Cours de Probabilités pour Ingénieurs en Génie des Matériaux
Introduction aux probabilités

Espaces d'échantillonnage et algèbre des ensembles

Le point de départ de l'étude de la probabilité est la définition de quatre termes clés : *expérience*, *issue élémentaire*, *espace d'échantillonnage* et *événement*. Les trois derniers, tous issus de la théorie classique des ensembles, nous fournissent un cadre mathématique familier dans lequel travailler ; le premier est ce qui fournit le mécanisme conceptuel permettant de traduire des phénomènes du monde réel en termes probabilistes.

Par *expérience*, nous entendrons toute procédure qui (1) peut être répétée, théoriquement, un nombre infini de fois ; et (2) possède un ensemble bien défini d'issues possibles. Ainsi, le lancer d'une paire de dés constitue une expérience ; de même que la mesure de la tension artérielle d'un hypertendu ou l'analyse spectrographique destinée à déterminer la teneur en carbone de roches lunaires. Demander à un prétendu médium de dessiner une image d'une image présumément transmise par un autre prétendu médium ne constitue *pas* une expérience, car l'ensemble des issues possibles ne peut être ni listé, ni caractérisé, ni autrement défini.

Chacune des éventualités potentielles d'une expérience est appelée une *issue élémentaire*, s, et leur totalité est appelée l'*espace d'échantillonnage*, S. Pour signifier l'appartenance de s à S, on écrit $s \in S$. Toute collection désignée d'issues élémentaires, y compris les issues individuelles, l'espace d'échantillonnage entier et l'ensemble vide, constitue un *événement*. On dit que ce dernier se réalise si le résultat de l'expérience est l'un des membres de l'événement.

Exemple 1

Considérons l'expérience consistant à lancer une pièce trois fois. Quel est l'espace d'échantillonnage ? Quelles issues élémentaires constituent l'événement A : « La majorité des pièces montrent face » ?

Considérons chaque issue élémentaire comme un triplet ordonné, dont les composantes représentent respectivement les résultats du premier, du deuxième et du troisième lancer. Au total, il y a huit triplets différents, qui composent donc l'espace d'échantillonnage :

$$S = \{\text{FFF}, \text{FFP}, \text{FPF}, \text{PFF}, \text{FPP}, \text{PFP}, \text{PPF}, \text{PPP}\}$$

Par inspection, on voit que quatre des issues élémentaires de S constituent l'événement A :

$$A = \{\text{FFF}, \text{FFP}, \text{FPF}, \text{PFF}\}$$

Exemple 2

Imaginons le lancer de deux dés, le premier rouge et le second vert. Chaque issue élémentaire est une paire ordonnée (face visible sur le dé rouge, face visible sur le dé vert), et l'espace d'échantillonnage entier peut être représenté sous la forme d'une matrice 6×6 (voir figure 2.2.1).

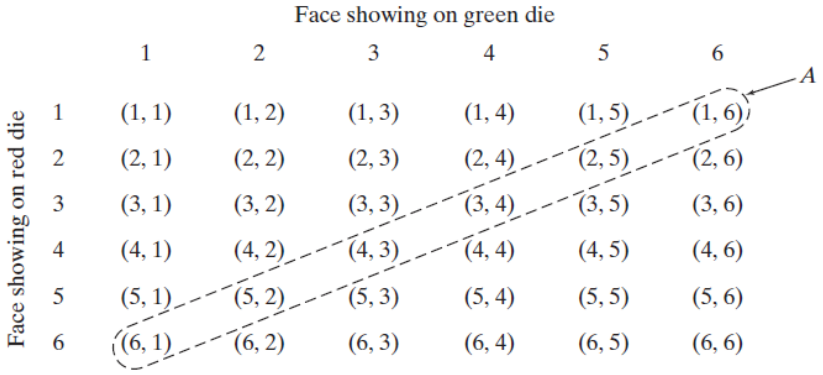


Figure 2.2.1

Les joueurs s'intéressent souvent à l'événement A selon lequel la somme des faces visibles vaut 7. On remarque dans la figure 2.2.1 que les issues élémentaires contenues dans A sont les six entrées de la diagonale : $(1,6)$, $(2,5)$, $(3,4)$, $(4,3)$, $(5,2)$ et $(6,1)$.

Exemple 3

Une station de télévision locale publie une annonce pour deux postes de présentateurs. Si trois femmes F_1, F_2, F_3 et deux hommes M_1, M_2 postulent, l'« expérience » consistant à embaucher deux co-présentateurs engendre un espace d'échantillonnage de dix issues :

$$S = \{\{F_1, F_2\},\ \{F_1, F_3\},\ \{F_2, F_3\},\ \{F_1, M_1\},\ \{F_1, M_2\},\ \{F_2, M_1\},\ \{F_2, M_2\},\ \{F_3, M_1\},\ \{F_3, M_2\},\ \{M_1, M_2\}\}$$

Cela a-t-il de l'importance ici que les deux postes à pourvoir soient équivalents ? Oui. Si la station cherchait à embaucher, par exemple, un commentateur sportif et un présentateur météo, le nombre d'issues possibles serait de vingt : (F_2, M_1), par exemple, représenterait une affectation différente de (M_1, F_2).

Exemple 4

Le nombre d'issues élémentaires associées à une expérience n'a pas besoin d'être fini. Supposons qu'une pièce soit lancée jusqu'à l'apparition de la première pile. Si le premier lancer est lui-même une pile, le résultat de l'expérience est P ; si la première pile apparaît au deuxième lancer, le résultat est FP ; et ainsi de suite. Théoriquement, bien sûr, la première pile peut ne jamais apparaître, et la nature infinie de S est immédiatement apparente :

$$S = \{\text{P},\ \text{FP},\ \text{FFP},\ \text{FFFP},\ \ldots\}$$

Exemple 5

Il existe trois façons d'indiquer l'espace d'échantillonnage d'une expérience. Si le nombre d'issues possibles est petit, on peut simplement les lister, comme nous l'avons fait dans les exemples 1 à 3. Dans certains cas, il peut être possible de caractériser un espace d'échantillonnage en montrant la structure que ses issues doivent nécessairement posséder. C'est ce que nous avons fait dans l'exemple 4.

Une troisième option consiste à énoncer une formule mathématique que les issues élémentaires doivent satisfaire.

Un programmeur exécute une sous-routine qui résout une équation du second degré générale $ax^2 + bx + c = 0$. Son « expérience » consiste à choisir des valeurs pour les trois coefficients a, b et c. Définir (1) S et (2) l'événement A : « L'équation a deux racines égales ».

Tout d'abord, nous devons déterminer l'espace d'échantillonnage. Puisque, présumément, aucune combinaison de a, b et c finis n'est inadmissible, nous pouvons caractériser S en écrivant une série d'inégalités :

$$S = \{(a, b, c) : -\infty < a < \infty,\ -\infty < b < \infty,\ -\infty < c < \infty\}$$

La définition de A nécessite le résultat bien connu d'algèbre selon lequel une équation du second degré a des racines égales si et seulement si son discriminant $b^2 - 4ac$ s'annule. L'appartenance à A est donc conditionnée par le fait que a, b et c satisfassent une équation :

$$A = \{(a, b, c) : b^2 - 4ac = 0\}$$

Cours de Probabilités pour Ingénieurs en Génie des Matériaux
Chapitre 1 : Analyse Combinatoire

Le dénombrement des espaces échantillonnaux finis

Cette section porte uniquement sur les résultats équiprobables. Pour être en mesure d'établir une probabilité selon $P(A) = n(A)/n$, il faut pouvoir déterminer la valeur de n, soit le nombre de résultats possibles, et celle de $n(A)$, soit le nombre de résultats favorables à l'événement A.

Lorsque l'expérience est très simple, comme le lancer de dés ou d'une pièce de monnaie, il est aisé d'établir le nombre de résultats possibles ou favorables. Par contre, si l'on s'intéresse à la probabilité d'obtenir au moins deux as lorsqu'on pige cinq cartes d'un jeu de cinquante-deux cartes, le contexte est beaucoup plus difficile à cerner. Il en va de même si on choisit au hasard des pièces d'une chaîne de production et qu'on souhaite quantifier la probabilité de non-obtention d'une pièce défectueuse.

Il faudra dans toutes ces situations faire appel à différentes **techniques de dénombrement** pour évaluer n et $n(A)$. Nous étudierons ici des diagrammes en arbre, du principe de multiplication, de permutations d'objets semblables et de combinaisons.

Les diagrammes en arbre

Dans le cas d'une expérience simple, la construction d'un diagramme en arbre peut s'avérer utile pour le dénombrement des résultats possibles ou favorables. Dans l'exemple 1.9, dans lequel on lance à trois reprises une pièce de monnaie, la figure 6 montre le diagramme en arbre représentant les huit résultats possibles. On y observe les huit résultats de l'espace échantillonnal $\mathscr{S}$ que sont PPP, PPF, PFP et FFP sont considérés.

On a donc un total de $2^3 = 8$ résultats {PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF}.

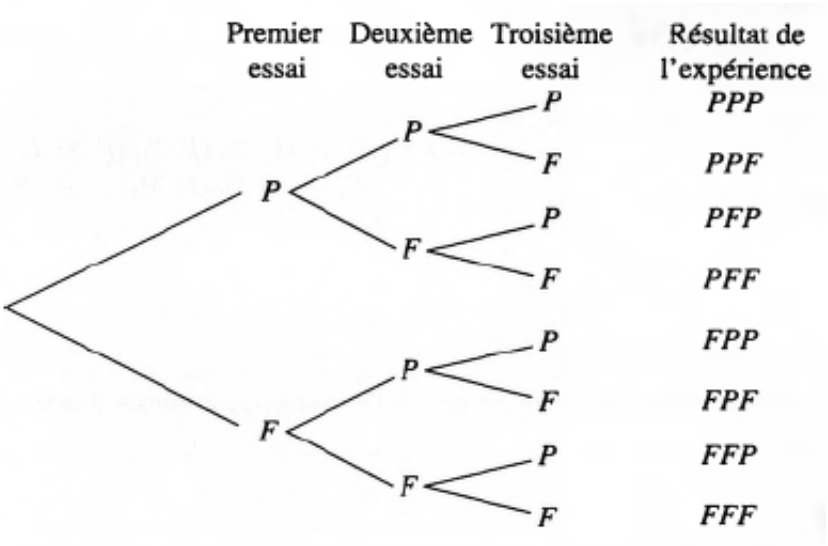


FIGURE 1 – Le diagramme en arbre d'une expérience dans laquelle on lance à trois reprises une pièce équilibrée

Le principe de multiplication

Si les ensembles A_1, A_2, ..., A_k comptent respectivement n_1, n_2, ..., n_k éléments, il existe $n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$ façons de choisir un élément de A_1, puis un élément de A_2, ..., et ainsi de suite jusqu'à un élément de A_k.

Principe de multiplication
Supposons une expérience $\mathscr{E}$ composée de k étapes, et que :

- Il y a n_1 façons de réaliser l'étape 1 :
- Il y a n_2 façons de réaliser l'étape 2 (pour chaque issue de l'étape 1) ;
- etc. ;
- Il y a n_k façons de réaliser l'étape k (pour toutes les issues des étapes précédentes).

Alors, l'espace échantillonnal de $\mathscr{E}$ contiendra $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$ résultats possibles. Si à chaque étape de l'expérience les n_i issues sont équiprobables, alors les $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$ résultats ont la même probabilité.

Dans le cas particulier où $n_1 = n_2 = \cdots = n_k = n$, il y a n^k choix possibles. Cette situation a été observée à la figure 1.8.

Exemple 1.27

Imaginons qu'une pièce et un dé équilibrés. Les deux résultats possibles de l'étape 1, soit $\{P, F\}$, sont indépendants des six résultats possibles de l'étape 2, soit $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, d'où $n_1 = 2, n_2 = 6$, et l'ensemble des résultats possibles est constitué de $2 \times 6 = 12$ résultats. On peut dresser à l'annexe un diagramme en arbre semblable à la figure 7 pour l'énumération.

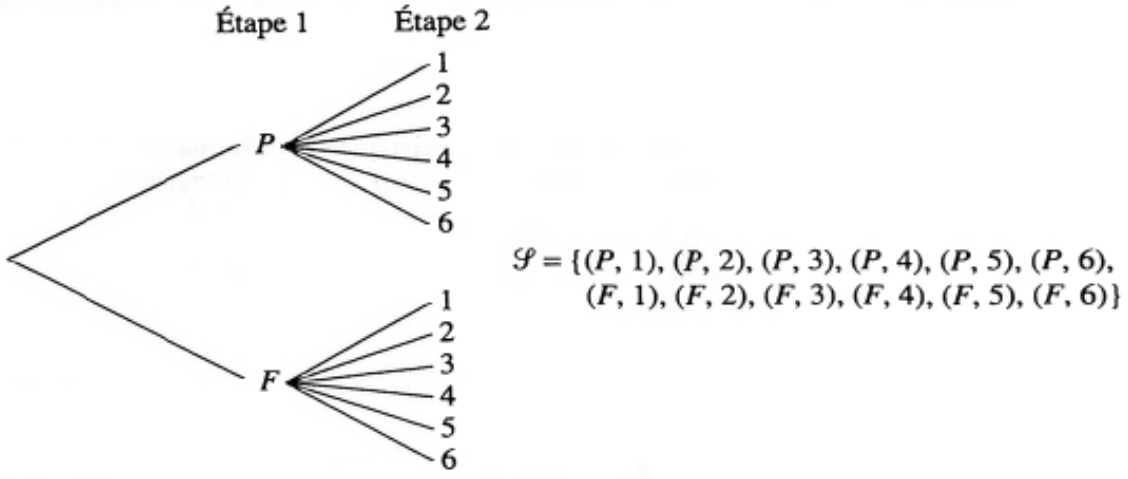


FIGURE 2 – Le diagramme en arbre associé à l'expérience en deux étapes de l'exemple 1.27

Exemple 1.28

Soit un processus de production où l'inspection en cours de fabrication est très limitée. Une fois les produits finis, on les achemine à une aire d'examen où quatre personnes en vérifient chacune une caractéristique différente. La première de ces personnes attribue aux unités produites l'une ou l'autre de quatre cotes ; la deuxième, l'une ou l'autre de trois cotes ; et les deux autres, l'une ou l'autre de deux cotes chacune. Chaque personne inscrit sur l'étiquette d'identification du produit la cote attribuée selon la caractéristique examinée.
Il y a un total de $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 48$ inscriptions possibles pour une unité donnée.

Les permutations

Permutation
Une permutation de n éléments distincts consiste en une liste ordonné de tous les n éléments.

Considérons l'exemple de trois jetons se distinguant chacun par une lettre différente, a, b, c.Voici toutes les permutations possibles de ces jetons :

abc acb bac bca cab cba

Puisqu'il y a trois lettres possibles à la première position, puis deux lettres restantes pour la deuxième position, et enfin une seule lettre pour la troisième position, le principe de multiplication nous permet de vérifier qu'il y a $3 \times 2 \times 1 = 3! = 6$ permutations possibles au total.

Dans le cas de n objets distincts, on aura $n!$ permutations possibles.

Permutations de n objets distincts Le nombre de permutations possibles de n objets distincts correspond à :

$$P^n = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \times 1 = n!$$

Prenos le cas où on cherche le nombre de permutations des lettres A, A, B. On a 3

lettres à permuter mais 2 de ces lettres sont A. On peut pas distinguer entre elles, alors les permutations sont :

AAB ABA BAA

donc le nombre de permutations est 3.

Permutations de n objets pas tous distincts Dans le cas où n_1 des objets sont indiscernables parmi les n objets à permuter, le nombre de permutations possibles est

$$P_{n_1}^n = \frac{n!}{n_1!}$$

S'il y a encore n_1 objets indiscernables, et n_1 objets indiscernables, ..., n_k objets indiscernables, alors le nombre de permutations possibles correspond à :

$$P_{n_1,n_2,\ldots,n_k}^n = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

Par exemple, le nombre de permutations possibles pour les lettres du mot TENESSEE est $P_{n_E,n_S}^n = P_{4,2}^8 = \frac{8!}{4!2!} = 840$. C'est-à-dire qu'on peut former 840 mots distincts de 8 lettres en changeant l'ordre des lettres.

Les arrangements

Dans le premier exemple du lancer d'une pièce de monnaie trois fois, on a obtenu le nombre de possibilités par 2^3. Ceci se généralise pour une expérience à n résultats répétée p fois : n^p.

Arrangement avec répétition
Le nombre d'arrangements avec répétition de p éléments parmi n objets est donné par la formule :

$$A_p^n = n^p$$

On a un autre cas d'arrangement :

Arrangement sans répétition
Un arrangement sans répétition consiste en une liste ordonné d'objets distincts. Deux arrangements diffèrent l'une de l'autre si leur contenu n'est pas le même ou si leurs éléments sont ordonnés différemment.

Considérons l'exemple de quatre jetons se distinguant chacun par une lettre différente, a, b, c ou d.Voici tous les arrangements de ces jetons pris un à la fois :

a
b
c
d.

Voici tous les arrangements de ces jetons pris deux à la fois :

Puisqu'il y a quatre lettres possibles à la première position, puis trois lettres restantes pour la deuxième position, le principe de multiplication nous aurait permis de vérifier que le nombre d'arrangements possibles est $4 \times 3 = 12$. Notons que les arrangements ab et ba

ab	*bc*
ba	*cb*
ac	*bd*
ca	*db*
ad	*cd*
da	*dc.*

diffèrent l'une de l'autre parce que leurs éléments ne sont pas dans le même ordre, tandis que les arrangements ac et ab diffèrent l'une de l'autre parce que leur contenu n'est pas le même.

Prenons le cas de n objets distincts à partir desquels on veut obtenir des arrangements de r objets ($r \leq n$). Le choix du premier objet a n résultats possibles, le choix du deuxième, $(n-1)$ résultats possibles, et ainsi de suite jusqu'au choix du r-ième, qui a $[n-(r-1)]$ résultats possibles. L'application du principe de multiplication nous permet d'établir la formule générale suivante.

Arrangements de r objets choisis parmi n objets
Le nombre d'arrangements (sans répétition) possibles de r objets distincts choisis parmi n objets distincts correspond à :

$$\overline{A}_n^r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Soulignons que $\overline{A}_n^n = P^n = n!$ et que $0! = 1$.

Exemple 1.29

Une équipe de baseball des ligues majeures compte en général 25 joueurs. La formation à l'attaque se compose de 9 de ces joueurs dans un ordre donné. Il y a donc $A_9^{25} = 7,41 \cdot 10^{11}$ formations possibles.

Les combinaisons

Combinaison
Une combinaison consiste en un arrangement d'objets distincts et ne diffère d'une autre que si son contenu n'est pas le même. L'ordre n'a ici aucune importance.

Voici toutes les combinaisons possibles de deux jetons pris parmi quatre jetons qui portent chacun une lettre différente, a, b, c ou d :

— ab
— ac
— ad
— bc
— bd
— cd

Puisqu'il y a $2! = 2$ façons de permuter deux objets, la liste des combinaisons est deux fois plus courte que la liste des permutations de deux objets choisis parmi quatre.

Combinaisons de r objets choisis parmi n objets
Le nombre de combinaisons de r objets distincts choisis parmi n objets distincts est défini par

$$C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{\overline{A}_n^r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad (1.3)$$

Pour nos besoins actuels, on a défini le terme $\binom{n}{r}$ dans les cas où n et r sont des nombres entiers tels que $0 \leq r \leq n$. Ce terme peut toutefois être défini de façon générale pour un nombre réel n et tout nombre entier non négatif r. On peut aussi écrire

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!}$$

Le terme $\binom{n}{r}$ porte le nom de « coefficient binomial » en raison de son utilisation dans le théorème du binôme :

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^r b^{n-r}. \qquad (1.4)$$

Exemple 1.30

Une équipe de l'Association nationale de basketball (NBA) compte habituellement 12 joueurs. La formation partante se compose de 5 de ces joueurs dont l'ordre n'a pas d'importance. Il y a, par conséquent,

$$\binom{12}{5} = \frac{12!}{5!7!} = 792$$

formations partantes possibles.

Voici deux identités utiles pour la résolution de problèmes :

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \qquad (1.5)$$

et

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} \qquad (1.6)$$

On peut expliquer le résultat de l'équation 1.5 en posant

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = \binom{n}{n-r}$$

ou en remarquant que le nombre de façons de « choisir » r objets parmi n est équivalent au nombre de façons d'« exclure » $n-r$ objets parmi n. Le résultat de l'équation 1.6 se justifie mathématiquement en développant le membre de droite et en regroupant les termes semblables.

Le nombre de sous-ensembles possibles

Un ensemble fini de n éléments comprend 2^n sous-ensembles. On peut le vérifier à l'aide du principe de multiplication en considérant que chaque élément peut être présent ou absent d'un sous-ensemble donné (2 possibilités). On a donc un total de $2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$ sous-ensembles possibles. On peut aussi le vérifier à partir du théorème du binôme (*voir l'équation 1.4*) en utilisant $a = b = 1$, comme suit :

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$$

Le membre de droite de cette relation indique le nombre total de sous-ensembles, puisque $\binom{n}{0}$ représente le nombre de sous-ensembles vides, $\binom{n}{1}$ le nombre de sous-ensembles formés d'un élément, et ainsi de suite jusqu'à $\binom{n}{n}$, qui représente le nombre de sous-ensembles formés de n éléments. On appelle parfois « ensemble-puissance » l'ensemble contenant tous les sous-ensembles possibles d'un ensemble d'éléments.