Université des Sciences et de la Technologie

d'ORAN Mohammed Boudiaf (USTOMB)

Faculté de Chimie

Département de Génie des Matériaux



Cours

Mécanique des fluides

Cours destiné aux étudiants de 2ème année Licence

Génie des Matériaux

Semestre 3

Cours rédigé et présenté par : Mme Nacera Chergui

Année universitaire 2020/2021

Table des matières

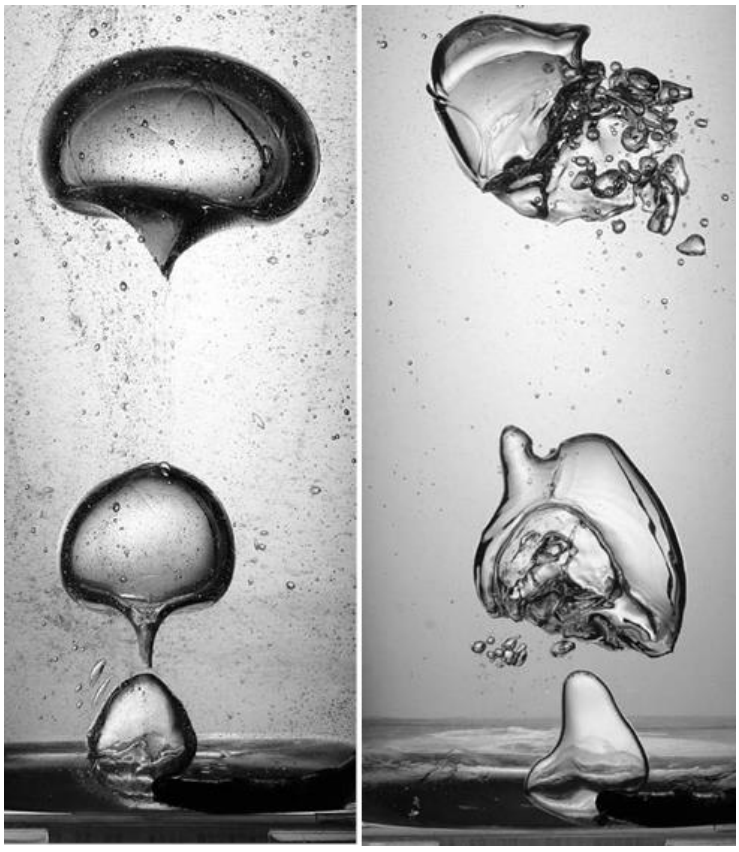
I. Le fluide et ses propriétés 1
I.1 Quelques définitions 1
I.1.1 La mécanique de fluides 1
I.1.2 Définition d'un fluide 3
I.1.3 La particule fluide : 5
I.2 Classification des écoulements 5
I.2.1 Écoulement visqueux et non visqueux : 5
I.2.2 Écoulement interne et écoulement externe 6
I.2.3 Écoulement compressible et écoulement incompressible 6
I.2.4 Écoulement laminaire et écoulement turbulent 6
I.2.5 Écoulement stationnaire et écoulement instationnaire 7
I.3 Les dimensions et les systèmes d'unités 8
I.4 Propriétés physiques du fluide 8
I.4.1 La masse volumique 8
I.4.2 Le volume spécifique : 9
I.4.3 Le poids spécifique 9
I.4.4 La densité 9
I.4.5 La viscosité 9
I.4.6 Phénomène de tension superficielle 12
I.4.7 La compressibilité 15
I.4.8 La conductivité thermique 16
I.4.9 La diffusivité massique 17
I.5 Le concept du milieu continu et les surfaces de discontinuité 17
I.6 Ligne de courant, trajectoire des particules, ligne d'émission 18
I.6.1 Ligne de courant 18
I.6.2 Trajectoire des particules 18
I.6.3 Ligne d'émission 19
I.7 Interprétation d'un phénomène de transport 19
I.7.1 Transfert de matière 20
I.7.2 Transfert de chaleur 21

I.7.3 Transfert de quantité de mouvement 21
II. Statique des fluides 23
II.1 Introduction.....23
II.2 La pression en un point dans le fluide 24
II.3 L'équation fondamentale de l'hydrostatique 25
II.3.1 Fluide incompressible 25
II.3.2 Fluide compressible 28
II.4 Théorème de Pascal.....29
II.5 Équilibre de deux fluides non miscibles.....29
II.6 Mesure de la pression 30
II.6.1 Le baromètre pour la mesure de la pression atmosphérique 30
II.6.2 Le piézomètre 31
II.6.3 Les manomètres 32
II.7 La force hydrostatique sur les parois.....34
II.7.1 Force hydrostatique sur une paroi plane horizontale 34
II.7.2 Force hydrostatique sur une paroi plane inclinée 35
II.7.3 Force hydrostatique sur une paroi courbée.....40
II.8 Immersion, flottaison et stabilité des corps solides.....41
II.8.1 Poussée d'Archimède.....41
II.8.2 Stabilité des corps flottants :.....43
III. Dynamique des fluides parfaits 44
III.1 Introduction.....44
III.2 Point de vue de Lagrange et point de vue d'Euleur 44
III.3 Dérivée matérielle ou dérivée particulaire.....45
III.4 Les formes du débit 47
III.4.1 Le débit volumique 47
III.4.2 Débit massique.....47
III.5 Équation de Bernoulli.....48
III.5.1 Démonstration de l'équation de Bernoulli 48
III.6 Application de l'équation de Bernoulli 50
III.6.1 Écoulement à travers un orifice 50
III.6.2 Mesure de la vitesse d'écoulement avec le tube de *Pitot* 51
III.6.3 Mesure de débit : Tube de Venturi.....52

III.7 Limites de l'équation de Bernoulli. Équation de Saint Venant 53
III.8 Théorème de Transport de Reynolds 54
III.9 Conservation de masse : Équation de continuité 55
III.10 Conservation d'énergie 57
III.11 Conservation de quantité de Mouvement 57
Références bibliographiques 59

Chapitre I

Fluide et ses propriétés



I. Le fluide et ses propriétés

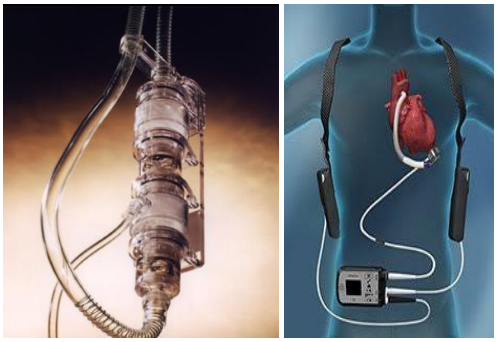
I.1 Quelques définitions

I.1.1 La mécanique de fluides

La mécanique des fluides est une branche de la science qui étudie le comportement des fluides au repos ou en mouvement ainsi que les causes et les effets de ce mouvement, qu'ils soient d'origine mécanique, thermique ou magnétique, etc. Elle joue un rôle fondamental dans plusieurs domaines :

- Corps humain et domaine médical : le cœur, les veines, les artères et les poumons représentent un exemple idéal pour illustrer le rôle de la mécanique des fluides dans le développement de la science médicale. Les cœurs artificiels, les appareils respiratoires, les systèmes de dialyses, les transfuseurs... sont tous conçus et dimensionnés grâce à la mécanique des fluides.

Transfuseur



Dispositif d'assistance ventriculaire

Figure I.1 : Domaine médical

- Génie civil et infrastructures : Dimensionnement des réseaux d'alimentation en eau potable, de chauffage et de climatisation, construction des barrages….



Figure I.2 : Dimensionnement des réseaux sanitaires et construction des barrages

- Prévisions météorologiques : direction du vent, formation et trajectoire des cyclones et des tornades, turbulence atmosphérique, etc.



Figure I.3 : Prévision météorologique

- Dimensionnement des installations de production et de formulation : calcul de la perte de charge, dimensionnement des pompes et des conduites, calcul des réacteurs et leurs agitateurs (hydrodynamique)…



Figure I.4 : Industrie de formulation

- Conception et dimensionnement des moyens de transport.



Figure I.5 : Domaine du transport

- Autres domaines d'applications…

La mécanique des fluides comporte trois grands volets :

- La statique des fluides : étudie les fluides au repos
- La cinématique des fluides : étudie le fluide en mouvement sans considérer les forces agissantes sur lui.
- La dynamique des fluides : étudie le fluide en mouvement en tenant compte des forces agissantes sur lui. On distingue ***l'hydrodynamique*** qui concerne les applications de l'écoulement de l'eau et ***l'aérodynamique*** qui est réservée à l'écoulement de l'air.

I.1.2 Définition d'un fluide

Du point de vu macroscopique, on peut définir le fluide comme une matière facilement déformable sous l'effet de contraintes ou des forces externes. On peut le définir aussi comme une matière qui prend la forme de son contenant. Du point de vue microscopique ou moléculaire, un fluide, est une matière dont l'espace entre les molécules est plus grand et les forces intermoléculaires plus faibles que dans le cas du solide.

La différence entre un fluide et un solide est que (Figure I.6) :

- le solide se déforme sous l'effet de la force F. La déformation est directement proportionnelle à la contrainte de cisaillement $\tau = F/A$, où A dénoté l'aire.
- le fluide, sous l'effet de la force de cisaillement F, continue de se déformer tant et aussi longtemps que la force est appliquée.

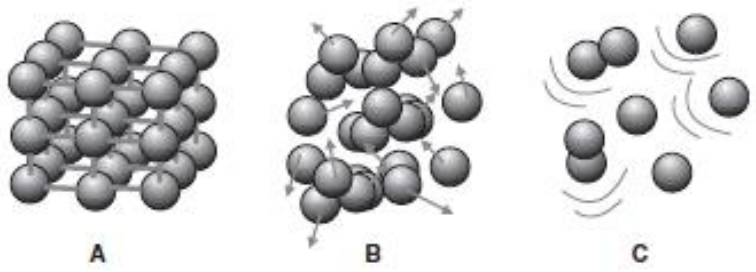


***Figure I.6*:** Structure moléculaire. (A) solide, (B) liquide, (C) gaz (Amiroudine et Battaglia, 2011)

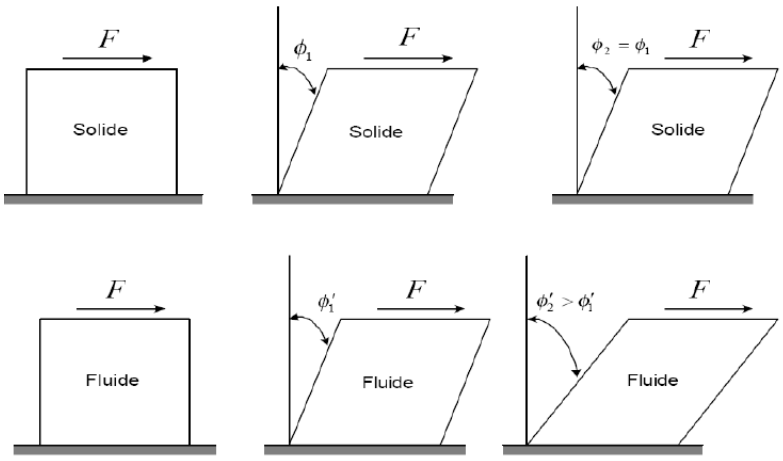


Figure I.7 : Différence entre un liquide et un solide

Les fluides sont répartis en deux classes, les fluides incompressibles (les liquides) et les fluides compressibles (gaz). Il existe certaines différences entre ces deux classes. Les liquides coulent et occupent un volume bien défini lorsqu'ils sont mis dans un récipient et présentent une surface libre, par contre, les gaz n'ont pas de surface libre et se dilatent pour occuper tout le volume du récipient (figure I.8). Les exemples les plus fréquents sont l'eau et l'air. En outre, le volume d'un fluide compressible est fonction de la pression extérieure contrairement au fluide incompressible dont le volume est indépendant de la pression extérieure.

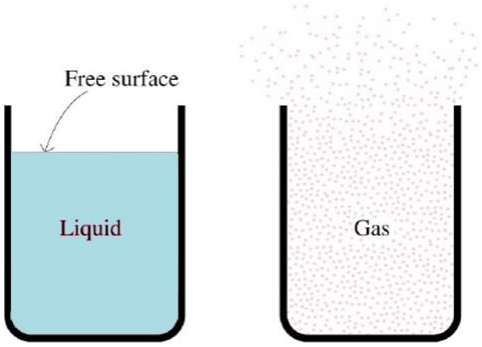
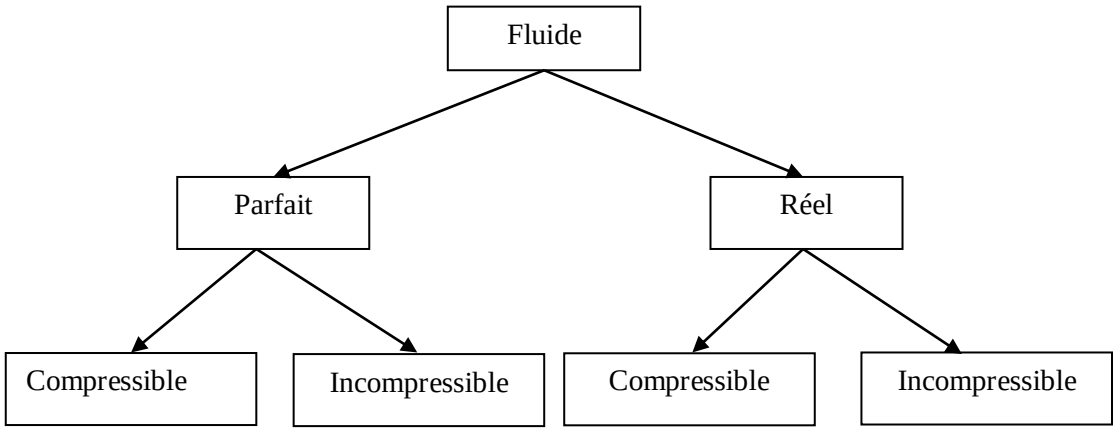


Figure I.8 : Différence entre un liquide et un gaz

Les fluides (compressibles et incompressibles) sont classés aussi selon deux grandes familles : les fluides parfaits et les fluides réels. Un fluide parfait coule et se déplace sans frottement. Un fluide réel présente des forces de frottement lorsqu'il est en mouvement. Les fluides parfaits n'existent pas dans la nature, ils sont considérés dans certains cas pour simplifier les calculs.







(a) (b)

Figure I.9 : Exemples de fluides. (a) fluide compressible (air). (b) fluide incompressible (l'eau)

I.1.3 La particule fluide :

La particule fluide est un volume élémentaire de fluide qui comporte un très grand nombre de particules et dont les propriétés, telles que la pression, la température, la vitesse, la masse volumique…, sont homogènes en tout point de la particule. Sous l'action de forces extérieures, la particule fluide subit des mouvements de translation, de rotation et de déformation au sein du fluide. Ces forces peuvent être volumiques ou surfaciques.

- ✓ Forces volumiques : agissent sur le centre de gravité de la particule fluide tel que la force de poids dans un champ de gravité, la force électrique si la particule est chargée dans un champ électrique et la fore magnétique.
- ✓ Forces surfaciques : agissent sur la surface de la particule et transmises à cette dernière par des corps environnants on distingue deux types, les forces normales dues à la pression et les forces tangentielles dues aux frottements.

I.2 Classification des écoulements

Il existe différents types d'écoulement de fluides selon son application et le phénomène à étudier. On distingue :

I.2.1 Écoulement visqueux et non visqueux :

L'écoulement est dit visqueux lorsque les forces de frottement sont importantes dans l'écoulement. La force de friction se développe lorsque deux couches de fluides se déplacent l'une par rapport à l'autre, C'est le cas des fluides réels dont la viscosité est importante.

L'écoulement est dit non visqueux si les forces de frottement sont nulles ou négligeables entre les couches du fluide. C'est le cas des fluides parfaits ou les fluides dont la viscosité est faible.

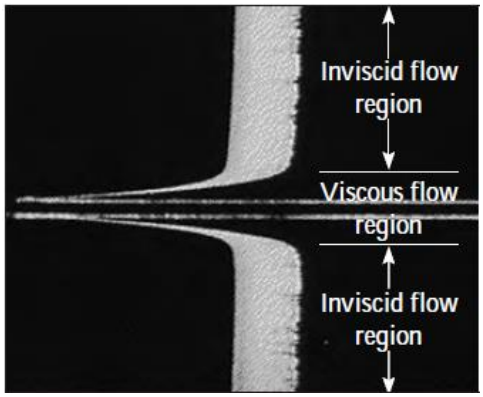


Figure I.10 : Écoulement uniforme sur une plaque plane. (Çengel, 2006).

L'exemple de l'écoulement de l'air sur une paroi plane représente une bonne application pour distinguer de régions d'écoulement (Figure I.10) : région proche paroi où les forces de friction entre l'air et la paroi solide sont importantes et région non proche de la paroi où les forces visqueuses sont négligeables par rapport aux forces d'inertie ou de pression. Négliger les

termes visqueux dans de telles régions d'écoulement non visqueux simplifie considérablement l'analyse sans trop de perte de précision.

I.2.2 Écoulement interne et écoulement externe

L'écoulement d'un fluide sur une surface non délimitée telle qu'une plaque, un fil ou un tuyau est un écoulement externe (exemple : l'écoulement de l'eau dans les rivières, l'écoulement de l'air autour des objets (figure I.11). L'écoulement dans un tuyau ou un conduit est un écoulement interne si le fluide est complètement délimité par des surfaces solides (exemple : Écoulement de l'eau dans un tuyau, dans les pompes…). L'écoulement de liquides dans un conduit est appelé écoulement à canal ouvert si le conduit n'est que partiellement rempli de liquide et qu'il y a une surface libre.

Les écoulements internes sont dominés par l'influence de la viscosité dans tout le champ d'écoulement. Dans les écoulements externes, les effets visqueux sont limités aux couches limites proches des surfaces solides et aux régions de sillage en aval des corps.

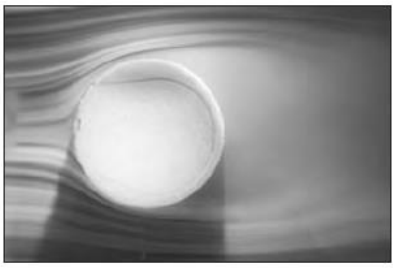


Figure I.11 : Écoulement de l'air autour d'une balle de Tennis. (Cengel, 2006)

I.2.3 Écoulement compressible et écoulement incompressible

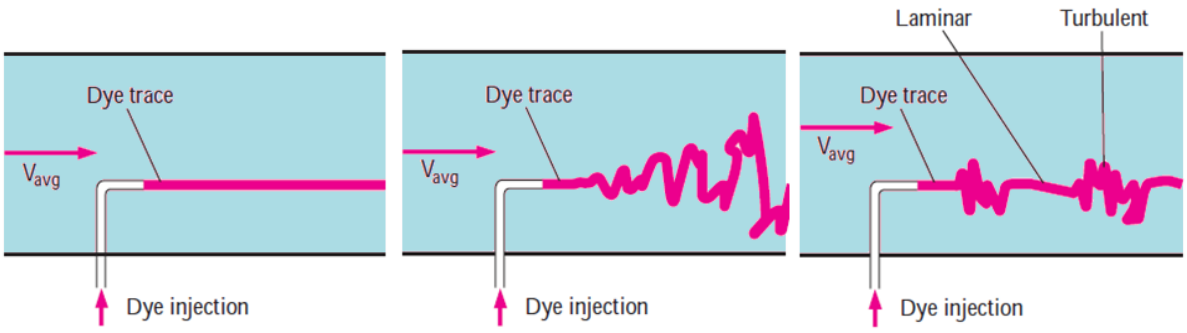
Un écoulement est dit incompressible si la masse volumique reste presque constante partout. Par conséquent, le volume de chaque portion de fluide reste inchangé au cours de son mouvement. Les masses volumiques des liquides étant essentiellement constantes, l'écoulement de ces derniers est typiquement incompressible.

L'écoulement est dit compressible lorsque le nombre de Mach (qui est le rapport entre la vitesse de l'écoulement et la vitesse du son) est supérieur à 0.3. Pour un $Ma = 1$, l'écoulement est dit sonique, pour un $Ma < 1$, il est subsonique, pour un $Ma > 1$, il est supersonique et pour un $Ma >> 1$ l'écoulement est qualifié hypersonique. Par conséquent, l'écoulement d'un gaz n'est pas nécessairement un compressible, notamment pour des faibles vitesses.

I.2.4 Écoulement laminaire et écoulement turbulent

On dit qu'un écoulement est laminaire lorsque le mouvement du fluide est régulier et ordonné et que ses couches sont bien lisses et glissent les unes par rapport aux autres (I.12.a). Les fluides hautement visqueux ont généralement un écoulement laminaire du fait que toutes les perturbations créées ou induites dans l'écoulement sont amorties par les forces visqueuses.

Contrairement à l'écoulement laminaire, le turbulent est caractérisé par un mouvement de particules très désordonné et aléatoire avec l'apparition des petits tourbillons. Il se produit lorsque le fluide se déplace à des vitesses élevées (Figure I.12.b). Les fluides à faible viscosité tel que l'air coulent en régime turbulent lorsque sa vitesse est élevée. Un écoulement qui s'alterne entre le régime laminaire et le régime turbulent est appelé transitionnel (Figure I.12.c).



(a) (b) (c)

Figure I.12 : Régimes d'écoulement. (a) laminaire, (b) turbulent, (c) transitionnel.

Le Nombre de Reynolds est un paramètre adimensionnel utilisé pour la première fois en 1880 par Osborn Reynolds pour déterminer le régime d'écoulement. Ce nombre représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces de viscosité. Son expression est :

$$Re = \frac{\rho V^2 L^2}{\mu V L} \qquad (eq.\ I.1)$$

$$Re = \frac{\rho V L}{\mu} \qquad (eq.\ I.2)$$

ρ : la masse volumique du fluide, V : sa vitesse d'écoulement, L : une grandeur caractéristique, μ : la viscosité dynamique du fluide.

Pour un écoulement de fluide dans les canalisations par exemple, si :

- $Re < 2300$ le régime est laminaire
- $2300 < Re < 4000$ le régime est transitoire
- $Re > 4000$ le régime est turbulent.

I.2.5 Écoulement stationnaire et écoulement instationnaire

L'écoulement est dit stationnaire (ou permanent) lorsque toutes les propriétés du fluide et de l'écoulement sont constantes dans le temps. Par conséquent, toutes les dérivées temporelles sont nulles $(\partial/\partial t = 0)$. Par ailleurs, l'écoulement est dit instationnaire si les propriétés du fluide changent dans le temps dans un ou plusieurs endroits dans l'écoulement.

I.3 Les dimensions et les systèmes d'unités

Toutes les quantités physiques (exp : la masse d'une pâte, le volume d'air dans une chambre, la vitesse d'écoulement de l'eau dans une rivière, etc.) sont caractérisées par une dimension. Dans le système international (SI), il existe des dimensions fondamentales telles que la masse désignée par *M*, la longueur désignée par *L* et le temps désigné par *T*. Il existe également des dimensions secondaires, dérivées des dimensions fondamentales, telles que la vitesse (LT^{-1}), le volume (L^{+3}) et l'énergie (ML^2T^{-2}).

Tableau I.1 : Quelques unités utilisées en mécanique des fluides

	Dimension	***Système international***
Masse	M	Kg
Longueur	L	M
Temps	T	S
Température	θ	°K
Pression	$ML^{-1}T^{-2}$	Pas
Vitesse	LT^{-1}	m/s
Force	MLT^{-2}	N
Énergie	ML^2T^{-2}	Joule
Accélération	LT^{-2}	m/s2
Puissance	ML^2T^{-3}	Watt

I.4 Propriétés physiques du fluide

I.4.1 La masse volumique

La masse volumique est la masse de fluide par unité de volume comme le montre la relation suivante :

$$[\rho] = \left[\frac{m}{V}\right] = \left[\frac{kg}{m^3}\right] = \frac{M}{L^3} = ML^{-3} \qquad (eq.I.3)$$

La masse volumique varie faiblement en fonction de la température pour les liquides et varie en fonction de la température et de la pression pour les gaz. Celle de l'eau à la température ambiante est généralement égale à 1000 kg/m^3.

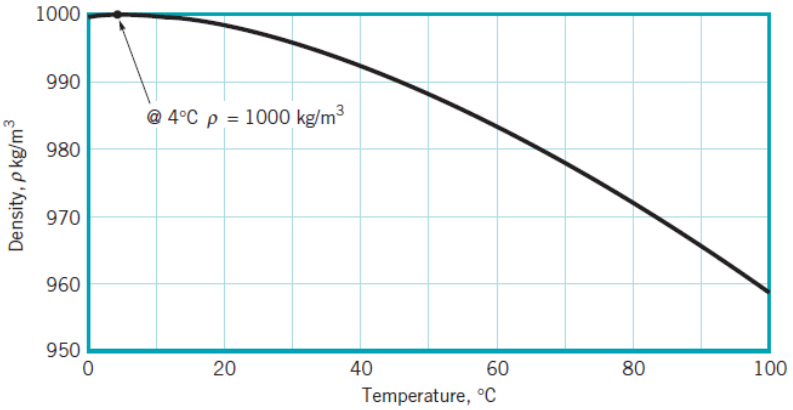


Figure I.13 : Variation de la masse volumique de l'eau en fonction de la température

I.4.2 Le volume spécifique :

Donné par la relation suivante :

$$[v] = \left[\frac{1}{\rho}\right] = \left[\frac{V}{m}\right] = \left[\frac{m^3}{kg}\right] = \frac{L^3}{M} = M^{-1}L^{+3} \qquad (eq.I.4)$$

I.4.3 Le poids spécifique

Donné par la relation suivante :

$$[\gamma] = [\rho \cdot g] = \left[\frac{N}{m^3}\right] = \frac{MLT^{-2}}{L^{+3}} = ML^{-2}T^{-2} \qquad (eq.I.5)$$

I.4.4 La densité

La densité d'un fluide est le rapport de sa masse volumique sur la masse volumique d'un fluide de référence à 4°C. Le fluide de référence est l'eau pour les liquides et l'air pour les gaz. La densité est sans unité.

$$d = \frac{\rho}{\rho_{eau}} \quad ou \quad \frac{\rho}{\rho_{air}} \qquad (eq.I.6)$$

I.4.5 La viscosité

Un corps en mouvement dans un fluide subit des forces de frottement. Ces forces ont la direction de l'écoulement, leur magnitude dépend d'une propriété du fluide. La figure I.14 illustre les forces de frottement exercées par l'air sur l'aigle et par l'eau sur le poisson. On peut déplacer un objet facilement dans l'air, par contre, on va trouver plus de résistance si on le déplace dans l'eau. Cette résistance va augmenter davantage si le milieu était de l'huile. La viscosité traduit alors la résistance du fluide à l'écoulement.

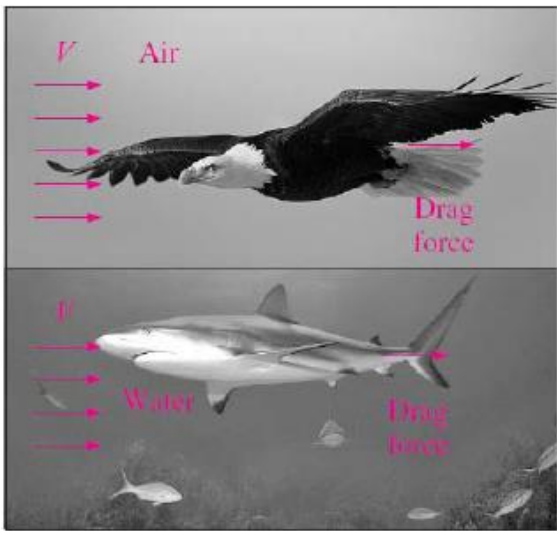


Figure I.14 : Forces de frottement dans le fluide (air et eau)

Pour illustrer la définition de la viscosité, on prend l'exemple d'un fluide qui coule entre deux plaques planes parallèles, l'une fixe et l'autre se glisse avec une vitesse U (figure I.15) sous

l'effet d'une force $\vec{F}$. Le fluide va résister à cette force de déplacement en réagissant par une force de frottement d'intensité égale à la force appliquée, mais de sens opposé. Les particules en contact avec la plaque mobile se déplacent à la même vitesse de celle-ci (U), tandis que les particules qui sont en contact avec la plaque fixe auront une vitesse nulle. Des couches de fluide vont ainsi glisser les unes sur les autres. La vitesse de chaque couche est fonction de la distance y. Ce glissement est traduit par la contrainte de cisaillement du fluide τ qui est égal au rapport (F/A), où A est la surface de la plaque mobile. Cette contrainte dépend de la variation de la vitesse le long de la Hauteur h. Elle est proportionnelle au gradient de vitesse (ou taux de cisaillement) du/dy. Le coefficient de proportionnalité est appelé la viscosité dynamique (ou absolue) tel qu'il est donné par la relation suivante :

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \mu \dot{\gamma} \qquad (eq.I.7)$$

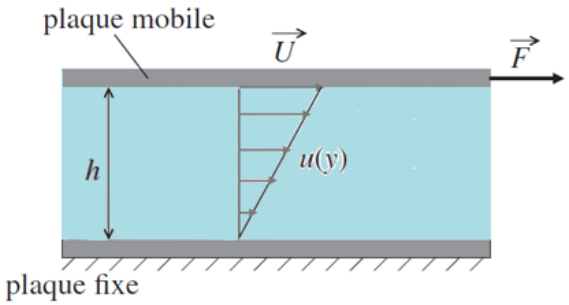


Figure I.15 : Vitesse de fluide confiné entre deux plaques planes.

L'unité du taux de cisaillement est le « Pas », par conséquent l'unité de la viscosité dynamique est « $Pas \cdot s$ » ou « kg/m.s » ou « Pl : Poiseuille ». L'équation I.7 est appelée loi de Newton (figure I.16). Les fluides qui obéissent à la loi de Newton sont appelés les fluides Newtonien, leur viscosité dynamique reste constante quelque soit le taux de cisaillement. L'eau, l'huile de table, les sirops légers sont de bons exemples d'un fluide Newtonien.

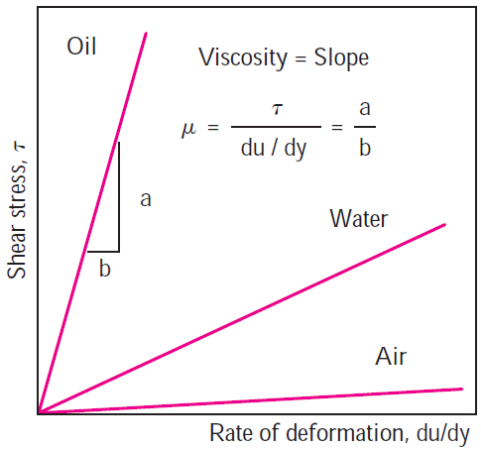


Figure I.16 : Exemples de fluides Newtonien

Les fluides non-Newtonien sont caractérisés par une viscosité dynamique qui dépend du taux de cisaillement. La contrainte de cisaillement pour ce type de fluides n'est pas proportionnelle au taux de cisaillement. Parmi les fluides non-Newtonien on site ceux qui obéissent à la loi de puissance ou la loi d'OSWALD :

$$\tau = \mu_{app} \frac{du}{dy} = \mu_{app} \dot{\gamma} \qquad (eq.I.8)$$

$$\mu_{app} = k \left(\frac{du}{dy}\right)^{m-1} \qquad (eq.I.9)$$

Dans les équations I.8 et I.9 μ_{app} est la viscosité apparente du fluide, k est la consistance qui dépend du fluide et m l'indice de comportement. Pour $m > 1$, le fluide est dit dilatant ou rhéo-épaississant comme la mayonnaise, la viscosité de ces fluides augmente lorsqu'ils subissent une contrainte. Pour $m < 1$ le fluide est dit pseudo-plastique ou rhéo-fluidifiant (comme la gelée ou la gélatine, Ketchup), la viscosité de ces fluides diminue lorsqu'ils sont soumis à une contrainte. Un autre type de fluide non Newtonien est le plastique de Bingham. Ce fluide ne commence à couler que lorsqu'il subit une contrainte de cisaillement plus élevée qu'une « valeur seuil » notée τ_s.

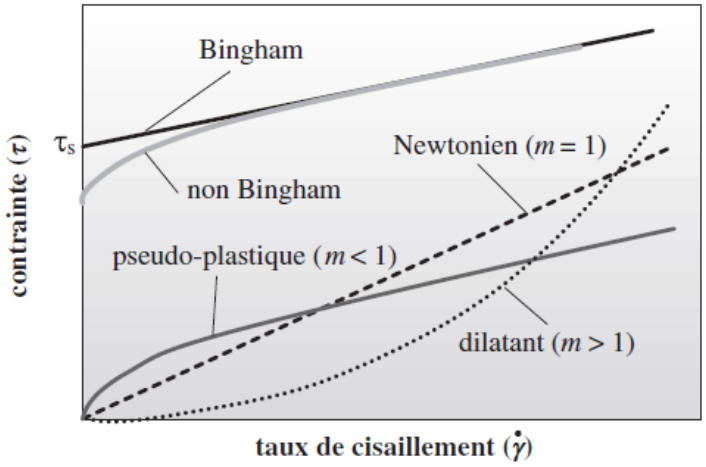


Figure I.17 : Différents types de fluide

La viscosité des liquides diminue avec l'augmentation de la température tandis que celle des gaz augmente (figure I.17).

La viscosité cinématique du fluide est définie comme étant le rapport entre la viscosité dynamique du fluide et sa masse volumique. Son unité est « m^2/s » ou $stokes = 1cm^2/s$.

$$\upsilon = \frac{\mu}{\rho} \qquad (eq\ I.10)$$

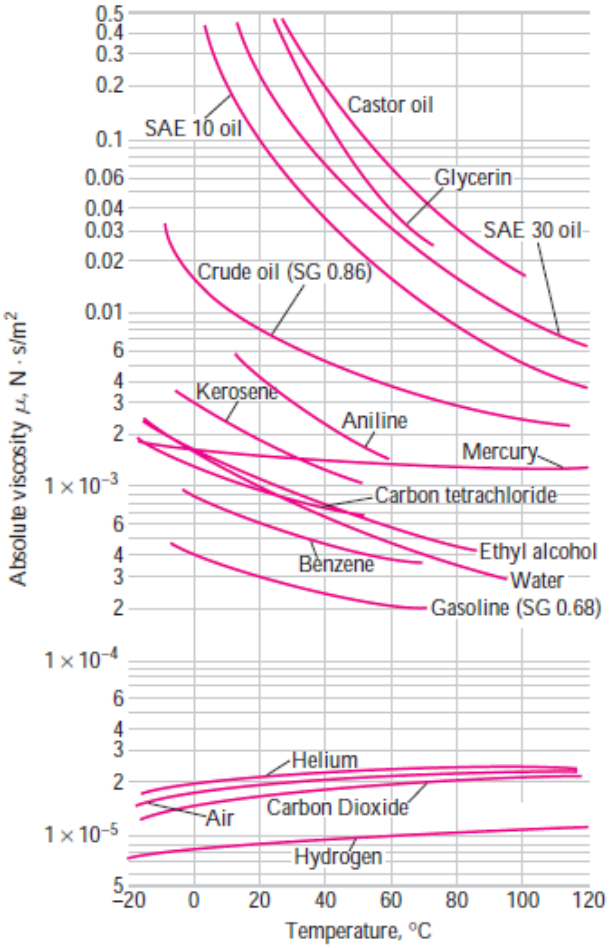


Figure I.18 : Variation de la viscosité dynamique de quelques fluides en fonction de la température à la pression atmosphérique (Cengel et al., 2006)

I.4.6 Phénomène de tension superficielle

Pour comprendre la définition de la tension superficielle, essayons de comprendre quelques phénomènes (Figure I.19) tels que le sang qui forme une goute sur l'extrémité d'une aiguille d'une seringue, le mercure qui forme une sphère parfaite et peut même rouler comme une bille sur une surface lisse, les gouttelettes de pluie sur les feuilles des arbres, les bulles de rosée sur les pétales des fleurs. Ces différents types de phénomènes de surface sont dus à quoi ? Pour répondre à la question, considérons deux molécules liquides, une à la surface et une au fond du corps liquide (Figure I.20). Les forces d'attraction exercées sur la molécule intérieure par les molécules environnantes s'équilibrent par symétrie. Mais les forces d'attraction agissant sur la molécule de surface ne sont pas symétriques et les forces de traction appliquées par les molécules de gaz ci-dessus sont généralement très faibles. Par conséquent, il existe une force de traction agissante sur la molécule à la surface du liquide, qui tend à attirer les molécules qui se trouvent sur la surface vers l'intérieur du liquide. Cette force est contrebalancée par les forces répulsives des molécules sous la surface en cours de compression. L'effet de compression résultant fait que le liquide minimise sa surface. C'est la raison pour laquelle les gouttelettes liquides ont tendance à atteindre une forme sphérique, qui a la surface minimale

pour un volume donné. Par cet effet, un film ou une membrane se forme à l'interface liquide gaz. Cette membrane est étirée à cause des forces attractives entre les molécules dans le plan de la surface libre du liquide. L'intensité de cette force par unité de longueur le long d'une ligne de cette surface est appelée « la tension superficielle » et est désignée par « σ ». L'unité de la tension superficielle est (N/m) La tension superficielle d'un fluide donnée est fonction de la température et la nature du fluide avec lequel il est en contact.

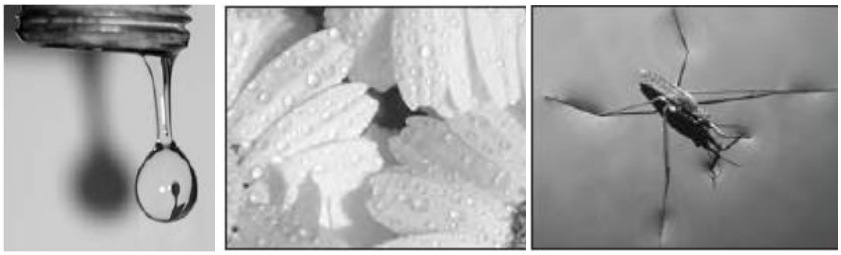


Figure I.19 : Quelques effets de la tension superficielle.

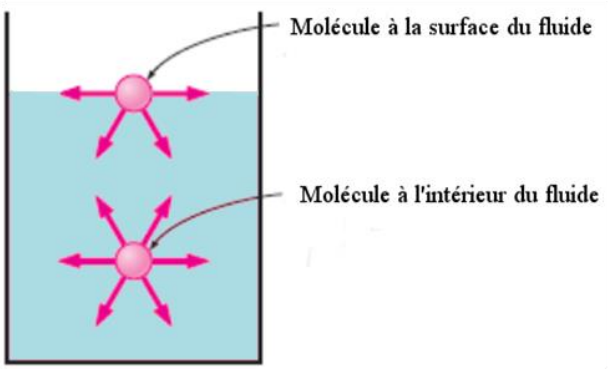


Figure I.20 : Forces d'attraction sur deux molécules, une se trouvant à la surface libre et l'autre plus loin.

Parmi les phénomènes courants associés à la tension superficielle, il y a la montée (l'élévation, l'ascension) ou la chute d'un liquide dans un tube capillaire. Si un petit tube ouvert est inséré dans l'eau, le niveau de l'eau dans le tube augmentera au-dessus du niveau de l'eau à l'extérieur du tube. Dans cette situation, nous avons une interface liquide-gaz-solide. Dans le cas illustré dans la figure I.21-a, il y a une attraction entre la paroi du tube et les molécules liquides (adhésion) qui est assez forte pour surmonter l'attraction mutuelle (cohésion) des molécules et les tirer vers le haut de la paroi. Par conséquent, on dit que le liquide mouille la surface solide, un ménisque concave (ou convexe) se forme avec un angle θ (figure I.21 –a et b). La hauteur h dépend de la valeur de la tension superficielle, du rayon du tube R, du poids spécifique du liquide et de l'angle de contact entre le fluide et le tube. Pour atteindre l'équilibre, la force verticale due à la tension superficielle est égale au poids du liquide dans le tube comme le montre l'équation suivante :

$$\gamma\pi R^2 h = 2\pi R\sigma cos\theta \qquad (eq\ I.11)$$

Avec :

- γ le poids spécifique du liquide.

D'où la hauteur :

$$h = \frac{2\sigma cos\theta}{\gamma R} \qquad (eq\ I.12)$$

Cette loi est appelée loi de Jurin

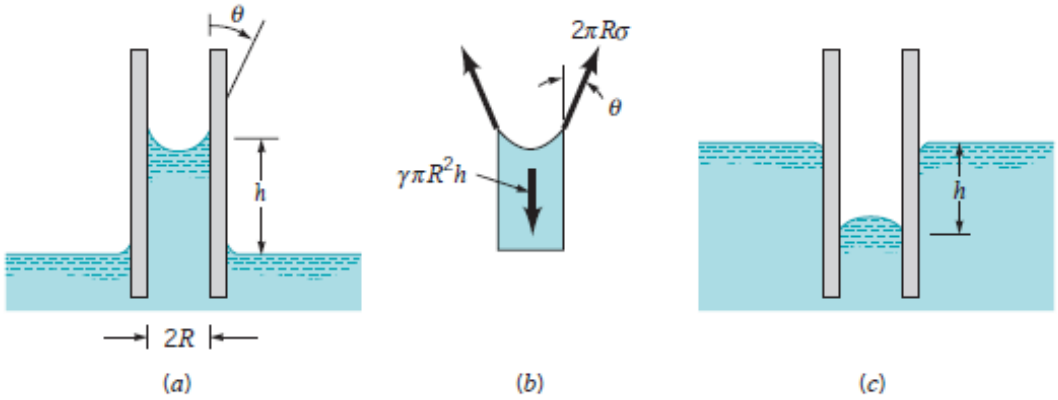
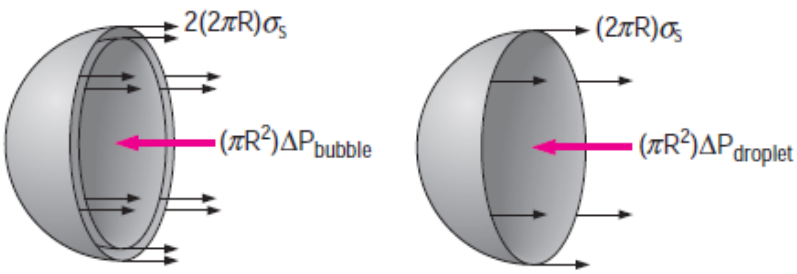


Figure I.21 : Ascension capillaire, (a) la montée ou l'élévation du liquide dans le tube capillaire (cohésion < adhésion). (b) l'équilibre entre les forces dues au poids du liquide et la tension superficielle. (c) la chute ou la dépression du liquide dans le tube capillaire (cohésion > adhésion).

La capillarité est importante lorsqu'on utilise des tubes de diamètre inférieur à 10mm. Si ce diamètre dépasse $12\ mm$, la capillarité est négligeable. Si l'angle θ dépasse $90°C$, la loi de Jurin donne h négatif. On parle alors de dépression capillaire dans ce cas les forces de cohésion des molécules du liquide entre elles sont plus fortes que les forces d'adhésion entre les molécules du fluide et le solide, c'est le cas du mercure au contact du verre et de tous les liquides non mouillants.

<u>Équation de Young-Laplace :</u>



(a) (b)

Figure I.22 : Balance des forces pour une (a) bulle et (b) gouttelette

Une interface courbée (L'interface compressée par l'effet de la tension superficielle) est soumise à une différence de pression. La pression à l'intérieur d'une bulle ou d'une gouttelette est plus élevée que la pression du milieu environnant. Dans la direction « x », les forces de la tension superficielle sont équilibrées par les forces de pression. La tension superficielle agit sur la circonférence de la bulle ou la gouttelette et la force de pression agit sur leurs surfaces.

- Cas d'une bulle :

$$2(2\pi R)\sigma_s = (\pi R^2)\Delta p_{bubble} \rightarrow \Delta p_{bubble} = p_i - p_0 = \frac{4\sigma_s}{R} \qquad (eq\ I.13)$$

- Cas d'une gouttelette

$$(2\pi R)\sigma_s = (\pi R^2)\Delta p_{bubble} \rightarrow \Delta p_{bubble} = p_i - p_0 = \frac{2\sigma_s}{R} \qquad (eq\ I.14)$$

p_i est la pression interne de la bulle ou la gouttelette, p_0 la pression du milieu environnant. p_0 est égale à la pression atmosphérique si le milieu environnant est l'atmosphère. Cette expression montre que la pression à l'intérieure de la bulle ou la gouttelette diminue lorsque leur diamètre augmente. Cette loi est dite loi de *Young- Laplace*. Le facteur 2 dans l'équilibre de forces dans le cas de la bulle est dû à son interface, ce dernier présente deux faces une face interne et une face externe.

I.4.7 La compressibilité

Le coefficient de compressibilité du fluide traduit la variation du volume du fluide quand celui-ci subit une compression (Figue I.23). Elle est calculée par :

$$E_v = -\frac{dp}{dv/v} = -v\frac{dp}{dv} \qquad (eq.I.15)$$

Avec :

dp : la variation différentielle de la pression nécessaire pour effectuer un changement de volume (en Pa).

dv : La variation différentielle du volume en m^3

v : le volume initial du fluide qui a subi la compression en m^3.

Ou encore

$$E_v = \frac{dp}{d\rho/\rho} = \rho\frac{dp}{d\rho} \qquad (eq.I.16)$$

Avec :

$d\rho$: la variation différentielle de la masse volumique kg/m^3.

ρ : la masse volumique initiale du fluide qui a subi la compression en kg/m^3.

Une augmentation de pression induit une diminution de volume, le dv est par conséquent négatif, il est important alors d'introduire le signe « $-$ » pour que le coefficient soit positif.

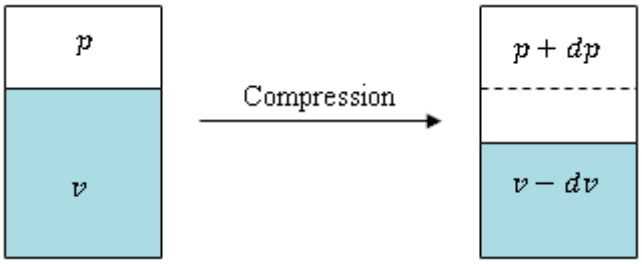


Figure I.23 : Variation du volume d'un fluide sous l'effet d'une compression.

La compressibilité du fluide est donnée par :

$$\alpha = \frac{1}{E_v} = -\frac{dv/v}{dp} = -\frac{1}{v}\frac{dv}{dp} \qquad (eq.I.17)$$

Dans le cas des gaz, pour une compression isothermique (compression à température constante), le coefficient de compressibilité est égal à la pression du fluide.

$$\frac{p}{\rho} = RT = Constante \qquad (eq.I.18)$$

$$p = \rho RT \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial \rho} = RT = \frac{p}{\rho} \qquad (eq.I.19)$$

$$E_v = \rho\frac{\partial p}{\partial \rho} = \rho\frac{p}{\rho} \Rightarrow E_v = p \qquad (eq.I.20)$$

I.4.8 La conductivité thermique

Elle traduit la capacité que possède un corps à transférer de la chaleur lorsque ses extrémités sont soumises à une différence de température. Lorsqu'on applique une différence de température (T_1, T_2 avec $T_1 > T_2$) sur les deux extrémités d'un corps donné, on donne naissance à la propagation d'un flux de chaleur. Ce flux varie linéairement avec la différence de température (ou gradient de température). Le coefficient de proportionnalité « k » représente alors la conductivité thermique. Pour un transfert de chaleur unidirectionnel, le flux de chaleur s'exprime avec la relation suivante :

$$q = \frac{\partial Q}{A\partial t} = -k\frac{dT}{dx} = k\frac{T_1 - T_2}{e} \qquad (eq.I.21)$$

e : indique la distance séparant les deux températures T_1 et T_2 et A est la surface à travers laquelle se propage le flux de chaleur. Le signe « $-$ » indique que le flux de chaleur se dirige en sens inverse du gradient. L'unité de q est W/m^2 et l'unité de k est le $J/m \cdot s \cdot °K$ ou $W/m \cdot °K$.

La conductivité thermique des gaz augmente régulièrement avec l'augmentation de la température tandis que celle des liquides subit une légère variation.

La conductivité thermique des gaz et des liquides est indépendante de la pression sauf pour des valeurs très faibles ou très élevées de la pression.

I.4.9 La diffusivité massique

Elle traduit l'aptitude d'un fluide (le soluté) à se diffuser et s'homogénéiser dans un autre fluide (solvant). Elle représente le coefficient de proportionnalité entre le flux de matière diffusée « J_m » et le gradient de concentration massique du soluté entre deux points dans le solvant (c_1, c_2, avec $c_1 > c_2$). Pour un transfert de masse unidirectionnel, le flux massique est donné par la loi de Fick :

$$J_m = \frac{dm}{Adt} = -D\frac{dc}{dx} = D\frac{c_1 - c_2}{L} \qquad (eq.I.22)$$

e : indique la distance séparant les deux concentrations c_1 et c_2 et A est la surface à travers laquelle se propage le flux massique. L'unité de J_m est $kg/m^2 \cdot s$ et l'unité de la diffusivité massique est m^2/s.

La diffusivité massique varie avec la concentration, plus particulièrement pour les liquides et pour des concentrations importantes. Elle augmente avec la température pour les liquides et les gaz. Le coefficient de diffusivité massique ne varie pas avec la pression pour les liquides tandis qu'il augmente avec la diminution de la pression pour les gaz.

I.5 Le concept du milieu continu et les surfaces de discontinuité

Un fluide est composé de plusieurs particules fluides, ces dernières sont aussi composées de plusieurs molécules. Le concept du milieu continu communément appelé « ***continuum*** » suppose que la masse est distribuée d'une manière continue dans le système et que les caractéristiques du fluide à étudier varient continuellement au sein de ce dernier. Le modèle de ***continuum*** est adopté afin de pouvoir appliquer les fonctions mathématiques continues (dérivées, intégral…) en mécanique des fluides. Le nombre de ***Knudsen*** est utilisé pour déterminer si l'hypothèse de continuité peut être appliquée pour le système à étudier.

$$Kn = \frac{\lambda}{L} \qquad (eq.I.23)$$

Avec λ est le libre parcours moyen d'une molécule (distance moyenne parcourue par l'atome entre deux collisions successives) et L la longueur caractéristique de l'écoulement à étudier. Si $Kn \ll 10^{-2}$, le milieu est considéré continu.

Les surfaces de discontinuité se présentent dans l'écoulement lorsque certaines grandeurs physiques (pression, vitesse, masse volumique…) varient très rapidement dans certaines régions et sous certaines conditions. Par conséquent, le modèle de continuité n'est plus valable

localement. Les exemples les plus fréquents sont : le cas de la surface libre, une poche de cavitation, l'interface entre deux fluides non miscibles, les ondes de choc, etc.

I.6 Ligne de courant, trajectoire des particules, ligne d'émission

I.6.1 Ligne de courant

La ligne de courant est la ligne tangente, en chaque point, au vecteur vitesse des particules fluides à un instant donné. Elle constitue une bonne méthode de visualisation instantanée de l'écoulement. Si on considère le vecteur vitesse d'une particule fluide $\vec{u} = u\,\vec{\imath} + v\,\vec{\jmath} + w\,\vec{k}$ et le vecteur déplacement de cette particule le long du linge de courant $\overrightarrow{ds} = dx\,\vec{\imath} + dy\,\vec{\jmath} + dz\,\vec{k}$, l'équation de la ligne de courant est obtenue en intégrant la formule suivante :

$$\frac{dx}{u(x,y,z,t)} = \frac{dy}{v(x,y,z,t)} = \frac{dz}{w(x,y,z,t)} \qquad (eq.\ I.24)$$

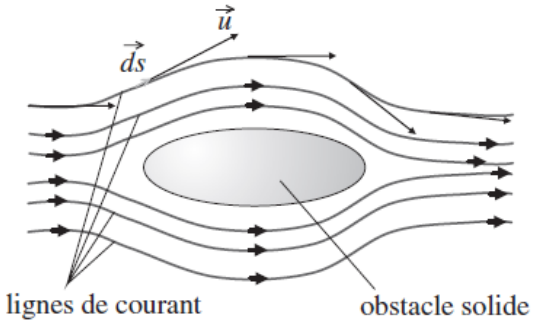


Figure I.24 : Exemple de lignes de courant dans un écoulement autour d'un obstacle solide.

I.6.2 Trajectoire des particules

La trajectoire d'une particule fluide est la ligne tracée par cette particule lors de son déplacement pour une période de temps donnée. L'équation de la trajectoire est obtenue par l'intégration du champ de vitesses :

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_0} + \int_{t_0}^{t} \vec{V}\,dt \qquad (eq.I.25)$$

$\overrightarrow{x_0}$ est la position initiale de la particule de fluide à $t = t_0$.

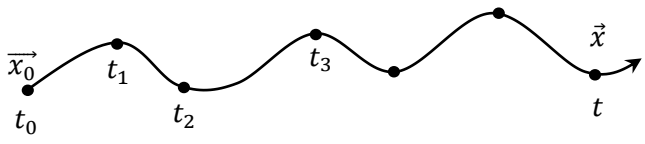


Figure I.25 : Trajectoire d'une particule.

I.6.3 Ligne d'émission

La ligne d'émission est la ligne que tracent à un instant donné toutes les particules fluides qui sont passées par un point ***M*** à un moment antérieur.

En régime permanent, les lignes de courant se coïncident avec les trajectoires de particules et les lignes d'émission.

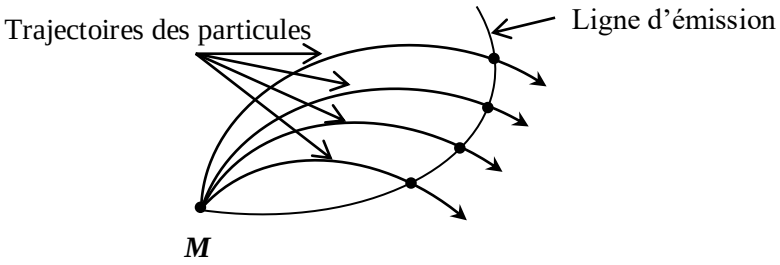


Figure I.26 : Lignes d'émission

I.7 Interprétation d'un phénomène de transport

Un système est délimité par des frontières réelles ou fictives et est défini par sa masse, son énergie et sa quantité de mouvement. Suivre l'évolution d'un système en général consiste à faire un inventaire pour ces trois grandeurs qui se conservent quel que soit le type d'évolution subi. L'inventaire comprend alors ce qu'on appelle un bilan de conservation. En général, il y a trois types de bilans :

- Bilan de conservation de masse : consiste à calculer les quantités des matières mises en œuvre (transformées, consommées, crées, accumulées…)
- Bilan de conservation d'énergie : consiste à évaluer tout type d'énergie, mécanique ou thermique, mis en œuvre. L'énergie ne peut pas être créée ou détruite, elle peut juste être transformée, par exemple, on fournit un travail pour produire de la chaleur ou vis vers ça.
- Bilan de conservation de quantité de mouvement : consiste à évaluer une entité vectorielle ($\vec{p} = m\vec{u}$) qui ressemble beaucoup à l'énergie mais qui évolue selon trois directions (x, y et z).

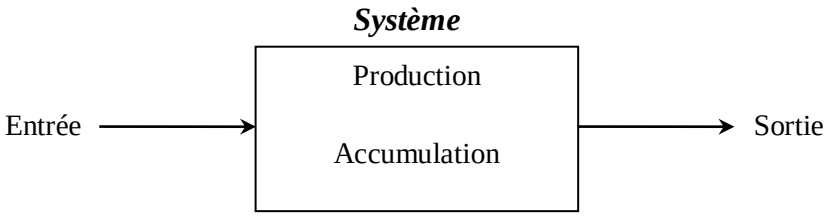


Figure I.27 : Forme générale d'un bilan de conservation

En utilise communément le terme « *principe de conservation* » pour étudier un système. La forme générale d'un bilan de conservation s'écrit sous la forme :

$$Entrée + Production = Sortie + Accumulation$$

Lorsqu'un gradient de l'une des trois grandeurs (masse, énergie et quantité de mouvement) est généré dans un système, cela provoque ce qu'on appelle *un phénomène de transfert* ou *de transport* de cette grandeur pour remettre le système à l'équilibre. Le transfert se fait de la zone de grande valeur vers la zone de petite valeur. On distingue trois types de transport :

I.7.1 Transfert de matière

Ce type de transfert est régi par la loi de Fick. Pour un transfert de constituant $\boldsymbol{A}$ qui se fait selon l'axe (ox), la loi exprime le flux de matière transféré en fonction de la surface transversale (S) à travers laquelle le flux s'opère et le gradient de concentration dC_A/dx.

$$J_m = -DS\frac{dC_A}{dx} \qquad (eq.\ I.26)$$

D représente le coefficient de diffusivité massique, il est fonction de l'espèce $\boldsymbol{A}$ et du milieu dans lequel il se diffuse.

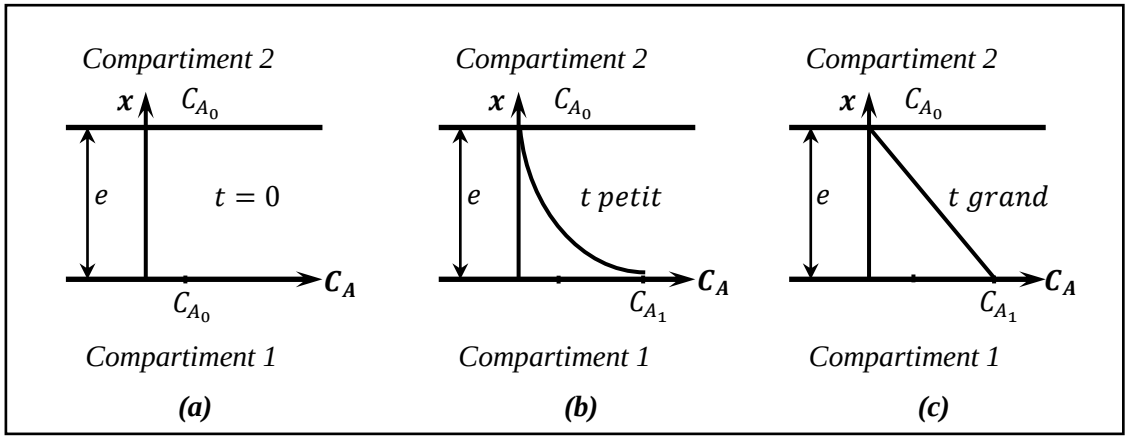


Figure I.28 : Profil de concentration à travers une membrane mise entre deux compartiments de concentrations différentes

Soit deux compartiments (1 et 2) séparés par une membrane (Figure I.28). Les deux compartiments sont remplis avec une solution de même concentration C_{A_0} en espèce $\boldsymbol{A}$ (Figure I.28-a). À l'instant $t = 0$, on augmente la concentration en $\boldsymbol{A}$ du compartiment 1 telle que $C_{A_1} > C_{A_0}$. On maintient les deux concentrations constantes dans les deux compartiments. On remarque alors une diffusion de l'espèce $\boldsymbol{A}$ du premier compartiment vers le deuxième compartiment à travers la membrane. Après un temps très cours, la distribution de la concentration C_A dans la membrane n'est pas linéaire (Figure I.28-b), on parle alors d'un

régime transitoire. La distribution de la concentration C_A à l'intérieur de la membrane ne devient linéaire qu'après un temps très long, le régime devient stationnaire (Figure I.28-c).

I.7.2 Transfert de chaleur

La loi de Fourier est l'une des lois qui régissent les phénomènes de transfert thermique. Elle est appliquée lorsqu'un transfert de chaleur s'effectue à travers une surface S au moment où on applique un gradient de température de part et d'autre de cette surface. La loi de Fourier est utilisée dans le transfert thermique par conduction, elle indique que le flux de chaleur échangé dans la direction (ox) est proportionnel au gradient de température dT/dx et à la surface d'échange S tel que :

$$q = -\lambda S \frac{dT}{dx} \qquad (eq.\ I.27)$$

Avec λ, la conductivité thermique.

Prenons l'exemple d'une paroi solide d'épaisseur e et de conductivité thermique λ. Les températures de part et d'autre de la paroi sont égales à T_0 (Figure I.29-a). À $t = 0$, on porte l'une des surfaces de la paroi à la température T_1 tel que $T_1 > T_0$. Les deux températures T_1 et T_0 des deux surfaces sont maintenues constantes. Une diffusion de chaleur est déclenchée. Après un temps court, le régime est transitoire et la distribution de la température à travers l'épaisseur de la paroi n'est pas linéaire (Figure I.29-b). Le régime de devient stationnaire qu'après un certain temps, le profil de la température devient alors linéaire le long de la paroi (Figure I.29-c).

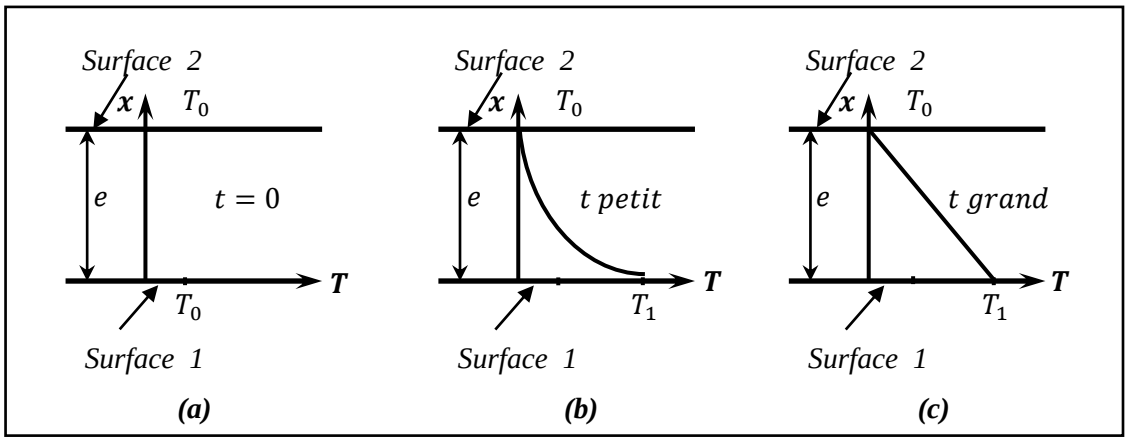


Figure I.29 : Profil de température à travers une paroi solide soumise à un gradient de température.

I.7.3 Transfert de quantité de mouvement

La loi de Newton est appliquée lors d'un transfert de quantité de mouvement dans un fluide mis entre deux plaques, l'une fixe et l'autre mobile. Ce type de transfert est provoqué par l'existence du gradient de vitesse entre la plaque fixe et la plaque mobile. La loi explique la

proportionnalité entre la densité du flux de quantité de mouvement (la quantité de mouvement par unité de temps et par unité de surface) et le gradient de vitesse du/dx tel que :

$$\tau = -\mu \frac{du}{dx} \qquad (eq.\ I.28)$$

μ est la viscosité dynamique du fluide. τ est appelée aussi la contrainte de cisaillement et du/dx le gradient de cisaillement.

Imaginons qu'un fluide est confiné entre deux plaques fixes (Figure I.30-a). Supposons ensuite qu'à $t = 0$, on anime brusquement l'une des deux plaques avec une vitesse U dans la direction (ox). La couche du fluide située sur la plaque mobile se déplacera à la même vitesse que celle-ci tandis que la couche située sur la plaque fixe ne bougera pas. Après un temps très court, le régime est instationnaire et la variation de la vitesse le long de la couche du fluide n'est pas linéaire (Figure I.30-b), il ne devient linéaire qu'après un temps plus long et lorsque le régime devient stationnaire (Figure I.30-c).

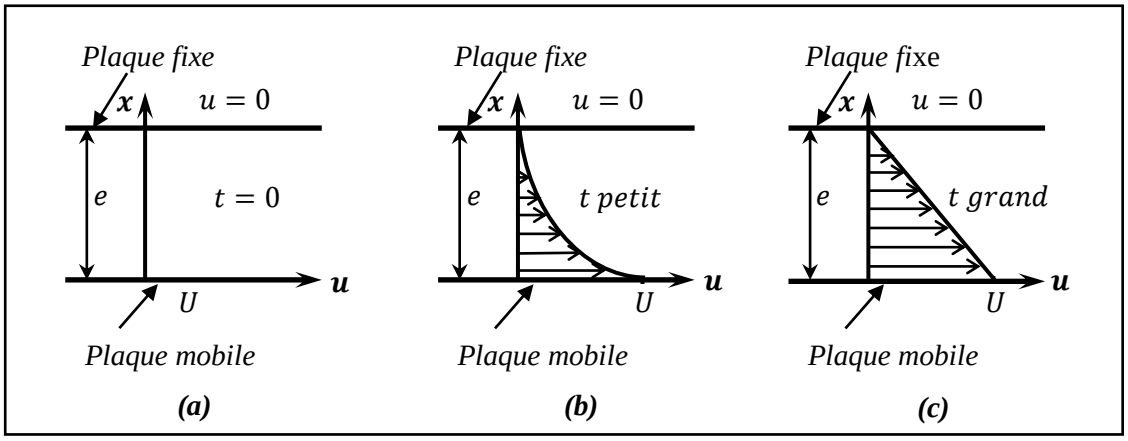


Figure I.30 : Profil de vitesse à travers une couche de fluide confinée entre deux plaques, l'une fixe et l'autre mobile.

Chapitre II

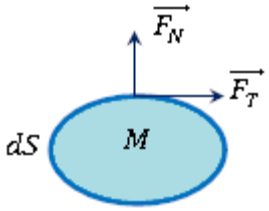
Statique des fluides



II. Statique des fluides

II.1 Introduction

La statique des fluides (ou l'hydrostatique) est une branche de la mécanique des fluides qui étudie les conditions d'équilibre du fluide (liquides ou gaz) au repos. Les forces de frottement étant nulles, donc un point matériel M dans le fluide est soumis aux forces normales seulement. Les forces mises en jeu sont les forces de volume (le poids) et les forces de surface (la pression).



La pression est définie comme étant la force normale exercée sur le fluide par unité de surface. Elle est donnée par l'expression suivante :

$$p = \frac{\|d\overrightarrow{F_N}\|}{dS} \qquad (eq\ II.1)$$

Si la force est distribuée uniformément sur la surface S, l'expression devient :

$$p = \frac{F_N}{S} \qquad (eq\ II.2)$$

La force peut être exercée par un solide, un liquide ou un gaz. L'unité de la pression est N/m^2. Le tableau II.1 récapitule les différentes unités utilisées pour la pression.

Tableau II-1 : Les unités utilisées pour la mesure de la pression

$1\ Pa = 1\ N/m^2$
$1\ bar = \ 10^5\ Pa = 100\ kPa = \ 0{,}1\ MPa$
$1\ atm = 101325\ Pa = 1{,}01325\ bars$
$1\ Kgf/cm^2 = 9{,}807\ N/cm^2 = 9{,}807 \times 10^4 N/m^2$
$1\ Kgf/cm^2 = 9{,}807 \times 10^4\ Pa$
$1\ Kgf/cm^2 = 0{,}9807\ bars$
$1\ Kgf/cm^2 = 0{,}9679\ atm$
$1\ mmHg = 1\ Torr = 133.3\ Pa =$
$1\ atm = 760\ mmHg = 760\ Torr = 10{,}3\ m\ d'eau$

Différents types de pression :

- La pression atmosphérique : est la pression exercée par les couches d'air qui entourent la surface terrestre. Elle varie en fonction de la température, de la position par rapport à

la terre (la latitude) et de la position par rapport à surface de la mer. En statique la pression atmosphérique considérée est celle de la pression au niveau de la mer à $0°C$. Elle est égale à $1\ atm = 760\ mmHg$.

- Le vide : est l'absence complète de la matière. La pression du vide est inférieure à la pression atmosphérique. Le vide absolu (ou parfait) correspond à une pression absolue nulle.
- La pression effective ou relative : c'est la différence entre la pression absolue et la pression atmosphérique. Elle peut être positive (surpression) ou négative (dépression).

$$p_r\ (p_{eff}) = p_{absolue} - p_{atmosphérique}$$

Les appareils de mesure de la pression sont calibrés pour donner la pression relative.

- Il existe d'autres types de pression, pression hydrostatique pour les fluides au repos et pression dynamique pour les fluides en mouvement.
- La pression absolue est mesurée par rapport au vide absolu (aucune matière). La pression absolue est toujours positive. La pression du vide correspond alors à une pression absolue nulle ou inférieure à la pression atmosphérique.

II.2 La pression en un point dans le fluide

La pression hydrostatique autour d'un point pris à l'intérieur d'un liquide est un scalaire. Elle est la même dans toutes les directions, elle ne dépend donc pas de l'angle d'inclinaison de la surface sur laquelle elle agit en un point donné. Pour démontrer cette propriété, on va considérer un volume élémentaire quelconque dans le fluide.

Le fluide étant au repos :

$$\sum \vec{F} = 0 \qquad (eq.\ II.3)$$

Selon la direction (ox) :

$$p_{x+\delta x}\frac{\delta y \delta z}{2} - p_x \frac{\delta y \delta z}{2} = 0 \Rightarrow p_{x+\delta x} = p_x \qquad (eq.\ II.4)$$

Selon la direction (oy)

$$p_y \delta x \delta z - p_s \delta x \delta s \cdot sin\theta = 0 \Rightarrow p_y \delta x \delta z = p_s \delta x \delta z \quad \text{avec}$$

$$\delta s \cdot sin\theta = \delta z \qquad (eq.\ II.5)$$

$$p_y = p_s \qquad (eq.\ II.6)$$

Selon la direction (oz)

$$p_z \delta x \delta y - p_s \delta x \delta s \cdot cos\theta - \gamma \frac{\delta x \delta y \delta z}{2} = 0 \Rightarrow p_z \delta x \delta y - p_s \delta x \delta y - \gamma \frac{\delta x \delta y \delta z}{2} = 0 \quad (eq\ II.7)$$

Avec $\delta s \cdot cos\theta = \delta y$

$$p_z - p_s - \gamma \frac{\delta z}{2} = 0 \qquad (eq\ II.8)$$

Quand le volume élémentaire δv tend vers un point, δz tend vers 0.

$$\delta v = \delta x \delta y \delta z = \delta y \delta z \to 0 \Rightarrow \delta z \to 0$$

$$p_z = p_s \qquad (eq\ II.9)$$

Donc :

$$p_y = p_s = p_z \qquad (eq\ II.10)$$

La pression hydrostatique en un point dans un fluide au repos est alors la même dans toutes les directions.

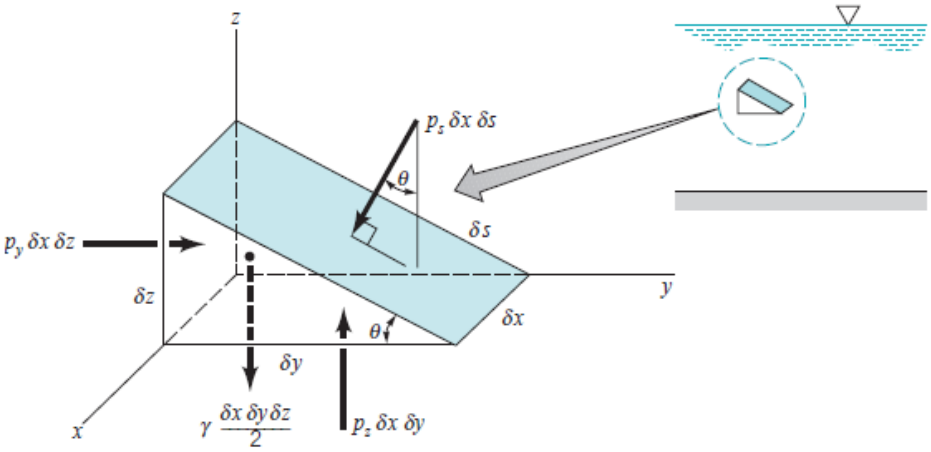


Figure II.1 : Pression exercée sur un volume élémentaire dans un fluide.

II.3 L'équation fondamentale de l'hydrostatique

II.3.1 Fluide incompressible

Considérons un volume élémentaire Δv dans un fluide au repos, Δx étant la largeur et Δz étant la hauteur de ce volume. La profondeur $\Delta y = 1$. L'élément du fluide est en repos, alors l'équation d'équilibre des forces s'écrit alors :

$$\sum \vec{F} = 0 \qquad (eq.\ II.11)$$

Selon la direction (oz), l'équilibre des forces est établi entre la force de pression exercée perpendiculairement sur la face haute et la face basse du volume élémentaire et son poids.

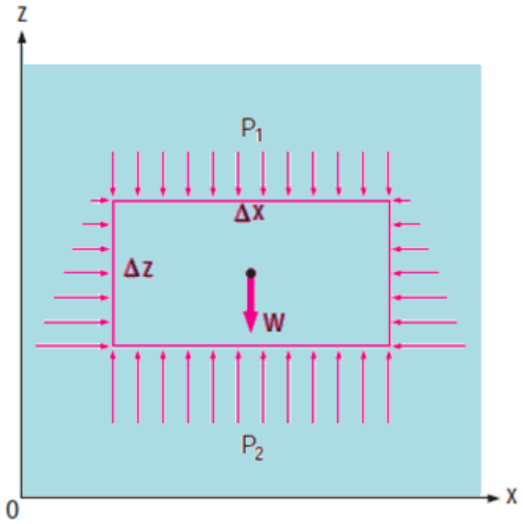


Figure II.2 : Équilibre de forces exercées sur un volume élémentaire dans un fluide au repos

$$p_2\Delta x\Delta y - p_1\Delta x\Delta y - \omega = 0 \qquad (eq.\ II.12)$$

$$p_2\Delta x\Delta y - p_1\Delta x\Delta y - \rho\Delta vg = p_2\Delta x\Delta y - p_1\Delta x\Delta y - \rho\Delta x\Delta y\Delta zg = 0 \qquad (eq.\ II.13)$$

$$p_2 - p_1 = \rho g\Delta z \qquad (eq.\ II.14)$$

$$p_2 = p_1 + \rho gh \quad \text{avec} \quad h = \Delta z \qquad (eq.\ II.15)$$

On constate que la pression varie linéairement avec la profondeur du fluide. ρgh représente, en valeur absolue, le poids d'une colonne verticale de fluide ayant pour section une surface unitaire et pour hauteur $h = z_1 - z_2$.

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 \Rightarrow \frac{p_i}{\rho g} + z_i = Cte \qquad (eq.\ II.16)$$

$$\Delta p = \rho g\Delta z \Rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta z} = \rho g \Rightarrow \frac{dp}{dz} = -\rho g \qquad (eq.\ II.17)$$

L'équation II.17 est l'équation fondamentale de l'hydrostatique. Le signe « $-$ » signifie que la pression augmente lorsque « z » diminue. Pour les fluides ayant une masse volumique qui ne varie pas en fonction de la profondeur, l'équation de l'hydrostatique donne directement l'expression de la différence de pression entre deux points situés à une distance h comme $\Delta p = \rho gh$. Par ailleurs, si la masse volumique varie en fonction de la profondeur l'expression de la différence de pression de ces mêmes points est donnée par :

$$p_2 - p_1 = \int_{z_1}^{z_2} -\rho g dz \qquad (eq.\ II.18)$$

Dans le cas des gaz, la variation de la pression en fonction de la hauteur est négligeable en raison de la faible densité des gaz. La pression dans un réservoir contenant un gaz, par exemple, peut être considérée comme uniforme puisque le poids du gaz est trop petit pour faire

une différence significative. De même, on peut supposer que la pression dans une pièce remplie d'air est constante.

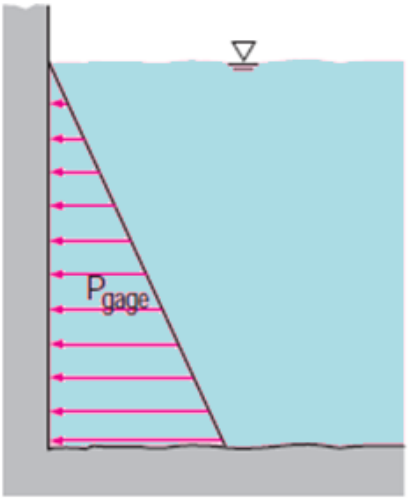


Figure II.3 : Variation linéaire de la pression avec la profondeur.

Si on considère le point 1 sur la surface libre d'un liquide et le point 2 situé à une profondeur h, la pression du point 2 est égale :

$$p_2 = p_1 + \rho g h = p_{atm} + \rho g h \qquad (eq.\ II.19)$$

p_2 Est la pression absolue en point 2, $\rho g h$ est la pression effective ou relative en point 2.

L'expression $\frac{p_i}{\rho g} + z_i = Cte$ signifie aussi que la pression est constante sur les plans parallèles à l'axe « ox » ayant $z = Cte$ comme équation. On parle de surface « isobare ».

La pression hydrostatique dans un fluide au repos ne dépend pas de la forme du réservoir, elle dépend que de la hauteur et de la masse volumique de ce fluide.

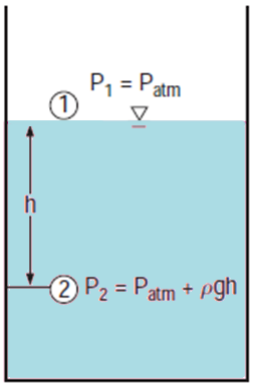


Figure II.4 : Pression en un point dans le fluide.

Les pressions aux points A, B, C, D, E, F et G sont les mêmes puisqu'elles sont à la même profondeur et qu'elles se trouvent dans le même fluide statique. Cependant, les pressions aux points H et I ne sont pas les mêmes puisque ces deux points ne se trouvent pas dans le même

fluide (H se trouve dans le mercure et I dans l'eau), bien qu'ils sont à la même profondeur. Notons que la force de pression exercée par le fluide est toujours normale à la surface aux points spécifiés.

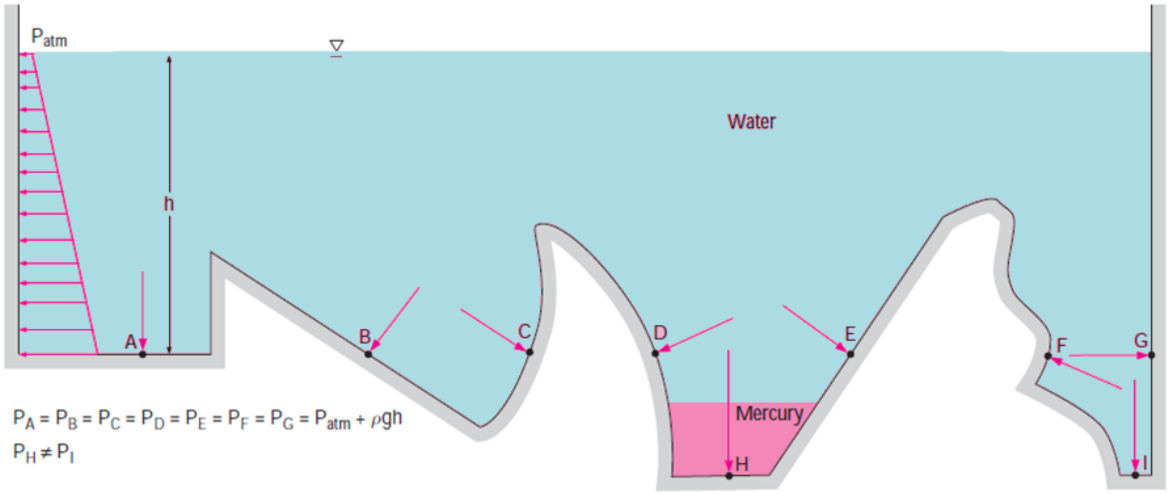


Figure II.5 : Isobares de pression.

On en déduit le « principe des vases communicants » : dans plusieurs vases de forme quelconque, communicants entre eux et contenants un seul liquide en équilibre, les surfaces libres dans les différents vases sont dans le même plan horizontal.



Figure II.6 : Principe de vases communicants.

II.3.2 Fluide compressible

Dans le cas d'un fluide compressible (gaz) la densité ou la masse volumique du fluide peut changer significativement en fonction de la pression et de la température, de ce fait, l'intégration de l'équation fondamentale de l'hydrostatique (eq II.17) se fait en considérant l'expression qui lie la masse volumique avec la pression et la température.

$$\rho = \frac{p}{RT} \qquad (eq.\ II.20)$$

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{p}{RT} g \qquad (eq.\ II.21)$$

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} = -\frac{g}{R} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{T} \qquad (eq.\ II.22)$$

II.4 Théorème de Pascal

Le théorème de Pascal dit que toute variation de pression en un point d'un fluide au repos est transmise intégralement à tous les autres points du liquide. Le théorème implique aussi que la force de pression appliquée par un fluide est proportionnelle à la surface. La pression p_1 exercée par le piston 1 est transmise au piston 2 tel que :

$$p_1 = p_2 \rightarrow \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{A_2}{A_1} \qquad (eq.\ II.23)$$

Puisque $A_2 > A_1$ alors $F_2 > F_1$. On peut donc soulever une grande masse (comme une voiture par exemple) en appliquant une petite force.

Si $\frac{A_2}{A_1} = 10$, pour soulever une voiture de 1000 kg, $F_2 = 1000 \times 9{,}81 = 9810\ N$. Donc on applique une force $F_1 = \frac{F_2}{10} = \frac{9810}{10} = 981\ N$. C'est « ***le principe d'une presse hydraulique*** ».

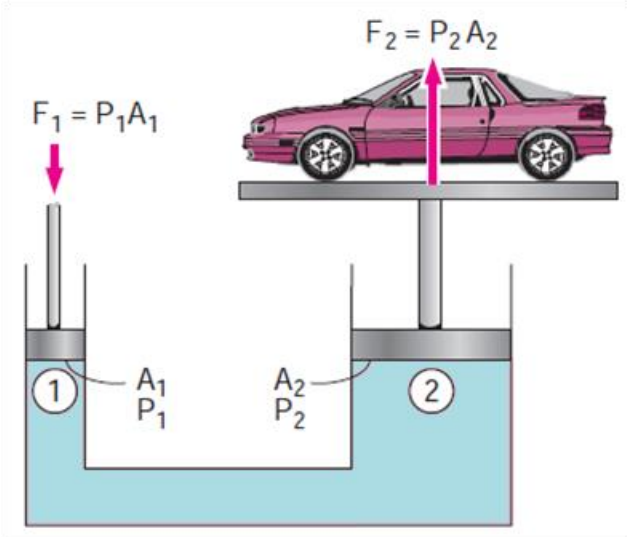


Figure II.7 : Principe d'une presse hydraulique

II.5 Équilibre de deux fluides non miscibles

Un tube en U est rempli d'un fluide de masse volumique ρ_B. Si dans l'une des branches, un autre liquide non miscible au premier et de masse volumique ρ_A est versé, une dénivellation $h = h_A - h_B$ est observée entre les deux liquides (Figure II.8). Les deux surfaces libres étant à la pression atmosphérique. D'après le principe de l'hydrostatique :

$$p_C = p_{atm} + \rho_A(h_A - h_C)g \qquad (eq.\ II.24)$$

$$p_D = p_{atm} + \rho_B(h_B - h_D)g \qquad (eq.\ II.25)$$

$p_C = p_D$ isobare

$$\rightarrow \rho_A(h_A - h_C)g = \rho_B(h_B - h_D)g \qquad (eq.\ II.26)$$

$$\rho_A = \rho_A \frac{h_B - h_D}{h_A - h_C} \qquad (eq.\ II.27)$$

Avec $h_C = h_D$

$$\rho_A = \rho_A \frac{h_B - h_C}{h_A - h_C} \qquad (eq.\ II.28)$$

Les hauteurs h_A, h_B, h_C permettent de déterminer la masse volumique de l'un des deux fluides en fonction de l'autre.

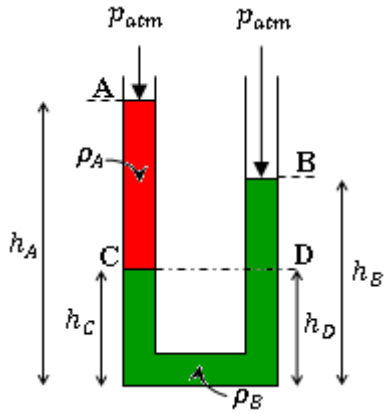


Figure II.8 : Équilibre entre deux fluides non miscibles.

II.6 Mesure de la pression

II.6.1 Le baromètre pour la mesure de la pression atmosphérique

Le baromètre est un appareil servant à mesurer la pression atmosphérique. L'Italien Evangelista Torricelli à été le premier à prouver que la pression atmosphérique peut être mesurée en inversant un tube en verre rempli de mercure dans un réservoir de mercure ouvert à l'air libre.

$$p_B = \rho g h + p_A \qquad (eq.\ II.29)$$

$$p_A = p_{vide} = 0 \qquad (eq.\ II.30)$$

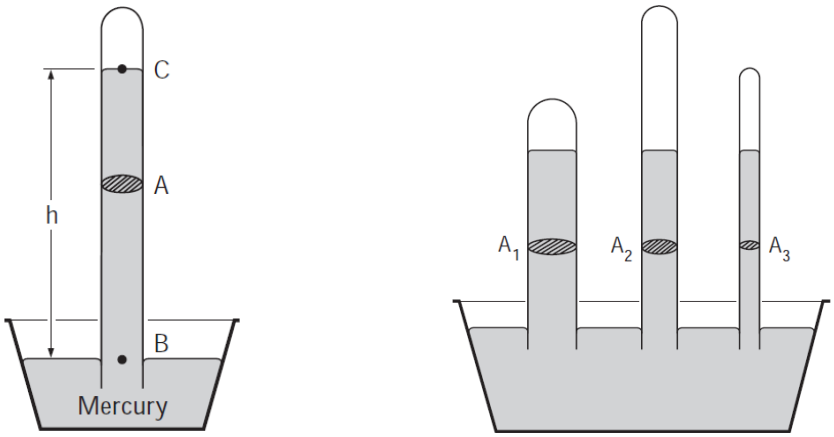
$$p_B = p_{atm} = \rho g h \qquad (eq.\ II.31)$$

La section du tube n'a pas d'effet sur la montée du mercure (Figure II.9-a).

Pour une accélération gravitationnelle égale à 9,807 m/s^2 et une masse volumique de mercure $\rho = 13595\ kg/m^3$ à une température $T = 0°C$, la mesure d'une pression atmosphérique produite par une colonne de mercure d'une hauteur de 760 mm donne :

$$p_{atm} = \rho g h = 13595 \times 9{,}807 \times 760 \times 10^{-3} = 1013028\ Pa = 101{,}3\ KPa$$

Donc $1\ atm = 760\ mmHg = 760\ Torr$ et $1\ Torr = 133{,}3\ Pa$



(a) (b)

Figure II.9 : (a) Principe d'un baromètre pour la mesure de la pression atmosphérique. (b) Effet de la section du tube de baromètre sur la montée du mercure.

La pression atmosphérique varie en fonction de l'altitude, c'est à dire la hauteur par rapport au niveau de la mer.

Tableau II.2 : Variation de la pression atmosphérique en fonction de l'altitude.

Altitude (m)	**La pression atmosphérique (kPa)**
0	101,325
1000	89,88
2000	79,50
5000	54,05
1000	26,05
20000	5,53

II.6.2 Le piézomètre

Le piézomètre est constitué d'un tube vertical d'une extrémité ouverte à l'atmosphère. L'autre extrémité est raccordée à un point du réservoir dont on veut mesurer la pression. Pour éviter l'effet de capillarité, le diamètre du tube piézomètre doit être supérieur à 13 mm.

$$p_A = p_B \qquad (isobare)$$

$$p_A = p_B = \rho g h_1 = p_{A_effective} \qquad (eq.\ II.32)$$

$$p_{A_absolue} = p_{atm} + \rho g h_1 \qquad (eq.\ II.33)$$

Les piézomètres sont généralement utilisés pour la mesure de la pression des liquides dans des réservoirs ou dans des conduits.

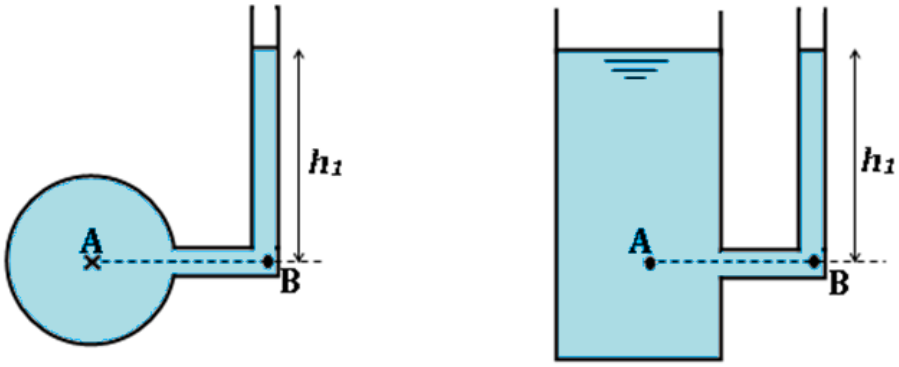


Figure II.10 : Tube de piézomètre.

II.6.3 Les manomètres

C'est un appareil composé d'un ou de plusieurs tubes recourbés et remplis d'un ou de plusieurs liquides de différentes densités.

a- <u>Le manomètre en « U »</u>

C'est un appareil constitué d'un tube en « U » contenant un liquide appelé ***liquide manométrique***, ce liquide peut être du mercure, de l'eau, de l'alcool ou de l'huile. Le tube est lié à un réservoir rempli de liquide ou de gaz.

- Pour les liquides :

$$p_{B_effective} = p_{A_effective} + \rho_1 g h_1 \qquad (eq.\ II.34)$$

$$p_{C_effective} = \rho_2 g h_2 \qquad (eq.\ II.35)$$

$$p_{B_effective} = p_{C_effective} \quad \text{(Isobare)}$$

$$p_{A_effective} + \rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2 \qquad (eq.\ II.36)$$

$$p_{A_effective} = p_A = g(\rho_2 h_2 - \rho_1 h_1) \qquad (eq.\ II.37)$$

$$p_{A_absolue} = p_{atm} + g(\rho_2 h_2 - \rho_1 h_1) \qquad (eq.\ II.38)$$

- Pour les gaz :

$$p_{A_absolue} = p_{B_absolue} = p_{atm} + \rho_2 g\, h_2 \quad \text{avec : } \rho_1 g\, h_1 \text{ négligeable}$$

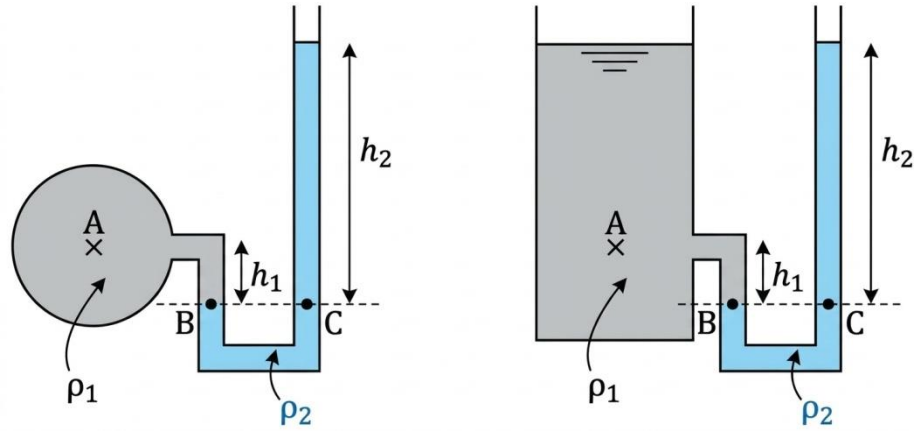


Figure II.11 : Tube manométrique en « U ».

b- Les manomètres différentiels

Il a le même principe qu'un manomètre en « U » sauf qu'il mesure la différence de pression entre deux points.

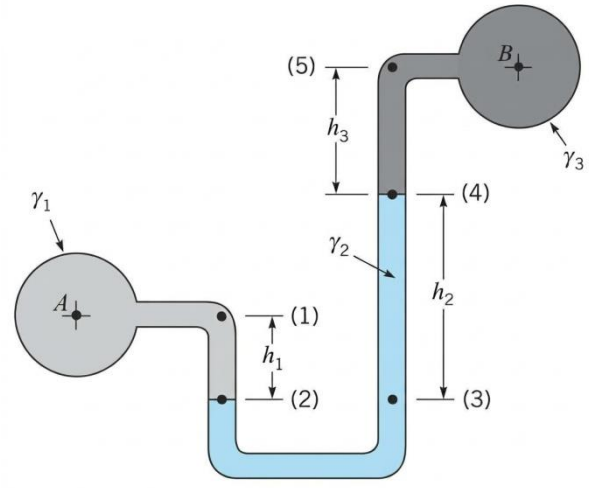


Figure II.12 : Manomètre différentiel.

$$p_2 = p_3$$

$$p_A + \gamma_1 h_1 = p_4 + \gamma_2 h_2 = p_5 + \gamma_3 h_3 + \gamma_2 h_2 = p_B + \gamma_3 h_3 + \gamma_2 h_2 \qquad (eq.\ II.37)$$

$$p_A - p_B = \gamma_3 h_3 + \gamma_2 h_2 - \gamma_1 h_1 = \rho_3 g h_3 + \rho_2 g h_2 - \rho_1 g h_1 \qquad (eq.\ II.38)$$

c- Manomètre différentiel incliné

$$p_1 = p_A + \gamma_1 h_1 = p_2 + \gamma_2 h_2 = p_2 + \gamma_2 l_2 sin\theta = p_B + \gamma_3 h_3 + \gamma_2 l_2 sin\theta \qquad (eq.\ II.39)$$

$$p_A - p_B = \gamma_3 h_3 + \gamma_2 l_2 sin\theta - \gamma_1 h_1 \qquad (eq.\ II.40)$$

Dans le cas où les réservoirs A et B contiennent des gaz :

$$p_A - p_B = \gamma_2 l_2 sin\theta \qquad (eq.\ II.41)$$

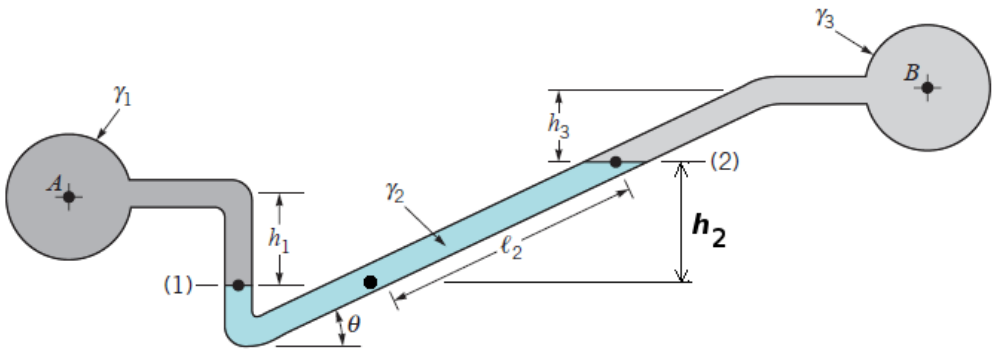


Figure II.13 : Manomètre différentiel incliné.

II.7 La force hydrostatique sur les parois

La détermination des forces hydrostatiques exercées sur les parois ainsi que leurs points d'application est primordiale dans la conception et le dimensionnement des bacs de stockage, des conduites, des barrages, des réacteurs, etc. Dans cette partie du cours, nous allons déterminer la force hydrostatique résultante ainsi que son point d'application sur les surfaces planes et courbées.

Pour un fluide au repos, seule la force perpendiculaire à la surface est considérée parce qu'il n'y a pas de forces tangentielles dues au frottement.

II.7.1 Force hydrostatique sur une paroi plane horizontale

Considérons un réservoir rempli de liquide de poids spécifique γ à une hauteur h. La base du réservoir a une surface appelée « S ». La pression du fluide sur le fond du réservoir est répartie uniformément sur la base. La force résultante exercée sur la base est due seulement à la pression hydrostatique.

$$dF = p \cdot dS = \rho g h \cdot dS \qquad (eq.\ II.42)$$

$$F_R = \int dF = \int \rho g h \cdot dS = \rho g h \int dS = \rho g h S \qquad (eq.\ II.43)$$

La force hydrostatique exercée sur une paroi horizontale est égale au poids d'une colonne de liquide verticale d'une hauteur h multipliée par la surface de cette paroi. Le point d'application de force totale est le centre géométrique de la surface horizontale.

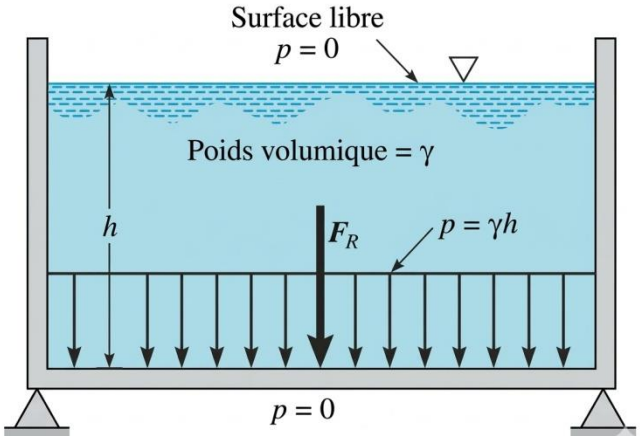


Figure II.14 : Force hydrostatique sur une paroi plane horizontale

II.7.2 Force hydrostatique sur une paroi plane inclinée

Considérons une surface plane d'une forme quelconque immergée dans un liquide. A est l'aire de la surface plane. Cette dernière est inclinée d'un angle θ par rapport à la surface libre du fluide. Dans ce qui suit, nous allons déterminer la force résultante sur cette paroi ainsi que sont point d'application.

Considérons une surface élémentaire dA de cette paroi. La force élémentaire dF exercée sur cette surface est due à la pression hydrostatique du fluide :

$$dF = p \cdot dA = \rho g h \, dA = \rho g y sin\theta dA \quad (h = y sin\theta) \qquad (eq.\ II.44)$$

La force totale exercée par le fluide sur toute la paroi est égale :

$$F_R = \int dF = \int_A \rho g y sin\theta dA = \rho g sin\theta \int_A y dA \qquad (eq.\ II.45)$$

La quantité $\int_A y dA$ est appelée moment statique de la surface A par rapport à (ox).

$$\int_A y dA = y_C A \qquad (eq.\ II.46)$$

y_C est le centre géométrique ou le controïde de la paroi. L'équation II.45 devient alors :

$$F_R = \rho g A y_C sin\theta = \rho g h_C A \quad (avec\ h_C = y_C sin\theta) \qquad (eq.\ II.47)$$

Où h_C est la hauteur du liquide au dessus du centre géométrique. Donc la force résultante est indépendante de l'angle d'inclinaison de la paroi, elle dépend juste de la masse volumique du liquide, de la surface de la paroi et de la profondeur du controïde de la paroi.

Le point d'application de F_R est différent du centre géométrique de la paroi. Il est déterminé en calculant le moment de la force résultante par rapport à (ox) et (oy).

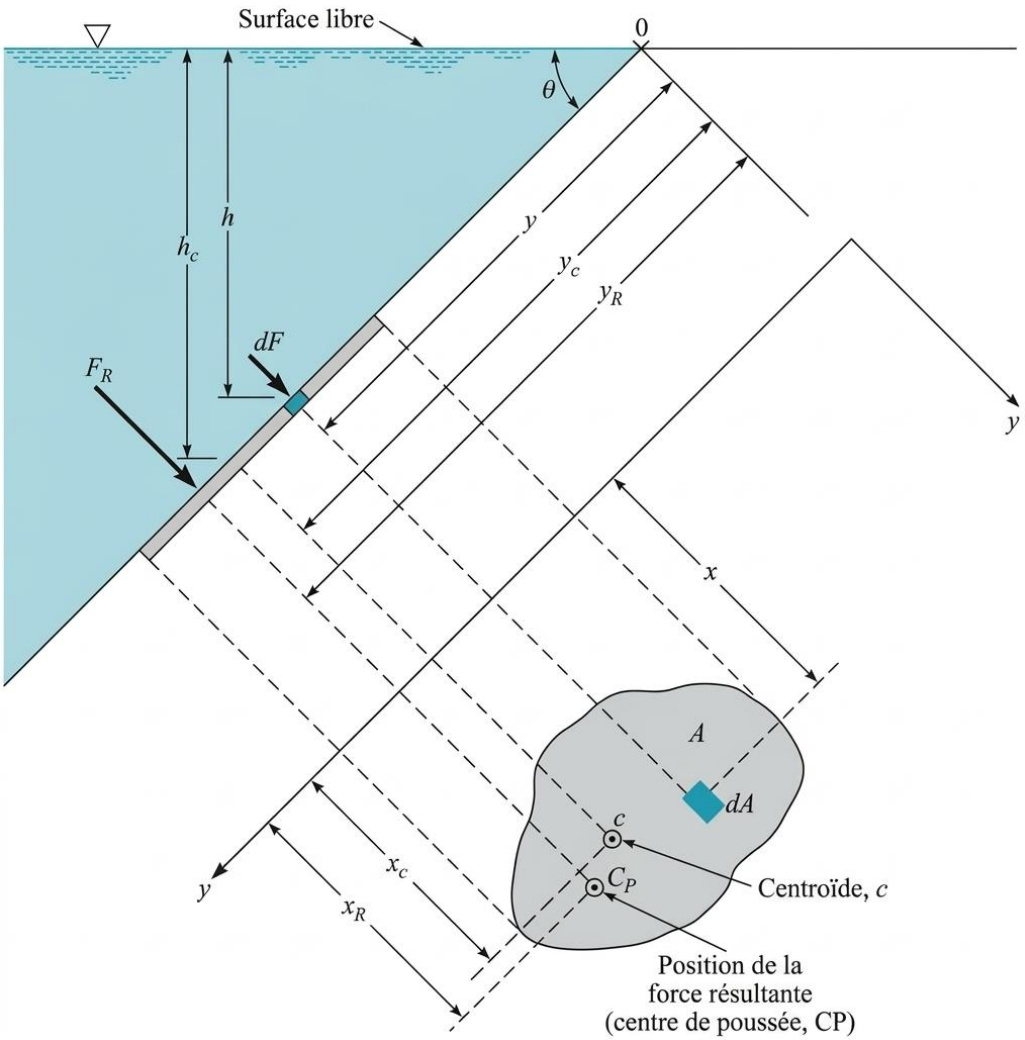


Figure II.15 : Force hydrostatique sur une paroi inclinée.

- ***Moment de F_R par rapport à (ox)***

$$F_R \cdot y_R = \int_A ydF = \int_A y\rho g y sin\theta dA = \rho g sin\theta \int_A y^2 dA \qquad (eq.\ II.48)$$

$$\rho g A y_C sin\theta y_R = \rho g sin\theta \int_A y^2 dA \qquad (eq.\ II.49)$$

$$y_R = \frac{\int_A y^2 dA}{y_C A} \qquad (eq.\ II.50)$$

$\int_A y^2 dA$ est le moment d'inertie ou moment quadratique par rapport à (ox) noté I_{OX}

$$I_{ox} = \int y^2 dA \qquad (eq.\ II.51)$$

$$y_R = \frac{I_{OX}}{y_C A} \qquad (eq.\ II.52)$$

Le moment d'inertie de la surface A par rapport à un axe parallèle à (ox) et passant par le centre géométrique de la paroi est noté I_{CX}. En appliquant le théorème de Huyghens :

$$I_{OX} = I_{CX} + y_C^2 A \qquad (eq.\ II.53)$$

$$y_R = \frac{I_{CX}}{y_C A} + y_C \qquad (eq.\ II.54)$$

Donc le point d'application de F_R se situ au dessous du controïde puisque :

$$\frac{I_{CX}}{y_C A} > 0$$

- ***Moment de F_R par rapport à (oy) :***

$$F_R \cdot x_R = \int x dF = \int x \rho g y sin\theta dA \qquad (eq.\ II.55)$$

$$\rho g y_c sin\theta A x_R = \rho g sin\theta \int xy dA \qquad (eq.\ II.56)$$

$$x_R = \frac{\int xy dA}{y_C A} = \frac{I_{XY}}{y_C A} \qquad (eq.\ II.57)$$

Avec I_{XY} le produit d'inertie de la surface A par rapport à (oy).

$$x_R = \frac{I_{CXY}}{y_C A} + x_C \qquad (eq.\ II.58)$$

Avec I_{CXY} le produit d'inertie de la surface A par rapport à un axe parallèle à (oy) et passant par le centre géométrique (c). Si (cx) ou (cy) est un axe de symétrie pour la surface de la paroi alors $I_{CXY} = 0$.

$C_p(x_R, y_R)$ est appelé centre de poussée ou centre de pression.

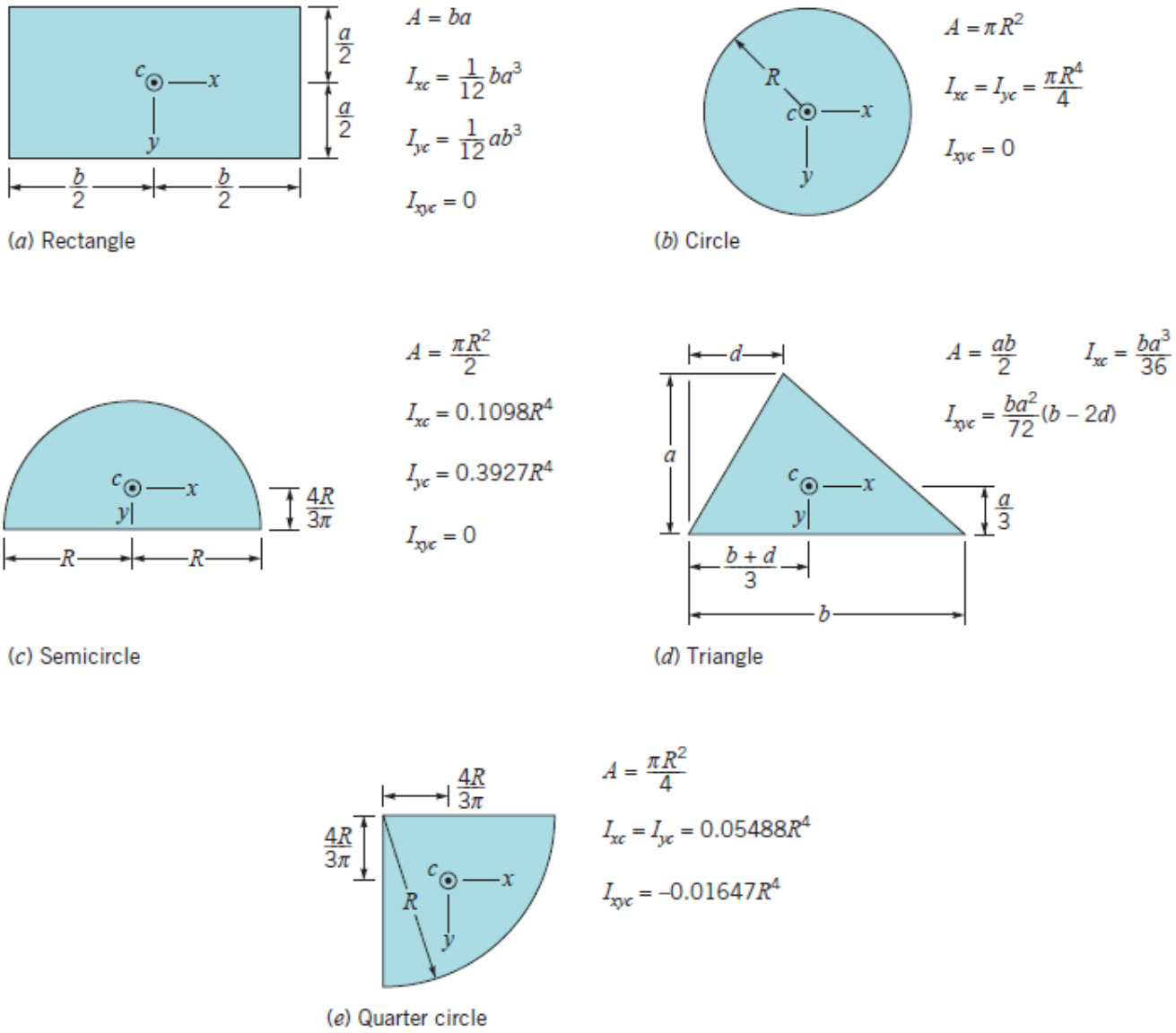


Figure II.16 : Moment d'inertie et produit d'inertie de quelques formes.

- **Représentation graphique de la pression sur les surfaces planes**

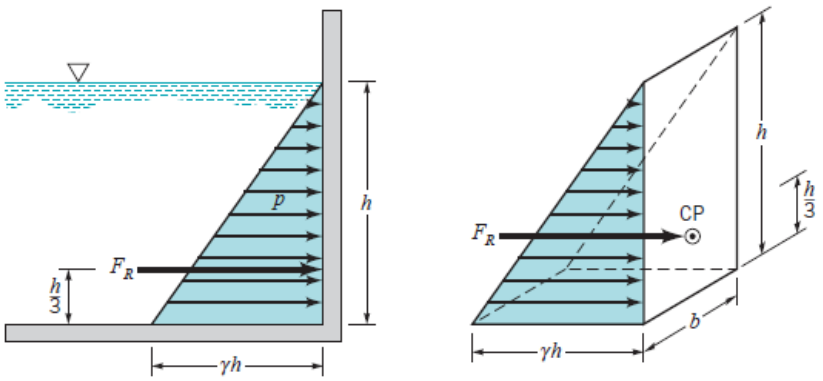


Figure II.17 : Répartition de la pression sur une paroi plane latérale.

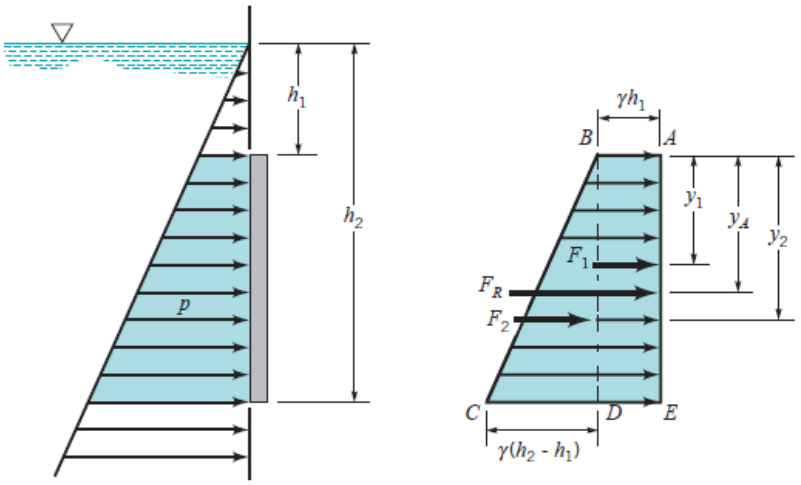


Figure II.18 : Répartition de pression sur une paroi plane latérale immergée.

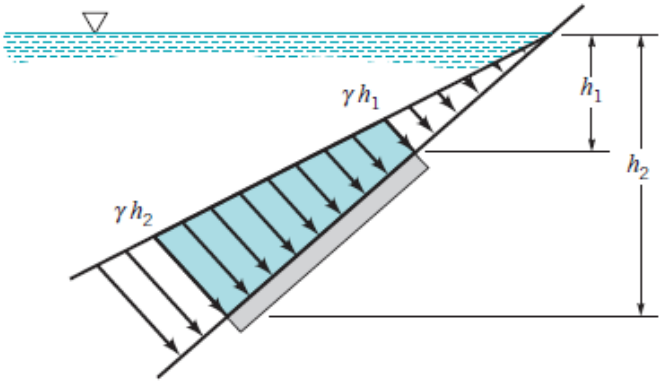


Figure II.19 : Répartition de la pression sur une paroi plane inclinée immergée.

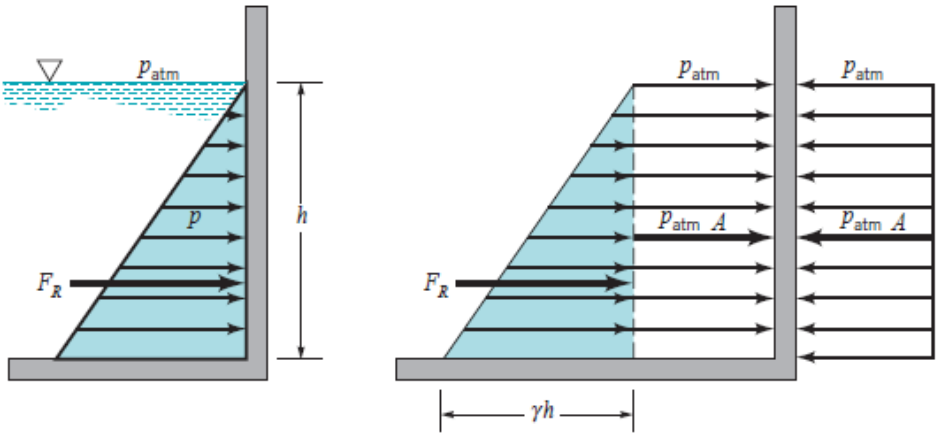


Figure II.20 : Effet de la pression atmosphérique sur la force résultante exercée sur une paroi plane.

II.7.3 Force hydrostatique sur une paroi courbée

Les parois courbées sont souvent rencontrées dans la vie quotidienne, comme dans les barrages, le sous-marin, les conduites, les bacs de stockage, etc. pour déterminer la force résultante sur une paroi courbée on délimite cette surface avec deux plans perpendiculaires. Considérons par exemple un réacteur contenant un fluide de masse volumique ρ : F_H et F_V sont respectivement la force hydrostatique horizontale et verticale exercée par le fluide sur la paroi et w est le poids du volume du fluide confiné entre les deux plans.

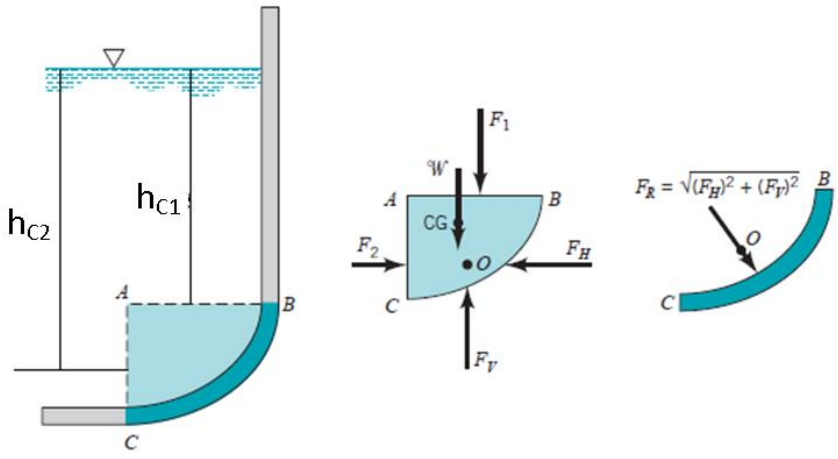


Figure II.21 : Force hydrostatique sur une paroi courbée.

$$F_2 = F_H \qquad (eq.\ II.59)$$

$$F_V = F_1 + w \qquad (eq.\ II.60)$$

$$F_R = \sqrt{F_H^2 + F_V^2} \qquad (eq.\ II.61)$$

$$F_1 = \rho g h_{c1} S_{AB} \; et \; F_2 = \rho g h_{c2} S_{AC} \qquad (eq.\ II.62)$$

II.8 Immersion, flottaison et stabilité des corps solides

II.8.1 Poussée d'Archimède

Supposant qu'on met un solide (S) de masse volumique ρ_s dans un récipient rempli de liquide de masse volumique ρ_f. Le solide est soumis à quatre forces hydrostatiques, F_1, F_2, F_3et F_4. Il peut prendre trois positions qui dépendent de la sa masse volumique et de la masse volumique du liquide. Il peut donc soit flotter sur la surface libre, soit s'immerger dans le liquide ou bien couler complètement et atteindre le fond du récipient. Dans les trois cas, un certain volume du fluide va se déplacer, ce volume est égal au volume du solide immergé. Ce phénomène est traduit par une force exercée par le liquide et qui pousse le solide vers le haut. Cette force est due à l'augmentation de la pression hydrostatique avec la profondeur tel que :

$$F_A = F_2 - F_1 \qquad (eq\ II.63)$$

F_A est appelée « poussée d'Archimède » ou « force de poussée ». Elle est dirigée vers le haut, son point d'application est dit « centre de poussée ». Il correspond au centre géométrique du volume déplacé. Le solide immergé répond alors avec une force dite « Force de flottabilité » dirigée dans le sens inverse de celui de la force de poussée.

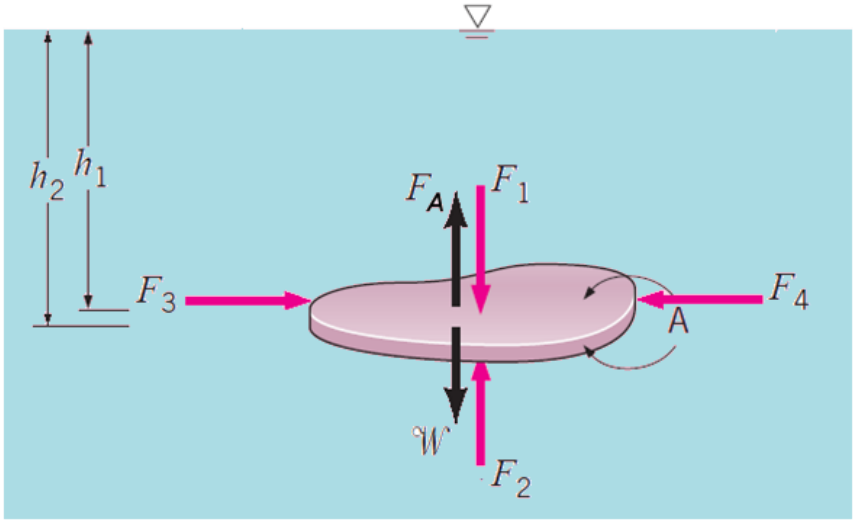


Figure II.22 : Forces exercées sur un solide immergé.

Considérons le cas où le solide (S) reste immergé dans le fluide (Figure II.22). Pour que (S) soit en équilibre il faut que :

$$F_3 = F_4 \qquad (eq.II.64)$$

$$F_2 - F_1 = w \Rightarrow \rho_f g h_2 A - \rho_f g h_1 A = \rho_s V_{Im} g \qquad (eq.II.65)$$

$$F_A = \rho_f g A(h_2 - h_1) = \rho_s V_{Im} g \qquad (eq.\ II.66)$$

$$F_A = \rho_f g V_{dép} = \rho_s V_{Im} g \qquad (eq.\ II.67)$$

À partir de l'équation II.64, on constate que le poids du solide immergé est égal au poids du liquide déplacé. Ce principe est appelé principe d'Archimède et s'énonce de la façon suivante :

« *Tout corps totalement immergé dans un liquide est soumis à une poussé dirigée du bas vers le haut égale au poids du liquide déplacé, c'est-à-dire correspondant au volume déplacé* » (H. Fauduet, 2011).

La poussée d'Archimède passe par la même ligne d'action que celle du poids du solide. L'équation II.64 induit aussi à :

$$\frac{V_{Im}}{V_{dép}} = \frac{\rho_f}{\rho_s} \qquad (eq.\ II.68)$$

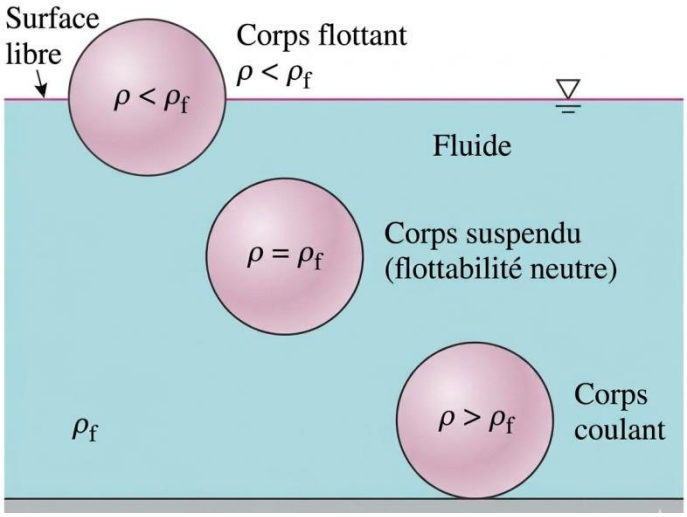


Figure II.23 : Positions possibles prises par un solide mis dans un liquide.

Avec V_{Im} volume du solide immergé et $V_{dép}$ volume du liquide déplacé. À partir de l'équation II.68, on constate que (figure II.23):

- Si $\rho_f / \rho_s > 1$, le solide flotte sur la surface libre;
- Si $\rho_f / \rho_s = 1$, le solide immerge et reste en équilibre dans le liquide.
- Si $\rho_f / \rho_s < 1$, le solide coule et reste au fond.

C'est pour cette raison certains objets tel que le bois flottent sur l'eau tandis que d'autres coulent

II.8.2 Stabilité des corps flottants :

Considérons un corps flottant de poids W concentré au centre de gravité du solide G. Le liquide exerce sur le corps une poussée F_A concentrée au centre de poussée Cp (qui correspond au centre de gravité du liquide déplacé). Si on applique un moment de roulis, les forces de pression appliquées sur la surface immergée créent un moment. Le centre de poussée passe de Cp à Cp'. La ligne d'action de F_A coupe l'axe de symétrie du corps flottant en un point M appelé *métacentre.*

La stabilité du corps flottant dépend de la position du *métacentre* par rapport à son centre de gravité. Si M est au dessus du point G, les forces de gravité et de poussée créent un moment pour faire retourner le flotteur vers sa position initiale, celui-ci regagne sa stabilité. Si M est au dessous du point G, alors le flotteur devient instable.

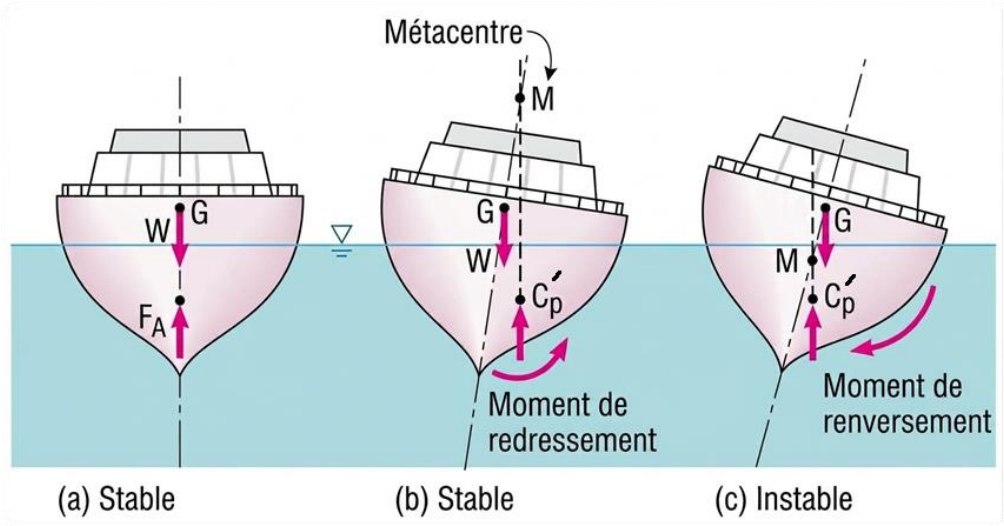


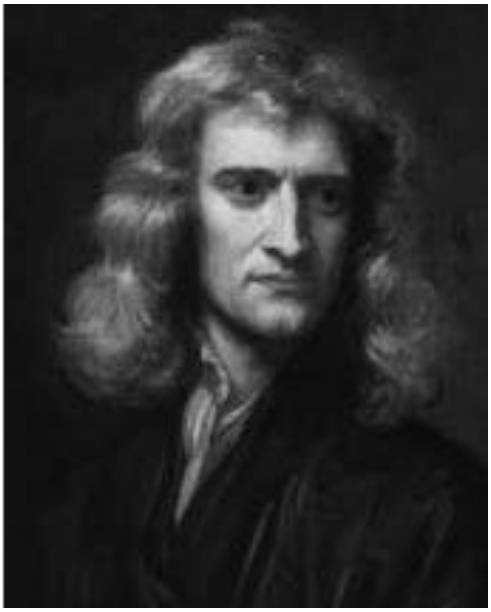
Figure II.24 : Conditions de stabilité d'un corps flottant.

Chapitre II

Dynamique des fluides parfaits



Daniel Bernoulli



Isaac Newton

III. Dynamique des fluides parfaits

III.1 Introduction

La dynamique des fluides parfaits étudie le mouvement d'un fluide sans frottement. Elle est basée sur l'application des trois principes de conservation :

- Conservation de masse appelée principe de continuité;
- Conservation d'énergie qui conduit à l'équation de Bernoulli
- Conservation de quantité de mouvement qui conduit au théorème d'Euleur

III.2 Point de vue de Lagrange et point de vue d'Euleur

Il existe deux points de vue pour décrire le mouvement d'un fluide, point de vue de Lagrange et point de vue d'Euler. La description Lagrangienne (Figure III.1) consiste à suivre les particules des fluides individuellement pendant qu'elles se déplacent ($\overrightarrow{X_A}, \overrightarrow{X_B}, \overrightarrow{X_C}$: Vecteurs position, $\overrightarrow{V_A}, \overrightarrow{V_B}, \overrightarrow{V_C}$: Vecteurs vitesse des particules A, B et C) et à déterminer comment les propriétés du fluide associées à ces particules changent en fonction du temps. Autrement dit, les particules de fluide sont étiquetées ou identifiées, et leurs propriétés déterminées au fur et à mesure de leur déplacement. La description Lagrangienne de l'écoulement est très difficile à réaliser vu le nombre élevé de particules dans le fluide.

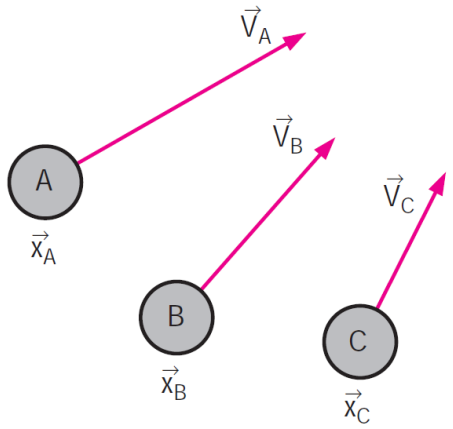


Figure III.1 : Description Lagrangienne du mouvement des particules.

La description Euleurienne (Figure III.2) consiste à décrire les variables (pression, densité, vitesse, etc.), qui sont fonction de l'espace et du temps, en un point fixe dans l'écoulement. Dans ce cas on délimite un espace dans lequel le fluide circule, cet espace est communément appelé volume de contrôle. Chaque point dans ce volume de contrôle est défini par des propriétés qui sont fonction de l'espace et de temps tels que :

- Champs de pressions (Champ scalaire)

$$p = p(x, y, z, t) \qquad (eq.\ III.1)$$

- Champ de vitesses (Champ vectoriel)

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t) \qquad (eq.\ III.2)$$

- Champ d'accélération (Champ vectoriel)

$$\vec{a} = \vec{a}(x, y, z, t) \qquad (eq.\ III.3)$$

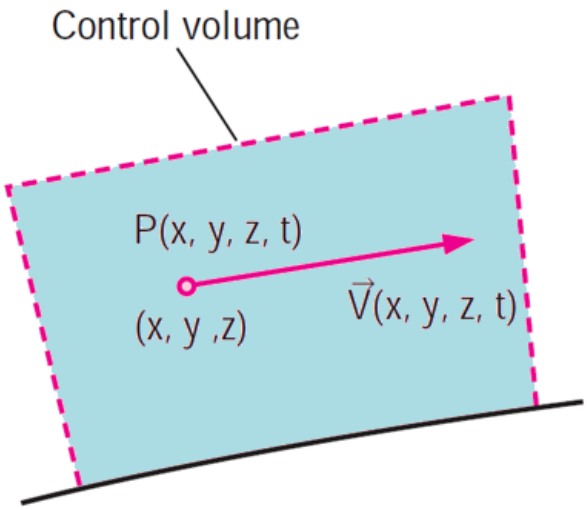


Figure III.2 : Description Euleurienne du mouvement de fluide

III.3 Dérivée matérielle ou dérivée particulaire

Considérons une particule fluide (A) le long d'une trajectoire, la vitesse de cette particule est fonction de l'espace et de temps tel que:

$$\overrightarrow{V_A} = u(x_A, y_A, z_A, t)\vec{\imath} + v(x_A, y_A, z_A, t)\vec{\jmath} + w(x_A, y_A, z_A, t)\vec{k} \qquad (eq.\ III.4)$$

Avec $x_A(t), y_A(t)$ et $z_A(t)$ définissent la position de A à l'instant « t ». L'accélération de cette particule présente la dérivée temporelle de la vitesse. Telle que la vitesse, la variation de la vitesse est aussi fonction de l'espace et du temps. L'accélération de la particule A s'exprime alors :

$$\overrightarrow{a_A} = \frac{d\overrightarrow{V_A}}{dt} = \frac{\partial \overrightarrow{V_A}}{\partial t} + \frac{\partial \overrightarrow{V_A}}{\partial x_A}\frac{dx_A}{dt} + \frac{\partial \overrightarrow{V_A}}{\partial y_A}\frac{dy_A}{dt} + \frac{\partial \overrightarrow{V_A}}{\partial z_A}\frac{dz_A}{dt} \qquad (eq.\ III.5)$$

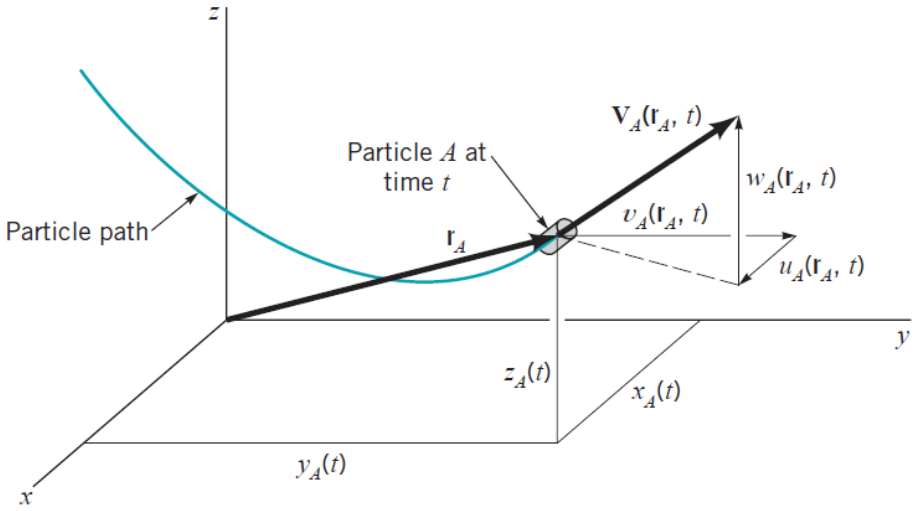


Figure III.3 : Vitesse d'une particule fluide

$$\overrightarrow{a_A} = \frac{d\overrightarrow{V_A}}{dt} = \frac{\partial\overrightarrow{V_A}}{\partial t} + \frac{\partial\overrightarrow{V_A}}{\partial x_A}u_A + \frac{\partial\overrightarrow{V_A}}{\partial y_A}v_A + \frac{\partial\overrightarrow{V_A}}{\partial z_A}w_A \qquad (eq.\ III.6)$$

Pour n'importe qu'elle particule dans le fluide

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial x_A}u + \frac{\partial\vec{V}}{\partial y_A}v + \frac{\partial\vec{V}}{\partial z_A}w \qquad (eq.\ III.7)$$

Avec $\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}$ l'accélération temporelle et $(\frac{\partial\vec{V}}{\partial x_A}u + \frac{\partial\vec{V}}{\partial y_A}v + \frac{\partial\vec{V}}{\partial z_A}w)$ l'accélération convective.

Les trois composantes de cette accélération sont :

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} \qquad (eq.\ III.8)$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} \qquad (eq.\ III.9)$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} \qquad (eq.\ III.10)$$

L'accélération peut être exprimée avec la forme générale :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V} \qquad (eq.\ III.11)$$

L'opérateur D/Dt est appelée dérivée matérielle.

$$\frac{D(*)}{Dt} = \frac{\partial(*)}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})(*) \qquad (eq.III.12)$$

Avec « $\vec{\nabla}$ » l'opérateur gradient.

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \qquad (\text{eq. III.13})$$

$$\vec{V} \cdot \vec{\nabla}(*) = \frac{\partial(*)}{\partial t} + u\frac{\partial(*)}{\partial x} + v\frac{\partial(*)}{\partial y} + w\frac{\partial(*)}{\partial z} \qquad (eq.\ III.14)$$

III.4 Les formes du débit

III.4.1 Le débit volumique

Le débit volumique (Q_v) est le volume du fluide (v) qui traverse une section donnée par unité du temps. Il est calculé par la formule suivante :

$$Q_v = \frac{v}{t} = \frac{l \cdot S}{t} = V \cdot S \qquad \left(\frac{m^3}{s}\ ou\ \frac{l}{s}\right) \qquad (eq.\ III.15)$$

V : étant la vitesse d'écoulement du fluide. Pour un écoulement incompressible, le débit volumique reste constant, c.-à-d. que :

$$Q_{v1} = Q_{v2} \Rightarrow V_1 S_1 = V_1 S_1 \qquad (eq.\ III.16)$$

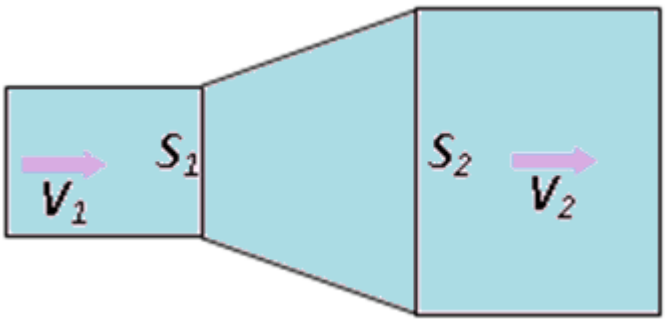


Figure III.4 : Écoulement d'un fluide à travers une section variable.

III.4.2 Débit massique

Le débit massique (Q_m) est la quantité de matière qui traverse une section donnée par unité du temps. Il est donné par la formule suivante :

$$Q_m = \frac{\rho \cdot v}{t} = \frac{\rho \cdot l \cdot S}{t} = \rho \cdot V \cdot S = \rho \ Q_v \qquad \left(\frac{kg}{h} \ ou \ \frac{g}{s}\right) \qquad (eq.\ III.17)$$

Pour un écoulement incompressible, le débit massique reste constant même si la section est variable.

III.5 Équation de Bernoulli

III.5.1 Démonstration de l'équation de Bernoulli

Considérons un écoulement permanent et incompressible où les forces de frottement sont négligeables (fluide parfait). Les lignes de courant et les trajectoires de particules se coïncident. Considérons maintenant une ligne de courant dans cet écoulement (figure III.5). La vitesse d'une particule sur cette ligne de courant est donnée par $V = ds/dt$ où s est la distance parcourue par la particule. Cette vitesse peut varier le long de la ligne de courant. L'accélération de cette particule se décompose alors en une composante tangente a_s et une autre composante normale a_n à la ligne de courant. La composante tangentielle de l'accélération est due, en fait, à la variation de la vitesse de la particule tandis que la composante normale est due au changement de direction de cette vitesse. La dérivée totale de la vitesse $V(s,t)$ est donnée par :

$$dV = \frac{\partial V}{\partial s} ds + \frac{\partial V}{\partial t} dt \qquad (eq.\ III.18)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial s}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t}\frac{dt}{dt} = \frac{\partial V}{\partial s}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t} \qquad (eq.\ III.19)$$

Pour un écoulement permanent, la variation temporelle de la vitesse est nulle.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial s} V = \frac{dV}{ds} V \qquad (eq.\ III.20)$$

L'accélération dans la direction tangente à la ligne de courant est alors :

$$a_s = \frac{dV}{ds} V \qquad (eq.\ III.21)$$

Considérons une particule de fluide sur une la ligne de courant (figure III.4) et appliquons le deuxième principe de Newton dans la direction tangente de la ligne de courant.

$$\sum F_s = m a_s \qquad (eq.\ III.22)$$

$$pdA - (p + dp)dA - w sin\theta = mV \frac{dV}{ds} \qquad (eq.\ III.23)$$

$$-dpdA - \rho g dA ds \frac{dz}{ds} = \rho g dA ds V \frac{dV}{ds} \qquad (eq.\ III.24)$$

$$-dp - \rho g dz = \rho g V dV \qquad (eq.\ III.25)$$

$$\frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} d(V^2) + g dz = 0 \qquad (eq.\ III.26)$$

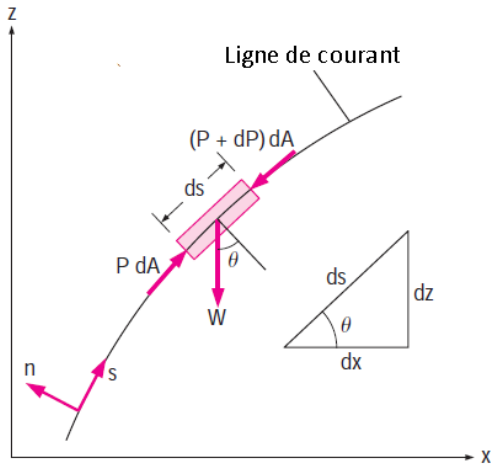


Figure III.5 : Forces exercées sur une particule de fluide le long d'une ligne de courant.

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = Contante\ le\ long\ d\ une\ ligne\ de\ courant \qquad (eq.\ III.27)$$

L'équation III.27 est communément appelée l'équation de *Bernoulli*. Elle a plusieurs applications en mécanique des fluides lorsque l'écoulement est permanent et dans les régions où les forces de frottement sont négligeables. Pour un écoulement incompressible :

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = Contante \quad (\frac{J}{kg}) \qquad (eq.\ III.28)$$

Les trois termes dans l'équation III.28 sont des termes d'énergie par unité de masse (J/kg). Le terme (p/ρ) représente le travail des forces de pression, le terme $(V^2/2)$ est l'énergie cinétique et (gz) est l'énergie potentielle de la particule. Comme la somme des trois termes est conservée sur une ligne de courant, l'équation de Bernoulli peut être appliquée entre deux points sur cette même ligne :

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 \qquad (eq.\ III.29)$$

L'équation de Bernoulli peut être aussi déduite en appliquant le principe de conservation d'énergie.

Autre forme de l'équation de Bernoulli

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g z = Constante \quad (Pa) \qquad (eq.\ III.30)$$

Dans l'équation III.30 :

- p : la pression statique, elle représente la pression thermodynamique du fluide.
- $\frac{1}{2}\rho V^2$: pression dynamique due à l'énergie cinétique.
- $\rho g z$: pression hydrostatique due à une élévation z par rapport à un point de référence dans le fluide, à ne pas confondre avec la pression hydrostatique du à la hauteur de fluide par rapport à sa surface libre.

La somme des trois termes représente la pression totale. L'équation de Bernoulli montre alors que la pression totale est conservée le long d'une ligne de courant.

Rappelons que l'équation de Bernoulli est valide seulement lorsque l'écoulement est permanent, sans frottement, incompressible et qu'il n'y a pas d'apport d'énergie (mécanique ou thermique). L'autre forme de l'équation de Bernoulli est donnée comme suite :

$$\frac{p}{\gamma}+\frac{V^2}{2g}+z=Constante \quad (m) \qquad (eq.\ III.31)$$

III.6 Application de l'équation de Bernoulli

III.6.1 Écoulement à travers un orifice

L'une des applications de l'équation de Bernoulli est le calcul de la vitesse de vidange ou le temps de vidange d'un réservoir rempli de fluide et ouvert à l'air libre (figure III.6). L'écoulement se fait à travers un orifice de section très petite par rapport à la section du réservoir.

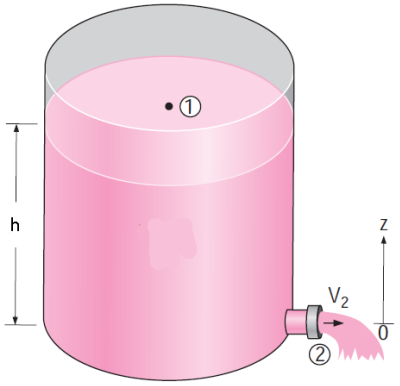


Figure III.6 : Écoulement à travers un orifice.

En appliquant l'équation de Bernoulli entre le point 1et 2, on trouve :

$$p_1+\frac{1}{2}\rho V_1^2+\rho g z_1=p_2+\frac{1}{2}\rho V_2^2+\rho g z_2 \qquad (eq.\ III.32)$$

$$p_1=p_2=p_{atm}$$

La vitesse V_1 est négligeable devant V_2(le diamètre du réservoir est très grand par rapport au diamètre de l'orifice). Donc l'équation III.32 devient :

$$V_2 = \sqrt{2gz_1} \qquad (eq.\ III.33)$$

L'équation III.33 est connue sous le nom de l'équation de *Torricelli*.

III.6.2 Mesure de la vitesse d'écoulement avec le tube de *Pitot*

Le tube de *Pitot* est utilisé pour déterminer la vitesse d'écoulement d'un fluide. En connaissant la différence de pression statique entre deux points à l'aide d'un piézomètre et d'un tube de *Pitot* (Figure III.7), on peut déduire la valeur de la vitesse du fluide en appliquant l'équation de Bernoulli.

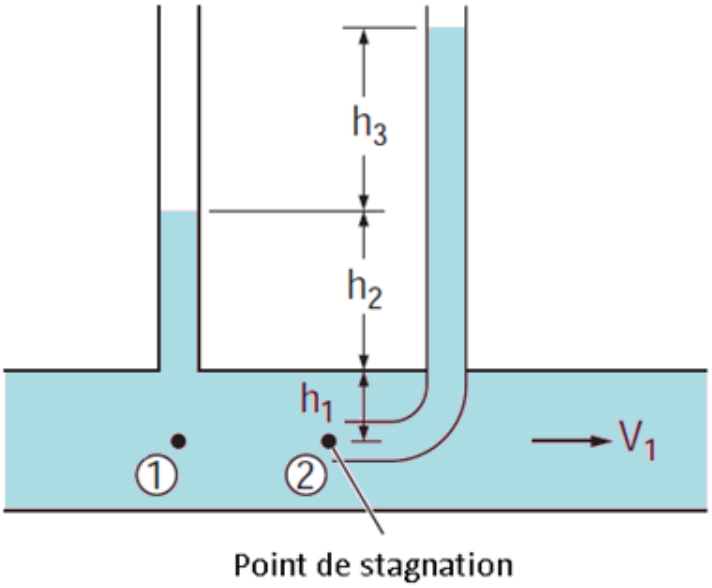


Figure III.7 : Principe de mesure de la vitesse d'écoulement avec le tube de *Pitot*.

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \rho g z_2 \qquad (eq.\ III.34)$$

Avec $z_1 = z_2$ et $V_2 = 0$ (point de stagnation).

$$\frac{1}{2}\rho V_1^2 = p_2 - p_1 \qquad (eq.\ III.35)$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho}} \qquad (eq.\ III.36)$$

$$p_1 = \rho g(h_1 + h_2) \qquad (eq.\ III.37)$$

$$p_2 = \rho g(h_1 + h_2 + h_3) \qquad (eq.\ III.38)$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2(\rho g(h_1 + h_2 + h_3) - \rho g(h_1 + h_2))}{\rho}} \qquad (eq.\ III.39)$$

$$V_1 = \sqrt{2gh_3} \qquad (eq.\ III.40)$$

À partir de l'équation III.35, on peut déduire la pression en point (2) selon :

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 \qquad (eq.\ III.41)$$

Dans l'équation III.41, p_2 est nommée *pression de stagnation*.

III.6.3 Mesure de débit : Tube de Venturi

Le tube de *Venturi* est un tube à section variable utilisé sur une conduite afin de mesurer le débit d'écoulement dans celle-ci. Il comporte un rétrécissement et est muni de prises de pression afin de déterminer la différence de pression entre deux points (figure III.8). Le débit est calculé en appliquant l'équation de Bernoulli entre deux points de sections différentes.

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \rho g z_2 \qquad (eq.\ III.42)$$

Le débit volumique est donné par l'expression suivante :

$$Q_V = A_1 V_1 = A_2 V_2 \qquad (eq.\ III.43)$$

A_1 est A_2 sont respectivement l'aire de la section en point 1 et 2.

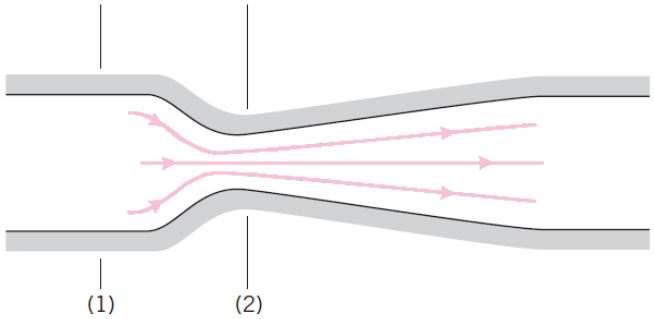


Figure III.8 : Schéma d'un tube de *Venturi*.

L'équation III.42 devient :

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho(V_2^2 - V_1^2) = \frac{1}{2}\rho V_2^2\left(1 - \frac{A_2^2}{A_1^2}\right) \qquad (eq.\ III.44)$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho\left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right)}} \qquad (eq.\ III.45)$$

$$Q_V = A_2\sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho\left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right)}} \qquad (eq.\ III.46)$$

III.7 Limites de l'équation de Bernoulli. Équation de Saint Venant

Rappelons que l'équation de Bernoulli est applicable pour un écoulement permanent et non visqueux. Considérons maintenant l'écoulement compressible d'un gaz parfait. En appliquant l'équation d'état, on peut déduire la formule de la pression :

$$p = \rho RT \qquad (eq.\ III.47)$$

L'équation de Bernoulli est donnée par :

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = Contante\ le\ long\ d\ une\ ligne\ de\ courant \qquad (eq.\ III.48)$$

En remplaçant l'équation III.47 dans l'équation III.48, on obtient :

$$\int \frac{RTdp}{p} + \frac{V^2}{2} + gz = Contante \qquad (eq.\ III.49)$$

Un premier cas particulier est celui d'un écoulement isotherme sans frottement:

$$RT\int \frac{dp}{p} + \frac{V^2}{2} + gz = Contante \qquad (eq.\ III.50)$$

$$\frac{V_1^2}{2g} + z_1 + \frac{RT}{g} ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \qquad (eq.\ III.51)$$

Un deuxième cas particulier est celui d'un écoulement isentropique d'un gaz parfait sans frottement ou dégagement de chaleur. Dans ce cas la pression et la masse volumique sont liées par la formule suivante:

$$\frac{p}{\rho^k} = C \Rightarrow \rho = p^{\frac{1}{k}} C^{-\frac{1}{k}} \qquad (eq.\ III.52)$$

Avec k le rapport des capacités thermiques. En remplaçant l'équation III.52 dans l'équation III.48, on obtient :

$$C^{1/k}\int p^{-1/k}dp+\frac{V^2}{2}+gz=Constante \qquad (eq.\ III.53)$$

$$C^{1/k}\int_{p_1}^{p_2} p^{-1/k}dp=C^{1/k}\left(\frac{k}{k-1}\right)\left(p_2^{(k-1)/k}-p_1^{(k-1)/k}\right) \qquad (eq.\ III.54)$$

$$C^{1/K}=\frac{p_1^{1/k}}{\rho_1}=\frac{p_2^{1/k}}{\rho_2} \qquad (eq.\ III.55)$$

En remplaçant les équations III.54 et III.55 dans l'équation III.53 on obtient :

$$\left(\frac{k}{k-1}\right)\frac{p_1}{\rho_1}+\frac{V_1^2}{2}+gz_1=\left(\frac{k}{k-1}\right)\frac{p_1}{\rho_1}+\frac{V_1^2}{2}+gz_1 \qquad (eq.\ III.56)$$

L'équation III.56 est appelée l'équation de *Saint Venant.*

III.8 Théorème de Transport de Reynolds

Le terme système, qui représente une quantité de matière bien identifiée, est communément utilisé en thermodynamique ou en physique. La taille et la forme du système peuvent changer au cours du temps, par contre, il ne peut ni recevoir ni fournir une quantité de matière. En dynamique des fluides, on utilise plutôt le terme de volume de contrôle, ce dernier représente une partie ou une région bien définie dans le fluide à étudier. La forme et la taille de ce volume peuvent changer durant un processus. Il peut aussi se déplacer et se déformer. Contrairement au système, un volume de contrôle peut recevoir ou fournir de la matière.

Une propriété extensive est une propriété qui caractérise tout le système et est dépendante de sa masse (exemple : la masse, le débit, l'énergie, la quantité de mouvement…). Par conséquent, une propriété extensive est additive. Soit B_1 une propriété extensive du système S_1 et B_2 une propriété extensive du système S_2, la somme des deux propriétés B_1+B_2 et la propriété extensive du nouveau système S_1+S_2. Une propriété intensive est une propriété qui ne dépend pas de la masse du système (exemple : la température, la pression, la viscosité, la masse volumique…). Par conséquent, les propriétés intensives de deux systèmes ne peuvent être additionnées quand ceux-ci sont réunis.

Le taux de variation d'une propriété extensive d'un système donné est exprimé en utilisant le Théorème de Transport de Reynolds (TTR). Pour un volume de contrôle fixe et indéformable, le taux de variation d'une propriété extensive B du système est égal à la somme du taux de variation de cette quantité à l'intérieur d'un volume de contrôle et le flux net de cette propriété qui traverse la surface délimitant le même volume de contrôle.

$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \frac{dB_{CV}}{dt} + \dot{B}_{net} = \frac{dB_{CV}}{dt} + \sum \dot{B}_{sortie} - \sum \dot{B}_{Entrée} \qquad (eq.\ III.57)$$

$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho b dv + \int_{SC} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n}\, dA \qquad (eq.\ III.58)$$

Avec $b = B/m$, VC désigne le volume de contrôle, SC la surface de contrôle (figure III.8) et $\vec{n}$ un vecteur unité normal à la surface de contrôle.

Pour un volume de contrôle qui se déplace, le théorème de Reynolds est donné avec la formule suivante :

$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \int_{VC} \frac{\partial}{\partial t}(\rho b) dv + \int_{SC} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n}\, dA \qquad (eq.\ III.59)$$

Dans le cas d'un écoulement permanent :

$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \int_{SC} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n}\, dA \qquad (eq.\ III.60)$$

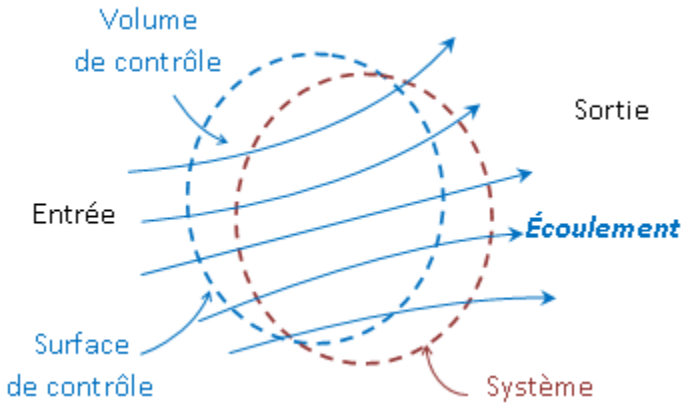


Figure III.9 : Exemple d'un système et un volume de contrôle fixe.

III.9 Conservation de masse : Équation de continuité

En remplaçant la propriété extensive « B » par la masse « m » dans l'équation III.57, la propriété intensive « b » devient égale à 1 et on obtient :

$$\frac{dm_{sys}}{dt} = \frac{dm_{CV}}{dt} + \dot{m}_{net} = \frac{dm_{CV}}{dt} + \sum \dot{m}_{sortie} - \sum \dot{m}_{Entrée} \qquad (eq.\ III.61)$$

$$\frac{dm_{sys}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho dv + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot \vec{n}\, dA \qquad (eq.\ III.62)$$

Avec $\dot{m}$ le débit massique. ***Le principe de conservation de masse*** implique que le taux de variation de la masse du système est nul.

$$\frac{dm_{sys}}{dt} = 0 \qquad (eq.\ III.63)$$

$$\frac{dm_{CV}}{dt} + \sum \dot{m}_{sortie} - \sum \dot{m}_{Entrée} = 0 \Rightarrow \frac{dm_{CV}}{dt} = \sum \dot{m}_{Entrée} - \sum \dot{m}_{sortie} \qquad (eq.\ III.64)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho dv + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot \vec{n}\, dA = 0 \qquad (eq.\ III.65)$$

Le principe de conservation de masse est communément appelé ***l'équation de continuité***.

Cas particuliers :

1- Écoulement permanent :

$$\frac{dm_{CV}}{dt} = \sum \dot{m}_{Entrée} - \sum \dot{m}_{sortie} = 0 \Rightarrow \sum \dot{m}_{Entrée} = \sum \dot{m}_{sortie} \quad (\frac{kg}{s}) \qquad (eq.\ III66)$$

2- Écoulement permanent et incompressible

$$\sum Q_{Entrée} = \sum Q_{sortie} \quad (\frac{m^3}{s}) \qquad (eq.\ III.67)$$

Pour un volume de contrôle de dimensions infinitésimales

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla}\rho + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \qquad (eq.\ III.68)$$

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla}\rho$ est la dérivée matérielle de ρ.

$$\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \qquad (eq.\ III.69)$$

Le taux de dilatation qui représente la variation du volume d'un élément de fluide à masse constante est donné par :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = -\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} \qquad (eq.\ III.70)$$

Avec

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \qquad (eq.\ III.71)$$

Pour un écoulement incompressible :

$$\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (eq.\ III.72)$$

III.10 Conservation d'énergie

En remplaçant maintenant la propriété extensive « B » par l'énergie « E » dans l'équation III.57, la propriété intensive « b » devient égale à $e = E/m$ et on obtient :

$$\frac{dE_{sys}}{dt} = \sum(\dot{Q} + \dot{W})_{sortie} - \sum(\dot{Q} + \dot{W})_{Entrée} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} e\rho dv + \int_{SC} e\rho\vec{V}\cdot\vec{n}\,dA \,(eq.\ III.73)$$

Avec $\dot{Q}$et $\dot{W}$ sont respectivement la chaleur et le travail échangé par le volume contrôle. e est l'énergie totale exprimée par unité de masse. Le travail peut être généralement fourni au volume de contrôle par une pompe, une turbine un compresseur. Il peut aussi dû à la force de pression et aux forces de frottement. L'énergie totale représente la somme de l'énergie interne (u), l'énergie cinétique $(V^2/2)$ et l'énergie potentielle (gz).

$$e = u + \frac{V^2}{2} + gz \qquad (eq.\ III.74)$$

III.11 Conservation de quantité de Mouvement

En remplaçant maintenant la propriété extensive « B » par la quantité de mouvement « $m\vec{V}$ » dans l'équation III.57, la propriété intensive « b » devient égal à $m\vec{V}/m = \vec{V}$ et on obtient :

$$\frac{d(m\vec{V})_{sys}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\vec{V}\rho dv + \int_{SC}\vec{V}\rho\vec{V}\cdot\vec{n}\,dA \qquad (eq.\ III.75)$$

En appliquant la deuxième loi de Newton :

$$\sum\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} \qquad (eq.\ III.76)$$

$$\frac{d(m\vec{V})_{sys}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\vec{V}\rho dv + \int_{SC}\vec{V}\rho\vec{V}\cdot\vec{n}\,dA = \sum\vec{F} = \sum\vec{F}_{Volume} + \sum\vec{F}_{Surface}\,(eq.III.77)$$

- Les forces de volume tel que le poids: $m\vec{g}$
- Les forces de surface tel que la force de la pression (pA) et la force de frottement.
- $\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\vec{V}\rho dv$ est le débit d'accumulation de quantité de mouvement dans le volume de contrôle.
- $\int_{SC}\vec{V}\rho\vec{V}\cdot\vec{n}\,dA$ est le débit de quantité de mouvement sortant moins le débit de quantité de mouvement entrant.

$$\int_{SC} \vec{V}\rho\vec{V}\cdot\vec{n}\,dA = (\rho Q_v\vec{V})_{entrant} - (\rho Q_v\vec{V})_{sortant} \qquad (eq.\ III.78)$$

Dans le cas d'un fluide parfait et pour un volume de contrôle de dimensions infinitésimales, l'équation de conservation de quantité de mouvement s'écrit :

$$\frac{\partial(\rho\vec{V})}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{V}\vec{V}) = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{g} \qquad (eq.\ III.79)$$

En coordonnées cartésiennes et pour un écoulement incompressible, les trois composantes de l'équation III.79 s'écrivent :

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (eq.\ III.80)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} \qquad (eq.\ III.81)$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \qquad (eq.\ III.82)$$

Les équations III.79 à III.82 sont connues sous le nom des équations d'*Euleur*.

Dans le cas de l'écoulement d'un fluide Newtonien, les trois composantes de l'équation de conservation de quantité de mouvement deviennent :

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \qquad (eq.\ III.83)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \qquad (eq.\ III.84)$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \qquad (eq.\ III.85)$$

Où μ est la viscosité dynamique du fluide. Dans ce cas, les forces de pesanteur sont négligées devant les forces de frottement. Les équations III.83 à III.85 sont les équations de Navier-Stokes.

Références bibliographiques

Références bibliographiques

AMIROUDINE S. et BATTAGLIA J. L., Mécanique des fluides, Dunod, 2011.

ÇANGEL Y. A. et CIMBALA J. M., Fluid mechanics: Fundamentals and applications, McGraw Hill, 2006.

FAUDUET H., Mécanique des fluides et des solides appliquée à la chimie, Technique et Documentation (Lavoisier), 2011.

JILL R. V., EVETT J. B., LIU C., Mécanique des fluides et hydraulique, Série Schaum, Mc Graw Hill, 2ème édition. 1995.

MIDOUX N., Mécanique et rhéologie des fluides en génie chimique, Technique et Documentation (Lavoisier), 1985.

MUNSON B. R., YOUNG D. F., OKIISHI T. H., HUEBSCH W. W., Fundamentals of fluid mechanics, John Weily & Sons, Sixth edition, 2009.

RYHMING I. L., Dynamique des fluides, Presses polytechniques et universitaires romandes, Deuxième édition, 2004.