الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
*People's Democratic Republic of Algeria*
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
*Ministry of Higher Education and Scientific Research*
المدرسة العليا للاقتصاد بوهـــران
*Higher School of Economics of Oran*

**Titre du polycopié**

**ANALYSE I**

**MATHEMATIQUES**

**Première année des classes préparatoires**

**Élaboré par :**

**Mr Mohammed MEZIANE, Maitre de conférences B, ESE Oran, m.meziane13@yahoo.fr**

# Avant-propos

Le présent travail consiste à simplifier au maximum le cours d' " analyse mathématique " afin qu'il soit accessible aux étudiants de la 1ère année préparatoire de l'Ecole Supérieure de l'Economie d'Oran. Le programme comprend sept chapitres dont les quatre premiers sont généralement entamés en premier semestre et les trois derniers en deuxième semestre.

En ma qualité de chargé de cours du module d' " analyse mathématique " à l'E.S.E d'Oran, j'ai constaté que la majorité des étudiants ne s'intéresse qu'aux travaux dirigés au détriment des cours en adoptant ainsi une démarche tout à fait inadéquate. Les étudiants se précipitent à consulter les solutions des exercices sans fournir le moindre effort permettant d'aboutir aux résultats qu'il faut. Sachant bien qu'en mathématiques, l'étudiant doit d'abord maitriser les notions acquises au cours ainsi que les exemples étudiés. Cela doit être fait d'une manière régulière sans laisser s'accumuler les cours les uns sur les autres. Il faut noter encore qu'un travail de mise au point, la révision et la répétition sont impératifs afin de pouvoir consolider véritablement les apprentissages.

Mes conseils aux étudiants de lire les consignes avec soin puis de procéder à résoudre les problèmes sur plusieurs essais en se référant à ses pré- requis. En cas d'échec, ils pourront demander de l'assistance auprès d'autrui : camarades de classe, enseignants ou autres.

Je souhaite que les étudiants s'en servent mieux du contenu de ce polycopié et vont en tirer profit de ce modeste travail en appliquant les conseils donnés.

Enfin, je vous annonce être prêt à recevoir tous vos suggestions et répondre à vos questions sur mon e-mail : m.meziane13@ yahoo.fr

# Table des matières


**1 Généralités sur les nombres réels-Notion de fonction 4**

1.1 Introduction aux nombres réels . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4
1.2 Opérations sur les nombres réels . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5
1.2.1 Corps des nombres réels . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5
1.2.2 Formule du binôme . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 7
1.3 Intrevalles dans $\mathbb{R}$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 7
1.4 La borne supérieure et inférieure dans $\mathbb{R}$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8
1.5 Valeur absolue . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 10
1.6 Partie entière d'un nombre réel . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 11
1.7 fonctions numériques . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12
1.7.1 Graphe d'une fonction réel . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 13
1.8 Ensemble des valeurs d'une fonction . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 13
1.8.1 Fonction composée . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 14
1.9 Fonction injective, surjective et bijective . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 15
1.9.1 Fonction réciproque . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 16

**2 Limites-Continuités-Équivalences 19**

2.1 limites . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 19
2.1.1 Limite à droite et limite à gauche . . . . . . . . . . . . . . . . . . 20
2.1.2 Limites infinies . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 20
2.2 Fonctions continues . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 26
2.2.1 Continuité uniforme sur un intervalle . . . . . . . . . . . . . . . . 30
2.3 Fonctions équivalentes. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 31

**3 Fonctions dérivables** **35**
3.0.1 Dérivée sur un intervalle. Fonctions dérivées . . . . . . . . . . . . . 38
3.0.2 Différentielle . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 40

**4 Fonctions élémentaires** **45**
4.1 Fonctions trigonométriques réciproques . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 45
4.2 Fonctions hyperboliques et leurs réciproques . . . . . . . . . . . . . . . . . 50
4.2.1 Fonctions rationnelles réelles . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 58

**5 Calcul d'intégrales** **60**
5.1 Primitive et intégrale indéfinie . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 60
5.1.1 Quelques intégrales à connaître . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 61
5.1.2 Intégration par changement de variable . . . . . . . . . . . . . . . . 62
5.1.3 Intégration du type $\int \frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}dx$ et $\int \frac{\alpha x+\beta}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ . . . . . . . . . . 62
5.1.4 Intégration par partie . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 63
5.1.5 Intégration des fonctions rationnelles . . . . . . . . . . . . . . . . . 64
5.1.6 Intégration de certaines classes de fonctions . . . . . . . . . . . . . 65
5.2 Intégrale définie . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 71

**6 Développements limités** **75**
6.1 Formules de Maclaurin et de Taylor . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 75
6.2 Dévoloppements limités usuels . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 81
6.2.1 Opérations sur les développements limités . . . . . . . . . . . . . . 81
6.2.2 Développement limité au voisinage de $x_0 \neq 0$ et en $\infty$ . . . . . . . . 86

**7 Suites numériques** **90**
7.1 Suites récurrentes . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 96

**Bibliographie** **100**

# Chapitre 1

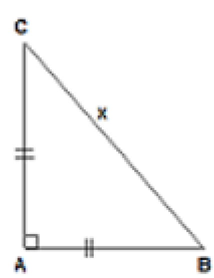
# Généralités sur les nombres réels-Notion de fonction

## 1.1 Introduction aux nombres réels

1. On désigne par $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ....\}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$.
2. On désigne par $\mathbb{Z} = \{....... - 3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, ......\}$ l'ensemble des entiers relatifs et $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$.
3. On désigne l'ensemble des nombres rationnels par $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*\}$ avec la propriété que : $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \Leftrightarrow pq' = p'q$.

Il est clair que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
En partant de $\mathbb{Q}$ on peut montrer par un exemple la nécessité d'introduire d'autres nombres qui n'appartiennent pas à $\mathbb{Q}$, ces nombres sont appelés les nombres irrationnels.

**Exemple 1.1.1.** *Soit le triangle rectangle isocèle $ABC$ de sommet $A$, tel que $AB = 1$ et la longeur de l'hypoténuse $BC = x$ est inconnu.*



*En utilisant le théorème de Pythagore, on obtient l'équation $x^2 = 2$ dont sa solution est notée $\sqrt{2}$ qui est irrationnel.*

**Exercice 1.1.1.** *Montrer que $\sqrt{7}$ est irrationnel.*

**Solution 1.1.1.** *Nous allons utiliser une preuve par l'absurde. Supposons que $\sqrt{7} = \frac{p}{q}$ tel que $p$ et $q$ deux entiers naturels premiers entre eux. Donc on obtient $p^2 = 7q^2 ... (*)$.*
*Puisque $PGCD(p, q) = 1$, alors $PGCD(p^2, q^2) = 1$ (faites le !) et d'après $(*)$, obtient $PGCD(p^2, q^2) = PGCD(7q^2, q^2) = q^2 \neq 1$ qui est contradictoire avec $p^2$ et $q^2$ sont premiers entre eux.*

**Remarques 1.1.1.**

1. Un nombre rationnel peut s'écrire sous forme d'un développement décimal périodique à partir d'un certains rang.
2. Un nombre irrationnel peut s'écrire sous forme d'un développement décimal non périodique.

**Exemple 1.1.2.** $\frac{1}{3} = 0,333333..... \in \mathbb{Q}$ ; $7,25123123123..... \in \mathbb{Q}$. $\sqrt{7} = 2.645751311... \notin \mathbb{Q}$.

**Définition 1.1.1.** *La collection des nombres rationnels et irrationnels forment l'ensemble des nombres réels notée $\mathbb{R}$.*

Donc on est arrivé à :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

## 1.2 Opérations sur les nombres réels

### 1.2.1 Corps des nombres réels

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni de deux opérations internes connus auparavant qui sont la somme $(+)$ et le produit $(.)$. Il est muni aussi par une relation d'ordre totale $(\leq)$. Ces opérations internes et la relation d'ordre satisfont certaines conditions pour dire que $(\mathbb{R}, +, ., \leq)$ est un corps commutatif totalement ordonné. On a les propriétés suivantes :

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y$ et $y \leq z \Longrightarrow x \leq z$
2. $x \leq y$ et $y \leq x \Longrightarrow x = y$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x \leq y$ ou $y \leq x$
4. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \leq y \Longrightarrow x + z \leq y + z$
5. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall z \geq 0 : x \leq y \Longrightarrow xz \leq yz$
6. $x \geq 0 \Longrightarrow -x \leq 0$.

**Exercice 1.2.1.** *Montrer que :*

1. $0.x = 0, \forall x \in \mathbb{R}$
2. $x \geq 0 \Longrightarrow -x \leq 0$ pour tout $x$ réel.
3. pour tout $x, y > o$ ou $x, y < o$, on a :

$$x \leq y \Longrightarrow \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}.$$

**Solution 1.2.1.**

1. On a :

$$0.x = (0 + 0)x = 0.x + 0.x...(*)$$

car la multiplication est distributive sur l'addition. Posons $a = 0.x$ et ajoutant à l'égalité $(*)$ $-a$ (le symétrique de $a$). Donc

$$-a + a = (-a + a) + a \Longrightarrow 0 = 0 + a = a,$$

d'où $0.x = 0$.

2. On ajoutant $-x$ le symétrique de $x$, on obtient :

$$x \geq 0 \Longrightarrow x + (-x) \geq 0 + (-x) \Longrightarrow -x \leq 0$$

3. Puisque $\frac{1}{xy} > 0$, alors

$$x \leq y \Longrightarrow \frac{1}{xy} x \leq \frac{1}{xy} y \Longrightarrow \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}.$$

### 1.2.2 Formule du binôme

**Théorème 1.2.1.** *Pour tous éléments $x$ et $y$ de $\mathbb{R}$ et tout entier $n \geq 1$, on a la formule (du binôme) :*

$$(x+y)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p x^{n-p} y^p$$

*avec $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$. et $n! = n(n-1)(n-2)...2 \times 1$ et par définition $0! = 1$.*

**Exercice 1.2.2.** *Développer les expressions suivantes :*
*$(x+2)^5$ et $(x-2)^4$.*

## 1.3 Intrevalles dans $\mathbb{R}$

Soient $a$ et $b$ deux nombres réels tel que $a < b$. les types d'intervales sont :

1. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (intervalle fermé)
2. $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (intervalle ouvert)
3. $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ (intervalle semi ouvert)
4. $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ (intervalle semi ouvert)
5. $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ (intervalle ouvert)
6. $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$ (intervalle fermé)
7. $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$ (intervalle ouvert)
8. $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$ (intervalle fermé)
9. $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$ (intervalle ouvert et fermé à la fois)

S'il n' y a pas d'ambiguïté on peut écrire $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$.

**Définition 1.3.1.** *Soit $V$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in V$. On dit que $V$ est un voisinage de $x_0$ ssi il existe un intervalle ouvert $I$ tel que $x_0 \in I \subseteq V$.*

**Exemple 1.3.1.** *L'intervalle $[0; 1[$ est un voisinage de tout ses points sauf pour $x_0 = 0$.*

## 1.4 La borne supérieure et inférieure dans $\mathbb{R}$

Soit $E$ une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. On dit que $E$ est majorée s'il existe un nombre $M$ tel que :

$$\forall x \in E : x \leq M$$

2. On dit que $E$ est minorée s'il existe un nombre $m$ tel que :

$$\forall x \in E : x \geq m$$

3. On dit que $E$ est bornée si elle est à la fois minorée et majorée.

**Exemple 1.4.1.** *La partie* $E = ]-1, 3[ \cup [4, 7[$ *est bornée car :* $\forall x \in E : -1 \leq x \leq 7$. *On remarque que tout nombre* $M \geq 7$ *est un majorant de* $E$ *et tout nombre* $m \leq -1$ *est un minorant de* $E$.

**Théorème 1.4.1.**

1. Toute partie $E$ non vide de $\mathbb{R}$ et majorée admet une borne supérieure notée $\sup E$ qui est le plus petit des majorants.
2. $M = \sup E \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E : x \leq M \\ \forall \epsilon > 0, \exists x \in E : x > M - \epsilon \end{cases}$

Si $M = \sup E \in E$, alors $M$ est appelé le maximum de $E$, il est noté $M = \max E$.

**Théorème 1.4.2.**

1. Toute poartie $E$ non vide de $\mathbb{R}$ et minorée admet une borne inférieure notée $\inf E$ qui est le plus grand des minorants.
2. $m = \inf E \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E : x \geq m \\ \forall \epsilon > 0, \exists x \in E : x < m + \epsilon \end{cases}$

Si $m = \inf E \in E$, alors $m$ est appelé le minimum de $E$, il est noté $m = \min E$.

**Exemples 1.4.1.**

1. Pour $A = ]-5, \frac{1}{2}]$, on a : $\inf A = -5$ et $\min A$ n'existe pas, $\sup A = \max A = \frac{1}{2}$.

2. Pour $B = [-1, +\infty[$, on a : $\inf B = \min B = -1$, $\sup B$ et $\max B$ n'existent pas, mais on peut écrire $\sup B = +\infty$.
3. Pour $C = ]-\infty, 4]$, on a : $\inf C = -\infty$, $\min C$ n'existe pas et $\sup C = \max C = 4$.

**Exercice 1.4.1.** *Soit l'ensemble des nombres réels défini par*

$$A = \{1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}.$$

*Montrer que $A$ est borné et déterminer ses bornes en utilisant la définition.*

**Solution 1.4.1.** *Il est clair que*

$$\forall x \in A : 0 \leq x = 1 - \frac{1}{n} < 1,$$

*donc $A$ est borné.*

*Montrons que* $\sup A = 1$. *Soit $\epsilon > 0$, il existe $x \in A$ ? tel que $x > 1 - \epsilon$. On a*

$$\begin{aligned} x > 1 - \epsilon &\Longleftrightarrow 1 - \frac{1}{n} > 1 - \epsilon \\ &\Longleftrightarrow \frac{1}{n} < \epsilon \\ &\Longleftrightarrow n > \frac{1}{\epsilon}, \end{aligned}$$

*i.e. tout entier naturel $n$ supérieur à $\frac{1}{\epsilon}$ définit $x = 1 - \frac{1}{n} > \sup A - \epsilon$, donc* $\sup A = 1$.
*De même pour* $\inf A = 0$, *il existe $x \in A$ ? tel que $x < 0 + \epsilon$. En effet*

$$\begin{aligned} x < 0 + \epsilon &\Longleftrightarrow 1 - \frac{1}{n} < \epsilon \\ &\Longleftrightarrow \frac{1}{n} > 1 - \epsilon, \end{aligned}$$

*i.e.*

- *si $\epsilon \geq 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient tout les $x = 1 - \frac{1}{n}$ vérifie $x < \inf A + \epsilon$.*
- *si $0 < \epsilon < 1$, alors pour tout entier $n < \frac{1}{1-\epsilon}$ définit $x = 1 - \frac{1}{n} < \inf A + \epsilon$.*

*D'où* $\inf A = 0$.

**Théorème 1.4.3** (d'Archimede)**.** *quel que soit le nombre réel $x$ il existe un entier naturel $n$ supérieur à $x$, c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} : x < n$.*

**Théorème 1.4.4.** *le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dense dans le corps des nombres réels, c'est-à-dire qu'on a la propriété :*

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \exists \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} : a < \frac{p}{q} < b$$

## 1.5 Valeur absolue

**Définition 1.5.1.** *Soit $x \in \mathbb{R}$. Le nombre*

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

*s'appelle la valeur absolue de $x$.*

**Exemple 1.5.1.** $|3| = 3$ ; $|\frac{31}{2}| = \frac{31}{2}$ ; $|-7| = -(-7) = 7$ ; $|-\sqrt{3}| = -(-\sqrt{3}) = \sqrt{3}$ ; $|1-\sqrt{2}| = -1+\sqrt{2}$ ; $|2-\sqrt{3}| = 2-\sqrt{3}$.

**Exercice 1.5.1.** *Ecrire les expressions suivantes sans le symbole "valeur absolue" selon les valeurs de $x$ :*
$A = |x+2|$ ; $B = |x+2| + |1-x| + |x+3|$

**Solution 1.5.1.** *Essayons de faire l'expression $B$. Résumons ces valeurs absolues dans le tableau suivant :*

| $x$ | $-\infty$ | $-3$ | $-2$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\|x+3\|$ | $-x-3$ | 0 $\quad x+3$ | $x+3$ | $x+3$ | |
| $\|1-x\|$ | $1-x$ | $1-x$ | $1-x$ 0 | $-1+x$ | |
| $\|x+2\|$ | $-x-2$ | $-x-2$ 0 | $x+2$ | $x+2$ | |
| $B$ | $-3x-4$ | $-x+2$ | $x+6$ | $3x+4$ | |

*D'où*

$$B = \begin{cases} -3x-4 & si \quad x \in ]-\infty, -3] \\ -x+2 & si \quad x \in ]-3, -2] \\ x+6 & si \quad x \in ]-2, 1] \\ 3x+4 & si \quad x \in ]1, +\infty[ \end{cases}$$

**Théorème 1.5.1.** *La valeur absolue sur $\mathbb{R}$ possède les propriétés suivantes :*

1. $|x| \geq 0$ , $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
2. $-|x| \leq x \leq |x|$.

3. $|xy| = |x||y|$.
4. $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$ si $y \neq 0$.
5. $|x+y| \leq |x| + |y|$ (appelée première inégalité triangulaire).
6. $||x| - |y|| \leq |x-y|$ (appelée deuxième inégalité triangulaire).

**Exercice 1.5.2.**

Soit $\alpha$ un nombre réel strictement positif.

1. Montrer que : $|x| \leq \alpha \Longleftrightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha$.
2. En déduire les solutions de l'inéquation $|x+2| < 1$.

**Solution 1.5.2.**

1. On a :

$$\begin{aligned} 0 \leq |x| < \alpha &\Longleftrightarrow |x|^2 \leq \alpha^2 \\ &\Longleftrightarrow x^2 - \alpha^2 \leq 0 \\ &\Longleftrightarrow x \in [-\alpha, \alpha] \quad \text{(d'après le signe d'un polynôme de deuxième degré)} \\ &\Longleftrightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha. \end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} 0 \leq |x+2| < 1 &\Longleftrightarrow -1 < x+2 < 1 \\ &\Longleftrightarrow -1-2 < x+2-2 < 1-2 \text{ (en ajoutant -2 aux inégalités)} \\ &\Longleftrightarrow -3 < x < -1 \end{aligned}$$

d'où l'ensmble des solutions est $S = ]-3, -1[$

## 1.6 Partie entière d'un nombre réel

**Théorème et définition 1.6.1.** *Soit $x \in \mathbb{R}$, alors il existe un entier relatif unique $n$ tel que $n \leq x < n+1$. L'entier $n$ est appelé partie entière de $x$ : on le note $[x]$ ou $E(x)$.*

**Exemples 1.6.1.** $[0.1] = 0$ ; $[0.99] = 0$ ; $[-0.1] = -1$ ; $[\sqrt{2}] = 1$ ; $[-\sqrt{2}] = -2$ ; $[\pi] = 3$ ; $[-\pi] = -4$.

**Exercice 1.6.1.** *Soit $[x]$ la partie entière de $x$. Montrer :*

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} : (x \leq y \Longrightarrow [x] \leq [y])$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{Z} : [x + a] = [x] + a$.
3. $\forall x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} : [-x] = -[x] - 1$.

**Solution 1.6.1.**

1. On a $[x] \leq x < [x]+1$ et $[y] \leq x < [y]+1$. Puisque $x \leq y$, alors $[x] \leq x \leq y < [y]+1$, donc $[x] < [y] + 1$. Comme $[x]$ et $[y] + 1$ sont des entiers, alors $[x] \leq [y]$.
2. On a $[x] \leq x < [x] + 1 \Longrightarrow [x] + a \leq x + a < [x] + a + 1$. Puisque $[x] + a$ est un entier, alors $[x] + a = [x + a]$.
3. On a :
$$[x] \leq x < [x] + 1 \Longrightarrow -[x] - 1 < -x \leq -[x] = -[x] - 1 + 1.$$
Donc $[-x] = -[x] - 1$.

## 1.7 fonctions numériques

**Définition 1.7.1.** *Soit $E$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit que $f$ est une fonction numérique de $E$ dans $\mathbb{R}$ si elle fait correspondre à chaque élèment $x$ de $E$ au plus un élèment $y$ de $\mathbb{R}$ noté $f(x)$, et on écrit*

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

*f(x)=y s'appelle l'image de $x$ par $f$ et $x$ est un antécédent de $y$ par $f$.*
*L'ensemble des $x$ qui ont une image par $f$, s'appelle l'ensemble de définition de $f$, il est noté $D_f$.*

**Exemple 1.7.1.** *la fonction*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \frac{x}{x-1} \end{aligned}$$

*est définie sur*

$$D_f = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} : x - 1 = 0\} = ]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[.$$

**Exemple 1.7.2.** *Soit $E$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. La fonction définie par*

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto I_E = x \end{aligned}$$

*s'applle la fonction identique.*

**Exercice 1.7.1.** *Déterminer le domaine de définition des fonctions numériques suivantes :*

1. $x \longmapsto f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$.
2. $x \longmapsto\longmapsto g(x) = \frac{x^2+1}{|x+1|-2}$.
3. $x \longmapsto h(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$.

### 1.7.1 Graphe d'une fonction réel

Le graphe d'une fonction $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$, est une partie de $\mathbb{R}^2$, définie par :
$G(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in D_f\}$ qui est représenté dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

## 1.8 Ensemble des valeurs d'une fonction

**Définition 1.8.1.** *Soit $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$. On appelle ensemble des valeurs de la fonction $f$, la partie de $\mathbb{R}$, notée $f(D_f)$ et définie par*

$$f(D_f) = \{f(x) : x \in D_f\}.$$

Pour déterminer l'ensemble des valeurs d'une fonction, on peut utiliser le tableau de variation ou bien cette proposition suivante lorsque on connaît sa monotonie.

**Proposition 1.8.1.** *Soit l'intervalle $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ et $f$ une fonction continue sur $(a, b)$. Alors*

1. $f((a, b)) = (\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x), \lim\limits_{x \longrightarrow b} f(x))$ *si $f$ est croissante sur $(a, b)$.*
2. $f((a, b)) = (\lim\limits_{x \longrightarrow b} f(x), \lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x))$ *si $f$ est décroissante sur $(a, b)$.*

**Exercice 1.8.1.** *Déterminer l'ensemble des valeurs des fonctions suivantes :*

1. $x \longmapsto f(x) = x^2 + 1$ tel que $x \in [0, +\infty[$.
2. $x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x}$ tel que $x \in ]0, 1]$.
3. $x \longmapsto f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$ tel que $x \in ] - \infty, -1[$.

**Solution 1.8.1.** 1. *Puisque $f$ est continue et croissante sur $[0, +\infty[$, alors*

$$f([0, +\infty[) = [f(0), \lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x)[= [1, +\infty[.$$

2. *On a $f$ est continue et décroissante sur $]0, 1]$, par conséquent*

$$f(]0, 1]) = [f(1), \lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x)[= [1, +\infty[.$$

3. *Comme $f$ est continue et décroissnte sur $] - \infty, -1[$, on obtient*

$$f(] - \infty, -1[) =] \lim_{x \longrightarrow -1} f(x), \lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x)[=] - \infty, 0[.$$

### 1.8.1 Fonction composée

Soient les fonctions $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : D_g \longrightarrow \mathbb{R}$. On appelle fonction composée de $f$ et $g$ (avec cette ordre) la fonction notée $g \circ f$, définie par :

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

avec

$$x \in D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}.$$

**Exercice 1.8.2.** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies par*

$$x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x-1} \quad et \quad x \longmapsto g(x) = x^2 - 3.$$

*Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$.*

**Solution 1.8.2.** *Les fonctions $f$ et $g$ sont définies sur $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ et $D_g = \mathbb{R}$ respectivement. On a*

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} - \{1\} : \frac{1}{x-1} \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} - \{1\}.$$

*Donc*

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\} : (g \circ f)(x) = \frac{1}{(x-1)^2} - 3,$$

*de même*

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3 \neq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 \neq 4\} \\ &= \mathbb{R} - \{-2, 2\}, \end{aligned}$$

*donc*

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\} : (f \circ g)(x) = \frac{1}{x^2 - 4}.$$

*On remarque que $g \circ f \neq f \circ g$.*

## 1.9 Fonction injective, surjective et bijective

**Définition 1.9.1.** *Soit $f : D_f \longrightarrow F \subseteq \mathbb{R}$. On dit que $f$ est :*

1. injective ssi $\forall x_1, x_2 \in D_f [f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2]$.
2. surjective ssi $\forall y \in F, \exists x \in D_f : y = f(x)$.
3. bijective ssi f est à la fois injective et surjective. C'est-à-dire que l'équation $y = f(x)$ admet une solution unique $x \in D_f$ pour tout $y \in f(D_f)$.

**Remarque 1.9.1.** *Pour assurer la surjection de $f$, il est préférable d'utiliser cette écriture $f : D_f \longrightarrow f(D_f)$ au lieu de $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$.*

**Exemple 1.9.1.** *La fonction* $x \longmapsto f(x) = e^{x^2}$ *est injective dans chacun de ces intervalles* $[0, +\infty[$ *et* $]-\infty, 0]$ *car pour tout* $x_1, x_2 \in [0, +\infty[$ *ou bien* $x_1, x_2 \in ]-\infty, 0]$*, on a :*

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1^2 = x_2^2 \Longrightarrow x_1 = x_2.$$

*La même fonction* $f$ *n'est pas injective sur* $\mathbb{R}$ *car pour* $x_1 = -1$ *et* $x_2 = +1$*, on a* $f(x_1) = f(x_2) = e$ *et* $x_1 \neq x_2$*.*

### 1.9.1 Fonction réciproque

**Définition 1.9.2.** *Soit* $f : D_f \longrightarrow f(D_f)$ *une fonction bijective. La fonction notée* $f^{-1} : f(D_f) \longrightarrow D_f$ *tel que* $f^{-1}(y) = x$ *s'appelle fonction réciproque de* $f$ *et l'on a :* $f^{-1} \circ f = I_{D_f}$ *et* $f \circ f^{-1} = I_{f(D_f)}$*.*

**Exercice 1.9.1.** *Soit la fonction*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = e^x + 1 \end{aligned}$$

1. Détrminer $f(\mathbb{R})$
2. Montrer que $f : \mathbb{R} \longrightarrow f(\mathbb{R})$ est bijective.
3. Montrer que $f$ est bijective et donner explicitement la fonction $f^{-1}$.
4. Vérifier que $f^{-1} \circ f = I_{\mathbb{R}}$ et $f \circ f^{-1} = I_{f(\mathbb{R})}$.

**Solution 1.9.1.**

1. Puisque la fonction $x \longmapsto e^x$ est continue et croissante sur $\mathbb{R}$, alors $f$ est aussi continue et croissante sur $\mathbb{R}$ et par conséquent

$$f(\mathbb{R}) = ]\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x)[ = ]1, +\infty[.$$

2. Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Longrightarrow e^{x_1} + 1 = e^{x_2} + 1 \\ &\Longrightarrow e^{x_1} + 1 = e^{x_2} + 1 \\ &\Longrightarrow x_1 = x_2 \quad \text{(car la fonction exp est injective).} \end{aligned}$$

3. Il est clair que $f$ est surjective de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R}) = ]1, +\infty[$ et comme elle est aussi injective, alors $f$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]1, +\infty[$. Donc $f$ admet une fonction réciproque $f^{-1}$ de $]1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
   Maintenant soit $y \in ]1, +\infty[$, $\exists x =? \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$.
   En effet
$$\begin{aligned} y = f(x) &\Longleftrightarrow y = e^x + 1 \\ &\Longleftrightarrow e^x = y - 1 \\ &\Longleftrightarrow x = \ln(y-1) \quad (\text{car } y - 1 > 0). \end{aligned}$$
   D'où
$$\begin{aligned} f^{-1} : ]1, +\infty[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f^{-1}(x) = \ln(x-1) \end{aligned}$$
4. Faites le !

**Définitions 1.9.1.** ***(fonction paire, impaire, minorée, majorée, bornée, périodique)*** *soit $f$ une fonction définie sur $D_f$. On dit que :*

1. $f$ est paire ssi $D_f$ est symétrique par rapport à 0 et $\forall x \in D_f : f(-x) = f(x)$.
2. $f$ est impaire ssi $D_f$ est symétrique par rapport à 0 et $\forall x \in D_f : f(-x) = -f(x)$.
3. $f$ est minorée si $f(D_f)$ est minoré, i.e. il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in D_f : f(x) \geq m$.
4. $f$ est majorée si $f(D_f)$ est majoré, i.e. il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in D_f : f(x) \leq M$.
5. $f$ est bornée si $f(D_f)$ est borné, i.e. il existe $K > 0$ tel que :
$$\forall x \in D_f : |f(x)| \leq K.$$
6. $f$ est périodique s'il existe un nombre $P$ tel que : $\forall x \in D_f$ on a :$x + P \in D_f$ et $f(x+P) = f(x)$.

**Exemples 1.9.1.**

1. La fonction $x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x}$ est majorée sur $] - \infty, 0[$ (car $\exists M = 0 : f(x) < 0$), minorée sur $]0, +\infty[$ (car $\exists m = 0 : f(x) > 0$) et bornée sur $]1, +\infty[$ (car $\exists m = 0, M = 1 : 0 < f(x) < 1$).

2. La fonction $x \longmapsto \cos x$ définie sur $\mathbb{R}$ est paire et bornée car $|\cos x| \leq 1$.

3. La fonction $x \longmapsto f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$ est impaire et elle est bornée car $\exists K = 1$ tel que $|f(x)| = |\frac{\sin x}{1+x^2}| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

4. La fonction $x \longmapsto tgx$ définie sur $\mathbb{R}$ est $\pi$-périodique car $tg(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = tgx$.

**Exercice 1.9.2.** *Montrer la fonction $x \longrightarrow e^x$ peut se décomposer en la somme de deux fonctions $g$ paire et $h$ impaire.*

**Solution 1.9.2.** *La fonction $x \longrightarrow e^x$ est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à $0$, de plus*

$$\begin{cases} g(x) + h(x) = e^x \\ g(-x) + h(-x) = e^{-x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} g(x) + h(x) = e^x \\ g(x) - h(x) = e^{-x} ...(*) \end{cases} \quad \textit{(car g paire et h impaire).}$$

*En résolvant le système (*) on trouve :*

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad et \quad g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

# Chapitre 2

# Limites-Continuités-Équivalences

## 2.1 limites

**Définition 2.1.1.** *Soit $I$ un voisinage et $x_0$. $f$ une fonction définie sur $I$ ou $I-\{x_0\}$. On dit que $f$ a une limite $l$ (finie) au point $x_0$ ssi :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x[|x-x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x)-l| < \epsilon]$$

*et on écrit : $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l$ ou bien $f(x) \longrightarrow l$ quand $x \longrightarrow x_0$.*
*Pour $x_0 = +\infty$, on a*

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = l \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists A > 0, \forall x[x > A \Longrightarrow |f(x)-l| < \epsilon,]$$

*et pour $x_0 = -\infty$, on a*

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = l \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists A > 0, \forall x[x < -A \Longrightarrow |f(x)-l| < \epsilon].$$

**Exemple 2.1.1.** *montrons que : $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} (2x-3) = -1$.*
*Soit $\epsilon > 0$. On a*

$$|(2x-3)-(-1)| = 2|x-1| < \epsilon \Longleftrightarrow |x-1| < \frac{\epsilon}{2}$$

*d'où*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta = \frac{\epsilon}{2}, \forall x \in \mathbb{R}[|x-1| < \frac{\epsilon}{2} \Longrightarrow |f(x)-(-1)| < \epsilon$$

### 2.1.1 Limite à droite et limite à gauche

**Définition 2.1.2.** *Soit $f$ une fontion définie sur un intervalle ou union d'intervalles. On dit que*

1. *$f$ a une limite $l$ à droite en $x_0$ ssi $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l$ sur $]x_0, b[$ ou $[x_0, b[$ et on la note $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^+} f(x) = l$.*
2. *$f$ a une limite $l'$ à gauche en $x_0$ ssi $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l'$ sur $]a, x_0[$ ou $]a, x_0]$ et on la note $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^-} f(x) = l'$.*
3. *$f$ a une limite $l$ en $x_0$ ssi $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0^-} f(x) = l$*

**Exemple 2.1.2.** *Calculons la limite suivante : $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{|x|}{x}$.*
*On a : $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$.*
*Puisque $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} \neq \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} =$, alors $f$ n'a pas de limite en $0$.*

### 2.1.2 Limites infinies

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. On posera par définition

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ssi $\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x[|x - x_0| < \eta \Longrightarrow f(x) > A]$
2. $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = -\infty$ ssi $\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x[|x - x_0| < \eta \Longrightarrow f(x) < -A]$
3. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ssi $\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x[x > B \Longrightarrow f(x) > A]$
4. $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ssi $\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x[x < -B \Longrightarrow f(x) > A]$
5. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ssi $\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x[x > B \Longrightarrow f(x) < -A]$
6. $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ssi $\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x[x < -B \Longrightarrow f(x) < -A]$

**Exercice 2.1.1.** *En utilisant la définition d'une limite, montrer que :*
$\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} e^{x+3} = 0$ ; $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (x^5 - x^4) = +\infty$ ; $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \ln \ln x = +\infty$

**Solution 2.1.1.**

1. Soit $\epsilon > 0$. On a
$$|e^{x+3} - 0| = e^{x+3} < \epsilon \Longleftrightarrow x < \ln \epsilon - 3,$$
donc on peut choisir $B = |\ln \epsilon - 3|$ pour $\epsilon \neq e^3$ car
$$\forall x[x < -|\ln \epsilon - 3| \leq \ln \epsilon - 3 \Longrightarrow |e^{x+3} - 0|],$$

et pour $\epsilon = e^3$, on peut prendre $B = 1$.

2. Pour montrer la limite, on essaye de minorer $f$ par une fonction $g$ qui tend vers $+\infty$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$. On a :

$$f(x) = x^5 - x^4 > x^4, \ \forall x \in ]2, +\infty[.$$

Si on choisis $x^4 > A > 0$, on obtient $x > \sqrt[4]{A}$. Donc on peut choisir $B = max\{2, \sqrt[4]{A}\}$. D'où

$$\forall A > 0, \exists B, \forall x[x > B \Longrightarrow (x^5 - x^4 > A].$$

3. Soit $A > 0$. On a la fonction $x \longrightarrow \ln \ln x$ est définie pour $x > 1$ et

$$\ln \ln x > A \iff \ln x > e^A \iff x > e^{e^A},$$

donc on peut choisir $B = \max\{1, e^{e^A}\}$. D'où

$$\forall A > 0, \exists B, \forall x[x > B \Longrightarrow \ln \ln x > A].$$

**Théorème 2.1.1.** *Soient $I$ un untervalle qui contient $x_0$ et $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $I$ ou $I - \{x_0\}$ et admettant respectivement des limites $l$ et $l'$ au point $x_0$. Alors*

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = l + l'$ (sauf pour $l = +\infty$ et $l' = -\infty$ ou l'inverse).
2. $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} (\lambda f(x) = \lambda l$
3. $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} [f(x)g(x)] = ll'$ (sauf pour $l = 0$ et $l' = \pm\infty$ ou l'inverse).
4. $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} |f(x)| = |l|$
5. $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l'}$ tel que $l' \neq 0$ (sauf pour $l, l' = 0$ ou $l, l' = \pm\infty$).

*Démonstration.* On va prouver la première. Soit $\epsilon > 0$, en effet

$$\exists \eta_1 > 0, \forall x[|x - x_0| < \eta_1 \Longrightarrow |f(x) - l| < \frac{\epsilon}{2}]$$

$$\exists \eta_2 > 0, \forall x[|x - x_0| < \eta_2 \Longrightarrow |g(x) - l'| < \frac{\epsilon}{2}]$$

si on prend $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2\}$, on obtient

$$|f(x) + g(x) - (l + l'| = |(f(x) - l) + (g(x) - l'| \leq |f(x) - l| + |g(x) - l'| < \underbrace{\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}}_{=\epsilon}$$

d'où

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x[|x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) + g(x) - (l + l')| < \epsilon$$

$\square$

**Remarque 2.1.1.** *Soit $f$ et $g$ deux fonctions en position d'une somme $(f+g)$ ou produit $(fg)$ ou rapport $(\frac{f}{g})$ ou puissance $f^g$. On suppose que $f$ et $g$ possèdent des limites $\pm\infty$ ou $0$ ou $1$ en $x_0$. Alors on symbolise ces situations par les notations*

$$\infty - \infty; \ \frac{\infty}{\infty}; \ \frac{0}{0}; \ 0.\infty; \ 1^{\infty}; \ \infty^0$$

*qui sont des formes indéterminées qu'on ne peut rien dire sur les limites.*

**Théorème 2.1.2** (d'encadrement)**.**

1. Soient $I$ un intervalle qui contient $x_0$ et $f$, $g$ et $h$ trois fonctions définies sur $I$ ou $I - \{x_0\}$ tel que $g \leq f \leq h$. Si $g$ et $h$ ont la même limite $l$ quand $x \longrightarrow x_0$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l$
2. Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies au voisinage de $x_0$ tel que $f \leq g$ au voisinage de $x_0$.
   – Si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x) = +\infty$
   – Si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = -\infty$

*Démonstration.* On va prouver la première avec le cas $l$ fini. Soit $\epsilon > 0$, en effet,

$$\exists \eta_1 > 0, \forall x[|x - x_0| < \eta_1 \Longrightarrow |g(x) - l| < \epsilon]$$

$$\exists \eta_2 > 0, \forall x[|x - x_0| < \eta_2 \Longrightarrow |h(x) - l| < \epsilon]$$

si on prend $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2\}$, on obtient

$$l - \epsilon < g(x) < f(x) < h(x) < l + \epsilon$$

d'où

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, x[|x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon]$$

$\square$

**Exercice 2.1.2.**

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} x\cos\frac{1}{x}$.
2. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} xE(x-\frac{1}{x})$.

**Solution 2.1.2.**

1. On a : $-1 \leq \cos\frac{1}{x} \leq 1$, et pour $x > 0$, on obtient

$$-x \leq x\cos\frac{1}{x} \leq x$$

donc

$$\lim_{x\longrightarrow 0} -x \leq \lim_{x\longrightarrow 0} x\cos\frac{1}{x} \leq \lim_{x\longrightarrow 0} x$$

D'où $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} x\cos\frac{1}{x} = 0$. de même, on obtient

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} x\cos\frac{1}{x} = 0$$

Donc

$$\lim_{x\longrightarrow 0} x\cos\frac{1}{x} = 0.$$

2. Pour $x > 0$, on a :

$$E(\frac{1}{x}) \leq \frac{1}{x} < E(\frac{1}{x}) + 1,$$

en posant $E(\frac{1}{x}) = n \in \mathbb{N}^*$, on obtient

$$\begin{cases} \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n} \\ -n-1 < -\frac{1}{x} \leq -n \end{cases}$$

i.e.

$$-n-1+\frac{1}{n+1} < x-\frac{1}{x} \leq -n+\frac{1}{n}.$$

Puisque $0 < \frac{1}{n} < 1$, alors

$$-n-1 \leq E(x-\frac{1}{x}) \leq -n$$

par conséquent

$$\frac{n}{n+1} \leq -xE(x-\frac{1}{x}) \leq \frac{n+1}{n},$$

comme $x \longrightarrow 0^+$, alors $n \longrightarrow \infty$. D'après le théorème d'encadrement, on obtient

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} xE(x - \frac{1}{x}) = -1.$$

Maintenant pour $x < 0$, on pose $x = -t$. On a :

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} xE(x - \frac{1}{x}) = \lim_{t \longrightarrow 0^+} -tE(-t + \frac{1}{t})$$

.

Puisque $t - \frac{1}{t} \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, alors

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} xE(x-\frac{1}{x}) = \lim_{t \longrightarrow 0^+} -tE(-t+\frac{1}{t}) = \lim_{t \longrightarrow 0^+} -t(-E(t-\frac{1}{t})-1) = \lim_{t \longrightarrow 0^+} tE(t-\frac{1}{t})-t = -1.$$

D'où

$$\lim_{x \longrightarrow 0} xE(x - \frac{1}{x}) = -1.$$

**Proposition 2.1.1.** *Soit $I$ un intrevalle qui contient $x_0$, $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $I$ ou $I - \{x_0\}$. Si $g$ est bornée au voisinage de $x_0$ et $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = 0$, alors $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$*

*Démonstration.* Puisque $g$ est bornée au voisinage de $x_0$, alors $\exists M > 0$ tel que : $|g(x)| \leq M$. Soit $\epsilon > 0$, en effet

$$\exists \eta > 0, \forall x[|x - x_0|\eta \Longrightarrow |f(x) - 0| < \frac{\epsilon}{M}]$$

donc

$$|f(x)g(x) - 0| = |f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \leq \frac{\epsilon}{M} \times M.$$

D'où

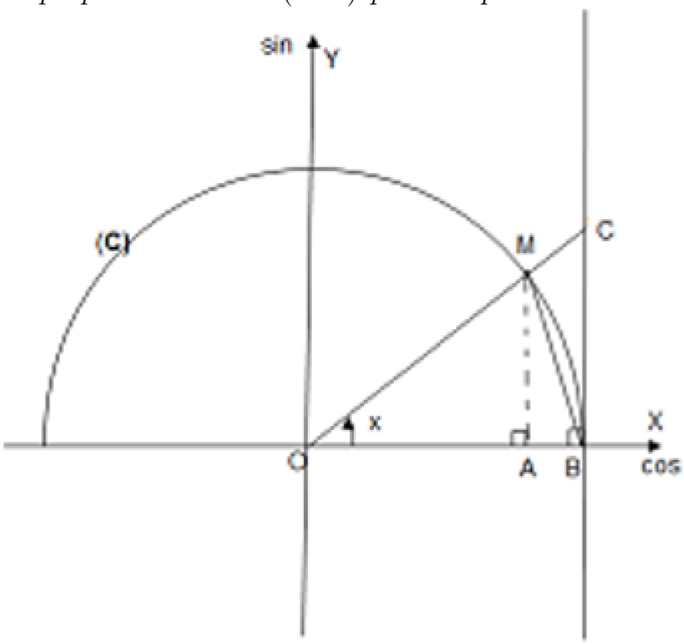
$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, x[|x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x)g(x) - 0| < \epsilon].$$

□

**Exemple 2.1.3.** $\lim_{x \longrightarrow 0} x^3 \cos \frac{1}{x} = 0$ *car la fonction* $x \longmapsto \cos \frac{1}{x}$ *est bornée* ($|\cos \frac{1}{x}| \leq 1$) *et* $\lim_{x \longrightarrow 0} x^3 = 0$.

**Exercice 2.1.3.** *Montrer que* $\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

**Solution 2.1.3.** *Soit $(C)$ une partie du cercle trigonométrique de centre $O$ et de rayon $1$ et soit $0 < x < \frac{\pi}{2}$ la mesure de l'angle $\widehat{MOA}$ et $C$ l'intersection de la droite $(OM)$ avec la perpendiculaire à $(OX)$ passant par $B$.*




*On note par $S$ l'aire du secteur angulaire $\widehat{MOB}$ et $S_1$ l'aire du triangle $OMB$ et $S_2$ l'aire du triangle $OBC$. On a*

$$S_1 = \frac{\sin x}{2} \leq S = \frac{x}{2} \leq S_2 = \frac{\tan x}{2} = \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x},$$

*par conséquent*

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1,$$

*d'après le théorème de l'encadrement, on obtient*

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

*Il reste de calculer $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x}$. Si on pose $x = -t$, on obtient*

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1 \quad \textit{(car } \sin \textit{ est impaire).}$$

*Donc*

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

**Exercice 2.1.4.** *Calculer les limites suivantes :*
$\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}(x-\sqrt{1+x^2})$ ; $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}(2\sqrt{x}+\sqrt{x}\sin x)$ ; $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}(1+\frac{3}{x})^x$ ; $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}x^2\cos\frac{1}{x}$ ; $\lim\limits_{x\longrightarrow0}\frac{\sin 2x}{x}$ ; $\lim\limits_{x\longrightarrow0}\frac{\sin px}{\sin qx}$ *tel que* $(p,q)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*$

## 2.2 Fonctions continues

**Définition 2.2.1.** *Soit $f$ une fonction de $D_f$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0\in D_f$. On suppose que $D_f$ est un voisinage de $x_0$. On dit que $f$ est continue au point $x_0$ ssi $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0}f(x)=f(x_0)$, c'est-à-dire*

$$\forall\epsilon>0,\exists\eta>0,x[|x-x_0|<\eta\Longrightarrow|f(x)-f(x_0)|<\epsilon].$$

*On peut définir la notion de continuité à droite et à gauche au point $x_0$ de façon analogue :*

1. $f$ est continue à droite en $x_0$ si $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0^+}f(x)=f(x_0)$
2. $f$ est continue à gauche en $x_0$ si $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0^-}f(x)=f(x_0)$. Il est clair que la continuité à droite et à gauche en $x_0$ entraîne la continuité de $f$ en $x_0$.

**Définition 2.2.2.** *Une fonction $f$ définie sur un intervalle $I$ est dite continue sur $I$ si elle est continue en tout point de $I$. L'ensemble des fonctions continues sur $I$ se note $C(I)$.*

**Exemples 2.2.1.**

1. Les fonctions : polynôme, sin, cos et exp sont définies et continues sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction ln est définie et continue sur $]0,+\infty[$.
3. La fonction $tg$ est définie et continue sur $\mathbb{R}-\{x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$.

**Exercice 2.2.1.** *Etudier la continuité des fonctions suivantes :*
$f(x)=\begin{cases}1 & ,x>0\\ 0 & ,x\leq 0\end{cases}$ ; $g(x)=\begin{cases}x^2+2x & ,x\leq 0\\ 1-e^x & ,0<x\leq 1\\ e^x-\ln x & x>1\end{cases}$ ;
$h(x)=[x]$

**Solution 2.2.1.**

1. La fonction $x \longrightarrow 1$ est continue sur $]0, +\infty[$ car c'est une constante et auusi la fonction $x \longrightarrow 0$ est continue sur $]-\infty, 0[$ car c'est une constante. Donc la fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. Reste à étudier la continuité en point 0. On a $\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = 1 \neq f(0) = 0$. D'où $f$ n'est pas continue en 0. C'est-à-dire que $f$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

2. La fonction $x \longrightarrow x^2 + 2x$ est continue sur $]-\infty, 0[$ car c'est un polynôme et la fonction $x \longrightarrow 1 - e^x$ est continue sur $]0, 1]$ car c'est la somme de deux fonctions continues ($x \longmapsto 1$ ; $x \longmapsto -e^x$) et la fonction $x \longrightarrow e^x - \ln x$ est continue sur $]1, +\infty[$ car c'est une somme de deux fonctions continues ($x \longrightarrow e^x$, $x \longrightarrow -\ln x$). Reste à étudier la continuité aux points 0 et 1. On a $g(0) = 0^3 + 2 \times 0 = 0$ et $g(1) = 1 - e$ et

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} x^3 + 2x = 0 = g(0) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} 1 - e^x.$$

   Donc $f$ est continue en 0.

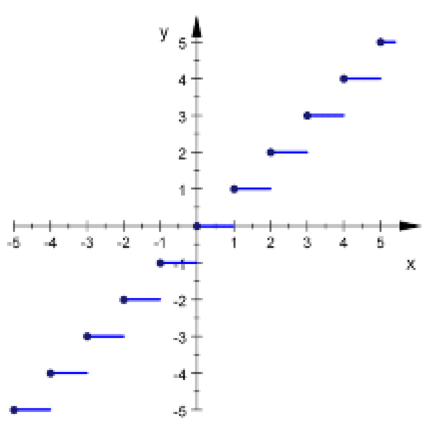
$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} 1 - e^x = 1 - e = g(1) \neq \lim_{x \longrightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} (e^x - \ln x) = e.$$

   Donc $g$ n'est pas continue en $x_0 = 1$. D'où $g$ est continue sur $\mathbb{R} - \{1\}$.

3. La fonction $x \longrightarrow [x]$ est continue sur tout intervalle $[n, n+1[$ car elle vaut $n = [x]$ (c'est une constante). Etudions la continuité sur $\mathbb{Z}$. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On a $h(n) = [n] = n$ et

$$\lim_{x \longrightarrow n^+} [x] = n = h(n) \neq \lim_{x \longrightarrow n^-} [x] = n - 1.$$

   Donc $h$ n'est pas continue sur $\mathbb{Z}$. D'où $h$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.



**Théorème 2.2.1** (Composition des applications continues). *Soient $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : D_g \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in D_f$ avec $y_0 = f(x_0)$. Si $f$ est continue en $x_0$ et $g$ est continue en $y_0$, alors la fonction $g \circ f$ est continue en $x_0$.*

*Démonstration.* Soit $\epsilon > 0$. Puisque $g$ est continue en $y_0$, il existe $\eta'$ tel que :

$$\forall y[|y - b| < \eta' \Longrightarrow |g(y) - g(y_0)| < \epsilon]...(1)$$

et puisque $f$ est continue en $x_0$, alors pour $\eta'$, il existe $\eta$ tel que :

$$\forall x[|x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - y_0| < \eta']...(2).$$

Compte tenu de (1), la relation (2) implique :

$$\forall x[|x - x_0| < \eta \Longrightarrow |g[f(x] - g[f(x_0)]| = |(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)| < \epsilon]$$

D'où $g \circ f$ est continue en $x_0$. □

**Exemple 2.2.1.** *La fonction $x \longmapsto f(x) = \ln(x - x^2)$ est définie et continue sur $]0;1[$ car c'est la composée de deux fonctions continues ($x \longmapsto x - x^2$ et $x \longmapsto \ln x$).*

**Remarque 2.2.1.** *Si $f$ n'est pas continue en $x_0$ ou $g$ n'est pas continue en $f(x_0)$ n'implique pas que $g \circ f$ n'est pas continue en $x_0$. Voici un exemple :*

**Exemple 2.2.2.** *Soit $f$ e $g$ deux fonctions définies par*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|} & si \quad x \neq 0 \\ 1 & si \quad x = 0 \end{cases} \qquad et \quad g(x) = x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

*On a $f$ n'est pas continue en 0 et $g$ est continue en $f(0) = 1$, mais la fonction*

$$x \longmapsto (g \circ f)(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{x^2} & si \quad x \neq 0 \\ 1 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

*est continue en 0.*

**Théorème 2.2.2** (de la fonction réciproque). *Soit $I$ un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue strictement monotone. Alors $f$ est une bijection de $I$ dans $f(I)$ et la fonction réciproque $f^{-1} : f(I) \longrightarrow I$ est continue et strictement monotone. Dans un repère orthonormé, les graphes de $f$ et de $f^{-1}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice ($y = x$) des axes.*

**Exercice 2.2.2.** *Trouver la fonction réciproque de la fonction f définie par*

$$\begin{aligned} f :]-1;1[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \frac{x}{1-x^2} \end{aligned}$$

**Solution 2.2.2.** *En étudiant la fonction $f$, on obtient le tableau de variation suivant*

| $x$ | $-1$ | | $+1$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | $+\infty$ |
| | | $\nearrow$ | |
| | $-\infty$ | | |

*La fonction $f$ est définie, continue et strictement croissante sur $]-1;1[$, donc elle réalise une bijection de $]-1;1[$ dans $f(]-1;1[) = \mathbb{R}$. Donc $f$ admet une fonction réciproque $f^{-1} :]-1;1[\longrightarrow \mathbb{R}$*
*Trouvons $f^{-1}$?*
*Soit $y \in \mathbb{R}$, $\exists x =?$ unique $\in ]-1;1[$ tel que $y = f(x)$.*
*On a :*

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Longleftrightarrow y = \frac{1}{1-x^2} \\ &\Longleftrightarrow yx^2 + x - y = 0. \end{aligned}$$

*Si $y = 0$, alors $x = 0$, i.e. $f^{-1}(0) = 0$.*
*Si $y \neq 0$, on obtient deux solutions :*

$$x = \frac{-1-\sqrt{1+4y^2}}{2y} \quad \text{et} \quad x' = \frac{-1+\sqrt{1+4y^2}}{2y}.$$

*Puisque $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} f^{-1}(y) = -1$, on accepte $x = \frac{-1+\sqrt{1+4y^2}}{2y} = \frac{2y}{1+\sqrt{1+4y^2}}$. On remarque que cette dernière expression ($\frac{2y}{1+\sqrt{1+4y^2}}$) peut définir l'image de $0$. D'où la fonction réciproque est définie par :*

$$\begin{aligned} f^{-1} :]-1;1[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \frac{2x}{1+\sqrt{1+4x^2}} \end{aligned}$$

**Théorème 2.2.3.** *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue tel que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés. Alors, il existe $c \in ]a,b[$ tel que $f(c) = 0$.*

**Exemple 2.2.3.** *La fonction* $x \longmapsto f(x) = x^3 - 3x + 1$ *est continue sur* $[0, 1]$ *avec* $f(0) \times f(1) = -1 < 0$*, donc il existe au moins un* $c \in ]0, 1[$ *tel que* $f(c) = 0$.

**Théorème 2.2.4** (des valeurs intermédiaires)**.** *Soit* $I$ *un intervalle.* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue. Si* $c \in ]f(a), f(b)[$ *où* $a, b \in I$*, alors il existe* $x_0 \in ]a, b[$ *tel que* $f(x_0) = c$

### 2.2.1 Continuité uniforme sur un intervalle

Soit $I$ un intervalle. On dit que la fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue sur $I$ ssi

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, x'[|x - x'| \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon].$$

On remarque que $\eta$ ne dépend que de $\epsilon$.

**Exercice 2.2.3.**

1. Montrer que $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$ pour $x \geq 0$ et $y \geq 0$.
2. Montrer que la fonction $x \longrightarrow f(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0, +\infty[$.

**Solution 2.2.3.**

1. Puisque $x$ et $y$ sont positifs, alors

$$\begin{aligned} x = |x| = |x - y + y| \leq |x - y| + y &\Longrightarrow \sqrt{x} \leq \sqrt{|x - y| + y} \\ &\Longrightarrow \sqrt{x} \leq \sqrt{|x - y|} + \sqrt{y} \quad (\text{car } \sqrt{a + b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}) \\ &\Longrightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{|x - y|} = \sqrt{|y - x|} \\ &\Longrightarrow \sqrt{y} - \sqrt{x} \leq \sqrt{|x - y|} \\ &\Longrightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} \geq -\sqrt{|x - y|}. \end{aligned}$$

   D'où

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}.$$

2. Soit $\epsilon > 0, \exists \eta =? > 0, \forall x, x'[|x - x'| < \eta \Longrightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{x'}| < \epsilon]$. En effet

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x'}| \leq \sqrt{|x - x'|} < \epsilon \text{ (d'après la question 1),}$$

   i.e.

$$\sqrt{|x - x'|} < \epsilon \Longleftrightarrow |x - x'| < \epsilon^2,$$

donc on peut choisir $\eta = \epsilon^2$.

Par conséquent

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta = \epsilon^2, \forall x, x'[|x - x'| < \epsilon^2 \Longrightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{x'}| < \epsilon].$$

D'où $f$ est uniformément continue sur $[0, +\infty[$.

## 2.3 Fonctions équivalentes.

Soit $x_0$ un point, fini ou infini et $I$ un intervalle qui contient $x_0$.

**Définitions 2.3.1.** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $I$ ou $I - \{x_0\}$.*

1. On dit que $f$ est dominée par $g$ en $x_0$ s'il existe un $J$ voisinage de $x_0$ et $M > 0$, tel que

$$|f(x)| \leq M|g(x)|, \ \forall x \in I \cap J,$$

   et on note $f = O(g)$ en $x_0$.
   Il résulte de la définition que si $g$ ne s'annule pas sur $I \cap J$, alors

$$f = O(g) \text{ en } x_0 \Longleftrightarrow \frac{f}{g} \text{ est bornée sur } I \cap J.$$

2. On dit que $f$ est négligeable devant $g$ en $x_0$ si

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists \eta > 0, \ \forall x[|x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x)| \leq \epsilon |g(x)|],$$

   et on note $f = o(g)$ en $x_0$.
   Il résulte de la définition que si $g$ ne s'annule pas sur $I$ un voisinage de $x_0$, alors

$$f = o(g) \text{ en } x_0 \Longleftrightarrow \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

   Il est clair que : $f = o(g)$ en $x_0 \Longrightarrow f = O(g)$ en $x_0$.

**Cas particulier**

Si $g = 1$, alors

$f = O(1)$ en $x_0 \Longleftrightarrow f$ est bornée dans un voisinage de $x_0$.

$f = o(1)$ en $x_0 \Longleftrightarrow \lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = 0$.

**Exemples 2.3.1.**

1. $x^3 = o(x^2)$ en $x_0 = 0$ car $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{x^3}{x^2} = 0$.
2. $x^2 \sin x = O(x^3)$ en $x_0 = 0$. car $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{x^3 \sin x}{x^3} = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 < \infty$
3. $\frac{1}{x} = o(\frac{1}{x^2})$ en $x_0 = 0$ car $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$
4. $\frac{1}{x^2} = o(\frac{1}{x})$ en $x_0 = +\infty$ car $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = 0$
5. $x^2 \sin \frac{1}{x} = O(1 + x^2)$ en $x_0 = 0$ car $|\frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{1+x^2}| \leq 1$.

**Définition 2.3.1.** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions sur $I$ ou $I - \{x_0\}$. On dit que $f$ est équivalente à $g$ en $x_0$ si $f - g = \circ(g)$ et on note $f \sim_{x_0} g$.*
*Il résulte de la définition que si $g$ ne s'annule pas sur un voisinage de $x_0$, alors*

$$f \sim_{x_0} g \Longleftrightarrow \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

*et dans ce cas, on peut écrire $\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \epsilon(x)$ ou encore $f(x) = g(x)[1 + \epsilon(x)]$ avec $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \epsilon(x) = 0$.*

**Proposition 2.3.1.** *Si $f \sim_{x_0} g$ et $g \sim_{x_0} h$, alors $f \sim_{x_0} h$.*

**Exemples 2.3.2.**

| | | |
|---|---|---|
| 1) $\sin x \sim_0 x$ | 2) $\tan x \sim_0 x$ | 3)$1 - \cos x \sim_0 \frac{x^2}{2}$ |
| 4) $\cos x \sim_0 1 - \frac{x^2}{2}$ | 5)$e^x - 1 \sim_0 x$ | 6) $\ln(1 + x) \sim_0 x$ |
| 7)$(1 + x)^\alpha - 1 \sim_0 \alpha x$ | 8)$(1 + x)^\alpha \sim_0 1 + \alpha x$. | |

**Remarque 2.3.1.** *Si $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x) = l \neq 0$ et finie, alors $f(x) \sim_{x_0} l$.*

**Théorème 2.3.1.** *Soient $f$, $f_1$, $g$ et $g_1$ définies sur $I$ ou $I - \{x_0\}$. Si $f \sim_{x_0} f_1$ et $g \sim_{x_0} g_1$, alors*

1. $fg \sim_{x_0} f_1 g_1$.
2. $\frac{f}{g} \sim_{x_0} \frac{f_1}{g_1}$ tel que $\frac{f}{g}$ est définie.

Le théorème précédent indique que la relation d'équivalence " $\sim_{x_0}$ est compatible avec le produit et le rapport de deux fonctions, mais elle n'est pas compatible avec la somme de deux fonctions. En voici deux exemples.

**Exemples 2.3.3.**

1. $x+1 \sim 1$ et $-1 \sim -1$, mais $x = x+1-1 \nsim_0 0$.
2. $x^2 + \frac{1}{x} \sim_0 \frac{1}{x}$ et $-\frac{1}{x} \sim_0 x - \frac{1}{x}$, mais $x^2 = x^2 + \frac{1}{x} + -\frac{1}{x} \nsim_0 x = \frac{1}{x} + x - \frac{1}{x}$

**Proposition 2.3.2.** *Soient $f$ et $f_1$ fonctions définies sur $I$ ou $I - \{x_0\}$ tel que $f \sim_{x_0} f_1$. Si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x)$ existe et égale à $l$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f_1(x) = l$.*

La proposition précédente est très utile pour calculer des limites des fonctions en $x_0$, i.e. si on trouve des difficultés sur ces fonctions, on les remplace par leurs équivalents et on utilise le théorème 2.3.1.

Il ya des cas ou deux fonctions équivalentes en $x_0$ mais ils n'ont pas de limite en $x_0$, en voici un exemple.

**Exemple 2.3.1.** *Soient les fonctions $x \longmapsto f(x) = (x+1)\sin\frac{1}{x}$ et $x \longmapsto g(x) = \sin\frac{1}{x}$. On a $f \sim_0 g$ malgré que $f$ et $g$ n'ont pas de limite lorsque $x \longrightarrow 0$.*

Voici quelques règles qui sont pratiques pour trouver un équivalent d'une fonction en $x_0$ donné.

**Quelques règles à retenir**

1. Si $f = \circ(g)$ en $x_0$, alors $f + g \sim_{x_0} g$.
2. Si $f$ et $g$ ont le même signe dans un voisinage de $x_0$, alors $f + g \sim_{x_0} f_1 + g_1$ en $x_0$ tel que $f \sim_{x_0} f_1$ et $g \sim_{x_0} g_1$.
3. Si $f \sim_{x_0} g$, alors $f^\alpha \sim_{x_0} g^\alpha$ tel que $f^\alpha$ est définie.
4. Si $0 < f \sim_{x_0} g$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) \neq 1$ alors $\ln f \sim_{x_0} \ln g$.
5. $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = 0 \Longleftrightarrow e^f \sim_{x_0} e^g$.

**Exemples 2.3.4.**

1. $2x^3 - x^2 + 3x \sim_0 3x$ car $2x^3 - x^2 = o(3x)$ en $x_0 = 0$.
2. $x^3 - x^2 + 5 \sim_0 5$ car $\lim\limits_{x \longrightarrow 0}(x^3 - x^2 + 5) = 5 < \infty$.
3. $2x^3 + x^2 - x + 3 \sim_\infty 2x^3$ car $x^2 - x + 3 = o(2x^3)$ en $x_0 = \infty$.
4. $\ln\sin x \sim_0 \ln x$ car $\sin x \sim_0 x$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \sin x = 0 \neq 1$ (c'est d'après la règle 4).

5. Essayons de trouver l'équivalent de $x \longmapsto f(x) = \ln(\cos x)$ en $x_0 = 0$. On remarque que $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \cos x = 1$, donc on ne peut pas appliquer la règle 4.
   On va proposer deux méthodes de solutions :
   **Méthode** 1
   En effet
   $$\ln(\cos x) = \ln \sqrt{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{2} \ln(1 - \sin^2 x)$$
   donc
   $$\ln(\cos x) \sim_0 -\frac{1}{2} \sin^2 x \sim_0 -\frac{1}{2} x^2,$$
   car $-\sin^2 x \longrightarrow 0$ lorsque $x \longrightarrow 0$.
   **Méthode** 2
   On a
   $$\ln(\cos x) = \ln(1 + \cos x - 1) \sim_0 \cos x - 1 \sim_0 -\frac{x^2}{2},$$
   car $\cos x - 1 \longrightarrow 0$ lorsque $x \longrightarrow 0$.

**Exercice 2.3.1.** *Donner un équivalent de la fonction $f$ et calculer sa limite en $x_0$ donné.*

$1) f(x) = \frac{\sin 3x^2}{\sin 5x} \quad x_0 = 0;\ 2) f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{\sin(2x)}\ x_0 = 0;\ 3) f(x) = \frac{x^3+2x+1}{4x^2+3x+2} tg(\frac{1}{x})\ x_0 = +\infty;$

$4) f(x) = \frac{x}{\ln^5 x + \sqrt{x}}\ x_0 = 0; +\infty;\ 5) f(x) = (1+2x)^{\frac{1}{x}}\ x_0 = +\infty;\ 6) f(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\ x_0 = 3.$

**Solution 2.3.1.** *On a :*

1. $\frac{\sin 3x^2}{\sin 5x} \sim_0 \frac{3x^2}{5x} = \frac{3}{5}x$. Donc $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin 3x^2}{\sin 5x} = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{3}{5}x = 0$.
2. $\frac{\ln(1+x^2)}{\sin(2x)} \sim_0 \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2x}$. D'où $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin(2x)} = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{x}{2} = 0$.
3. $\frac{x^3+2x+1}{4x^2+3x+2} tg(\frac{1}{x}) \sim_{+\infty} \frac{x^3}{4x^2} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{4}$. D'où $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{x^3+2x+1}{4x^2+3x+2} tg(\frac{1}{x}) = \frac{1}{4}$.
4. $\frac{x}{\ln^5 x + \sqrt{x}} = \frac{x}{\ln^5 x}$ (car $\sqrt{x} = o(\ln^5 x)$ en 0). D'où $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{x}{\ln^5 x + \sqrt{x}} = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{x}{\ln^5 x} = 0$.
   $\frac{x}{\ln^5 x + \sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x}}$ (car $\ln^5 x = o(\sqrt{x})$ en $+\infty$). D'où $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x}{\ln^5 x + \sqrt{x}} = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}} = +\infty$.
5. $(1+2x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+2x)} = e^{\frac{\ln 2 + \ln x + \ln(1+\frac{1}{2x})}{x}}$, puisque $\frac{\ln 2 + \ln x + \ln(1+\frac{1}{2x})}{x} \sim_{+\infty} \frac{\ln x}{x}$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, alors d'après la règle 5 (p 33), on obtient $(1+2x)^{\frac{1}{x}} \sim_{+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = x^x$.
   D'où $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (1+2x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = 1$.
6. $\frac{1}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{(3-x)(3+x)}} \sim_3 \frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{(3-x)}}$, donc $\lim\limits_{x \longrightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} = \lim\limits_{x \longrightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{(3-x)}} = +\infty$.

# Chapitre 3

# Fonctions dérivables

**Définition 3.0.2.** *Soit* $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction et* $x_0 \in D_f$. *On suppose que* $D_f$ *est un voisinage de* $x_0$. *On dit que* $f$ *est dérivable en* $x_0$ *si la limite*

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

*existe et finie. Cette limite est appelé la dérivée de* $f$ *en* $x_0$ *qui est notée* $f'(x_0)$.

**Remarque 3.0.2.** *La définition précédente permet d'écrire :*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \epsilon(x) \quad \textit{avec} \quad \lim_{x \longrightarrow x_0} \epsilon(x) = 0$$

*ou encore*

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)[f'(x_0) + \epsilon(x)]$$

*On peut définir la notion de la dérivée à droite et à gauche en* $x_0$ *de façon analogue :*

1. f est dérivable à droite si $\lim_{x \longrightarrow x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et notée $f'(x_0^+)$.
2. f est dérivable à gauche si $\lim_{x \longrightarrow x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et notée $f'(x_0^-)$.

Il est clair que est dérivable en $x_0$ ssi $f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$.

**Interprétation géométrique**

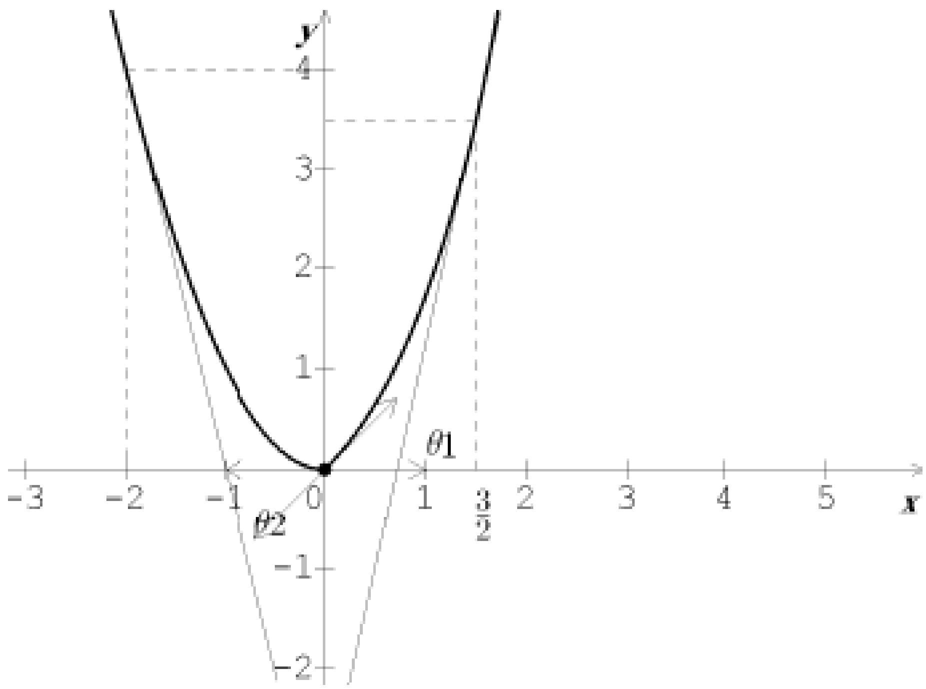
Dans un repère orthonormé, la dérivée $f'(x_0)$ a une interprétation géométrique, c'est-à-dire que le $G_f$ (graphe de f) admet une tangente $(d)$ au point $M_0(x_0, f(x_0))$ dont l'équation s'écrit :

$$(d) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

De plus si $\theta$ désigne l'angle orienté de deux axes $(OX)$ et la tangente $(d)$ avec cet ordre en $M_0$, alors $f'(x_0) = tg\ \theta$ avec $\theta \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Si $f'(x_0^+) \neq f'(x_0^-)$ , $G_f$ admet au point $M_0(x_0, f(x_0))$ une demi-tangente à droite et une demi-tangente à gauche, c'est-à-dire que le graphe possède un point anguleux en $M_0(x_0, f(x_0))$.

**Exemple 3.0.2.** *Soit la fonction*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ si \ x \leq 0 \\ e^x - 1 \ si \ x > 0 \end{cases}$$




*La fonction $f$ est dérivable aux points $x_1 = \frac{3}{2}$ et $x_2 = -2$ avec $f'(\frac{3}{2}) = tg\ \theta_1 > 0$ et $f'(-2) = tg\ \theta_2 < 0$.*
*La fonction $f$ n'est pas dérivable en $0$ car $f'(0^+) = 1 \neq f'(0^-) = 0$, donc le point $(0,0)$ est un point anguleux.*

**Remarque 3.0.3.** *Pour étudier la dérivabilité d'une fonction, on peut utiliser la forme suivante, i.e. $f$ est dérivable en $x_0$ si*

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0)}{h} \text{ existe et finie,}$$

*et dans ce cas, on peut écrire*

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \varepsilon(h)$$

*ou bien*

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0)h+\varepsilon(h) \quad \textit{tel que} \lim_{h\longrightarrow 0}\varepsilon(h)=0.$$

**Exercice 3.0.2.** *Etudier la dérivabilité de la fonction* $x \longrightarrow f(x)=\sin x$ *en* $x_0 \in \mathbb{R}$.

**Solution 3.0.2.** *On a :*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h}\\
&= \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{\sin x_0(\cos h-1)+\cos x_0\sin h}{h}\\
&= \sin x_0\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{\cos h-1}{h}+\cos x_0\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{\sin h}{h}
\end{aligned}$$

*et comme* $\sin h \sim_0 h$ *et* $\cos h-1\sim_0 -\frac{h^2}{2}$, *on obtient*

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h}=\cos x_0.$$

*D'où la fonction* $\sin$ *est dérivable en tout point* $x_0$ *de* $\mathbb{R}$.

**Proposition 3.0.3.** *Si* $f$ *est dérivable en* $x_0$, *alors elle est continue en* $x_0$.

*Démonstration.* On a $f$ est dérivable en $x_0$, alors

$$f(x)-f(x_0)=(x-x_0)(f'(x_0)+\epsilon(x)) \quad \textit{avec} \quad \lim_{x\longrightarrow x_0}\epsilon(x)=0,$$

donc

$$\lim_{x\longrightarrow x_0}[f(x)-f(x_0)]=\lim_{x\longrightarrow x_0}(x-x_0)\lim_{x\longrightarrow x_0}(f'(x_0)+\epsilon(x))=0$$

D'où $f$ est continue en $x_0$. □

**Proposition 3.0.4.** *Si* $f$ *est dérivable en* $x_0$, *tel que* $f'(x_0)\neq 0$, *alors*

$$f(x)-f(x_0)\sim_{x_0} f'(x_0)(x-x_0).$$

**Exemple 3.0.3.** *Calculons* $\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{x^7-1}{x^3-1}$.
*On a :*

$$x^7-1\sim_1 7(x-1) \quad \textit{et} \quad x^3-1\sim_1 3(x-1),$$

*donc*

$$\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{x^7-1}{x^3-1}=\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{7(x-1)}{3(x-1)}=\frac{7}{3}.$$

### 3.0.1 Dérivée sur un intervalle. Fonctions dérivées

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$. $f$ est dite dérivable sur $I$ si elle est dérivable en tout point de $I$. L'application $x \longrightarrow f'(x)$ est appelée fonction dérivée ou bien la dérivée de $f$ qui est notée $f'$. Si $f'$ est aussi dérivable, la nouvelle dérivée qui est notée $f''$ appelée la dérivée seconde et $f'$ est appelée la dérivée première. De la même manière, on peut parler de la dérivée d'ordre $n$ qui est notée $f^{(n)}$ ou $f^{(n)}(x)$ est la dérivée de $f^{(n-1)}(x)$. On dit que $f$ est de classe $C^n(I)$ si elle est $n$ fois dérivable et $f^{(n)}$ est continue sur $I$.

**Théorème 3.0.2.** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions dérivables sur un intervalle $I$. Alors*

1. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha f$ est dérivable sur $I$ et on a $(\alpha f)' = \alpha f'$.
2. $f + g$ est dérivable sur $I$ eton a $(f + g)' = f' + g'$.
3. $fg$ est dérivable sur $I$ et on a $(fg)' = f'g + fg'$
4. $\frac{f}{g}$ est dérivable en tout point $x_0$ de $I$ tel que $g(x_0) \neq 0$ et on a $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g-fg'}{f^2}$

**Théorème 3.0.3** (formule de Leibniz)**.** *Si $f$ et $g$ deux fonctions sont $n$ fois dérivables au point $x_0$. Alors la fonction $fg$ est $n$ fois dérivable au point $x_0$ et l'on a :*

$$(fg)^{(n)} = C_n^0 f^{(n)} g + C_n^1 f^{(n-1)} g' + C_n^2 f^{(n-2)} g'' + ... + C_n^{n-1} f' g^{(n-1)} + C_n^n f g^{(n)}$$

*. Ce théorème se démontre par récurrence et on utilise $C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} = C_n^p$.*

**Théorème 3.0.4.** *Soit $h = g \circ f$ tel que $f$ est dérivable en $x_0$ et $g$ est dérivable en $y_0 = f(x_0)$. Alors $h$ est dérivable en $x_0$ et l'on a :*

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) g'(y_0)$$

.

**Exercice 3.0.3.** *Soit la fonction $f$ définie par*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $f'$ n'est pas continue en 0.

**Solution 3.0.3.**

1. On a $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \longmapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car c'est le produit de deux fonctions ($x \longmapsto x^2$ , $x \longmapsto \sin \frac{1}{x}$) dérivables sur $\mathbb{R}^*$, sachant que la fonction $x \longmapsto \sin \frac{1}{x}$ est une composition de deux fonctions ($x \longrightarrow \frac{1}{x}, x \longrightarrow \sin x$) dérivables sur $\mathbb{R}^*$. Reste à étudier la dérivabilité en 0.
   En effet
   $$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x) - f(0}{x - 0} = \lim_{x \longrightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$
   car $x \longrightarrow \sin \frac{1}{x}$ est bornée ($|\sin \frac{1}{x}| < 1$) et $x \longrightarrow 0$. Donc $f$ est dérivable en 0, d'où $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. On a
   $$f'(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$
   et $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ n'existe pas. D'où $f'$ n'est pas continue en 0. C'est à dire que $f$ n'est pas de classe $C^1(\mathbb{R})$.

   **Exercice 3.0.4.** *Calculer la dérivée des fonctions suivantes :*
   $f(x) = \sqrt{x}$ ; $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ ; $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + 2}}$ ; $f(x) = \sqrt{\ln x + 1} + \ln(\sqrt{x} + 1)$ ;
   $f(x) = \frac{\sqrt{\cos x}}{1 - e^{-x}}$ ; $f(x) = (x^3 + 7x - 1)^{2015}$ ; $f(x) = e^{\cos \sqrt{x}}$.

**Théorème 3.0.5** (Dérivée de la fonction réciproque)**.** *Soit $f : D_f \longrightarrow f(D_f)$ une fonction bijective et dérivable en $x_0 \in D_f$. Si $f'(x_0) \neq 0$ , alors la fonction $f^{-1}$ est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et on a*
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

*Démonstration.* On a :
$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{y \longrightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$$
.Posons $y = f(x)$. Puisque $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = y_0 = f(x_0)$, on obtient :
$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$
car $f'(x_0) \neq 0$. □

**Exemple 3.0.4.** *Calculons la dérivée de la fonction* $x \longmapsto \sqrt{x}$, *en utilisant la dérivée de la fonction réciproque.*
*La fonction* $y \longmapsto \sqrt{y}$ *sur* $[0,+\infty[$ *représente la fonction réciproque de la fonction suivante :*

$$\begin{aligned} f :& [0,+\infty[ \longrightarrow [0,+\infty[ \\ & x \longmapsto f(x) = x^2. \end{aligned}$$

*La fonction* $f$ *est dérivable sur* $[0,+\infty[$ *et* $f'(x) = 0$ *en* $x = 0$, *donc d'après le théorème de la dérivée de la fonction réciproque, la fonction* $y \longmapsto f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ *est dérivable sur* $]0,+\infty[$. *Maintenant, soit* $y \in ]0,+\infty[$, *alors il existe* $x \in ]0,+\infty$ *tel que*

$$y = f(x) = x^2 \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y) = \sqrt{y},$$

*en effet*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

*D'où*

$$\forall x \in ]0,+\infty[ : (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

### 3.0.2 Différentielle

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$. Soit $x \in I$. On a alors :

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + h\varepsilon(h)$$

tel que $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.
Pour $f'(x) \neq 0$, on a $h\varepsilon(h) = o(f'(x)h)$ en 0, donc

$$f(x+h) - f(x) \sim_0 f'(x)h,$$

i.e.

$$f(x+h) - f(x) \simeq f'(x)h.$$

L'application linéaire $h \longmapsto f'(x)h$ s'appelle la différentielle de $f$ en $x$.
Pour $h$ proche de 0, on pose $h = dx$ et $dy = df(x) = f'(x)dx$, i.e.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x).$$

Si la valeur $f(x)$ est connu, la différentielle permet de calculer la valeur approchée de $f(x+h)$ pour $h$ proche de 0.

**Exemple 3.0.5.** *Calculons la valeur approchée de* $\sin(46^o)$.
*La fonction* $x \longmapsto \sin x$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *donc elle est différentiable en tout point* $x \in \mathbb{R}$. *De plus* $f'(x) = \cos x$ *et* $46^o = 45^o + 1^o = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}$. *Par conséquent*

$$\sin(46^o) \simeq \cos(\frac{\pi}{4}) \times \frac{\pi}{180} + \sin(\frac{\pi}{4}),$$

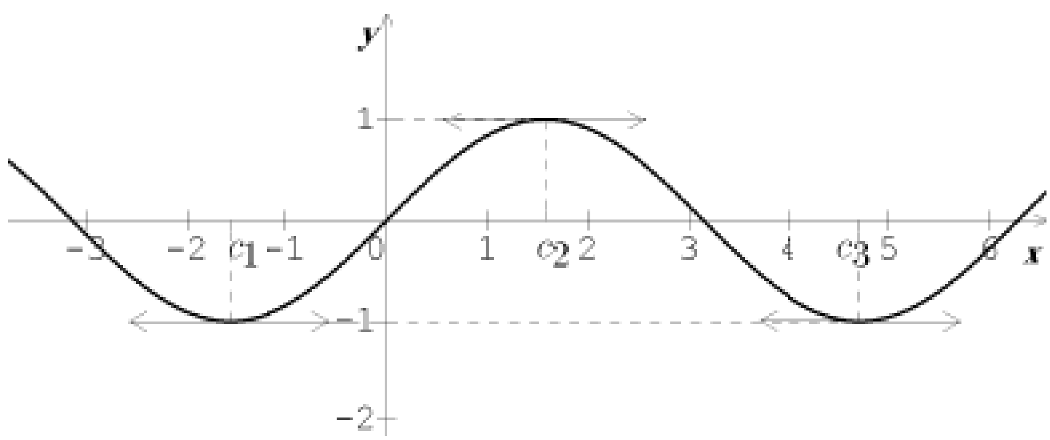
*d'où*

$$\sin(46^o) \simeq 0.7194.$$

**Théorème 3.0.6** (de Rolle)**.** *Soit* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $[a,b]$, *dérivable sur* $]a,b[$ *et telle que* $f(a) = f(b)$. *Alors il existe un nombre* $c \in ]a,b[$ *tel que* $f'(c) = 0$.

Géométriquement, le théorème de Rolle dit que le graphe de $f$ possède une tangente au point $(c, f(c))$ qui est parallèle à l'axe des abscisses $(O, X)$.

**Exemple 3.0.6.** *La fonction* $x \longmapsto f(x) = \sin x$ *sur* $[-\pi, 2\pi]$ *satisfait les conditions du théorème de Rolle, i.e. il existe* $c \in ]-\pi, 2\pi[$ *tel que* $f'(c) = \cos c = 0$. *Par le calcul, on obtient* $c_1 = -\frac{\pi}{2}$, $c_2 = \frac{\pi}{2}$ *et* $c_3 = 3\frac{\pi}{2}$.




**Théorème 3.0.7** (des accroissements finis.)**.** *Soit* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $[a,b]$ *et dérivable sur* $]a,b[$. *Alors il existe au un nombre* $c \in ]a,b[$ *tel que*

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c).$$

L'égalité $\frac{f'(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ affirme qu'au point d'abscisse $c$, la tangente est parallèle à la droite $(AB)$ tel que $a$ et $b$ sont les absices des points $A$ et $B$ respectivement.

*Démonstration.* Sur le graphe de $f$, on considère les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. La droite $(AB)$ a pour pente $p = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et pour équation $y = d(x) = f(a) + p(x-a)$. Posons $R(x) = f(x) - d(x)$. IL est clair que $R$ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, de plus $R(a) = R(b) = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe un nombre $c \in ]a, b[$ tel que $R'(c) = 0$. Or $R'(x) = f'(x) - p$. D'où

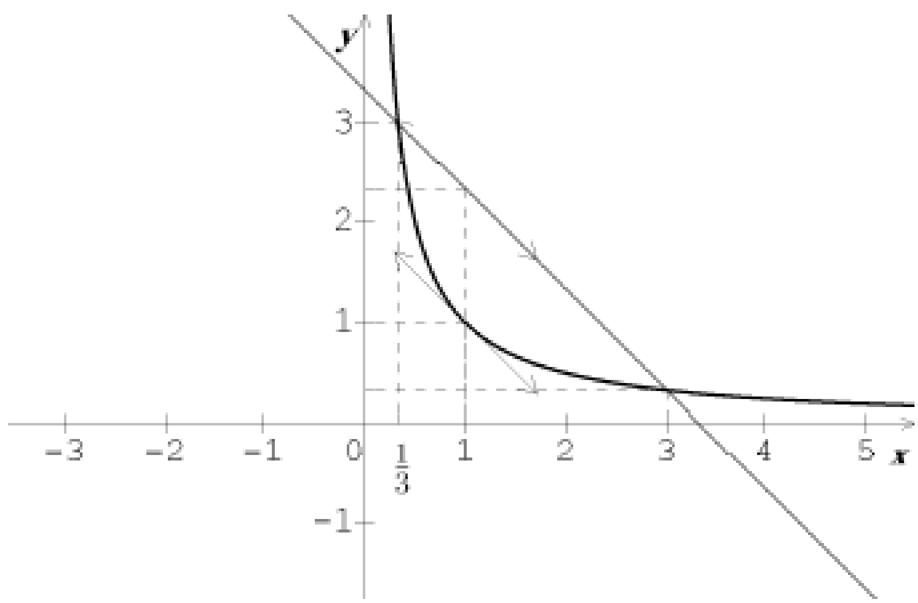
$$f'(c) = p = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

□

**Exemple 3.0.7.** *La fonction* $x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x}$ *satisfait les conditions du théorème des accroissements finis sur* $[\frac{1}{3}, 3]$*, donc il existe* $c \in ]\frac{1}{3}, 3[$ *tel que*

$$\frac{f(3) - f(\frac{1}{3})}{3 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3} - 3}{3 - \frac{1}{3}} = f'(c) = -\frac{1}{c^2} = -1,$$

*i.e.* $c = 1$.




**Exemple 3.0.8.** *Montrons que* $\forall x \geq 0 : \sin x \leq x$.
*Soient* $x > 0$ *et la fonction définie par*

$$\begin{aligned} f : &[0, x] \longrightarrow \mathbb{R} \\ &t \longmapsto f(t) = \sin t. \end{aligned}$$

*On a $f$ est continue sur $[0,x]$ est dérivable sur $]0,x[$, donc d'après le T.A.F, il existe $c \in ]0,x[$ tel que*

$$\frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \frac{\sin x}{x} = \cos c \leq 1,$$

*d'où*

$$\sin x \leq x \quad \textit{pour tout } x \geq 0.$$

**Exercice 3.0.5.** *Soit la fonction $x \longmapsto f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$.*

1. Calculer $f(1)$ et $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. En utilisant la formule des accroissements finis, montrer que pour tout $h > 0$, on a
   **a)** $0 < f(1+h) - \frac{e}{2} \leq \frac{e^h}{4} e h^3$.
   **b)** $0 < \frac{e}{2} - f(1+h) \leq e h^3$.

**Théorème 3.0.8** (des accroissements finis généralisés.)**.** *Soit $f$ et $g$ deux fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. Si $g'$ ne s'annule pas, alors il existe un point $c \in ]a,b[$ tel que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

*Démonstration.* Puisque $g'$ ne s'annule pas sur $]a,b[$, c'est que $g(b) - g(a) \neq 0$, d'après la contraposé du théorème de Rolle. Posons $p = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ et soit la fonction $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - p[g(x) - g(a)]$$

On vérifie facilement que $\varphi$ satisfait les condtions de théorème de Rolle. Donc il existe un point $c \in ]a,b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$ avec $\varphi'(x) = f'(x) - pg'(x)$. D'où

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

□

**Corollaire 3.0.1** (Règle de l'Hôspital.)**.** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions dérivables dans un voisinage de $x_0$ tel que $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ ou $(= \frac{\infty}{\infty})$. Si $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ admet une limite $l$ au point $x_0$, alors $\frac{f(x)}{g(x)}$ admet la même limite $l$ en $x_0$.*

**Exemple 3.0.9.**

1. Calculons la limite $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\frac{\sqrt[5]{x^2}-1}{\sqrt[7]{x^3}-1}$. En appliquant règle de l'Hospital, on obtient :

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{(\sqrt[5]{x^2}-1)'}{(\sqrt[7]{x^3}-1)'}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\frac{2}{5}x^{\frac{2}{5}-1}}{\frac{3}{7}x^{\frac{3}{7}-1}}=\frac{14}{15}.$$

   Donc

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[7]{x^3}}=\frac{14}{15}.$$

2. Calculons la limite $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\frac{x^x-1}{\ln x-x+1}$. En utilisant la règle de l'Hôspital deux fois, on obtient

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{x^x-1}{\ln x-x+1}=-2.$$

# Chapitre 4

# Fonctions élémentaires

Dans ce chapitre, nous allons voir les fonctions trigonométriques réciproques, les fonctions hyperboliques et leurs réciproques. Ces fonctions sont fréquemment employées.

## 4.1 Fonctions trigonométriques réciproques

**Définition 4.1.1 (de la fonction Arc sin).** *En étudiant la fonction* $x \longmapsto f(x) = \sin x$ *sur* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$*, on obtient le tableau de variation suivant :*

| $x$ | $-\frac{\pi}{2}$ | | $+\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x) = \cos x$ | $0$ | $+$ | $0$ |
| $f(x) = \sin x$ | $-1$ | $\nearrow$ | $1$ |

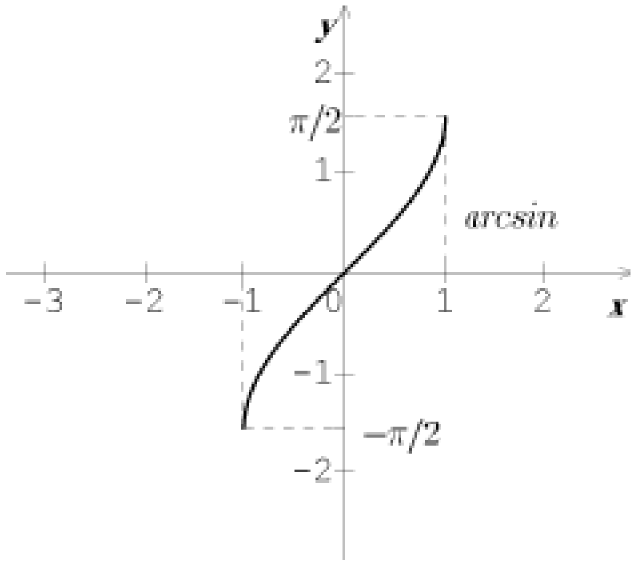
.

*La fonction* $x \longmapsto \sin x$ *est continue et strictement croissante sur* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$*, donc elle réalise une bijection de* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *dans* $[-1, 1]$*. La fonction réciproque, notée par :*

$$\arcsin = \sin^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

*s'appelle la fonction Arc sinus. Cette fonction est continue, strictement croissante, impaire sur* $[-1, 1]$ *et dérivable sur* $]-1, 1[$*. Il est clair que* $\forall y \in [-1, 1]$, $\exists x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$*, tel que*

$$y = \sin x \Longleftrightarrow x = \arcsin y.$$




**Propriétés 4.1.1.**

1. $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ : $\arcsin \sin x = x$.
2. $\forall x \in [-1, 1]$ : $\sin \arcsin x = x$.

**Calculons la dérivée de** $x \longmapsto \arcsin x$.

Soit $y \in ]-1, 1[$, alors $\exists x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que :

$$y = \cos x \Longleftrightarrow x = \arcsin y.$$

En effet

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{+\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Donc

$$\forall x \in ]-1, 1[: \ (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Dans le cas général, pour une fonction $f$ dérivable, on a :

$$(\arcsin f(x))' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}.$$

**Exemple 4.1.1.** *Calculons la dérivée de la fonction* $x \longmapsto f(x) = \arcsin(x-1)$.
*La fonction* $f$ *est définie sur* $D_f = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x-1 \leq 1\} = [0, 2]$. *Donc* $f$ *est dérivable sur* $]0, 2[$ *et on a :*

$$f'(x) = \frac{(x-1)'}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}.$$

**Définition 4.1.2 (de la fonction Arc cos).** *En étudiant la fonction* $x \longmapsto f(x) = \cos x$ *sur* $[0, \pi]$*, on obtient le tableau de variation suivant :*

| $x$ | $0$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x) = -\sin x$ | $0$ | $-$ | $0$ |
| $f(x) = \cos x$ | $1$ | $\searrow$ | *-1* |

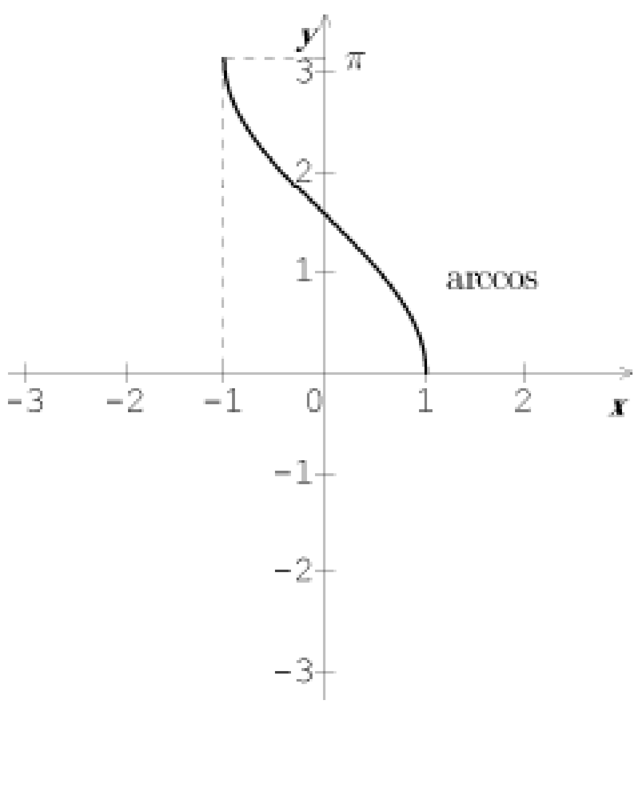
.

*de la même manière, la fonction* $x \longmapsto \cos x$ *réalise une bijection de* $[0, \pi]$ *dans* $[-1, 1]$*. La fonction réciproque, notée par :*

$$\arccos = \cos^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$$

*s'appelle la fonction Arc cosinus. Cette fonction est continue, strictement décroissante sur* $[-1, 1]$ *et dérivable sur* $]-1, 1[$*. Il est clair que* $\forall y \in [-1, 1]$, $\exists x \in [0, \pi]$*, tel que*

$$y = \cos x \Longleftrightarrow x = \arcsin y.$$



**Propriétés 4.1.2.**

1. $\forall x \in [0, \pi]$ : $\arccos \cos x = x$.
2. $\forall x \in [-1, 1]$ : $\cos \arccos x = x$.
3. $\forall x \in ]-1, 1[$: $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Dans le cas général, pour une fonction $f$ dérivable, on a :

$$(\arccos f(x))' = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}.$$

**Exercice 4.1.1.** *Montrer que :*

1. $\forall x \in [-1, 1]$ : $\sin \arccos x = \sqrt{1-x^2}$.
2. $\forall x \in [-1, 1]$ : $\cos \arcsin x = \sqrt{1-x^2}$.
3. $\forall x \in [-1, 1]$ : $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

**Définition 4.1.3 (de la fonction Arctg).** *En étudiant la fonction $x \longmapsto f(x) = tg\ x$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on obtient le tableau de variation suivant :*

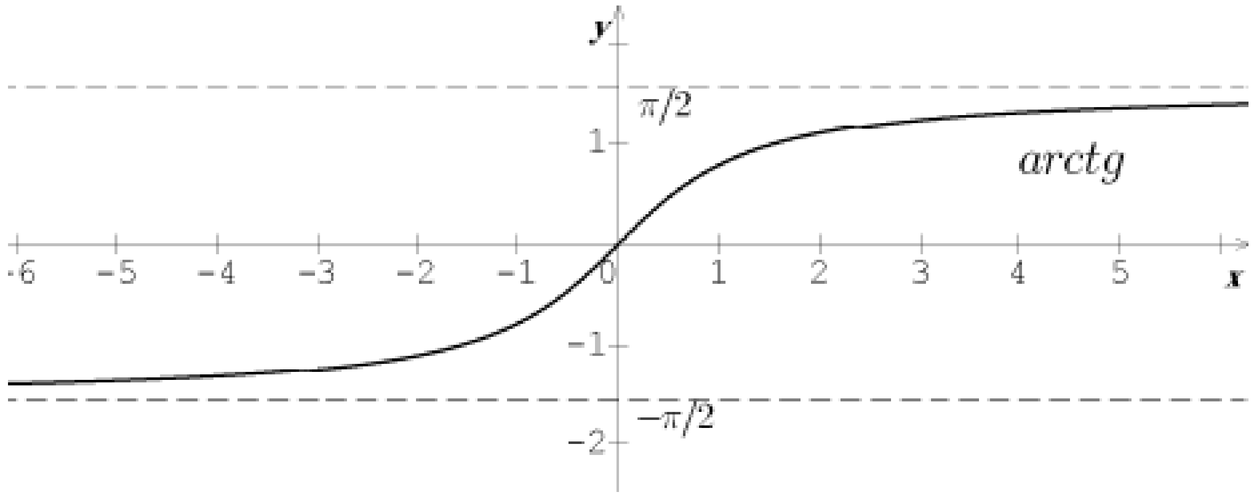
| $x$ | $-\frac{\pi}{2}$ | | $+\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x) = 1 + tg^2 x$ | | $+$ | |
| $f(x) = tg\ x$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

*La fonction $x \longmapsto tg\ x$ réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$. La fonction réciproque notée par :*

$$Arctg = tg^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

*s'appelle Arc tangente. Cette fonction est continue, strictement croissante, impaire et dérivable sur $\mathbb{R}$. Il est clair que $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que*

$$y = tg\ x \Longleftrightarrow x = arctg\ y.$$




**Propriétés 4.1.3.**

1. $\forall x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[: \quad arctg\ tg\ x = x.$
2. $\forall x \in \mathbb{R}: \quad tg\ arctg\ x = x.$
3. $\forall x \in \mathbb{R}: \ (arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}.$

Essayons de démontrer la propriété 3.
Soit $y \in \mathbb{R}$, alors $\exists x \in -]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que :

$$y = tg\ x \Longleftrightarrow x = arctg\ y,$$

on a :

$$(arctg\ y)' = \frac{1}{1+tg^2 x} = \frac{1}{1+y^2}.$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R}: \ (arctg\ x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Dans le cas général, pour une fonction $f$ dérivable, on a :

$$(arctg\ f(x))' = \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}.$$

**Exemple 4.1.2.** *Calculons la dérivée de la fonction $x \longmapsto f(x) = arctg\ (\frac{1}{x})$. La fonction $f$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a :*

$$f'(x) = \frac{(\frac{1}{x})'}{1+(\frac{1}{x})^2} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

## 4.2 Fonctions hyperboliques et leurs réciproques

**Définition 4.2.1.** *les fonctions réelles*

- $x \longmapsto ch\ x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ *s'appelle cosinus hyperboliques.*
- $x \longmapsto sh\ x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ *s'appelle sinus hyperboliques.*
- $x \longmapsto th\ x = \frac{sh\ x}{ch\ x} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ *s'appelle tangente hyperboliques.*
- $x \longmapsto coth\ x = \frac{ch\ x}{sh\ x} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}, x \neq 0$ *s'appelle cotangente hyperboliques.*

De cette défintion, on déduit

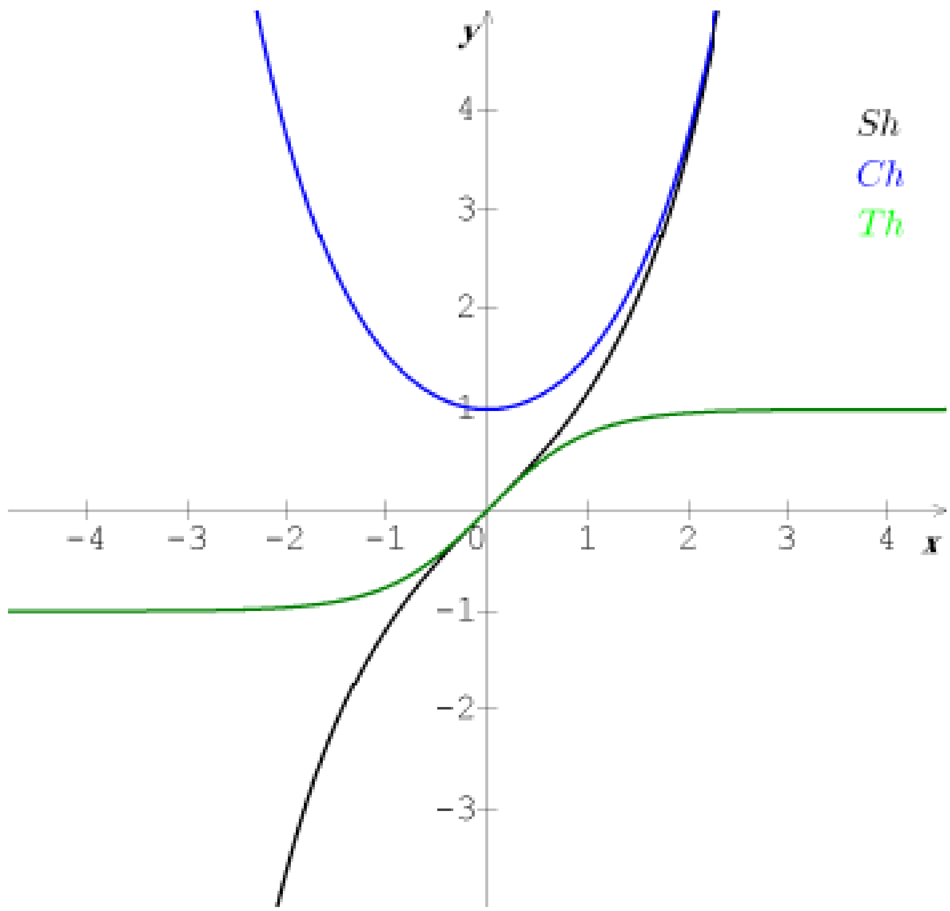
$$sh\ 0 = 0, \quad ch\ 0 = 1, \quad th\ 0 = 0, \quad ch(-x) = ch\ x, \quad sh(-x) = -sh\ x$$

**Propriétés 4.2.1.**

1. $ch^2x - sh^2x = 1$
2. $ch^2x + sh^2x = ch(2x)$
3. $\frac{1}{ch^2x} = 1 - th^2x$
4. Les fonctions $sh$, $ch$, $th$ sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ avec :

$$(ch\ x)' = sh\ x, \quad (sh\ x)' = chx, \quad (th\ x)' = \frac{1}{ch^2x} = 1 - th^2x$$

et la fonction $coth$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R} - \{o\}$ avec $(coth\ x)' = -\frac{1}{sh^2x}$.




**Définition 4.2.2 (de la fonction Argsh).** *En étudiant la fonction $x \longmapsto sh\ x$ sur $\mathbb{R}$, on obtient le tableau de variation suivant :*

| $x$ | $-\infty$ $\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x) = ch\ x$ | $+$ |
| $f(x) = sh\ x$ | $-\infty \nearrow +\infty$ |

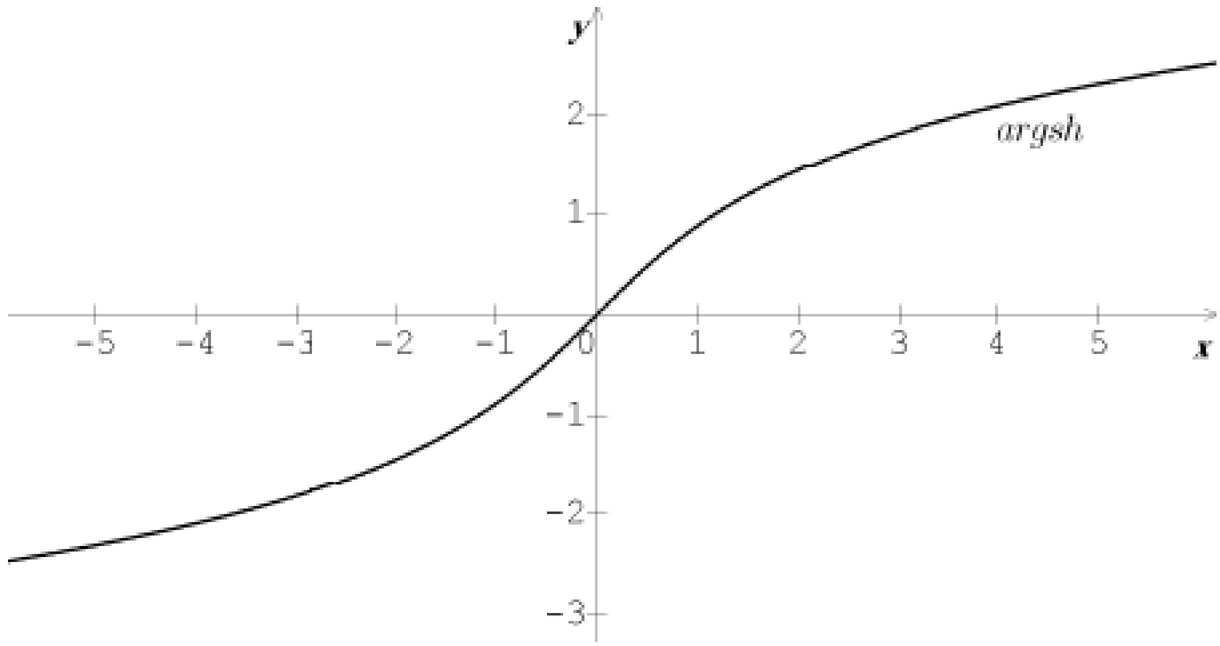
.

*La fonction $x \longmapsto sh(x)$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La fonction réciproque notée par*

$$sh^{-1} = argsh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

*s'appelle la fonction argument sinus hyperbolique. Cette fonction est continue, strictement* *croissante, impaire et dérivable sur* $\mathbb{R}$. *Il est clair que* $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$y = sh\ x \Longleftrightarrow x = argsh\ y.$$




**Propriétés 4.2.2.**

1. $\forall x \in \mathbb{R} : \quad argsh\ sh\ x = x.$
2. $\forall x \in \mathbb{R} : \quad sh\ argsh\ x = x.$

*Exprimons la fonction argsh : Soit* $y \in \mathbb{R}$, $\exists x =?$ *unique* $\in \mathbb{R}$ *tel que* $y = sh\ x$. *On a :*

$$y = sh\ x \Longleftrightarrow e^{2x} - 2ye^{x} - 1 = 0,$$

$\Delta = y^2 + 1 > 0$, *donc* $e^x = y - \sqrt{y^2+1} < 0$ *ou* $e^x = y + \sqrt{1+y^2} > 0$.
*Puique* $e^x > 0$, *alors*

$$x = \ln(y + \sqrt{1+y^2}).$$

*D'où*

$$\begin{aligned} argsh : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto argsh\ x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}). \end{aligned}$$

*Calculons la dérivée de argsh : Soit $y \in \mathbb{R}$, alors $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que*

$$y = sh\ x \Longleftrightarrow x = argsh\ y.$$

*En effet*

$$(argsh\ y)' = \frac{1}{(sh\ x)'} = \frac{1}{\sqrt{sh^2 x + 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}.$$

*D'où*

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ (argsh\ x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$$

*Dans le cas général, pour une fonction $f$ dérivable, on a :*

$$(argsh\ f(x))' = \frac{f'(x)}{\sqrt{(f(x))^2+1}}.$$

**Définition 4.2.3 (de la fonction Argch).** *En étudiant la fonction $x \longmapsto f(x) = ch\ x$ sur $[0, +\infty[$, on obtient la tableau de variation suivant :*

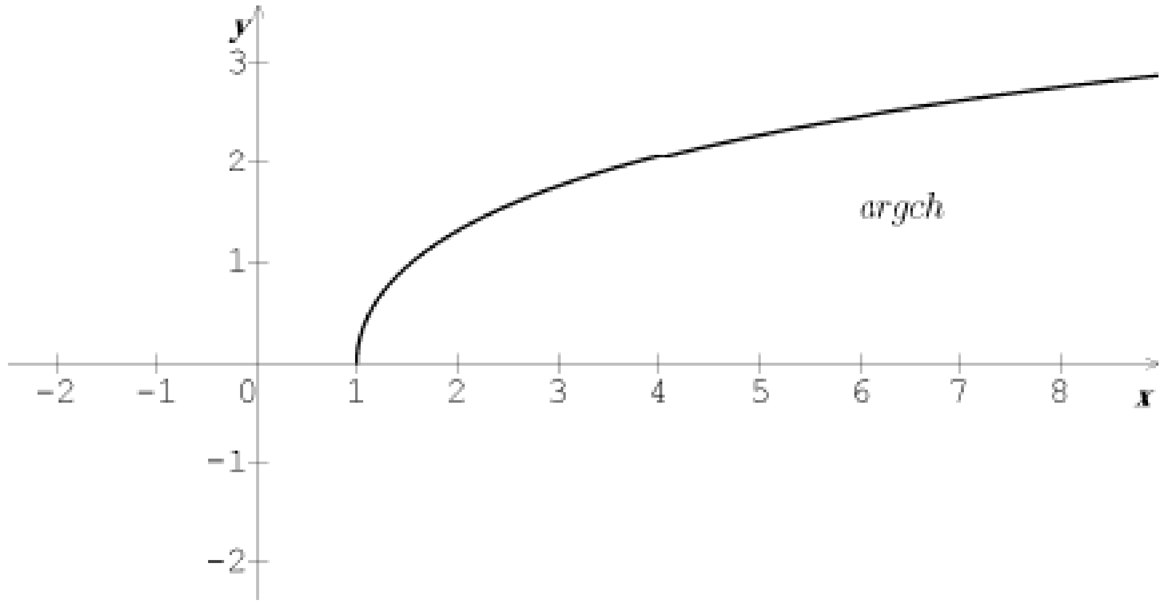
| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x) = sh\ x$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x) = ch\ x$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

*La fonction $x \longmapsto ch\ x$ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ dans $[1, +\infty[$. La fonction réciproque notée par*

$$ch^{-1} = argch : [1, +\infty[ \longrightarrow [0, +\infty[,$$

*s'appelle argument cosinus hyperbolique. Cette fonction est continue, strictement croissante sur $[1, +\infty[$ et dérivable sur $]1, +\infty[$. Il est clair que $\forall y \in [1, +\infty[, \exists x \in [0, +\infty[$ tel que*

$$y = ch\ x \Longleftrightarrow x = argch\ x.$$




**Propriétés 4.2.3.**

1. $\forall x \in [0, +\infty[: \quad argch\ ch\ x = x.$
2. $\forall x \in [1, +\infty[: \quad ch\ argch\ x = x.$

*Exprimons la fonction argch : Soit* $y \in [1, +\infty[, \exists x =?$ *unique* $\in [0, +\infty[$ *tel que* $y = ch\ x$. *On a :*

$$y = ch\ x \Longleftrightarrow e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0,$$

$\Delta = y^2 - 1 > 0$, *donc* $e^x = y - \sqrt{y^2 - 1} > 0$ *ou* $e^x = y + \sqrt{y^{2-1}} > 0$,
*i.e.*

$$x_1 = \ln(y - \sqrt{y^2 - 1}) \quad ou \quad x_2 = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$$

*et comme* $\lim_{y \longrightarrow +\infty} f^{-1}(y) = +\infty$, *on accepte la solution* $x_2$. *D'où*

$$\begin{aligned} argch : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto argch\ x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}). \end{aligned}$$

*Calculons la dérivée de argch : Soit* $y \in ]1, +\infty[$, *alors* $\exists x \in ]0, +\infty[$ *tel que*

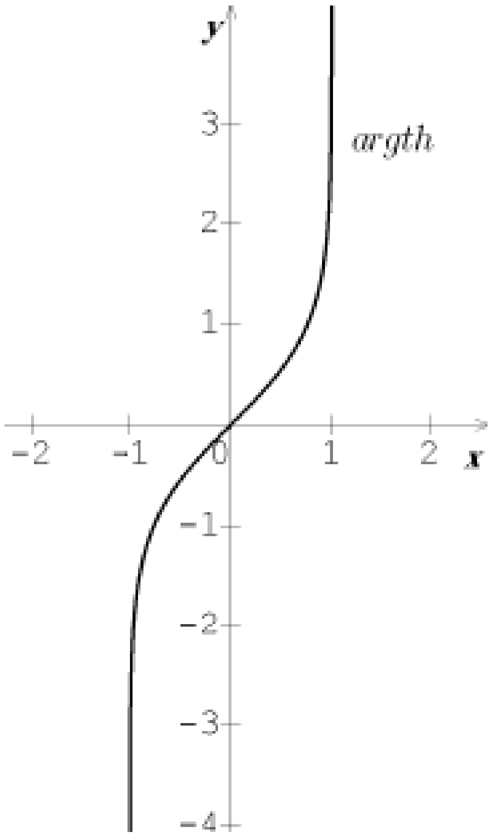
$$y = ch\ x \Longleftrightarrow x = argch\ y.$$

*En effet*
$$(argch\ y)' = \frac{1}{(ch\ x)'} = \frac{1}{\sqrt{ch^2x-1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}.$$
*D'où*
$$\forall x \in ]1,+\infty[:\ (argch\ x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$$
*Dans le cas général, pour une fonction $f$ dérivable, on a :*
$$(argsh\ f(x))' = \frac{f'(x)}{\sqrt{(f(x))^2-1}}.$$

**Définition 4.2.4 (de la fonction Argth).** *En étudiant la fonction $x \longmapsto f(x) = th\ x$ sur $\mathbb{R}$, on obtient le tableau de variation suivant :*

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x) = 1 - th^2x$ | | $+$ | |
| $f(x) = th\ x$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+1$ |

*La fonction th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$. La fonction réciproque notée par :*
$$th^{-1} = argth :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$$
*s'appelle argument tangente hyperbolique. Cette fonction est continue, strictement croissante, impaire et dérivable sur $]-1,1[$. Il est clair que $\forall y \in ]-1,1[, \exists x \in \mathbb{R}$ tel que*
$$y = th\ x \Longleftrightarrow x = argth\ y.$$




*<u>Exprimons la fonction argth</u> : Soit $y \in ]-1,1[, \exists x =?$ unique $\in \mathbb{R}$ tel que $y = th\ x$. On a :*

$$y = th\ x \Longleftrightarrow y = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1},$$

*i.e.*

$$x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

*D'où*

$$\begin{aligned} argth :]-1,1[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto argth\ x = \ln\frac{1+x}{1-x} \end{aligned}$$

*<u>Calculons la dérivée de argth</u> : Soit $y \in ]-1,1[$, alors $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que*

$$y = th\ x \Longleftrightarrow x = argth\ y.$$

*En effet*

$$(argth\ y)' = \frac{1}{(th\ x)'} = \frac{1}{2-th^2 x} = \frac{1}{1-y^2}.$$

*D'où*
$$\forall x \in ]-1,1[: \ (argth\ x)' = \frac{1}{1-x^2},$$
*Dans le cas général, pour une fonction $f$ dérivable, on a :*
$$(argth\ f(x))' = \frac{f'(x)}{1-(f(x))^2}.$$
**Exemple 4.2.1.** *Calculons la dérivée de la fonction $x \longmapsto f(x) = argth\ (3x-1)$.*
*La fonction $f$ est définie est dérivable sur $D_f = \{x \in \mathbb{R} : -1 < 3x-1 < 1\} = ]0, \frac{2}{3}[$ et on a :*
$$f'(x) = \frac{(3x-1)'}{1-(3x-1)^2} = \frac{3}{-9x^2+6x} = \frac{1}{2x-3x^2}.$$
**Remarque 4.2.1.** *La fonction $x \longmapsto g(x) = \frac{1}{2}\ln|\frac{1+x}{1-x}|$ a aussi une dérivée qui vaut $\frac{1}{1-x^2}$ sur $\mathbb{R} - \{-1,1\}$.*

**Exercice 4.2.1.** *Soit la fonction $x \longmapsto f(x) = argth\ \sqrt{\frac{ch\ x-1}{ch\ x+1}}$.*

1. Vérifier que $f$ est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Simplifier l'expression de $f(x)$.

**Solution 4.2.1.** *1. Puisque $\forall x \in \mathbb{R}$ : $0 \leq ch\ x - 1 < ch\ x + 1$, alors*
$$\forall x \in \mathbb{R} : 0 \leq \frac{ch\ x-1}{ch\ x+1} < 1.$$
*Donc $f$ est définie sur $D_f = \mathbb{R}$.*

*2. On a :*
$$\begin{aligned} f(x) &= argth\ \sqrt{\frac{ch\ x-1}{ch\ x+1}} \\ &= argth\ \sqrt{\frac{e^{2x}-2e^x+1}{e^{2x}+2e^x+1}} = argth\ \sqrt{\frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}} \\ &= argth\ \frac{|e^x-1|}{e^x+1} \\ &= \begin{cases} argth\ \frac{e^x-1}{e^x+1}; x \geq 0 \\ argth\ -\frac{e^x-1}{e^x+1}; x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} argth\ th\ \frac{x}{2}; x \geq 0 \\ argth\ (-th\ \frac{x}{2}); x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

*et comme la fonction argth est impaire et argth th $= I_{\mathbb{R}}$, on obtient*

$$f(x) = \frac{|x|}{2}.$$

### 4.2.1 Fonctions rationnelles réelles

**Définition 4.2.5.** *Soit $P$ et $Q$ deux polynômes réels, $Q \neq 0$. La fonction $x \longmapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ s'appelle fonction (ou fraction) rationnelle. On dira que $\frac{P}{Q}$ est une fraction régulière, si $\deg P < \deg Q$.*

**Définition 4.2.6.** *Les fonctions*

$$x \longmapsto \frac{A}{(x-x_0)^n}, \quad x \longmapsto \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^m}$$

*tel que $n, m \in \mathbb{N}$ et $A, a, b, p, q \in \mathbb{R}$ et $p^2 - 4q < 0$, s'appellent éléments simples respectivement de première de et de seconde espèce.*

**Théorème 4.2.1.** *Toute fonction régulière se décompose en somme d'éléments simples.*

Par exemple si on a une fonction régulière $x \longmapsto f(x) = \frac{P(x)}{(x-x_0)^3(x^2+px+q)^2}$, alors $f(x)$ s'écrit de la forme suivante :

$$f(x) = \frac{a_1}{(x-x_0)} + \frac{a_2}{(x-x_0)^2} + \frac{a_3}{(x-x_0)^3} + \frac{b_1x+c_1}{x^2+px+q} + \frac{b_2x+c_2}{(x^2+px+q)^2}$$

et on détermine les réels $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1$ et $c_2$.

**Exemples 4.2.1.**

1. La fonction $x \longmapsto f(x) = \frac{3}{x^2-x+1}$ est un élément simple.
2. La fonction $x \longmapsto g(x) = \frac{1}{x^2+2x-3}$ n'est pas un élément simple car on peut factoriser le dénominateur : $x^2+2x-3 = (x-1)(x+3)$. Donc d'après le théorème précédent on peut écrire $g$ en somme d'éléments simples, i.e.

$$g(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} = \frac{a(x+3)+b(x-1)}{x^2+2x-3},$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R} : a(x+3) + b(x-1) = 1,$$

malgré que la fonction $f$ n'est pas définie aux points 1 et $-3$. Il s'agit d'une identification de deux polynômes sur $\mathbb{R}$.

Pour $x = 1$, on obtient : $4a = 1 \Longrightarrow a = \frac{1}{4}$.
Pour $x = -3$, on obtient : $-4b = 1 \Longrightarrow b = -\frac{1}{4}$.
D'où

$$f(x) = \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+3)}.$$

**Exercice 4.2.2.** *Décomposer les fonctions rationnelles en somme d'éléments simples :*

$$1)f(x) = \frac{2x-1}{(x-2)(x+3)}, \quad 2)f(x) = \frac{2x-1}{(x-2)^3}, \quad 3)f(x) = \frac{3x^5+2x^4+x^2+3x+2}{x^2+1}$$

$4)f(x) = \frac{x^3}{(x+1)(x^2+4)^2}$.

# Chapitre 5

# Calcul d'intégrales

## 5.1 Primitive et intégrale indéfinie

**Définition 5.1.1.** *Soit $f$ une fonction définie sur l'intervalle $I$. On dit que la fonction $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de $f$ ssi :*

$$\forall x \in I : \quad F'(x) = f(x)$$

Par exemple : la fonction $x \longmapsto F(x) = \frac{1}{3}x^3$ est une primitive de la fonction $x \longmapsto f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$ car

$$\forall x \in \mathbb{R} : F'(x) = (\frac{1}{3}x^3)' = x^2$$

On remarque aisément que les fonctions $x \longmapsto F(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$ où $c$ est une constante arbitraire sont aussi des primitives de la fonction $x \longmapsto f(x) = x^2$.

L'ensembles de toutes les primitives de $f$ est appelé intégrale indéfinie de $f$ qui est noté

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

où $F$ est une primitive de $f$ et $c$ est une constante arbitraire.
Il vient de la définition de l'intégrale que

$$(\int f(x)dx)' = (F(x) + c)' = f(x).$$

### 5.1.1 Quelques intégrales à connaître

1. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c \ (n \neq -1)$.
2. $\int \frac{1}{x^n} dx = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + c \ (n \neq 1)$.
3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$.
4. $\int \cos x dx = \sin x + c$.
5. $\int \sin x dx = -\cos x + c$.
6. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tg\ x + c$.
7. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -cotg\ x + c$.
8. $\int tg\ x = -\ln|\cos x| + c$.
9. $\int cotg\ x = \ln|\sin x| + c$.
10. $\int e^x dx = e^x + c$.
11. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$.
12. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctg\ x + c$.
13. $\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln|\frac{1+x}{1-x}| + c$.
14. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + c$.
15. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + c$.

**Propriétés 5.1.1.**

1. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.
2. $\int \alpha f(x) = \alpha \int f(x)$ tel que $\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. Si $\int f(x)dx = F(x) + c$ alors $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c$, où $a \neq 0$ et $a, b, c \in \mathbb{R}$.

**Exemples 5.1.1.**

1. $\int (2x^3 - 5\cos x + 3\sqrt{x})dx = 2\int x^3 dx - 5\int \cos x dx + 3\int \sqrt{x} dx = \frac{1}{2}x^4 - 5\sin\ x + 2\sqrt{x^3} + c$.
2. $\int \sin(7x)dx = -\frac{1}{7}\cos(7x) + c$.
3. $e^{2x+3}dx = \frac{1}{2}e^{2x+3} + c$.
4. $\int \frac{1}{1+4x^2} dx = \int \frac{1}{1+(2x)^2} dx = \frac{1}{2} arctg\ (2x) + c$.

**Théorème 5.1.1.** *Toute fonction réelle continue sur un intervalle $I$ admet une primitive.*

### 5.1.2 Intégration par changement de variable

Le calcul des intégrales n'est pas toujours facile. Parfois on effectue le changement de variable dans l'intégrale $\int f(x)dx$, en posant :

$$x = \varphi(t)$$

tel que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $\varphi : J \longrightarrow I$ bijective et de classe $C^1(J)$. Alors

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Dans cette méthode on peut poser $t = \phi(x)$, au lieu de $x = \varphi(t)$.

**Exemples 5.1.2.** *Calculons :*

1. $I_1 = \int \frac{\ln^3 x}{x}dx$. Posons $t = \ln x$, alors $dt = \frac{1}{x}dx$. Donc
$$I_1 = \int t^3 dt = \frac{1}{4}t^4 + c = \ln^4 x + c.$$
2. $I_2 = \int \frac{x}{1+x^4}dx$. Posons $t = x^2$, alors $dt = 2xdx$. Donc
$$I_2 = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{2}arctg\ t = \frac{1}{2}arctg\ x^2 + c.$$
3. $I_3 = \int \sqrt{\sin x}\cos x dx$. Posons $\sin x = t$, alors $dt = \cos x dx$. Donc
$$I_3 = \int \sqrt{t}dt = \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + c = \frac{2}{3}\sqrt{\sin^3 x} + c.$$

**Cas particulier**

Ces intégrales résultent d'un changement de variable $t = f(x)$. Ils sont faciles à calculer et on a :

1. $\int f'(x)f^n(x)dx = \frac{1}{n+1}f^{n+1}(x) + c$, tel que $n \neq -1$.
2. $\int \frac{f'(x)}{f^n(x)}dx = \frac{-1}{(n-1)f^{n-1}(x)} + c$, tel que $n \neq 1$.

### 5.1.3 Intégration du type $\int \frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}dx$ et $\int \frac{\alpha x+\beta}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

Pour faire face à ces types d'intégrales, il préférable d'écrire le polynôme de deuxième degré (du dénominateur) à sa forme canonique.

**Exemples 5.1.3.** *Calculons :*

1. $I_1 = \int \frac{1}{2x^2-2x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}dx = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{1}{4}} \int \frac{1}{(2x-1)^2+1}dx = arctg\ (2x-1) + c.$
2. $I_2 = \int \frac{1}{x^2-6x+5}dx = \int \frac{1}{(x-3)^2-4}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{(\frac{1}{2}x-\frac{3}{2})^2-1} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{1}{2}} \ln|\frac{1-\frac{x-3}{2}}{1+\frac{x-3}{2}}| + c = \frac{1}{4}\ln|\frac{x-5}{x-1}| + c.$
3. $I_3 = \int \frac{(3x-1)}{x^2-x+1}dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x-1)+\frac{3}{2}-1}{x^2-x+1} = \frac{3}{2}\ln|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}arctg\ (\frac{2x-1}{\sqrt{3}}) + c.$
4. $I_4 = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}}dx = \ln(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}) + c.$
5. $I_5 = \int \frac{1}{\sqrt{5-7x-3x^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{\sqrt{-[(x+\frac{7}{6})^2-(\frac{\sqrt{109}}{6})^2]}}dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{6}{\sqrt{109}}\int \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{6x+7}{\sqrt{109}})^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin(\frac{6x+7}{\sqrt{109}}) + c.$
6. $I_6 = \int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx = \frac{\frac{5}{2}(2x+4)-\frac{5}{2}\times 4+3}{\sqrt{x^2+4x+10}} = 5\sqrt{x^2+4x+10} - 7\ln(x+2+\sqrt{x^2+4x+10}) + c.$

### 5.1.4 Intégration par partie

Soient $u$ et $v$ deux fonctions de calasse $C^1(I)$. On a :

$$(uv)' = u'v + uv' \Longrightarrow \int uv' = uv - \int u'v ...(*).$$

Pour les intégrales de la forme $\int f(x)g(x)dx$, on essaye de faire un bon choix pour poser : $(f = u,\ g = v')$ ou $(f = v',\ g = u)$ et on applique la formule $(*)$.

**Exemples 5.1.4.** *Calculons :*

1. $I_1 = \int xe^{3x}dx$. On pose

$$\begin{cases} u = x \\ v' = e^{3x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u' = 1 \\ v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{cases}$$

   donc
   $I_1 = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx = (\frac{1}{3}x - \frac{1}{9})e^{3x} + c.$

2. $I_2 = \int x\ln(1+x)dx$. On pose

$$\begin{cases} u = \ln(1+x) \\ v' = x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u' = \frac{1}{1+x} \\ v = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

donc
$I_2 = \frac{1}{2}x^2 \ln(1+x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x}dx = \frac{1}{2}x^2 \ln(1+x) - \frac{1}{2}\int (x-1+\frac{1}{1+x})dx,$
d'où
$I_2 = (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2})\ln(1+x) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + c.$

3. $I_3 = \int \cos x e^x dx$. On pose

$$\begin{cases} u = e^x \\ v' = \cos x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u' = e^x \\ v = \sin x \end{cases}$$

donc
$I_3 = \sin x e^x - \int e^x d(-\cos x) = \sin x e^x + \cos x e^x - \int \cos x e^x dx = \sin x e^x + \cos x e^x - I_3.$
D'où
$I_3 = (\frac{\sin x + \cos x}{2})e^x + c.$

### 5.1.5 Intégration des fonctions rationnelles

En général, le calcul d'une fonction rationnelle demande de simplifier l'écriture de la fonction rationnelle, c'est à dire l'écrire en somme d'éléments simples (voir le théorème 4.2.1).

**Exemples 5.1.5.** *Calculons les intégrales suivantes :*

1. $I_1 = \int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx$. En utilisant la division euclidienne de la fonction $x \longmapsto x^3+1$ sur la fonction $x \longmapsto x^3-5x^2+6x$, on obtient

$$I_1 = \int (1 + \frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x})dx.$$

Ecrivons la fonction $x \longmapsto h(x) = \frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x} = \frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)}$ en somme d'éléments simples, i.e.

$$h(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3} = \frac{a(x-2)(x-3) + bx(x-3) + cx(x-2)}{x(x-2)(x-3)},$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R} : a(x-2)(x-3) + bx(x-3) + cx(x-2) = 5x^2 - 6x + 1.$$

Pour $x = 0$ : on obtient $6a = 1 \Longrightarrow a = \frac{1}{6}$.
Pour $x = 2$ : on obtient $2b = -9 \Longrightarrow b = \frac{9}{2}$.

Pour $x = 3$ : on obtient $3c = 28 \Longrightarrow c = \frac{28}{3}$.

Donc

$$I_1 = \int (1+\frac{1}{6x}-\frac{9}{2(x-2)}+\frac{28}{3(x-3)})dx = x+\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{9}{2}\ln|x-2|+\frac{28}{3}\ln|x-3|+c.$$

2. $I_2 = \int \frac{x}{x^3-3x+2}dx$. On a $f(x) = \frac{x}{x^3-3x+2} = \frac{x}{(x-1)^2(x+2)}$.

   De même

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+2} = \frac{a(x-1)(x+2) + b(x+2) + c(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)},$$

   i.e.

$$\forall x \in \mathbb{R} : a(x-1)(x+2) + b(x+2) + c(x-1)^2 = x.$$

   Pour $x = 1$ : on obtient $3b = 1 \Longrightarrow b = \frac{1}{3}$.

   Pour $x = -2$ : on obtient $9c = -2 \Longrightarrow c = -\frac{2}{9}$.

   Pour $x = 0$ : on obtient $a = -c = \frac{2}{9}$.

   Par conséquent

$$I_2 = \frac{2}{9}\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{(x-1)^2}dx - \frac{2}{9}\int \frac{1}{x+2}dx.$$

   D'où

$$I_2 = \frac{2}{9}\ln|\frac{x-1}{x+2}| - \frac{1}{3(x-1)} + c.$$

### 5.1.6 Intégration de certaines classes de fonctions

Soit $I = \int R(f(x), g(x))dx$ tel que $(x, y) \longmapsto R(x, y)$ une fonction rationnelle de deux variables et $f$, $g$ deux fonctions continues sur un intervalle $I$ et si $f = g$, on écrit $R(f(x), f(x)) = R(f(x))$. On a les cas suivants :

1. Si $I = \int R(\cos x, \sin x)dx$, on essaye le changement de variable $t = tg(\frac{x}{2})$ qui nous conduit à calculer $I = \int R(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2})\frac{2}{1+t^2}dt$. Pour les cas $2, 3, 4$ que nous allons voir, ils sont des cas particuliers.

   **Exemple 5.1.1.** *Calculons* $I_1 = \int \frac{1}{\sin^2 x(1+\cos x)}dx$. *En posant* $t = tg(\frac{x}{2})$, *on obtient*

$$I_1 = \frac{1}{4}\int \frac{(1+t^2)^2}{t^2}dt = -\frac{1}{4tg\ (\frac{x}{2})} + \frac{tg\ (\frac{x}{2})}{2} + \frac{tg^3\ (\frac{x}{2})}{12} + c.$$

2. Si $I = \int R(\sin x)\cos x dx$, on essaye le changement de variable $t = \sin x$ qui nous conduit à calculer $I = \int R(t)dt$.

   **Exemple 5.1.2.** *Calculons* $I_2 = \int \frac{\cos^3 x}{1+\sin^2 x}dx$. *En posant* $t = \sin x$, *on obtient :*

$$I_2 = \int \frac{1-\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\cos x dx = \int \frac{1-t^2}{1+t^2}dt = \int (-1 + \frac{2}{1+t^2})dt,$$

   *d'où*

$$I_2 = -\sin x + 2arctg\ (\sin x) + c.$$

3. Si $I = \int R(\cos x)\sin x dx$, on essaye le changement de variable $t = \cos x$ qui nous conduit à calculer $I = -\int R(t)dt$.

   **Exemple 5.1.3.** *Calculons* $I_3 = \int \cos^4 x \sin^3 x dx$. *En posant* $t = \cos x$, *on obtient :*

$$I_3 = \int \cos^4 x(1-\sin^2 x)\sin x dx = -\int t^4(1-t^2)dt,$$

   *d'où*

$$I_3 = \frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} + c.$$

4. Si $I = \int R(tg\ x)dx$, on essaye le changement de variable $t = tg\ x$ qui nous conduit à calculer $I = \int \frac{R(t)}{1+t^2}dt$.

   **Exemple 5.1.4.** *Calculons* $I_4 = \int tg^4 x dx$. *En posant* $t = tg\ x$, *on obtient :*

$$I_4 = \int \frac{t^4}{1+t^2}dt = \int (t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2})dt,$$

   *d'où*

$$I_4 = \frac{tg^3 x}{3} - tg\ x + x + c.$$

5. Si $I = \int R(x, \sqrt{1-x^2})dx$, on essaye le changement de variable $x = \sin t$.

   **Exemple 5.1.5.** *Calculons* $I_5 = \int \sqrt{9-x^2}dx$. *En posant* $x = 3\sin t$, *on obtient*

$$I_5 = 9\int \cos^2 t dt = \frac{9}{2}\int (\cos 2t + 1)dt = \frac{9}{4}\sin 2t + \frac{9}{2}t + c,$$

   *d'où*

$$I_5 = \frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + \frac{9}{2}\arcsin(\frac{x}{3}) + c.$$

6. Si $I = \int R(x, \sqrt{x^2-1})dx$, on essaye le changement de variable $|x| = ch\ t$.

**Exemple 5.1.6.** *Calculons* $I_6 = \int \sqrt{x^2-9}dx$ *tel que* $x \geq 3$. *En posant* $x = 3ch\ t$, *on obtient :*

$$I_6 = 9\int sh^2 t dt = \frac{9}{2}\int (ch\ 2t - 1)dt = \frac{9}{4} sh\ 2t - \frac{9}{4}t + c,$$

*d'où*

$$I_6 = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-9} - \frac{9}{2} argch(\frac{x}{3}) + c.$$

7. Si $I = \int R(x, \sqrt{x^2+1})dx$, on essaye le changement de variable $x = sh\ t$.

**Exemple 5.1.7.** *Calculons* $I_7 = \int \sqrt{x^2+9}dx$. *En posant* $x = sh\ t$, *on obtient :*

$$I_7 = 9\int ch^2 t dt = \frac{9}{2}\int (ch\ 2t + 1)dt = \frac{9}{4} sh\ 2t + \frac{9}{2}t + c,$$

*d'où*

$$I_7 = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+9} + \frac{9}{2} argsh(\frac{x}{3}) + c.$$

8. Si $I = \int R(e^x)dx$, on essaye le changement de variable $t = e^x$.

**Exemple 5.1.8.** *Calculons* $I_8 = \int \frac{e^x}{3-e^{2x}}dx$. *En posant* $t = e^x$, *on obtient :*

$$I_8 = \int \frac{1}{3-t^2}dt = \frac{1}{3}\int \frac{1}{1-(\frac{t}{\sqrt{3}})^2}dt,$$

*d'où*

$$I_8 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln |\frac{\sqrt{3}+e^x}{\sqrt{3}-e^x}| + c.$$

9. Si $I = \int R(sh\ x, ch\ x)dx$, on essaye le changement de variable $t = th(\frac{x}{2})$ qui nous conduit à calculer $I = \int R(\frac{2t}{1-t^2}, \frac{1+t^2}{1-t^2}) \times \frac{2}{1-t^2}dt$. Pour les cas 10 et 11 que nous allons voir, ils sont des cas particuliers.

**Exemple 5.1.9.** *Calculons* $I_9 = \int \frac{1}{sh\ x}dx$. *En posant* $t = th(\frac{x}{2})$, *on obtient :*

$$I_9 = \int \frac{1}{t}dt = \ln t + c,$$

*d'où*

$$I_9 = \ln th(\frac{x}{2}) + c.$$

10. Si $I = \int R(sh\ x)ch\ xdx$, on essaye le changement de variable $t = sh\ x$.

**Exemple 5.1.10.** *Calculons* $I_{10} = \int sh^4 x ch^3\ x dx$. *En posant* $t = sh\ x$*, on obtient :*

$$I_{10} = \int sh^4 x(1 + sh^2 x)ch\ x dx = \int t^4(1 + t^2)dt,$$

*donc*

$$I_{10} = \frac{sh^5 x}{5} + \frac{sh^7 x}{7} + c.$$

11. Si $I = \int R(ch\ x)sh\ x dx$, on essaye le changement de variable $t = ch\ x$.

**Exemple 5.1.11.** *Calculons* $I_{11} = \int ch^2 x sh^3\ x dx$. *En posant* $t = ch\ x$*, on obtient :*

$$I_{11} = \int ch^2 x(ch^2 x - 1)sh\ x dx = \int t^2(t^2 - 1)dt,$$

*d'où*

$$I_{11} = \frac{ch^5 x}{5} - \frac{ch^3 x}{3} + c.$$

12. Si $\int R(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, ...., x^{\frac{m_p}{n_p}})dx$, on essaye le changement de variable $x = t^k$ tel que $k = PPCM\{n_1, n_2, ..., n_p\}$.

**Exemple 5.1.12.** *Calculons* $I_{11} = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx$. *On cherche le PPCM des dénominateurs des puissances de* $x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{3}{4}}$ *i.e.* $PPCM(2, 4) = 4$. *En posant* $x = t^4$*, on obtient :*

$$I_{11} = \int \frac{(t^4)^{\frac{1}{2}}}{(t^4)^{\frac{3}{4}} + 1} \times 4t^3 dt = 4\int \frac{t^5}{t^3 + 1}dt = 4\int (t^2 - \frac{t^2}{t^3 + 1})dt,$$

*d'où*

$$I_{11} = \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} - \frac{4}{3}\ln|\sqrt[4]{x^3} + 1| + c.$$

**Exercice 5.1.1.** *Calculer les intégrales suivantes :*

| | | |
|---|---|---|
| 1) $\int e^{\sqrt{x}}dx$ | 2) $\int \sqrt{e^x - 1}dx$ | 3) $\int \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}dx$ |
| 4) $\int \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}dx$ | 5) $\int \frac{1}{x^7+x}dx$ | 6) $\int \sqrt{tg\ x}dx.$ |

**Solution 5.1.1.** *1.* $\int e^{\sqrt{x}}dx$. *En posant* $t = \sqrt{x}$*, on obtient*

$$dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \Longrightarrow dx = 2tdt,$$

*donc*

$$\begin{aligned}\int e^{\sqrt{x}}dx &= 2\int te^t dt = 2\int td(e^t)\\ &= 2te^t - 2\int^t edt = 2te^t - 2e^t + c\\ &= 2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}} + c.\end{aligned}$$

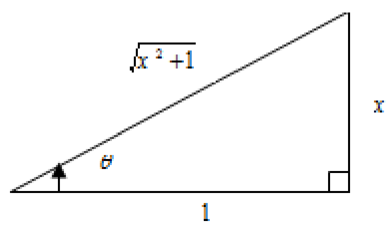
2. $\int \sqrt{e^x - 1}$. *En posant* $t = \sqrt{e^x - 1}$, *on obtient*

$$dt = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} dx \Longrightarrow dx = \frac{2t}{t^2 + 1} dt,$$

*donc*

$$\begin{aligned}\int \sqrt{e^x - 1} = 2 \int \frac{t^2}{t^2 + 1} dt = 2 \int (1 - \frac{1}{1 + t^2}) dt \\ = 2t - arctg\ t + c \\ = 2\sqrt{e^x - 1} - arctg\sqrt{e^x - 1} + c.\end{aligned}$$

3. $\int \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} dx$. *Pour obtenir un bon changement de variable, essayons de tracer un triangle rectangle avec les longueurs de ces cotés sont* 1 *et* $x$.




*En posant* $tg\ \theta = \frac{x}{1} = x$, *on obtient*

$$dx = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta, \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}},$$

*donc*

$$\int \frac{1}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} dx = \int \frac{\cos^3 \theta}{\cos^2 \theta} d\theta = \int \cos \theta d\theta = \sin \theta + c,$$

*d'où*

$$\int \frac{1}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + c.$$

4. $\int \frac{1}{\sqrt{x - x^2}} dx$. *On a :*

$$\int \frac{1}{\sqrt{x - x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1 - x}} dx = 2 \int \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1 - \sqrt{x}^2}} dx.$$

*En posant* $t = \sqrt{x}$, *on obtient* $dx = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$, *donc*

$$\int \frac{1}{\sqrt{x - x^2}} dx = 2 \int \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} dt = 2 \arcsin t + c.$$

*D'où*

$$\int \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}dx = 2\arcsin\sqrt{x} + c.$$

5. $\int \frac{1}{x^7+x}dx$. *On a :*

$$\int \frac{1}{x^7+x}dx = \frac{1}{x^7(1+x^{-6})}dx = \frac{x^{-7}}{1+x^{-6}}dx.$$

*En posant* $t = x^{-6}$, *on obtient* $dx = -6x^{-7}dx$,
*donc*

$$\int \frac{1}{x^7+x}dx = -\frac{1}{6}\int \frac{1}{1+t}dt = -\frac{1}{6}\ln|1+t| + c.$$

*D'où*

$$\int \frac{1}{x^7+x}dx = \frac{1}{6}\ln(\frac{x^6}{x^6+1}) + c.$$

6. $\int \sqrt{tg\ x}dx$. *En posant* $t = \sqrt{tg\ x}$, *on obtient*

$$dt = \frac{1+tg^2x}{2\sqrt{tg\ x}}dx = \frac{1+t^4}{2t}dx \Longrightarrow dx = \frac{2t}{1+t^4}dt$$

*donc*

$$\begin{aligned}\int \sqrt{tg\ x}dx &= \int \frac{2t^2}{1+t^4}dt = \int \frac{2}{t^2+\frac{1}{t^2}}dt\\ &= \int \frac{2}{(t+\frac{1}{t})^2-1}dt = \int \frac{1+\frac{1}{t^2}}{(t+\frac{1}{t})^2-2}dt + \int \frac{1-\frac{1}{t^2}}{(t+\frac{1}{t})^2-2}dt\\ &= \int \frac{1+\frac{1}{t^2}}{(t-\frac{1}{t})^2+2}dt + \int \frac{1-\frac{1}{t^2}}{(t+\frac{1}{t})^2-2}dt.\end{aligned}$$

*En posant* $u = t - \frac{1}{t}$ *et* $v = t + \frac{1}{t}$, *on obtient*

$$\begin{aligned}\int \sqrt{tg\ x}dx &= \int \frac{1}{u^2+2}du + \int \frac{1}{v^2-2}dv = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(\frac{u}{\sqrt{2}})^2+1}du + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(\frac{v}{\sqrt{2}})^2-1}dv\\ &= \frac{1}{2}\times\sqrt{2}arctg(\frac{u}{\sqrt{2}}) + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\ln|\frac{1-\frac{v}{\sqrt{2}}}{1+\frac{v}{\sqrt{2}}}| + c\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\frac{u}{\sqrt{2}}) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|\frac{\sqrt{2}-v}{\sqrt{2}+v}| + c.\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\frac{\sqrt{tg\ x}-\sqrt{cotg\ x}}{\sqrt{2}}) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|\frac{\sqrt{2}-\sqrt{tg\ x}-\sqrt{cotg\ x}}{\sqrt{2}+\sqrt{tg\ x}+\sqrt{cotg\ x}}| + c.\end{aligned}$$

## 5.2 Intégrale définie

**Définition 5.2.1.** *Soit* $[a,b]$ *un intervalle fermé et borné. On appelle une subdivision de* $[a,b]$ *toute partie finie* $d = \{a, x_1, ..., x_{n-1}, b\} \subset [a,b]$.
*La somme*

$$\sigma(f,d) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

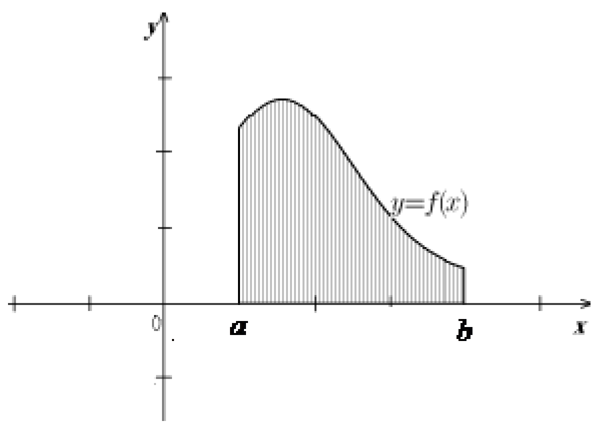
*où* $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ *est dite somme de Riemann correspondant à* $d$ *et au* $\xi = (\xi_1, ...., \xi_n)$.
*Si pour tout choix du subdivision de* $[a,b]$ *et pour tout choix des* $\xi \in [x_{i-1}, x_i]$, *on a*

$$\lim_{\max \triangle x_i \longrightarrow 0} \sigma(f,d) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = S.$$

$S$ *est appelée intégrale définie de* $f$ *sur* $[a,b]$ *qui est notée par*

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

**Remarque 5.2.1.** *: Si* $f \geq 0$, *l'intégrale* $S = \int_a^b f(x)dx$ *égale à l'aire du domaine (hachuré) du plan formé par la courbe* $C_f$, *les droites* $x = a$, $x = b$ *et l'axe des abscisses* $(x'x)$.




**Définition 5.2.2.** *On dit qu'une fonction* $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est en escalier s'il existe une subdivision* $d = \{a, x_1, ..., x_{n-1}, b\}$ *telle que* $\varphi$ *vaut une constante sur chacun des intervalles* $]x_{i-1}, x_i[$ *pour* $i \in \{1, 2, ..., n\}$. *L'intégrale définie de* $\varphi$ *sur* $[a,b]$ *est définie par*

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1})$$

**Proposition 5.2.1.** *Toute fonction continue sur $[a, b]$, elle est intégrable-Riemann.*

**Proposition 5.2.2.** *Si $f$ est intégrable sur $[a, b]$, alors*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n})$$

**Théorème 5.2.1.** *Soit $f$ une fonction continue sur $[a, b]$ et $F$ une primitive de $f$. Alors*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

**Propriétés 5.2.1.** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions intégrables-Riemann. Alors*

1. $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$ tel que $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.
3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
4. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ tel que $c \in [a, b]$ (appelée relation de Chasles).

**Remarque 5.2.2.** *Lorsque on effectue un changement de variable $x = \varphi(t)$ dans l'intégrale $I = \int_a^b f(x) = dx$, on doit changer les bornes, i.e., l'intégrale devient*

$$I = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

**Exemples 5.2.1.**

1. $I_1 = \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx = \int_e^{e^2} \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = [\ln |\ln x|]_e^{e^2} = \ln 2$.
2. $I_2 = \int_0^{\pi} x \sin x dx = \int_0^{\pi} x d(-\cos x) = [-x \cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = \pi$.
3. $I_3 = \int_1^9 x \sqrt[3]{1-x}$. En posant $1 - x = t^3$, on obtient

$$I_3 = \int_0^{-2} (1-t^3)t(-3t^2)dt = 3 \int_{-2}^{0} (t^3 - t^6) = 3[\frac{t^4}{4} - \frac{t^7}{7}]_{-2}^{0} = -\frac{468}{7}.$$

**Exercice 5.2.1.**

1. Calculer l'intégrale définie suivante

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{1+x^2} dx$$

   à l'aide d'un changement de variable défini par $x = \frac{1-t}{1+t}$

2. En déduire la valeur de
$$J = \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x} dx.$$

**Solution 5.2.1.**

1. En posant $x = \frac{1-t}{1+t}$, on obtient
$$I = \int_1^0 \frac{\ln(\frac{1-t}{1+t}+1)}{1+\frac{(1-t)^2}{(1+t)^2}} \times \frac{-2}{(1+t)^2} dt = \int_1^0 \frac{\ln(\frac{2}{1+t})}{\frac{2(1+t^2)}{(1+t)^2}} \times \frac{-2}{(1+t)^2} dt,$$
$$I = \int_0^1 \frac{\ln 2}{1+t^2} dt - \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2} dt = \ln 2 [arctg\ t]_0^1 - I,$$
donc
$$I = \frac{\ln 2\pi}{8}.$$
2. En utilisant l'intégration par partie, on obtient
$$J = \int_0^1 arctg\ x d(\ln(1+x)) = [\ln(1+x) arctg\ x]_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{1+x^2} dx$$
$$= \frac{\ln 2\pi}{4} - I = \frac{\ln 2\pi}{4} - \frac{\ln 2\pi}{8}.$$
D'où
$$J = I = \frac{\ln 2\pi}{8}.$$

**Exercice 5.2.2.** *Calculer l'intégrale définie suivante : :*
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx.$$

**Solution 5.2.2.** *Posons $x = \frac{\pi}{2} - t$, alors*
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln \sin(\frac{\pi}{2} - t)(-dt)$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos t dt,$$
*donc*
$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \cos x dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\frac{1}{2} \sin 2x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1}{2} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin(2x) dx$$
$$= -\frac{\pi}{2} \ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin 2x dx.$$

*Pour la dernière intégrale, on pose* $t = 2x$*, on obtient*

$$2I = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln\sin t dt = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin t dt + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln\sin t dt.$$

*Pour l'intégrale* $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln\sin t dt$*, on pose* $t = \pi - y$*, donc*

$$2I = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin t dt + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln\sin(\pi - y)(-dy) = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + I.$$

*D'où*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

# Chapitre 6

# Développements limités

## 6.1 Formules de Maclaurin et de Taylor

Si $f$ est une fonction dérivable, on peut exprimer la différence $f(b) - f(a)$ au moyen de $f'$ (égalité des accroissements finis).
Si $f$ possède plusieurs dérivées, on peut aussi écrire la différence $f(b) - f(a)$ en faisant intervenir $f'$, $f''$, $f^{(3)}$,...etc.(formules de Taylor).

**Théorème 6.1.1** (Formule de Taylor avec reste de Lagrange)**.** *Soit $f$ une fonction de classe $C^n$ sur un intervalle $I$ qui contient $a$. Alors pour tout $x \in I$, on a*

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + ... + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(c)$$

*tel que $c$ est compris entre $a$ et $x$.*

Si $a = 0$, on obtient

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(a) + ... + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(c)$$

tel que $c$ est compris entre 0 et $x$. Dans ce cas on l'appelle aussi la formule de Maclaurin avec reste de Lagrange à l'ordre $n$. Pour la preuve, essayons de démontrer le théorème pour $a = 0$.

*Démonstration.* Soit $x \in I$ et $P$ un polynôme de degré $n-1$ qui coïncide avec $f$ par

$$P(0) = f(0), P'(0) = f'(0), ..., P^{(n-1)}(0) = f^{(n-1)}(0),$$

donc, on peut définir sur l'intervalle $[0, x]$ ou $[x, 0]$, les fonctions

**1)** $t \longmapsto P(t) = f(0) + \frac{t}{1!}f'(0) + \frac{t^2}{2!}f''(a) + ... + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)$.

**2)** $t \longmapsto R(t) = f(t) - P(t)$ (appelée le reste).

**3)** $t \longmapsto V(t) = t^n$.

En appliquant le théorème des accroissements finis généralisés sur les deux fonctions $R$ et $V$ et en profitant des égalités suivantes

$$R^{(i)}(0) = 0 \quad et \quad V^{(i)}(0) = 0 \quad \text{tel que } i \in \{0, 1, ..., n-1\}$$

on obtient

$$\frac{R(x)}{x^n} = \frac{R(x) - R(0)}{V(x) - V(0)} = \frac{R'(c_1)}{V'(c_1)} = ... = \frac{R^{(n)}(c_n)}{V^{(n)}(c_n) = n!}.$$

En posant $c_n = c \in [0, x]$, on aura

$$R(x) = \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(c).$$

la démonstration est achevée. $\square$

**Exemple 6.1.1.** *Ecrivons la formule de Taylor à l'ordre* 3 *au point* 0 *de la fonction* $x \longmapsto f(x) = \ln(1 + x)$. *On a* $f$ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty(]-1, +\infty[)$ *et on a :*

| | | |
|---|---|---|
| $f(x)$ | $\ln(1+x)$ | $f(0) = 0$ |
| $f'(x)$ | $\frac{1}{1+x}$ | $f'(0) = 1$ |
| $f''(x)$ | $\frac{-1}{(1+x)^2}$ | $f''(0) = -1$ |
| $f'''(x)$ | $\frac{2}{(1+x)^3}$ | / |

*Donc*

$$\ln(1 + x) = 0 + \frac{x}{1!}(1) + \frac{x^2}{2!}(-1) + \frac{x^3}{3!} \times \frac{2}{(1 + c)^3},$$

*d'où*

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \times \frac{1}{(1 + c)^3},$$

*tel que* $c$ *est compris entre* 0 *et* $x$.

**Exercice 6.1.1.**

1. Ecrire la formule de Maclaurin à l'ordre 4 avec reste de Lagrange de la fonction $x \longmapsto f(x) = \cos x$.

2. En déduire que :
$$\forall x \in \mathbb{R} : \ 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

**Solution 6.1.1.**

1. La fonction $x \longmapsto f(x) = \cos x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et on a

| | | |
|---|---|---|
| $f(x)$ | $\cos x$ | $f(0) = 1$ |
| $f'(x)$ | $-\sin x$ | $f'(0) = 0$ |
| $f''(x)$ | $-\cos x$ | $f''(0) = -1$ |
| $f'''(x)$ | $\sin x$ | $f'''(0) = 0$ |
| $f^{(4)}(x)$ | $\cos x$ | / |

Donc
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\cos c,$$
tel que $c$ est compris entre 0 et $x$.

2. On a :
$$\cos x - (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}) = \frac{x^4}{24}(\cos c - 1) \leq 0 \quad (\text{car } \cos c \leq 1),$$
donc
$$\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$
On a aussi
$$\cos x - (1 - \frac{x^2}{2}) = \frac{x^4}{24}\cos c,$$
donc on ne peut rien dire sur le signe. Dans ce cas on utilise la formule de Maclaurin à l'ordre 2. En effet
$$\cos x - (1 - \frac{x^2}{2}) = 1 - \frac{x^2}{2}\cos c - 1 + \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}(1 - \cos c) \geq 0.$$
Donc
$$\cos x \geq (1 - \frac{x^2}{2}).$$

**Théorème 6.1.2** (Formule de Taylor-Young)**.** *Soit $I$ un intervalle et $0 \in I$. $f$ une fonction $C^n$ sur $I$ un voisinage de $a$. Alors pour tout $x \in I$, on a*
$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + (x-a)^n\epsilon(x)$$
*tel que* $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \epsilon(x) = 0.$

*Démonstration.* Ecrivons la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $n$ au point $a$ :

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + ... + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(c)$$

tel que $c$ est compris entre $a$ et $x$. Donc

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!}f'(a) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + (x-a)^n \frac{f^{(n)}(c) - f^{(n)}(a)}{n!}.$$

En posant $\epsilon(x) = \frac{f^{(n)}(c)-f^{(n)}(a)}{n!}$, on obtient $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \epsilon(x) = 0$ car $f^{(n)}$ est continue en $a$ et lorsque $x$ s'approche de $a$, $c$ aussi s'approche de $a$. D'où

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + (x-a)^n\epsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \epsilon(x) = 0$. □

Si on remplace $a = 0$ dans la formule précédente, on obtient :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + ... + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + x^n\epsilon(x)$$

tel que $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \epsilon(x) = 0$. Dans ce cas on peut l'appeler aussi la formule de Maclaurin-Young à l'ordre $n$.

**Exemples 6.1.1.**

1. Ecrivons la formule de Maclaurin-Young à l'ordre 7 de la fonction $x \longmapsto f(x) = \sin x$. La fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et on a :

| | | |
|---|---|---|
| $f(x)$ | $\sin x$ | $f(0) = 0$ |
| $f'(x)$ | $\cos x$ | $f'(0) = 1$ |
| $f''(x)$ | $-\sin x$ | $f''(0) = 0$ |
| $f^{(3)}(x)$ | $-\cos x$ | $f^{(3)}(0) = -1$ |
| $f^{(4)}(x)$ | $\sin x$ | $f^{(4)}(0) = 0$ |
| $f^{(5)}(x)$ | $\cos x$ | $f^{(5)}(0) = 1$ |
| $f^{(6)}(x)$ | $-\sin x$ | $f^{(6)}(0) = 0$ |
| $f^{(7)}(x)$ | $-\cos x$ | $f^{(7)}(0) = -1$ |

Donc

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + x^7\epsilon(x)$$

ou bien

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + x^7\epsilon(x) \quad \text{tel que } \lim_{x\longrightarrow 0}\epsilon(x) = 0.$$

2. Ecrivons la formule de Maclaurin-Young à l'ordre 5 de la fonction $x \longmapsto f(x) = \sqrt[3]{1+x}$. La fonction $x \longmapsto f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty(]-1,+\infty[)$ et on a :

| | | |
|---|---|---|
| $f(x)$ | $\sqrt[3]{1+x}$ | $f(0) = 1$ |
| $f'(x)$ | $\frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}$ | $f'(0) = \frac{1}{3}$ |
| $f''(x)$ | $-\frac{2}{9}(1+x)^{-\frac{5}{3}}$ | $f''(0) = -\frac{2}{9}$ |
| $f^{(3)}(x)$ | $\frac{10}{27}(1+x)^{-\frac{8}{3}}$ | $f^{(3)}(0) = \frac{10}{27}$ |
| $f^{(4)}(x)$ | $-\frac{80}{81}(1+x)^{-\frac{11}{3}}$ | $f^{(4)}(0) = -\frac{80}{81}$ |
| $f^{(5)}(x)$ | $\frac{880}{243}(1+x)^{-\frac{14}{3}}$ | $f^{(5)}(0) = \frac{880}{243}$. |

D'où

$$f(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243} + \frac{22x^5}{729} + x^5\epsilon(x) \quad \text{tel que } \lim_{x\longrightarrow 0}\epsilon(x) = 0.$$

**Définition 6.1.1.** *Soit $f$ une fonction réelle définie dans un voisinage $V$ de 0. On dit que $f$ admet un développement limité d'ordre $n$ (noté par $DL_n(0)$) dans ce voisinage, s'il existe une fonction polynomiale $F_n$ de degré $n$ tel que :*

$$\forall x \in V : \quad f(x) = F_n(x) + x^n\epsilon(x) \quad \textit{tel que} \quad \lim_{x\longrightarrow 0}\epsilon(x) = 0$$

*ou encore*

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + x^n\epsilon(x)$$

*$F_n$ est appelée la partie régulière ou partie principale du développement.*

**Remarques 6.1.1.** *Si $f$ admet un développement limité d'ordre $n$ au voisinage de 0, alors ce développement est unique, de plus $\lim_{x\longrightarrow 0} f(x) = a_0$. D'autre part si $a_0 = f(0)$, alors $f$ est dérivable en 0 car*

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\longrightarrow 0}[a_1 + a_2x + a_3x^2 + ... + a_nx^{n-1} + x^{n-1}\epsilon(x)] = a_1$$

**Exemple 6.1.2.** *La fonction $x \longmapsto f(x) = \frac{1}{1-x}$ admet un développement limité d'ordre $n$ au voisinage de 0 qui est obtenu par la division suivant les puissances croissantes :*

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x} \quad x \neq 1$$

*ou*
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + x^n \frac{x}{1-x}$$
*avec* $\epsilon(x) = \frac{x}{1-x} \longrightarrow 0$ *quand* $x \longrightarrow 0$.

**Théorème 6.1.3** (de Mac Laurin-Young). *Soit $f$ une fonction définie dans un voisinage de 0, de classe $C^{n-1}$ et on suppose que $f^{(n)}(0)$ existe. Alors $f$ admet un développement d'ordre $n$ dans ce voisinage de la forme :*
$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\epsilon(x)$$
*avec* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \epsilon(x) = 0$.

**Exemples 6.1.2.**

1. $f(x) = e^x$ tel que $x \in \mathbb{R}$. On a $f^{(n)}(x) = e^x, \forall n \in \mathbb{N}$, donc
$$f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}x^n\epsilon(x)$$
2. $f(x) = (1+x)^\alpha$ tel que $x \in ]-1, +\infty[$, $\alpha \in \mathbb{R}$. On a $f(0) = 1$, $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$,...., $f^n(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$. Donc
$$f(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\epsilon(x)$$
3. $f(x) = \sin x$ tel que $x \in \mathbb{R}$. On a $f^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2}), \forall n \in \mathbb{N}$, donc
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\epsilon(x)$$
4. $f(x) = \cos x$ tel que $x \in \mathbb{R}$. On a $f^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2}), \forall n \in \mathbb{N}$, donc
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\epsilon(x)$$

**Remarques 6.1.2.**

1. Pour une fonction qui admet un DL à l'ordre $n$ en 0, on peut utiliser cette écriture :
$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + o(x^n)$$
car $x^n\epsilon(x) = o(x^n)$ en 0.
2. La partie régulière du développement limité d'une fonction paire est paire.
3. La partie régulière du développement limité d'une fonction impaire est impaire.

## 6.2 Dévoloppements limités usuels

Voici les DL en 0 de quelque fonctions à retenir :

1. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + o(x^n)$.
2. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$.
3. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$.
4. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$.
5. $sh\ x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$.
6. $ch\ x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$.
7. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n!} + o(x^n)$.
8. $(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3}{3!} + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-(n-1))x^n}{n!} + o(x^n)$.

### 6.2.1 Opérations sur les développements limités

**Théorème 6.2.1.** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies dans un voisinage de 0, admettant chacune un développement limité d'ordre $n$. Alors*

1. (**Somme DL**) $f+g$ admet un développement limité d'ordre $n$ où, sa partie régulière est égale à la somme des parties régulières de $f$ et $g$.
2. (**Produit DL**) $fg$ admet un développement limité d'ordre $n$ où sa partie régulière est obtenu en effectuant d'abord le produit des parties régulières de $f$ et $g$ et en ne conservant dans ce produit que les termes de degré inférieur ou égal à $n$.
3. (**Quotient DL**) $\frac{f}{g}$ admet un développement limité d'ordre $n$ (si $g(0) \neq 0$), sa partie régulière est égale au quotient de la division de la partie régulière de $f$ par la partie régulière de $g$ suivant les puissances croissantes à l'ordre $n$.

**Exemples 6.2.1.**

1. Calculons le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \longmapsto f(x) = \sin x + \cos x$. On a :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

et

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3),$$

donc
$$f(x) = \sin x + \cos x = 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

2. Calculons le $\text{DL}_3(0)$ de $x \longmapsto g(x) = \ln(1+x) \times ch\ x$. On a :
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$
et
$$ch\ x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3),$$
donc
$$g(x) = \ln(1+x) \times ch\ x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + o(x^3).$$

3. Calculons le $\text{DL}_3(0)$ de $x \longmapsto h(x) = \frac{sh\ x}{\cos x}$. On a :
$$sh\ x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$
et
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3).$$
D'où
$$h(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

**Remarque 6.2.1.** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions admettent un DL à l'ordre $n$ et en $0$ et $F_n$ et $G_n$ leurs paries régulières respectivement, tel que $F_n(0) = G_n(0) = 0$. Soit $b_p x^p$ le monôme de plus bas degré de $G_n$. Si on peut simplifier la fraction $\frac{F_n}{G_n}$ par $x^p$, alors $f/g$ admet un DL à l'ordre $n-p$ en $0$.*

**Exemple 6.2.1.** *Calculons le $DL_3(0)$ de la fonction $x \longmapsto f(x) = \frac{\ln(1+x)}{e^x - 1}$. On doit écrire les DL à l'ordre $4$ des fonctions suivantes :*
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$
*et*
$$e^x - 1 = x + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$
*car les écritures des parties régulières commencent par des monômes de même degré qui est égale à $1$. En effet*
$$f(x) = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)}{x + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} = \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)}.$$

*D'où*

$$f(x) = 1 - x + \frac{2x^2}{3} - \frac{11x^3}{24} + o(x^3).$$

**Exercice 6.2.1.** *Calculer les développements limités au point* 0 *à l'ordre* $n$ *:*

1) $\frac{1}{1-x} - e^{3x} \quad n = 3.$ 2) $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} \quad n = 4.$

3) $\cos x \ln(1+3x) \quad n = 4.$ 4) $x^2\sqrt{1-x} \quad n = 4.$

5) $\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2} \quad n = 4.$ 6) $tg(3x) \quad n = 5.$

7) $\frac{x}{\sin x} \quad n = 4.$ 8) $\frac{arctg\ x}{1+x^2} \quad n = 5.$

**Solution 6.2.1.**

1. On a :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$$
$$e^{3x} = 1 + 3x + \frac{9x^2}{2} + \frac{9x^3}{2} + o(x^3)$$

d'où

$$\frac{1}{1-x} - e^{3x} = -2x - \frac{7x^2}{2} - \frac{7x^3}{2} + o(x^3).$$

2. Il suffit d'écrire

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + o(x^4)$$
$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + o(x^4).$$

Donc

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = 2 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{5x^4}{64} + o(x^4).$$

3. On écrit

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$
$$\ln(1+3x) = 3x - \frac{9x^2}{2} + 9x^3 - \frac{81x^4}{4} + o(x^4)$$

d'où

$$\cos x \ln(1+3x) = 3x - 6x^2 + 9x^3 - \frac{77x^4}{4} + o(x^4).$$

4. Il suffit d'écrire le développement de :
$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{125} + o(x^4).$$
Donc
$$x^2\sqrt{1-x} = x^2 - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4).$$
5. $\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2} = 1 + 2x + 2x^2 - 2x^4 + o(x^4)$.
6. $tg\ (3x) = 3x + 9x^3 + \frac{162x^5}{5} + o(x^5)$.
7. $\frac{x}{\sin x} = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} + o(x^4)$.
8. $\frac{arctg\ x}{1+x^2} = x - \frac{4x^3}{3} + \frac{23x^5}{15} + o(x^5)$.

**Théorème 6.2.2** (Composition de DL)**.** *Soient $f$ et $g$ admettent un DL à l'ordre $n$ en $0$ tel que :*
$$f(x) = F_n(x) + o(x^n)$$
$$g(x) = G_n(x) + o(x^n)$$
*Si $g(0) = 0$, alors $f \circ g$ admet un DL à l'ordre $n$ en $0$, sa partie régulière est obtenu en effectuant d'abord la composée $F_n \circ G_n$ et en ne conservant dans que les termes de degré inférieur ou égal à $n$.*

**Exemples 6.2.2.**

1. Calculons le $\mathrm{DL}_3(0)$ de la fonction $x \longmapsto \ln(1+x+x^2)$. On pose $u = x + x^2 = x + x^2 + o(x^3)$. On a $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} u = 0$, de plus
$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3),$$
avec
$$u = x + x^2 + o(x^3)$$
$$u^2 = x^2 + 2x^3 + o(x^3)$$
$$u^3 = x^3 + o(x^3).$$
donc
$$\ln(1+x+x^2) = x + \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + o(x^3).$$

2. Calculons le $DL_4(0)$ de la fonction $x \longmapsto e^{\cos x}$. On remarque que $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \cos x = 1 \neq 0$, donc on ne peut pas intervenir le théorème directement. Dans ce cas on fait apparaitre dans $e^{\cos x}$ une expression qui tend vers 0 lorsque $x \longrightarrow 0$. En effet

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\\ e^{\cos x} &= e \times e^{\cos x - 1} = e \times e^{-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)}\end{aligned}$$

On pose $u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$. On a $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} u = 0$ , de plus

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + o(u^4),$$

avec

$$\begin{aligned}u^2 &= \frac{x^4}{24} + o(x^4)\\ u^3 &= 0 + o(x^4)\\ u^4 &= 0 + o(x^4).\end{aligned}$$

D'où

$$e^{\cos x} = e - \frac{ex^2}{2} + \frac{ex^4}{6} + o(x^4).$$

3. Calculons le $DL_5(0)$ de la fonction $x \longmapsto (1+x)^x$. On a $(1+x)^x = e^{x\ln(1+x)}$, de plus

$$\begin{aligned}x\ln(1+x) &= x(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4))\\ &= x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{4} + o(x^5).\end{aligned}$$

Remarquons qu'il n'est pas nécessaire d'aller jusqu'à l'ordre 5 de $\ln(1+x)$ car en multipliant par $x$, les puissances seront augmenté par 1. On pose $u = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{4} + o(x^5)$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} u = 0$
avec

$$\begin{aligned}u &= x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{4} + o(x^5)\\ u^2 &= x^4 - x^5 + o(x^5).\end{aligned}$$

Il n'est pas nécessaire de calculer $u^3, u^4$ et $u^5$ car les puissances vont dépasser 5. D'où

$$(1+x)^x = 1 + x - \frac{x^3}{2} + \frac{5x^4}{6} - \frac{3x^5}{4} + o(x^5).$$

**Théorème 6.2.3.** *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $I$ un intervalle et $0 \in I$ et $f$ admet un DL à l'ordre $n$ en $0$. On a :*

1. Si $f$ est dérivable sur $I$, alors $f'$ admet un DL à l'ordre $n-1$. Sa partie régulière est égale à la dérivée de la partie régulière de $f$.
2. Si $f$ admet une primitive $F$, alors elle admet un DL à l'ordre $n+1$. Sa partie régulière est égale à la primitive de la partie régulière de $F$ en ajoutant $F(0)$.

**Exemples 6.2.3.**

1. Calculons le $\mathrm{DL}_4(0)$ de la fonction $x \longmapsto f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$. On a $(\frac{1}{1-x})' = \frac{1}{(1-x)^2}$, de plus
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + o(x^5).$$
D'où
$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + o(x^4).$$
2. Calculons le $\mathrm{DL}_5(0)$ de la fonction $x \longmapsto arctg\ x$. On a $arctg\ x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$, avec
$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4)$$
donc
$$arctg\ x = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 + o(t^4))dt.$$
D'où
$$arctg\ x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5).$$

### 6.2.2 Développement limité au voisinage de $x_0 \neq 0$ et en $\infty$

**Définition 6.2.1.** *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $I$ intervalle qui contient $x_0$.*

1. On dit que $f$ admet un DL en $x_0$ à l'ordre $n$ si on peut écrire :
$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

2. On dit que $f$ admet un DL en $\infty$ à l'ordre $n$ si on peut écrire

$$f(x) = c_0 + \frac{c_1}{x} + ... + \frac{c_n}{x^n} + o(\frac{1}{x^n}).$$

**Exemples 6.2.4.**

1. Calculons le $\mathrm{DL}_3(2)$ de la fonction $x \longmapsto f(x) = e^x$. Posons $y = x - 2$, alors $y \longrightarrow 0$ lorsque $x \longrightarrow 2$ et on a :

$$e^x = e^{y+2} = e^2 e^y = e^2(1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + o(y^3).$$

D'où

$$e^x = e^2 + e^2(x-2) + \frac{e^2(x-2)^2}{2} + \frac{e^2(x-2)^3}{6} + o((x-2)^3).$$

2. Calculons le $\mathrm{DL}_4(3)$ de la fonction $x \longmapsto f(x) = \ln x$. Posons $y = x-3$, alors $y \longrightarrow 0$ lorsque $x \longrightarrow 3$ et on a :

$$\ln x = \ln(y+3) = \ln(3(1+\frac{y}{3})) = \ln 3 + \ln(1+\frac{y}{3}),$$

donc

$$\ln x = \ln 3 + \frac{y}{3} - \frac{y^2}{18} + \frac{y^3}{81} - \frac{y^4}{324} + o(y^4).$$

D'où

$$\ln x = \ln 3 + \frac{x-3}{3} - \frac{(x-3)^2}{18} + \frac{(x-3)^3}{81} - \frac{(x-3)^4}{324} + o((x-3)^4).$$

3. Calculons le $\mathrm{DL}_3(+\infty)$ de la fonction $x \longmapsto f(x) = \frac{x}{x-1}$. Posons $y = \frac{1}{x}$, alors $y \longrightarrow 0$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$ et on a :

$$f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{\frac{1}{y}}{\frac{1}{y} - 1} = \frac{1}{1-y},$$

donc

$$\frac{x}{x-1} = 1 + y + y^2 + y^3 + o(y^3).$$

D'où

$$\frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + o(\frac{1}{x^3}).$$

**Exercice 6.2.2.** *En utilisant le DL, calculer les limites suivantes :*

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\frac{3tgx-tg(3x)}{x(1-\cos(3x))}$.
2. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$.

**Solution 6.2.2.**

1. On a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{3tgx-tg(3x)}{x(1-\cos(3x))} &= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{3(x-\frac{x^3}{3}-(3x-\frac{(3x)^3}{3}+o(x^3)}{x(1-(1-\frac{(3x)^2}{2}+o(x^2))}\\ &= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{-8x^3+o(x^3)}{\frac{9}{2}x^3+o(x^3)}\\ &= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{-8+o(1)}{\frac{9}{2}+o(1)}=-\frac{16}{9}.\end{aligned}$$

2. De même, on obtient

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}=1.$$

**Définition 6.2.2** (Développement généralisé)**.** *Soit $f$ une fonction n'admet pas un DL en $x_0$, mais la fonction $x\longmapsto(x-x_0)^\alpha f(x)$ ($\alpha\in\mathbb{Q}_+^*$) admet un DL à l'ordre $n$ en $x_0$. Donc*

$$(x-x_0)^\alpha f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+...+a_n(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

*d'où*

$$f(x)=\frac{1}{(x-x_0)^\alpha}[a_0+a_1(x-x_0)+...+a_n(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)].$$

*Cette égalité s'appelle le développement généralisé de $f$.*

**Exemple 6.2.2.** *Calculons le DL généralisé de $x\longmapsto f(x)=\frac{1}{x-x^2}$ en 0 à quatre termes. On a*

$$f(x)=\frac{1}{x-x^2}=\frac{1}{x}\times\frac{1}{1-x}=\frac{1}{x}\times(1+x+x^2+x^3+x^4+o(x^3).$$

*D'où*

$$\frac{1}{x-x^2}=\frac{1}{x}+1+x+x^2+o(x^2).$$

**Exercice 6.2.3.** *Soit la fonction*

$$f:x\longmapsto f(x)=(x+1)e^{\frac{1}{x}}$$

*définie sur* $]0,+\infty[$.

1. Former un développement asymptotique de $f$ à la précision $1/x$ ou bien (à trois termes) en $+\infty$.
2. En déduire l'existence d'une droite asymptote en $+\infty$ au graphe de $f$.
3. Etudier la position relative du graphe et de son asymptote en $+\infty$.

**Solution 6.2.3.**

1. On a :
$$f(x) = (x+1)e^{\frac{1}{x}} = x + 2 + \frac{3}{2x} + o(\frac{1}{x}).$$
2. Puisque $\lim_{x \longrightarrow +\infty}(f(x) - (x+2)) = 0$, Le graphe de $f$ admet une asymptote dont l'équation est $y = x + 2$.
3. Comme $\lim_{x \longrightarrow +\infty}(f(x) - (x+2)) = 0^+$, le graphe est au dessus de l'asymptote.

# Chapitre 7

# Suites numériques

**Définition 7.0.3.** *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. On appelle suite numérique toute application d'une partie $I = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\} \subseteq \mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Généralement, on note la suite par $(u_n)_{n\in I}$, $(v_n)_{n\in I}$, $(x_n)_{n\in I}$, $(y_n)_{n\in I}$...etc. Pour une suite $(u_n)_{n\in I}$, $u_n$ est appelé terme général.*
*À partir d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut construire une autre suite, en sélectionnant sans cesse certains termes avec indice croissant de la suite, c'est-à-dire on va obtenir une nouvelle suite $(u_n)_{n\in J\subset\mathbb{N}}$ où $J$ est une partie infinie de $\mathbb{N}$. La suite $(u_n)_{n\in J\subset\mathbb{N}}$ s'appelle une sous suite extraite de $(u_n)$ qu'on peut la noter $(u_{\varphi(n)})$ ou bien $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tel que $\varphi(\mathbb{N}) = J$.*

**Exemple 7.0.3.** *$(u_n)_{n\geq 0}$ une suite définie par*

$$u_n = \frac{n+1}{n+2}$$

1. Calculons les termes $u_0$, $u_1$ et $u_2$.
   On a :
   $$u_0 = \frac{1}{2}, \quad u_1 = \frac{2}{3}, \quad u_2 = \frac{3}{4}.$$
2. Définissons les sous suites $(u_{2n})$ et $(u_{3n+1})$.
   Les sous suites $(u_{2n})$ et $(u_{3n+1})$ sont définies respectivement par $u_{2n} = \frac{2n+1}{2n+2}$ et $u_{3n+1} = \frac{3n+2}{3n+3}$.

**Définition 7.0.4.** *La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite :*

1. croissante ssi $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} \geq u_n$.
2. décroissante ssi $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} \leq u_n$.

3. constante ou stationnaire ssi $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = u_{n+1}$.
4. monotone si elle est croissante ou décroissante.
5. majorée ssi $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq M$.
6. minorée ssi $\exists m > 0, \forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq m$.
7. bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

**Exercice 7.0.4.** *Soit* $(v_n)_{n\geq 2}$ *une suite définie par* $v_n = \frac{n+2}{n-1}$.

1. Montrer que $(v_n)_{n\geq 2}$ est décroissante.
2. En déduire que $(v_n)_{n\geq 2}$ est bornée.

**Définition 7.0.5.** *Soit* $(u_n)_{n\geq 0}$ *une suite numérique. On dit que* $(u_n)_{n\geq 0}$ *converge vers* $l$ *ssi :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n [n > n_0 \Longrightarrow |u_n - l| < \epsilon]$$

*et on note* $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n = l$.
*Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente. On note aussi que si la limite d'une suite existe, alors elle est unique.*

**Exemple 7.0.4.** *Montrons que* $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n = \frac{2n+3}{n-1} = 2$. *Soit* $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 =? \in \mathbb{N}$ *tel que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}[n > n_0 \Longrightarrow |u_n - 2| < \varepsilon].$$

*On a :*

$$|u_n - 2| = |\frac{5}{n-1}|.$$

*Donc*

$$|u_n - 2| < \varepsilon \Longleftrightarrow n > \frac{5}{\varepsilon} + 1,$$

*On peut choisir* $n_0 = \max\{2, [\frac{5}{\varepsilon} + 1] + 1\}$ *pour avoir*

$$n > n_0 \Longrightarrow |u_n - 2| < \varepsilon.$$

*D'où*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} u_n = 2.$$

**Remarques 7.0.1.**

1. L'écriture condensée $|u_n - l| < \varepsilon$ signifie $l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon$.
2. $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n = 0$ signifie $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} |u_n| = 0$ et d'une manière plus générale :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} u_n = l \Longleftrightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty} |u_n - l| = 0.$$

**Théorème 7.0.4.** *Soient $u_n$ et $v_n$ deux suites convergentes vers $l$ et $l'$ respectivement. Alors*

1. $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} (u_n + v_n) = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n + \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} v_n = l + l'$ (sauf pour $l = +\infty$ et $l' = -\infty$ ou l'inverse).
2. $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} (\lambda u_n) = \lambda \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n = \lambda l \ / \ \lambda \in \mathbb{R}$.
3. $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} (u_n v_n) = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} v_n = ll'$ (sauf pour $l = 0$ et $l' = \pm\infty$ ou l'inverse).
4. $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n}{\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} v_n} = \frac{l}{l'}$ (sauf pour $l, l' = 0$ ou $l, l' = \pm\infty$).

**Proposition 7.0.1.** *Si $(u_n)$ est une suite convergente vers $l$, alors toute sous suite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers la même limite $l$.*

**Proposition 7.0.2.**

1. Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites convergentes tel que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq v_n$, alors

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} u_n \leq v_n \lim_{n\longrightarrow\infty}.$$

2. Soient $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ trois suites tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ w_n \leq u_n \leq v_n$$

et $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} v_n = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} w_n = l$. Alors $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n = l$.
3. Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites numériques tel que $(u_n)_{n\geq 0}$ est bornée et $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} v_n = 0$. Alors

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} u_n v_n = 0.$$

**Exercice 7.0.5.** *Calculer la limite de la suite $(u_n)$ ci-dessous :*

1) $u_n = \frac{n^2+3n-1}{1-n^2}$ 2) $u_n = \frac{2n^2}{n+1}$ 3) $u_n = 1 + \frac{1}{2^n}$

4) $u_n = 5^n - 3^n$ 5) $u_n = \frac{e^n+\ln n}{n^2+3^n}$ 6) $u_n = \sin n$

7) $u_n = \frac{\cos n}{n+1}$ 8) $u_n = \sin n + n$ 9) $\frac{1}{n} + (-1)^n$

10) $u_n = \sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})$ 11) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4n^2-1}$ 12) $u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+n})$.

**Solution 7.0.4.**

1. $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \frac{n^2+3n-1}{1-n^2} = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \frac{n^2}{-n^2} = -1.$
2. $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \frac{2n^2}{n+1} = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \frac{2n^2}{n} = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} 2n = +\infty.$
3. $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} (1 + \frac{1}{2^n}) = 1 + \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} (\frac{1}{2})^n = 1 + 0 = 1$, car $\frac{1}{2} \in ]-1, 1[$.
4. On a : $5^n - 3^n \sim_\infty 5^n$ car $3^n = o(5^n)$ en $\infty$, donc $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} (5^n - 3^n) = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} 5^n = +\infty$ car $5 > 1$.
5. On a : $\frac{e^n+\ln n}{n^2+3^n} \sim_\infty (\frac{e}{3})^n$, donc $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \frac{e^n+\ln n}{n^2+3^n} = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} (\frac{e}{3})^n = 0.$
6. Il est clair que $\sin(\pm\infty)$ n'a pas de sens. Dans ce cas on suppose que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \sin n = l$ qui est finie car la fonction *sin* est bornée. On a
$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \sin(n+2) - \sin n = l - l = 0 = 2\sin 1 \cos(n+1) \Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty} \cos n = 0.$$
De même
$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \cos(n+2) - \cos n = l - l = 0 = -2\sin 1 \sin(n+1) \Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty} \sin n = 0,$$
ce qui impossible car $\sin^2 n + \cos^2 n = 1$. D'où la limite $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \sin n$ n'existe pas et ainsi pour $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \cos n$.
7. $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \frac{\cos n}{n+1} = 0$ car la suite $(\cos n)$ est bornée $(|\cos n| \leq 1)$ et $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.
8. On a :
$$-1 \leq \sin n \leq 1 \Longrightarrow -1 + n \leq \sin n + n \leq 1 + n.$$
Puisque $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} (-1+n) = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} (1+n) = +\infty$, alors d'après le théorème d'encadrement, on obtient
$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \sin n + n = +\infty.$$

9. On a :
$$\lim_{n\longrightarrow\infty} u_{2n} = \lim_{n\longrightarrow\infty} (\frac{1}{n}+1) = 1$$
et
$$\lim_{n\longrightarrow\infty} u_{2n+1} = \lim_{n\longrightarrow\infty} (\frac{1}{n}-1) = -1.$$
Donc $(u_n)$ n'a pas de limite.

10. On a :
$$u_n = (1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+...+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})+...+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}) = 1-\frac{1}{n+1},$$
donc
$$\lim_{n\longrightarrow\infty} u_n = \lim_{n\longrightarrow\infty} (1-\frac{1}{n+1}) = 1.$$

11. On a :
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4n^2-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1}),$$
donc
$$\lim_{n\longrightarrow\infty} u_n = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{2}.$$

12. On a :
$$\begin{aligned} u_n &= \sin(\pi\sqrt{n^2+n}) = \sin(n\pi(1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{2}} \\ &= \sin(n\pi(1+\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n}))) \\ &= \sin(n\pi+\frac{\pi}{2}+o(1)) \\ &= \sin(n\pi)\cos(\frac{\pi}{2}+o(1))+\cos(n\pi)\sin(\frac{\pi}{2}+o(1)) \\ &= (-1)^n\sin(\frac{\pi}{2}+o(1)). \end{aligned}$$
De plus
$$\lim_{n\longrightarrow\infty} u_{2n} = 1 \neq \lim_{n\longrightarrow\infty} u_{2n+1} = -1.$$
D'où la limite de $u_n$ n'existe pas.

**Définition 7.0.6.** ***(Suite de Cauchy)*** *On dit qu'une suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy si*
$$\lim_{n\longrightarrow\infty} |u_{n+p}-u_n| = 0, \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$
*De plus toute suite de Cauchy de nombres réels est convergente et aussi toute suite numérique convergente est de Cauchy.*

**Exercice 7.0.6.** *Soit* $(u_n)_{n\geq 1}$ *définie par*

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} ... + \frac{1}{n}.$$

*Montrer que* $(u_n)$ *est divergente.*

**Solution 7.0.5.** *Montrons que* $(u_n)$ *n'est pas de Cauchy. Pour* $p = n$*, on obtient*

$$\begin{aligned}
|u_{2n} - u_n| &= |(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} ... + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n}) - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n})| \\
&= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} \\
&\geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + ... + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

*i.e.* $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} |u_{2n} - u_n| \neq 0$*. Donc* $(u_n)_{n\geq 1}$ *n'est pas de Cauchy ce qui implique qu'elle n'est pas convergente.*

**Théorème 7.0.5.** *Soit* $(u_n)_{n\geq 0}$ *une suite numérique. On a*

1. Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante et majorée, alors elle est convergente.
2. Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et minorée, alors elle est convergente.

**Définition 7.0.7.** ***(Suites adjacentes)*** *Soient* $(a_n)$ *et* $(b_n)$ *deux suites numériques tel que :*

*1.* $(a_n)$ *est croissante et* $(b_n)$ *est décroissante.*

*2.* $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} (a_n - b_n) = 0.$

*Tout couple de suites numériques* $(a_n)$ *et* $(b_n)$ *vérifiant ces deux conditions précédentes est appelé couple de suites adjacentes.*

**Théorème 7.0.6.** *Si* $(a_n)$ *et* $(b_n)$ *sont deux suites adjacentes, alors elles sont convergentes et possèdent une limite commune.*

*Démonstration.* La suite $(b_n - a_n)$ est décroissante car

$$(b_{n+1} - a_{n+1}) - (b_n - a_n) = (b_{n+1} - b_n) + (a_n - a_{n+1}) \leq 0,$$

par conséquent la suite $(b_n - a_n)$ est minorée par 0, i.e. $a_n \leq b_n$.
Donc

$$a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq ... \leq b_2 \leq b_1,$$

il résulte que $(a_n)$ et $(b_n)$ sont convergente vers $l$ et $l'$ respectivement car $(a_n)$ est croissante et majorée par $b_1$, de plus $(b_n)$ est décroissante est minorée par $a_1$.
Comme $\lim(a_n - b_n) = 0 = l - l'$, alors $l = l'$. $\square$

**Théorème 7.0.7.** *Soit $I$ un intervalle. $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in$ ou $x_0 = \pm\infty$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} = l$.
2. *Si pour tout suite $(x_n) \subset I$ tel que $x_n \neq x_0$ et $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x_n = x_0$, alors $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} f(x_n) = l$.*

Le théorème précédent est utile pour montrer qu'une fonction n'a pas de limite en $x_0$. En voici un exemple :

**Exemple 7.0.5.** *Montrons que $\lim\limits_{n \longrightarrow 0^+} \sin(\frac{1}{x})$ n'existe pas. En prenant les deux suites définies par $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, on obtient $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x_n = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} y_n = 0^+$. De plus*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \sin(\frac{1}{x_n}) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sin(2n\pi) = 0,$$

*et*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \sin(\frac{1}{y_n}) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1.$$

*Les deux limites sont différentes, donc $\lim\limits_{n \longrightarrow 0^+} \sin(\frac{1}{x})$ n'existe pas.*

## 7.1 Suites récurrentes

**Définition 7.1.1.** *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $u_0 \in I$ (On supposera que $f(I) \subset I$). On appelle suite récurrente une suite définie par :*

$$\begin{cases} u_0 \quad connu \\ u_{n+1} = f(u_n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

*de plus, si $f$ est croissante sur $I$, alors :*

1. $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante si $u_1 \geq u_0$.
2. $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante si $u_1 \leq u_0$.

**Exemples 7.1.1.**

1. La suite définie par
$$\begin{cases} u_0 \quad connu \\ u_{n+1} = u_n + r \quad \text{tel que } r \in \mathbb{R} \end{cases}$$
est appelé suite arithmétique. $r$ est appelé raison de la suite. On peut exprimer le terme général par $u_n = u_0 + nr$ et on peut généraliser $u_n = u_p + (n-p)r$ tel que $n, p \in \mathbb{N}$. Pour la somme la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique est donnée par
$$S = u_p + u_{p+1} + ...... + u_m = \frac{m-p+1}{2}(u_p + u_m).$$
2. La suite définie par
$$\begin{cases} v_0 \quad connu \\ v_{n+1} = qu_n \quad \text{tel que } q \in \mathbb{R} \end{cases}$$
est appelée suite géométrique. $q$ est appelé raison de la suite. On peut exprimer le terme général par $v_n = v_0 q^n$ et on peut généraliser $v_n = u_p \times q^{(n-p)}$ tel que $n, p \in \mathbb{N}$. Pour la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique est donnée par
$$S = v_p + v_{p+1} + ...... + v_m = v_p \times \frac{1 - q^{m-p+1}}{1-q}$$

**Exercice 7.1.1.** *Soit la suite $(u_n)_n$ une suite définie par :*
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 5 - \frac{4}{u_n}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 < u_n < 4$.
2. Monter que $(u_n)_n$ converge et trouver sa limite.
3. Donner $\sup E$ et $\inf E$ où $E = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$.

**Solution 7.1.1.**

1. Utilisons le raisonnement par récurrence. On a $1 < u_0 = 2 < 4$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$. Supposons $1 < u_n < 4$ et montrons $1 < u_{n+1} < 4$ pour $n \geq 0$. En effet
$$\begin{aligned} 1 < u_n < 4 &\Longrightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{u_n} < 1 \\ &\Longrightarrow -4 < -\frac{4}{u_n} < -1 \\ &\Longrightarrow 1 < u_{n+1} = 5 - \frac{4}{u_n} < 4. \end{aligned}$$

On peut utiliser une autre méthode. Soit la fonction $x \longmapsto f(x) = 5 - \frac{4}{x}$ tel que $x \in ]1;4[$. On trouve $f$ croissante et $f(]1;4[) = ]1;4[$ et comme $u_0 = 2 \in ]1;4[$, alors $u_n \in ]1;4[$ pour tout $n \geq 0$.

2. Puisque $f$ est croissante et $u_1 = 3 > u_0 = 2$, alors $(u_n)_n$ est croissante.
3. Puisque la suite $(u_n)_n$ est croissante et majorée par 4, alors elle converge. Soit $l$ la limite de $(u_n)_n$. Donc $l$ vérifie l'équation

$$l = 5 - \frac{4}{l} \Longleftrightarrow l = 1 \quad ou \quad l = 4$$

et comme $(u_n)_n$ est croissante et $u_n > 1$, alors $l = 4$.

4. Puisque $(u_n)_n$ est croissante et est convergente vers $l$, alors

$$\inf E = u_0 = 2 \quad et \quad \sup E = l = 4.$$

**Exercice 7.1.2.** *Soit le nombre réel* $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$*(appelé le nombre d'or).*

1. Vérifier que : $\phi^2 = \phi + 1$ et $\frac{1}{2-\phi^2} = -\phi$.
2. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite numérique définie par

$$u_{n+1} = \frac{1}{u_n} + 1 \quad \text{avec } u_1 > 0.$$

3. On suppose que $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente, dans ce cas donner sa limite.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

**Solution 7.1.2.**

1. Faites le !
2. Soit $l$ la limite de $(u_n)_{n\geq 1}$, donc elle vérifie l'équation suivante :

$$l = \frac{1}{l} + 1 \Longleftrightarrow l^2 - l - 1 = 0,$$

cette équation posséde deux solutions $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $l = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, et puisque $u_n > 1$ pour $n \geq 2$, alors $l = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

3. On a :

$$\begin{aligned}
|u_{n+1}-\phi| =& |\frac{1}{u_n}+1-\phi| \\
=& |\frac{1}{u_n}+2-\phi^2| \quad \text{(d'après la question 1)}, \\
=& \frac{\phi^2-2}{u_n}|u_n+\frac{1}{2-\phi^2}| \\
<& (\phi^2-2)|u_n-\phi| \quad \left(\text{car } \frac{1}{u_n}<1,\ \forall n\geq 1\right),
\end{aligned}$$

et par récurrence, on obtient

$$|u_{n+1}-\phi| < (\phi^2-2)^n|u_1-\phi|.$$

4. Comme $0<\phi^2-2<1$, alors $|u_{n+1}-\phi| \longrightarrow 0$ lorsque $n\longrightarrow\infty$.
D'où

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} u_n = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

# Bibliographie

[1] K. Allab, *Eléments d'Analyse, fonctions d'une variable réelle (Tome 1)*. Seconde édition, O.P.U. Alger, 2007.

[2] K. Allab, *Eléments d'Analyse, fonctions d'une variable réelle (Tome 2)*. Seconde édition, O.P.U. Alger, 2007.

[3] F. Ayres, E. Mendelson, *Analyse*. Edition Dunod. Paris, 2011.

[4] C. Baba Hamed, K. Benhabib, *Analyse II, Rappels de cours et exercices corrigés*. Troisième édition, O.P.U. Alger, 2011.

[5] Khélifa ZIZI, *Fonctions d'une variable réelle* Imprimie en Algérie Novembre 2010. ISBN :978-9947-0-2881-0.

[6] E. Azoulay, J. Avignant, G. Aulac, Problèmes Corrigés de Mathématiques, DEUG MIAS/SM, Ediscience (Dunod pour la nouvelle édition) Paris 2002.

[7] E. Azoulay, J. Avignant, G. Aulac, Les mathématiques en licence, 1ère année. Tome 1 :Cours+exos, MIAS.MASS.SM, Ediscience (Dunod pour la nouvelle édition) Paris 2003.

[8] E. Azoulay, J. Avignant, G. Aulac, Les mathématiques en licence, 1ère année. Tome 2 :Cours+exos, MIAS.MASS.SM, Ediscience (Dunod pour la nouvelle édition) Paris 2003.

[9] F. Liret, D. Martinais, *Analyse première année, cours et exercices avec solutions*. Seconde édition, Dunod. Paris, 2007.

[10] M. Mehbali, *Mathématiques 1, fonction d'une variable réelle*. Troisième édition, O.P.U. Alger, 2009.

[11] M. H. Mortad, *Exercices corrigés d'analyse, prmière année LMD*. Seconde édition, édition Houma. Alger, 2009.

[12] N. Piscounov, *Calcul différentiel et intégral, Tome 1*. Editions Mir, Moscou, 1980.

[13] A. Rauzy, *Mathématiques, cours d'analyse*. Edition Eska. Paris, 2004.

[14] Frabcois Liret, Charlotte Scribot, *mini manuel d'analyse cours et exercices corrigés*. Dunod, Paris2 2010 ISBN 978-2-10054563-6.

[15] Wieslawa J. Kaczor, Maria T. Nowak, *PROBLEME D'ANALYSE I Nombres réels, suites et séries*. BP 112 91944 Les Ulis Cedex A, France.

[16] Wieslawa J. Kaczor, Maria T. Nowak, *PROBLEMES D'ANALYSE II Continuité et dérivabilité*. BP 112 91944 Les Ulis Cedex A, France.