Fiche TD n°03 : A STATISTIQUES – Corrigé

USTO-MB / Faculté de Chmie – 2026-2027

Module : Probabilités & Statistiques – LMD S3

Pour le premier exercice, voir le chapitre 4 du cours.

Exercice 2 : Droite de Mayer

Temps de traitement X (h)	1	2	3	4	5	6
Dureté Y (HV)	175	200	225	245	265	285
Effectif n_i	5	8	7	9	6	5

L'effectif total est $N = 5 + 8 + 7 + 9 + 6 + 5 = 40$.

Calcul de la droite de Mayer

On partage la série en deux groupes d'effectifs aussi proches que possible.

Choix des groupes

- **Groupe 1** (premiers points) : $X = 1$, 2 et 3 Effectif : $5 + 8 + 7 = 20$
- **Groupe 2** (derniers points) : $X = 4$, 5 et 6 Effectif : $9 + 6 + 5 = 20$

Les deux groupes ont exactement le même effectif (20).

Point moyen du Groupe 1 : G_1

$$\bar{x}_1 = \frac{5 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 7 \cdot 3}{20} = \frac{5 + 16 + 21}{20} = \frac{42}{20} = 2{,}1$$

$$\bar{y}_1 = \frac{5 \cdot 175 + 8 \cdot 200 + 7 \cdot 225}{20} = \frac{875 + 1600 + 1575}{20} = \frac{4050}{20} = 202{,}5$$

Donc

$$G_1 = (2{,}1 \ ; \ 202{,}5)$$

Point moyen du Groupe 2 : G_2

$$\bar{x}_2 = \frac{9 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 5 \cdot 6}{20} = \frac{36 + 30 + 30}{20} = \frac{96}{20} = 4{,}8$$

$$\bar{y}_2 = \frac{9 \cdot 245 + 6 \cdot 265 + 5 \cdot 285}{20} = \frac{2205 + 1590 + 1425}{20} = \frac{5220}{20} = 261$$

Donc

$$G_2 = (4{,}8\ ;\ 261)$$

Équation de la droite de Mayer

Pente :

$$a = \frac{\bar{y}_2 - \bar{y}_1}{\bar{x}_2 - \bar{x}_1} = \frac{261 - 202{,}5}{4{,}8 - 2{,}1} = \frac{58{,}5}{2{,}7} = 21{,}67$$

Ordonnée à l'origine :

$$b = \bar{y}_1 - a \times \bar{x}_1 = 202{,}5 - 21{,}67 \times 2{,}1 = 202{,}5 - 45{,}507 \approx 156{,}99$$

Équation de la droite de Mayer

$$\widehat{Y} = 21{,}67\, X + 157$$

Exercice 3 : Tableau à double entrée

1. **Tableau des fréquences conjointes**

   On divise chaque effectif par le total $N = 60$:

$$f_{ij} = \frac{n_{ij}}{60}$$

Traitement	**Faible**	**Moyen**	**Élevé**	**Total**
T1	0.20	0.13	0.03	0.37
T2	0.10	0.17	0.07	0.33
T3	0.05	0.15	0.10	0.30
Total	0.35	0.45	0.20	1.00

2. **Fréquences marginales**

   - Par ligne (traitement) :

$$f_{T1} = 0.37, \quad f_{T2} = 0.33, \quad f_{T3} = 0.30$$

   - Par colonne (niveau de défauts) :

$$f_{\text{Faible}} = 0.35, \quad f_{\text{Moyen}} = 0.45, \quad f_{\text{Élevé}} = 0.20$$

3. **Fréquences conditionnelles**

$$f(\text{Élevé} \mid \text{T1}) = \frac{2}{22} = 0.091$$

$$f(\text{T3} \mid \text{Faible}) = \frac{3}{21} = 0.143$$

4. **Interprétation**

Le traitement **T1** présente la plus faible proportion de défauts élevés (9.1 %). C'est donc le traitement qui **minimise les défauts sévères**.

Exercice 4 : Mesures sur un gaz parfait (linéarité parfaite)

Échantillon	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T (K)	300	310	320	330	340	350	360	370	380	390
P (bar)	24.94	25.77	26.60	27.44	28.27	29.10	29.93	30.76	31.60	32.42

1. Covariance entre T et P

$$\text{Cov}(T, P) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (T_i - \bar{T})(P_i - \bar{P})$$

Avec :

$$\bar{T} = 345 \text{ K}, \qquad \bar{P} = 28.683 \text{ bar}$$

Alors :

$$\text{Cov}(T, P) = 67.3461 \text{ K} \cdot \text{bar}$$

2. Regroupement en classes

$$T : [300, 330[, [330, 360[, [360, 390[\quad \text{et} \quad P : [24, 27[, [27, 30[, [30, 33[$$

	$[24, 27[$	$[27, 30[$	$[30, 33[$	Total
$[300, 330[$	3	0	0	3
$[330, 360[$	0	3	0	3
$[360, 390[$	0	1	3	4
Total	3	4	3	10

Les fréquences marginales sont

$$f_T = (0.3,\ 0.3,\ 0.4), \qquad f_P = (0.3,\ 0.4,\ 0.3)$$

3. Régression linéaire

On cherche $P = aT + b$.

Pente a :

$$a = \frac{\text{Cov}(T, P)}{\text{V}(T)}, \quad b = \bar{P} - a\bar{T}$$

TABLE 1 – Calcul détaillé des variances et de la covariance

i	$T_i - \bar{T}$	$(T_i - \bar{T})^2$	$P_i - \bar{P}$	$(T_i - \bar{T})(P_i - \bar{P})$
1	-45	2025,0	$-3{,}743$	168,435
2	-35	1225,0	$-2{,}913$	101,955
3	-25	625,0	$-2{,}083$	52,075
4	-15	225,0	$-1{,}243$	18,645
5	-5	25,0	$-0{,}413$	2,065
6	$+5$	25,0	$+0{,}417$	2,085
7	$+15$	225,0	$+1{,}247$	18,705
8	$+25$	625,0	$+2{,}077$	51,925
9	$+35$	1225,0	$+2{,}917$	102,095
10	$+45$	2025,0	$+3{,}737$	168,165
	Somme	**7425,0**		**673,461**

Pour faire les calculs avec la calculatrice, on fait le tableau des valeurs centrées :
Covariance

$$\boxed{\mathrm{Cov}(T,P) = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(T_i - \bar{T})(P_i - \bar{P}) = \frac{673{,}461}{10} = \mathbf{67{,}3461}\ \mathrm{K}\cdot\mathrm{bar}}$$

$$\mathrm{V}(T) = \frac{7425{,}0}{10} = 742.5 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\mathrm{Cov}(T,P)}{V(T)} = \frac{67.3461}{742.5} = 0.09070$$

Ordonnée à l'origine b :

$$b = \bar{P} - a\bar{T} = 28.683 - 0.09070 \times 345 = -2.60865 \ \ \mathrm{bar}$$

$$\boxed{P = 0.09T - 2.6}$$

4. Interprétation

Coefficient de corrélation :

$$r = \frac{s_{T,P}}{s_T \cdot s_P} = \frac{67.3461}{27.25 \times 2.4865} \approx 0.993$$

$r \approx 1$, donc la pression est proportionnelle à la température, comme prédit par l'équation des gaz parfait $P = kT$.

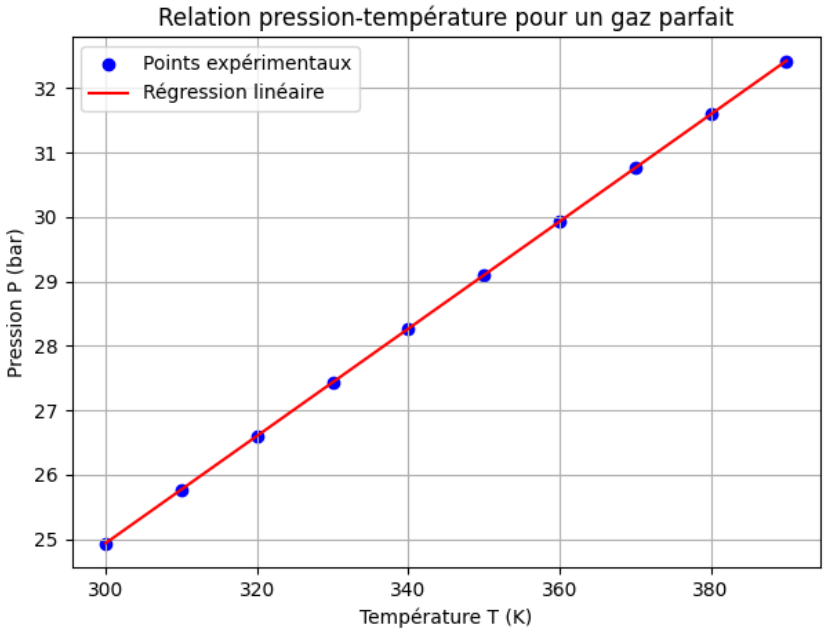


FIGURE 1 – Tracé Ex.2

Exercice 5 : Porosité et Densité

Porosité ϕ (%)	**Densité ρ (g/cm³)**
2.0	3.80
2.5	3.75
3.0	3.70
3.0	3.70
3.5	3.65
4.0	3.60
4.5	3.55
5.0	3.50
2.0	3.82
2.5	3.78
3.5	3.62
4.0	3.58

1. **Calcul des moyennes et covariance**

   Soient :

$$\bar{\phi} = \frac{1}{n}\sum x_i, \qquad \bar{\rho} = \frac{1}{n}\sum y_i, \qquad \mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

   Calculs :

$$\bar{\phi} = 3.2083\ \%, \qquad \bar{\rho} = 3.6708 \mathrm{g/cm^3}$$

$$\mathrm{Cov}(\phi, \rho) = -0.09764\ \ \% \cdot \mathrm{g/cm^3}$$

2. **Droite de régression $\hat{\rho} = a\phi + b$**

$$a = \frac{\mathrm{Cov}(\phi, \rho)}{\mathrm{V}(\phi)}, \qquad b = \bar{\rho} - a\bar{\phi}$$

avec

$$\mathrm{Var}(\phi) = 0.875$$

D'où :

$$a = -0.096, \qquad b = 3.98$$

$$\boxed{\hat{\rho} = -0.096\phi + 3.98}$$

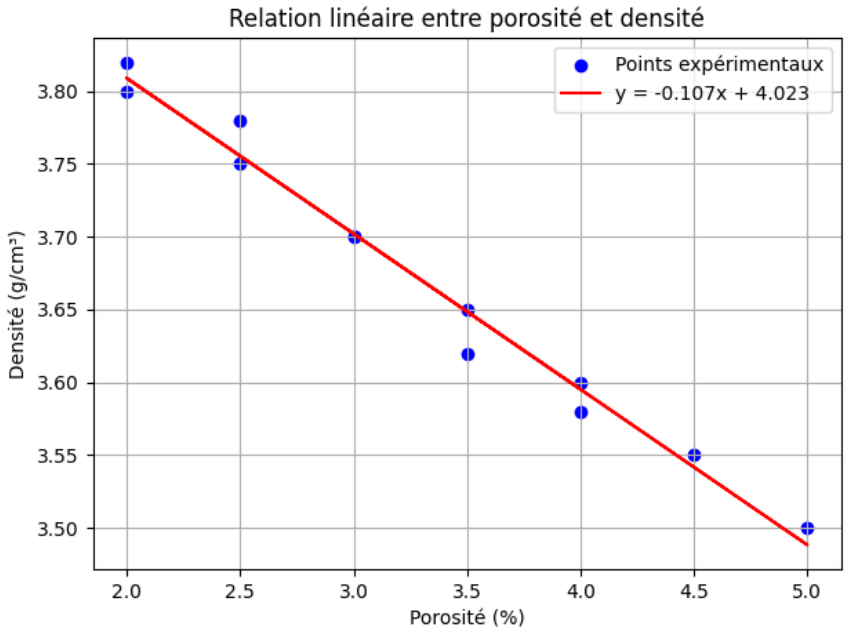


FIGURE 2 – Tracé Ex.3

3. **Prédiction pour 3,2 % de porosité :**

$$\rho = -0.096 \times 3.2 + 3.98 = 3.67 \text{ g/cm}^3$$

$$\boxed{\text{Densité prédite : } 3.67 \text{ g/cm}^3}$$

4. **Interprétation :** Coefficient de corrélation

$$r = \frac{-0.09764}{1.0112 \times 0.0966} \approx -0.9990$$

(relation extrêmement linéaire, mais négative)

La relation est linéaire décroissante : plus la porosité augmente, plus la densité diminue.