Fiche TD n°05 : B PROBABILITES – Corrigé

USTO-MB / Faculté de Chmie – 2025-2026

Module : Probabilités & Statistiques – LMD S3

Exercice 1 :

a) Répartition dans le diagramme de Venn.

On place dans les différentes régions :

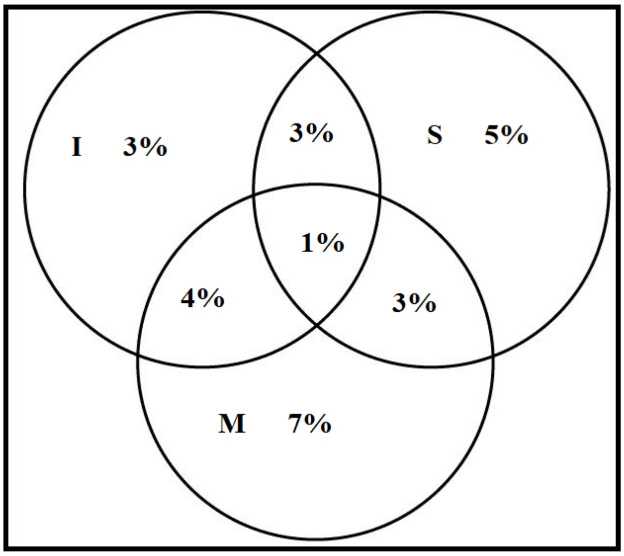

Figure 1 – Digramme de Venn

b) Proportion de téléviseurs sans défaut.

La proportion de téléviseurs présentant au moins un défaut $(I \cup S \cup M)$ vaut

$$2 + 5 + 7 + 3 + 4 + 3 + 1 = 25\%.$$

La proportion de téléviseurs sans aucun défaut est donc la proportion du complémentaire :

$$P(\overline{I \cup S \cup M}) = 100\% - 25\% = 75\%.$$

c) Proportion de téléviseurs ayant des défauts d'image ou de son (ou les deux).

Les téléviseurs concernés appartiennent à l'événement $I \cup S$. On additionne les pourcentages des régions contenant I ou S :

$$P(I \cup S) = 2 + 5 + 3 + 4 + 3 + 1 = 18\%.$$

Ainsi, la proportion recherchée est 18%.

Exercice 2 :

a) Un lot contenant 10% d'unités défectueuses possède 5 unités défectueuses et 45 bonnes sur 50.

On calcule le nombre d'échantillons possibles (ce sont des combinaison puisque l'ordre n'importe pas) : $n(\Omega) = C_{50}^{10} = \binom{50}{10}$

Au lieu de calculer le nombre d'échantillon avec au moins une unité défectueuse, on calcule le complémentaire : le nombre d'échantillon avec aucune unité défectueuse, qu'on note évènement A, est $n(A) = C_{45}^{10} = \binom{45}{10}$

On obtient ainsi la probabilité qu'aucune unité ne soit défectueuse

$$P(\text{aucune défectueuse}) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\binom{45}{10}}{\binom{50}{10}} \approx 0.31$$

La probabilité que le lot soit retourné est la probabilité d'obtenir au moins une unité défectueuse dans l'échantillon de 10 unités :

$$P(\text{retour}) = 1 - P(\text{aucune défectueuse}) = 1 - \frac{\binom{45}{10}}{\binom{50}{10}} \approx 0.69.$$

b) L'évènement "au plus une unité défectueuse" est l'union disjointe des deux évènements A :"aucune unité défectueuse" et B :"exactement une unité défectueuse".

On doit calculer le nombre de possibilités pour B : $n(B) = C_5^1 \times C_{45}^9 = 5 \times \binom{45}{9}$

Donc la probabilité de B est $P(\text{1 défectueuse}) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{5 \times \binom{45}{9}}{\binom{50}{10}} \approx 0.43$

La probabilité de tirer au plus une unité défectueuse dans l'échantillon de 10 unités vaut

$$\begin{aligned} P(\text{au plus une défectueuse}) = P(\text{0 défectueuse}) + P(\text{1 défectueuse}) &= \frac{\binom{45}{10}}{\binom{50}{10}} + \frac{5 \times \binom{45}{9}}{\binom{50}{10}} \\ &\approx 0.31 + 0.43 = 0.74. \end{aligned}$$

Exercice 3 :

On suppose que les 2 cartes sont tirées simultanément, sans remise. Le nombre total d'issues possibles est donc

$$N = \binom{52}{2} = 1326.$$

a) Il y a 12 figures (valets, dames, rois), donc $52 - 12 = 40$ cartes qui ne sont pas des figures. L'événement contraire de «au moins une figure» est «aucune figure», c'est-à-dire

2 cartes parmi les 40 non-figures. D'où le nombre de combinaisons de non-figures est $C_{40}^2 = \binom{40}{2} = 780$

$$P(\text{au moins une figure}) = 1 - P(\text{aucune figure}) = 1 - \frac{\binom{40}{2}}{\binom{52}{2}} = 1 - \frac{780}{1326} \approx 1 - 0.588 \approx 0.422.$$

b) Pour obtenir une paire d'as, il faut tirer les deux as parmi les 4 disponibles.

$$P(\text{paire d'as}) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{6}{1326} \approx 0.0045.$$

c) Une paire quelconque correspond à choisir une valeur parmi les 52 , puis 1 cartes parmi les 3 restantes de même valeur. Le nombre de paires possibles est donc

$$52 \times 3 = 156.$$

La probabilité d'obtenir une paire est alors

$$P(\text{paire}) = \frac{156}{\binom{52}{2}} = \frac{156}{1326} = 0.117.$$

Exercice 4 :

Le nombre total de combinaisons possibles (issues équiprobables) est

$$N = \binom{49}{6} = 13983816.$$

a) Il n'y a qu'une seule combinaison gagnante.

$$P(\text{gagner avec un billet}) = \frac{1}{\binom{49}{6}} \approx 7.5 \times 10^{-8}.$$

b) On veut exactement 4 numéros gagnants sur les 6 choisis.

On choisit d'abord 4 des 6 numéros gagnants, puis 2 numéros parmi les $49 - 6 = 43$ numéros perdants :

$$\#(\text{billets avec exactement 4 bons numéros}) = \binom{6}{4}\binom{43}{2} = 15 \times 903 = 13,545.$$

Donc

$$P(\text{exactement 4 bons numéros}) = \frac{\binom{6}{4}\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = \frac{13545}{13983816} \approx 9.68 \times 10^{-4}.$$

c) Pour un tirage, on note p la probabilité de gagner qu'on déjà calculée

$$p = \frac{1}{\binom{49}{6}}.$$

Pour deux tirages indépendants avec un billet à chaque fois, la probabilité d'obtenir la combinaison gagnante au moins une fois est

$$\begin{aligned} P(\text{gagner au moins une fois}) &= 1 - P(\text{perdre aux deux tirages}) \\ &= 1 - (1-p)^2 = 1 - \left(1 - \frac{1}{\binom{49}{6}}\right)^2 \approx 1.43 \times 10^{-7}. \end{aligned}$$

d) Cas 1 : Paul achète deux billets différents pour le même tirage.

Pour un billet donné, la probabilité de gagner est toujours p. La probabilité de gagner au moins une fois avec les deux billets est

$$P_1 = 1 - P(\text{aucun billet ne gagne}) = 1 - (1-p)^2.$$

Cas 2 : Paul achète un billet pour ce soir et un billet pour demain. Les tirages sont indépendants, avec la même probabilité p de gagner à chaque fois. La probabilité de gagner au moins une fois est alors

$$P_2 = 1 - P(\text{perdre aux deux tirages}) = 1 - (1-p)^2.$$

On a donc $P_1 = P_2$. Les deux stratégies offrent la même probabilité de gagner au moins une fois : Paul n'a pas raison de penser que l'une est meilleure que l'autre.

Exercice 5 :

On suppose que pour chaque mois, on choisit un employé au hasard de façon indépendante des autres mois et que chacun a la même probabilité d'être choisi.

a) Jacques n'est pas testé cette année

Pour un mois donné, la probabilité que Jacques ne soit pas choisi est

$$P(J \text{ pas choisi en un mois}) = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}.$$

Sur 12 mois (indépendants),

$$P(J \text{ jamais testé}) = \left(\frac{19}{20}\right)^{12}.$$

b) Ni Jacques ni Alain ne sont testés cette année

Pour un mois donné, la probabilité que le sélectionné ne soit ni Jacques ni Alain est

$$P(\text{ni J ni A en un mois}) = 1 - \frac{2}{20} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}.$$

Sur 12 mois,

$$P(\text{ni J ni A testés de l'année}) = \left(\frac{9}{10}\right)^{12}.$$

c) Jacques et Alain sont tous les deux testés au moins une fois

On note J l'événement «Jacques est testé au moins une fois», A l'événement «Alain est testé au moins une fois».

On utilise la formule

$$P(J \cap A) = 1 - P(J^c \cup A^c) = 1 - \big(P(J^c) + P(A^c) - P(J^c \cap A^c)\big).$$

On a déjà

$$P(J^c) = P(A^c) = \left(\frac{19}{20}\right)^{12}.$$

De plus, $J^c \cap A^c$ signifie que ni Jacques ni Alain ne sont testés de l'année, donc

$$P(J^c \cap A^c) = \left(\frac{9}{10}\right)^{12}.$$

Ainsi,

$$P(J \cap A) = 1 - 2\left(\frac{19}{20}\right)^{12} + \left(\frac{9}{10}\right)^{12}.$$