Fiche TD n°04 : B PROBABILITES – Corrigé

USTO-MB / Faculté de Chmie – 2025-2026

Module : Probabilités & Statistiques – LMD S3

Analyse combinatoire

Exercice 1 – Contrôle non destructif (CND)

Un laboratoire dispose de 4 techniques de contrôle non destructif : Ultrasons (U), Radiographie (R), Courants de Foucault (C), Magnétoscopie (M).
Pour chaque pièce, on applique successivement **3 essais** (la même technique peut être répétée).
Combien de séquences d'essais différentes peut-on programmer ?

Corrigé détaillé :
C'est un **arrangement avec répétition** de 3 éléments parmi 4.
Formule : $A_p^n = n^p$
Ici $n = 4$, $p = 3$ donc :

$$A_3^4 = 4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$$

Interprétation : à chaque essai, 4 choix possibles (même avec remise).
Réponse : 64 séquences possibles.

Exercice 2 – Planification d'inspections

5 experts différents (E1 à E5) doivent inspecter une ligne de production sur 5 jours consécutifs (un expert par jour, aucun ne revient).
L'ordre des visites est important.
Combien de plannings différents sont possibles ?

Corrigé détaillé :
On utilise **tous** les experts, sans répétition → **permutation** de 5 éléments distincts.
Formule : $P_n = n!$

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Ou par le principe de multiplication :
1er jour : 5 choix, 2e jour : 4 choix, …, 5e jour : 1 choix → $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.
Réponse : 120 plannings possibles.

Exercice 3 – Code de désignation d'un alliage

Un nouvel acier inoxydable est désigné par le code formé avec les **9 lettres** du mot **INOXDUPLEX**

Lettres : I, N, O, X, D, U, P, L, E, X

On constate que :

— la lettre **X** apparaît **2 fois**,

— toutes les autres lettres apparaissent une seule fois.

En utilisant **toutes** les lettres, combien de codes différents (mots distincts) peut-on former ?

Corrigé détaillé :

C'est une **permutation avec répétition**.

Formule :

$$P^n_{n_1,n_2,\ldots} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,\ldots\,n_k!}$$

Ici $n = 8$, $n_X = 2$:

$$P^9_2 = \frac{9!}{2!} = \frac{362880}{2} = 181440.$$

Réponse : 181440 codes différents.

Exercice 4 – Comité de validation de matériaux

10 ingénieurs spécialisés : 4 en métaux, 3 en polymères, 3 en céramiques.

On forme une commission de **4 ingénieurs** avec **au moins un spécialiste de chaque domaine**.

Combien de commissions différentes sont possibles ?

Corrigé détaillé :

Méthode du complément (souvent la plus rapide) :

Nombre total de comités de 4 personnes parmi 10, c'est des combinaisons puisque l'ordre n'est pas important :

$$C^{10}_4 = \binom{10}{4} = \frac{10!}{4!\,6!} = 210$$

On soustrait les cas interdits (manque au moins un domaine) :

— Comités sans métaux : $\binom{6}{4} = 15$

— Comités sans polymères : $\binom{7}{4} = 35$

— Comités sans céramiques : $\binom{7}{4} = 35$

Donc :

$$\text{Nombre de comités valides} = 210 - 15 - 35 - 35 = 210 - 85 = 125$$

Réponse : 125 commissions possibles.

Exercice 5 – Jetons

1. 1.a. On est dans un cas où l'ordre et la répétition interviennent puisque les jetons sont tirés successivement et avec remise. À chaque tirage, on a 13 choix possibles, et donc on obtient $A_6^{13} = 13^6$ résultats possibles (on a dénombré des arrangements avec répétition).

1.b.

1.b.i. Pour obtenir exactement un jeton noir, on doit choisir à quel tirage on va tirer le jeton noir (6 choix possibles). Ensuite pour chaque choix de numéro de tirage, on a 8 choix possibles de jetons noirs et pour les 5 autres tirages, on a 5 possibilités à chaque fois puisqu'il y a 5 jetons blancs, donc $8 \times A_6^5 = 8 \times 5^6$. Ainsi, on obtient en tout : $6 \times 8 \times 5^5$ résultats possibles.

On peut noter cet évènement "exactement 1 jeton noir" par E_1, c'est-à-dire qu'on a obtenu $|E_1| = 6 \times 8 \times 5^5$.

1.b.ii. On va dénombrer l'ensemble complémentaire. En effet, il y a exactement $A_6^5 = 5^6$ tirages sans jeton noir (à chaque fois, on a tiré un jeton blanc). On peut noter cet ensemble "0 jeton noir" par E_0, c'est-à-dire qu'on a $|E_0| = 5^6$.

Il y a donc $13^6 - 5^6$ tirages avec au moins un jeton noir.

1.b.iii. On a déjà dénombré les tirages avec exactement un jeton noir ($|E_1|$) et les tirages sans jeton noir ($|E_0|$). L'ensemble recherché étant l'union disjointe des ensembles précédents, c'est-àdire $E_1 \cup E_0$, il y a $|E_1 \cup E_0| = |E_1| + |E_2| = 6 \times 8 \times 5^5 + 5^6$ tirages amenant au plus un jeton noir.

1.b.iv. Si on a deux fois plus de jetons noirs que de jetons blancs, c'est qu'on a tiré 4 jetons noirs et 2 jetons blancs. On commence par fixer les 2 tirages parmi 6 pour lesquels on a trouvé un jeton blanc : il y en a $C_2^6 = \binom{6}{2}$. Ce choix fixé, il y a $A_2^5 = 5^2$ choix pour les jetons blancs et $A_4^8 = 8^4$ choix possibles pour les jetons noirs.

On obtient au final $\binom{6}{2} \times 5^2 \times 8^4$ tirages amenant 2 fois plus de jetons noirs que de jetons blancs.

2. 2.a. Si on tire les jetons successivement et sans remise, l'ordre intervient mais il n'y a plus de répétition. On dénombre des arrangements (sans répétition) et il y a

$$\overline{A}_6^{13} = \frac{13}{(13-6)!} = \frac{13!}{7!} = 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8$$

tirages possibles.

2.b. 2.b.i. Pour obtenir exactement un jeton noir, on doit choisir à quel tirage on va tirer le jeton noir (6 choix possibles). Ensuite pour chaque choix de numéro de tirage, on a 8 choix possibles de jetons noirs et pour les 5 autres tirages, on doit choisir 5 jetons parmi 5 sans remise mais avec ordre :

$$P^5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

Ainsi, on obtient

$$|E_1| = 6 \times 8 \times 5!$$

résultats possibles.

2.b.ii. On remarque qu'il n'y a **aucun** tirage sans jeton noir ($E_0 = \varnothing$ ou $|E_0| = 0$), puisque l'on fait 6 tirages, sans remise, et qu'il n'y a que 5 jetons blancs. Le nombre de tirages avec au moins un jeton noir est égal au nombre total de tirages, soit

$$\overline{A}_6^{13} = \frac{13!}{7!}.$$

2.b.iii. Comme il n'y a aucun tirage sans jeton noir, le nombre de tirages avec au plus un jeton noir est égal au nombre de tirages avec exactement un jeton noir ($E_1 \cup E_0 = E_1 \cup \varnothing = E_1$), soit

$$6 \times 8 \times 5!$$

résultats possibles.

2.b.iv. Comme précédemment, on tire 2 jetons blancs et 4 jetons noirs. On commence par fixer la place des 2 jetons blancs parmi les 6 tirages, il y a $C_2^6 = \binom{6}{2}$ choix. Puis il y a

$$\overline{A}_2^5 = \frac{5!}{(5-2)!} = 5 \times 4$$

choix pour les jetons blancs et

$$\overline{A}_4^8 = \frac{8!}{(8-4)!} = 8 \times 7 \times 6 \times 5$$

choix possibles pour les jetons noirs. Finalement, on obtient

$$C_2^6 \times \overline{A}_2^5 \times \overline{A}_4^8 = \binom{6}{2} \times 5 \times 4 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5$$

choix possibles.

3. 3.a. On est dans le cas où ni l'ordre ni la répétition n'interviennent, on dénombre donc des combinaisons. Il y a donc

$$C_6^{13} = \binom{13}{6} = \frac{13!}{6!(13-6)!}$$

résultats possibles.

3.b. 3.b.i. On tire forcément tous les jetons blancs et un jeton noir parmi les 8 : il y a donc $C_5^5 \times C_1^8 = 1 \times 8 = 8$ tirages possibles.

3.b.ii. On remarque qu'il n'y a aucun tirage sans jeton noir, puisque l'on fait 6 tirages, sans remise, et qu'il n'y a que 5 jetons blancs. Le nombre de tirages avec au moins un jeton noir est égal au nombre total de tirages, soit

$$C_6^{13} = \binom{13}{6}.$$

3.b.iii. Comme il n'y a aucun tirage sans jeton noir, le nombre de tirages avec au plus un jeton noir est égal au nombre de tirages avec exactement un jeton noir, soit 8 résultats possibles.

3.b.iv. On doit tirer 2 jetons blancs parmi 5 et 4 jetons noirs parmi 8. Le nombre de tirages recherché est donc

$$C_2^5 \times C_4^8 = \binom{5}{2} \times \binom{8}{4} = \frac{5!}{2!(5-2)!} \times \frac{8!}{4!(8-4)!}.$$

Algèbre des évènements

Execrice 1

Soit Ω l'univers et A, B, C des événements. Exprime à l'aide de A, B, C, $\cup$, $\cap$, $\bar{\ }$:

1. Seul A se réalise : $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
2. A et B se réalisent, mais pas C : $A \cap B \cap \overline{C}$
3. Les trois événements se réalisent : $A \cap B \cap C$
4. Au moins l'un des trois se réalise : $A \cup B \cup C$
5. Au moins deux se réalisent : $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)$
6. Aucun ne se réalise : $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
7. Au plus un se réalise : $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$
8. Exactement deux se réalisent : $(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C)$

Exercice 2

On lance un dé tétraédrique numéroté 1 à 4.

a) Définir l'univers Ω : $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$.

b) Écrire les événements A "obtenir un nombre pair", B "obtenir 3 ou 4" : $A = \{2, 4\}$ et $B = \{3, 4\}$.

c) Donner $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A}$: $A \cap B = \{2, 3, 4\}$, $A \cup B = \{2\}$ et $\overline{A} = \{1, 3\}$.

Exercice 3

Soit $\Omega = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, d, e, f\}$, $C = \{c, e, g, h\}$.

1. $A \cap B = \{b, d\}$ donc $|A \cap B| = 2$
2. $A \cup C = \{a, b, c, d, e, g, h\}$ donc $|A \cup C| = 7$
3. $B \cap C = \{e\}$ donc $|B \cap C| = 1$
4. $\overline{A} = \Omega \setminus A = \{e, f, g, h\}$ donc $|\overline{A}| = 4$
5. $A \cup B \cup C = \Omega = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ donc $|A \cup B \cup C| = 8$
6. $(A \cup C) \cap \overline{B} = \{a, b, c, d, e, g, h\} \cap \{a, c, g, h\} = \{a, c, g, h\}$
   donc $|(A \cup C) \cap \overline{B}| = 4$
7. Éléments dans exactement deux parmi A, B, C :

   $$(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C)$$

   Analyse sur chaque élément de Ω :

   $$\{b, c, d, e\}$$

   donc nombre d'éléments $= 4$

Exercice 4

Soit E un ensemble à n éléments.

1. Le nombre de sous-ensembles de taille k est le nombre de combinaisons (ou coefficient binomial) :

$$\mathrm{C}_k^n = \binom{n}{k}$$

2. Si A et B sont disjoints avec respectivement a et b éléments, alors :

$$|A \cup B| = |A| + |B| = a + b$$

3. Si A et B ne sont pas disjoints :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Exercice 5

Dans une classe de 25 élèves :

$$|F| = 10 \quad \text{(foot)}, \quad |B| = 15 \quad \text{(basket)}, \quad |F \cap B| = 5$$

1. Élèves ne faisant qu'un seul sport :

$$(F \cap \overline{B}) \cup (\overline{F} \cap B),$$

avec

$$|F \cap \overline{B}| = 10 - 5 = 5, \quad |B \cap \overline{F}| = 15 - 5 = 10$$

donc

$$\text{au total} = 5 + 10 = 15.$$

2. Élèves faisant au moins un sport :

$$F \cup B,$$

avec

$$|F \cup B| = |F| + |B| - |F \cap B| = 10 + 15 - 5 = 20.$$

3. Élèves ne faisant aucun sport :

$$\overline{F \cup B} = \Omega \setminus (F \cup B),$$

donc nombre d'élèves

$$25 - 20 = 5.$$