



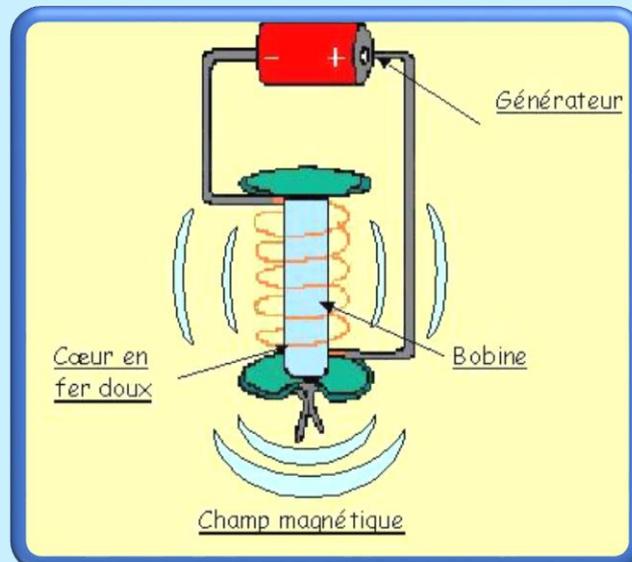
جامعة وهران للعلوم و التكنولوجيا محمد بوضياف



Université des Sciences et de la Technologie d'Oran « Mohamed Boudiaf »

Faculté de Génie Électrique
Département d'Électrotechnique

Polycopié d'Électromagnétisme Avec exercices pour Master & Licence



Préparé par Dr *REMAOUN Sidi Mohammed*

Année Universitaire 2014-2015

Préambule

Ce polycopié a été conçu à l'intention des étudiants de la filière d'électrotechnique des deux niveaux licence (L2 et L3) ainsi que ceux de Master (M1 et M2).

Les objectifs assignés par ce programme portent sur l'approfondissement et la consolidation des notions d'électromagnétisme acquises par les étudiants au cours de leur première année et deuxième licence à l'université. Ce programme est destiné également à fournir aux étudiants les outils physiques et mathématiques prérequis par les modules enseignés en troisième année licence à l'électromagnétisme. Ainsi, Ce polycopié essaie de répondre au mieux aux recommandations du programme officiel.

Avant d'entamer et de le détailler, il nous a semblé nécessaire de consacrer le premier chapitre à l'analyse vectorielle pour introduire les opérateurs utilisés classiquement en électromagnétisme. L'électrostatique est étudiée dans le second chapitre. Les phénomènes électrostatiques sont introduits à partir de la loi de Coulomb et du principe de superposition. Le *Théorème de Gauss* est démontré en calculant la divergence du champ électrique défini à partir de la *Loi de Coulomb*; nous avons préféré cette démarche à la méthode qui utilise la notion d'angle solide car elle permet aux étudiants de manipuler les opérateurs vectoriels et de saisir la notion de localité des expressions.

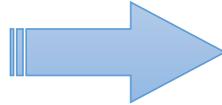
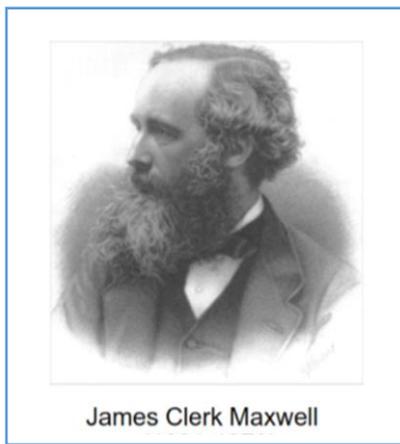
Le chapitre suivant consacré à la magnétostatique débute par une définition du vecteur densité de courant. La décomposition de la *Force de Lorentz* en deux composantes permet de définir le champ magnétique. Nous avons préféré commencer ce chapitre par le *Théorème d'Ampère*; la *loi de Biot-Savart* est décrite comme une conséquence des propriétés du champ magnétique et du potentiel vecteur associé.

Le régime variable introduit *Les équations de Maxwell* sous la forme d'une généralisation des équations locales obtenues en régime stationnaire. Après une présentation des phénomènes d'induction électromagnétique, la notion de courant de déplacement est introduite comme une nécessité permettant de respecter la relation de continuité. Les équations aux dérivées partielles pour le champ électrique et le champ magnétique sont obtenues à partir des équations de Maxwell. Les potentiels, scalaire et vecteur, ainsi que la condition de jauge sont également présentés dans ce chapitre qui se termine par l'approximation du régime quasi-stationnaire.

Enfin, les propriétés électromagnétiques des matériaux sont présentées assez brièvement dans le dernier chapitre.

Equations De Maxwell, toute l'électricité est là !!

Les phénomènes électriques et magnétiques ont tout d'abord été étudiés séparément par plusieurs physiciens de renom, dont les principaux sont **Franklin** (1706 – 1790), **Coulomb** (1736 – 1806) **Oested** (1775 – 1851), **Ampère** (1775 – 1836), **Gauss** (1777 – 1855) et **Faraday** (1791 – 1867). C'est cependant à **Maxwell** (1831 – 1879) que l'on doit la formulation la plus complète des relations liant entre elles les grandeurs électriques et magnétiques. Les équations de Maxwell spécifient que toute variation spatiale d'un champ électrique ou magnétique en un point de l'espace entraîne ou est due à l'existence, ou la variation temporelle, d'un autre champ au même point de l'espace. Il s'agit là de leur forme locale, ou encore différentielle.



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div} \vec{D} &= \rho \\ \text{div} \vec{B} &= 0 \\ \overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\end{aligned}$$

Table des symboles

Symbole	Unités	Description
c	ms^{-1}	Vitesse de la lumière dans le vide
ϵ_0	Fm^{-1}	Permittivité du vide
μ_0	Hm^{-1}	Perméabilité du vide
ϵ_r		Permittivité relative
ϵ	Fm^{-1}	Permittivité absolue
μ_r		Perméabilité relative
μ	Hm^{-1}	Perméabilité absolue
γ	Sm^{-1}	Conductivité électrique
ρ	Cm^{-3}	Densité volumique de charges électriques
σ	Cm^{-2}	Densité surfacique de charges électriques
ρ_p	Cm^{-3}	Densité volumique de charges de polarisation
\vec{j}	Am^{-2}	Vecteur densité volumique de courant
\vec{j}_D	Am^{-2}	Vecteur densité volumique de courant de déplacement
\vec{j}_T	Am^{-2}	Vecteur densité volumique de courant total
\vec{j}_S	Am^{-1}	Vecteur densité de courant surfacique
\vec{E}	Vm^{-1}	Champ électrique
\vec{B}	T	Champ magnétique
\vec{D}	Cm^{-2}	Vecteur excitation électrique
\vec{H}	Am^{-1}	Vecteur excitation magnétique
\vec{A}	Wbm^{-1}	Potentiel-vecteur
U	V	Potentiel scalaire

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre 1 : Eléments d'analyse vectorielle	7
1.1 Champ scalaire - Champ vectoriel	7
1.2 Gradient d'un champ scalaire	7
1.3 Divergence d'un champ vectoriel	7
1.4 Rotationnel d'un champ vectoriel	7
1.5 Laplacien scalaire	7
1.6 Laplacien vectoriel	8
1.7 Opérateur nabla	8
1.8 Théorème de Stokes-Théorème de Gauss	9
1.8.1 Circulation d'un champ vectoriel	9
1.8.2 Flux d'un champ vectoriel	9
1.8.3 Théorème de Stokes	9
1.8.4 Théorème de Gauss-Ostrogradski (ou théorème de la divergence)	9
1.9 Exercices corrigés	10
Chapitre 2 : Electrostatique	14
2.1 La loi de Coulomb	14
2.2 Le champ électrique	14
2.3 Principe de superposition	14
2.3.1 Champ électrique créé par une distribution linéique de charges électriques	15
2.3.2 Champ électrique créé par une distribution surfacique de charges électriques	15
2.3.3 Champ électrique créé par une distribution volumique de charges électriques	15
2.4 Propriétés du champ électrostatique	15
2.4.1 Le potentiel électrostatique	15
2.4.2 Topographie d'un champ électrique	17
2.4.3 Le théorème de Gauss	19
2.4.4 Le vecteur excitation électrique \vec{D}	22
2.4.5 Equation de Poisson - Equation de Laplace	22
2.5 En résumé	23
2.6 Exemples de calcul	23
Chapitre 3 : Electrocinétiq ue et magnéto statique	34
3.1 Electrocinétiq ue - Vecteur densité de courant	34
3.2 Magnéto statique	34
3.2.1 Introduction	35
3.2.2 Le champ magnétique	35
3.2.3 Le vecteur excitation magnétique	36
3.2.4 Potentiel vecteur \vec{A}	37
3.2.5 La loi de Biot-Savart	38
3.3 En résumé	41
3.4 Exemples de calcul	41
Chapitre 4 : Le régime variable	60
4.1 Introduction	60
4.2 L'induction électromagnétique	60
4.2.1 La loi de Lenz	60
4.2.2 Loi de Faraday	61
4.2.3 Equation de Maxwell-Faraday	61
4.3 Le théorème de Maxwell-Ampère	62
4.3.1 Le phénomène de capacité	62
4.3.2 Le vecteur densité de courant de déplacement	63

4.3.3	Le théorème de Maxwell-Ampère.	64
4.3.4	Equation de continuité	64
4.4	Les équations de Maxwell.	65
4.4.1	Les hypothèses de Maxwell	65
4.4.2	En résumé	66
4.5	Equations pour \vec{E} et \vec{B}	66
4.6	Introduction des potentiels	68
4.6.1	Potentiel scalaire. Potentiel vecteur	68
4.6.2	Equations des potentiels. Jauge de Lorentz.	69
4.7	Le champ électromoteur.	70
4.7.1	F.é.m induite dans un circuit	71
4.7.2	Induction de Lorentz, Induction de Newman	71
4.8	Approximation des états quasi-stationnaires.	71
4.8.1	Introduction	71
4.8.2	Phénomène d'induction	72
4.8.3	Phénomène de capacité	72
4.8.4	Phénomène de propagation	72
4.8.5	Equations des états quasi-stationnaires	72
4.9	Exercices.	73
Chapitre 5 : Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide		83
5.1	Equations de propagation pour \vec{E} et \vec{B}	83
5.2	L'onde plane progressive sinusoïdale	83
5.2.1	Relation de dispersion.	83
5.2.2	Structure de l'onde uniforme plane.	84
5.3	Polarisation	84
5.3.1	Onde de polarisation rectiligne	85
5.3.2	Onde de polarisation quelconque	86
5.4	Energie électromagnétique : vecteur de Poynting	87
5.4.1	Onde de forme spatiale et temporelle quelconques	87
5.4.2	Onde plane progressive et uniforme sinusoïdale	88
5.5	Relations de passage	89
5.6	Réflexion en incidence normale sur un conducteur parfait	90
Chapitre 6 : Les équations de Maxwell dans les milieux		93
6.1	Propriétés électromagnétiques des milieux matériels	93
6.1.1	Polarisation d'un milieu matériel.	93
6.1.2	Conducteurs	96
6.1.3	Milieux aimantés	96
6.1.4	Equations de Maxwell dans les milieux matériels, homogènes, linéaires et isotropes.	100
6.2	Relations de passage	101
6.3	Propagation dans les milieux diélectriques	102
A : Rappel des points importants		104
B : Relations utiles & Opérateurs vectoriels en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques		109
C : Propriétés de symétrie		111
Bibliographie		113

CHAPITRE 1

ELÉMENTS D'ANALYSE VECTORIELLE

1.1 Champ scalaire - Champ vectoriel

Soit un trièdre orthonormé $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et M un point de l'espace, de coordonnées (x, y, z) :

$$\vec{OM} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z \quad (1.1)$$

La fonction $f(M)$ est dite fonction scalaire de point ou champ scalaire si :

$$f(M) = f(x, y, z) \quad (1.2)$$

Le vecteur $\vec{v}(M)$ est dite fonction vectorielle de point ou champ vectoriel si :

$$\vec{v}(M) = v_x(x, y, z) \vec{e}_x + v_y(x, y, z) \vec{e}_y + v_z(x, y, z) \vec{e}_z \quad (1.3)$$

1.2 Gradient d'un champ scalaire

Le gradient (noté \overrightarrow{grad}) est défini à partir d'une fonction scalaire de point et a pour composantes suivant les dérivées partielles de $f(M)$ par rapport à x, y et z respectivement :

$$\overrightarrow{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z \quad (1.4)$$

1.3 Divergence d'un champ vectoriel

La divergence (notée div) n'est définie qu'à partir d'une fonction vectorielle $\vec{v}(M)$ de point et donne une fonction scalaire de point définie, en coordonnées cartésiennes par :

$$div(\vec{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (1.5)$$

1.4 Rotationnel d'un champ vectoriel

Le rotationnel (noté \overrightarrow{rot}) d'un champ vectoriel donne une fonction vectorielle de point définie en coordonnées cartésiennes par :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{v}) = \left[\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right] \vec{e}_x + \left[\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right] \vec{e}_y + \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right] \vec{e}_z \quad (1.6)$$

1.5 Laplacien scalaire

Le laplacien scalaire d'une fonction scalaire de point (noté lap ou Δ) est par définition un champ scalaire défini par :

$$\Delta f = div[\overrightarrow{grad}(f)] \quad (1.7)$$

Où dans le cas des coordonnées cartésiennes, on obtient :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (1.8)$$

1.6 Laplacien vectoriel

Le laplacien vectoriel (noté $\vec{\Delta}$) d'un champ vectoriel \vec{v} est un champ vectoriel défini par :

$$\vec{\Delta}\vec{v} = \overrightarrow{grad}[div(\vec{v})] - \overrightarrow{rot}[\overrightarrow{rot}(\vec{v})] \quad (1.9)$$

Dans le cas d'un système de coordonnées cartésiennes, la laplacien vectoriel a pour composantes :

$$\vec{\Delta}\vec{v} \begin{cases} \Delta v_x = \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \\ \Delta v_y = \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \\ \Delta v_z = \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \end{cases} \quad (1.10)$$

1.7 Opérateur nabla

Pour écrire de manière plus compacte les opérateurs vectoriels précédemment définis, on introduit un vecteur symbolique appelé opérateur nabla et défini par :

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.11)$$

Les opérateurs vectoriels s'écrivent parfois à l'aide de l'opérateur nabla sous les formes respectives suivantes :

- Le gradient d'un champ scalaire f est noté

$$\overrightarrow{grad}(f) = \vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z \quad (1.12)$$

- La divergence d'un champ vectoriel est notée

$$div(\vec{v}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (1.13)$$

- Le rotationnel d'un champ vectoriel est noté

$$\overrightarrow{rot}(\vec{v}) = \vec{\nabla} \times \vec{v} = \left[\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right] \vec{e}_x + \left[\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right] \vec{e}_y + \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right] \vec{e}_z \quad (1.14)$$

- Le laplacien scalaire d'un champ scalaire est noté

$$\Delta f = div[\overrightarrow{grad}(f)] = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}f = \nabla^2(f) \quad (1.15)$$

Ou ∇^2 se lit « del de »

- Le laplacien vectoriel d'un champ de vecteurs est noté

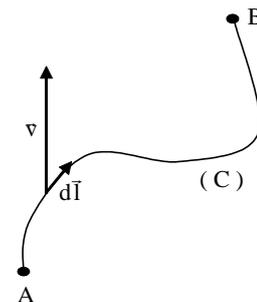
$$\nabla^2 \vec{v} = \vec{\Delta}\vec{v} = \overrightarrow{grad}[div(\vec{v})] - \overrightarrow{rot}[\overrightarrow{rot}(\vec{v})] = \vec{\nabla}\vec{\nabla} \cdot (\vec{v}) - \vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{v}] \quad (1.16)$$

1.8 Théorème de Stokes-Théorème de Gauss

1.8.1 Circulation d'un champ vectoriel

On définit la circulation d'un vecteur \vec{v} le long d'un contour (C) , par l'intégrale curviligne :

$$C_{\overline{AB}}(\vec{v}) = \int_{\overline{AB}} \vec{v} \cdot d\vec{l} \quad (1.17)$$

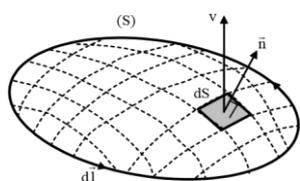


La circulation de long d'un contour fermé est notée :

$$C(\vec{v}) = \oint \vec{v} \cdot d\vec{l} \quad (1.18)$$

1.8.2 Flux d'un champ vectoriel

On définit le flux d'un vecteur \vec{v} à travers une surface (s) par l'intégrale double :



$$\phi_{/(S)} \vec{v} = \iint_{(S)} \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad (1.19)$$

Lorsque la surface (S) est fermée, le vecteur unitaire \vec{n} est dirigé de l'intérieur vers l'extérieur.

1.8.3 Théorème de Stockes

La circulation d'un vecteur le long d'un contour fermé (C) limitant une surface (S) est égal au flux de son rotationnel à travers cette surface.

$$C(\vec{v}) = \phi_{/(S)}(\overrightarrow{rot}(\vec{v})) \quad (1.20)$$

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \overrightarrow{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n} dS \quad (1.21)$$

Le vecteur unitaire \vec{n} est orienté selon la convention du tire-bouchon de Maxwell.

1.8.4 Théorème de Gauss-Ostrogradski (ou théorème de la divergence)

Le flux d'un champ vectoriel à travers une surface fermée (S) est égal à l'intégrale de sa divergence dans le volume (τ) limité par la surface fermée (S) :

$$\oiint_{(S)} \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \iiint_{(\tau)} div(\vec{v}) d\tau \quad (1.22)$$

Exercices résolus

Exercice.1 :

Montrer que le gradient d'un champ de scalaire U est à circulation conservative.

Exercice.2 :

Montrer que le rotationnel d'un champ de vecteurs \vec{W} est un champ à flux conservatif.

Exercice.3 :

Soit un champ de scalaires U défini dans tout l'espace noté par :

$$dU = \frac{\partial U}{\partial r} dr + \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial U}{\partial \phi} d\phi$$

La différentielle de U .

1. Exprimer dU en fonction de l'opérateur gradient.
2. Donner l'expression du déplacement élémentaire \vec{dr} en coordonnées sphériques.
3. A partir de l'expression mathématique de la différentielle de U et de son expression en fonction du gradient, en déduire les trois composantes scalaires U dans le système des coordonnées sphériques.

Exercice.4 :

On se propose d'étudier la composante orthoradiale (suivant \vec{u}_θ) du rotationnel d'un champ de vecteurs \vec{W} dans le système des coordonnées cylindriques.

1. Que représente l'opérateur divergence du champ de vecteurs \vec{W} en termes de circulation ?
2. Quel est le contour adapté à l'étude de la composante orthoradiale de l'opérateur rotationnel ?
3. En déduire l'expression de cette composante orthoradiale.

Solutions

Exercice :1

Montrons que la circulation de $\vec{grad}U$ entre deux points A et B ne dépend pas du chemin suivi entre ces deux points.

1- Soit un contour fermé Γ sur lequel est défini en tout point $\vec{grad}U$. La circulation de ce vecteur le long du contour fermé Γ s'écrit $\oint_{\Gamma} \vec{grad}U \cdot \vec{dr}$ où \vec{dr} représente un déplacement élémentaire le long du contour.

Or, par définition, $dU = \vec{grad}U \cdot \vec{dr}$.

Donc, $\oint_{\Gamma} \vec{grad}U \cdot \vec{dr} = \oint_{\Gamma} dU = 0$, puisque le contour est fermé.

2- Soit maintenant deux lignes Γ_1 et Γ_2 quelconques reliant deux points A et B de l'espace et orientés de A vers B. Leur réunion ferme un contour fermé Γ le long duquel la circulation du vecteur gradient est nulle.

$$\begin{aligned}
0 &= \oint_{\Gamma} \overrightarrow{\text{grad}}U \cdot \overrightarrow{dr} = \oint_{\Gamma_1} \overrightarrow{\text{grad}}U \cdot \overrightarrow{dr} + \oint_{\Gamma_2} \overrightarrow{\text{grad}}U \cdot \overrightarrow{dr} \\
&= \oint_{\Gamma_1} \overrightarrow{\text{grad}}U \cdot \overrightarrow{dr_1} + \oint_{\Gamma_2} \overrightarrow{\text{grad}}U \cdot (-\overrightarrow{dr_2})
\end{aligned}$$

D'où en déduit

$$\oint_{\Gamma_1} \overrightarrow{\text{grad}}U \cdot \overrightarrow{dr_1} = \oint_{\Gamma_2} \overrightarrow{\text{grad}}U \cdot \overrightarrow{dr_2}$$

Conclusion : la circulation du gradient ne dépend pas du chemin suivie entre les points A et B, c'est donc un vecteur à *circulation conservative*.

■ **Exercice :2**

Montrons que le flux de $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{W}$ à travers deux surfaces quelconques s'appuyant sur un même contour est égal.

1- Soit deux surfaces distinctes S_1 et S_2 s'appuyant sur le contour fermé Γ , leur réunion formant une surface S fermée. Ainsi le flux de $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{W}$ à travers la surface fermée S s'écrit $\oiint_S \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{W} \cdot d\vec{S}$, où $d\vec{S} = \vec{n} dS$ représente un élément de surface S et \vec{n} sa normale.

De même, le flux de $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{W}$ à travers la surface ouverte S_1 s'écrit $\iint_{S_1} \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{W} \cdot d\vec{S}_1$ où $d\vec{S}_1 = \vec{n}_1 \cdot dS$ représente un élément de surface S_1 et \vec{n}_1 la normale respective.

Alors que d'après la formule d'Ostrogradsky,

$$\oiint_S \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{W} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div}(\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{W}) dV, \text{ où } V \text{ représente le volume délimité par la surface fermée } S.$$

Or on sait que $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{W}) = 0$. Ceci conduit à $\oiint_S \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{W} \cdot d\vec{S} = 0$.

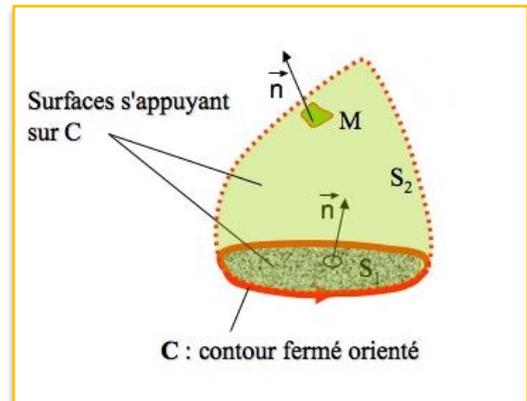
2- La surface S est orientée vers l'extérieur du volume, alors que les surfaces S_1 et S_2 sont orientées par le contour comme indiqué sur le schéma, avec $d\vec{S}_1 = d\vec{S}$ et $d\vec{S}_2 = -d\vec{S}$. D'où

$$\begin{aligned}
0 &= \oiint_S \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{W} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{W} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{W} \cdot d\vec{S} \\
&= \iint_{S_1} \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{W} \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{W} \cdot (-d\vec{S}_2)
\end{aligned}$$

On en conclut que :

$$\iint_{S_1} \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{W} \cdot d\vec{S}_1 = \iint_{S_2} \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{W} \cdot d\vec{S}_2$$

Conclusion : le flux du rotationnel ne dépend pas de surface ouverte s'appuyant sur le contour S , c'est donc un vecteur à *flux conservatif*.



■ **Exercice :3**

a) Par définition, si on considère un déplacement élémentaire $d\vec{r}$ le long d'un contour quelconque : $\overrightarrow{\text{grad}}U \cdot d\vec{r} = dU$

b) En coordonnées sphériques, le déplacement élémentaire $d\vec{r}$ s'écrit :

$$d\vec{r} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta \vec{u}_\phi$$

c) D'après l'énoncé,

$$dU = \frac{\partial U}{\partial r} dr + \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial U}{\partial \phi} d\phi$$

Or, par définition, $\overrightarrow{\text{grad}}U \cdot d\vec{r} = dU$ avec

$$\overrightarrow{\text{grad}}U = \overrightarrow{\text{grad}}U)_r \vec{u}_r + \overrightarrow{\text{grad}}U)_\theta \vec{u}_\theta + \overrightarrow{\text{grad}}U)_\phi \vec{u}_\phi, \text{ on a:}$$

$$\begin{aligned} dU &= \overrightarrow{\text{grad}}U)_r dr + \overrightarrow{\text{grad}}U)_\theta r d\theta + \overrightarrow{\text{grad}}U)_\phi r \sin \theta \\ &= \frac{\partial U}{\partial r} dr + \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial U}{\partial \phi} d\phi \end{aligned}$$

Ainsi, par identification, on obtient :

$\overrightarrow{\text{grad}}U)_r = \frac{\partial U}{\partial r}$	$\overrightarrow{\text{grad}}U)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta}$	$\overrightarrow{\text{grad}}U)_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \phi}$
--	--	--

■ **Exercice :4**

1- Pour un contour fermé Γ , la formule de Stokes permet d'écrire :

$$\oint_{\Gamma} \vec{W} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot } \vec{W} \cdot d\vec{S}$$

Où S est une surface ouverte quelconque s'appuyant sur le contour Γ . **Le flux du rotationnel de \vec{W} à travers une surface élémentaire est donc égal à la circulation du vecteur \vec{W} le long du contour sur lequel s'appuie cette surface.**

1. On cherche les composantes orthoradiales du rotationnel de \vec{W} . Pour cela, il faut donc considéré une surface orientée de normale \vec{u}_θ , c'est-à-dire par exemple la surface représentée en vert sur le schéma ci-dessus. Le contour adapté est alors le contour Γ représenté en vert.

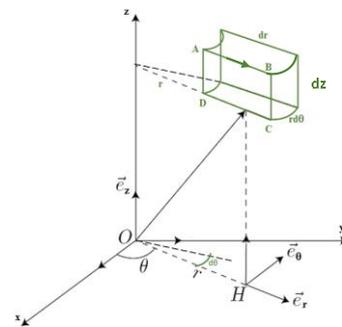
2. On suppose que le contour élémentaire a des dimensions faibles, de sorte que l'on peut considérer que $\vec{W} \cdot d\vec{l} = W_i dl$, où W_i représente la composante du vecteur \vec{W} dans la direction du vecteur $d\vec{l}$.

Afin de calculer la circulation, on a orienté le contour dans le sens ABCD indiqué sur le schéma. On trouve :

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \vec{W} \cdot d\vec{l} &= \vec{W} \cdot \overrightarrow{AB} + \vec{W} \cdot \overrightarrow{BC} + \vec{W} \cdot \overrightarrow{CD} + \vec{W} \cdot \overrightarrow{DA} \\ &= W_r(r, \theta, z + dz) dr - W_z(r + dr, \theta, z) dz \\ &\quad - W_r(r, \theta, z) dr + W_z(r, \theta, z) dz \end{aligned}$$

Or,

$$\frac{W_z(r + dr, \theta, z) - W_z(r, \theta, z)}{dr} = \frac{\partial W_z}{\partial r}(r, \theta, z)$$



$$\frac{W_r(r, \theta, z + dz) - W_r(r, \theta, z)}{dz} = \frac{\partial W_r}{\partial z}(r, \theta, z)$$

On en déduit que :

$$\oint_{\Gamma} \vec{W} \cdot d\vec{l} = \left(\frac{\partial W_r}{\partial z}(r, \theta, z) - \frac{\partial W_z}{\partial r}(r, \theta, z) \right) dr dz$$

Comme

$$\oint_{\Gamma} \vec{W} \cdot d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}} \vec{W} \cdot d\vec{S} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}} \vec{W} \cdot dS \vec{u}_\theta = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{W})_\theta dr dz$$

On en conclut :

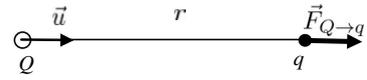
$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{W})_\theta = \frac{\partial W_r}{\partial z}(r, \theta, z) - \frac{\partial W_z}{\partial r}(r, \theta, z)$$

CHAPITRE 2

ELECTROSTATIQUE

2.1 La loi de Coulomb

Deux particules chargées, q et Q et placées dans le vide exercent l'une sur l'autre une force appelée force d'interaction électrique. La force exercée par la charge Q sur la charge est donnée par la loi de Coulomb :



$$\vec{F}_{Q \rightarrow q} = \frac{q Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} \quad (2.1)$$

Où \vec{u} est le vecteur unitaire qui pointe de la position de Q vers la position de q ; r représente la distance séparant les deux charges alors que la permittivité du vide est donnée par :

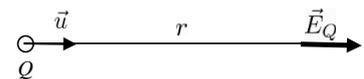
$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \times 10^{-9}} = 8.854187817 \times 10^{-12} \text{ Fm}^{-1} \quad (2.2)$$

2.2 Le champ électrique

La présence de la charge Q dans une région de l'espace crée dans cette région un champ électrique noté \vec{E}_Q qui est mis en évidence par la force agissant sur la charge q ; ce qui peut se traduire par la relation :

$$\vec{F}_{Q \rightarrow q} = q \vec{E}_Q \quad (2.3)$$

Tenant compte de la loi de Coulomb, le champ électrique créé par la charge Q , dans une direction donnée par le vecteur unitaire \vec{u} et à une distance r , est alors défini par :



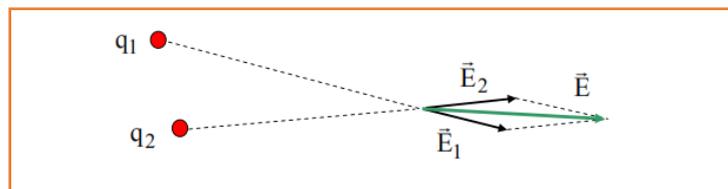
$$\vec{E}_Q = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} \quad (2.4)$$

Dans le cas des phénomènes indépendants du temps ou stationnaires, le champ électrique est appelé champ *électrostatique*.

2.3 Principe de superposition

La présence de plusieurs charges Q_i crée un champ électrique résultant égal à la somme vectorielle des champs électriques créés individuellement par chacune de ces charges :

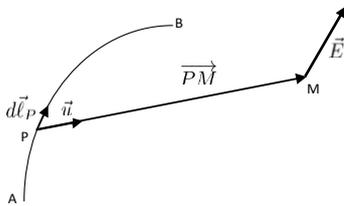
$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_{Q_i} = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} \quad (2.5)$$



Le principe de superposition peut être généralisé au cas d'une distribution continue de charges. Dans ce cas on considère que la région occupée par les charges est constituée d'un ensemble de "petits" éléments chargés et la sommation peut alors s'écrire sous la forme d'une intégrale.

2.3.1 Champ électrique créé par une distribution linéique de charges électriques

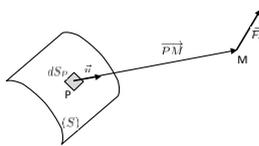
En utilisant le principe de superposition, on considère de petits éléments de la distribution de charges de longueur $d\ell_P$, situés aux points P portant chacun une charge $dQ = \lambda(P) d\ell_P$ où λ est la densité linéique locale de charge électrique. Le champ électrique créé par une distribution linéique de charge de longueur est donné par :



$$\vec{E}(M) = \oint_{(\ell)} \frac{\lambda(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} d\ell_P \quad (2.6)$$

2.3.2 Champ électrique créé par une distribution surfacique de charges électriques

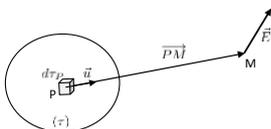
Dans ce cas on considère de petits éléments de la distribution surfacique de charges de surface dS_P , situés aux points P et portant chacun une charge $dQ = \sigma(P) dS_P$ où $\sigma(P)$ est la densité surfacique locale de charge électrique. Le champ électrique créé par une distribution surfacique de charge de surface S est donné par :



$$\vec{E}(M) = \oint_{(S)} \frac{\sigma(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} dS_P \quad (2.7)$$

2.3.3 Champ électrique créé par une distribution volumique de charges électriques

Dans le cas d'une distribution continue de charges électriques dans un volume (τ) avec une densité volumique de charge électrique ρ , on considère de petits éléments de la distribution volumique de charges de volume $d\tau_P$, situés aux points P et portant chacun une charge $dQ = \rho(P) d\tau_P$. Le champ électrique créé par cette distribution volumique de charge est donné par :



$$\vec{E}(M) = \oint_{(\tau)} \frac{\rho(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} d\tau_P \quad (2.8)$$

2.4 Propriétés du champ électrostatique

2.4.1 Le potentiel électrostatique

Calculons le rotationnel du champ électrique $\vec{E}(M)$ donné par la précédente équation.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(M) = \vec{\nabla} \times \iiint_{(\tau)} \frac{\rho(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} d\tau_P \quad (2.9)$$

Comme on calcule le rotationnel au voisinage du point M , les dérivées partielles se calculent par rapport aux coordonnées (x, y, z) du point M , tandis que l'intégration se fait pour des éléments de volume portant les charges et situés aux points P ; l'intégration de volume se fait donc par rapport aux coordonnées (x_P, y_P, z_P) du point P . De ce fait, l'opérateur $\vec{\nabla} \times$ peut être introduit dans l'intégrale et on obtient alors :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(M) = \iiint_{(\tau)} \vec{\nabla} \times \left[\frac{\rho(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} d\tau_P \right] \quad (2.10)$$

les éléments $\rho(P)$ et $d\tau_P$ sont indépendants de la position du point M et ne dépendent que de P , il s'en suit que l'équation précédente peut s'écrire :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(M) = \iiint_{(\tau)} \frac{\rho(P)}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \times \left[\frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} \right] d\tau_P \quad (2.11)$$

Or, on sait que :

$$\vec{\nabla} \times \left[\frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} \right] = \vec{0} \quad (2.12)$$

Il s'en suit le résultat fondamental :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} \quad (2.13)$$

Sachant que le rotationnel d'un gradient est nul, on en déduit qu'il existe un champ scalaire appelé potentiel électrostatique U tel que :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}U \quad (2.14)$$

A partir du résultat précédent on peut aisément montrer que :

$$dU = -\vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad (2.15)$$

Par intégration, on peut montrer que le potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle est :

$$U(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (2.16)$$

On dit que le champ électrostatique \vec{E} dérive d'un potentiel. On peut écrire de manière équivalente que le champ électrostatique est à circulation conservative, c'est-à-dire qu'il satisfait la relation intégrale suivante :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad (2.17)$$

où (Γ) est un contour fermé quelconque orienté.

Le principe de superposition peut être généralisé au calcul du potentiel électrostatique.

- Potentiel électrostatique créé par une distribution discrète de charges

$$U(M) = \sum_i U_{Q_i} = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \quad (2.18)$$

- Potentiel électrostatique créé par une distribution linéique de charges

$$U(M) = \oint_{(\ell)} \frac{\lambda(P)}{4\pi\epsilon_0 \|\overrightarrow{PM}\|} d\ell \quad (2.19)$$

- Potentiel électrostatique créé par une distribution surfacique de charges

$$U(M) = \oint_{(S)} \frac{\sigma(P)}{4\pi\epsilon_0 \|\overrightarrow{PM}\|} dS \quad (2.20)$$

- Potentiel électrostatique créé par une distribution volumique de charges

$$U(M) = \oint_{(\tau)} \frac{\tau(P)}{4\pi\epsilon_0 \|\overrightarrow{PM}\|} d\tau \quad (2.21)$$

2.4.2 Topographie d'un champ électrique

a- Lignes de champ

Pour avoir une idée sur l'allure du champ \vec{E} , on trace les **lignes de champ**, c'est-à-dire les courbes tangentes en chaque point au vecteur \vec{E} défini en ce point. Ces courbes sont orientées par convention dans le sens du vecteur \vec{E} (figure II.1).

Soit M un point d'une ligne de champ et $d\vec{r}$ le vecteur déplacement élémentaire sur une ligne de champ (voir figure).

Puisque \vec{E} et $d\vec{r}$ sont colinéaires, on a :

$$d\vec{r} \wedge \vec{E} = \vec{0} \quad (2.22)$$

Cette relation permet d'obtenir les equations des lignes de champ. Dans le système de coordonnées **cartésiennes**, posons :

$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}$ et $d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$, ainsi la relation (2.22) conduit à :

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z} \quad (2.23)$$

- **Exemple de lignes de champ**

Soit une charge ponctuelle en O , les lignes du champ crée par la charge ponctuelle sont des demi-droites concourantes en O , divergentes si $q > 0$ (figure II-2-a) et convergentes si $q < 0$ (figure II-2-b).

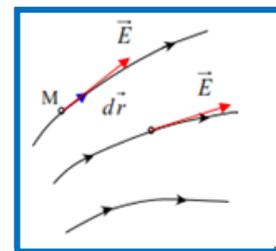


Figure II-1

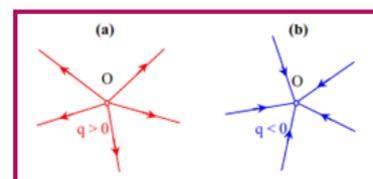


Figure II-2

- ✚ Notons que dans une région où le champ \vec{E} est un vecteur bien défini et non nul, on peut suivre de façon continue une ligne de champ.
- ✚ Deux lignes de champ ne peuvent se croiser : la figure II-2 montre que les lignes de champ commencent (figure II-2-a) où s'arrêtent (figure II-2-b) sur les charges qui sont des points singuliers.

b- Tube de champ

L'ensemble des lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé constitue un tube de champ (figure II-3)

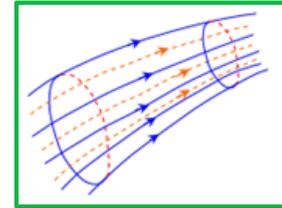


Figure II-3

c- Surfaces équipotentielles.

Ce sont des surfaces d'équation $V = \text{cste}$, c'est-à-dire d'égal potentiel (figure II-4). D'après la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$, le champ \vec{E} est normal aux surfaces équipotentielles et dirigé vers les potentiels **décroissants** (sans le signe moins dans cette relation, \vec{E} est dirigé vers les potentiels croissants).

Nous avons représenté sur la figure II-4, les surfaces équipotentielles et les lignes du champ \vec{E} créée par une charge ponctuelle positive. Les surfaces équipotentielles sont des sphères centrées en O , point où se trouve la charge. La direction de \vec{E} , c'est-à-dire du gradient de V est la direction de la normale aux surfaces équipotentielles, celle de V varie le plus rapidement ; ainsi il est clair que pour passer de la valeur V_1 à la valeur de V_2 , le chemin le plus court est le segment AB .

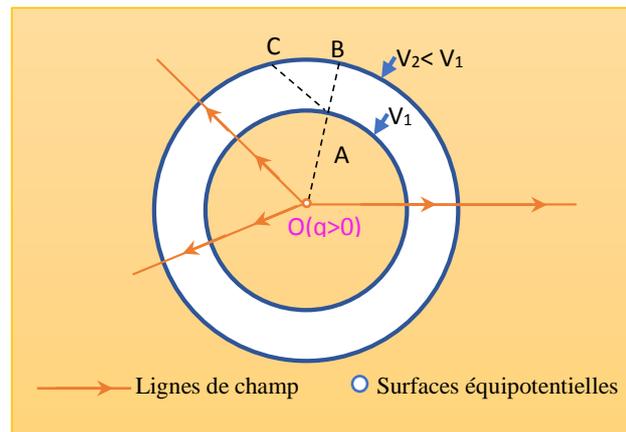


Figure II-4

Remarque :

Lorsqu'on a un système de plusieurs charges, on ne peut pas obtenir les lignes de champ par superposition des lignes du champ de chacune des charges. Il faut calculer le champ total \vec{E} et ensuite tracer les lignes de champ.

2.4.3 Le théorème de Gauss

Le champ électrostatique possède des propriétés très intéressantes. En effet considérons une charge ponctuelle Q repérée par rapport à un référentiel par le vecteur \vec{r}_P qui crée en chaque point $M(x, y, z)$ de l'espace qui l'entoure, un champ $\vec{E}(M)$ donné par :

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} \quad (2.24)$$

Comme nous pouvons le constater, le champ $\vec{E}(M)$ possède une singularité en P . Considérons une surface fermée (S) telle que la charge Q se trouve à l'extérieur de cette surface. À l'intérieur du volume (τ) délimité par la surface (S), le champ $\vec{E}(M)$ ne possède pas de singularité. Nous pouvons donc calculer la divergence de $\vec{E}(M)$. Or, nous avons montré que :

$$\vec{\nabla} \cdot \left[\frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} \right] = 0 \quad (2.25)$$

Il s'ensuit que :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (2.26)$$

a- Le flux du champ électrostatique

Soit une charge ponctuelle $q > 0$ placée en O et M un point de l'espace (figure II-5)

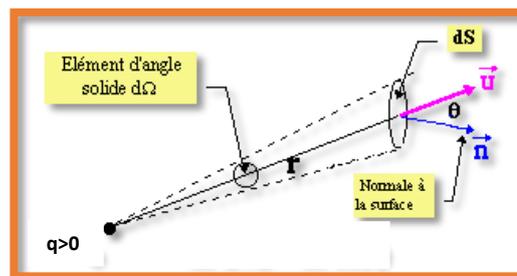


Figure II-5

Le champ $\vec{E}(M)$ créé par q en M est :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}}{r^2}$$

Avec, $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$ et $r = \|\overrightarrow{OM}\|$

Soit dS un élément de surface entourant le point M ; orientons la surface. Le flux élémentaire de \vec{E} à travers la surface orientée est :

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u} \cdot d\vec{S}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

où, $d\Omega = \frac{\vec{u} \cdot d\vec{S}}{r^2} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{r^2} dS$: angle solide élémentaire sous lequel du point O on voit la

surface élémentaire. Le signe de $d\Omega$ dépend de l'orientation de la surface :

👉 $d\Omega > 0$ si $\alpha = (\vec{u}, \vec{n}) < \pi/2$

👉 $d\Omega < 0$ si $\alpha > \pi/2$

b- Propriétés du champ électrostatique

Le flux à travers cette surface fermée est nul car :

$$\phi_E = \oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\tau} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, d\tau = 0 \quad (2.27)$$

Par contre, lorsque la charge Q se trouve à l'intérieur de la surface $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ n'est plus définie en coordonnées (x_p, y_p, z_p) . Pour contourner cette difficulté, on considère un volume limité par la surface extérieure (S) et par une petite sphère de rayon r_B entourant la charge Q . Le volume $\tau - \tau_B$ ne contient pas de charge; ce volume est limité par la surface fermée constituée par la surface extérieure (S) et par la surface (S_B) en remarquant que le vecteur unitaire \vec{n} doit être dirigé de l'intérieur vers l'extérieur du volume $\tau - \tau_B$. On exprime le flux de \vec{E} à travers la surface (S) en l'écrivant sous la forme :

$$\phi_E = \oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (2.28)$$

$$= \oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} - \oiint_{(S_B)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_B + \oiint_{(S_B)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_B \quad (2.29)$$

En utilisant le théorème de **Gauss-Ostrogradski**, on obtient :

$$\phi_E = \iiint_{\tau - \tau_B} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, d\tau + \phi_B \quad (2.30)$$

Où :

$$\phi_B = \oiint_{(S_B)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_B \quad (2.31)$$

est le flux de \vec{E} à travers petite sphère (B) de volume τ_B et de rayon r_B , entourant la charge ponctuelle Q .

Dans ce cas :

$$\iiint_{\tau - \tau_B} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, d\tau = 0 \quad (2.32)$$

Car la divergence est défini partout sur $\tau - \tau_B$. Il nous reste donc :

$$\Phi_E = \Phi_B = \oiint_{(S_B)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_B \quad (2.33)$$

Mais dans le cas d'une sphère, il est relativement facile de montrer que :

$$\oiint_{(S_B)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_B = \oiint_{(S_B)} E dS_B = E \oiint_{(S_B)} dS_B = ES_B = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_B^2} 4\pi r_B^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (2.34)$$

Le flux du champ électrostatique à travers une surface (S) fermée entourant une charge ponctuelle Q est donc égal à Q/ϵ_0

Ce raisonnement peut être reconduit au cas où la surface fermée (S) entoure un ensemble de charges Q_i . D'où le théorème de Gauss pour le champ électrostatique :

Le flux du champ électrostatique à travers une surface S fermée entourant un ensemble de charges ponctuelles Q_i est égal à Q/ϵ_0 , $Q = \sum_i Q_i$ étant la charge électrique totale contenue dans le volume τ limité par la surface fermée S .

Cette relation constitue le théorème de Gauss pour le champ électrostatique qui, sous cette forme dite intégrale, s'écrit :

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (2.35)$$

Si la charge Q est répartie dans l'espace selon une densité volumique de charge ρ , nous avons :

$$Q = \iiint_{(\tau)} \rho d\tau \quad (2.36)$$

Le théorème de Gauss peut alors s'écrire :

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{(\tau)} \rho d\tau \quad (2.37)$$

Où (S) est une surface fermée quelconque orientée vers l'extérieur et (τ) est le volume intérieur à (S). En utilisant le théorème de Gauss-Ostrogradski, on peut écrire :

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(\tau)} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d\tau \quad (2.38)$$

Le théorème de Gauss étant vrai quel que soit le volume τ , on obtient l'équation aux dérivées partielles suivante qui constitue la forme locale du théorème de Gauss :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.39)$$

Cette équation relie \vec{E} aux *charges* qui constituent les *sources* du champ électrostatique.

2.4.4 Le vecteur excitation électrique \vec{D}

Dans le vide, le vecteur excitation électrique \vec{D} est défini par la relation :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad (2.40)$$

Le théorème de Gauss pour \vec{D} s'écrit sous la forme :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (2.41)$$

2.4.5 Equation de Poisson - Equation de Laplace

Sachant que $\vec{E} = -\vec{\nabla}U$ le théorème de Gauss $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$ devient :

$$\vec{\nabla} \cdot [-\vec{\nabla}U] = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (2.42)$$

Or le laplacien scalaire de U est défini par :

$$\nabla^2 U = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}U \quad (2.43)$$

D'où l'équation aux dérivées partielles satisfaite par le potentiel électrostatique U :

$$\nabla^2 U = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.44)$$

Cette équation aux dérivées partielles porte le nom de l'équation de Poisson pour U .

En absence de charges électriques, $\rho = 0$ et on obtient alors l'équation de Laplace pour U .

$$\nabla^2 U = 0 \quad (2.45)$$

L'équation de Poisson pour le potentiel électrostatique U :

$$\nabla^2 U = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.46)$$

admet comme solution

$$U(M) = \iiint \frac{\rho(P)}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{PM}\|} d\tau \quad (2.47)$$

Cette expression permet de calculer le potentiel scalaire U au point $M(x, y, z)$ créé par une distribution de charges électriques dans un volume (τ) qui est découpé en éléments de volumes $d\tau$ localisés aux points $P(x_P, y_P, z_P)$ où les charges sont définies localement par la densité volumique de charges $\rho(x_P, y_P, z_P)$.

2.5 En résumé

Les deux équations fondamentales de l'électrostatique dans le vide sont :

	Forme locale	Forme intégrale
\vec{E} conservatif	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$	$\int_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$
Théorème de Gauss pour \vec{E}	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{(\tau)} \rho d\tau$

2.6 Exemples

Calcul du champ et du potentiel électrostatiques créés par une distribution continue de charges à partir du **THEOREME de GAUSS**

1- Nappe chargée uniformément en surface

1-1 Enoncé

Considérons un plan **uniformément** avec une densité surfacique $\sigma > 0$ (nappe chargée) de dimension **infinie** et contenue dans le plan xOy . Calculer le champ électrostatique puis le potentiel en tout point de l'espace.

1-2 Solution

a) Variable dont dépend \vec{E} et sa direction

La nappe chargée en surface est contenue dans le plan (xOy) comme le montre la figure II-6

✚ Le plan chargé est invariant par translations suivant Ox et Oy . Le système des coordonnées le plus adapté au calcul de \vec{E} est le système cartésien de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le champ \vec{E} est indépendant de x et y : $\vec{E}(M) = \vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(z)$.

✚ Le plan $\Pi_1 = (M, \vec{j}, \vec{k})$ passant par M en perpendiculaire à (Ox) est un plan de symétrie pair. $\vec{E} \in \Pi_1$, ainsi : $\vec{E} = \vec{E}_y + \vec{E}_z$

✚ Le plan $\Pi_2 = (M, \vec{i}, \vec{k})$ passant par M en perpendiculaire à (Oy) est un plan de symétrie pair. $\vec{E} \in \Pi_2$, ainsi : $\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_z$

Ainsi, $\vec{E} \in \Pi_1 \cap \Pi_2$ d'où :

$$\vec{E} = E(z)\vec{k}$$

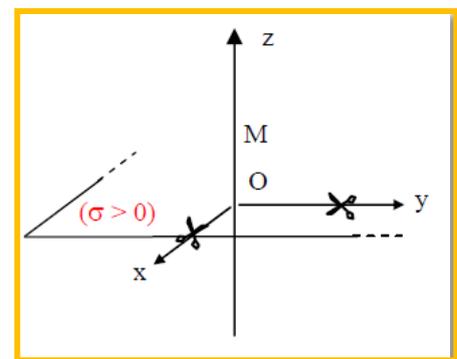


Figure II-6

De plus, le plan chargé xOy étant un plan de symétrie paire, le champ \vec{E} en un point M' symétrique de M par rapport à ce plan est :

$\vec{E}(M') = -\vec{E}(M)$ avec $\vec{E}(M') = \vec{E}(-z) = E(-z)\vec{k}$ et $\vec{E}(M) = \vec{E}(z) = E(z)\vec{k}$, ce qui implique que :

$$E(-z) = -E(z)$$

b) Calcul du champ électrostatique $\vec{E}(M)$

Tenant compte de la **symétrie** de la distribution plane de charge, nous choisissons comme surface fermée Σ **le parallélépipède droit** dont les génératrices sont **normales** au plan chargé, fermé par **deux sections droites** notées Σ_1 et Σ_2 d'aire S , passant respectivement par $M(x, y, z)$ et par $M'(x, y, z)$, le point symétrique de M par rapport au plan xOy (Figure II-7).

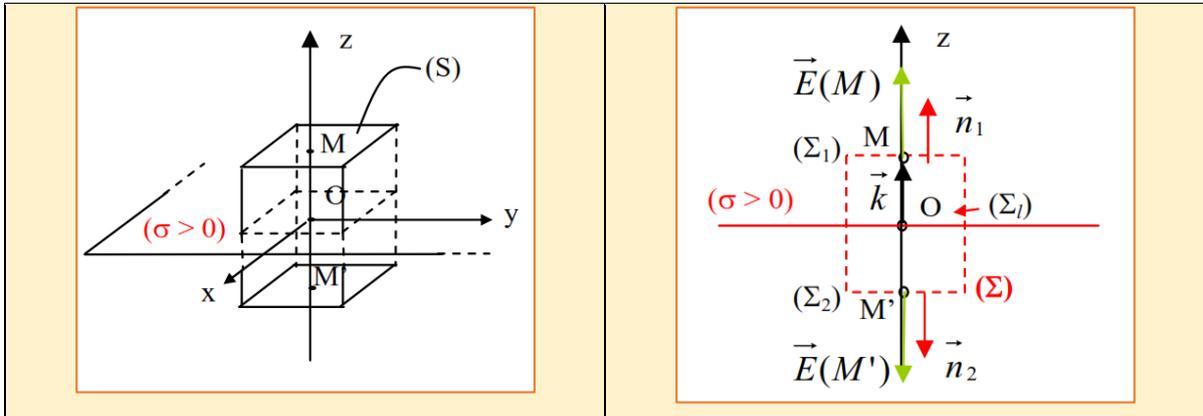


Figure II-7

Le flux de \vec{E} sortant de la surface latérale Σ_l du cylindre est nul car en tout point de Σ_l , on a: $\vec{E} \cdot d\vec{\Sigma}_l = 0$.

Le flux sortant de Σ se réduit au flux sortant de Σ_1 et Σ_2 :

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \iint_{\Sigma_1} \vec{E}(M) \cdot d\vec{\Sigma}_1 + \iint_{\Sigma_2} \vec{E}(M') \cdot d\vec{\Sigma}_2$$

$$\Phi = E(z)(\vec{k} \cdot \vec{n}_1) \iint_{\Sigma_1} d\vec{S}_1 + E(-z)(\vec{k} \cdot \vec{n}_2) \iint_{\Sigma_2} d\vec{S}_2$$

Avec $(\vec{k} \cdot \vec{n}_1) = 1$; $(\vec{k} \cdot \vec{n}_2) = -1$ et $\iint_{\Sigma_1} d\vec{S}_1 = \iint_{\Sigma_2} d\vec{S}_2 = S$

$\phi = [E(z) - E(-z)]S$ avec $E(-z) = -E(z)$

$$\phi = 2E(z)S$$

La charge à l'intérieur de la surface de GAUSS est :

$$Q_{int} = \iint_{\sigma} \sigma d\vec{S} = \sigma S$$

Or, d'après le *théorème de GAUSS*, on a :

$$2E(z)S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

D'où le champ \vec{E}

- Pour $z > 0$: $\vec{E} = +\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{k}$
- Pour $z < 0$: $\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{k}$

Ces deux résultats peuvent être condensés sous la forme :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|} \vec{k} (z \neq 0)$$

📌 Ce résultat peut être retrouvé en choisissant comme surface de GAUSS Σ la surface fermée formée par le **cylindre droit**, dont les génératrices sont normales au plan chargé, fermé par **deux sections droites d'aire S**, passant par $M(x, y, z)$ et $M'(x, y, -z)$.

📌 Le champ \vec{E} change de sens à la traversée de la nappe chargée et subit une **discontinuité** égale à σ/ϵ_0 (Figure II-8).

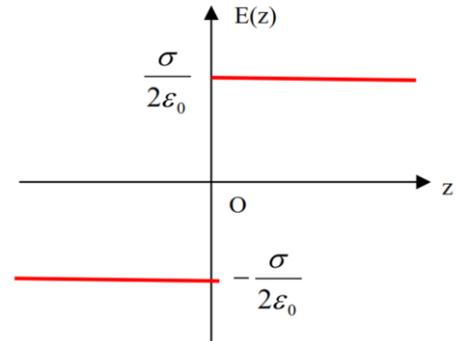


Figure II-8

📌 En réalité, il n'existe pas de distribution plane de dimensions **infinies**. Cependant, la distribution plane est considérée comme infinie si on ne considère que des points placés **loin des bords** de la distribution, c'est-à-dire des points dont la distance à la surface chargée est **petite par rapport aux dimensions de celle-ci**.

c) Calcul du potentiel électrostatique $V(M)$

En choisissant l'origine des potentiels dans le plan xOy :

$$V(z = 0) = 0$$

$$V(z) = \int_0^z dV = - \int_0^z \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \text{ avec } d\vec{\ell} = dz\vec{k}$$

- Pour $z > 0$: $V(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^z dz = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} z$

- Pour $z < 0$: $V(z) = +\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^z dz = +\frac{\sigma}{2\epsilon_0} z$

Soit

$$V(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} |z|$$

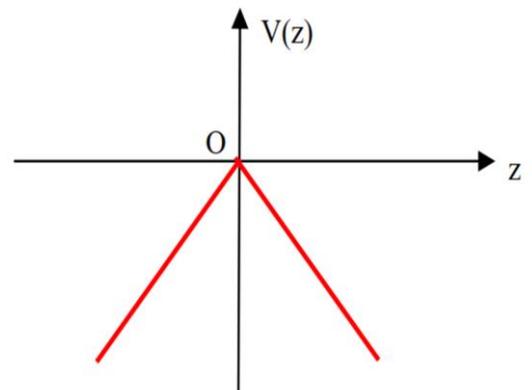


Figure II-9

📌 A la traversée du plan chargé, le potentiel y est **continu** (figure II-9).

2- Cylindre chargé uniformément en surface

2-1 *Enoncé*

Soit un cylindre (C) d'axe $\vec{z}'z$, de rayon R, de longueur infinie, uniformément chargé avec une densité surfacique de charge $\sigma > 0$. Calculer le champ électrostatique puis le potentiel en tout point de l'espace.

2-2 Solution

a) Variable dont dépend \vec{E} et sa direction

Le cylindre chargé a un axe de révolution Oz (figure II-10). Le système de coordonnées le plus adapté est le système cylindrique de base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$. Cette distribution de charge est invariante par translation suivant Oz et par rotation d'angle θ autour de Oz .

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(r, \theta, z) = \vec{E}(r)$$

Le plan $\Pi_1 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ passant par M et l'axe (Oz) est plan de symétrie pair.

$\vec{E} \in \Pi_1$, ainsi $\vec{E} = \vec{E}_r + \vec{E}_z$.

Le plan $\Pi_2 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ passant par M et perpendiculaire à l'axe (Oz) est plan de symétrie pair. $\vec{E} \in \Pi_1 \cap \Pi_2$, ainsi on aura un champ radial de la forme $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$

Aussi, le système possède une symétrie de **révolution** par rapport à l'axe $\vec{z}'z'$, et de **translation** parallèlement à cet axe : le champ \vec{E} en un point M situé à la distance r de l'axe est donc de la forme :

$$\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$$

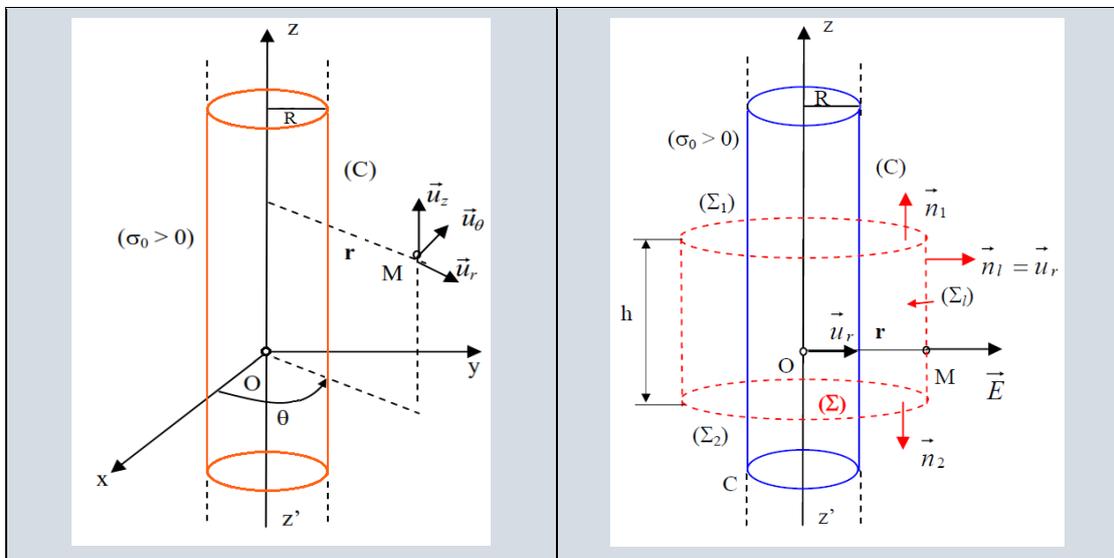


Figure II-10

b) Calcul du champ électrostatique $\vec{E}(M)$

La surface fermée Σ que nous choisissons pour calculer le flux de \vec{E} est une surface de même type que la surface chargée constitué d'un cylindre d'axe $\vec{z}'z'$, de rayon r, de hauteur h (figure II-10).

Le flux de \vec{E} à travers de GAUSS s'écrit :

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} \text{ avec, } d\vec{\Sigma}_\ell = rd\theta dz\vec{u}_r \text{ et } d\vec{\Sigma}_1 = d\vec{\Sigma}_2 = r dr d\theta \vec{k}$$

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \iint_{\Sigma_1} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma}_1 + \iint_{\Sigma_2} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma}_2 + \iint_{\Sigma_\ell} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma}_\ell$$

Le flux de $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$, à travers les surfaces **planes** Σ_1 et Σ_2 étant nul (en tout point de ces surfaces, on a $\vec{E}(r) \perp \vec{n}_1$ et $\vec{E}(r) \perp \vec{n}_2$). Le flux sortant Σ se réduit à :

$$\Phi = \iint_{\Sigma_1} (E(r)\vec{u}_r) \cdot d\vec{\Sigma}_\ell \text{ avec } d\vec{\Sigma}_\ell = r d\theta dz \vec{u}_r$$

Avec, Σ_ℓ : surface latérale de Σ .

Puisque $E(r)$ et r sont des constantes, on a :

$$\Phi = E(r)r \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = 2\pi r h E(r)$$

Aussi le théorème de GAUSS, s'écrit :

$$\Phi = 2\pi r h E(r) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

🔦 Si M est **extérieur** au cylindre chargé (C) : $r > R$

$$Q_{int} = \iint_S \sigma_0 dS \text{ avec } dS = R d\theta dz$$

Et puisque σ_0 est uniforme, on a :

$$Q_{int} = \sigma_0 R \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z dz = 2\pi R h \sigma_0$$

Le théorème de GAUSS s'écrit donc :

$$\phi = 2\pi r h E(r) = \frac{2\pi R h \sigma_0}{\epsilon_0}$$

En simplifiant par $2\pi h$, la valeur du champ électrostatique $E(r)$

$$E(r > R) = \frac{\sigma_0 R}{\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

Par raison de symétrie, on sait que $\vec{E}(M)$ est porté par \vec{u}_r . On obtient finalement

$$\vec{E}(r > R) = \frac{\sigma_0 R}{\epsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r}$$

🔦 Si M est **intérieur** au cylindre chargé (C) : $r < R$

Dans ce cas, la charge à l'intérieur du cylindre Σ de rayon $r < R$ étant **nulle**, $Q_{int} = 0$.

Il s'ensuit, d'après le théorème de GAUSS, que la norme du champ est nulle, $E(r) = 0$.

Ce qui conduit à : $\vec{E}(r < R) = \vec{0}$.

Le champ \vec{E} normal à la surface chargée, subit une discontinuité égale à σ_0/ϵ_0 (figure II-11).

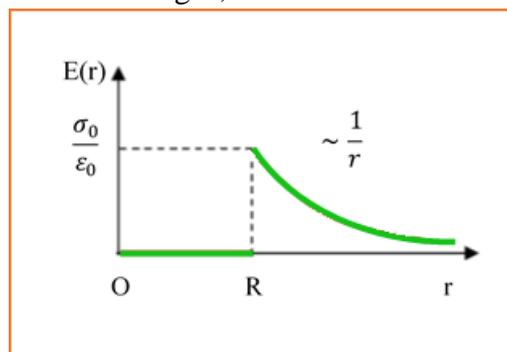


Figure II-11

c) Calcul du potentiel électrostatique $V(M)$

$$V(r) = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} \text{ avec } d\vec{l} = dr\vec{u}_r$$

$$\text{D'où } V(r) = -\int E(r) dr$$

📌 Si M est à l'**extérieur** du cylindre chargé: $r \geq R$

$$V(r) = -\frac{\sigma_0 R}{\epsilon_0} \int \frac{dr}{r} = -\frac{\sigma_0 R}{\epsilon_0} \ln r + cste$$

Dans le cas d'une distribution surfacique portée par le cylindre infiniment long, on prendra l'origine des potentiels, à une distance finie r_0 de l'axe du cylindre (par exemple $r_0 > R$; $V(r_0) = 0$).

$$V(r = r_0) = -\frac{\sigma_0 R}{\epsilon_0} \ln r_0 + cste = 0$$

$$cste = \frac{\sigma_0 R}{\epsilon_0} \ln r_0$$

Ainsi, on aura

$$V(r \geq R) = -\frac{\sigma_0 R}{\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r}$$

📌 Si M est à l'**intérieur** du cylindre chargé: $r \leq R$

$$V(r \leq R) = cste$$

La constante est déterminée par continuité du potentiel en $r = R$:

$$\text{Ainsi, on aura : } V(r \geq R)_{r=R} = V(r \leq R)_{r=R} = \frac{\sigma_0 R}{\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{R}$$

3- *Sphère chargée uniformément en surface*

3-1 *Enoncé*

Soit une sphère (S) de centre O et de rayon R, chargée uniformément avec une densité surfacique de charge $\sigma > 0$. Calculer le champ électrostatique puis le potentiel en tout point de l'espace.

3-2 *Solution*

a) Variable dont dépend \vec{E} et sa direction

La sphère chargée est invariante par double rotation, l'une d'angle θ autour de \vec{u}_z et l'autre d'angle φ autour de \vec{u}_φ . On dit que la sphère a le point O : On dit que la sphère a le point O comme centre de symétrie (figure II-12). Le système de coordonnées le plus adapté est le système sphérique de base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$.

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(r, \theta, \varphi) = \vec{E}(r)$$

Le plan méridien $\Pi_1 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est plan de symétrie pair. $\vec{E} \in \Pi_1$, ainsi $\vec{E} = \vec{E}_r + \vec{E}_\theta$.

Le plan $\Pi_2 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\phi)$ passant par M et perpendiculaire à l'axe (Oz) est plan de symétrie pair. $\vec{E} \in \Pi_1 \cap \Pi_2$, ainsi on aura un champ radial de la forme $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$ avec $\vec{u}_r = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$

Le champ \vec{E} créé par cette distribution à **symétrie sphérique** en un point M est porté par le vecteur \vec{u}_r et ne dépend que de la variable d'espace $r = \|\vec{OM}\|$.

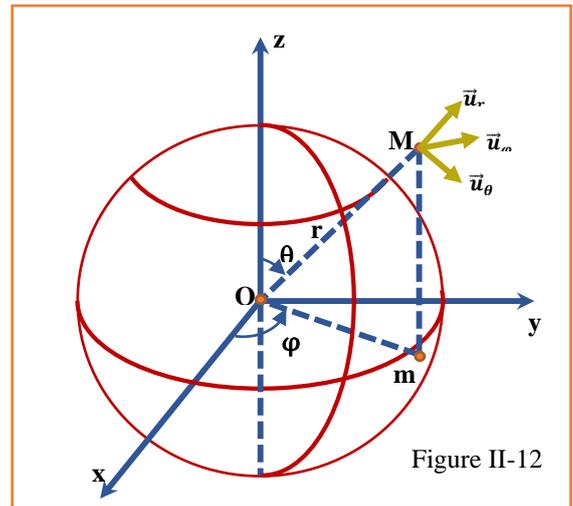


Figure II-12

b) Calcul du champ électrostatique $\vec{E}(M)$

La surface fermée Σ que nous choisissons pour calculer le flux de \vec{E} est une sphère de centre O, de rayon r : surface de même type que la surface chargée (figure II-13).

Le flux de \vec{E} à travers Σ est donné par :

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} \quad \text{avec,} \quad \vec{E}(M) = E(r) \vec{u}_r \quad \text{et}$$

$$d\vec{\Sigma} = d\Sigma \vec{u}_r = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \vec{u}_r$$

Le champ \vec{E} est en tout point de Σ porté par la normale « sortante » \vec{u}_r et sa norme est **constante** en tout point de Σ .

$$\Phi = E(r)r^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi E(r)r^2 [-\cos \theta]_0^\pi$$

$$= 4\pi r^2 E(r)$$

Le théorème de GAUSS s'écrit :

$$\Phi = 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface de GAUSS Σ dépend de la position de M. Deux cas peuvent être distingués : M est extérieur à la sphère chargée (S) ou M est intérieur à (S).

Si M est à l'**extérieur** de la sphère (S) : $r > R$

La charge à l'intérieur de la sphère Σ de rayon $r > R$ est :

$Q_{int} = \iint_S \sigma dS$ avec $dS = R^2 \sin \theta d\theta d\phi$ et puisque σ est uniforme, on a :

$$Q_{int} = \sigma R^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi R^2 \sigma$$

Le théorème de GAUSS s'écrit donc :

$\Phi = 4\pi r^2 E(r) = \frac{4\pi R^2 \sigma}{\epsilon_0}$ et en simplifiant par 4π , la norme du champ s'écrit :

$$E(r > R) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}$$

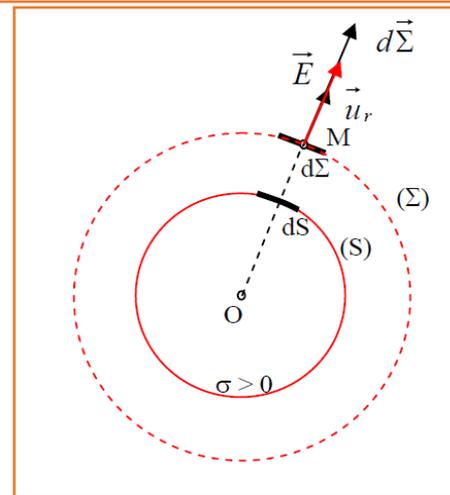


Figure II-13

Par raison de symétrie, le champ $\vec{E}(M)$ est porté par \vec{u}_r : on obtient finalement :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(r > R) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r^2}$$

Si on pose $Q_{int} = \iint_S \sigma dS = 4\pi R^2 \sigma$ alors on aura :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(r > R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r^2}$$

Le champ est **identique** au champ créé en M par une charge **ponctuelle** égale à la charge totale de la sphère, Q concentrée en O.

Si M est à l'**intérieur** de la sphère (S) : $r < R$

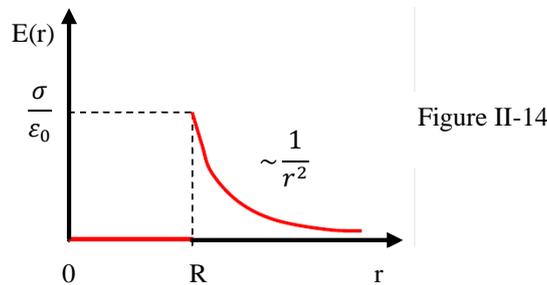
Dans ce cas, la charge à l'intérieur de la sphère de rayon $r < R$ est nulle : $Q_{int} = 0$.

Le théorème de GAUSS conduit à :

$\Phi = 4\pi r^2 E(r) = 0$ et ainsi la norme du champ est nulle.

$E(r < R) = 0$, ce qui implique que : $\vec{E}(r < R) = \vec{0}$

Le champ électrostatique E (r) subit une traversée de la surface chargée une **discontinuité** égale à σ/ϵ_0 (figure II-14).



c) Calcul du potentiel électrostatique V(M)

$V(r) = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\overline{grad}V(M)$ ce qui donne en projetant sur \vec{u}_r

$E(r) = \vec{E} \cdot \vec{u}_r = -\frac{dV}{dr}$, d'où $V(M) = -\int E(r) dr$

Si M est à l'**extérieur** à (S) : $r \geq R$

$$V(M) = -\int E(r) dr = \frac{\sigma_0 R^2}{\epsilon_0 r} + cste$$

En choisissant l'**origine** des potentiels à l'infini ($V(r = \infty) = 0$), on obtient :

$$V(M) = -\int E(r) dr = \frac{\sigma_0 R^2}{\epsilon_0 r} + cste$$

Ainsi, on aura

$$V(M) = V(r \geq R) = \frac{\sigma_0 R^2}{\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Le champ est **identique** au champ créé en M par une charge **ponctuelle** égale à la charge totale de la sphère, Q concentrée en O

Si M est à l'**intérieur** à (S) : $r \leq R$

Le champ est en tout point **intérieur** à S est **nul** : Le potentiel est donc $V(r \leq R) = cste$.
 Pour déterminer la constante, nous pouvons utiliser la **continuité** du potentiel pour ($r = R$).

$$V(r \leq R)_{r=R} = V(r \geq R)_{r=R} = \frac{\sigma_0 R}{\epsilon_0}$$

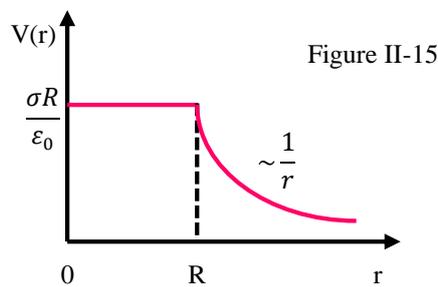
Nous pouvons trouver cette **constante** en écrivant :

$V(r \leq R) = V(r = 0)$, avec $V(r = 0)$ est le potentiel au centre O de la sphère S obtenu à partir d'un calcul direct suivant la relation :

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \text{ avec, } r = \|\vec{PM}\| = R$$

$$\text{Et } V(r \leq R) = V(r = 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma dS}{R} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0 R} \iint_S dS = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}$$

Alors le champ est discontinu à la traversée de la charge (figure II-14), le potentiel électrostatique est **continu** (figure II-15).



4- Sphère chargée uniformément en volume

4-1 Enoncé

Soit une sphère (S) de centre O et de rayon R, chargée en surface de densité volumique ρ uniforme. Calculer le champ électrostatique puis le potentiel en tout point de l'espace.

4-2 Solution

a) Variable dont dépend \vec{E} et sa direction

Les mêmes considérations de symétrie évoquées précédemment suggèrent que :

$$\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$$

b) Calcul du champ électrostatique $\vec{E}(M)$

Pour une sphère fermée Σ de centre O et de rayon r, le flux sortant est :

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} \text{ avec, } d\vec{\Sigma} = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{u}_r$$

Le champ \vec{E} est en tout point de Σ porté par la normale « sortante » \vec{u}_r et sa norme est **constante** en tout point de Σ .

$$\Phi = E(r)r^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi E(r)r^2 [-\cos \theta]_0^\pi = 4\pi r^2 E(r)$$

Le théorème de GAUSS s'écrit :

$$\Phi = 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

☞ Si M est à l'**extérieur** de la sphère (S) : $r \geq R$

La charge volumique à l'intérieur de la sphère de rayon $r \geq R$ est donnée par :

$$Q_{int} = \iiint_{\tau} \rho d\tau \text{ avec } d\tau = R^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$Q_{int} = \rho R^2 \int_0^r dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$$

Le théorème de GAUSS s'écrit donc :

$$\Phi = 4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \text{ et en simplifiant par } 4\pi, \text{ la norme du champ s'écrit}$$

$$E(r) = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

Par raison de symétrie, le champ $\vec{E}(M)$ est porté par \vec{u}_r : on obtient finalement :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(r \geq R) = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r^2}$$

☞ Le champ est **identique** au champ créé en M par une charge **ponctuelle** égale à la charge totale de la sphère, Q concentrée en O .

☞ Si M est à l'**intérieur** à (S) : $r \leq R$

La charge volumique à l'intérieur de la sphère de rayon $r \leq R$ est donnée par :

$$Q_{int} = \iiint_{\tau} \rho d\tau \text{ avec } d\tau = r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$Q_{int} = \rho \int_0^r r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$$

Le théorème de GAUSS s'écrit donc :

$$\Phi = 4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi r^3 \rho \text{ et en simplifiant par } 4\pi r^2, \text{ la norme du champ s'écrit}$$

$$E(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r$$

Par raison de symétrie, le champ $\vec{E}(M)$ est porté par \vec{u}_r : on obtient finalement :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(r \leq R) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{u}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r\vec{u}_r}{R^3}$$

On peut remarquer que pour ($r \geq R$), le champ est le même que si la charge $Q_{int} = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$ était concentrée au centre de la sphère O (figure II-16)

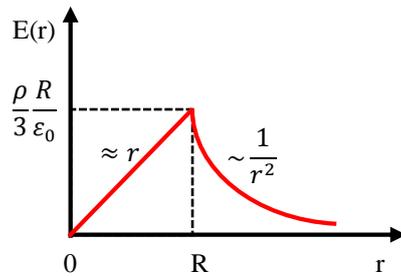


Figure II-16

c) Calcul du potentiel électrostatique V(M)

$$V(r) = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \overline{\text{grad}} V(M) \text{ ce qui donne en projetant sur } \vec{u}_r$$

$$E(r) = \vec{E} \cdot \vec{u}_r = - \frac{dV}{dr}, \text{ d'où } V(M) = - \int E(r) dr$$

👉 Si M est à l'**extérieur** à (S) : $r \geq R$

$$V(M) = V(r \geq R) = - \int E(r) dr = - \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \int_0^r - \frac{1}{r^2} \vec{u}_r dr \vec{u}_r = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r}$$

👉 Si M est à l'**intérieur** à (S) : $r \leq R$

$$V(M) = V(r \leq R) = - \int E(r) dr = - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \int_0^r r \vec{u}_r dr \vec{u}_r = - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{r^2}{2} + cste$$

Pour déterminer la constante, nous pouvons utiliser la **continuité** du potentiel pour ($r = R$).

$$V(r \leq R)_{r=R} = V(r \geq R)_{r=R} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} R^2 = - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^2}{2} + cste$$

Ce qui donne :

$$cste = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(R^2 + \frac{R^2}{2} \right) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} R^2 \text{ d'où}$$

$$V(M) = V(r \leq R) = - \frac{\rho}{6\epsilon_0} r^2 + \frac{\rho}{2\epsilon_0} R^2 = \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2)$$

Ainsi pour $r \geq R$, le champ et le potentiel sont les mêmes que si toute la charge Q était concentrée en O (figure II-17)

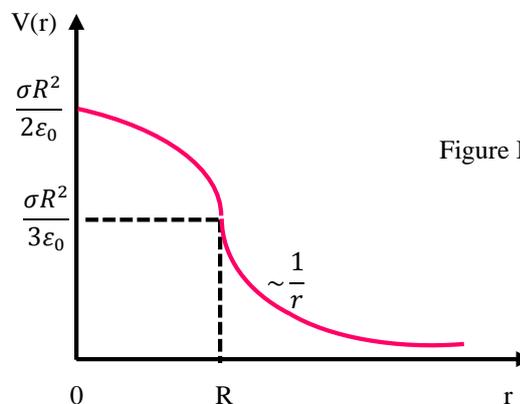


Figure II-17

CHAPITRE 3

ELECTRODYNAMIQUE ET MAGNÉTOSTATIQUE

3.1 Electrocinétique - Vecteur densité de courant

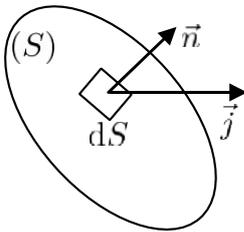
Un courant électrique correspond à des charges électriques mobiles. On appelle vecteur densité de courant \vec{j} , le vecteur tangent à la ligne de courant, et défini par :

$$\vec{j} = \rho_m \vec{v}_m \quad (3.1)$$

où ρ_m est la densité volumique de charges mobiles et \vec{v}_m la vitesse d'entraînement de ces charges mobiles. Le module de ce vecteur représente la charge qui traverse par unité de temps, l'unité de surface perpendiculaire à la direction de déplacement des charges mobiles ; il s'exprime en $A m^{-2}$.

Le courant I traversant une surface (S) quelconque est le flux de \vec{j} à travers cette surface :

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS \quad (3.2)$$



En régime stationnaire, c'est-à-dire lorsque le vecteur densité de courant \vec{j} est indépendant du temps, le flux de \vec{j} est conservatif ce qui se traduit par les relations intégrale et locale :

$$\oiint_{(S)} \vec{j} \cdot \vec{n} d\vec{S} = 0 \quad (3.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (3.4)$$

Densité De Courant Surfaccique : Lorsqu'un courant se trouve, à l'échelle macroscopique, étendu sur une surface, on parle de densité de courant surfaccique. On dit qu'un courant admet une densité surfaccique \vec{j}_S de courant sur une surface S si l'épaisseur Δe de la couche où circulent les charges mobiles de densité volumique ρ_m est très inférieure aux dimensions latérales de la surface S . La densité de courant surfaccique est donnée par :

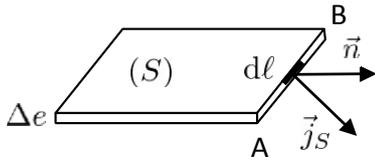
$$\vec{j}_S = \int_0^{\Delta e} \vec{j} de \quad (3.5)$$

où l'intégrale est faite sur l'épaisseur Δe , c'est-à-dire dans une direction orthogonale à la surface considérée.

L'unité de \vec{j}_S est le $A m^{-1}$ car son unité est celle de \vec{j} multipliée par une longueur.

$$I_S = \int_A^B \vec{j}_S \cdot \vec{n} dl \quad (3.6)$$

Ainsi le courant électrique qui parcourt une surface S est égal au flux du vecteur densité surfacique de courant à travers une ligne. L'intensité passant à travers une ligne $[AB]$ contenue dans la surface S s'écrit :



où $d\ell$ est l'élément de longueur de la ligne $[AB]$ et \vec{n} est un vecteur unitaire tangent à la surface S et normal à la ligne $[AB]$ en tout point.

3.2 Magnétostatique

3.2.1 Introduction

La force agissant sur une charge ponctuelle q dépend généralement non seulement de la position de cette charge mais également de sa vitesse \vec{v} . Cette force \vec{F} est décomposée en deux composantes, la composante électrique \vec{F}_e (qui ne dépend pas de la vitesse de la charge) et la composante magnétique \vec{F}_m (qui dépend de la vitesse de la charge). Toutes les propriétés de la force magnétique peuvent être décrites par l'introduction de la notion de champ magnétique noté usuellement \vec{B} qui s'exprime en tesla (T). La force magnétique \vec{F}_m est décrite par :

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (3.7)$$

La force résultante agissant sur la particule chargée est appelée force de **Lorentz**; elle s'écrit :

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}] \quad (3.8)$$

Cette définition est universelle, elle s'applique aussi bien pour les champs stationnaires que pour les champs dépendant du temps et quelle que soit la vitesse \vec{v} . Dans l'approximation non relativiste la force de Lorentz comme toute autre force, ne dépend pas du référentiel d'inertie choisi. Par contre sa décomposition en composante électrique et composante magnétique n'a de signification que si le référentiel d'inertie utilisé est explicitement défini.

L'expression de la force de Lorentz peut être considérée comme la définition du champ électrique \vec{E} et du champ magnétique \vec{B} . Le champ magnétique \vec{B} , contrairement au champ électrique \vec{E} , n'exerce aucune force sur une charge immobile.

3.2.2 Le champ magnétique

Les expériences montrent que le champ magnétique est créé par des particules chargées en mouvement (courants électriques).

Le champ magnétostatique \vec{B} obéit à deux lois :

✚ Le champ magnétique \vec{B} créé par un courant I est donné par le théorème d'Ampère :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I \quad (3.9)$$

où Γ est une courbe fermée quelconque traversée par le courant électrique I .

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$$

est la perméabilité magnétique du vide. Si le courant I correspond à une distribution de charges électriques mobiles définissant un vecteur densité de courant \vec{j} , alors le courant I encerclé par la boucle fermée Γ est le flux de \vec{j} à travers une surface quelconque délimitée par Γ :

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (3.10)$$

Le théorème d'ampère s'écrit alors :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (3.11)$$

En tenant compte du théorème de Stokes :B

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (3.12)$$

On obtient

$$\iint_S \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (3.13)$$

Cette égalité étant vraie quelle que soit la surface s , on obtient la forme locale du théorème d'Ampère qui s'écrit :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (3.14)$$

✚ Le flux du champ magnétique à travers une surface fermée s quelconque est nul. On dit que le champ magnétostatique est à flux conservatif. Cette propriété est traduite par l'intégrale suivante

$$\oiint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (3.15)$$

En tenant compte du théorème de *Gauss-Ostrogradski*, on obtient l'équation du flux magnétique :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.16)$$

3.2.3 Le vecteur excitation magnétique

En introduisant le vecteur excitation magnétique \vec{H} (A m^{-1}) défini par :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad (3.17)$$

Le théorème d'Ampère devient :

$$\iint \vec{\nabla} \times \vec{H} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (3.18)$$

Ou encore la forme locale

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} \quad (3.19)$$

3.2.4 Potentiel vecteur \vec{A}

Jauge de Coulomb

Sachant que $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ et que la divergence du rotationnel d'un champ vectoriel est nulle, on en déduit qu'il existe un champ vectoriel \vec{A} appelé potentiel vecteur tel que :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (3.20)$$

Ce potentiel vecteur n'est pas défini de manière unique. En effet considérons un autre champ vectoriel \vec{A}' tel que :

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\phi \quad (3.21)$$

Calculons le champ magnétostatique \vec{B}' associé à \vec{A}' :

$$\begin{aligned} \vec{B}' &= \vec{\nabla} \times (\vec{A}') \\ &= \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi) \\ &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ &= \vec{B} \end{aligned}$$

car le rotationnel du gradient d'un champ vectoriel est égal à zéro.

Nous voyons donc que les deux potentiels vecteurs \vec{A} et $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\phi$ qui ne diffèrent que par $\vec{\nabla}\phi$ conduisent au même champ magnétostatique \vec{B} . On dit que le potentiel vecteur est défini à un gradient près. Pour définir \vec{A} de manière unique, il faut imposer une condition supplémentaire à \vec{A} . Cette condition est appelée **condition de jauge**. La plus utilisée en magnétostatique est la condition de jauge de Coulomb qui s'écrit

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (3.22)$$

Equation de Poisson pour \vec{A}

En remplaçant \vec{B} par $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ dans le théorème d'Ampère :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (3.23)$$

Et en tenant compte de **la jauge de Coulomb** $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, on obtient

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{j} \quad (3.24)$$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \quad (3.25)$$

$$-\nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \quad (3.26)$$

Ce résultat constitue l'équation de Poisson pour le potentiel vecteur :

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \quad (3.27)$$

En absence de courants, on obtient l'équation de Laplace pour \vec{A} :

$$\nabla^2 \vec{A} = 0 \quad (3.28)$$

3.2.5 La loi de Biot-Savart

La loi de Biot-Savart pour \vec{A}

Pour trouver une solution à l'équation de Poisson pour \vec{A} , nous procéderons par analogie avec la solution obtenue dans le cas de l'électrostatique pour le potentiel électrostatique. L'équation de Poisson pour le potentiel électrostatique U :

$$\nabla^2 U = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.29)$$

admet comme solution :

$$U(M) = \iiint \frac{\rho(P)}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{PM}\|} d\tau \quad (3.30)$$

De même, l'équation vectorielle pour \vec{A} , peut s'écrire comme un ensemble de trois équations aux dérivées partielles pour chacune des composantes A_x , A_y et A_z de \vec{A} :

$$\begin{cases} \nabla^2 A_x = -\mu_0 j_x \\ \nabla^2 A_y = -\mu_0 j_y \\ \nabla^2 A_z = -\mu_0 j_z \end{cases} \quad (3.31)$$

Chacune de ces équations scalaires admet, par analogie avec la solution pour le potentiel scalaire, une solution sous la forme :

$$\begin{cases} A_x(M) = \iiint \frac{\mu_0 j_x(P)}{4\pi \|\vec{PM}\|} d\tau \\ A_y(M) = \iiint \frac{\mu_0 j_y(P)}{4\pi \|\vec{PM}\|} d\tau \\ A_z(M) = \iiint \frac{\mu_0 j_z(P)}{4\pi \|\vec{PM}\|} d\tau \end{cases} \quad (3.32)$$

Ce qui peut être écrit sous une forme vectorielle qui constitue **la loi de Biot-Savart** pour le potentiel vecteur :

$$\vec{A}(M) = \iiint \frac{\mu_0 \vec{j}(P)}{4\pi \|\vec{PM}\|} d\tau \quad (3.33)$$

Dans un système de coordonnées cartésiennes, la loi de Biot-Savart s'écrit :

$$\vec{A}(x, y, z) = \iiint \frac{\mu_0 \vec{j}(x_P, y_P, z_P)}{4\pi \sqrt{(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 + (z - z_P)^2}} d\tau \quad (3.34)$$

Cette expression permet de calculer le potentiel vecteur \vec{A} au point $M(x, y, z)$ créé par une distribution de courants électriques dans un volume (τ) qui est découpé en éléments de volumes $d\tau$ localisés aux points $P(x_P, y_P, z_P)$ où les courants sont définis localement par le vecteur densité de courant $\vec{j}(x_P, y_P, z_P)$.

Loi de Biot-Savart pour le champ magnétique \vec{B}

Le champ magnétique \vec{B} peut être obtenu à partir du potentiel vecteur \vec{A} à partir de :

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (3.35)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \iiint \frac{\mu_0 \vec{j}(x_P, y_P, z_P)}{4\pi \sqrt{(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 + (z - z_P)^2}} d\tau \quad (3.36)$$

Le rotationnel étant calculé autour du point M , les opérations de dérivation se font par rapport aux coordonnées x, y et z . Comme l'intégration se fait par rapport aux coordonnées x_P, y_P, z_P , nous pouvons écrire :

$$\vec{B} = \iiint \vec{\nabla} \times \frac{\mu_0 \vec{j}(x_P, y_P, z_P)}{4\pi \sqrt{(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 + (z - z_P)^2}} d\tau \quad (3.37)$$

Rappelons que :

$$\vec{\nabla} \times (f\vec{u}) = \vec{\nabla}f \times \vec{u} + f \vec{\nabla} \times \vec{u} \quad (3.38)$$

D'où

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{j}(x_P, y_P, z_P)}{\sqrt{(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 + (z - z_P)^2}} \right) = \\ \vec{\nabla} \left(\frac{1}{\sqrt{(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 + (z - z_P)^2}} \right) \times \vec{j}(P) \\ + \frac{1}{\sqrt{(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 + (z - z_P)^2}} \vec{\nabla} \times \vec{j}(P) \end{aligned} \quad (3.39)$$

Or

$$\vec{\nabla} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-x_p)^2 + (y-y_p)^2 + (z-z_p)^2}} \right) = -\frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} \quad (3.40)$$

et comme on calcule le rotationnel en dérivant par rapport à x, y et z et que $\vec{j}(P)$ ne dépend que de x_p, y_p, z_p :

$$\vec{\nabla} \times \vec{j}(P) = \vec{0} \quad (3.41)$$

on obtient la loi de Biot-Savart pour le champ magnétique \vec{B}

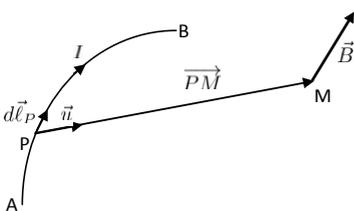
$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\overrightarrow{PM} \times \vec{j}(P)}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} d\tau \quad (3.42)$$

Si on appelle \vec{u} le vecteur unitaire du vecteur \overrightarrow{PM} , l'équation ci-dessus devient :

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{u} \times \vec{j}(P)}{\|\overrightarrow{PM}\|^2} d\tau \quad (3.43)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(P) \times \vec{u}}{\|\overrightarrow{PM}\|^2} d\tau \quad (3.44)$$

Cette dernière expression constitue la loi de Biot-Savart pour le champ magnétique \vec{B} ; elle exprime le champ magnétique créé au point M par les vecteurs densité de courants $\vec{j}(P)$ localisés aux point P à l'intérieur du volume τ .



Une expression pratique plus intéressante peut être obtenue pour calculer \vec{B} en fonction du courant I . En effet, on peut simplifier cette intégrale dans le cas de courants filiformes (le conducteur filiforme est orienté dans le sens du courant) :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\Gamma_{AB}} \frac{d\ell_P \times \vec{u}}{\|\overrightarrow{PM}\|^2} d\tau \quad (3.45)$$

3.3 En résumé

L'ensemble des propriétés du champ magnétique est donc contenu dans les deux seules équations locales de Maxwell dans lesquelles il est présent. Dans le vide, les deux équations fondamentales de la magnétostatique sont :

	Forme locale	Forme intégrale
Théorème d'Ampère	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$	$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \iint_S \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}$
Equation du flux magnétique	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$\oiint_{S_{fermée}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

Exercices résolus

■ Exercice.1 :

Monter On se place dans un conducteur de conductivité γ .

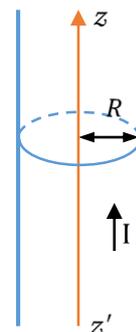
- 1- Rappeler la loi d'Ohm locale et l'équation de conservation de la charge.
- 2- En déduire l'équation aux dérivées partielles satisfaite par la densité volumique de charges ρ présente dans le conducteur.
- 3- Résoudre cette équation différentielle, en appelant $\rho_o(M)$ la valeur de ρ en tout point M à l'origine des temps $t = 0$.
- 4- Pour un point M quelconque de l'espace, tracer l'allure de la courbe $\rho(t)$, décrire le phénomène qui a lieu et en donner une durée caractéristique τ .
- 5- Application numérique pour un bon conducteur : $\gamma = 10^6 SI, \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} SI$.
Calculer τ . En déduire qu'un bon conducteur ne peut être chargé que sur sa surface.

■ Exercice.2 :

Monter Déterminer le champ magnétique \vec{B} créé en tout point de l'espace où il est défini par un fil cylindrique rectiligne d'axe Oz , de section circulaire de rayon R , parcouru par un courant volumique d'intensité totale I et de densité de la forme $\vec{j} = j_0 \frac{r}{R} \vec{u}_z$, où r désigne la distance à l'axe Oz .

■ Exercice.3 :

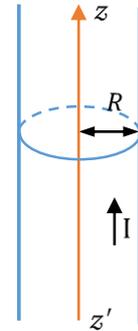
Monter En utilisant les équations locales (de MAXWELL), déterminer, partout où il est défini le champ magnétique \vec{B} créé par un cylindre rectiligne infiniment long, à base circulaire de rayon R et parcouru par un courant d'intensité I dans la direction de l'axe et de densité de courant uniforme dans le volume du cylindre. Le milieu extérieur est assimilable au vide.



📌 **Exercice.4 :**

Monter Un cylindre conducteur de conductivité γ , de rayon R , de longueur h , est considéré comme infiniment long et est parcouru par un courant stationnaire uniformément réparti dans la direction de l'axe, d'intensité I .

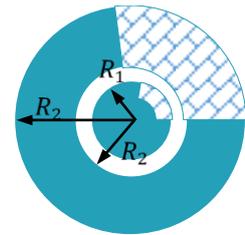
- 1- Déterminer le champ électromagnétique en tout point de l'espace.
- 2- En déduire le vecteur de Poynting en tout point de l'espace et son flux à travers la surface cylindrique du conducteur. Commenter le résultat.
- 3- Vérifier l'équation locale de Poynting en tout point. Interpréter.



📌 **Exercice.5 :**

Monter Un fil conducteur cylindrique, noté (1), non magnétique, de rayon R_1 , d'axe $\Delta = (Oz)$, de très grande longueur, est parcouru par un courant continu, d'intensité I . Le milieu (1) est assimilable au vide. Le fil est entouré par un isolant et par un autre conducteur cylindrique noté (2), de rayon intérieur R_2 , et de rayon extérieur R_3 .

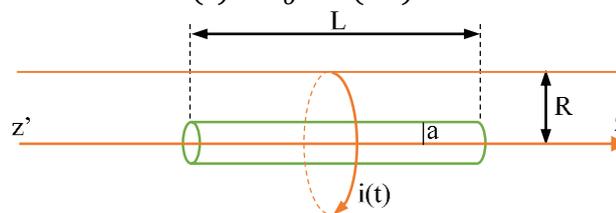
Le courant d'intensité I passe toujours dans le fil (1) et revient en sens inverse par le conducteur (2), la densité de courant étant toujours uniforme et parallèle à l'axe Δ dans chacun des deux conducteurs.



En utilisant les équations locales de Maxwell, déterminer le vecteur champ magnétique \vec{B} créé par ce courant. Tracer la courbe $B(r)$.

📌 **Exercice.6 :**

Soit un cylindre métallique de conductivité γ , de rayon a et de longueur L , est placé à l'intérieur d'un long solénoïde de même axe que le cylindre, de rayon R , ayant n spires par mètre, parcouru par un courant de basse fréquence d'intensité $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$.



- 1- Rappeler l'expression du champ magnétique créé par ce solénoïde en tout point de l'espace.
- 2- En déduire que nécessairement, un champ électrique \vec{E} est créé. Le déterminer à l'intérieur du solénoïde.
- 3- En déduire la densité de courant volumique \vec{j} qui apparaît dans le cylindre conducteur.
- 4- Déterminer la puissance instantanée dissipée par effet joule dans la conducteur. Déterminer, à l'intérieur du cylindre, le champ magnétique variable \vec{B}' , supposé nul à l'extérieur du cylindre et créé par la densité de courant volumique.
- 5- Calculer le rapport des amplitudes des champs \vec{B} et \vec{B}' . Interpréter.

■ Exercice.7 :

Un dispositif est formé de deux armatures sphériques, concentriques et conductrices, de rayons a et $b > a$. L'espace compris entre les armatures possède une conductivité γ . A l'instant $t = 0$, l'armature intérieure est chargée avec une charge Q_0 , aucune charge n'est présente ailleurs. On supposera qu'il n'existe aucun champ statique.

- 1- Montrer que la densité volumique de charges ρ reste nulle au sein du conducteur inter-armatures.
- 2- Établir l'expression du champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) dans le milieu conducteur.
- 3- Montrer qu'aucune puissance électromagnétique n'est rayonnée par le système. Établir le bilan local des puissances.
- 4- En déduire l'expression de la charge $Q(t)$ de l'armature intérieure.
- 5- Établir le bilan intégral des puissances et l'intégrer entre les instants $t = 0$ et $t = +\infty$.

■ Exercice.8 :

On charge un condensateur plan de capacité C à travers une résistance R aux bornes d'un générateur idéal de forme électromotrice U constante (à $t = 0$, le condensateur est déchargé). On suppose que ses armatures sont circulaires de surface S mais qu'elles peuvent être considérées comme des plans infinis séparés par une distance d de vide (isolant parfait).

- 1- Représenter le schéma électrique et déterminer la loi $q(t)$, charge de l'armature positive.
- 2- Déterminer le champ $\vec{E}(t)$ entre les armatures (on le suppose nul ailleurs). On suppose que la charge est uniformément répartie sur les armatures.
- 3- En déduire que, nécessairement, un champ magnétique \vec{B} existe entre les armatures. Quelle en est la source ?
- 4- Quelle est la topographie du champ magnétique \vec{B} (direction, variables) ? Pour cette étude, on ne suppose pas les armatures comme des plans infinis.
- 5- A l'aide de l'équation locale adéquate, montrer que :

$$B = \|\vec{B}\| = \frac{\mu_0 U r}{2RS} r^{-\frac{t}{RC}}$$

- 6- Utiliser le théorème d'Ampère généralisé pour retrouver \vec{B} entre les armatures.
- 7- Le modèle est-il en accord avec l'ensemble des équations de Maxwell ?
- 8- Bilan énergétique.
 - a- Dans l'étude électrique de ce circuit RC, quelle est la puissance P reçue par le condensateur ? On l'exprimera en fonction de U , R , C et t .
 - b- En déduire l'énergie W reçue par le condensateur entre l'origine des dates et l'instant t .
 - c- Rappeler l'équation locale de Poynting. Donner l'interprétation physique de chaque terme.
 - d- Déterminer l'expression du vecteur de Poynting à l'instant, en fonction de U , r , R , S , d , C et t . On donne l'expression de la capacité de ce condensateur : $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$.
 - e- En utilisant le vecteur de Poynting, calculer la puissance P reçue par l'intérieur du condensateur à l'instant t . On note a le rayon des armatures. Conclure.

Solutions

■ Exercice :1

1- La loi d'Ohm locale s'écrit :

$$\vec{j}(M, t) = \gamma \vec{E}(M, t),$$

Où $\vec{j}(M, t)$ représente la densité de courant volumique qui traverse le conducteur en un point M à l'instant t et $\vec{E}(M, t)$ le champ électrique au point M à l'instant t.

L'équation de conservation de la charge s'écrit :

$$\text{div } \vec{j}(M, t) + \frac{\partial \rho}{\partial t}(M, t) = 0,$$

Où $\rho(M, t)$ représente la densité volumique de charges présentes au point M à l'instant t.

2- On peut écrire une relation entre le champ électrique et la densité volumique de charge :

$$\gamma \text{div } \vec{E}(M, t) + \frac{\partial \rho}{\partial t}(M, t) = 0,$$

Il faut alors trouver une relation entre le champ électrique $\vec{E}(M, t)$ et la densité volumique de charge. Il s'agit de l'équation de Maxwell-Gauss qui permet d'écrire : $\text{div } \vec{E}(M, t) = \frac{\rho(M, t)}{\epsilon_0}$,

On en déduit : $\frac{\gamma}{\epsilon_0} \rho(M, t) + \frac{\partial \rho}{\partial t}(M, t) = 0$.

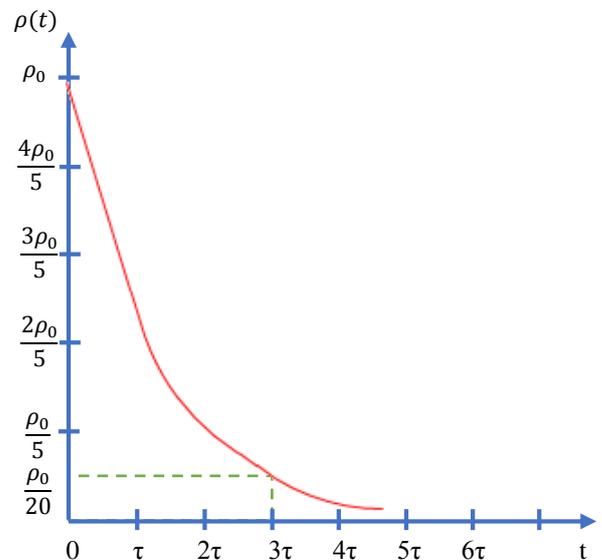
3. On retrouve là une question différentielle du premier degré qui se résout sous la forme :

$$\rho(M, t) = \rho_0(M) e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ avec } \tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma}.$$

4. La courbe représentant l'évolution de la densité ρ volumique de charges a une forme exponentielle décroissante. L'étude de la fonction exponentielle décroissante nous permet de dire qu'au bout d'un temps

$t = 3\tau$ on a $\rho(M, t) = 0.05\rho_0$ et au bout d'un temps $t = 5\tau$, $\rho(M, t) \leq 0.01\rho_0$

5. Application numérique : $\tau = 8.85 \cdot 10^{-18} \text{ s}$



■ Exercice :2

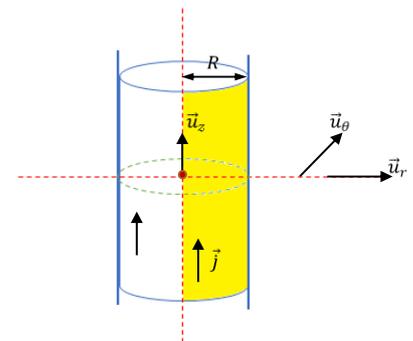
La distribution de courant a une forme cylindrique, on travaille alors en coordonnées cylindriques d'axe (Oz).

\vec{B} est dirigé selon le vecteur unitaire \vec{u}_θ de la base cylindrique. Donc la distribution est invariante dans toute rotation autour de son axe, ainsi que dans toute translation selon axe. On en déduit $B = B(r)$.

Dans un système de coordonnées cylindriques, on a :

$$\vec{B}(M) = B(r) \vec{u}_\theta$$

On connaît le champ magnétique sur l'axe, on commence donc à étudier l'équation de Maxwell dans le cylindre.



👉 Pour $r \leq R$, $\text{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ d'où $\text{rot}\vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB(r)) \vec{u}_z = \mu_0 j_0 \frac{r}{R} \vec{u}_z$

D'où $\frac{\partial}{\partial r} (rB(r)) = \mu_0 j_0 \frac{r^2}{R}$, qui donne $rB(r) = \mu_0 j_0 \frac{r^3}{3R} + k$, où k est constante d'intégration.

Le champ magnétique est nul sur l'axe $B(r=0)$ donne $k=0$.

On en déduit alors l'expression du champ magnétique :

$$B(r \leq R) = \mu_0 j_0 \frac{r^3}{3R}$$

👉 Pour $r \geq R$, $\text{rot}\vec{B} = \vec{0}$, puisqu'il n'y a pas de courant à l'extérieur du cylindre d'où :

$$\text{rot}\vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB(r)) \vec{u}_z = \vec{0}$$

Donc $\frac{\partial}{\partial r} (rB(r)) = 0$ donne $rB(r) = k'$, où k' est une constante d'intégration.

Or, le champ magnétique est continu à la surface du cylindre puisque l'on est en présence d'une distribution de courant volumique, d'où $B(r=R) = \mu_0 j_0 \frac{R^2}{3}$ donne $\mu_0 j_0 \frac{R^2}{3} = k'$

On en déduit alors l'expression du champ magnétique :

$$B(r \geq R) = \mu_0 j_0 \frac{r^2}{3R}$$

👉 Enfin, on détermine j_0 en fonction de I . Le courant dans le cylindre est $I = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS}$ où S

est la section circulaire de rayon R du cylindre, soit

$$\vec{dS} = r dr d\theta \vec{u}_z.$$

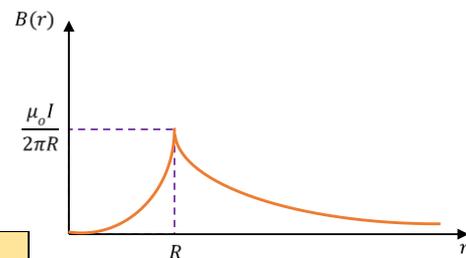
$$\text{On en déduit : } I = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS} = \int_0^R j_0 \frac{r}{R} r dr \int_0^{2\pi} d\theta =$$

$$\frac{2}{3} \pi R^2 j_0 \text{ soit } j_0 = \frac{3I}{2\pi R^2}, \text{ d'où } \vec{j} = \frac{3I}{2\pi R^3} r \vec{u}_z.$$

On obtient alors :

$$B(r \leq R) = \mu_0 \frac{I r^2}{2\pi R^3}$$

$$B(r \geq R) = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}$$



🔷 Exercice :3

👉 Dans un premier temps, on détermine \vec{j} . Le courant dans le

cylindre a une direction parallèle à l'axe du cylindre. Donc $I =$

$\iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS}$ où \vec{j} est dirigé suivant l'axe (Oz) et S est la section

circulaire de rayon R du cylindre. On considère la section du

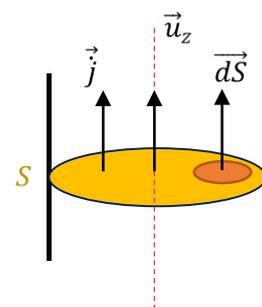
cylindre donc $\vec{dS} = dS \cdot \vec{u}_z$ et on suppose la répartition uniforme du

courant donc \vec{j} a une même valeur en tout point du cylindre.

On en déduit : $I = \vec{j} \times \pi R^2$. D'où $\vec{j} = \frac{I}{\pi R^2} \vec{u}_z$.

👉 \vec{B} est dirigé selon le vecteur unitaire \vec{u}_θ de la base

cylindrique. Donc la distribution est invariante dans toute rotation autour de son axe, ainsi que dans



toute translation selon axe. On en déduit $B = B(r)$. Dans un système de coordonnées cylindriques, on a :

$$\vec{B}(M) = B(r)\vec{u}_\theta$$

✚ On utilise une équation de Maxwell qui permet de calculer le champ magnétique à partir de ces sources. Il s'agit évidemment de l'équation de Maxwell-Ampère que l'on écrit dans les domaines ($r \leq R$) et ($r \geq R$) où le milieu est assimilable au vide.

✚ On remarque que l'on est dans un problème de magnétostatique où il n'y a aucune distribution de charges fixes : le champ électrique \vec{E} est donc nul en tout point. Et on connaît le champ magnétique sur l'axe, on commence donc l'étude à l'intérieur du cylindre.

🔊 Pour $r \leq R$, $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$ d'où $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB(r))\vec{u}_z = \mu_0j\vec{u}_z$

Le champ magnétique satisfait donc l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial r}(rB(r)) = \mu_0j r$$

Cela donne : $rB(r) = \mu_0j \frac{r^2}{2} + k$ où k est une constante d'intégration.

En plus, le champ magnétique étant nul sur l'axe $B(r = 0) = 0$, donne $k = 0$.

On en déduit alors l'expression du champ magnétique :

$$B(r \leq R) = \mu_0j \frac{r}{2}$$

🔊 Pour $r \geq R$, $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \vec{0}$, puisqu'il n'y a pas de courant à l'extérieur du cylindre d'où :

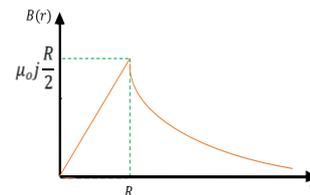
$$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB(r))\vec{u}_z = \vec{0}$$

Donc $\frac{\partial}{\partial r}(rB(r)) = 0$ donne $rB(r) = k'$, où k' est une constante d'intégration.

Or, le champ magnétique est continu à la surface du cylindre puisque l'on est en présence d'une distribution de courant volumique, d'où $RB(r = R) = \mu_0j \frac{R^2}{2} = k'$

On en déduit alors l'expression du champ magnétique :

$$B(r \geq R) = \mu_0j_o \frac{R^2}{2r}$$



✚ Exercice :4

1- Tout d'abord, le champ magnétique \vec{B} de cette distribution a été défini dans l'exercice 3. On avait d'ores et déjà trouvé les résultats suivants :

$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0j \frac{r}{2} \vec{u}_\theta = \mu_0 \frac{Ir}{2\pi R^2} \vec{u}_\theta & \text{pour } r \leq R \\ \mu_0j_o \frac{R^2}{2r} \vec{u}_\theta = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} \vec{u}_\theta & \text{pour } r \geq R \end{cases}$$

🔊 Etudions maintenant le champ électrique \vec{E} .

La loi d'Ohm permet alors de déterminer le champ électrique dans le cylindre : $\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma}$.

On a donc : pour

$$r \leq R, \vec{E} = \frac{I}{\gamma \pi R^2} \vec{u}_z.$$

Et comme il n'y a pas de distribution de charges, le champ électrique est nul à l'extérieur. On a donc : pour

$$r \geq R, \vec{E} = \vec{0}$$

2- A partir de ces résultats, on peut déterminer le vecteur de Poynting en tout point :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

$$\text{Pour } r \leq R, \text{ on a : } \vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{I}{\gamma \pi R^2} \vec{u}_z \wedge \mu_0 \frac{Ir}{2\pi R^2} \vec{u}_\theta = -\frac{I^2}{\gamma (\pi R^2)^2} \frac{r}{2} \vec{u}_r$$

$$\text{Pour } r \geq R, \text{ on a : } \vec{E} = \vec{0}, \text{ on a } \vec{\Pi} = \vec{0}$$

Le vecteur de Poynting de l'interface entre le conducteur et le vide est :

$$\vec{\Pi} = -\frac{I^2}{\gamma (\pi R^2)^2} \frac{R}{2} \vec{u}_r$$

Le flux du vecteur de Poynting à travers la surface du conducteur est le flux de $\vec{\Pi}$ à travers la surface S dont le vecteur surface élémentaire est $d\vec{S} = dS \vec{u}_r = R d\theta dz \vec{u}_r$

$$\iint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = \iint_S -\frac{I^2}{\gamma (\pi R^2)^2} \frac{R}{2} R d\theta dz = \frac{I^2}{2\gamma \pi^2 R^2} \int_0^h dz \times \int_0^{2\pi} d\theta$$

Donc

$$\iint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = -\frac{h}{\gamma \pi R^2} I^2 = -\frac{h}{\gamma S} I^2$$

Remarque:

On retrouve que l'énergie électromagnétique cédée par le conducteur à l'extérieur à travers sa surface est négative. Il s'agit donc **d'une énergie reçue par le conducteur**.

Le conducteur ne peut emmagasiner d'énergie. Un bilan énergétique montre alors que cette énergie est forcément cédée à l'extérieur sous une autre forme. Cette énergie est ainsi cédée sous forme d'énergie thermique qu'on appelle « **effet joule** ».

La puissance perdue par effet joule est celle cédée par le champ aux porteurs de charges du conducteur :

$$P_j = \iiint_\tau \vec{j} \cdot \vec{E} \, d\tau = \iiint_\tau \frac{j^2}{\gamma} \, d\tau = \frac{I^2}{\gamma S^2} \tau = \frac{I^2 h}{\gamma S}$$

3- On distingue deux domaines :

Pour $r \leq R$, l'énergie électromagnétique par unité de volume est :

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left(\frac{I^2}{\gamma \pi R^2} \right)^2 + \frac{\mu_0}{2} \left(\frac{Ir}{2\pi R^2} \right)^2$$

Le courant I est continu donc : $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{dW}{dt} \right) = 0$

On calcule $div \vec{\Pi} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\Pi) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{I^2}{\gamma(\pi R^2)^2} \frac{r^2}{2} \right) = -\frac{I^2}{\gamma(\pi R^2)^2}$ et $\vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{I}{\pi R^2} \right)^2$

Le courant I est continu donc : $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{dW}{dt} \right) = 0$

On calcule $div \vec{\Pi} + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$

On vérifie que :

$$div \vec{\Pi} + \vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{dW}{dt} \right) = 0$$

L'équation locale de Poynting est donc vérifiée en tout point.

■ **Exercice :5**

• Les cylindres (1) et (2) parcourus par un courant d'intensité I et de densité uniforme dans le volume du cylindre sont considérés comme des distributions de courant volumique notés respectivement \vec{j}_1 et \vec{j}_2 . Les distributions de courant ayant une forme cylindrique, on travaille en coordonnées cylindriques d'axe (Oz) qui coïncide avec l'axe du cylindre.

Les distributions de courant sont volumiques donc le champ magnétique est défini et continue tout point.

• Dans un premier temps, on détermine \vec{j}_1 et \vec{j}_2 .

a- Pour le cylindre (1), : $I = \iint_{S_1} \vec{j}_1 \cdot \vec{dS}$ où \vec{j}_1 est dirigé suivant l'axe Δ et S_1 est la section circulaire de rayon R_1 du cylindre. On considère la section du cylindre donc $\vec{dS} = dS \cdot \vec{u}_z$, et on suppose la répartition uniforme donc \vec{j}_1 a même valeur en tout point du cylindre.

On en déduit $I = j_1 \times \pi R_1^2$. D'où :

$$\vec{j}_1 = \frac{I}{\pi R_1^2} \vec{u}_z$$

b- Pour le cylindre (2), : $I = \iint_{S_2} \vec{j}_2 \cdot \vec{dS}$ où \vec{j}_2 est dirigé suivant l'axe Δ et S_2 est la section circulaire de rayon intérieur R_2 et de rayon extérieur R_3 . On considère la section du cylindre donc $\vec{dS} = dS \cdot \vec{u}_z$, et on suppose la répartition uniforme donc \vec{j}_2 a même valeur en tout point du cylindre.

On en déduit $I = -j_2 \times \pi(R_3^2 - R_2^2)$. D'où :

$$\vec{j}_2 = -\frac{I}{\pi(R_3^2 - R_2^2)} \vec{u}_z$$

• Dans un deuxième temps, on étudie les symétries et invariances du champ magnétique en un point M quelconque de l'espace.

✚ \vec{B} est dirigé selon le vecteur unitaire \vec{u}_θ de la base cylindrique. Donc la distribution est invariante dans toute rotation autour de son axe, ainsi que dans toute translation selon axe. On en déduit $B = B(r)$. Dans un système de coordonnées cylindriques, on a:

$$\vec{B} = B(r) \vec{u}_\theta$$

✚ Ensuite, il faut trouver un point où le champ magnétique a une valeur connue. Intéressons-nous à $\vec{B}(r = 0)$. Tous les plans contenant l'axe du cylindre **sont plans** de symétrie de la distribution de

courant. Donc $\vec{B}(r = 0)$ est orthogonal à tous ces plans. Ceci n'est pas réalisable que si le vecteur est nul. Donc $\vec{B}(r = 0) = \vec{0}$.

Enfin, on utilise une équation de Maxwell qui permet de calculer le champ magnétique en statique. Il s'agit évidemment de l'équation de Maxwell-Ampère que l'on écrit dans les domaines $\{r \leq R_1\}$; $\{R_1 \leq r \leq R_2\}$; $\{R_2 \leq r \leq R_3\}$ et $\{r \geq R_3\}$ où le milieu est partout assimilable au vide.

On connaît le champ magnétique sur l'axe donc on commence par l'étude du champ \vec{B} dans le cylindre (1).

Pour $r \leq R_1$, $\vec{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_1$ d'où $\vec{rot} \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB(r)) \vec{u}_z = \mu_0 j_1 \vec{u}_z$

Le champ magnétique satisfait donc l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial r} (rB(r)) = \mu_0 j_1 r$$

Cela donne : $rB(r) = \mu_0 j_1 \frac{r^2}{2} + k_1$ où k_1 est une constante d'intégration.

En plus, le champ magnétique étant nul sur l'axe $B(r = 0) = 0$, donne $k_1 = 0$.

On en déduit alors l'expression du champ magnétique :

$$\vec{B}(r \leq R_1) = \mu_0 I \frac{r}{2\pi R_1^2} \vec{u}_\theta$$

Pour $R_1 \leq r \leq R_2$, $\vec{rot} \vec{B} = \vec{0}$ puisqu'il n'y a pas de courant dans l'isolant par définition d'où : $\vec{rot} \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB(r)) \vec{u}_z = \vec{0}$

Donc $\frac{\partial}{\partial r} (rB(r)) = 0$ donne $rB(r) = k_2$ où k_2 est une constante d'intégration.

Or, le champ magnétique est continu à la surface du cylindre (1) puisque l'on est en présence d'une distribution de courant volumique, d'où $B(r = R_1) = \mu_0 I \frac{1}{2\pi R_1} = \frac{k_2}{R_1}$ donne : $k_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi}$

On en déduit alors l'expression du champ magnétique :

$$\vec{B}(R_1 \leq r \leq R_2) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

Pour $R_2 \leq r \leq R_3$, $\vec{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_2$ d'où $\vec{rot} \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB(r)) \vec{u}_z = \mu_0 j_2 \vec{u}_z$

Le champ magnétique satisfait donc l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial r} (rB(r)) = \mu_0 j_2 r$$

Cela donne : $rB(r) = \mu_0 j_2 \frac{r^2}{2} + k_3 = -\mu_0 \frac{I}{\pi(R_3^2 - R_2^2)} \frac{r^2}{2} + k_3$ où k_3 est une constante d'intégration.

Par continuité à l'interface $r = R_2$, $R_2 B(r = R_2) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} = -\mu_0 \frac{I}{\pi(R_3^2 - R_2^2)} \frac{R_2^2}{2} + k_3$, donc $k_3 =$

$$\mu_0 \frac{I}{\pi(R_3^2 - R_2^2)} \frac{R_2^2}{2}$$

On en déduit alors l'expression du champ magnétique :

$$\vec{B}(R_2 \leq r \leq R_3) = \mu_0 I \frac{(R_3^2 - r^2)}{2\pi R_2 (R_3^2 - R_2^2)} \vec{u}_\theta$$

👉 Pour $r \geq R_3$, $\overrightarrow{rot\vec{B}} = \vec{0}$ puisqu'il n'y a pas de courant dans l'isolant par définition d'où : $\overrightarrow{rot\vec{B}} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB(r)) \vec{u}_z = \vec{0}$

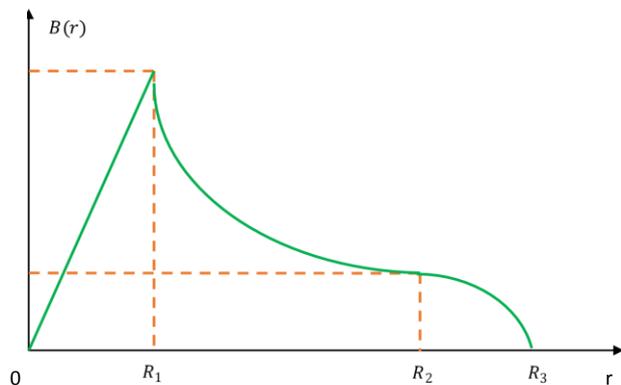
Donc $\frac{\partial}{\partial r} (rB(r)) = 0$ donne $rB(r) = k_4$ où k_4 est une constante d'intégration.

Or, le champ magnétique est continu à la surface du cylindre (2) puisque l'on est en présence d'une distribution de courant volumique, $B(r = R_3) = 0$ donne : $k_4 = 0$.

On en déduit alors l'expression du champ magnétique :

$$\vec{B}(r \geq R_3) = \vec{0}$$

On peut tracer l'évolution du champ magnétique en fonction de la distance r à l'axe (Oz) :



■ Exercice :6

1- Le champ magnétique créé par le solénoïde infini est :

$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 n I_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z & \text{à l'intérieur du solénoïde} \\ \vec{0} & \text{à l'extérieur du solénoïde} \end{cases}$$

Où \vec{u}_z est le vecteur directeur de l'axe du solénoïde

2- ☺ Le champ magnétique est dépendant du temps. Donc $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ est non nul. L'équation de Maxwell-

Faraday permet d'en déduire qu'il existe un champ électrique tel que : $\overrightarrow{rot\vec{E}} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

Afin de déterminer le champ électrique, on étudie les symétries et invariances du dispositif. Le solénoïde possède une symétrie cylindrique. On utilise les coordonnées cylindriques et la base associée $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ où \vec{u}_z est le vecteur directeur de l'axe du solénoïde. Donc le champ électrique est normal à ce plan soit $\vec{E}(t) = E(t) \vec{u}_\theta$.

Le solénoïde est invariant par translation selon son axe et par rotation d'angle θ et z . On conclut que $\vec{E}(M, t) = E(z, t) \vec{u}_\theta$.

☺ Il reste à trouver un point particulier où le champ électrique nous est connu. Tous les plans contenant l'axe du solénoïde sont plans d'antisymétrie.

Or le champ électrique sur l'axe (Oz) ne peut être orthogonal à tous ces points : il est donc nul en tout point M de l'axe du solénoïde : $\vec{E}(r = 0, t) = \vec{0}$.

$$\odot \text{ On a } \overrightarrow{rot}\vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE(r)) \vec{u}_z = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t) \vec{u}_z$$

On trouve alors :

$$rE(r) = \mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t) \frac{r^2}{2} + k \text{ où } k \text{ est une constante d'intégration.}$$

$$E(r = 0) = 0 \text{ donne donc : } k = 0.$$

Ceci conduit à :

$$\vec{E}(r, t) = \mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t) \frac{r}{2} \vec{u}_\theta$$

3- D'après la loi d'Ohm, on a $\vec{j} = \gamma \vec{E}$, d'où :

$$\vec{j}(r, t) = \gamma \mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t) \frac{r}{2} \vec{u}_\theta$$

4- La puissance volumique dissipée par effet Joule est donnée par $\vec{j} \cdot \vec{E}$.

Donc la puissance P_j dissipée dans le conducteur est l'intégrale sur le volume V du conducteur de ce produit scalaire.

$$P_j = \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$$

Où $d\tau = r dr d\theta dz$ est un élément de volume conducteur en coordonnées cylindriques :

Donc :

$$P_j = \iiint_V \gamma \left(\mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t) \frac{r}{2} \right)^2 r dr d\theta dz = \gamma \left(\frac{\mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t)}{2} \right)^2 \int_0^a r^2 dr \times \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^z dz$$

On obtient :

$$P_j = \frac{\gamma}{8} \pi L a^2 [\mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t)]^2$$

5- Le champ magnétique variable \vec{B}' est le champ magnétique créé par la densité de courant volumique présente dans le conducteur. Il est obtenu à partir de l'équation de Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{rot}\vec{B}' = \mu_0 \vec{j}$.

\odot La distribution du courant volumique \vec{j} est invariante par translation selon son axe et par rotation d'angle θ (on considère toujours L très grand). Donc le champ magnétique est indépendant des variables θ et z . On en conclut que $\vec{B}'(M, t) = B'(z, t) \vec{u}_z$.

\odot Enfin, on utilise l'équation de Maxwell-Ampère que l'on écrit dans le conducteur ($r \leq a$).

On a :

$$\overrightarrow{rot}\vec{B}' = \mu_0 \vec{j} \text{ d'où } \overrightarrow{rot}\vec{B}' = -\frac{\partial B'(r)}{\partial r} \vec{u}_\theta = \mu_0^2 n I_0 \omega \sin(\omega t) \frac{r}{2} \vec{u}_\theta$$

On obtient :

$$B'(r) = \mu_0^2 \gamma n I_0 \omega \sin(\omega t) \frac{r^2}{4} + k' \text{ où } k' \text{ est une constante d'intégration.}$$

La distribution de courant est à répartition volumique donc le champ magnétique est continu à l'interface $r = a$ avec l'extérieur du conducteur où le champ magnétique \vec{B}' est nul.

On obtient donc $k' = -\mu_0^2 \gamma n I_0 \omega \sin(\omega t) \frac{a^2}{4}$.

On trouve alors :

$$\vec{B}'(r) = \mu_0^2 \gamma n I_0 \omega \sin(\omega t) \frac{(r^2 - a^2)}{4} \vec{u}_z$$

6- On calcule le rapport des amplitudes :

$$\frac{\text{Amplitude de } B'(r)}{\text{Amplitude de } B(r)} = \frac{\mu_0^2 \gamma n I_0 \omega \frac{|r^2 - a^2|}{4}}{\mu_0 n I_0} = \frac{|r^2 - a^2|}{\frac{4}{\mu_0 \gamma \omega}} = \frac{|r^2 - a^2|}{\delta^2}$$

Où $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$ est l'épaisseur de peau.

Conclusion :

- Le champ magnétique \vec{B}' créé par la densité de courant volumique a une amplitude qui croît lorsque l'on pénètre dans le conducteur.
- Pour un mauvais conducteur (petit), l'épaisseur de peau est grande et le champ magnétique \vec{B} créé par le solénoïde pénètre bien dans le conducteur et est prépondérant.
- Pour un bon conducteur (notamment lorsque $\delta \ll a$), la présence du cylindre dans le solénoïde modifie fortement le champ magnétique et ce dernier a du mal à pénétrer à l'intérieur du conducteur. C'est donc le champ \vec{B}' créé par la densité de courant volumique \vec{j} qui devient prépondérant à l'intérieur du cylindre conducteur.

■ **Exercice :7**

1- En tout point M du conducteur, les équations locales $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ et $\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ sont vérifiées.

On a donc $\gamma \text{div} \vec{E}(M, t) + \frac{\partial \rho}{\partial t}(M, t) = 0$, et comme $\text{div} \vec{E}(M, t) = \frac{\rho(M, t)}{\epsilon_0}$ (équation de Maxwell-Gauss), on en déduit :

$$\frac{\gamma}{\epsilon_0} \rho(M, t) + \frac{\partial \rho}{\partial t}(M, t) = 0.$$

C'est une équation différentielle du premier degré qui se résout sous la forme :

$$\rho(M, t) = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad , \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma}$$

Or, à $t = 0$, on a $\rho = 0$ (conducteur non chargé), donc $\rho_0 = 0$, soit $\rho(M, t) = 0$

2- ☺ La distribution de charges est à symétrie sphérique, on utilisera donc les coordonnées sphériques et les vecteurs de base associés $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$.

☺ On cherche à déterminer en premier le champ électrique puisque l'on a une distribution de charges fixes à l'instant initial. On étudie les symétries et invariances du champ électrique en un point M de l'espace conducteur. Donc le champ électrique \vec{E} est dirigé selon \vec{u}_r .

La distribution de charge est invariante par les rotations d'angle θ et φ . Le champ électrique n'est alors fonction que de la variable r .

Donc : $\vec{E}(M, t) = E(r, t) \vec{u}_r$

☺ Afin d'établir l'expression du champ électrique, on utilise le théorème de GAUSS sur une surface S à r constant, c'est-à-dire une sphère:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Or l'élément de surface est orienté suivant \vec{u}_r , donc $\vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r) dS$ où $E(r)$ est constant sur la surface d'intégration.

D'où

$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_S E(r) dS = E(r) \oiint_S dS = E(r) S = \frac{Q(t)}{\epsilon_0}$ où $S = 4\pi r^2$ et $Q(t)$ est la charge de l'armature de rayon a .

On en déduit :

$$\vec{E}(a < r < b) = \frac{Q(t)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

☺ Le champ électrique est dirigé selon \vec{u}_r et ne dépend que de r : Donc $\text{rot}\vec{E} = \vec{0}$.

Ce qui conduit, d'après l'équation de Maxwell-Faraday, à $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$.

Comme il n'existe aucun champ électrique statique, on obtient : $\vec{B}(a < r < b) = \vec{0}$.

3- ☺ La puissance électromagnétique rayonnée par le système correspond au flux du vecteur de Poynting à travers la surface fermée entourant le volume du conducteur.

Or le champ magnétique est nul à l'intérieur du conducteur et sur l'interface puisqu'il n'y a pas de courant surfacique. Il en est donc de même du vecteur de Poynting.

On en conclut qu'**aucune puissance électromagnétique n'est rayonnée par le système.**

☺ Le bilan énergétique local est représenté par l'équation locale de Poynting qui s'écrit :

$$\text{div} \vec{R} + \vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{dW}{dt} \right) = 0 \text{ où } \frac{dW}{dt} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q(t)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2.$$

On calcule

$$\text{div} \vec{R} = 0 \text{ et } \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2 = \gamma \left(\frac{Q(t)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2.$$

On obtient alors

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{dW}{dt} \right) = -\text{div} \vec{R} - \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma \left(\frac{Q(t)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 = -\frac{\epsilon_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{Q(t)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{dQ(t)}{dt}$$

Ceci s'écrit alors sous la forme d'une équation différentielle traduisant le bilan énergétique en tout point du conducteur :

$$\boxed{\frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{\gamma}{\epsilon_0} Q(t)}$$

4- On en déduit l'expression de $Q(t)$ qui est $Q(t) = Q_0 e^{-\frac{\gamma}{\epsilon_0} t}$.

5- ☺ La puissance dissipée par effet Joule est :

$$P_j = \iiint_{\tau} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$$

Où τ représente le volume du conducteur compris entre les armatures et $d\tau$ est un élément de volume de ce conducteur.

Donc :

$$P_j = \iiint_{\tau} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau = \iiint_{\tau} \gamma \left(\frac{Q(t)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

D'où

$$P_j = \gamma \left(\frac{Q(t)}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \int_a^b \frac{dr}{r^2} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\gamma}{4\pi} \left(\frac{Q(t)}{\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

Si on remplace $Q(t)$ par son expression, on obtient :

$$P_j = \gamma \frac{Q_0^2}{4\pi\epsilon_0^2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) e^{-2\frac{\gamma}{\epsilon_0}t}$$

☺ La puissance électromagnétique cédée par le champ est $P_{res} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\iiint_{\tau} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau \right)$ où τ représente le volume du conducteur compris entre les armatures et $d\tau$ est un élément de volume de ce conducteur.

Donc :

$$P_{res} = -\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q(t)}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \int_a^b \frac{dr}{r^2} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \right] = -\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \frac{Q(t)^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \right].$$

Si on remplace $Q(t)$ par son expression, on obtient :

$$P_{res} = \gamma \frac{Q_0^2}{4\pi\epsilon_0^2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) e^{-2\frac{\gamma}{\epsilon_0}t}$$

On retrouve le bilan de puissance. La puissance électromagnétique cédée au conducteur est transformée en puissance thermique par effet de joule : $P_j = P_{res}$

☺ L'énergie dissipée par effet joule entre les instants $t = 0$ et $t = +\infty$ est $W_j = \int_0^{+\infty} P_j dt$.

$$W_j = \gamma \frac{Q_0^2}{4\pi\epsilon_0^2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \int_0^{+\infty} e^{-2\frac{\gamma}{\epsilon_0}t} dt.$$

On a alors :

$$W_j = \frac{Q_0^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

☺ De même, on trouve que l'énergie électromagnétique cédée par le champ au conducteur est :

$$W_{res} = \frac{Q_0^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

■ Exercice :8

1- Le schéma électrique est celui d'un condensateur en série avec une résistance connectés à un générateur de tension U constante.

Par application de la loi des mailles, on obtient l'équation différentielle dont $q(t)$ est solution :

$$U = u_R + u_c = Ri + \frac{q(t)}{C} = R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C}$$

D'où $RC \frac{dq(t)}{dt} + q(t) = CU$

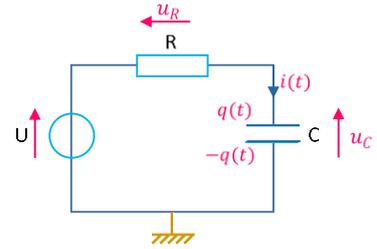
La solution de cette équation différentielle est la somme.

- La solution de l'équation sans second membre de la forme $q_1(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}}$, où A est une constante.
- La solution particulière de l'équation avec second membre de la forme $q_2(t) = CU$.

Le condensateur étant initialement déchargé ($q(t = 0) = 0$), on détermine ainsi la constante A. On trouve $A = -CU$.

On a donc : pour $t > 0$,

$$q(t) = CU(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$



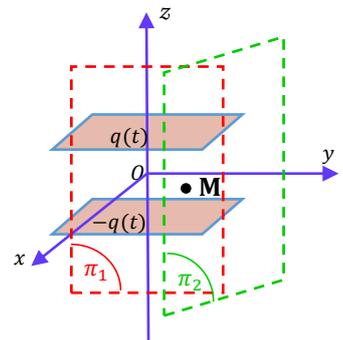
2- Afin de déterminer le champ électrique entre les armatures, on utilise le théorème de GAUSS.

Les armatures sont uniformément chargées et peuvent être considérées comme des plans infinis donc elles sont invariantes par les translations selon les axes (Ox) et (Oy). Le champ électrique est donc indépendant des variables x et y .

Soit un point M quelconque entre les armatures, les plans $\pi_1 = (Myz)$ et $\pi_2 = (Mxz)$ sont des plans de symétries de la distribution de charges.

Donc le champ électrique est dirigé selon l'axe intersection des deux plans, c'est-à-dire (Oz).

On a donc
$$\vec{E}(M) = E(z)\vec{u}_z$$



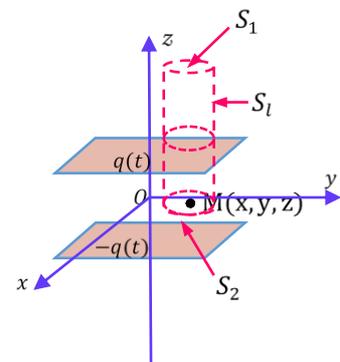
On peut alors appliquer le théorème de GAUSS. Pour cela, on définit une surface S_G de Gauss cylindrique dont les bases sont situées de part et d'autre de l'armature positive comme indiqué sur la figure ci-contre.

S_1 représente la section du cylindre qui se trouve en-dehors de l'espace inter-armatures, S_2 représente la section où se trouve le point M d'étude et S_l représente la surface latérale du cylindre.

On a donc $\oint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q(t)}{\epsilon_0}$ où S_G représente la surface fermée du cylindre, $d\vec{S}$ est un élément de surface du cylindre et $Q(t)$ est la charge contenue dans le cylindre.

Soit :
$$\oint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_l} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Or, la surface latérale, $d\vec{S}$ est orthogonal à \vec{E} donc $\iint_{S_l} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$. De plus, le champ électrique est nul sur la surface S_1 donc $\iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$. Enfin le vecteur $d\vec{S}$ est colinéaire à $-\vec{u}_z$ sur la surface S_2 et le champ électrique ne dépend que de la variable z donc :



$$\iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = -E(z)S_2$$

La surface de l'armature contenue dans le cylindre est identique à la surface S_2 et chargée avec une densité $\sigma(t)$. Donc $Q(t) = \sigma(t)S_2$

Il reste à déterminer $\sigma(t)$. On sait que la charge $q(t)$ est répartie uniformément sur les armatures cylindriques de surface S . Donc $\sigma(t) = \frac{q(t)}{S}$.

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = -E(z)S_2 = \frac{Q(t)}{\epsilon_0} = \frac{q(t)}{\epsilon_0 S} S_2$$

On en déduit :

$$\vec{E} = -\frac{q(t)}{\epsilon_0 S} \vec{u}_z = -\frac{CU(1 - e^{-\frac{t}{RC}})}{\epsilon_0 S} \vec{u}_z$$

3- D'après l'équation de Maxwell-Ampère, $\overrightarrow{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Or, le milieu entre les armatures est un isolant parfait, il ne peut donc y avoir de densité de courant : $\vec{j} = \vec{0}$. Cependant, le champ électrique dépend du temps donc $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \neq 0$. **Il existe donc un champ magnétique \vec{B} tel que $\overrightarrow{rot} \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Champ magnétique est présent du fait des variations temporelles du champ électrique.**

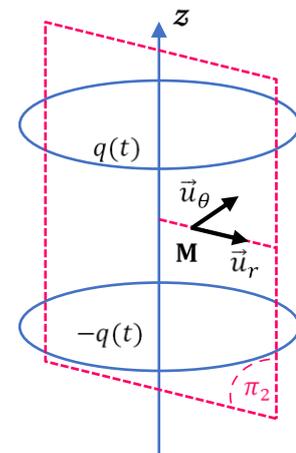
4- Pour l'étude du champ magnétique, on considère les armatures circulaires. On utilise alors les coordonnées cylindriques.

Soit M un point de l'espace entre les armatures, le plan $\pi_2 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution et du champ électrique donc le champ magnétique est normal à ce plan.

Les armatures et le champ électrique sont invariants par rotation d'angle θ . Le champ magnétique est donc indépendant de l'angle θ .

On trouve alors :

$$\vec{B} = B(r, z, t) \vec{u}_\theta$$



5- L'équation que l'on utilise est l'équation de Maxwell-Ampère en coordonnées cylindriques.

$$\overrightarrow{rot} \vec{B} = -\frac{\partial B(r, z, t)}{\partial z} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [rB(r, z, t)] \vec{u}_z = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{U e^{-\frac{t}{RC}}}{SR} \vec{u}_z.$$

$$\text{On a } \frac{\partial B(r, z, t)}{\partial z} = 0 \text{ et } \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [rB(r, z, t)] = -\mu_0 \frac{U e^{-\frac{t}{RC}}}{SR}$$

On en déduit que \vec{B} est indépendant de z et que :

$$rB(r, t) = -\mu_0 \frac{U e^{-\frac{t}{RC}} r^2}{2SR} + k \text{ où } k \text{ est une constante (indépendante de } z)$$

Afin de déterminer la constante, on cherche une valeur particulière du champ magnétique. En tout point M de l'axe, tout plan contenant l'axe est plan de symétrie. Le champ magnétique est donc nul sur l'axe : $\vec{B}(r = 0, t) = \vec{0}$. D'où $k = 0$.

On a donc :

$$\vec{B}(r, t) = -\mu_0 \frac{Ur}{2SR} e^{-\frac{t}{RC}} \vec{u}_\theta$$

6- On applique le théorème d'Ampère sur un contour Γ circulaire de rayon r et placé à la cote z .

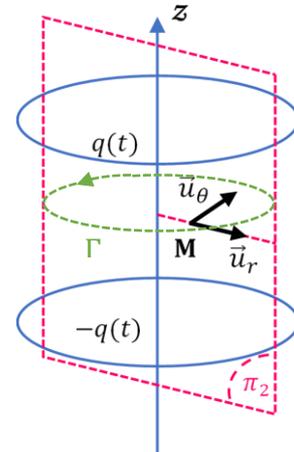
On se trouve dans un milieu isolant donc:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

Où S est une surface qui prend appui sur le contour. On suppose que cette surface est celle du disque du rayon r . Le contour est orienté dans le sens défini sur la figure donc $d\vec{l} = r d\theta \vec{u}_\theta$.

Le champ magnétique est constant sur le contour, voilà pourquoi on a :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r, t) \times 2\pi r.$$



La surface S est indiquée sur la figure précédente. C'est une surface à z constant et \vec{E} reste alors constant aussi. D'après l'orientation du contour, $d\vec{S} = dS \vec{u}_z$.

Donc $\mu_0 \epsilon_0 \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \times \pi r^2$

On en déduit que $B(r, t) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \times \frac{r}{2} = -\mu_0 \frac{Ur}{2SR} e^{-\frac{t}{RC}}$

On trouve alors :

$$\vec{B}(r, t) = -\mu_0 \frac{Ur}{2SR} e^{-\frac{t}{RC}} \vec{u}_\theta$$

7- L'équation de Maxwell-Ampère est forcément vérifiée.

🧠 L'équation de Maxwell-Gauss $div \vec{E} = 0$ est vérifiée car le champ électrique est dirigé suivant \vec{u}_z et indépendant de z .

🧠 L'équation de Maxwell-flux $div \vec{B} = 0$ est vérifiée car le champ magnétique est dirigé suivant \vec{u}_θ et indépendant de θ .

🧠 En revanche, $\overrightarrow{rot} \vec{E} = \vec{0}$ car \vec{E} est indépendant des coordonnées spatiales et $\frac{\partial \vec{E}(r,t)}{\partial t} = \mu_0 \frac{Ur}{2SR^2 C} e^{-\frac{t}{RC}} \vec{u}_\theta \neq \vec{0}$. **L'équation de Maxwell-Faraday n'est pas vérifiée.**

On conclut que le modèle est insuffisant pour rendre compte des caractéristiques des champs électrique et magnétique.

8- a/ L'étude électrique permet de déterminer la puissance reçue par le condensateur $P = u_c(t)i(t)$ où $u_c(t) = \frac{q(t)}{C}$ représente la tension aux bornes du condensateur et $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ est le courant traversant le condensateur compté positivement dans la convention récepteur.

On obtient $P = \frac{q(t)}{C} \frac{dq(t)}{dt}$ où $q(t) = CU(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$:

Donc :

$$P(t) = \frac{U^2}{R} e^{-\frac{t}{RC}} (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

b/ L'énergie reçue par le condensateur est $W = \int_0^t P(t)dt$

On trouve :

$$W(t) = \frac{CU^2}{2} (1 - 2e^{-\frac{t}{RC}} + e^{-2\frac{t}{RC}}) = \frac{CU^2}{2} (1 - e^{-\frac{t}{RC}})^2$$

c/ L'équation locale de Poynting est :

$$\text{div } \vec{R} + \vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{dW}{dt} \right) = 0$$

- $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{dW}{dt} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} \right)$ représente la puissance électromagnétique volumique cédée par le champ électromagnétique et reçue par le système.

- $\vec{j} \cdot \vec{E}$ représente la puissance volumique cédée par le système aux porteurs de charges. Dans notre cas $\vec{j} \cdot \vec{E} = \vec{0}$.

- $\text{div } \vec{R} = -\text{div} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right)$ représente la puissance reçue par le système par le rayonnement électromagnétique.

d/ Le vecteur de Poynting est $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = -\frac{CU^2 r}{2\epsilon_0 S^2 R} e^{-\frac{t}{RC}} (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \vec{u}_r$.

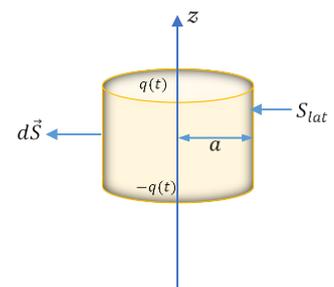
Or, on donne $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$.

Donc :

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = -\frac{U^2 r}{2SRd} e^{-\frac{t}{RC}} (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \vec{u}_r$$

e/ La puissance cédée par le condensateur est égal au flux du vecteur de Poynting à travers la surface délimitant le condensateur.

La puissance reçue correspond au flux de $-\vec{R}$ à travers la surface latérale du condensateur puisque \vec{R} est dirigé selon \vec{u}_r . Cette surface latérale S_{lat} est la surface du cylindre de bases des deux armatures du condensateur. Tous les points de cette surface se trouvent à la distance a de l'axe et l'élément de surface est orienté suivant \vec{u}_r .



Donc $P_{reçue} = -\iint_{S_{lat}} \vec{R} \cdot d\vec{S} = -\iint_{S_{lat}} \frac{U^2 a}{2SRd} e^{-\frac{t}{RC}} (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) a d\theta dz$

$$P_{reçue} = \frac{U^2 a}{2SRd} e^{-\frac{t}{RC}} (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-d/2}^{d/2} dz = \pi \frac{U^2 a^2}{SR} e^{-\frac{t}{RC}} (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

Avec $S = \pi a^2$, on retrouve :

$$P(t) = \frac{U^2}{2} e^{-\frac{t}{RC}} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

On retrouve le même résultat qu'à la question 8) a/. Le modèle que l'on utilise semble donc être cohérent pour l'étude énergétique du condensateur.

CHAPITRE 4

LE RÉGIME VARIABLE

4.1 Introduction

Le régime variable est caractérisé par des propriétés spécifiques liées à la dépendance des champs en fonction du temps. Ces particularités sont :

- 📌 **Le phénomène d'induction** : Un circuit filiforme au repos et parcouru par un courant invariable n'entraîne l'apparition d'aucune f.é.m ou d'aucun courant dans un autre circuit filiforme au repos. Il n'en est pas de même si le courant varie ou si les circuits en présence se déplacent l'un par rapport à l'autre : la f.é.m ou le courant qui apparaissent sont dus au phénomène d'induction. Ce phénomène entraîne l'apparition d'un champ électrique supplémentaire (appelé champ induit); ce qui conduit à modifier la propriété fondamentale du champ électrique .
- 📌 **Le phénomène de capacité** : Un circuit comprenant un condensateur alimenté par une source de tension variable en fonction du temps, est parcouru par un courant variable bien que la continuité électrique soit interrompue par l'espace entre les armatures du condensateur. Dans ce cas l'intensité du courant n'est plus conservée tout au long du circuit puisqu'elle est nulle dans l'espace entre les armatures. Il n'est donc plus possible d'appliquer le théorème d'Ampère. Pour conserver la validité de ce dernier, nous serons amenés à introduire le courant de déplacement.
- 📌 **Le phénomène de propagation** : Considérons un ensemble constitué par des circuits parcourus par des courants et par des distributions de charge variant en fonction du temps : cet ensemble pouvant être au repos ou en mouvement. Au voisinage de ces distributions règnent un champ électrique et un champ magnétique. Contrairement au cas stationnaire, ces champs ne sont pas synchrones avec les sources, c'est-à-dire qu'à un instant t donné, ces champs dépendent des valeurs des sources à un instant antérieur qui est fonction de la distance séparant le point d'observation des sources. Nous exprimons ce fait en disant qu'il y a propagation à vitesse finie des champs à partir des sources qui leur donnent naissance et le retard est d'autant plus grand que le point où l'on désire connaître les champs est éloigné des sources.

Toutefois dans le cas de régimes variant assez lentement en fonction du temps, on fait des approximations qui permettent de négliger certains termes dans les équations de Maxwell. Cet ensemble d'approximations est appelé l'approximation du régime quasi-stationnaire (A.R.Q.S).

4.2 L'induction électromagnétique

4.2.1 La loi de Lenz

On peut induire une f.é.m dans un circuit filiforme (\mathcal{C}) fermé en faisant varier le flux magnétique à travers le circuit : c'est le phénomène d'induction électromagnétique. Les cas de variations du flux du champ magnétique à travers un circuit sont :

- 🌀 Le cas d'un circuit mobile dans un champ magnétique permanent,
- 🌀 Le cas d'un circuit fixe dans un champ magnétique variable,
- 🌀 Le cas général d'un circuit mobile dans un champ magnétique variable.

Pour trouver de manière qualitative le sens du courant induit, on utilise la **loi de Lenz** qui stipule que :

Le sens du courant induit est tel que le champ magnétique qu'il crée s'oppose à la variation de flux qui lui a donné naissance.

Puisque une f.é.m apparaît dans le circuit (\mathcal{C}) et y fait circuler un courant ceci implique l'existence d'un champ électromoteur agissant sur les porteurs de charge du circuit (\mathcal{C}). Ce champ est appelé champ électrique induit.

4.2.2 Loi de Faraday

Pendant un temps dt , la variation du flux magnétique total à travers une surface quelconque s'appuyant sur le circuit (\mathcal{C}) est $d\phi$; la f.é.m induite e s'exprime à l'aide de la **loi de Faraday** :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} \quad (4.1)$$

Cette loi, établie expérimentalement pour des variations relativement lentes du flux magnétique en fonction du temps, est valable pour tout régime variable et elle sert de base à l'étude de l'électromagnétisme classique.

4.2.3 Equation de Maxwell-Faraday

Considérons un circuit (\mathcal{C}) au repos soumis à un champ variable. Un champ électrique va prendre naissance dans tout l'espace où existe un champ magnétique variable. Le champ électrique induit joue un rôle de champ électromoteur et la f.é.m apparaissant dans tout le circuit (\mathcal{C}) peut s'écrire :

$$e = \oint_{(\mathcal{C})} \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (4.2)$$

où (S) est une surface orientée s'appuyant sur le contour orienté(\mathcal{C}).

En permutant les opérateurs d'intégration et de dérivation on a :

$$\oint_{(\mathcal{C})} \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = - \iint \frac{\partial(\vec{B} \cdot d\vec{S})}{\partial t} = - \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (4.3)$$

car le circuit (\mathcal{C}) étant immobile, la surface (S) l'est aussi et $d\vec{S}$ est indépendant du temps. En appliquant le théorème de Stokes nous pouvons écrire :

$$\oint_{(\mathcal{C})} \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \vec{\nabla} \times \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = - \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (4.4)$$

Cette égalité étant satisfaite quelle que soit (S) s'appuyant sur (\mathcal{C}), il en résulte :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_i = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.5)$$

Remarquons que s'il existe en plus du champ électrique induit un champ électrostatique \vec{E}_S , le champ total \vec{E} est la somme du champ électrostatique \vec{E}_S et du champ électrique induit \vec{E}_i :

$$\vec{E} = \vec{E}_S + \vec{E}_i \quad (4.6)$$

On peut aisément vérifier que \vec{E} satisfait la relation la relation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times [\vec{E}_S + \vec{E}_i] = \vec{\nabla} \times \vec{E}_i = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.7)$$

Car

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} \quad (4.8)$$

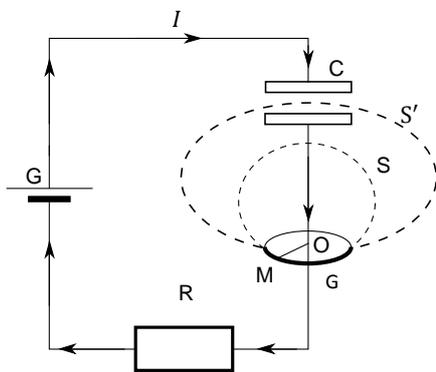
En définitive, nous devons retenir de l'étude du phénomène d'induction électromagnétique le résultat fondamental suivant :

En chaque point de l'espace où existe un champ magnétique variable nous devons associer un champ électrique induit variable à circulation non conservative c'est-à-dire ne dérivant pas d'un potentiel.

L'ensemble de ces deux champs (\vec{E}, \vec{B}) constitue le champ électromagnétique.

4.3 Le théorème de Maxwell-Ampère

4.3.1 Le phénomène de capacité



Considérons l'exemple simple schématisé par la figure. Lorsqu'on relie le condensateur C au générateur G, il circule pendant un temps très court un courant variable $I(t)$. Ce courant crée un champ magnétique \vec{B} que l'on pourrait calculer à l'aide du théorème d'Ampère.

Pour calculer le champ magnétique en M, on considère le cercle Γ de rayon $OM = r$, et l'on a :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I \quad (4.9)$$

Cette équation exprime le fait que l'intégrale curviligne de \vec{B} sur une boucle fermée est égale à μ_0 fois le courant total qui traverse une surface quelconque limitée par la boucle fermée Γ . On peut calculer le champ magnétique en M en utilisant successivement deux surfaces différentes S et S' s'appuyant sur le contour Γ et en appliquant pour chacune d'entre-elles le théorème d'Ampère sous sa forme intégrale.

Cas de la surface S : Le courant total traversant S est bien égal au courant I et on obtient :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (4.10)$$

Cas de la surface S' : Cette surface passant entre les plaques du condensateur n'est traversée par aucun courant puisque les charges électriques ne se déplacent pas entre les plaques du condensateur. Si on utilise le théorème d'Ampère, on obtient :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad (4.11)$$

Le résultat de ce calcul serait alors $\vec{B} = 0$. Ce qui est en contradiction avec le résultat obtenu avec la surface S . Pour lever cette ambiguïté, il faut modifier le théorème d'Ampère.

Dans le condensateur, il n'y a pas de charges mobiles, donc pas de courant de conduction. Par contre il y a un champ électrique variable durant la charge du condensateur et qui est égal à :

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (4.12)$$

σ étant la densité superficielle de charges électriques sur les plaques du condensateur. La charge totale portée par une armature du condensateur de surface Σ est : $q = \sigma\Sigma$. Le courant de conduction I à l'extérieur du condensateur est lié à la charge du condensateur par $= \frac{dq}{dt}$, d'où :

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{d(\sigma\Sigma)}{dt} = \frac{d(\epsilon_0 E)}{dt} \Sigma = \epsilon_0 \frac{dE}{dt} \Sigma = \frac{dD}{dt} \Sigma \quad (4.13)$$

où $D = \epsilon_0 E$ est le vecteur excitation électrique entre les armatures du condensateur. Entre les armatures du condensateur, le courant ne correspond pas à un mouvement de charges électriques mais il est lié au champ électrique variable entre les armatures du condensateur. Il est appelé courant de déplacement et nous le noterons I_D . Ainsi si on suppose que le courant entre les plaques du condensateur est I_D . Le courant total traversant la surface S' est I_D et si on utilise le théorème d'Ampère en prenant en compte le courant de déplacement, on obtient le même résultat que celui qui a été obtenu en utilisant la surface S .

L'introduction du courant de déplacement va permettre de généraliser aux régimes variables le théorème d'Ampère dans lequel on devra considérer le courant total, somme du courant de conduction correspondant à des charges électriques mobiles, et du courant de déplacement correspondant à un champ électrique variable dans le temps.

4.3.2 Le vecteur densité de courant de déplacement

Le courant lié au mouvement des charges électriques sera noté dans la suite I et le courant de déplacement qui correspond à un champ électrique variable sera noté I_D . On appelle le courant total $I_T = I + I_D$. A ces courants on associe respectivement :

- le vecteur densité de courant lié au mouvement des charges électriques \vec{j}
- le vecteur densité de courant de déplacement \vec{j}_D défini par

$$\vec{j}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.14)$$

- le vecteur densité de courant total

$$\vec{j}_T = \vec{j} + \vec{j}_D \quad (4.15)$$

4.3.3 Le théorème de Maxwell-Ampère

Le théorème d'Ampère peut être généralisé à condition de l'appliquer au courant total. La relation de Maxwell-Ampère qui en est la traduction s'écrit :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{(S)} \mu_0 \vec{j}_T \cdot d\vec{S} = \iint_{(S)} \left(\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.16)$$

La relation intégrale du théorème d'Ampère généralisé est :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_T = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.17)$$

On obtient le résultat fondamental :

Un champ électrique variable crée un champ magnétique.

4.3.4 Equation de continuité

Considérons une surface fermée (S) entourant un volume (τ); si ρ est la densité volumique de charge électrique et q la charge électrique totale du volume (τ) à l'instant t , on a :

$$q = \iiint_{(\tau)} \rho \, d\tau \quad (4.18)$$

Pendant l'intervalle de temps dt la variation de la charge totale est dq , et le taux de variation de charge s'écrit :

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\iiint_{(\tau)} \rho \, d\tau \right) \quad (4.19)$$

Mais $\oiint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S}$ représente la charge totale sortant de la surface (S) par unité de temps, donc par

suite de la conservation de la charge :

$$\frac{dq}{dt} = - \oiint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (4.20)$$

et

$$\frac{d}{dt} \left(\iiint_{(\tau)} \rho \, d\tau \right) = - \oiint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (4.21)$$

En changeant l'ordre des opérations par rapport à l'espace et par rapport au temps, on a :

$$\iiint_{(\tau)} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = - \oiint_{(S \text{ fermée})} \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (4.22)$$

or, d'après le théorème d'Ostrogradsky :

$$\oiint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{j} d\tau \quad (4.23)$$

Donc

$$\iiint_{(\tau)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \right] d\tau = 0 \quad (4.24)$$

Cette relation doit être vérifiée quel que soit le volume (τ) , il faut donc que l'on ait :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (4.25)$$

Cette équation dite de continuité traduit la conservation de la charge électrique et montre que le flux du vecteur densité de courant n'est plus conservatif comme dans le cas des états stationnaires. On peut vérifier que le théorème d'Ampère qui est valable uniquement dans le cas des régimes stationnaires ne peut plus être utilisé dans le cas des régimes variables car il serait en contradiction avec la relation de continuité qui exprime un principe fondamental de la physique (Principe de conservation de la charge électrique). Par contre le théorème d'Ampère-Maxwell qui prend en compte le courant de déplacement satisfait pleinement la relation de continuité.

4.4 Les équations de Maxwell

4.4.1 Les hypothèses de Maxwell

Nous avons pu remarquer que l'étude du régime variable nous a amenés à modifier deux équations fondamentales des régimes statiques :

Régime Statique		Régime variable
$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$		$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$		$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Selon les hypothèses de Maxwell, les deux autres équations caractéristiques des régimes statiques sont encore valables pour les régimes variables :

- Théorème de Gauss pour \vec{E} : $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
- Théorème d'Ampère pour \vec{B} : $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

Ces quatre équations aux dérivées partielles sont appelées les équations de Maxwell.

 Elles constituent les équations fondamentales de l'électromagnétisme.

4.4.2 En résumé

Dans le vide, les équations de Maxwell s'écrivent :

	Forme locale	Forme intégrale
Théorème de Gauss pour \vec{E} ou équation de Maxwell-Gauss	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{(\tau)} \rho \, d\tau$
Equation du flux magnétique ou équation de Maxwell-Thomson	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$\oiint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$
Equation de Maxwell-Faraday	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_{(\Gamma)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$
Equation de Maxwell-Ampère	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left[\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right]$	$\oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \mu_0 \left[\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \cdot d\vec{S}$

4.5 Equations pour \vec{E} et \vec{B}

Pour établir l'équation relative au champ électrique \vec{E} , il faut éliminer le champ magnétique \vec{B} . Pour cela, calculons le rotationnel de chacun des membres de la loi de Faraday :

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \quad (4.26)$$

En permettant l'ordre des dérivations, on obtient :

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\} \quad (4.27)$$

Sachant que

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \nabla^2 \vec{E} \quad (4.28)$$

où ∇^2 est le laplacien vectoriel, on obtient l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\nabla^2 \vec{E} - \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\} \quad (4.29)$$

Comme

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4.30)$$

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = \vec{\nabla} \left(\frac{\rho}{\epsilon_0} \right) \quad (4.31)$$

on obtient finalement :

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left(\frac{\rho}{\epsilon_0} \right) \quad (4.32)$$

Pour établir l'équation aux dérivées partielles pour le champ magnétique \vec{B} , calculons le rotationnel de chacun des membres du théorème d'Ampère-Maxwell :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = \vec{\nabla} \times \left\{ \mu_0 \left[\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \right\} \quad (4.33)$$

Mais

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.34)$$

Et en inversant l'ordre des dérivations :

$$-\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} [\vec{\nabla} \times \vec{E}] \quad (4.35)$$

Or

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.36)$$

Donc

$$-\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{j} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad (4.37)$$

Ou encore

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{j} \quad (4.38)$$

En absence de charges électriques ($\rho = 0$) et de courants électriques $\vec{j} = \vec{0}$, on obtient la même équation aux dérivées partielles pour le champ électrique et pour le champ magnétique.

L'équation

$$\nabla^2 \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix} = \vec{0} \quad (4.39)$$

constitue l'équation de propagation du champ électromagnétique dans le vide, où on a posé $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$.

4.6 Introduction des potentiels

4.6.1 Potentiel scalaire. Potentiel vecteur

Le champ magnétique \vec{B} satisfait à l'équation $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$. On peut donc définir un potentiel vecteur dont dérive le champ magnétique par : $\vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{A})$

D'après la loi de l'induction, $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, d'où :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} [\vec{\nabla} \times \vec{A}] = -\vec{\nabla} \times \left[\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] \quad (4.40)$$

Soit :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \vec{\nabla} \times \left[\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = \vec{\nabla} \times \left[\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = \vec{0} \quad (4.41)$$

Sachant que le rotationnel du gradient d'un champ scalaire est nul, on peut déduire du résultat de l'équation précédente qu'il existe un champ scalaire U appelé potentiel scalaire tel que :

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} U \quad (4.42)$$

Et on obtient :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} U - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (4.43)$$

Si l'on remplace le potentiel scalaire U et le potentiel vecteur \vec{A} respectivement par les potentiel U' et \vec{A}' définis par :

$$U \mapsto U' = U - \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$$\vec{A} \mapsto \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \phi$$

on peut montrer que :

$$\vec{E}' = -\vec{\nabla} U' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t}$$

$$\vec{E}' = -\vec{\nabla} \left(U - \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A} + \vec{\nabla} \phi)$$

$$\vec{E}' = -\vec{\nabla} U - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}$$

et que

$$\vec{B}' = -\vec{\nabla} \times \vec{A}' = -\vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla}\phi)$$

$$\vec{B}' = -\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$$

Le remplacement de \vec{A} et U respectivement par \vec{A}' et U' s'appelle une transformation de jauge. L'invariance de \vec{E} et \vec{B} dans cette transformation s'appelle l'invariance de jauge. L'invariance de jauge nous laisse libre du choix de la relation liant le potentiel scalaire et le potentiel vecteur. Cette relation est appelée la condition de jauge.

4.6.2 Equations des potentiels. Jauge de Lorentz

Sachant que $\vec{E} = -\vec{\nabla}U - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, le théorème de Gauss $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ s'écrit,

$$\vec{\nabla} \cdot \left[-\vec{\nabla}U - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4.44)$$

ce qui donne une première équation entre U et \vec{A}

$$\nabla^2 U + \frac{\partial}{\partial t} [\vec{\nabla} \cdot \vec{A}] = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4.45)$$

Une deuxième équation est obtenue à partir de l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.46)$$

Où $\vec{E} = -\vec{\nabla}U - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ et $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

En utilisant l'identité

$$\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{A}] = \vec{\nabla} [\vec{\nabla} \cdot \vec{A}] - \nabla^2 \vec{A} \quad (4.47)$$

Il vient

$$\nabla^2 \vec{A} - \vec{\nabla} [\vec{\nabla} \cdot \vec{A}] - \frac{1}{c^2} \left[-\vec{\nabla} \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right) - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right] + \mu_0 \vec{j} = 0 \quad (4.48)$$

Soit

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial U}{\partial t} \right] + \mu_0 \vec{j} = 0 \quad (4.49)$$

Nous obtenons ainsi, pour les potentiels \vec{A} et U , deux équations que l'on peut écrire sous la forme symétrique

$$\nabla^2 U - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \vec{\nabla} \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial U}{\partial t} \right] = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4.50)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial U}{\partial t} \right] = -\mu_0 \vec{j}$$

Si l'on choisit la jauge de Lorentz définie par

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \quad (4.51)$$

les équations des potentiels deviennent alors indépendantes et se réduisent à

$$\nabla^2 U - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4.52)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}$$

Notons que la condition de jauge de Lorentz est compatible avec l'invariance de jauge. En effet, si nous remplaçons \vec{A} par $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\phi$ et U par $U' = U - \frac{\partial\phi}{\partial t}$ la condition de Lorentz

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \quad (4.53)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial U'}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial U}{\partial t} + \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (4.54)$$

Il suffit pour qu'elle soit vérifiée que ϕ satisfasse l'équation aux dérivées partielles :

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (4.55)$$

4.7 Le champ électromoteur

Définition

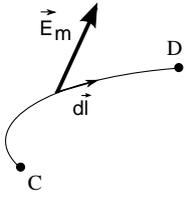
Soit un conducteur électrique se déplaçant avec une vitesse \vec{v} dans une région de l'espace où règne un champ magnétique \vec{B} , on définit le champ électromoteur par la relation :

$$\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times \vec{B} \quad (4.56)$$

Le champ électromoteur rend compte de l'apparition d'un courant induit dans les cas :

- d'un circuit fixe placé dans un champ magnétique variable,
- d'un circuit mobile dans un champ magnétique.

4.7.1 f.é.m induite dans un circuit



La f.é.m induite e_{CD} apparaissant dans une portion de circuit filiforme CD est par définition égale à la circulation du champ électromoteur sur CD :

$$e_{CD} = \oint_{CD} \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell} \quad (4.57)$$

Dans le cas d'un circuit filiforme fermé conducteur C , mobile dans un champ magnétique variable dans le temps. La f.é.m induite est donnée par :

$$e_c = \oint_C \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell} = \oint_C \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \cdot d\vec{\ell} \quad (4.58)$$

4.7.2 Induction de Lorentz, Induction de Neuman

On a deux cas particuliers :

- Induction de **Neuman** : Circuit fixe dans un champ magnétique variable ($\vec{v} = \vec{0}$, $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0$)

$$e_c = \oint_C -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{\ell} \quad (4.59)$$

- Induction de **Lorentz** : Circuit mobile dans un champ magnétique permanent ($\vec{v} \neq \vec{0}$, $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$)

$$e_c = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} \quad (4.60)$$

4.8 Approximation des états quasi-stationnaires

4.8.1 Introduction

Les propriétés spécifiques liées à la dépendance des champs en fonction du temps sont :

- 🌀 le phénomène d'induction,
- 🌀 le phénomène de capacité,
- 🌀 le phénomène de propagation.

Pourtant dans le cas de régimes variant assez lentement en fonction du temps, on fait des approximations qui permettent de négliger certains termes dans les équations de Maxwell. Cet ensemble d'approximations est appelé l'approximation du régime quasi-stationnaire (A.R.Q.S).

4.8.2 Phénomène d'induction

On tient toujours compte des effets d'induction quelle que soit la vitesse de variation du champ.

4.8.3 Phénomène de capacité

Cet effet est lié aux circuits ouverts alimentés par une source de tension variable et parcourus par un courant variable bien que ces circuits électriques ne soient pas fermés. C'est le cas particulier des condensateurs où pour assurer la continuité du courant électrique, nous avons introduit la notion de courant de déplacement. Dans l'approximation du régime quasi-stationnaire, on suppose que les effets des champs magnétiques sont négligeables entre les armatures de ces condensateurs.

4.8.4 Phénomène de propagation

Si les dimensions des circuits électriques étudiés sont suffisamment petites on pourra considérer que dans un circuit fermé le courant électrique est le même en chaque point d'un circuit fermé. Dans ce cas le vecteur densité de courant \vec{j}_T est sensiblement le même en tout point du circuit :

$$\vec{j}_T = \vec{j} + \vec{j}_D \simeq \vec{j} \quad (4.61)$$

Il s'en suit que :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_T \simeq 0 \quad (4.62)$$

4.8.5 Equations des états quasi-stationnaires

Dans l'approximation du régime quasi-stationnaire, les équations de Maxwell s'écrivent :

	Forme locale	Forme intégrale
Théorème de Gauss pour \vec{E}	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{(\tau)} \rho \, d\tau$
Equation du flux magnétique	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$\oiint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$
Loi de Faraday	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_{(\Gamma)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$
Théorème Ampère-Maxwell	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$	$\oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S}$

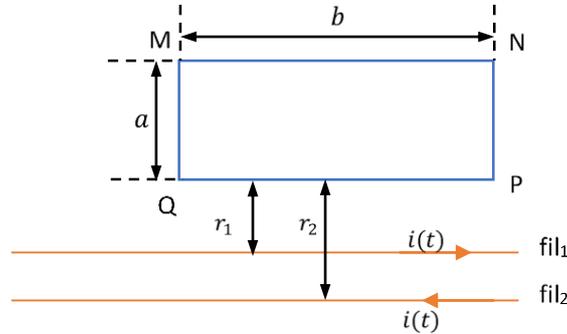
Avec $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$

Exercices résolus

Exercice.1 :

Deux conducteurs 1 et 2 filiformes et parallèles, transportant un même courant d'intensité $i(t) = I_0 \cos \omega t$, dans des sens opposés. Un cadre rectangulaire MNPQ est fixé dans le plan des conducteurs.

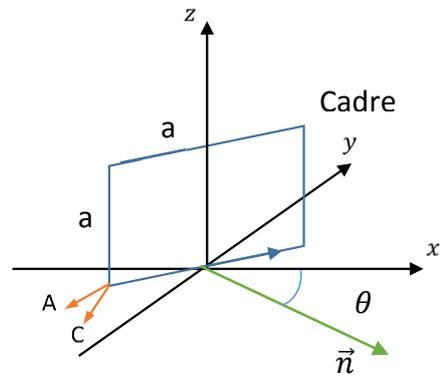
- 1- Déterminer le flux magnétique φ à travers le cadre.
- 2- Déterminer la force électromotrice induite $e(t)$ dans le cadre et donner le sens conventionnel du courant induit i' .



Exercice.2 :

On dispose d'un cadre carré fixe de côté a comportant N spires d'un fil conducteur d'extrémités A et C dans un champ magnétique $\vec{B} = B_0 \cos \omega t \vec{u}_z$. La normale du cadre fait un angle θ avec \vec{u}_z . L'angle θ est orienté, il est donc négatif sur la figure.

- 1- Calculer la force électromotrice $e(t)$ qui apparaît entre les bornes de sortie A et C du cadre.
- 2- Vérifier que le potentiel vecteur en un point M quelconque peut s'écrire
- 3- Calculer par une autre méthode la force électromotrice $e(t)$.
- 4- Etudier les variations de l'amplitude e_0 de $e(t)$ en fonction de la pulsation ω du champ magnétique et de l'angle θ . On tracera le graphe de l'amplitude de $e(t)$ en fonction de θ .
- 5- Application numérique : $B_0 = 1 \mu T$, $a = 10 \text{ cm}$, $f = 150 \text{ kHz}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $N = 100$. Calculer e_0 .



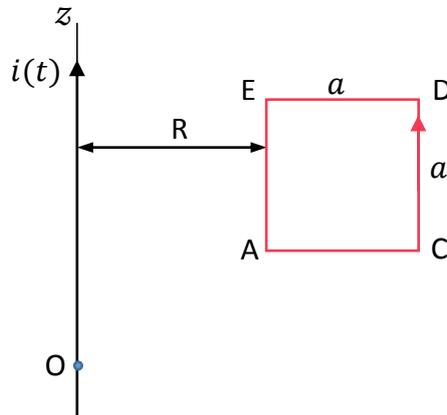
Exercice.3 :

Un fil rectiligne infiniment long est parcouru par un courant d'intensité $i(t) = I_0 \cos \omega t$. On note (Oz) la direction du fil, on note positivement l'intensité dans le sens de $z'z$.

- 1- Déterminer le champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ en tout point M de l'espace.
- 2- Définir la direction et les variables dont dépend le potentiel-vecteur \vec{A} en M .

On donne la solution de l'équation de Poisson dans le cas d'un fil infini, $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{fil}} \frac{i(t)}{PM} d\vec{l}(P)$ où $d\vec{l}(P)$ est un déplacement élémentaire autour du point P situé sur le fil.

- 3- Calculer le potentiel-vecteur \vec{A} en M, que l'on prendra nul à la distance R de l'axe Oz .
- 4- En déduire le champ électromoteur \vec{E}_m en M.
- 5- Une bobine plane, de N spires, a la forme d'un carré ACDE de côté a . Deux cotés sont parallèles à l'axe Oz , à la distance R et $R + a$ de l'axe. Le fil est dans le plan de la bobine. On note e la force électromotrice d'induction apparaissant dans la bobine.

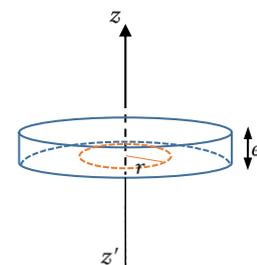
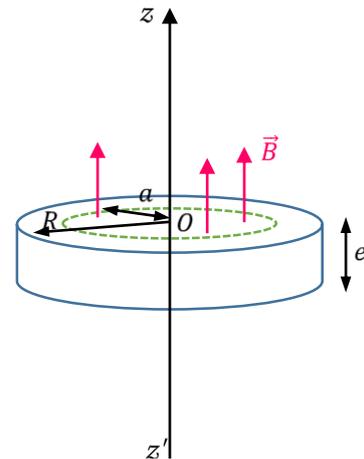


- a- Calculer e en utilisant le potentiel-vecteur.
- b- Calculer e en utilisant la **loi de Faraday**.
- c- Quel est le coefficient d'inductance mutuelle M entre le fil et la bobine ?

Exercice.4 :

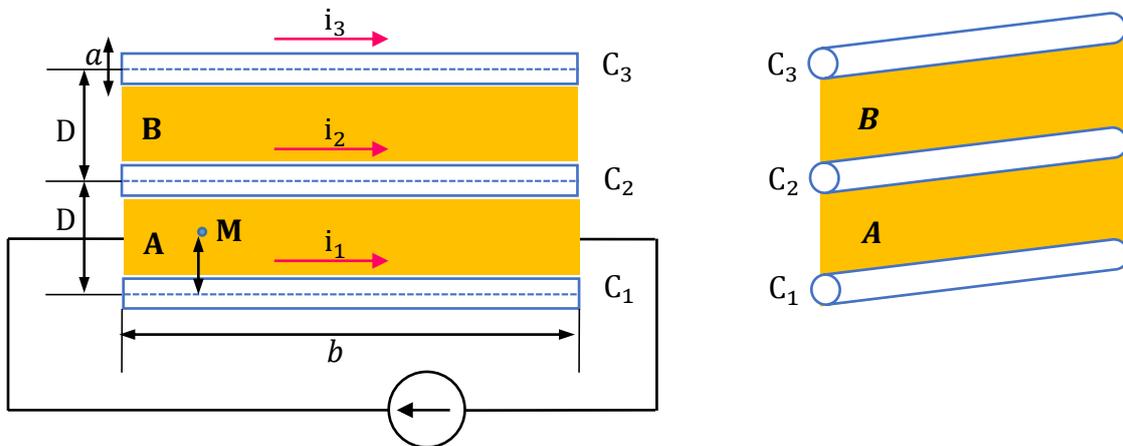
Un disque conducteur, de conductivité γ , de rayon R , d'épaisseur e , est placé dans un champ magnétique uniforme, parallèle à l'axe Oz du disque, de valeur $B(t) = B_0 \cos \omega t$ dans la région $r < a < R$ et de valeur nulle ailleurs. Il s'établit en tout point M du disque des courants volumiques induits de densité $j(M, t)$ (courants de Foucault) dont on cherche l'expression.

- 1- Montrer que cette densité de courant est de direction orthoradiale. De quelles variables dépend cette densité a priori ?
- 2- On imagine un cercle de rayon r tracé dans le disque. Quelle est la relation entre le champ électromoteur e induit qui existe sur ce cercle et le flux de \vec{B} à travers ? en déduire que j ne dépend que d'une seule variable d'espace.
- 3- En déduire la densité de courant volumique induit $j(M, t)$ en tout point M du disque.
- 4- Exprimer la puissance volumique dissipée par effet joule dans le disque.
- 5- Exprimer la puissance moyenne dissipée par effet joule dans disque.



Exercice.5 :

On considère trois conducteurs cylindriques $C_1, C_2,$ et C_3 supposés très longs de même longueur h et de même rayon a . Leurs axes sont parallèles et sont situés dans un même plan à une distance D les uns des autres. Les trois conducteurs ont chacun une résistance r par unité de longueur, ils sont disposés en parallèle et reliés entre eux par deux plaques conductrices A et B de résistance et d'inductance négligeable, et ils sont alimentés par une tension sinusoïdale de pulsation $\omega: u(t) = U_0 e^{j\omega t}$. Dans cette exercice, on suppose valables les équations des états quasi-stationnaires et on tient compte des phénomènes d'induction. En effet, il s'agit de modéliser de notre mieux ce qu'il se passe dans les fils électriques constitués de tresses (assemblage de fils de cuivre en parallèle) et utilisés partout.



- 1- $i_1, i_2,$ et i_3 désignent les trois courants apparaissant respectivement dans chacun des trois conducteurs. Montrer que l'on a nécessairement $i_1 = i_3$.
- 2- On s'intéresse à la plaque A se trouvant entre les conducteurs C_1 et C_2 . Calculer en fonction de i_1 et i_2 le champ magnétique total \vec{B} produit en un point M de A, à une distance x de l'axe du conducteur C_1 .
- 3- Déterminer le flux magnétique ϕ à travers la surface de A. On supposera que $a \ll D \ll h$: simplifier l'expression de ϕ .
- 4- Quelle est la force électromotrice e d'induction apparaissant dans le circuit Γ formé par le bord de la plaque conductrice A ?

Solutions

Exercice :1

- 1- Dans un premier temps, on détermine le champ magnétique dans tout l'espace en utilisant le théorème d'Ampère. Pour cela, on étudie le champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ créé par un fil infini parcouru par un courant i . On utilise les coordonnées cylindriques et la base associée $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$. On oriente le fil suivant \vec{u}_z de sorte que le courant soit aussi orienté dans le sens

Soit un point M de l'espace situé à une distance r du fil, on étudie les symétries et invariances afin de trouver la direction du champ magnétique et les variables dont il dépend.

Le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie. Le champ magnétique \vec{B} est donc dirigé suivant \vec{u}_θ . La direction de courant est invariante par rotation d'angle θ et par translation suivant \vec{u}_θ . Le champ \vec{B} ne dépend donc que de la variable r .

D'où :
$$\vec{B}(M, t) = B(r, t)\vec{u}_\theta.$$

On applique le théorème d'Ampère sur un contour circulaire Γ de rayon r placée à une cote z constante. On oriente le contour de sorte que i soit dirigé dans le sens de la normale. Donc $d\vec{l} = r d\theta \vec{u}_\theta$. Ainsi, le théorème d'Ampère s'énonce :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r, t) \times 2\pi r = \mu_0 i$$

Ceci donne :

$$\vec{B}(M, t) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

On utilise les coordonnées cylindriques et la base associée $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$. Les fils sont dirigés suivant \vec{u}_z de sorte que le courant parcourant le fil 1 soit orienté dans le sens de \vec{u}_z .

On en déduit le champ magnétique en un point M situé à la distance r du fil 1 et à la distance $r' = r + (r_2 - r_1)$ du fil 2 :

$$\vec{B}(M, t) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r + (r_2 - r_1)} \right) \vec{u}_\theta$$

On peut calculer le flux Φ du champ magnétique à travers le cadre. Pour cela, on oriente la normale au cadre dans le sens de \vec{u}_θ et donc le contour dans le sens $MQPN$.

On trouve alors $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ où S représente la surface du cadre, soit :

$$\Phi = \iint_S B(r, t) dr dz = \int_{r_1}^{r_1+a} B(r, t) dr \int_0^b dz = \frac{\mu_0 i}{2\pi} b \int_{r_1}^{r_1+a} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r + (r_2 - r_1)} \right) dr.$$

D'où $\Phi = \frac{\mu_0 i}{2\pi} b \left(\ln \frac{r_1+a}{r_1} - \ln \frac{r_2+a}{r_2} \right).$

On a donc :

$$\Phi = \frac{\mu_0 i}{2\pi} b \ln \left(\frac{r_2(r_1 + a)}{r_1(r_2 + a)} \right)$$

2- D'après la loi de Faraday, applicable dans le cas d'un contour fermé : $e = -\frac{d\Phi}{dt}$.

On en déduit :

$$e = -\frac{\mu_0}{2\pi} b \ln \left(\frac{r_2(r_1 + a)}{r_1(r_2 + a)} \right) \frac{di}{dt} = \frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi} b \ln \left(\frac{r_2(r_1 + a)}{r_1(r_2 + a)} \right) \sin \omega t$$

Dans ce cas, e est orienté dans le sens de contour.

Pour déterminer le courant i' induit, on utilise la relation $0 = Ri' - e$ car le circuit est fermé.

Il reste donc :

$$i'(t) = \frac{e(t)}{R} = \frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi R} b \ln \left(\frac{r_2(r_1 + a)}{r_1(r_2 + a)} \right) \sin \omega t$$

■ Exercice :2

1- • On peut alors calculer le flux Φ du champ magnétique \vec{B} à travers le cadre. D'après le sens de la normale, le cadre est orienté de c vers A.

Le flux à travers chaque spire du cadre est identique. Donc le flux à travers le cadre est égal à N fois le flux à travers une spire.

On a $\Phi = N \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ où S représente la surface du cadre et $d\vec{S} = dS\vec{n} = dS(\cos\theta\vec{u}_x + \sin\theta\vec{u}_y)$.

Soit : $\Phi = NB_0a^2\sin\theta\cos\omega t$.

• D'après la loi de Faraday, $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ lorsque la force électromotrice e est orienté de C vers A.

On en déduit : $e(t) = NB_0a^2\omega\sin\theta\cos\omega t$.

2- On calcule le potentiel vecteur \vec{A} proposé, en un point $M(x,y,z)$ quelconque dans la base cartésienne.

$$\vec{A} = \frac{\vec{B} \wedge \overrightarrow{OM}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ B \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} zB \\ 0 \\ -xB \end{pmatrix}$$

On vérifie qu'il est bien potentiel vecteur du champ magnétique \vec{B} .

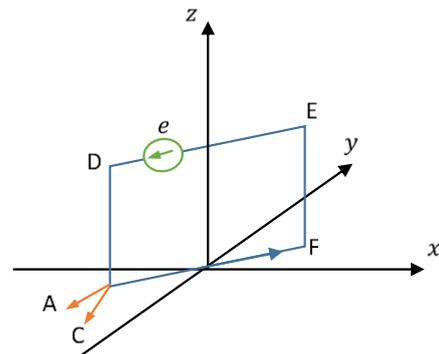
$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{zB}{2} \\ 0 \\ -\frac{xB}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{B}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{B}{2} \end{pmatrix} = \vec{B}$$

On retrouve bien $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} = \vec{B}$.

3- Le champ électromoteur \vec{E}_m est défini par :

$$\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \begin{pmatrix} -\frac{z}{2} \frac{\partial B}{\partial t} \\ 0 \\ \frac{x}{2} \frac{\partial B}{\partial t} \end{pmatrix}, \text{ dans la base cartésienne}$$

On calcule la circulation de ce champ électromoteur entre les deux points C et A ($d\vec{l}$ va de C vers A), et on obtient la force électromotrice d'induction e .



$$e(t) = \int_C^A \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \int_C^F \vec{E}_m \cdot d\vec{l} + \int_F^E \vec{E}_m \cdot d\vec{l} + \int_E^D \vec{E}_m \cdot d\vec{l} + \int_D^A \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$$

Sur FE et DA, $d\vec{l} = dz \vec{u}_z$ et donc $\vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \frac{x}{2} \frac{\partial B}{\partial t} dz$

$$\int_F^E \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \int_0^a \frac{a \sin\theta}{2} \frac{\partial B}{\partial t} dz = -\frac{a^2 \sin\theta}{4} \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{a^2 \sin\theta}{4} B_0 \omega \sin\omega t$$

$$\int_D^A \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \int_a^0 \frac{a \sin \theta}{2} \frac{\partial B}{\partial t} dz = -\frac{a^2 \sin \theta}{4} \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{a^2 \sin \theta}{4} B_o \omega \sin \omega t$$

Sur CF et ED, $d\vec{l} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y$ et donc $\vec{E}_m \cdot d\vec{l} = -\frac{z}{2} \frac{\partial B}{\partial t} dx$, soit :

$$\int_C^F \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \int_{\frac{a \sin \theta}{2}}^{-\frac{a \sin \theta}{2}} 0 dx = 0 \text{ car le segment [CF] est à une altitude } z = 0.$$

$$\int_E^D \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \int_{\frac{a \sin \theta}{2}}^{-\frac{a \sin \theta}{2}} -\frac{a}{2} \frac{\partial B}{\partial t} dx = \frac{a^2 \sin \theta}{4} B_o \omega \sin \omega t$$

On obtient donc :

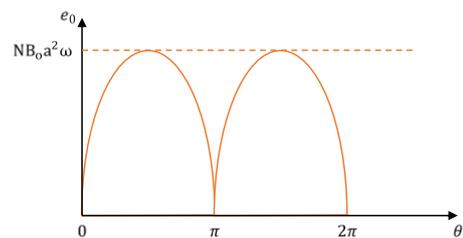
$$e(t) = NB_o a^2 \omega \sin \theta \cos \omega t$$

4- L'amplitude de la force électromotrice est une grandeur toujours positive.

Donc $e(t) = NB_o a^2 \omega |\sin \theta|$

La force électromotrice e est une fonction croissante de la fréquence du champ magnétique \vec{B} et varie en $|\sin \theta|$.

Le graphe de l'amplitude en fonction de θ est le suivant :



5- Application numérique : $e_\theta = 942 \text{ mV}$.

■ Exercice :3

Dans un premier temps, on détermine le champ magnétique dans tout l'espace en utilisant le théorème d'Ampère. Pour cela, on étudie le champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ créé par un fil infini parcouru par un courant i . On utilise les coordonnées cylindriques et la base associée $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$. On oriente le fil suivant \vec{u}_z de sorte que le courant soit aussi orienté dans le sens

Soit un point M de l'espace situé à une distance r du fil, on étudie les symétries et invariances afin de trouver la direction du champ magnétique et les variables dont il dépend.

Le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie. Le champ magnétique \vec{B} est donc dirigé suivant \vec{u}_θ . La direction de courant est invariante par rotation d'angle θ et par translation suivant \vec{u}_θ . Le champ \vec{B} ne dépend donc que de la variable r .

D'où : $\vec{B}(M, t) = B(r, t) \vec{u}_\theta$.

On applique le théorème d'Ampère sur un contour circulaire Γ de rayon r placée à une cote z constante. On oriente le contour de sorte que i soit dirigé dans le sens de la normale. Donc $d\vec{l} = r d\theta \vec{u}_\theta$. Ainsi, le théorème d'Ampère s'énonce :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r, t) \times 2\pi r = \mu_o i$$

Ceci donne :

$$\vec{B}(M, t) = \frac{\mu_o i}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

2- 1^{ère} méthode :

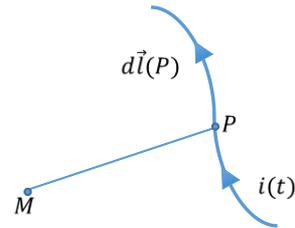
Le potentiel vecteur \vec{A} est la solution de l'équation de Poisson où : $\Delta\vec{A} + \mu_0\vec{j} = \vec{0}$ où Δ est l'opérateur laplacien.

La solution est de la forme $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{P \in \tau} \frac{\vec{j}(P)}{PM} d\tau$ pour une densité de courant volumique \vec{j} .

Pour un fil parcouru par un courant $i(t)$, on pourra écrire

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{fil} \frac{i(t)}{PM} d\vec{l}(P),$$

Où $d\vec{l}(P)$ est un déplacement élémentaire autour du point P situé sur le fil.



Le vecteur déplacement élémentaire $d\vec{l}(P)$ est dirigé suivant le vecteur \vec{u}_z qui ne dépend pas du point P, donc le potentiel vecteur $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\int_{fil} \frac{i(t)}{PM} dl(P) \right) \vec{u}_z$ est aussi dirigé suivant \vec{u}_z .

2^{ème} méthode :

Les plans $z = Cte$ sont antisymétriques pour la distribution de courant. Par conséquent, comme le potentiel vecteur \vec{A} est un « vrai vecteur » (par opposition au champ magnétique \vec{B} qui est un « pseudo-vecteur », il est orthogonal à ces plans et il est ainsi dirigé suivant \vec{u}_z .

Le fil est infini donc invariant par translation suivant \vec{u}_z et aussi invariant par rotation d'angle θ des coordonnées cylindriques.

On en déduit :

$$\vec{A}(M) = A(r)\vec{u}_z$$

3- Le calcul du potentiel vecteur \vec{A} est évident en considérant $\vec{B} = r\vec{ot}\vec{A}$

$$\text{On a : } \vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{u}_\theta = r\vec{ot}\vec{A} = -\frac{\partial A(r)}{\partial r} \vec{u}_\theta$$

On en déduit : $A(r) = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln(r) + k$ où k est une constante d'intégration.

Le potentiel vecteur étant nul à la distance R de l'axe Oz, on a donc $k = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln(R)$

On trouve alors :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{R}\right) \vec{u}_z$$

4- Par définition

$$\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}(M)}{\partial t} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{R}\right) \frac{di}{dt} \vec{u}_z$$

5- a/ Orientons tout d'abord le contour dans le sens ACDE. Par définition, on a :

$$e = N \oint_{ACDE} \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = N \left(\int_A^C \vec{E}_m \cdot d\vec{l} + \int_C^D \vec{E}_m \cdot d\vec{l} + \int_D^E \vec{E}_m \cdot d\vec{l} + \int_E^A \vec{E}_m \cdot d\vec{l} + \right)$$

Car le cadre est constitué de N spires.

Sur les côtés AC et DE, le déplacement élémentaire $d\vec{l}$ est dirigé selon \vec{u}_z soit $\vec{E}_m \cdot d\vec{l} = 0$.

D'où :

$$e = N \left(\int_C^D \vec{E}_m \cdot d\vec{l} + \int_E^A \vec{E}_m \cdot d\vec{l} + \right) = N \left[\int_0^a \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right) \frac{di}{dt} dz + \int_a^0 \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R}{R}\right) \frac{di}{dt} dz \right]$$

Puisque $d\vec{l} = dz \vec{u}_z$ sur les côtes CD et EA.

D'où :

$$e = \frac{\mu_0 N a}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right) \frac{di}{dt}$$

b/ On calcule le flux du champ magnétique \vec{B} à travers la cadre $\Phi = N \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$, où S représente la surface du cadre et $d\vec{S} = -drdz\vec{u}_z$ si on conserve l'orientation ACDE du cadre.

On a donc :

$$\Phi = -N \int_0^a dz \int_R^{R+a} \frac{\mu_0 i}{2\pi r} dr = -\frac{\mu_0 N a i}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right)$$

On en déduit que

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 N a}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right) \frac{di}{dt}$$

On retrouve bien le même résultat par les deux méthodes.

6- Par définition, le coefficient d'inductance mutuelle est tel que $\Phi = Mi$, où Φ désigne le flux magnétique engendré par le fil infini à travers le cadre.

Donc :

$$M = \frac{\mu_0 N a}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right)$$

■ Exercice :4

1- Le Disque est placé dans un champ magnétique variable et donc soumis à un phénomène d'induction engendrant un courant qui, du fait de la loi de Lenz, aura tendance par ses conséquences à s'opposer à ses causes.

Les conséquences de ce courant sont notamment l'apparition d'un champ magnétique \vec{B}' qui sera dirigé dans un sens opposé aux variations du champ \vec{B} . Donc \vec{B}' est dirigé suivant \vec{u}_z . Ce champ est donc produit par des courants dirigés selon \vec{u}_z en coordonnées cylindriques.

Le champ magnétique et le disque sont invariant par rotation d'angle θ des coordonnées cylindriques.

Donc la densité de courant \vec{j} est indépendante de θ .

On en déduit
$$\vec{j} = j(r, z, t) \vec{u}_\theta.$$

2- D'après l'équation de Maxwell-Faraday, on a $\text{rot} \vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

Donc $-\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_S \text{rot} \vec{E}_m \cdot d\vec{S} = \oint_\Gamma \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$, où Γ est le cercle de rayon r et S la surface du disque de rayon r .

D'après la loi d'Ohm, on $\vec{j} = \gamma \vec{E}_m$. D'où : $\frac{2\pi r}{\gamma} j(r, z, t) = -\frac{d\Phi}{dt}(r, t)$.

Cette relation est vérifiée quelque soit la côte z du cercle.

Donc :
$$\vec{j} = j(r, t) \vec{u}_\theta$$

3- On a $\oint_\Gamma \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \frac{j(r, t)}{\gamma} 2\pi r = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \omega B_0 \pi r^2 \sin \omega t$

Soit :

$$\vec{j}(M, t) = \frac{\gamma \omega B_0 r}{2} \sin \omega t \vec{u}_\theta$$

4- La puissance volumique dissipée par effet Joule est

$$\frac{dP}{dt} = \vec{j} \cdot \vec{E}_m = \frac{j^2}{\gamma} = \gamma \frac{(\omega B_0 r)^2}{4} (\sin \omega t)^2$$

5- La puissance moyenne dissipée est :

$$P = \iiint_{\text{disque}} (\vec{j} \cdot \vec{E}_m) d\tau = \int_0^a \gamma \frac{(\omega B_0 r)^2}{4} \frac{1}{2} r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a dz$$

On obtient :

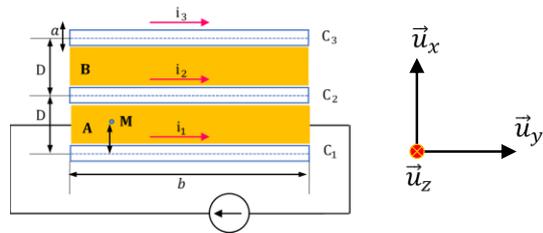
$$P = \gamma \frac{(\omega B_0)^2}{16} \pi a^2 e$$

■ Exercice :5

1- On place un repère cartésien sur la figure.

Le plan défini par l'axe du conducteur C_2 et les vecteurs \vec{u}_y et \vec{u}_z est un plan de symétrie du système.

Les courants dans les conducteurs C_1 et C_3 sont donc identiques : $i_1 = i_3$.



2- Le champ magnétique créé par un en conducteur est obtenu grâce au théorème d'Ampère.

On trouve $\vec{B}_1(M) = -\frac{\mu_0 i_1}{2\pi x} \vec{u}_z$ pour le champ magnétique créé par le conducteur C_1 en M.

De même $\vec{B}_2(M) = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi(D-x)} \vec{u}_z$ pour le champ magnétique créé par le conducteur C_2 en M et

$\vec{B}_3(M) = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi(2D-x)} \vec{u}_z$ pour le champ magnétique créé par le conducteur C_3 en M.

D'où :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{i_2}{(D-x)} + \frac{i_1}{(2D-x)} - \frac{i_1}{x} \right) \vec{u}_z$$

3- Le flux de ce champ magnétique à travers la surface S de A est égal à $\Phi = N \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$.

On oriente la surface, par exemple, de sorte que la normale soit \vec{u}_z (le courant i_1 est alors orienté dans le sens inverse du contour Γ et i_2 est orienté dans le sens du contour Γ).

Donc : $\Phi = \frac{\mu_0}{2\pi} \oint_a^{D-a} \left(\frac{i_2}{(D-x)} + \frac{i_3}{(2D-x)} - \frac{i_1}{x} \right) dx \oint_0^h dy$.

Soit :

$$\Phi = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \left[-i_2 \ln \left(\frac{a}{(D-a)} \right) - i_1 \ln \left(\frac{D+a}{(2D-a)} \right) - i_1 \ln \left(\frac{D-a}{(a)} \right) \right]$$

Avec l'approximation $a \ll D \ll h$, on obtient

$$\Phi = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \left[(i_1 - i_2) \ln \left(\frac{a}{D} \right) + i_1 \ln 2 \right]$$

4- La force électromotrice induite e dans le circuit fermé Γ défini dans l'énoncé est donnée par la loi de Faraday.

$$\underline{e} = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_o h}{2\pi} \left[\left(\frac{di_2}{dt} - \frac{di_1}{dt} \right) \ln\left(\frac{a}{D}\right) + \frac{di_1}{dt} \ln 2 \right] \quad (1)$$

5- On considère le circuit fermé Γ comportant deux conducteurs C_1 (parcouru par le courant i_1) et C_2 (parcouru par le courant i_2), l'équation électrique dans le circuit donne : $0 = rhi_2 - rhi_1 - e$ où rh représente la résistance équivalente de chaque conducteur.

On en déduit la relation : $i_2 - i_1 = \frac{e}{rh}$ (2)

En notation complexe, les équations (1) et (2) donnent :

$$\underline{e} = j\omega \frac{\mu_o h}{2\pi} \left[(i_1 - i_2) \ln\left(\frac{a}{D}\right) + i_1 \ln 2 \right] \quad \text{et } i_2 - i_1 = \frac{e}{rh}$$

On trouve alors : $\frac{i_2}{i_1} = 1 - \frac{\ln 2}{\frac{2\pi r}{j\omega\mu_o} + \ln\left(\frac{a}{D}\right)}$.

On a donc :

$$f(\omega) = \frac{2\pi r}{j\omega\mu_o} + \ln\left(\frac{a}{D}\right)$$

6- En courant continu, $\omega = 0$, on trouve $\frac{i_2}{i_1} = 1$.

En très haute fréquence, $\omega = +\infty$, on obtient : $\frac{i_2}{i_1} = 1 - \frac{\ln 2}{\ln\left(\frac{a}{D}\right)} < 1$.

Les courants sont toujours en phase. Cependant le courant dans le conducteur du milieu devient inférieur aux courants dans les conducteurs extérieurs lorsque la fréquence augmente. Ce phénomène ressemble au phénomène d'effet de peau. Il est dû à l'induction dans les conducteurs.

CHAPITRE 5

PROPAGATION DES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LE VIDE

5.1 Equations de propagation pour \vec{E} et \vec{B}

Dans le vide, au voisinage de tout point où les charges et les courants sont nuls, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (5.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (5.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (5.4)$$

Les équations pour \vec{E} et \vec{B} s'écrivent alors :

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (5.5)$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (5.6)$$

Dans le vide les ondes électromagnétiques se propagent à la vitesse de la lumière :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (5.7)$$

5.2 L'onde plane progressive sinusoïdale

5.2.1 Relation de dispersion

L'onde plane progressive sinusoïdale est définie, en notation complexe, par :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (5.8)$$

Où \vec{k} est le vecteur d'onde donnant la direction de propagation de l'onde plane.

En utilisant la définition du laplacien vectoriel dans un système de coordonnées cartésiennes, on peut montrer que :

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = -k^2 \vec{E} \quad (5.9)$$

L'équation de propagation s'écrit alors sous la forme

$$\left[-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right] \vec{E} = \vec{0} \quad (5.10)$$

L'onde plane progressive sinusoïdale constitue une solution particulière de l'équation d'onde seulement si la relation suivante, dite relation de dispersion, est satisfaite :

$$k = \frac{\omega}{c} \quad (5.11)$$

5.2.2 Structure de l'onde uniforme plane

L'onde plane progressive sinusoïdale doit également satisfaire le théorème de Gauss. En absence de charges électriques $\rho = 0$:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (5.12)$$

On montre aisément que pour une onde plane progressive sinusoïdale :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -i \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad (5.13)$$

Soit encore $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$; ce qui revient à dire que le champ électrique \vec{E} est perpendiculaire à la direction de propagation donnée par le vecteur d'onde \vec{k} . Le champ électrique est dit transversal.

L'onde plane progressive sinusoïdale doit également satisfaire *le théorème de Maxwell-Faraday* :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5.14)$$

On montre aisément que pour une onde plane progressive sinusoïdale :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{E}) = -i \vec{k} \times \vec{E} \quad (5.15)$$

D'où

$$-i \vec{k} \times \vec{E} = -i \omega \vec{B} \quad (5.16)$$

On en déduit le champ magnétique \vec{B}

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega} \quad (5.17)$$

En tenant compte des propriétés du produit vectoriel, on constate que :

Le champ magnétique est perpendiculaire au plan (\vec{k}, \vec{E}) . Le champ magnétique d'une onde plane progressive est donc transversal.

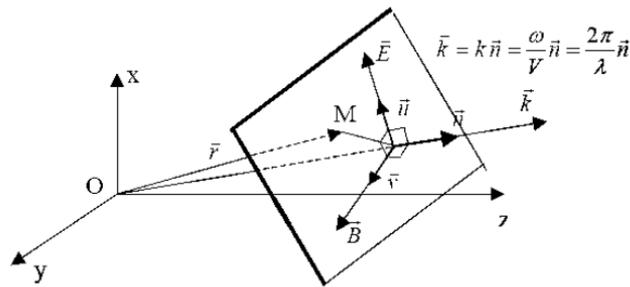
La direction du champ magnétique est telle que le trièdre $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ est un trièdre direct.

5.3 Polarisation

En tenant compte de la relation de dispersion, $\omega = kc$, le module du champ magnétique est :

$$\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$$

Cet ensemble de propriétés permet de définir la structure de l'onde plane progressive harmonique (Figure ci-dessous).



5.3.1 Onde de polarisation rectiligne

Une onde électromagnétique plane est dite de polarisation rectiligne si le champ \vec{E} garde une direction constante (polarisation rectiligne). Dans le cas d'une variation sinusoïdale en fonction du temps, il s'écrit en notation réelle :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (5.18)$$

Où

ω = pulsation de la fonction sinusoïdale

\vec{k} : vecteur d'onde perpendiculaire au plan d'onde avec $k = \omega/c$

$\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}$: phase instantanée ou plus simplement phase de la grandeur variable.

$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ vitesse de propagation dans le vide.

Les vecteurs forment toujours un trièdre direct et

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega} \quad (5.19)$$

Pour préciser cette onde, supposons qu'elle se propage suivant z' d'où

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kz) \quad (5.20)$$

On constate une double périodicité :

🕒 Une périodicité temporelle : pour z donné le champ varie sinusoïdalement en fonction du temps avec une période

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (5.21)$$

ou une fréquence

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (5.22)$$

(f est en hertz).

📏 Une périodicité spatiale : à un instant t donné le champ varie sinusoïdalement en fonction de z avec une période

(λ est appelée la longueur d'onde dans le vide). On peut remarquer que la longueur d'onde λ est égale à la distance parcourue par l'onde pendant une période.

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (5.23)$$

5.3.2 Onde de polarisation quelconque

Nous supposons que le champ \vec{E} (donc \vec{B} également) gardait une direction constante. Dans le cas général, il n'en est pas toujours ainsi et les composantes du champ peuvent se mettre sous la forme :

$$E_x = E_{0x} \cos(\omega t - kz - \phi_1) \quad (5.24)$$

$$E_y = E_{0y} \cos(\omega t - kz - \phi_2) \quad (5.25)$$

ϕ_1, ϕ_2 pouvant être différentes.

Etudions le comportement du champ \vec{E} dans le plan $z = 0$. Les résultats obtenus se retrouvent avec un décalage temporel dans tout plan $z = cte$. Les composantes du champ s'écrivent :

$$E_x = E_{0x} \cos(\omega t - \phi_1) \quad (5.26)$$

$$E_y = E_{0y} \cos(\omega t - \phi_2) \quad (5.27)$$

$$E_z = 0 \quad (5.28)$$

et si l'on prend pour origine des temps un instant où E_x passe par sa valeur maximale on a :

$$\frac{E_x}{E_{0x}} = \cos(\omega t) \quad (5.29)$$

$$\frac{E_y}{E_{0y}} = \cos(\omega t - \phi) \quad (5.30)$$

avec $\phi = \phi_2 - \phi_1$.

On peut déjà dire que l'extrémité du vecteur décrit une courbe inscrite dans un rectangle de côtés $2E_{0x}$ et $2E_{0y}$. D'autre part en développant l'expression de $\frac{E_y}{E_{0y}}$ et en éliminant le temps il vient :

$$\frac{E_y}{E_{0y}} = \cos(\omega t) \cos(\phi) + \sin(\omega t) \sin(\phi) \quad (5.31)$$

$$\frac{E_y}{E_{0y}} = \frac{E_x}{E_{0x}} \cos(\phi) + \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2} \sin(\phi) \quad (5.32)$$

$$\left[\frac{E_y}{E_{0y}} - \frac{E_x}{E_{0x}} \cos(\phi) \right]^2 = \left[1 - \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 \right] \sin^2(\phi) \quad (5.33)$$

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 - 2 \frac{E_x}{E_{0x}} \frac{E_y}{E_{0y}} \cos(\phi) = \sin^2(\phi) \quad (5.34)$$

Pour ϕ quelconque, cette équation est celle d'une ellipse : on dit que l'onde a une polarisation elliptique; pour $\phi = m\pi (m = 0,1,2,\dots)$ l'ellipse dégénère en une droite et l'onde est dite à polarisation rectiligne. Enfin si $E_{0x} = E_{0y}$ et si $\phi = (2m + 1)\pi/2$ l'onde est dite à polarisation circulaire.

5.4 Energie électromagnétique : vecteur de Poynting

La propagation de l'énergie se manifeste expérimentalement dans de nombreux cas :

- On peut ressentir son effet si l'on s'expose aux rayons solaires ou au rayonnement d'une source chaude;
- De même tout émetteur radio expédie de l'énergie à travers l'espace, une infime partie de cette dernière étant captée par votre récepteur radio.

Nous allons essayer de relier localement cette énergie qui se propage, au champ électromagnétique qui la transporte. Nous supposons le milieu de propagation parfait, c'est à dire homogène, isotrope et linéaire.

5.4.1 Onde de forme spatiale et temporelle quelconques

Nous admettrons que les densités d'énergie électrique et magnétique calculées en régime stationnaire sont toujours valables en régime variable ; la densité d'énergie électromagnétique w en un point quelconque du milieu parcouru par une onde électromagnétique est donc à chaque instant:

w = densité d'énergie électrique + densité d'énergie magnétique

$$w = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right) \quad (5.35)$$

Considérons dans le milieu, un volume τ limité par une surface (S). L'énergie électromagnétique qu'il contient est à chaque instant :

$$W = \iiint_{(\tau)} w \, d\tau \quad (5.36)$$

Pendant un temps dt l'accroissement d'énergie dans (τ) sera dW et la puissance instantanée p' acquise par ce volume sera

$$p' = \frac{dW}{dt} = \iiint_{(\tau)} \frac{\partial w}{\partial t} \, d\tau \quad (5.37)$$

On a :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \times \left[\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right] = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (5.38)$$

donc

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \vec{E} \cdot \left[\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) \right] - \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} \quad (5.39)$$

D'après une relation de transformation, on a :

$$\vec{\nabla} \cdot \left[\vec{E} \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) \right] - \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \vec{\nabla} \times (\vec{E}) - \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) \quad (5.40)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \left[\vec{E} \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) \right] \quad (5.41)$$

$$p' = - \iiint_{(\tau)} \vec{\nabla} \cdot \left[\vec{E} \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) \right] d\tau \quad (5.42)$$

La puissance électromagnétique instantanée perdue par le volume (τ) est :

$$-p' = \iiint_{(\tau)} \vec{\nabla} \cdot \left[\vec{E} \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) \right] d\tau \quad (5.43)$$

Elle représente la puissance électromagnétique qui sort du volume (τ) , c'est à dire la puissance moyenne p rayonnée par ce volume.

$$p = - \iiint_{(\tau)} \vec{\nabla} \cdot \left[\vec{E} \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) \right] d\tau \quad (5.44)$$

D'après la formule d'*Ostrogradsky*, on peut écrire :

$$p = \iint_{(S)} \left(\vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) \cdot d\vec{S} = \iint_{(S)} \vec{\mathcal{R}} \cdot d\vec{S} \quad (5.45)$$

Le vecteur

$$\vec{\mathcal{R}} = \vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad (5.46)$$

$\vec{\mathcal{R}}$ est appelé le vecteur de *Poynting*. Sa direction donne en chaque point, la direction d'écoulement de l'énergie et son flux à travers une surface est égal à la puissance électromagnétique instantanée rayonnée par cette surface. Les courbes tangentes en chaque point au vecteur de *Poynting* peuvent être considérées comme des trajectoires de l'énergie; on les appelle **les rayons électromagnétiques**.

5.4.2 Onde plane progressive et uniforme sinusoïdale

Puisque $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{n})$ forment un trièdre trirectangle direct le vecteur $\vec{\mathcal{R}}$ a même direction et sens que \vec{k} c'est à dire que l'énergie s'écoule dans le sens de propagation (ce résultat n'est pas général; en effet dans un milieu anisotrope par exemple $\vec{\mathcal{R}}$ et \vec{k} ne sont pas colinéaires).

La puissance instantanée p_u traversant une surface unitaire (S) perpendiculaire à la direction de propagation est

$$p_u = \iint_{(S)} \vec{\mathcal{R}} \cdot d\vec{S} = \iint_{(S)} \|\vec{\mathcal{R}}\| \cdot dS = \|\vec{\mathcal{R}}\| \iint_{(S)} dS = \|\vec{\mathcal{R}}\| S \quad (5.47)$$

La puissance moyenne traversant (S) est alors

$$\langle P_u \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T p_u dt = \frac{1}{T} \int_0^T \|\vec{\mathcal{R}}\| dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left\| \vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right\| dt \quad ((5.48)$$

or $\vec{B} \perp \vec{E}$, et $\|\vec{B}\| = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \|\vec{E}\|$, d'où

$$\langle P_u \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T E^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} dt \quad (5.49)$$

Si l'onde est polarisée rectilignement alors

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (5.50)$$

$$\langle P_u \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) dt \quad (5.51)$$

$$\langle P_u \rangle = \frac{E_0^2}{T} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \int_0^T \frac{1}{2} [1 + \cos[2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]] dt \quad (5.52)$$

$$\langle P_u \rangle = E_{eff}^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} = \frac{E_{eff}^2}{Z_0} \quad (5.53)$$

où E_{eff} est la valeur efficace de E .

Le flux d'énergie traversant par unité de temps l'unité de surface perpendiculaire à la direction de propagation est une constante dépendant du milieu et proportionnelle au carré de la valeur efficace du champ électrique.

5.5 Relations de passage

Composante tangentielle et composante normale de \vec{E}

A la traversée d'une surface (Σ) portant des charges avec une densité superficielle σ , les relations locales s'écrivent :

$$\vec{E}_{T2} - \vec{E}_{T1} = \vec{0} \quad (5.54)$$

$$E_{N2} - E_{N1} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (5.55)$$

où \vec{E}_T est la composante de \vec{E} dans le plan tangent à (Σ) en M , tandis que E_N mesure de la composante de \vec{E} suivant la normale \vec{n} en M et orientée de la face (1) vers la face (2) de (Σ) .

Composante tangentielle et composante normale de \vec{B}

A la traversée d'une surface (Σ) parcourue par des courants de densité superficielle \vec{j}_S , les relations locales \vec{B} deviennent :

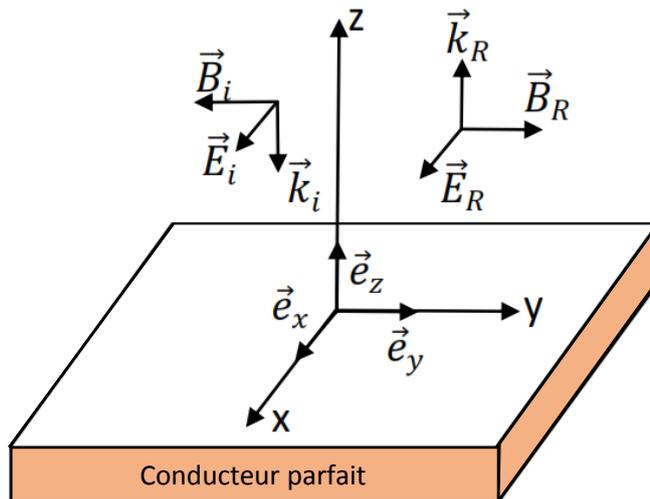
$$B_{N2} = B_{N1} \quad (5.56)$$

$$\vec{B}_{T2} - \vec{B}_{T1} = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n} \quad (5.57)$$

où B_N est la composante de \vec{B} suivant la normale au point M considéré orientée de la face (1) vers la face (2) de (Σ) , tandis que \vec{B}_T est la composante de \vec{B} dans le plan tangent à (Σ) en M .

5.6 Réflexion en incidence normale sur un conducteur parfait

Considérons une onde plane incidente uniforme sinusoïdale polarisée rectilignement ($\vec{E}_i \parallel Ox$) se propageant dans le vide (ou l'air) suivant zO et arrivant sous incidence normale, à la surface plane d'un conducteur de conductivité infinie (conducteur parfait). Des considérations énergétiques montrent qu'il n'y pas d'onde transmise $\vec{E}_T = \vec{0}$ et $\vec{B}_T = \vec{0}$ et que les seuls courants vrais pouvant être induits par cette onde le sont sur la surface du métal. Les raisons de symétrie impliquent que les directions de polarisation des vecteurs incident et réfléchi sont identiques.



Les champs électrique et magnétique des ondes incidente et réfléchie sont

$$\vec{E}_i = E_{0i} e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_x; \quad \vec{B}_i = -\frac{E_{0i}}{c} e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_y \quad (5.58)$$

$$\vec{E}_{0R} = E_{0R} e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_x; \quad \vec{B}_R = -\frac{E_{0R}}{c} e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_y \quad (5.59)$$

La continuité de la composante tangentielle du champ électrique permet d'écrire à la traversée de la surface de séparation ($z = 0$)

$$E_{0i} + E_{0R} = 0 \text{ d'où } E_{0R} = -E_{0i} \quad (5.60)$$

Le champ électrique réfléchi a même amplitude que le champ électrique incident et il est déphasé de π par rapport à ce dernier. Pour que le trièdre $(\vec{k}_R, \vec{E}_R, \vec{B}_R)$ soit direct, il faut que le champ magnétique réfléchi \vec{B}_R soit dans le même sens que le champ magnétique incident \vec{B}_i c'est à dire que sa réflexion s'effectue sans changement de phase. En définitive les ondes incidente et réfléchie s'écrivent :

$$\vec{E}_i = E_{0i} e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_x; \quad \vec{B}_i = -\frac{E_{0i}}{c} e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_y \quad (5.61)$$

$$\vec{E}_R = -E_{0R} e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_x; \quad \vec{B}_R = -\frac{E_{0i}}{c} e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_y \quad (5.62)$$

Dans le vide, l'onde résultante est la somme de l'onde incidente et de l'onde réfléchie et ses vecteurs champs ont pour valeur

$$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_R = E_{0i} (e^{+ikz} - e^{-ikz}) e^{i\omega t} \vec{e}_x \quad (5.63)$$

$$\vec{E} = 2E_{0i} \sin(kz) e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})} \vec{e}_x \quad (5.64)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_i + \vec{B}_R = -\frac{E_{0i}}{c} (e^{+ikz} + e^{-ikz}) e^{i\omega t} \vec{e}_y \quad (5.65)$$

$$\vec{B} = 2 \frac{E_{0i}}{c} \cos(kz) e^{i(\omega t + \pi)} \vec{e}_y \quad (5.66)$$

En revenant à la notation réelle

$$\vec{E} = 2E_{0i} \sin(kz) \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \vec{e}_x \quad (5.67)$$

$$\vec{B} = 2 \frac{E_{0i}}{c} \cos(kz) \cos(\omega t + \pi) \vec{e}_y \quad (5.68)$$

Ces relations montrent que les champs ne se propagent plus mais qu'ils oscillent sinusoïdalement en fonction du temps avec une amplitude qui est fonction de la distance z , leur déphasage étant de $\frac{\pi}{2}$, on dit que l'onde est stationnaire.

- L'amplitude du champ électrique est nulle pour $k_{1z} = \frac{2\pi}{\lambda} z = l\pi$ ($l = 0, 1, 2, \dots$), c'est à dire pour $z = l \frac{\lambda}{2}$
- L'amplitude du champ magnétique est nulle pour $k_{1z} = \frac{2\pi}{\lambda} z = \left(l + \frac{1}{2}\right)\pi$ ($l = 0, 1, 2, \dots$), c'est à dire pour $z = \left(l + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2}$.

- Les points où l'amplitude est nulle sont appelés les nœuds et les points où l'amplitude est maximale sont appelés les ventres.

CHAPITRE 6

LES ÉQUATIONS DE MAXWELL DANS LES MILIEUX

Nous allons dans ce chapitre utiliser les équations de Maxwell dans les milieux matériels pour étudier la propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu isolant.

6.1 Propriétés électromagnétiques des milieux matériels

6.1.1 Polarisation d'un milieu matériel

Dipôles induits

Un atome est un objet électriquement neutre. Il est classiquement représenté par un noyau composé de z protons et donc porteur d'une charge $+Zq_e$ et d'un nuage de z électrons porteur d'une charge $-Zq_e$. En l'absence de champ extérieur, les centres de masse \vec{r}_p du noyau et \vec{r}_e du nuage électronique sont confondus : $\vec{r}_p = \vec{r}_e$ (figure ci-dessous). En l'absence de champ extérieur, les centres de masse des charges positives (le noyau atomique) et des charges négatives (le nuage électronique) sont confondus (a). En présence d'un champ électrique externe \vec{E} , la force électrique déplace les centres de masse dans des directions opposées. Le champ crée un dipôle électrostatique interne à l'atome (b).

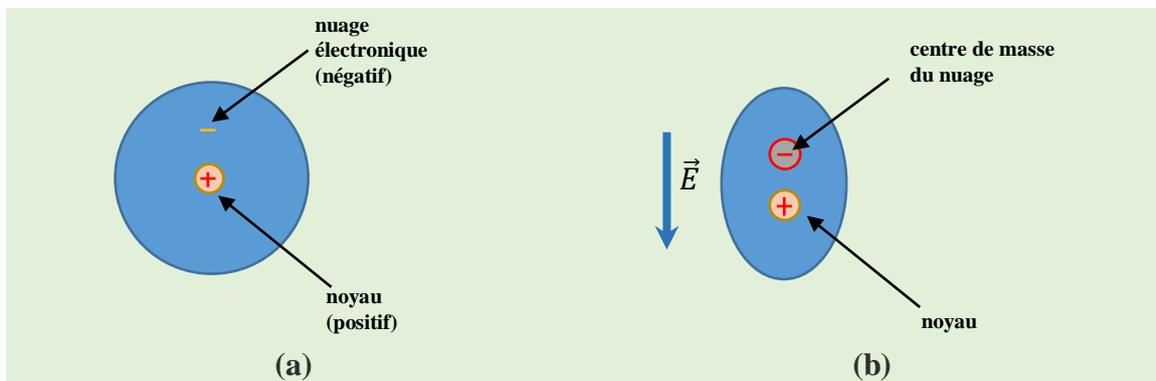


Figure VI.1: Polarisation microscopique induite par un champ électrique

En présence d'un champ électrique \vec{E} que l'on suppose constant, le noyau et le nuage électronique subissent des forces électriques opposées. Il en résulte un écart entre les centres de masse et donc la création d'un dipôle : les charges $+Nq_e$ et $-Nq_e$ sont séparées d'une petite distance $\vec{\delta}$. Il en résulte une polarisation atomique, également appelée polarisation microscopique. Chaque atome placé dans le champ \vec{E} porte un moment dipolaire

$$\vec{p} = Zq_e\vec{\delta} = \alpha\epsilon_0\vec{E} \quad (6.1)$$

où $\alpha = 4\pi r_0^3$ est la polarisabilité électronique de l'atome. Cette quantité ne dépend pas du nombre d'électrons mais de la taille r_0 de l'atome.

Dipôles permanents

Certaines molécules ont une distribution de charges asymétrique, même dans leur état fondamental (HCl, H_2O, \dots). Elles ont un moment dipolaire permanent même en l'absence de champ électrique extérieur. Mais elles se déplacent et tournent librement sous l'effet de l'agitation thermique, de sorte qu'elles ne privilégient aucune direction et, qu'en moyenne, le moment dipolaire de l'échantillon est nul. Si l'on applique un champ électrique, les dipôles locaux ont tendance à s'orienter dans la direction du champ. Sous l'effet combiné des forces électriques et de l'agitation thermique, l'orientation des dipôles reste cependant partielle (elle augmente lorsque le champ augmente ou lorsque la température diminue); il apparaît un moment dipolaire macroscopique, donc une polarisation, fonction croissante du champ. En première approximation, la relation entre \vec{P} et \vec{E} est linéaire.

Autres types de matériaux

Dans les matériaux ferro-électriques, les interactions entre les dipôles moléculaires permanents peuvent être si importantes qu'elles provoquent (à basse température) une orientation spontanée de ces dipôles, même en l'absence de champ.

Il existe également des matériaux où les mécanismes de polarisation sont encore plus compliqués. Par exemple, dans les piézo-électriques, la polarisation dépend explicitement des tensions mécaniques à l'intérieur du matériau et peut être induite par une déformation mécanique, même en l'absence de champ.

Diélectriques

Un diélectrique est un milieu matériel

- 🔌 qui ne conduit pas le courant électrique, c'est-à-dire dans lequel il n'y a pas intrinsèquement de charges électriques susceptibles de se déplacer de façon macroscopique,
- 🔌 qui est capable de se polariser sous l'application d'un champ électrique.

Polarisation macroscopique

Dans un milieu matériel composé d'un grand nombre d'atomes (ou de molécules) et soumis à un champ électrique externe, on observe d'une part l'apparition d'un grand nombre de dipôles électriquement induits et d'autre part l'orientation des dipôles permanents dans la direction du champ électrique. Chacun de ces dipôles contribue à la création d'un champ électrique de polarisation. Le nombre de dipôles par unité de volume définit le vecteur polarisation \vec{P} . En régime linéaire on admet que le vecteur polarisation \vec{P} est proportionnel au champ électrique inducteur \vec{E} ; ce qui s'exprime par la relation suivante :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (6.2)$$

Le paramètre χ_e est la susceptibilité diélectrique du matériau. C'est un nombre positif sans dimension qui décrit la réaction macroscopique du milieu matériel. On considère que la charge électrique totale ρ_T est la somme des charges ne dépendant pas de l'état de polarisation de la matière appelées charges libres et des charges résultant de la polarisation appelées charges induites. Ces deux types de charges s'expriment respectivement par les densités volumiques de charge ρ et ρ_p . On montre que les effets de la polarisation d'un diélectrique sont équivalents à la superposition de :

une densité volumique de charge ρ_P , répartie en volume, vérifiant l'équation

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\rho_P \quad (6.3)$$

une densité surfacique de charge σ_P , répartie en surface, vérifiant l'équation

$$\vec{P} \cdot \vec{n} = \sigma_P \quad (6.4)$$

Ces charges sont appelées charges de polarisation.

Sachant que :

$$\rho_T = \rho + \rho_P \quad (6.5)$$

le théorème de Gauss s'écrit :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_T}{\varepsilon_0} = \frac{\rho + \rho_P}{\varepsilon_0} = \frac{\rho - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{\varepsilon_0} \quad (6.6)$$

On définit le champ électrique induit \vec{E}_{pol} lié à la polarisation macroscopique \vec{P} et au champ externe \vec{E} par :

$$\vec{E}_{pol} = \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{P} = \chi_e \vec{E} \quad (6.7)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} + \vec{E}_{pol}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (6.8)$$

D'où

Le théorème de Gauss dans une surface contenant le milieu matériel polarisé s'écrit :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} + \vec{E}_{pol}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (6.9)$$

qui peut également se mettre sous la forme :

$$\vec{\nabla} \cdot [(1 + \chi_e)\varepsilon_0] = \rho \quad (6.10)$$

La densité de charge à prendre en compte dans cette équation est la densité de charges libres ρ . La permittivité relative ε_r est définie par $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$. Le produit $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ est appelée permittivité absolue du milieu.

On obtient finalement le théorème de Gauss pour le champ électrique \vec{E}

$$\vec{\nabla} \cdot (\varepsilon \vec{E}) = \rho \quad (6.11)$$

Cette relation constitue le théorème de Gauss pour un champ électrique en présence d'un milieu matériel de permittivité relative ε_r , en présence de charges libres ρ . La permittivité relative ε_r est un nombre sans dimension qui vaut 1 dans le vide, et est supérieure à 1 dans un milieu matériel. La permittivité relative des matériaux dépend principalement du nombre de dipôles induits par unité de volume (la densité numérique mesurée en m^{-3}), mais également des interactions entre ces dipôles.

De plus, la présence d'un dipôle permanent porté par un atome ou une molécule influence la permittivité relative. Ainsi la permittivité des gaz est très proche de l'unité, tandis que la permittivité des liquides peut atteindre plusieurs dizaines. Quelques valeurs sont proposées dans le tableau ci-dessous.

Phase	Fluide	ϵ_r
gaz	air	1.00054
	O ₂	1.00049
	CO ₂	1.00092
	CH ₄	1.00081
	C ₄ H ₁₀	1.00258
Liquide	eau	78
	trichloroéthylène	3.42
	éthanol	24.3
	glycérol	42.5

Table 6.1: Quelques valeurs de permittivités relatives ϵ_r pour des gaz et des liquides.

En régime sinusoïdal, la susceptibilité électrique et la permittivité relative sont des fonctions complexes de la pulsation de l'onde électrique appliquée au milieu. Dans les domaines d'application des diélectriques, il est courant d'écrire la permittivité relative sous la forme :

$$\epsilon_r = \epsilon_r' + i\epsilon_r'' = \epsilon_r' + i\epsilon_r' \tan\theta_p \quad (6.12)$$

La quantité $\epsilon_r' \tan\theta_p$ est appelée le facteur de perte car il caractérise l'aptitude du milieu matériel à absorber l'énergie électromagnétique, en général convertie en énergie thermique. L'angle θ_p est, lui, appelé l'angle de perte.

On utilise parfois le vecteur excitation électrique \vec{D} défini par :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \vec{E} \quad (6.13)$$

On obtient finalement le théorème de Gauss pour le vecteur excitation électrique \vec{D}

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (6.14)$$

6.1.2 Conducteurs

En tout point d'un conducteur, il existe une relation entre le vecteur densité de courant \vec{j} et le champ électrique total \vec{E} (somme du champ électrostatique \vec{E}_S et du champ électromoteur \vec{E}_i) dite relation d'Ohm-Kirchhoff :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \quad (6.15)$$

où γ est la conductivité du milieu conducteur; elle s'exprime en siemens par mètre (Sm^{-1}).

Cas particuliers :

Isolants : $\gamma = 0$

Conducteurs parfaits : $\gamma = +\infty$

6.1.3 Milieux aimantés

Lorsqu'une substance quelconque est introduite dans le champ magnétique créé par des courants électriques le champ magnétique change. Ceci peut être expliqué par le fait que chaque substance est magnétique, c'est-à-dire qu'elle est magnétisée (acquiert un moment magnétique) sous

l'action d'un champ magnétique. Une substance magnétisée crée son propre champ magnétique \vec{B}' qui forme avec le champ magnétique primaire \vec{B}_0 créé par les courants, le champ résultant :

$$\vec{B} = \vec{B}' + \vec{B}_0 \quad (6.16)$$

Dans cette expression \vec{B} et \vec{B}' représentent en fait les valeurs moyennes des champs magnétiques sur un élément de volume infiniment petit. Le champ \vec{B}' , comme le champ \vec{B}_0 créé par les courants de conduction n'a pas de sources (les charges magnétiques n'existent pas). Ainsi, pour le champ magnétique résultant en présence d'une magnétisation, le théorème de Gauss s'applique :

$$\oiint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (6.17)$$

Ce qui signifie que les lignes de champ de \vec{B} sont continues partout en présence d'une substance.

Mécanisme d'aimantation : A l'heure actuelle, il est établi que les molécules de plusieurs substances ont des moments magnétiques intrinsèques dus au mouvement de leurs charges intrinsèques. Chaque moment magnétique correspond à un courant circulaire créant un champ magnétique dans l'espace environnant. En absence de champ magnétique extérieur, les moments magnétiques des molécules sont orientés aléatoirement, et ainsi le champ magnétique résultant est nul, ainsi que le moment magnétique total de la substance. Ceci s'applique également aux substances qui n'ont pas de moment magnétique en absence de champ extérieur. Si une substance est placée dans un champ magnétique externe, sous l'action de ce champ magnétique les moments magnétiques des molécules acquièrent une direction prédominante et la substance est aimantée, c'est-à-dire que le moment magnétique résultant devient différent de zéro. Dans ce cas, les moments magnétiques des molécules individuelle ne se compensent plus et il en résulte l'apparition du champ magnétique \vec{B}' . Le processus d'aimantation des substances dont les molécules n'ont pas de moment magnétique en absence d'un champ extérieur est différent. Quand de tels matériaux sont introduits dans un champ magnétique extérieur, des courants circulaires élémentaires sont induits dans les molécules et la substance toute entière acquiert un moment magnétique, ce qui contribue également à la génération du champ $B \sim 0$. La plupart des matériaux sont faiblement magnétisés lorsqu'ils sont introduits dans un champ magnétique.

■ **Seuls les matériaux ferromagnétiques comme l'Acier, le Nickel, le Cobalt et leurs nombreux alliages ont des propriétés magnétiques prononcées.**

Les matériaux ont des propriétés magnétiques très variables. Ils se classent dans les catégories suivantes :

- ✚ Un matériau est amagnétique lorsqu'il ne possède pas de propriétés magnétiques.
- ✚ Un matériau est ferromagnétique quand il porte une aimantation permanente ou de longue durée plus importante que le champ inducteur.

- ✚ Un matériau est paramagnétique quand il présente une aimantation en présence d'un champ extérieur seulement. L'aimantation est alignée avec le champ extérieur.
- ✚ Un matériau est diamagnétique quand il présente une aimantation opposée au champ inducteur (exemples : Bismuth, Graphite, Antimoine). L'aimantation est en général faible.

Magnétisation : Le degré d'aimantation d'un matériau magnétisé est caractérisé par le moment magnétique par unité de volume. Cette quantité, appelée aimantation est représentée symbolique par \vec{M} ; par définition :

$$\vec{M} = \frac{1}{\Delta\tau} \sum_i \vec{m}_i \quad (6.18)$$

où $\Delta\tau$ est un volume infiniment petit entourant un point donné et \vec{m}_i est le moment magnétique d'une molécule individuelle. La sommation est réalisée sur toutes les molécules contenues dans le volume $\Delta\tau$.

Courant de magnétisation I_M : La magnétisation d'une substance est causée par l'orientation préférentielle des moments magnétiques individuels de chaque molécule. On peut faire la même remarque au sujet des courants circulaires élémentaires associés avec chaque molécule et appelés courants moléculaires. On peut montrer qu'un tel comportement des courants moléculaires conduit à l'apparition d'un courant macroscopique appelé courant de magnétisation (ou courant ampérien). Rappelons que les courants ordinaires circulant dans les conducteurs et associés au mouvement des porteurs de charge sont appelés courants de conduction.

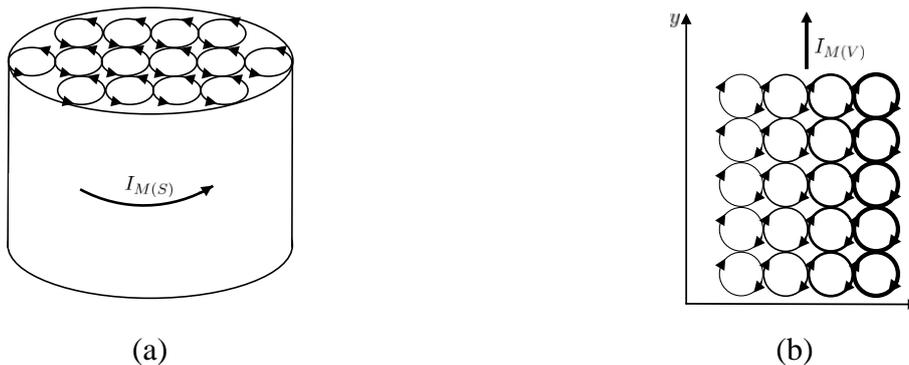


Figure VI-2: Courants de magnétisation (ampériens).

(a) de surface; (b) de volume

Afin de mieux comprendre ce phénomène, considérons à titre d'exemple un cylindre constitué d'un corps aimanté homogène dont l'aimantation \vec{M} est uniforme et dirigée selon l'axe du cylindre (figure (a) ci-dessus). Les courant moléculaires des molécules adjacentes ont des sens opposés et se compensent mutuellement. Les seuls courants moléculaires qui ne sont pas annulés sont ceux qui émergent sur la surface latérale du cylindre. Ces courants forment les courants magnétisant macroscopiques de surface $I_{M(S)}$ circulant sur la surface latérale du cylindre. Le courant magnétisant de surface $I_{M(S)}$ induit le même champ magnétique macroscopique que toutes les molécules prises ensemble.

Considérons un autre cas, celui d'un corps aimanté inhomogène représenté par la figure (b) ci-dessus où l'épaisseur des lignes correspond à l'intensité des courants moléculaires. Le vecteur aimantation \vec{M} est dirigé vers l'arrière de la figure et augmente en amplitude avec la coordonnée x . On peut voir que les courants moléculaires ne se compensent plus dans le volume de la substance, et il en résulte un courant de magnétisation volumique $I_{(MV)}$ dont le sens est selon l'axe des y . Nous pouvons dans chacun de ces cas parler de vecteur densité de courant surfacique $\vec{j}_{M(S)}$ et de densité de courant volumique $\vec{j}_{M(V)}$ qui se mesurent respectivement en Am^{-1} et Am^{-2} . On peut montrer que le vecteur densité de courant magnétisant $\vec{j}_{M(V)}$ et l'aimantation \vec{M} sont liés par la relation :

$$\vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{j}_{M(V)} \quad (6.19)$$

Dans les milieux aimantés placés dans un champ magnétique externe, des courants de magnétisation sont induits. Ainsi la circulation du vecteur \vec{B} doit prendre en compte non seulement les courants de conduction mais également les courants magnétisants :

$$\int_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 (I + I_{M(V)}) \quad (6.20)$$

où I et $I_{M(V)}$ sont respectivement les courants de conduction et de magnétisation, encerclés par le contour d'intégration Γ . Cette dernière équation peut être réécrite en utilisant les vecteurs densité de courant de conduction et de magnétisation :

$$\int_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \iint_S (\vec{j} + \vec{j}_{M(V)}) \cdot d\vec{S} \quad (6.21)$$

Mais cette relation ne peut pas être exploitée dans le cas général car la détermination des densités de courants magnétisants $\vec{j}_{M(V)}$ est un problème difficile. Nous utiliserons donc la relation équivalente à

6.19 :

$$\int_{(\Gamma)} \vec{M} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \vec{j}_{M(V)} \cdot d\vec{S} \quad (6.22)$$

D'où

$$\int_{(\Gamma)} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (6.23)$$

En utilisant le théorème de Stokes

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{j} \quad (6.24)$$

On introduit le vecteur excitation magnétique \vec{H} défini par :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (6.25)$$

Qui s'exprime en $A \cdot m^{-1}$ et dont le rotationnel est :

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} \quad (6.26)$$

Cette relation peut s'écrire sous la forme intégrale équivalente :

$$\int_{(\Gamma)} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (6.27)$$

L'approximation usuellement utilisée consiste à considérer que l'aimantation \vec{M} est reliée au vecteur excitation magnétique \vec{H} par :

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (6.28)$$

où χ_m est la susceptibilité magnétique du matériau. Elle est nulle pour les matériaux amagnétiques, négative pour les matériaux diamagnétiques, positive pour les matériaux paramagnétiques et ferromagnétiques. Le champ magnétique total \vec{B} s'écrit alors :

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \chi_m \vec{H}) = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (6.29)$$

La constante μ_0 est la perméabilité magnétique du vide. Le nombre sans dimension $\mu_r = 1 + \chi_m$ est la perméabilité relative dont la valeur est très importante dans les matériaux ferromagnétiques ($\mu_r \approx 104$ pour le fer par exemple) et proche de l'unité pour les matériaux paramagnétiques.

Quand le champ magnétique est variable, on décrit formellement les effets de ce champ sur la matière par une perméabilité relative sous forme complexe :

$$\mu_r = \mu'_r + i\mu''_r \quad (6.30)$$

avec des parties réelle et imaginaire fonctions de la pulsation ω du champ magnétique.

6.1.4 Equations de Maxwell dans les milieux matériels, homogènes, linéaires et isotopes

Dans le cas des milieux homogènes, linéaires et isotopes, les équations de Maxwell s'écrivent :

☛ Théorème de Gauss pour \vec{E}

Forme locale	Forme intégrale
$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon}$	$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(\tau)} \frac{\rho}{\epsilon} d\tau$

☛ Equation du flux magnétique

Forme locale	Forme intégrale
$\vec{\nabla} \cdot (\vec{B}) = 0$	$\oiint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

☛ Loi de Faraday

Forme locale	Forme intégrale
$\vec{\nabla} \times (\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$

☛ Théorème Ampère-Maxwell

Forme locale	Forme intégrale
$\vec{\nabla} \times (\vec{B}) = \mu \vec{j} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$\oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \left(\mu \vec{j} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$

Où

☛ $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ est la permittivité absolue du milieu diélectrique

☛ ϵ_r est la permittivité relative du milieu diélectrique

☛ $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \times 10^9} = 8.854187817 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$ est la permittivité du vide

☛ $\mu = \mu_0 \mu_r$ est la perméabilité absolue du milieu

☛ μ_r est la perméabilité relative du milieu

☛ $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} = 1.2566370614 \times 10^{-6} \text{ H m}^{-1}$ est la perméabilité magnétique du vide

☛ Dans le cas d'un conducteur ohmique on a $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ où γ est la conductivité électrique du milieu

6.2 Relations de passage

Composante tangentielle et composante normale de \vec{E}

A la traversée d'une surface (Σ) séparant deux milieux et portant des charges vraies avec une densité superficielle σ , les relations locales s'écrivent :

$$\vec{E}_{T2} - \vec{E}_{T1} = 0 \quad (6.31)$$

$$\epsilon_2 E_{N2} - \epsilon_1 E_{N1} = \sigma \quad (6.32)$$

où \vec{E}_T est la composante de \vec{E} dans le plan tangent à (Σ) en M , tandis que E_N mesure de la composante de \vec{E} suivant la normale \vec{n} en M et orientée du milieu (1) vers le milieu (2).

Composante tangentielle et composante normale de \vec{B}

A la traversée d'une surface (Σ) séparant deux milieux et parcourue par des courants vrais de densité superficielle \vec{j}_S , les relations locales \vec{B} deviennent :

$$B_{N2} = B_{N1} \quad (6.33)$$

$$\frac{1}{\mu_2} \vec{B}_{T2} - \frac{1}{\mu_1} \vec{B}_{T1} = \vec{j}_S \times \vec{n} \quad (6.34)$$

où B_N est la composante de \vec{B} suivant la normale au point M considéré orientée du milieu (1) vers le milieu (2); tandis que \vec{B}_{T2} est la composante de \vec{B} dans le plan tangent à (Σ) en M .

6.3 Propagation dans les milieux diélectriques

Les milieux diélectriques sont des milieux isolants. Leur conductivité est extrêmement faible, de l'ordre de 10^{-20} à 10^{-12} Sm^{-1} , celle d'un conducteur métallique étant de l'ordre de 10^7 Sm^{-1} , à température ambiante. Il est donc tout à fait raisonnable de prendre pour γ la valeur $\gamma = 0$. Par ailleurs dans de tels milieux, $\rho_{libre} = 0$.

Les équations de Maxwell se simplifient alors en :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E}) = 0 \quad (6.35)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{B}) = 0 \quad (6.36)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (6.37)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{B}) = \mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (6.38)$$

En utilisant la même démarche que dans le chapitre précédent, on peut montrer que le champ électrique et le champ magnétique satisfont les équations de propagation suivantes :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (6.39)$$

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (6.40)$$

où la vitesse de propagation de l'onde est :

$$V = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu_r} \sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r}} = \frac{c}{n} \quad (6.41)$$

$n = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r}$ est l'indice de réfraction (ou indice optique) du milieu. Dans les milieux réels n est constant pour les grandes longueurs d'onde, tandis que pour les hautes fréquences, il faut faire intervenir le phénomène de dispersion qui entraîne une dépendance de n avec la fréquence.

Dans la plupart des diélectriques $\mu_r = 1$, d'où $n = \sqrt{\varepsilon_r}$.

On peut également montrer que l'impédance caractéristique d'un tel milieu peut s'écrire :

$$Z = \frac{Z_0}{n} \quad (6.42)$$

où Z_0 est l'impédance caractéristique du vide.

Annexe A

RAPPEL DES POINTS IMPORTANTS

I: Les postulats de l'électromagnétisme classique.

1°) Les équations de Maxwell relatives au champ électromagnétique.

Le champ électromagnétique $\{\vec{E}, \vec{B}\}$ en un point M à la date t dû à une distribution caractérisée dans le référentiel d'étude supposé galiléen, par la densité volumique totale de charges ρ_{tot} et le vecteur densité volumique totale de courants \vec{j}_{tot} satisfait aux équations ci-dessous :

<u>Formulation locale</u>		<u>Les relations intégrales.</u>
$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho_{tot}}{\epsilon_0}$ (équation de <u>Maxwell - Gauss</u>). ϵ_0 est la <u>permittivité absolue du vide</u> . Les lignes de champ \vec{E} divergent à partir des charges + pour aboutir aux charges -.	①	$\iint_{M \in \Sigma} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}_{ext}(M) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$ <u>théorème de Gauss</u> .
$\text{rot} \vec{B} = 0$ (\vec{B} est un <u>champ de rotationnel</u>). Les lignes de champ \vec{B} sont des courbes fermées et ne peuvent jamais se couper (il n'existe pas de « monopôles magnétiques » comme il existe des charges électriques positives ou négatives).	②	$\iint_{M \in \Sigma} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S}_{ext}(M) = 0$ \vec{B} est à <u>flux conservatif</u> (Le flux de \vec{B} à travers un circuit ne dépend que du circuit et non de la surface choisie pour calculer ce flux).
$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (équation de <u>Maxwell - Faraday</u>).	③	$\oint_{M \in \Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{OM} = -\frac{d\Phi_s(\vec{B})}{dt}$, S s'appuie sur Γ . <u>Relation de Faraday</u> .
$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_{tot} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (équation de <u>Maxwell - Ampère</u>). μ_0 est la <u>perméabilité absolue du vide</u> .	④	$\oint_{M \in \Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{OM} = \mu_0 \iint_{P \in S} \vec{j}_{tot} \cdot d\vec{S} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_s(\vec{E})}{dt}$ où S s'appuie sur Γ orienté. Forme <u>généralisée</u> du <u>théorème d'Ampère</u> .

Il découle des relations précédentes que :

Le champ électrique \vec{E} se comporte comme un vecteur polaire (donc contenu dans tout plan de symétrie des sources) tandis que le champ magnétique \vec{B} se comporte comme un vecteur axial (donc perpendiculaire à tout plan de symétrie des causes).

Les équations de Maxwell sont linéaires vis-à-vis des sources : cette propriété valide le principe de superposition relatif à \vec{E} et \vec{B} . En particulier, cette linéarité permet d'utiliser la méthode complexe pour les calculs des champs.

□ Unités et valeurs des constantes électromagnétiques du vide ϵ_0 et μ_0 .

En u.s.i ,

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$$

et

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \text{ F.m}^{-1}$$

□ Mise en évidence du champ électromagnétique : loi de force.

Le formalisme de l'électromagnétisme est complet à condition d'ajouter aux 4 équations locales la loi de force permettant de mettre en évidence la présence d'un champ électromagnétique.

Loi de force de Lorentz : $\vec{F}_{Lorentz} = q[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}]$: force agissant sur une particule chargée de charge q , en mouvement dans le référentiel d'étude à la vitesse \vec{v} , où règne le champ électromagnétique $\{\vec{E}, \vec{B}\}$.

✦ Action d'un champ électromagnétique sur un conducteur : force de Laplace.

La force de Laplace est la force exercée par le champ $\{\vec{E}, \vec{B}\}$ sur l'ensemble des charges d'un conducteur. Elle correspond à la force magnétique exercée sur les porteurs mobiles du conducteur.

La force de Laplace par unité de volume s'écrit : $\frac{d\vec{F}_{Laplace}}{d\tau} = \vec{j} \wedge \vec{B}$.

Pour un circuit filiforme parcouru par un courant I , La force de Laplace élémentaire s'exerçant sur un élément de longueur $d\vec{l}$ est $d\vec{F}_{laplace} = Id\vec{l} \wedge \vec{B}$.

2°) Énergie du champ électromagnétique.

Un champ électromagnétique contient et transporte de l'énergie. On définit :

□ L'énergie électromagnétique volumique.

La quantité $\varpi = \frac{1}{2} \epsilon_0 \|\vec{E}\|^2 + \frac{\|\vec{B}\|^2}{2\mu_0}$, homogène à une énergie volumique (exprimée en SI en J/m^3) est appelée énergie électromagnétique volumique (ou improprement densité volumique d'énergie électromagnétique). Cette expression montre que l'énergie est localisée dans le champ électromagnétique lui-même.

En isolant les contributions dues à \vec{E} et \vec{B} on distingue:

$$\varpi_{el} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \|\vec{E}\|^2, \text{ énergie électrique volumique } \quad \text{et} \quad \varpi_{mag} = \frac{\|\vec{B}\|^2}{2\mu_0}, \text{ énergie magnétique volumique .}$$

□ Le vecteur de Poynting.

On note $\vec{\Pi}$ le vecteur, appelé vecteur de Poynting, défini par : $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$

$\|\vec{\Pi}\|$ est homogène à une puissance surfacique, exprimé en SI en W.m^{-2}

□ **Puissance volumique cédée aux charges par le champ électromagnétique :**

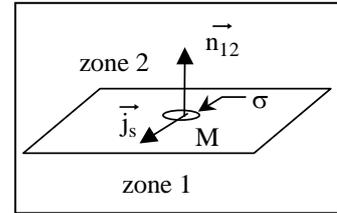
Puissance Joule volumique cédée à la matière par le champ électromagnétique : $\frac{dP_J}{d\tau} = \vec{j}_{tot} \cdot \vec{E}$.

3°) Les relations de passage du champ électromagnétique.

Soit M un point d'une surface S séparant deux milieux notés ① et ②. On définit le vecteur unitaire $\vec{n}_{12} \perp$ à S de ① vers ②.

Soit $\sigma(M)$ la densité surfacique de charges et $\vec{j}_S(M)$ le vecteur densité de courants surfacique au point M.

On établit à partir des équations de Maxwell les relations de passage pour \vec{E} et \vec{B} à l'interface:



$$\vec{E}_2(M) - \vec{E}_1(M) = \frac{\sigma(M)}{\epsilon_0} \vec{n}_{12} \quad \text{et} \quad \vec{B}_2(M) - \vec{B}_1(M) = \mu_0 \vec{j}_S(M) \times \vec{n}_{12}.$$

On retient qu'il y a continuité de la *composante tangentielle pour \vec{E}* et *continuité de la composante normale pour \vec{B}* .

NB : Dans le cas d'une modélisation volumique de charges ou de courants, les champs \vec{E} et \vec{B} sont définis et continus en tout point de l'espace.

Des problèmes de discontinuité peuvent survenir lorsqu'on passe à une modélisation plus simpliste (surfacique ou encore linéique).

Rappelons les équivalences des distributions de charges et de courant au voisinage de M :

$$dq = \begin{cases} \rho \cdot d\tau \\ \sigma \cdot dS \\ \lambda \cdot d\ell \end{cases} \quad \text{et} \quad d\vec{C} = \begin{cases} \vec{j} \cdot d\tau \\ \vec{j}_S \cdot dS \\ i \cdot d\ell \end{cases}$$

4°) Les lois de conservation déduites des équations de Maxwell.

□ **Principe de conservation de la charge électrique.**

✦ Sous forme intégrale :

Le courant électrique total sortant d'une surface fermée Σ est égal à la diminution par unité de temps de la charge électrique totale contenue dans le volume V limité par Σ : $I = \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S}_{ext} = -\frac{dQ_{int}}{dt}$.

✦ Sous forme locale : $div \vec{j} + \frac{\partial \rho_{tot}}{\partial t} = 0$. Cette dernière équation se retrouve à partir des

équations de Maxwell en écrivant que $div(\overrightarrow{rot}(\vec{B})) = 0$.

□ **Le cadre de l'A.R.Q.S.**

Dans le cadre de l'Approximation des Régimes Quasi Stationnaires (A.R.Q.S.), l'équation de conservation de la charge s'écrit : $div \vec{j} = 0$ (sous forme locale) ou $\iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S}_{ext} = 0$ (forme intégrale).

On reconnaît dans cette dernière relation la loi des nœuds établie en électrocinétique.

Le cadre de l'A.R.Q.S. consiste à négliger le terme $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, appelé **vecteur densité de courant de déplacement** devant les courants réels (\vec{j}).

L'A.R.Q.S. couvre un large domaine de fréquences, allant du continu aux fréquences radioélectriques (à la limite de l'infra-rouge), du moins pour les milieux conducteurs.

Dans le cadre de l'A.R.Q.S. l'équation de Maxwell Ampère s'écrit : $\overrightarrow{rot} \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j}$ sous forme locale, ou sous forme intégrale : $\oint_{M \in \Gamma} \vec{B}(M) \cdot d\vec{OM} = \mu_0 (I)_{\Gamma}$, où $(I)_{\Gamma}$ est l'intensité algébrique enlacée par le contour \square orienté. Cette dernière relation est connue sous le nom de **théorème d'Ampère**.

□ Principe de conservation de l'énergie électromagnétique.

On cherche une équation de conservation pour l'énergie comme on l'a fait pour la charge.

Sous forme intégrale : écrire que la diminution par unité de temps de l'énergie électromagnétique contenue dans un volume V est due d'une part à un transfert par rayonnement à travers la surface limitant le volume V, et d'autre part au transfert d'énergie à la matière contenue dans V (énergie cédée aux charges par le champ électromagnétique) :

$$\iint_{\Sigma} \|\vec{\Pi}\| \cdot d\vec{S}_{ext} + \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau = - \frac{d}{dt} \left(\iiint_V \varpi d\tau \right).$$

Sous forme locale : $div \|\vec{\Pi}\| + \frac{\partial \varpi}{\partial t} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$, obtenue à partir du bilan intégral, mais qu'on peut retrouver directement à partir des équations de Maxwell par identification du couple $\{\varpi, \vec{P}\}$.

II : Introduction du potentiel scalaire V et du potentiel vecteur A.

1°) Expressions des champs en fonction des potentiels :

On définit deux nouveaux champs, un **champ scalaire** noté V, et un **champ vectoriel** noté \vec{A} à

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

partir desquels on exprime le champ électromagnétique suivant les relations:

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot} \vec{A}$$

V est appelé le **potentiel scalaire** ; son unité SI est le **volt** (symbole **V**).

\vec{A} est appelé le **potentiel vecteur** ; son unité SI est le **weber / mètre** (symbole **Wb.m⁻¹**).

2°) L'indétermination des potentiels : choix de jauge.

Le couple $\{V, \vec{A}\}$ associé à un champ électromagnétique donné **n'est pas unique**. On profite de cette indétermination pour imposer aux potentiels une condition supplémentaire, appelée **condition de jauge**, permettant (si possible !) de simplifier les expressions obtenues pour V et \vec{A} .

Deux conditions de jauge sont à connaître :

① la **jauge de Coulomb**, pour laquelle on impose : $div \vec{A} = 0$.

② la **jauge de Lorentz** pour laquelle on impose : $div \vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0$.

☞ La jauge de Coulomb est utilisée dans le cadre des régimes stationnaires ou quasi stationnaires, alors que la jauge de Lorentz est bien adaptée au problème de la propagation du champ électromagnétique (les solutions obtenues pour V et \vec{A} sont connues sous le nom de potentiels retardés).

3°) Les équations vérifiées par les potentiels.

- ① En jauge de Coulomb : V est solution de l'équation de Poisson, comme en électrostatique.

$$\Delta \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \mu_0 \vec{j}_{tot} = \vec{0}$$

- ② En jauge de Lorentz :

$$\Delta V - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho_{tot}}{\epsilon_0} = 0$$

$\text{div} \vec{A} = 0$ $\Delta_M V + \frac{\rho(M)}{\epsilon_0} = 0$
--

Annexe B

Relations utiles et Opération vectorielle en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.

On peut rappeler, sans le démontrer, quelques relations vectorielles utiles en électromagnétisme. Considérons pour cela :

- Les nombres complexes a et b .
- Les nombres scalaires $U(M)$ et $V(M)$.
- Les fonctions vectorielles $\vec{A}(M)$ et $\vec{B}(M)$

$$\diamond \overrightarrow{\text{grad}} \left[aU(M) + bV(M) \right] = a \overrightarrow{\text{grad}}U(M) + b \overrightarrow{\text{grad}}V(M)$$

$$\diamond \overrightarrow{\text{grad}} \left[U(M)V(M) \right] = U(M) \overrightarrow{\text{grad}}V(M) + V(M) \overrightarrow{\text{grad}}U(M)$$

$$\diamond \overrightarrow{\text{grad}} \left[\vec{A}(M) \cdot \vec{B}(M) \right] = \left[\vec{A}(M) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right] \vec{B}(M) + \left[\vec{B}(M) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right] \vec{A}(M) + \vec{A}(M) \times \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}(M) + \vec{B}(M) \times \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}(M)$$

$$\bullet \text{div} \left[a \vec{A}(M) + b \vec{B}(M) \right] = a \text{div} \vec{A}(M) + b \text{div} \vec{B}(M)$$

$$\bullet \text{div} \left[U(M) \cdot \vec{A}(M) \right] = U(M) \text{div} \vec{A}(M) + \vec{A}(M) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}U(M)$$

$$\bullet \text{div} \left[\vec{A}(M) \times \vec{B}(M) \right] = \vec{B}(M) \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}(M) - \vec{A}(M) \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}(M)$$

$$\bullet \overrightarrow{\text{rot}} \left[a \vec{A}(M) + b \vec{B}(M) \right] = a \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}(M) + b \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}(M)$$

$$\bullet \overrightarrow{\text{rot}} \left[U(M) \cdot \vec{A}(M) \right] = U(M) \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}(M) + \overrightarrow{\text{grad}}U(M) \times \vec{A}(M)$$

$$\bullet \overrightarrow{\text{rot}} \left[\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}(M) \right] = \overrightarrow{\text{grad}} \left[\text{div} \vec{A}(M) \right] - \Delta \vec{A}(M)$$

$$\bullet \overrightarrow{\text{rot}} \left[\vec{A}(M) \times \vec{B}(M) \right] = \vec{A}(M) \cdot \text{div} \vec{B}(M) - \vec{B}(M) \cdot \text{div} \vec{A}(M) + \left[\vec{B}(M) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right] \vec{A}(M) - \left[\vec{A}(M) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right] \cdot \vec{B}(M)$$

- $\overrightarrow{\text{rot}} \left[\overrightarrow{\text{grad}} U(M) \right] = 0$
- $\text{div} \left[\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}(M) \right] = 0$
- $\text{div} \left[\overrightarrow{\text{grad}} U(M) \right] = \Delta U(M)$
- $\Delta \left[U(M) \cdot V(M) \right] = U(M) \cdot \Delta V(M) + 2 \left[\overrightarrow{\text{grad}} U(M) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} V(M) \right] + V(M) \cdot \Delta U(M)$

	<i>Cartésiennes</i>	<i>Cylindriques</i>	<i>Sphériques</i>
	$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$	$\rho \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ et } -\infty \leq z \leq +\infty$	$r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi \text{ et } 0 \leq \varphi \leq 2\pi$
	$d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$	$d\vec{l} = d\rho\vec{u}_\rho + \rho d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{k}$	$d\vec{l} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + r \sin\theta d\varphi\vec{u}_\varphi$
	$dV = dx dy dz$	$dV = \rho d\rho d\theta dz$	$dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$
$\overrightarrow{\text{grad}}$	$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$	$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$	$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi$
div	$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin\theta} \left\{ \frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right\}$
$\overrightarrow{\text{rot}}$	$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k}$	$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial(\rho A_\theta)}{\partial z} \right) \vec{u}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho A_\theta)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} \right) \vec{k}$	$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left(\frac{\partial(r \sin\theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial \varphi} \right) \vec{u}_r + \frac{1}{r \sin\theta} \left(\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r \sin\theta A_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{k}$

Annexe C

Propriétés de symétrie

B.1 Le principe de Curie

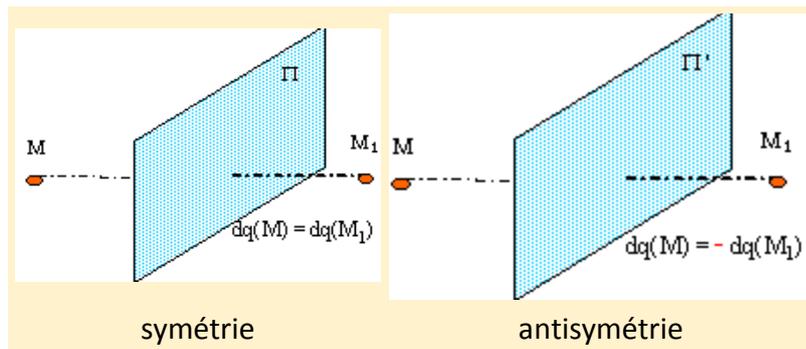
La symétrie des causes (que sont les charges, sources de l'électrostatique) se retrouve dans les effets produits (que sont le champ et le potentiel électrostatiques).

Ce principe est très utile en électrostatique car il permet de prévoir l'allure des lignes du champ électrique et les surfaces équipotentielles à partir de la symétrie du système chargé.

B.2 Le champ électrostatique

Une distribution de charges possède :

- ✚ un plan de **symétrie** Π si pour tout élément symétrique on a des charges identiques.
- ✚ un plan d'**antisymétrie** Π' si pour tout élément symétrique on a des charges opposées.



- ✚ Une distribution est **invariante par translation** si elle reste inchangée par translation : le champ ne dépend pas de la variable z .
- ✚ Une distribution est **invariante par rotation** si elle reste inchangée par rotation autour d'un axe : le champ ne dépend pas de l'angle.

Le champ électrostatique \vec{E} est contenu dans un plan de symétrie perpendiculaire à un plan de symétrie

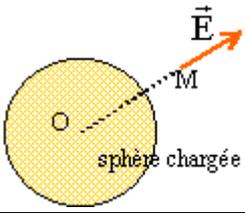
Fil infini uniformément chargé

	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Tout plan perpendiculaire au fil est plan de symétrie. ▪ Tout plan contenant le fil est plan de symétrie. invariant par translation le long du fil et invariant par translation le long du fil : <p style="text-align: center; color: red; font-weight: bold;">Le champ dépend de la distance OM</p>
--	---

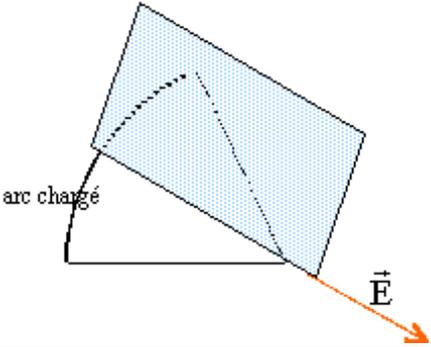
Disque uniformément chargé :

	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Tout plan contenant Δ est plan de symétrie ▪ Le plan du disque est plan de symétrie invariant par rotation autour de l'axe: <p style="text-align: center; color: red; font-weight: bold;">Le champ dépend de la distance OM</p>
--	--

Sphère uniformément chargée en surface ou en volume :

	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Tout plan passant par le centre est plan de symétrie : champ radial ▪ invariant par rotation autour de tout axe passant par le centre O : Le champ dépend de la distance OM
---	--

Arc de cercle uniformément chargé

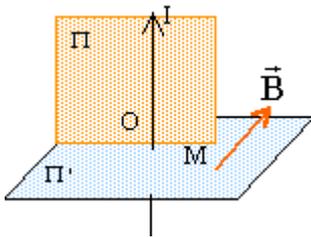
	<p>Le plan perpendiculaire à l'arc et contenant la bissectrice est plan de symétrie.</p>
---	--

- Soit M un point de l'espace où l'on souhaite calculer le champ électrostatique créé par une distribution spatiale de charges électriques.
- Si par le point M, passe un plan de symétrie pour la distribution des charges électriques, le champ électrique \vec{E} est contenu dans ce plan de symétrie.
- Si par le point M, passe un plan d'antisymétrie pour la distribution des charges électriques, le champ électrique \vec{E} est perpendiculaire à ce plan d'antisymétrie.

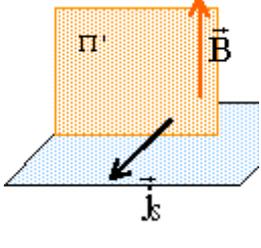
B.3 Le champ magnétostatique

Le champ magnétique \vec{B} est contenu dans un plan d'antisymétrie,
Perpendiculaire à un plan de symétrie de la distribution de courant

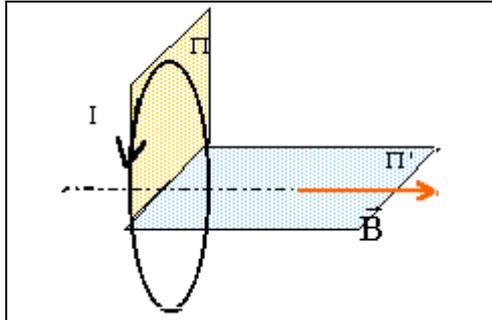
Fil ou cylindre infini parcouru par un courant uniforme

	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Tout plan perpendiculaire au fil est plan d'antisymétrie. ▪ Tout plan contenant le fil est plan de symétrie invariant par translation le long de l'axe et invariant par translation le long de l'axe : Le champ dépend de la distance OM
---	--

Plan infini parcouru par j_S uniforme

	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Tout plan parallèle à j_S est plan de symétrie. ▪ Tout plan perpendiculaire à j_S est plan d'antisymétrie. ▪ Le plan lui-même est plan de symétrie invariant par toute translation suivant j_S et pour toute translation perpendiculaire à j_S.
---	---

Spire ou anneau parcouru par un courant uniforme



- L'axe du système est axe de symétrie.
- Le plan de la spire est plan de symétrie.
- Tout plan contenant l'axe de la spire est plan d'antisymétrie.
- Système invariant par rotation autour de l'axe.

Solénoïde infini

- Tout plan contenant l'axe est plan d'antisymétrie donc le champ magnétique est porté par l'axe.
- Invariance par rotation autour de l'axe.
- Invariance par translation.

Soit M un point de l'espace où l'on souhaite calculer le champ magnétostatique \vec{B} créé par une distribution spatiale de courants électriques.

Si par le point M , passe un plan de symétrie pour la distribution des courants électriques, le champ magnétique \vec{B} est perpendiculaire à ce plan de symétrie.

Si par le point M , passe un plan d'antisymétrie pour la distribution des courants électriques, le champ magnétique \vec{B} est contenu dans ce plan d'antisymétrie.

B.4 Le potentiel-vecteur

Soit M un point de l'espace où l'on souhaite calculer le potentiel-vecteur \vec{A} créé par une distribution spatiale de courants électriques.

Si par le point M , passe un plan de symétrie pour la distribution des courants électrique, le potentiel vecteur \vec{A} est contenu dans ce plan de symétrie.

Si par le point M , passe un plan d'antisymétrie pour la distribution des courants électriques, le champ vecteur \vec{A} est perpendiculaire à ce plan d'antisymétrie.

Bibliographie

[1] Richard Feynman , Robert B. Leighton , Matthew Sands , Michel Bloch , Goéry Delacôte : "*Le Cours de physique de Feynman : Electromagnétisme, Tome 1*". Addison Wesley, seconde édition, 1994.

[2] Richard Feynman , Robert B. Leighton , Matthew Sands , Michel Bloch , Goéry Delacôte : "*Le Cours de physique de Feynman : Electromagnétisme, Tome 2*". Addison Wesley, seconde édition, 1994.

[3] Joseph Edminister : "*Electromagnétisme : cours et problèmes*". Série Schaum, Ediscience International, 2000.

[4] Emile Amzallag, Josseline Ben Aïm, Norbert Piccioli : " *Electrostatique : Rappels de cours et exercices corrigés de physique*". Ediscience, 1996.