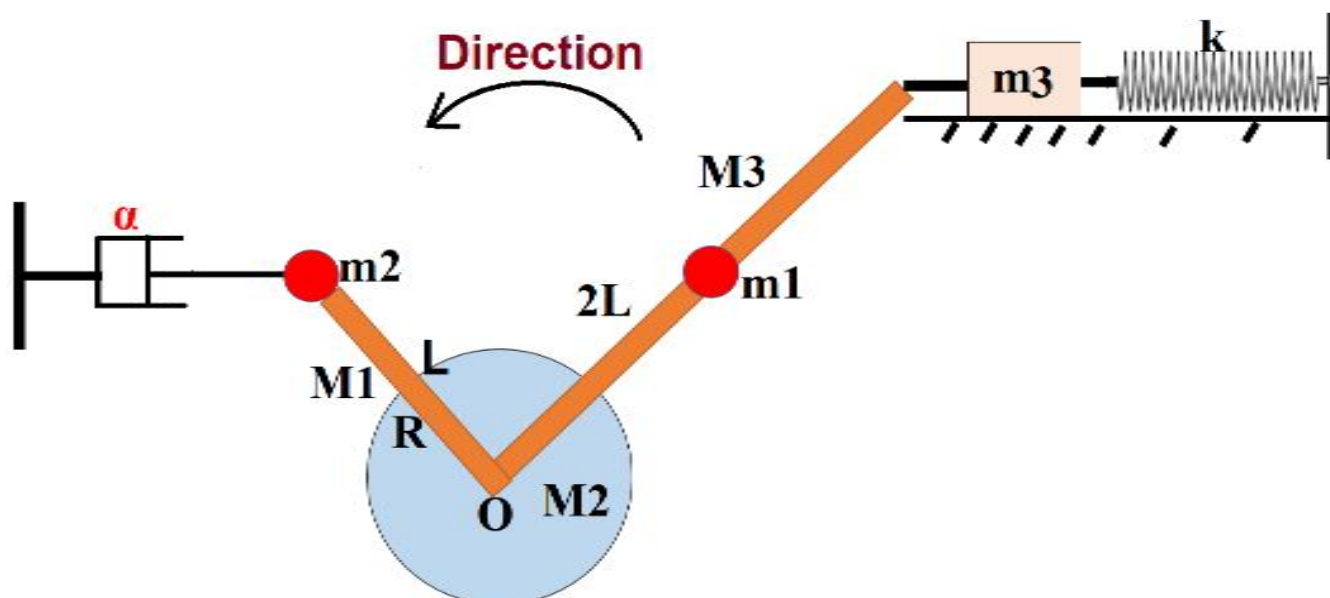
Exercice 02 : 06 points

Le système mécanique comprend une roue circulaire de masse M_2 et rayon R libre de tourner au centre O , à laquelle sont fixées deux barres rigides perpendiculaires. La barre gauche de masse M_1 et de longueur L , porte une masse m_2 connectée à un amortisseur α , tandis que la barre droite de masse M_3 , de longueur $2L$, porte une masse m_1 au milieu et à l'extrémité supérieure une masse m_3 est reliée avec un ressort K fixé.

NB : Utilisez M et P comme abréviation

$$M_1=2.4 \text{ kg}, M_2=2\text{kg}, M_3=3 \text{ kg}, K=100 \text{ N/m}, R=25 \text{ cm}, R=\frac{L}{2}, \alpha=20\text{kg/s}, m_1=m_2=m_3=0.5 \text{ kg.}$$

1-Trouver que l'équation de mouvement de ce système à $t=0$ $\theta(t) = 12^\circ$ et $\dot{\theta}(t) = 0$.



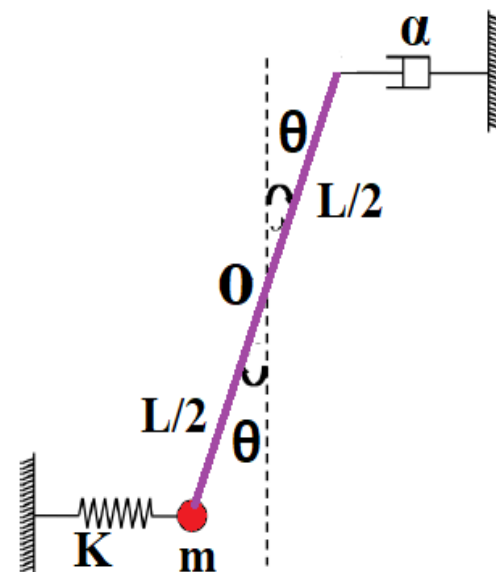
Exercice 03 : 04 points

On considère le système mécanique ci-contre, constitué d'une tige de longueur L et de **masse négligeable** pouvant tourner dans un plan vertical autour de son axe fixe O . Le point A est relié à un bâti fixe par un amortisseur α . A l'autre extrémité de la tige est fixée une masse ponctuelle m qui est reliée à un ressort de raideur K .

$$m=0.5 \text{ kg}, K=100\text{N/m}, L=120 \text{ cm}$$

1-Trouver que l'équation de mouvement de ce système à $t=0$ $\theta(t)=12^\circ$ et $\dot{\theta}(t)=0$ si $\alpha=14.71 \text{ Kg/s}$.

2-Trouver que la solution de l'équation de mouvement de ce système à $t=0$ $\theta(t)=12^\circ$ et $\dot{\theta}(t)=0$ si $\alpha=25 \text{ Kg/s}$.



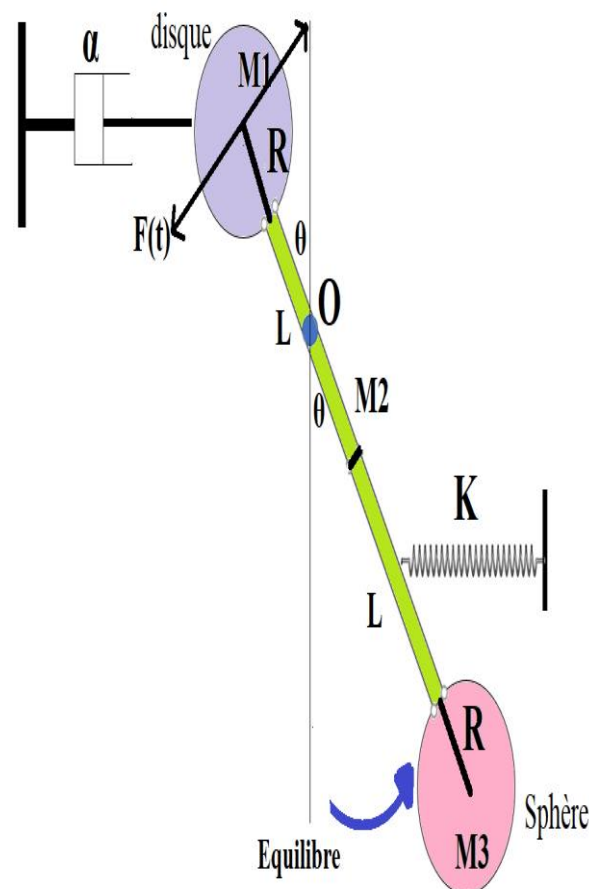
Exercice 04 : 06 points

Un système est composé d'une barre rigide de longueur $2L$, avec un disque de masse M_1 et de rayon R à son extrémité supérieure, et une sphère de masse M_3 et de rayon R à son extrémité inférieure. La barre, de masse M_2 , est divisée en deux moitiés égales. Un ressort de constante K est attaché au milieu de la barre (à L) et à un point fixe sur la droite. Le centre de rotation O est situé dans la moitié supérieure de la barre. Un amortisseur, de coefficient d'amortissement α est fixé au centre du disque, et une force tangente $F(t) = F_0 \sin \Omega t$ est appliquée au centre de disque. Le système oscille autour de sa position d'équilibre sous l'effet des forces du ressort et de l'amortisseur.

$$M_1=03 \text{ kg}, M_2=03\text{kg}, M_3=03 \text{ kg}, K=150 \text{ N/m}, R=30\text{cm},$$

$$R=\frac{L}{2}, \alpha=10 \text{ kg/s}, F_0=100\text{N/m}, \Omega=10 \text{ rad/s}.$$

1-Trouver la solution de l'équation de mouvement de ce système.



NB : Utilisez M et P comme abréviation

Exo : 01 4pts

$$E_c = E_{cm} + E_{cM} = \frac{1}{2} J_{Om} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_{OM} \dot{\theta}^2$$

$$J_{Om} = J/G + J/R = 0 + m d^2 = m a^2$$

$$J_{OM} = J/G + J/R = \frac{1}{12} M (3a)^2 + M \left(\frac{a}{2}\right)^2 = M a^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} (m+M) a^2 \dot{\theta}^2 \quad (0,5)$$

$$E_p = E_{pK} - E_{pm} + E_{pM} = \frac{1}{2} k x^2 - m g h_1 + M g h_2$$

$$x = 2a\theta, \quad x^2 = 4a^2\theta^2$$

$$h_1 = a - a \cos\theta = a \frac{\theta^2}{2} = \frac{a}{2} \theta^2$$

$$h_2 = \frac{a}{2} - \frac{a}{2} \cos\theta = \frac{a}{2} \frac{\theta^2}{2} = \frac{a}{4} \theta^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} k 4a^2\theta^2 - m g \frac{a}{2} \theta^2 + M g \frac{a}{4} \theta^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} \left(4k - \frac{mg}{a} + \frac{Mg}{2a} \right) a^2 \theta^2 \quad (0,5)$$

$$L = E_c - E_p = \frac{1}{2} (m+M) a^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} \left(4k - \frac{mg}{a} + \frac{Mg}{2a} \right) a^2 \theta^2 \quad (0,25)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (0,25)$$

$$(m+M) a^2 \ddot{\theta} + \left(4k - \frac{mg}{a} + \frac{Mg}{2a} \right) a^2 \theta = 0 \quad (0,25)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\left(4k - \frac{mg}{a} + \frac{Mg}{2a} \right)}{(m+M)} \theta = 0 \quad (0,25)$$

Par identification, avec $\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$ (0,25)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4K - \frac{mg}{a} - \frac{Mg}{2a}}{(m+M)}} = 11,41 \text{ rad/s} \quad (0,25)$$

$$\theta(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (0,25)$$

at $t=0$ (0,25) $\theta(t) = 12^\circ = 0,2 \Rightarrow A_0 \cos \varphi = 0,2 \Rightarrow A = \frac{0,2}{\cos \varphi}$

(0,25) $\dot{\theta}(t) = 0 \Rightarrow -A\omega_0 \sin \varphi = 0 \Rightarrow \sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0 \text{ ou } \pi$

$A = 0,2 \text{ rad}$ et $\varphi = 0 \text{ ou } \pi$

(0,25) $\theta(t) = 0,2 \cos(11,41t + \pi)$ ou $\theta(t) = 0,2 \cos(11,41t)$

$$E_T = E_{P_{\max}} = \frac{1}{2} \left(4K - \frac{mg}{a} - \frac{Mg}{2a} \right) a^2 \theta_{\max}^2 = \frac{1}{2} \left(4K - \frac{mg}{a} - \frac{Mg}{2a} \right) a^2 A_0^2$$

(0,25) $E_{P_{\max}} = 1,37 \text{ joule}$

$$E_T = E_{C_{\max}} = \frac{1}{2} (m+M) a^2 \dot{\theta}_{\max}^2$$

$\Rightarrow V_{\max} = \sqrt{\frac{2 E_T}{(m+M) a^2}} = 2,83 \text{ m/s} \quad (0,25)$

Exo: 02 06 points

$$E_c = E_{cm_1} + E_{cm_2} + E_{cm_3} + E_{cm_1} + E_{cm_2} + E_{cm_3} \quad (0,125)$$

$$x = 2L\theta \Rightarrow \dot{x}^2 = 4L^2 \dot{\theta}^2 \quad (0,125) = \frac{1}{2} J_{Om_1} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_{Om_2} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_{Om_1} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_{Om_2} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_{Om_3} \dot{\theta}^2 \quad (0,125)$$

$$J_{Om_1} = J_{I_0} + J_{I_R} = m_1 L^2 \quad (0,125)$$

$$J_{Om_2} = J_{I_0} + J_{I_R} = m_2 L^2 \quad (0,125)$$

$$J_{Om_1} = \frac{1}{12} M L^2 + \frac{M L^2}{4} = \frac{1}{3} M L^2 \quad (0,125)$$

$$J_{Om_2} = \frac{1}{2} M R^2 + 0 = \frac{1}{8} M L^2 \quad (0,125)$$

$$J_{Om_3} = \frac{4}{12} M L^2 + M L^2 = \frac{4}{3} M L^2 \quad (0,125)$$

$$E_c = \frac{1}{2} \left(m_1 + m_2 + 4m_3 + \frac{M_1}{3} + \frac{M_2}{8} + \frac{4M_3}{3} \right) L^2 \dot{\theta}^2 \quad (0,125)$$

$$E_c = \frac{1}{2} \left(6m + \frac{M_1}{3} + \frac{M_2}{8} + \frac{4M_3}{3} \right) L^2 \dot{\theta}^2 \quad (0,125)$$

$$M = \left(6m + \frac{M_1}{3} + \frac{M_2}{8} + \frac{4M_3}{3} \right) \Rightarrow E_c = \frac{1}{2} M L^2 \dot{\theta}^2 \quad (0,125)$$

$$M = 8,05 \quad (0,125)$$

$$E_p = E_{pK} - E_{pM_1} + E_{pM_2} = \frac{1}{2} K x^2 - M_1 g h_1 + M_3 g h_3 \quad (0,125)$$

$$x = 2L\theta, \quad h_1 = \frac{L}{2} - \frac{L}{2} \cos\theta = \frac{L}{2} \theta^2, \quad h_3 = L - L \cos\theta = \frac{L}{2} \theta^2 \quad (0,125)$$

$$E_p = \frac{1}{2} K 4L^2 \theta^2 - M_1 g \frac{L}{2} \theta^2 + M_3 g \frac{L}{2} \theta^2 \quad (0,125)$$

$$E_p = \frac{1}{2} \left(4K - \frac{M_1 g}{2L} + \frac{M_3 g}{L} \right) L^2 \theta^2 \quad (0,125)$$

$$P = \left(4K - \frac{M_1 g}{2L} + \frac{M_3 g}{L} \right) = 436 \Rightarrow E_p = \frac{1}{2} P L^2 \theta^2 \quad (0,125)$$

$$0,125 \quad E_0 = \frac{1}{2} \times \dot{x}^2 \Rightarrow x = L\theta \quad 0,125$$

$$E_0 = \frac{1}{2} \times L^2 \dot{\theta}^2 \quad 0,125$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} \right) + \frac{\partial E_p}{\partial \theta} = 0 \quad 0,125$$

$$ML^2 \ddot{\theta} + \alpha L^2 \dot{\theta} + PL^2 \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{M} \dot{\theta} + \frac{P}{M} \theta = 0 \quad 0,125$$

Par identification avec $\ddot{y} + 2b\dot{y} + \omega_0^2 y = 0 \quad 0,125$

$$b = \frac{\alpha}{2M} = \frac{20}{2(8,05)} = 1,24 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{P}{M}} = \sqrt{\frac{436}{8,05}} = 7,36 \text{ rad/s} \quad 0,125$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - b^2} = 7,25 \text{ rad/s} \quad 0,125$$

$$\theta(t) = A e^{-bt} \cos(\omega t + \varphi) \quad 0,125$$

a. $t = 0 \quad \theta(t) = 12^\circ = 0,2 \Rightarrow A \cos \varphi = 0,2 \Rightarrow A = \frac{0,2}{\cos \varphi} \quad 0,125$

$\dot{\theta}(t) = 0 \Rightarrow -Ab \cos \varphi - A\omega \sin \varphi = 0 \quad 0,125$

$$-0,2b - 0,2\omega \tan \varphi = 0$$

$$\tan \varphi = \frac{-0,2 \times 1,24}{-0,2 \times 7,25} = -5,84$$

$$\varphi = \arctan(-5,84) \approx -10^\circ = 170^\circ \quad 0,125$$

$$A = \frac{0,2}{\cos(-10^\circ)} = 0,2 \quad 0,125$$

$$\theta(t) = 0,2 e^{-1,24t} \cos(7,25t + 170^\circ) \quad 0,125$$

Exo : 03 04 points

$$E_c = \frac{1}{2} J_{Om} \dot{\theta}^2 = 0,125$$

$$J_{Om} = m \frac{L^2}{4} \Rightarrow E_c = \frac{1}{8} m L^2 \dot{\theta}^2 = 0,125$$

$$E_p = E_{pk} + E_{pm} = \frac{1}{2} k x^2 + mgh = \frac{1}{8} \left(k + \frac{2mg}{L} \right) L^2 \theta^2$$

$$E_0 = \frac{1}{2} \alpha x^2, \quad x = \frac{L}{2} \theta \Rightarrow E_0 = \frac{1}{8} \alpha L^2 \theta^2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial E_0}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial E_p}{\partial \dot{\theta}} = 0$$

$$\frac{1}{4} m L^2 \ddot{\theta} + \frac{1}{4} \alpha L^2 \dot{\theta} + \frac{1}{4} \left(k + \frac{2mg}{L} \right) L^2 \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m} \dot{\theta} + \left(\frac{k}{m} + \frac{2g}{L} \right) \theta = 0$$

$$b = \frac{\alpha}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{2g}{L}} = 14,71 \text{ rad/s}$$

Si $\alpha = 14,71 \text{ kg/s} \Rightarrow b = 14,71 \text{ s}^{-1}$

$b = \omega_0$ régime critique $\Gamma = \frac{b}{\omega_0} = 1$

$$\theta(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-bt}$$

a $t=0 \quad \theta(t) = 0,2 \Rightarrow A_1 = 0,2$

$$\dot{\theta}(t) = 0 \Rightarrow -b A_1 + A_2 = 0$$

$$\Rightarrow A_2 = 0,2 \times 14,71 = 2,94$$

$$\theta(t) = (0,2 + 2,94t) e^{-14,71t}$$

$$\text{Si } x = 25 \Rightarrow b = 25 > \omega_0 \quad 0,125$$

$$F = \frac{b}{\omega_0} = 1,7 > 1 \quad \text{régime aperiodique.} \quad 0,125$$

$$\theta(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad 0,125$$

$$s_1 = -b - \sqrt{b^2 - \omega_0^2} = -25 - \sqrt{625 - 216,7} = -45,2 \quad 0,125$$

$$s_2 = -b + \sqrt{b^2 - \omega_0^2} = -25 + \sqrt{625 - 216,7} = -4,8 \quad 0,125$$

$$a \quad t = 0$$

$$\theta(t) = 12^\circ = 0,2 \quad 0,125$$

$$A_1 + A_2 = 0,2 \Rightarrow A_1 = 0,2 - A_2 \quad 0,125$$

$$\dot{\theta}(t) = 0$$

$$A_1 s_1 + A_2 s_2 = 0 \Rightarrow s_1(0,2 - A_2) + A_2 s_2 = 0 \quad 0,125$$

$$\Rightarrow +45,2 A_2 - 4,8 A_2 = 9,04$$

$$A_2 = \frac{9,04}{40,4} = 0,22 \quad 0,125$$

$$\Rightarrow A_1 = 0,2 - A_2 = -0,02 \quad 0,125$$

$$\theta(t) = -0,02 e^{-45,2t} + 0,22 e^{-4,8t} \quad 0,125$$

Exo 4 06 points

$$E_c = E_{cm1} + E_{cm2} + E_{cm3} \quad (0,125)$$

$$= \frac{1}{2} J_{O_{M1}} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_{O_{M2}} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_{O_M} \dot{\theta}^2 \quad (0,125)$$

$$J_{O_{M1}} = J_G + J/R = \frac{1}{2} M_1 R^2 + 4 M_1 R^2 = \frac{9}{2} M_1 R^2 = \frac{9}{8} M_1 L^2 \quad (0,125)$$

$$J_{O_{M2}} = J_G + J/R = \frac{4}{12} M_2 L^2 + \frac{M_2 L^2}{4} = \frac{7}{12} M_2 L^2 \quad (0,125)$$

$$J_{O_{M3}} = J_G + J/R = \frac{2}{5} M R^2 + 16 \frac{M R^2}{3} = \frac{82}{5} M R^2 = \frac{82}{20} M L^2 \approx 4 M_3 L^2 \quad (0,125)$$

$$E_c = \frac{1}{2} \left(\frac{9}{8} M_1 + \frac{7}{12} M_2 + 4 M_3 \right) L^2 \dot{\theta}^2 \quad (0,5)$$

$$M = \left(\frac{9}{8} + \frac{7}{12} + 4 \right) M = \frac{137}{24} M = 17,12 \quad E_c = \frac{1}{2} M L^2 \dot{\theta}^2 \quad (0,125)$$

$$E_p = E_{PK} - E_{PM1} + E_{PM2} + E_{PM3} \quad (0,125)$$

$$= \frac{1}{2} K x^2 - M_1 g h_1 + M_2 g h_2 + M_3 g h_3 \quad (0,125)$$

$$x = L \theta \quad (0,125)$$

$$h_1 = L - L \cos \theta = L \frac{\theta^2}{2} \quad (0,125)$$

$$h_2 = \frac{L}{2} - \frac{L}{2} \cos \theta = \frac{L}{4} \theta^2 \quad (0,125)$$

$$h_3 = 2L - 2L \cos \theta = L \theta^2 \quad (0,125)$$

$$E_p = \frac{1}{2} \left(K + \left(M_1 + \frac{M_2}{2} + 2M_3 \right) \frac{g}{L} \right) L^2 \theta^2 = \frac{1}{2} \left(K + \frac{3M_1 g}{2L} \right) L^2 \theta^2 \quad (0,125)$$

$$P = \left(K + \frac{3M_1 g}{2L} \right) = 225$$

$$E_p = \frac{1}{2} P L^2 \theta^2 \quad (0,125)$$

$$E_D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2 \quad x = L\theta \Rightarrow E_D = \frac{1}{2} \alpha L^2 \dot{\theta}^2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} \right) + \frac{\partial E_c}{\partial \theta} - \frac{\partial E_p}{\partial \theta} = M_{ext}$$

$$M_{ext} = F(t) \cdot l = F_0 \cdot L \sin \omega t$$

$$ML^2 \ddot{\theta} + \alpha L^2 \dot{\theta} + PL^2 = F_0 \cdot L \sin \omega t$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{M} \dot{\theta} + \frac{P}{M} \theta = \frac{F_0}{M \cdot L} \sin \omega t$$

$$b = \frac{\alpha}{2M}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{P}{M}}, \quad A_0 = \frac{F_0}{M \cdot L}$$

Par identification avec $\ddot{y} + 2b\dot{y} + \omega_0^2 y = A_0 \sin \omega t$

$$\theta(t) = A(\omega) \sin(\omega t + \phi)$$

$$A(\omega) = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}} = 0,11 \text{ m}$$

$$\phi = \arctg \frac{-2b\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = +4^\circ$$

$$\theta(t) = 0,11 \sin(10t + 4^\circ)$$