Cours de Probabilités pour Ingénieurs en Génie des Matériaux
Chapitre 1 : Analyse Combinatoire

Les espaces échantillonnaux finis et leur dénombrement

Cette section porte uniquement sur les résultats équiprobables. Pour être en mesure d'établir une probabilité selon $P(A) = n(A)/n$, il faut pouvoir déterminer la valeur de n, soit le nombre de résultats possibles, et celle de $n(A)$, soit le nombre de résultats favorables à l'événement A.

Lorsque l'expérience est très simple, comme le lancer de dés ou d'une pièce de monnaie, il est aisé d'établir le nombre de résultats possibles ou favorables. Par contre, si l'on s'intéresse à la probabilité d'obtenir au moins deux as lorsqu'on pige cinq cartes d'un jeu de cinquante-deux cartes, le contexte est beaucoup plus difficile à cerner. Il en va de même si on choisit au hasard des pièces d'une chaîne de production et qu'on souhaite quantifier la probabilité de non-obtention d'une pièce défectueuse.

Il faudra dans toutes ces situations faire appel à différentes **techniques de dénombrement** pour évaluer n et $n(A)$. Nous étudierons ici des diagrammes en arbre, du principe de multiplication, de permutations d'objets semblables et de combinaisons.

Les diagrammes en arbre

Dans le cas d'une expérience simple, la construction d'un diagramme en arbre peut s'avérer utile pour le dénombrement des résultats possibles ou favorables. Dans l'exemple 1.9, dans lequel on lance à trois reprises une pièce de monnaie, la figure 6 montre le diagramme en arbre représentant les huit résultats possibles. On y observe les huit résultats de l'espace échantillonnal $\mathscr{S}$ que sont PPP, PPF, PFP et FFP sont considérés.

On a donc un total de $2^3 = 8$ résultats {PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF}.

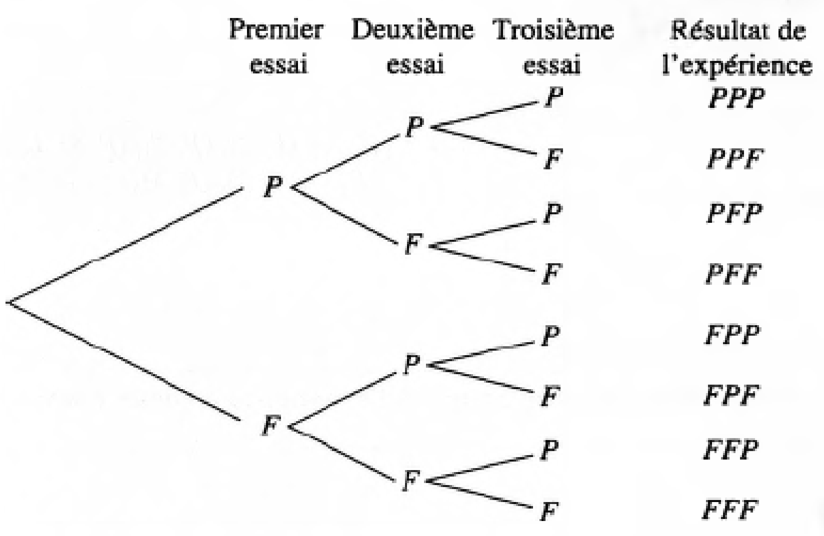

FIGURE 1 – Le diagramme en arbre d'une expérience dans laquelle on lance à trois reprises une pièce équilibrée

Le principe de multiplication

Si les ensembles A_1, A_2, ..., A_k comptent respectivement n_1, n_2, ..., n_k éléments, il existe $n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$ façons de choisir un élément de A_1, puis un élément de A_2, ..., et ainsi de suite jusqu'à un élément de A_k.

Principe de multiplication
Supposons une expérience $\mathscr{E}$ composée de k étapes, et que :

— Il y a n_1 façons de réaliser l'étape 1 :

— Il y a n_2 façons de réaliser l'étape 2 (pour chaque issue de l'étape 1) ;

— etc. ;

— Il y a n_k façons de réaliser l'étape k (pour toutes les issues des étapes précédentes).

Alors, l'espace échantillonnal de $\mathscr{E}$ contiendra $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$ résultats possibles. Si à chaque étape de l'expérience les n_i issues sont équiprobables, alors les $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$ résultats ont la même probabilité.

Dans le cas particulier où $n_1 = n_2 = \cdots = n_k = n$, il y a n^k choix possibles. Cette situation a été observée à la figure 1.8.

Exemple 1.27

Imaginons qu'une pièce et un dé équilibrés. Les deux résultats possibles de l'étape 1, soit $\{P, F\}$, sont indépendants des six résultats possibles de l'étape 2, soit $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, d'où $n_1 = 2, n_2 = 6$, et l'ensemble des résultats possibles est constitué de $2 \times 6 = 12$ résultats. On peut dresser à l'annexe un diagramme en arbre semblable à la figure 7 pour l'énumération.

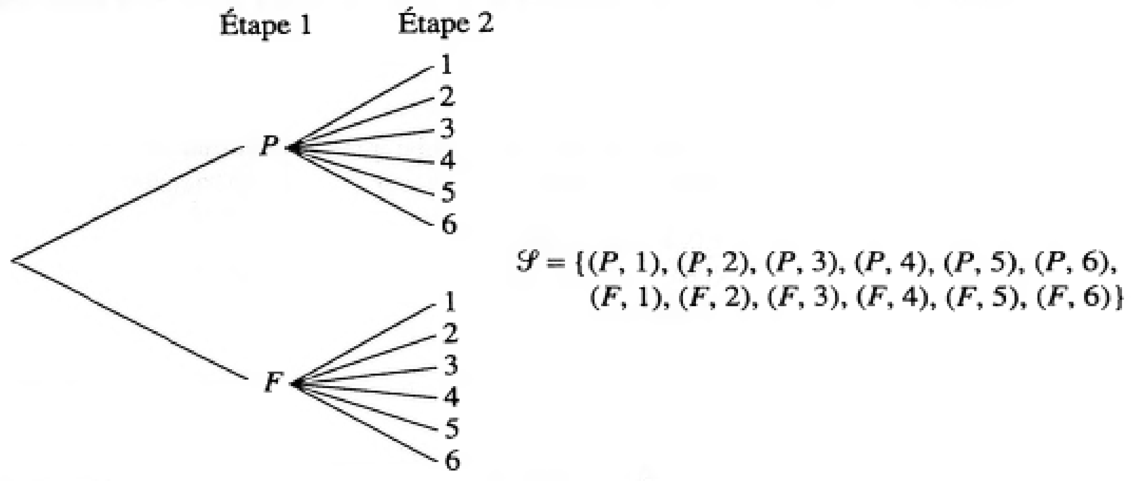

FIGURE 2 – Le diagramme en arbre associé à l'expérience en deux étapes de l'exemple 1.27

Exemple 1.28

Soit un processus de production où l'inspection en cours de fabrication est très limitée. Une fois les produits finis, on les achemine à une aire d'examen où quatre personnes en vérifient chacune une caractéristique différente. La première de ces personnes attribue aux unités produites l'une ou l'autre de quatre cotes ; la deuxième, l'une ou l'autre de trois cotes ; et les deux autres, l'une ou l'autre de deux cotes chacune. Chaque personne inscrit sur l'étiquette d'identification du produit la cote attribuée selon la caractéristique examinée.
Il y a un total de $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 48$ inscriptions possibles pour une unité donnée.

Les permutations

Permutation
Une permutation de n éléments distincts consiste en une liste ordonné de tous les n éléments.

Considérons l'exemple de trois jetons se distinguant chacun par une lettre différente, a, b, c.Voici toutes les permutations possibles de ces jetons :
abc acb bac bca cab cba
Puisqu'il y a trois lettres possibles à la première position, puis deux lettres restantes pour la deuxième position, et enfin une seule lettre pour la troisième position, le principe de multiplication nous permet de vérifier qu'il y a $3 \times 2 \times 1 = 3! = 6$ permutations possibles au total.
Dans le cas de n objets distincts, on aura $n!$ permutations possibles.

Permutations de n objets distincts Le nombre de permutations possibles de n objets distincts correspond à :

$$P^n = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \times 1 = n!$$

Prenos le cas où on cherche le nombre de permutations des lettres A, A, B. On a 3 lettres à permuter mais 2 de ces lettres sont A. On peut pas distinguer entre elles, alors les permutations sont :

AAB   ABA   BAA

donc le nombre de permutations est 3.

Permutations de n objets pas tous distincts Dans le cas où n_1 des objets sont indiscernables parmi les n objets à permuter, le nombre de permutations possibles est

$$P_{n_1}^{n} = \frac{n!}{n_1!}$$

S'il y a encore n_1 objets indiscernables, et n_1 objets indiscernables, ..., n_k objets indiscernables, alors le nombre de permutations possibles correspond à :

$$P_{n_1,n_2,\ldots,n_k}^{n} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

Par exemple, le nombre de permutations possibles pour les lettres du mot TENESSEE est $P_{n_E,n_S}^{n} = P_{4,2}^{8} = \frac{8!}{4!2!} = 840$. C'est-à-dire qu'on peut former 840 mots distincts de 8 lettres en changeant l'ordre des lettres.

Les arrangements

Dans le premier exemple du lancer d'une pièce de monnaie trois fois, on a obtenu le nombre de possibilités par 2^3. Ceci se généralise pour une expérience à n résultats répétée p fois : n^p.

Arrangement avec répétition
Le nombre d'arrangements avec répétition de p éléments parmi n objets est donné par la formule :

$$A_p^n = n^p$$

On a un autre cas d'arrangement :

Arrangement sans répétition
Un arrangement sans répétition consiste en une liste ordonné d'objets distincts. Deux arrangements diffèrent l'une de l'autre si leur contenu n'est pas le même ou si leurs éléments sont ordonnés différemment.

Considérons l'exemple de quatre jetons se distinguant chacun par une lettre différente, a, b, c ou d.Voici tous les arrangements de ces jetons pris un à la fois :

a
b
c
d.

Voici tous les arrangements de ces jetons pris deux à la fois :

Puisqu'il y a quatre lettres possibles à la première position, puis trois lettres restantes pour la deuxième position, le principe de multiplication nous aurait permis de vérifier que le nombre d'arrangements possibles est $4 \times 3 = 12$. Notons que les arrangements ab et ba

ab	*bc*
ba	*cb*
ac	*bd*
ca	*db*
ad	*cd*
da	*dc.*

diffèrent l'une de l'autre parce que leurs éléments ne sont pas dans le même ordre, tandis que les arrangements ac et ab diffèrent l'une de l'autre parce que leur contenu n'est pas le même.

Prenons le cas de n objets distincts à partir desquels on veut obtenir des arrangements de r objets ($r \leq n$). Le choix du premier objet a n résultats possibles, le choix du deuxième, $(n-1)$ résultats possibles, et ainsi de suite jusqu'au choix du r-ième, qui a $[n-(r-1)]$ résultats possibles. L'application du principe de multiplication nous permet d'établir la formule générale suivante.

Arrangements de r objets choisis parmi n objets
Le nombre d'arrangements (sans répétition) possibles de r objets distincts choisis parmi n objets distincts correspond à :

$$\overline{A}^{r}_{n} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Soulignons que $\overline{A}^{n}_{n} = P^n = n!$ et que $0! = 1$.

Exemple 1.29

Une équipe de baseball des ligues majeures compte en général 25 joueurs. La formation à l'attaque se compose de 9 de ces joueurs dans un ordre donné. Il y a donc $A_9^{25} = 7,41 \cdot 10^{11}$ formations possibles.

Les combinaisons

Combinaison
Une combinaison consiste en un arrangement d'objets distincts et ne diffère d'une autre que si son contenu n'est pas le même. L'ordre n'a ici aucune importance.

Voici toutes les combinaisons possibles de deux jetons pris parmi quatre jetons qui portent chacun une lettre différente, a, b, c ou d :

— ab

— ac

— ad

— bc

— bd

— cd

Puisqu'il y a $2! = 2$ façons de permuter deux objets, la liste des combinaisons est deux fois plus courte que la liste des permutations de deux objets choisis parmi quatre.

Combinaisons de r objets choisis parmi n objets
Le nombre de combinaisons de r objets distincts choisis parmi n objets distincts est défini par

$$C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{\overline{A}_n^r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad (1.3)$$

Pour nos besoins actuels, on a défini le terme $\binom{n}{r}$ dans les cas où n et r sont des nombres entiers tels que $0 \leq r \leq n$. Ce terme peut toutefois être défini de façon générale pour un nombre réel n et tout nombre entier non négatif r. On peut aussi écrire

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!}$$

Le terme $\binom{n}{r}$ porte le nom de « coefficient binomial » en raison de son utilisation dans le théorème du binôme :

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^r b^{n-r}. \qquad (1.4)$$

Exemple 1.30

Une équipe de l'Association nationale de basketball (NBA) compte habituellement 12 joueurs. La formation partante se compose de 5 de ces joueurs dont l'ordre n'a pas d'importance. Il y a, par conséquent,

$$\binom{12}{5} = \frac{12!}{5!7!} = 792$$

formations partantes possibles.

Voici deux identités utiles pour la résolution de problèmes :

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \qquad (1.5)$$

et

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} \qquad (1.6)$$

On peut expliquer le résultat de l'équation 1.5 en posant

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = \binom{n}{n-r}$$

ou en remarquant que le nombre de façons de « choisir » r objets parmi n est équivalent au nombre de façons d'« exclure » $n-r$ objets parmi n. Le résultat de l'équation 1.6 se justifie mathématiquement en développant le membre de droite et en regroupant les termes semblables.

Le nombre de sous-ensembles possibles

Un ensemble fini de n éléments comprend 2^n sous-ensembles. On peut le vérifier à l'aide du principe de multiplication en considérant que chaque élément peut être présent ou absent d'un sous-ensemble donné (2 possibilités). On a donc un total de $2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$ sous-ensembles possibles. On peut aussi le vérifier à partir du théorème du binôme (*voir l'équation 1.4*) en utilisant $a = b = 1$, comme suit :

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$$

Le membre de droite de cette relation indique le nombre total de sous-ensembles, puisque $\binom{n}{0}$ représente le nombre de sous-ensembles vides, $\binom{n}{1}$ le nombre de sous-ensembles formés d'un élément, et ainsi de suite jusqu'à $\binom{n}{n}$, qui représente le nombre de sous-ensembles formés de n éléments. On appelle parfois « ensemble-puissance » l'ensemble contenant tous les sous-ensembles possibles d'un ensemble d'éléments.

Cours de Probabilités pour Ingénieurs en Génie des Matériaux
Chapitre 2 : Algèbre des évènements

Un retour sur les ensembles

Nous allons recourir à quelques éléments de la théorie des ensembles pour présenter les concepts de base du calcul des probabilités. Un ensemble est une collection ou un groupe d'objets. On le désigne habituellement par une lettre majuscule, telle que A ou B. On appelle « éléments de A » les objets qui forment l'ensemble A. En règle générale, on écrit « $x \in A$ » si x appartient à l'ensemble A, et « $x \notin A$ » si tel n'est pas le cas. Il arrive qu'on utilise un ensemble pour représenter les éléments et qu'on indique une propriété caractéristique. Illustrons ces notions à l'aide de quelques exemples. Lors de la description d'un ensemble, seuls deux points d'intérêt à une énoncée doivent être pris en ligne « tels que ».

Exemple 1.1

L'ensemble formé des nombres entiers 5, 6, 7 et 8 est fini et compte quatre éléments. On peut le noter

$$A = \{5, 6, 7, 8\}.$$

Les énoncés « $5 \in A$ » et « $9 \notin A$ » sont ici tous deux vrais.

Exemple 1.2

On peut définir l'ensemble des voyelles de l'alphabet français en écrivant $V = \{a, e, i, o, u, y\}$. Une autre façon de procéder consiste à indiquer une caractéristique propre à cet ensemble, en utilisant un symbole, d'où

$$V = \{* : * \text{ est une voyelle de l'alphabet français}\}.$$

Exemple 1.3

Soit A l'ensemble de tous les nombres réels compris entre 0 et 1 inclusivement. On pourrait définir cet ensemble par une caractéristique propre et écrire

$$A = \{x : x \in \mathbb{R},\, 0 \leq x \leq 1\},$$

où $\mathbb{R}$ représente l'ensemble de tous les nombres réels.

Exemple 1.4

L'ensemble $B = \{-3, +3\}$ est identique à l'ensemble

$$B = \{x : x \in \mathbb{R},\, x^2 = 9\}.$$

Vous représentez encore une fois l'ensemble des nombres réels.

Exemple 1.5

Soit les points (x, y) qui appartiennent à une droite donnée A dans le plan réel. Les points (x, y) tels que $ax + by = c$ sont des éléments de A. On a ainsi

$$A = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R},\ ax + by = c\},$$

où $\mathbb{R}$ représente l'ensemble des nombres réels.

L'ensemble vide et l'ensemble universel

L'ensemble de tous les objets considérés porte le nom d'« ensemble universel » ou « ensemble référentiel ». On le désigne en général par Ω.

L'ensemble vide est un autre ensemble particulier, le plus souvent noté $\varnothing$. Illustrons ces deux concepts.

Soit l'ensemble

$$A = \{x : x \in \mathbb{R},\, x^2 = -1\}.$$

On a ici l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ comme ensemble universel. L'ensemble A est manifestement vide, puisqu'il n'existe aucun nombre réel tel que $x^2 = -1$. Soulignons que l'ensemble $\{0\} \neq \varnothing$.

Le cardinal

Le nombre d'éléments d'un ensemble (son cardinal) a souvent de l'importance. Dans le cas d'un ensemble A, on le note $n(A)$. S'il s'agit d'un nombre fini, on est en présence d'un *ensemble fini*. Un ensemble infini tel qu'on peut établir une correspondance biunivoque entre ses éléments et les nombres naturels porte le nom d'*ensemble infini dénombrable*. On appelle « ensemble non dénombrable » un ensemble constitué d'un nombre infini d'éléments impossibles à compter. Ainsi, si $a < b$, alors $A = \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\}$ définit un ensemble non dénombrable.

Les sous-ensembles

Soit deux ensembles, A et B. L'ensemble A est un sous-ensemble de l'ensemble B ou A est *inclus dans l'ensemble* B ($A \subseteq B$) si chacun de ses éléments appartient aussi à l'ensemble B. Les ensembles A et B sont dits « égaux » ($A = B$) seulement si $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$. On peut démontrer qu'il en résulte ce qui suit :

— L'ensemble vide est inclus dans tout ensemble A.

— Dans un ensemble A, on retrouve un autre ensemble A satisfaisant à la relation $A \subseteq \Omega$.

— La relation « inclus » est réflexive dans lui-même (une relation réflexive), $A \subseteq A$.

Fait intéressant, il se dégage de l'idée d'égalités d'ensembles qu'ordres dans lequel on énumère les éléments n'a pas d'importance. Soit $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{c, a, b\}$. Selon cette définition, $A = B$.

On peut aussi définir un ensemble de parties, soit l'ensemble de tous les sous-ensembles d'un ensemble donné. Si $A = \{x, y\}$, les sous-ensembles de A sont : $\varnothing$, $\{x\}$, $\{y\}$, $\{x, y\}$. On note ce nouvel ensemble $\mathfrak{P}(A)$. Si $B = \{x, y, z\}$, l'ensemble des parties de B est constitué des sous-ensembles $\varnothing, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}$ et $\{x, y, z\}$. Puisque le nombre de parties de l'ensemble à n éléments est 2^n, l'ensemble à deux éléments possède 4 sous-ensembles et celui à trois éléments, 8.

Les opérations sur les ensembles

Voyons maintenant quelques opérations sur les ensembles. Si A et B sont des sous-ensembles quelconques de l'ensemble universel Ω, les énoncés suivants s'appliquent :

1. **Le complémentaire** de l'ensemble A (dans Ω) est l'ensemble de tous les éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A. On le note $\overline{A}$. Autrement dit,
$$\overline{A} = \{x : x \in \Omega,\ x \notin A\}.$$
2. **L'intersection** des ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B. On la note $A \cap B$. En d'autres termes,
$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ et } x \in B\}.$$
Soulignons que $A \cap B$ forme un ensemble qu'on pourrait désigner par une lettre quelconque telle C.
3. **L'union** des ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B, sinon deux à la fois. On la note $A \cup B$:
$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B \text{ (ou les deux)}\}.$$

Les opérations décrites ci-dessus sont illustrées dans les exemples qui suivent.

Exemple 1.6

Soit Ω l'ensemble des lettres de l'alphabet, d'où
$$\Omega = \{* : * \text{ est une lettre de l'alphabet français}\},$$
ainsi que
$$A = \{* : * \text{ est une voyelle}\}$$
et
$$B = \{* : * \text{ est l'une des lettres } a, b \text{ ou } c\}.$$
À partir des définitions précédemment fournies, il s'ensuit que
$$\begin{aligned} \overline{A} &= \text{l'ensemble des consonnes} \\ B &= \{a, b, c\} \\ A \cup B &= \{a, b, c, e, i, o, u, y\} \\ A \cap B &= \{a\}. \end{aligned}$$

Exemple 1.7

Supposons l'ensemble universel $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ et les trois sous-ensembles $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ et $C = \{1, 3, 5, 7\}$. Il ressort directement des définitions citées précédemment que

$$\begin{aligned}
\overline{A} &= \{4, 5, 6, 7\}\\
A \cup B &= \{1, 2, 3, 4, 6\}\\
A \cap B &= \{2\}\\
\overline{B} &= \{1, 3, 5, 7\} = C\\
\overline{C} &= \{2, 4, 6\} = B\\
B \cup C &= U\\
B \cap C &= \varnothing.
\end{aligned}$$

On peut représenter certaines opérations sur les ensembles par un diagramme de Venn. Pour ce faire, on trace un rectangle figurant l'ensemble universel Ω. On dessine ensuite dans ce rectangle un cercle qui délimite la région correspondant à un sous-ensemble A de Ω. La portion du rectangle située à l'extérieur du cercle représente alors le complémentaire $\overline{A}$, comme le montre la figure 1.

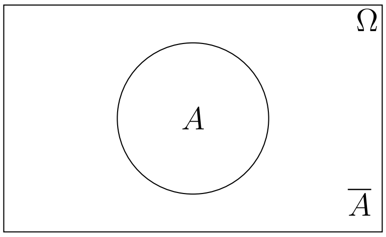

FIGURE 1 – Un ensemble dans un diagramme de Venn

La figure 2 montre l'intersection et l'union à l'aide d'un diagramme de Venn.

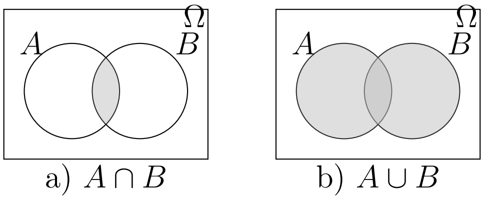

FIGURE 2 – a) L'intersection entre A et B est ombrée ; b) l'union de A et B est ombrée.

On peut facilement étendre les opérations d'intersection et d'union à tout nombre fini d'ensembles. Supposons qu'on a trois ensembles : A, B et C. Dans ce cas, $A \cup B \cup C$ a comme propriété que $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, ce qui ne fait aucun doute puisque les deux membres de l'équation sont identiques. On constate aussi que $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Le tableau 1 présente quelques lois auxquelles obéissent les ensembles en ce qui a trait aux opérations définies précédemment.

Tableau 1 : Les propriétés des opérations

Lois	**Opérations**
Les lois d'identité	$A \cup \varnothing = A$ $A \cap U = A$
	$A \cup U = U$ $A \cap \varnothing = \varnothing$
Les lois associatives	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Les lois commutatives	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Les lois de De Morgan	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

On peut illustrer certains de ces énoncés par un diagramme de Venn. Une démonstration formelle s'avère en général plus longue.

Lorsqu'il y a plus de trois ensembles, on généralise en recourant à des indices. Supposons donc n ensembles, notés par exemple $B_1, B_2, ..., B_n$, sont des ensembles donnés. L'intersection du deuxième tableau à l'ensemble des éléments qui appartiennent à tous, se note alors $B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n$.

1 Les expériences aléatoires et les espaces échantillonnaux

La théorie des probabilités découle de situations concrètes où l'on réalise une expérience pour en observer le résultat, ce dernier étant impossible à prédire avec certitude.

On peut décrire l'ensemble des résultats possibles même si l'on ne peut prédire avec certitude l'un ou l'autre de ces résultats. En second lieu, d'un point de vue conceptuel, on pourrait répéter une telle expérience dans des conditions identiques et obtenir ainsi une suite de résultats déterminés par le hasard ; mais lorsque le nombre de répétitions augmente, on commence à observer certaines régularités en ce qui a trait à la fréquence des divers résultats.

Expérience aléatoire et espace échantillonnal

Une expérience aléatoire est une expérience dont le résultat dépend du hasard. Elle peut mener à des résultats différents même si elle est conduite dans les mêmes conditions chaque fois. L'ensemble des résultats possibles à l'issue d'une expérience aléatoire s'appelle **« espace échantillonnal »**.

On désigne habituellement les espaces échantillonnaux par la lettre $\mathcal{E}$ ou la lettre Ω. Une expérience dont l'ensemble des résultats possibles est fini s'appelle **une expérience à espace échantillonnal fini**.

Classons maintenant les espaces échantillonnaux (et de ce fait les expériences aléatoires) en reprenant la terminologie utilisée pour l'étude des ensembles et des opérations sur les ensembles.

Espaces échantillonnaux discret et continu

Un espace échantillonnal discret consiste en un ensemble fini ou en un ensemble infini dénombrable de résultats. Par opposition, un espace échantillonnal continu consiste en un ensemble **non dénombrable** de résultats.

Ces derniers peuvent être des nombres réels compris dans un intervalle, ou des couples de nombres réels à l'intérieur du produit d'intervalles, là où l'on détermine la valeur de deux variables dans une expérience.

Voici quelques exemples présentant des expériences aléatoires et leur espace échantillonnal.

Exemple 1.8

$\mathscr{E}_1$: On lance une pièce de monnaie et on note sur quel côté elle tombe.
$\mathscr{S}_1$: $\{F,\ P\}$
On a ici un ensemble fini, car $n(\mathscr{S}_1) = 2$.

Exemple 1.9

$\mathscr{E}_2$: On lance à trois reprises une pièce de monnaie et on note chaque fois sur quel côté elle tombe.
$\mathscr{S}_2$: $\{PPP,\ PPF,\ PFP,\ PFF,\ FPP,\ FPF,\ FFP,\ FFF\}$.

Exemple 1.10

$\mathscr{E}_3$: On lance à trois reprises une pièce de monnaie et on note le nombre de fois où elle tombe sur le côté pile.
$\mathscr{S}_3$: $\{0, 1, 2, 3\}$.

Exemple 1.11

$\mathscr{E}_4$: On lance deux dés réguliers et on note le chiffre sur la face du dessus de chacun.
$\mathscr{S}_4$: $\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),$
$(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),$
$(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),$
$(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),$
$(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),$
$(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$.

On a ici $n(\mathscr{S}_4) = 36$. On aurait pu choisir de représenter l'espace échantillonnal sans tenir compte de l'ordre des résultats ; on aurait alors $n(\mathscr{S}_4) = 21$. Dans une telle représentation, les éléments de $\mathscr{S}_4$ n'auraient pas tous les mêmes chances de survenir.

Exemple 1.12

$\mathscr{E}_5$: On assemble une portière de véhicule automobile en réalisant de nombreuses soudures. On inspecte ensuite ces soudures et on note le nombre total de soudures qui sont défectueuses.
$\mathscr{S}_5$: $\{0, 1, 2, \ldots, K\}$, où $K =$ le nombre total de soudures de la portière.

Exemple 1.13

$\mathscr{E}_6$: On fabrique un tube cathodique, puis on lui fait subir un essai de durée. On note le temps écoulé (en heures) au moment où le tube connaît une défaillance.
$\mathscr{S}_6$: $\{t : t \in \mathbb{R},\ t \geq 0\}$.

On a ici un ensemble non dénombrable, car les résultats possibles sont des valeurs comprises dans un intervalle de la droite réelle.

Exemple 1.14

$\mathscr{E}_7$: Un gestionnaire compte le nombre d'appels reçus au service à la clientèle en une heure.
$\mathscr{S}_7$: $\{0, 1, 2, \ldots\}$.

On a ici un ensemble infini dénombrable, car les valeurs possibles sont constituées de l'ensemble des nombres entiers.

Exemple 1.15

$\mathscr{E}_8$: On inspecte visuellement deux des principaux joints de brasure d'un circuit imprimé ; on les vérifie à l'aide d'une sonde. Ensuite, chacun des joints est coté A (acceptable) ou D (défectueux, ce qui entraîne une reprise ou une mise au rebut).
$\mathscr{S}_8$: {AA, AD, DA, DD}.

Exemple 1.16

$\mathscr{E}_9$: Soit une usine de produits chimiques où l'on fabrique chaque jour entre 400 et 600 tonnes métriques d'acide chlorhydrique. On choisit une journée au hasard et on note la quantité produite.
$\mathscr{S}_9$: $\{x : x \in \mathbb{R},\ 400 \leq x \leq 600\}$.
On a ici un espace infini et non dénombrable.

Exemple 1.17

$\mathscr{E}_{10}$: Soit une usine d'extrusion où l'on fabrique des pièces métalliques profilées longues de 6 m. Comme on enlève les bavures des barres à chaque extrémité, elles doivent initialement avoir plus de 6 m. Après avoir fabriqué et fini une barre profilée, on mesure la longueur totale des matières de rebut.
$\mathscr{S}_{10}$: $\{x : x \in \mathbb{R},\ x > 0\}$.
On a ici un espace infini et non dénombrable.

Exemple 1.18

$\mathscr{E}_{11}$: À l'occasion du lancement d'un satellite, on mesure les trois composantes de sa vitesse à partir du sol (c'est-à-dire dans les trois directions de l'espace), en fonction du temps écoulé. Une minute après le lancement, on enregistre ces données pour les transmettre à un appareil de commande.
$\mathscr{S}_{11}$: $\{(v_x, v_y, v_z) : v_x, v_y, v_z$ sont des nombres réels$\}$.
On a ici un espace à trois dimensions, théoriquement infini dans toutes les directions.

Exemple 1.19

$\mathscr{E}_{12}$: Reprenons l'exemple précédent, en mesurant cette fois continuellement les trois composantes de la vitesse du satellite pendant cinq minutes.
$\mathscr{S}_{12}$: On a ici un espace complexe, car il faut tenir compte de toutes les valeurs possibles des fonctions $v_x(t)$, $v_y(t)$ et $v_z(t)$ lorsque $0 \leq t \leq 5$.

Tous ces exemples présentent les caractéristiques requises d'une expérience aléatoire. La description de l'espace échantillonnai est relativement simple, sauf pour l'exemple 1.19, et même si on ne l'envisage pas ici, on pourrait idéalement répéter ces expériences. Reprenons l'exemple 1.8 pour mieux voir le phénomène des manifestations aléatoires. Si l'on répète E_1, à l'infini, on obtiendra de toute évidence une suite de «piles» et de «faces». Une régularité dans les fréquences finira par apparaître. Comme la pièce utilisée est équilibrée, elle devrait tomber sur le côté pile environ une fois sur deux. En faisant en sorte qu'un modèle soit idéal, on se limite à convenir d'un ensemble théorique possible de résultats. Dans le cas de E_1 on a éliminé la possibilité que la pièce tombe autrement qu'à plat.

2 Les événements

Envisageons l'espace échantillonnal $\mathscr{S}$ comme l'ensemble universel Ω, c'est-à-dire l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire, ce qui fait de l'événement A, par exemple, un sous-ensemble de $\mathscr{S}$. Il faut noter que $\varnothing$ et $\mathscr{S}$ sont tous deux des sous-ensembles de $\mathscr{S}$.

Événement
Un événement est un sous-ensemble de l'espace échantillonnal d'une expérience aléatoire. On le désigne par une lettre majuscule.

Les événements énumérés ci-dessous se rattachent aux expériences $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots, \mathscr{E}_{10}$ décrites à la section 1.2. Ce ne sont que des exemples parmi tous les événements qu'on pourrait définir dans chaque cas.

Dans l'expérience $\mathscr{E}_1$, soit A :
La pièce tombe sur le côté pile.
$A = \{P\}$.

Dans l'expérience $\mathscr{E}_2$, soit B :
La pièce tombe chaque fois sur le même côté.
$B = \{\text{PPP, FFF}\}$.

Dans l'expérience $\mathscr{E}_3$, soit C :
La pièce tombe deux fois sur le côté pile.
$C = \{2\}$.

Dans l'expérience $\mathscr{E}_4$, soit D :
La somme des chiffres sur les faces du dessus est sept.
$D = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$.

Dans l'expérience $\mathscr{E}_5$, soit E :
Il n'y a pas plus de cinq soudures défectueuses.
$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Dans l'expérience $\mathscr{E}_6$, soit F :
Il s'écoule plus de 1000 heures avant la défaillance.
$F = \{t : t > 1000\}$.

Dans l'expérience $\mathscr{E}_7$, soit G :
Le nombre d'appels est compris entre 3 et 6 inclusivement.
$G = \{3, 4, 5, 6\}$.

Dans l'expérience $\mathscr{E}_8$, soit H :
Aucun des joints n'est défectueux.
$H = \{\mathrm{AA}\}$.

Dans l'expérience $\mathscr{E}_9$, soit J :
La quantité d'acide produite est supérieure à 550 tonnes métriques.
$J = \{x : x \in \mathbb{R},\ 550 < x < 600\}$.

Dans l'expérience $\mathscr{E}_{10}$, soit K :
La longueur totale des matières de rebut ne dépasse pas 1 m.
$K = \{x : x \in \mathbb{R},\ 0 < x \leq 1\}$.

Comme un événement est un ensemble, les opérations, les lois et les propriétés étudiées à la section 1.1 s'y appliquent.

Événements mutuellement exclusifs
Deux événements A_1 et A_2 sont mutuellement exclusifs si $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Les termes « incompatibles » et « disjoints » sont des synonymes de « mutuellement exclusifs ».

Pour que trois événements A_1, A_2 et A_3 soient mutuellement exclusifs, il faut que $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, $A_1 \cap A_3 = \varnothing$, $A_2 \cap A_3 = \varnothing$ et que $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \varnothing$. La figure 1.3 illustre ce cas. De façon générale, lorsque l'intersection de chacune des combinaisons de deux ou plusieurs événements pris parmi k événements considérés est vide, on qualifie ces k événements de « mutuellement exclusifs ».

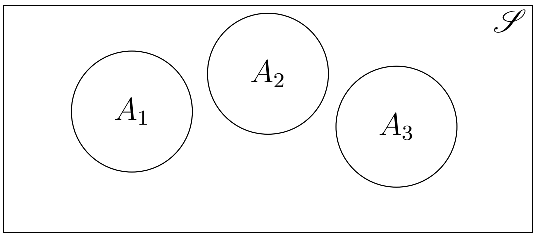

Figure 1.3 **Trois événements mutuellement exclusifs**

Cours de Probabilités pour Ingénieurs en Génie des Matériaux
Séance 3 : Calcul de probabilités

Les probabilités et leur détermination

Une approche axiomatique permet de définir toute probabilité comme une fonction dont le domaine est constitué d'ensembles, et l'image, de nombres réels compris entre 0 et 1. Si l'événement A est un élément du domaine de cette fonction, on peut utiliser la notation fonctionnelle $P(A)$ pour désigner l'élément correspondant de l'image, soit la probabilité que A se réalise.

Probabilité
Soit une expérience $\mathscr{E}$ et son espace échantillonnal $\mathscr{S}$. Une *probabilité* $P(\cdot)$ définie sur $\mathscr{S}$ est une fonction qui, à tout événement A dans $\mathscr{S}$, associe un nombre réel $P(A)$ appelé « probabilité de l'événement A » (ou probabilité de A), vérifiant les propriétés (axiomes) suivantes :

1. $0 \leq P(A) \leq 1$ pour tout événement A de $\mathscr{S}$.
2. $P(\mathscr{S}) = 1$.
3. Pour tout nombre fini k d'événements mutuellement exclusifs définis dans $\mathscr{S}$,
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k).$$
4. Si $A_1, A_2, A_3, \ldots$ représentent une suite dénombrable d'événements mutuellement exclusifs définis dans $\mathscr{S}$, alors
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Ces propriétés n'indiquent pas comment déterminer les probabilités, mais elles imposent des restrictions à cet égard.

Concrètement, on établit une probabilité en s'appuyant sur :

1. des estimations fondées sur la pratique ou sur des observations antérieures ;
2. une analyse des conditions expérimentales ;
3. une hypothèse.

L'estimation d'une probabilité fondée sur la pratique

Une approche pratique basée sur les fréquences relatives

Afin d'illustrer la détermination de probabilités fondées sur la pratique, on peut penser à la répétition d'une expérience et à la fréquence relative de l'événement d'intérêt.

La notion de fréquence relative possède un attrait intuitif. Elle fait intervenir la répétition conceptuelle d'une expérience et l'observation du nombre de répétitions ainsi que du nombre de fois où l'événement souhaité se produit. Soit plus précisément une expérience $\mathscr{E}$ répétée m fois et deux événements notés A et B. Représentons par m_A et m_B le nombre de fois où A et B se produisent lors des m répétitions.

Fréquence relative
La valeur $f_A = m_A/m$ se définit comme la fréquence relative de l'événement A. Elle présente les propriétés suivantes :

1. $0 \leq f_A \leq 1$;
2. $f_A = 0$ si et seulement si l'événement A ne se produit jamais, et $f_A = 1$ si et seulement si l'événement A se produit à chaque répétition ;
3. Si les événements A et B sont mutuellement exclusifs, alors $f_{A\cup B} = f_A + f_B$.

Lorsque la valeur de m devient élevée, la valeur de f_A tend à se stabiliser. Autrement dit, plus on répète l'expérience, moins la fréquence relative de l'événement A varie (d'une répétition à l'autre). La notion de fréquence relative et la tendance de cette fréquence à se stabiliser sont à l'origine d'une méthode servant à attribuer une probabilité à un événement. En effet, dans le cas d'une expérience $\mathscr{E}$ d'espace échantillonnal $\mathscr{S}$, si la fréquence relative f_A d'un événement A tend vers un nombre quelconque p_A à mesure que le nombre de répétitions augmente, on peut faire du nombre p_A la probabilité de A. En d'autres termes, lorsque $m \to \infty$,

$$P(A) = \frac{m_A}{m} = p_A. \tag{1.1}$$

En pratique, on doit évidemment se satisfaire d'un nombre de répétitions plus limité. Prenons l'exemple d'une expérience simple $\mathscr{E}_6$, où l'on lance une pièce pour noter à chaque répétition si elle tombe du côté pile (P) ou face (F). Puisque l'espace échantillonnal est $\mathscr{S} = \{P, F\}$, on peut s'intéresser à l'événement A « la pièce tombe sur le côté pile ». Supposons que l'expérience est répétée $m = 87$ fois, et que le côté pile sort $m_A = 43$, où une fréquence relative de $f_A = 43/87 \simeq 0,494$. On obtiendrait certes une valeur plus convaincante en répétant l'expérience $m = 10\,000$ fois, ce qui : $f_A = 0,4924$, ou $f_A = 0,4920$, ou toute autre valeur très proche de 0,5. La probabilité de l'événement A serait alors définie comme la valeur vers laquelle f_A converge au fur et à mesure de l'augmentation du nombre de répétitions. Ce concept de probabilité fondée sur la fréquence relative sera précisé ultérieurement.

La détermination d'une probabilité

Si l'espace échantillonnal contient une quantité dénombrable de résultats $(e_1, e_2, \ldots)$ dont les probabilités respectives sont $p_1, p_2, \ldots$, alors la probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des résultats qui le composent. Plus précisément, on doit avoir

$p_i \geq 0$, pour $i = 1, 2, \ldots$, et $p_1 + p_2 + \cdots = 1$, donc

$$P(A) = \sum_{\{i : e_i \in A\}} p_i.$$

Par exemple, si $A = \{e_1, e_3, e_6\}$, alors $P(A) = p_1 + p_3 + p_6$. Nous étudierons plus loin, particulièrement au chapitre 4, différents modèles permettant d'établir les valeurs de $p_1, p_2, \ldots$.

Résultats équiprobables
Si l'espace échantillonnal est fini et renferme n résultats ayant tous la même probabilité de survenir, alors on dit que ces résultats sont équiprobables. La probabilité associée à chacun est

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \frac{1}{n}$$

Si l'espace échantillonnal renferme n résultats tous équiprobables, alors

$$P(A) = \frac{n(A)}{n}$$

et l'événement A englobe $n(A)$ résultats possibles. Des méthodes de dénombrement utiles pour déterminer la valeur de n et de $n(A)$ seront étudiées à la section 1.5.

Exemple 1.20

Supposons que la pièce de monnaie de l'exemple 1.9 est biaisée et qu'elle a deux fois plus de chances de tomber du côté « face » que du côté « pile », de sorte que les résultats de l'espace échantillonnal $\mathscr{S} = \{\text{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF}\}$ ont respectivement une probabilité de $p_1 = \frac{2}{27}$, $p_2 = \frac{2}{27}$, $p_3 = \frac{2}{27}$, $p_4 = \frac{4}{27}$, $p_5 = \frac{2}{27}$, $p_6 = \frac{4}{27}$, $p_7 = \frac{4}{27}$, $p_8 = \frac{7}{27}$.
Soit l'événement « la pièce de monnaie tombe chaque fois sur le même côté ». On a alors $P(A) = \frac{2}{27} + \frac{7}{27} = \frac{9}{27}$.

Exemple 1.21

Reprenons l'exemple 1.14 et supposons qu'un modèle probabiliste a permis d'établir que

$$p_i = \frac{e^{-20} \cdot 20^i}{i!}$$

si $i = 0, 1, 2, \ldots$
sinon,
où p_i représente la probabilité de recevoir exactement i appels dans une heure. Soit A l'événement « recevoir un nombre de clients compris entre 15 et 16 » (soit les valeurs 15, 16), et

$$P(A) = p_{15} + p_{16} = \frac{e^{-20} \cdot 20^{15}}{15!} + \frac{e^{-20} \cdot 20^{16}}{16!} \approx 0.116.$$

Exemple 1.22

Reprenons l'exemple 1.9, dans lequel on lance à trois reprises une pièce de monnaie. Comme on suppose ici que la pièce est équilibrée, les huit résultats possibles sont équiprobables. Soit A l'événement « la pièce tombe chaque fois sur le même côté ». Selon l'équation 1.2,

$$P(A) = \frac{n(A)}{n} = \frac{2}{8},$$

puisqu'il y a huit résultats possibles au total dont deux sont favorables à l'événement A.

Exemple 1.23

On tient pour acquis que les dés à l'exemple 1.11 sont équilibrés. Soit A l'événement « la somme des chiffres sur les faces du dessus est sept ». Selon l'équation 1.2, il y a 36 résultats possibles, tous équiprobables, dont 6 sont favorables à l'événement A, d'où $P(A) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$.

Théorèmes sur le calcul de probabilité

Voici quelques théorèmes importants en ce qui concerne les probabilités.

THÉORÈME 1.1

Si $\varnothing$ représente l'ensemble vide, alors $P(\varnothing) = 0$.

Démonstration

On sait que $\mathscr{S} = \mathscr{S} \cup \varnothing$ et que $\mathscr{S}$ et $\varnothing$ sont mutuellement exclusifs. Il résulte ainsi de la propriété n°3 (voir à la page 10) que $P(\mathscr{S}) = P(\mathscr{S}) + P(\varnothing)$, d'où $P(\varnothing) = 0$.

THÉORÈME 1.2

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Démonstration

On sait que $\mathscr{S} = A \cup \overline{A}$ et que A et $\overline{A}$ sont mutuellement exclusifs. Il résulte ainsi de la propriété n°3 que $P(\mathscr{S}) = P(A) + P(\overline{A})$, et comme $P(\mathscr{S}) = 1$ selon la propriété n°2, il s'ensuit que $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

THÉORÈME 1.3

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Démonstration

Le diagramme de Venn à la figure 1.4 (voir à la page suivante) aide à suivre la démonstration du théorème 1.3. On peut voir qu'il faut soustraire $P(A \cap B)$ de l'expression

$P(A)+P(B)$ afin d'éviter de compter deux fois la probabilité associée à la région hachurée.

Sachant que $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ et que $(A \setminus B), (B \setminus A)$ et $(A \cap B)$ sont mutuellement exclusifs, et que $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ et $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ sont mutuellement exclusifs, il s'ensuit que $P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(B \setminus A) + P(A \cap B)$. En effectuant la soustraction, on obtient : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

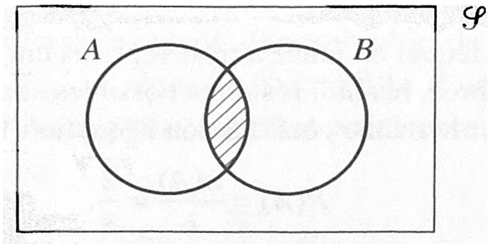

FIGURE 1 – Un diagramme de Venn représentant l'intersection de deux événements non disjoints

THÉORÈME 1.4

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Démonstration

On peut écrire $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$ et recourir au théorème 1.3 étant donné que $A \cup B$ représente un événement.

THÉORÈME 1.5

$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq k} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < r \leq k} P(A_i \cap A_j \cap A_r) + \ldots + (-1)^{k-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k)$

THÉORÈME 1.6

Si $A \subseteq B$, alors $P(A) \leq P(B)$.

Démonstration

Si $A \subseteq B$, alors $B = A \cup (\overline{A} \cap B)$ et $P(B) = P(A) + P(\overline{A} \cap B) \geq P(A)$ puisque $P(\overline{A} \cap B) \geq 0$.

Exemples

Exemple 1.24

Soit A et B des événements mutuellement exclusifs ($A \cap B = \varnothing$), tels que représentés à la figure 1.5. S'il est établi que $P(A) = 0,20$ et que $P(B) = 0,30$, on peut ici évaluer plusieurs probabilités :

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0,80$
2. $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = \mathbf{0{,}70}$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,20 + 0,30 = 0,50$
4. $P(A \cap B) = 0$
5. $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B})$, selon la loi de De Morgan, d'où
$$= 1 - P(A \cap B) = 1 - P(\varnothing) = 1 - 0 = \mathbf{1}$$
6. $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,50 = \mathbf{0{,}5}$

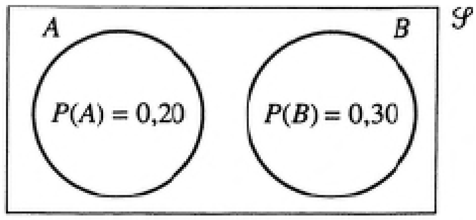

FIGURE 2 – Les événements A et B associés à l'exemple 1.24

Exemple 1.25

Supposons que les événements A et B ne sont pas mutuellement exclusifs. Si l'on sait que $P(A) = 0{,}20$, que $P(B) = 0{,}30$ et que $P(A \cap B) = 0{,}10$, on obtient ce qui suit :

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0,80$
2. $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 0,70$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,2 + 0,3 - 0,1 = 0,4$
4. $P(A \cap B) = 0,1$
5. $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 0,6$

La figure 4 illustre les probabilités associées à chacune des régions.

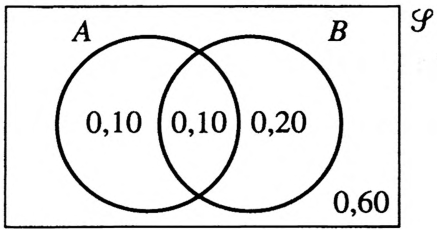

FIGURE 3 – Les événements A et B associés à l'exemple 1.25

Exemple 1.26

Imaginons une ville où 75 % des gens lisent le journal (J), 20 % aiment l'art (A) et 40 % sont musiciens (M). Du nombre, 15 % lisent le journal et aiment l'art, 30 % lisent le journal et sont musiciens, 10 % aiment l'art et sont musiciens, et 5 % lisent le journal, aiment l'art et sont musiciens.
On peut réunir tous ces renseignements à l'intérieur d'un simple diagramme de Venn (*voir la figure 1.7, à la page suivante*), en y inscrivant d'abord la dernière donnée fournie, soit $P(J \cap A \cap M) = 0{,}05$, pour ensuite procéder à partir du centre.

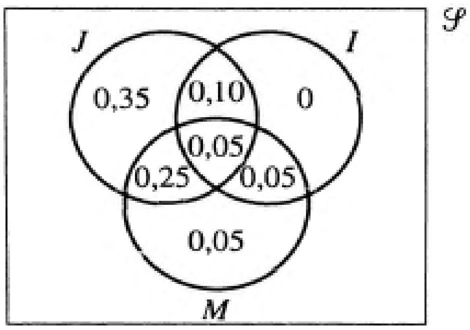

FIGURE 4 – Un diagramme de Venn associé à l'exemple 1.26

1. Déterminons la probabilité qu'un habitant de cette ville, choisi au hasard, présente au moins une des trois caractéristiques à l'étude. Selon le théorème 1.4,

$$P(J \cup A \cup M) = P(J) + P(A) + P(M) - P(J \cap A) - P(J \cap M) - P(A \cap M) + P(J \cap A \cap M)$$

$$= 0,75 + 0,20 + 0,40 - 0,15 - 0,30 - 0,10 + 0,05 = 0,85.$$

   On peut aussi additionner les valeurs du diagramme de Venn pour arriver à cette réponse.

2. Déterminons la probabilité de l'évènement E : "un habitant de cette ville ne présente qu'une seule des trois caractéristiques". Alors on peut écrire

$$E = (J \cap \overline{A} \cap \overline{M}) \cup (\overline{J} \cap A \cap \overline{M}) \cup (\overline{J} \cap \overline{I} \cap M)$$

   Le diagramme de Venn révèle que cette probabilité correspond à

$$P(E) = P(J \cap \overline{A} \cap \overline{M}) + P(\overline{J} \cap A \cap \overline{M}) + P(\overline{J} \cap \overline{A} \cap M) = 0,35 + 0 + 0,05 = 0,40.$$

Résumé

Propriétés d'une probabilité

— $0 \leq P(A) \leq 1$

— $P(\varnothing) = 0$ et $P(\mathscr{S}) = 1$

— Si $A_1,\ A_2,\ A_3, \ldots$ sont mutuellement exclusifs, alors $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = \sum P(A_i)$

— $P(A) = 1 - P(\overline{A})$

— Si $A \subseteq B$, alors $P(A) \leq P(B)$

— $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

— $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

— Si les n résultats de Ω sont équiprobables, alors $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$

Techniques de dénombrement

1. **Permutations et Arrangements :** Il existe $P^n = n!$ permutations de n éléments distincts.
   Il existe $A_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$ façons de choisir r objets parmi n objets distincts en tenant compte de l'ordre de pioche.
   Il existe $P^n_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \dfrac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!}$ façons de permuter n objets séparés en k groupes formés respectivement de $n_1, n_2, \ldots, n_k$ objets indiscernables.
2. **Combinaisons :**
   Il existe $C_r^n = \dbinom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$ façons de choisir r objets parmi n objets distincts sans tenir compte de l'ordre de pige.