

Chapitre I : Oscillation Libre Harmonique a un degré de liberté

Faculté de chimie, Département GM, L2 génie des procédés GP, USTO

Introduction

Les oscillations jouent un rôle clé en sciences et en génie des procédés. Elles apparaissent aussi bien dans les vibrations mécaniques que dans les réactions chimiques périodiques, les transferts de chaleur ou les instabilités dans les réacteurs. L'étude du cas simple, l'oscillation libre harmonique à un degré de liberté, constitue une base indispensable pour comprendre ces phénomènes.

I.1 Définitions

I.1.1 Définition d'une oscillation :

Une **oscillation** est un mouvement de va-et-vient d'un système autour d'une position d'équilibre. Elle est généralement due à une **force de rappel** (comme celle d'un ressort ou de la gravité) qui ramène le système vers sa position initiale lorsqu'il est déplacé. Exemple : le pendule simple effectue des oscillations lorsqu'il est déplacé de sa verticale et relâché.

I.1.2 Mouvement périodique :

Un **mouvement périodique** est un mouvement qui se répète identiquement à intervalles de temps réguliers.

- La **période** T_0 (s) est le temps nécessaire pour effectuer un cycle complet.
- La **fréquence** ($f_0 = 1/T_0$) est le nombre de cycles effectués par seconde (Hz).

Exemple : un mouvement circulaire uniforme ou les oscillations d'un ressort idéal.

I.1.3 Mouvement vibratoire :

Le **mouvement vibratoire** est un cas particulier du mouvement périodique où le système oscille autour d'une position d'équilibre stable. Contrairement au simple mouvement périodique (qui peut être circulaire), la vibration implique un déplacement alternatif d'avant en arrière.

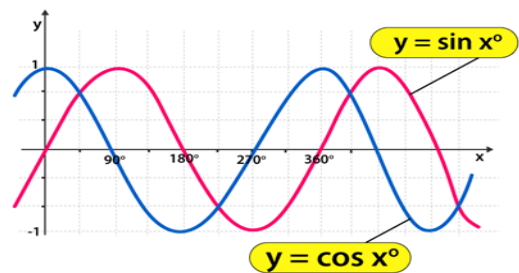
$$\ddot{Y} + \omega_0^2 Y = 0$$

I.1.4 Mouvement sinusoïdal et grandeurs caractéristiques :

Le **mouvement sinusoïdal** est la forme la plus simple d'oscillation. Il est décrit mathématiquement par :

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$x(t) = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$



Où :

Amplitude (A_0) : déplacement maximal du système par rapport à la position d'équilibre. Elle s'exprime dans les mêmes unités que la grandeur mesurée (mètre pour un déplacement, volt pour un signal électrique, etc.).

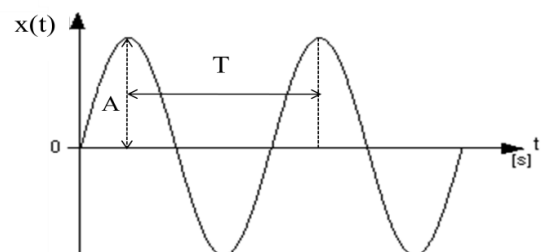
$$A_0 = \max |x(t)|$$

Pulsation Libre ω_0 (rad) : vitesse angulaire de l'oscillation exprimée en rad/s. Elle est liée à la fréquence et à la période par :

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Phase initiale φ : valeur de l'argument ($\omega_0 t + \varphi$) à l'instant $t=0$. Elle permet de déterminer l'état initial de l'oscillation.

Ces trois grandeurs A_0 , ω_0 , et φ suffisent pour décrire complètement un mouvement sinusoïdal.



I.1.5 Mouvement oscillatoire :

Le **mouvement oscillatoire** est un terme plus général qui englobe tout mouvement de va-et-vient, qu'il soit :

Périodique (ex. : mouvement sinusoïdal),
Exemples :

- Oscillations libres : masse-ressort sans frottement.

I.2 Choix de la méthode :

Deux approches principales permettent d'écrire les équations du mouvement : **Newton** et **Lagrange**.

Chapitre I : Oscillation Libre Harmonique a un degré de liberté

Faculté de chimie, Département GM, L2 génie des procédés GP, USTO

I.2.1 Équation de Newton

I.2.1.1 Mouvement de translation

La deuxième loi de Newton s'écrit :

$$\Sigma F = m\ddot{x}$$

I.2.1.2 Mouvement de rotation

Pour un solide en rotation autour d'un axe :

$$\Sigma M = J\ddot{\theta}$$

Où J est le moment d'inertie.

I.2.2 Équation de Lagrange

L'approche lagrangienne est plus générale, adaptée aux systèmes complexes ou contraints.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Où :

- $L = E_c - E_p$ est le lagrangien (énergie cinétique – énergie potentielle),

1.3 L'énergie cinétique et l'énergie potentielle

Les oscillations libres sont caractérisées par un échange permanent entre énergie cinétique et énergie potentielle.

I.3.1 Énergie cinétique

-Translation : $E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

-Rotation : $E_c = \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2$
 $J_0 = J_G + J_R$

J_G = moment d'inertie par rapport au centre de gravité.

$J_R = m d^2$ terme correctif lié au déplacement de l'axe de rotation.

(J_G) pour les solides les plus courants :

1. Tige de longueur L, masse M :

$$J_G = \frac{1}{12} M L^2$$

2. Disque, de rayon R, masse M :

$$J_G = \frac{1}{2} M R^2$$

3. Sphère, rayon R, masse M

$$J_G = \frac{2}{5} M R^2$$

I.3.2 Énergie potentielle

Selon le type de force de rappel, on distingue plusieurs formes d'énergie potentielle :

a) Énergie potentielle de pesanteur

- $E_p = mgh$

b) Énergie potentielle élastique

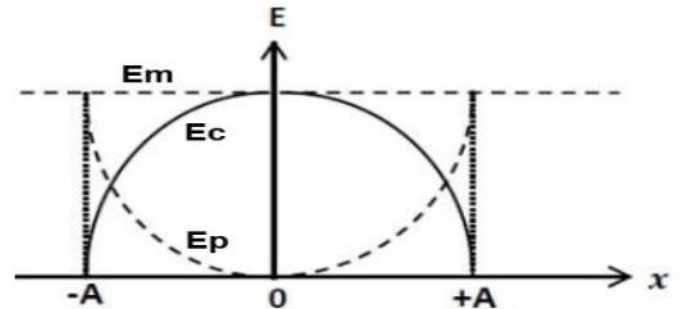
- Pour un ressort : $E_p = \frac{1}{2} k x^2$

1.3.3 Conservation de l'énergie

Dans le cas **non amorti** (sans frottements), l'énergie totale est constante :

$$E_T = \text{constante}$$

$$E_T = E_c + E_p$$



1.3.3.1 Lien avec les maxims

Quand $x = A_0$ (amplitude maximale) $\Rightarrow$ vitesse nulle $\dot{x}=0$

$\Rightarrow$ Toute l'énergie est potentielle :

$$E_T = E_p^{\max} = \frac{1}{2} K A_0^2$$

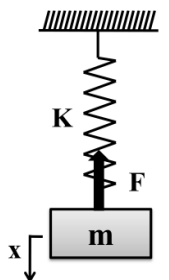
Quand $x = 0$ (passage à l'équilibre) $\Rightarrow$ déplacement nul mais vitesse maximale

$\Rightarrow$ Toute l'énergie est cinétique :

$$E_T = E_c^{\max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2$$

Donc, on peut écrire :

$$E_T = E_c + E_p = E_c^{\max} = E_p^{\max}$$



1.4 Exemples :

1- ressort + masse

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

2-Pendule Simple :

$$l\ddot{\theta} + g\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

