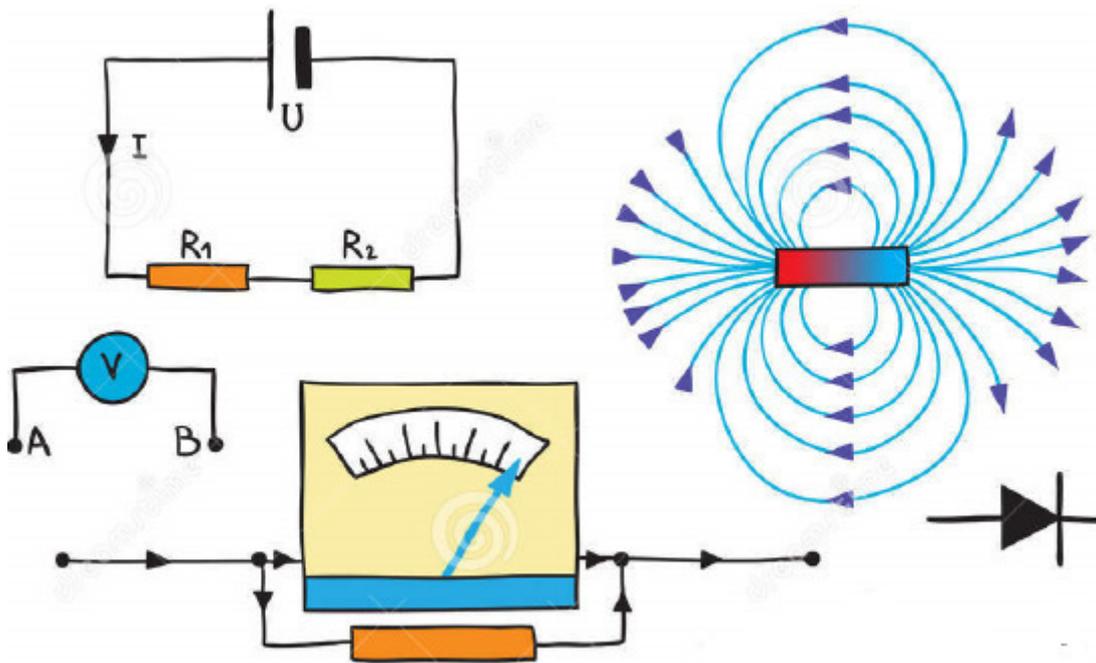


REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
École Nationale Polytechnique d'Oran (MA)



Département de Physique-Chimie

POLYCOPIE DE COURS PHYSIQUE 2 : Electricité et Magnétisme



Elaboré par :

M. Walid ADLI Maître de Conférences B

Année Universitaire : 2016/2017

## PREFACE

Cet ouvrage de physique 2 : Electricité et Magnétisme, de par son contenu et sa présentation, s'adresse essentiellement aux élèves des classes préparatoires, ainsi aux étudiants qui préparent, dans le cadre de la réforme LMD, une licence dans les domaines des « Sciences de la Matière » et des « Sciences et Technologies ».

Conformément au programme en vigueur, le cours est articulé en trois parties visant l'étude de l'électrostatique, l'électrocinétique des régimes continus et la magnétostatique. Afin d'assurer une bonne compréhension du cours il m'a semblé nécessaire de consacrer le premier chapitre à l'analyse vectorielle pour introduire les opérateurs utilisés classiquement en Electrostatique et Magnétostatique.

L'électrostatique est étudiée dans le second et troisième chapitre. Les phénomènes électrostatiques sont introduits à partir de la loi de Coulomb et du principe de superposition. Le théorème de Gauss est démontré en calculant la divergence du champ électrostatique défini à partir de la loi de Coulomb.

La deuxième et la troisième partie, qui sont exposées aux chapitres IV et V, portent sur l'électrocinétique des courants continus et la magnétostatique. L'établissement des équations de la théorie électromagnétique, a été obtenu dans le cas particulier des états stationnaires. Il est important de noter que l'analyse des phénomènes dépendant du temps fera l'objet du module Physique 6 : Electromagnétisme.

Au terme de chaque chapitre, des exercices résolus, testés dans le cadre de l'enseignement, ayant fait l'objet de devoirs à rédiger à la maison ou bien de contrôles de connaissances, sont proposés pour permettre à l'étudiant de vérifier s'il a bien assimilé le cours.

Que les collègues qui voudront bien continuer à me faire part de leurs suggestions trouvent ici, par avance, l'expression de ma gratitude.

ADLI Walid

# Table des matières

## CHAPITRE I : ELEMENTS D'ANALYSE VECTORIELLE

I.1 Champ scalaire-Champ vectoriel	7
I.2 Les opérateurs vectoriels	8
I.2.1 Définition	8
I.2.2 Le gradient	8
I.2.3 La divergence	9
I.2.3.1 Théorème de Green-Ostrogradsky	10
I.2.4 Le rotationnel	10
I.2.4.1 Théorème de Stokes	11
I.2.5 Le laplacien	12
I.2.5.1 Le laplacien scalaire	12
I.2.5.2 Le laplacien vectoriel	12

## CHAPITRE II : CHAMP ET POTENTIEL ELECTROSTATIQUE

II.1 La charge électrique	16
II.1.1 Approche historique	16
II.1.2 Propriétés de la charge électrique	17
II.2 La loi de Coulomb	18
II.3 Champ et potentiel électrique	19
II.3.1 Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle	19
II.3.2 Principe de superposition (distribution discontinue de charge)	20
II.3.3 Principe de superposition (distribution continue de charge)	22

II.3.3.1	Champ électrique créé par une distribution linéique de charges	22
II.3.3.2	Champ électrique créé par une distribution surfacique de charges	25
II.3.3.3	Champ électrique créé par une distribution volumique de charges	27
II.3.4	Le potentiel électrostatique	27
II.3.5	Topographie du champ	30
II.3.5.1	Ligne de champ	30
II.3.5.2	Tube de champ	31
II.3.6	Topographie du potentiel électrostatique	31
II.3.6.1	Surfaces équipotentiellles d'une distribution	31
II.3.7	Le dipôle électrostatique	32
II.3.7.1	Potentiel et champ créés par un dipôle source	33
II.3.7.1.1	Approximation dipolaire	33
II.3.7.1.2	Potentiel du dipôle	34
II.3.7.1.3	Champ du dipôle	35
II.3.7.2	Action d'un champ extérieur sur un dipôle	36
II.3.7.3	Energie potentiel d'un dipôle dans un champ extérieur	37
II.3.8	Théorème de Gauss	38

## CHAPITRE III : LES CONDUCTEURS

III.1	Définition d'un conducteur	44
III.2	Propriétés des conducteurs à l'équilibre	44
III.2.1	Distribution de charges dans un conducteur	45
III.2.2	Lignes de champ	45
III.2.3	Champ électrique au voisinage d'un conducteur	46

III.2.4	Pression électrostatique	47
III.2.5	Capacité d'un conducteur isolé	48
III.3	Phénomènes d'influence	49
III.3.1	Théorème des éléments correspondants	49
III.3.2	Influence partielle	50
III.3.3	Influence totale	51
III.4	Les condensateurs	52
III.4.1	Définition d'un condensateur	52
III.4.2	Capacité d'un condensateur	52
III.4.2.1	Capacités de quelques condensateurs simples	52
III.4.3	Associations de condensateurs	58
III.4.3.1	Association en série	58
III.4.3.2	Association en parallèle	59
III.4.4	Energie associée à un condensateur	59
<b>CHAPITRE IV : COURANT ELECTRIQUE</b>		
IV.1	Courants électriques	61
IV.1.1	Origine du courant électrique	61
IV.1.2	Courant permanent	62
IV.1.3	Intensité du courant	62
IV.1.4	Vecteur densité de courant	63
IV.1.5	Lignes et tube de courant	64
IV.2	Conductivité électrique : loi d'Ohm locale	64
IV.2.1	La mobilité des porteurs	65
IV.2.2	Résistivité électrique	65

IV.3 Résistance électrique : loi d'Ohm macroscopique	66
IV.4 Association de résistances	68
IV.4.1 Résistances en série	68
IV.4.2 Résistances en parallèle	68
IV.5 L'effet Joule	69
IV.6 Rôle du générateur : force électromotrice	70
IV.6.1 Générateur de tension idéal	71
IV.6.2 Générateur de tension réel	71
IV.6.3 Récepteur	71
IV.7 Les lois de Kirchhoff	72
<b>CHAPITRE V : MAGNETOSTATIQUE</b>	
V.1 Introduction	74
V.2 Loi de Lorentz	75
V.3 Loi de Laplace	76
V.4 Expressions du champ magnétique	77
V.4.1 Champ magnétique créé par une charge en mouvement	77
V.4.2 Champ magnétique créé par un ensemble de charges en mouvement	77
V.4.3 Champ créé par un circuit électrique (formule de Biot et Savart)	78
V.5 Interaction entre deux fils électriques	81
V.6 Flux du champ magnétique	82
V.6.1 Conservation du flux magnétique	82
V.7 Circulation du champ magnétique	84
V.7.1 Circulation du champ sur un contour enlaçant le fil	85

V.7.2 Circulation du champ sur un contour n'enlaçant pas le fil	85
V.8 Théorème d'Ampère	85
V.8.1 Rotationnel du champ magnétostatique	88
V.9 Induction électromagnétique	88
V.9.1 Loi de Lenz	88
V.9.2 Loi de Faraday	89
BIBLIOGRAPHIE	90

# Chapitre I

## ELEMENTS D'ANALYSE VECTORIELLE

L'analyse vectorielle fait intervenir à la fois des outils analytiques (dérivées partielles) et du calcul vectoriel. Les notions de base de l'analyse vectorielle sont indispensables en électrostatique et en électromagnétisme notamment. Ce cours a comme objectifs :

- Connaître les opérateurs de l'analyse vectorielle (nabla, gradient, divergence Rotationnel et laplacien) et savoir démontrer leurs propriétés.
- Connaître la définition du flux d'un champ de vecteurs à travers une surface orientée.
- Savoir ce qu'est un champ à flux conservatif.
- Connaître les théorèmes de Stokes et d'Ostrogradski.

### I.1 Champ scalaire-Champ vectoriel :

**I.1.1 Définition :** soit une grandeur physique  $U$ , dépendant de  $N$  paramètres :  $x_1, x_2, \dots, x_N$  ; on notera alors :

$$U = U(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

Si  $U$  est une grandeur scalaire (un nombre) on parlera alors d'un **champ scalaire**.

#### Exemple de champs scalaires

- Si  $P(z)$  est la pression atmosphérique en fonction de l'altitude  $z$ , on pourra alors parler de champ de pression.
- Si  $U(r)$  est le **potentiel gravitationnel** en fonction de la distance  $r$ , on aura un champ de potentiel gravitationnel.

**I.1.2 Définition :** un champ de vecteurs est un vecteur dont les trois coordonnées (pour un espace à 3 dimensions) sont des champs scalaires.

## Exemple de champ de vecteurs

Dans une rivière d'axe  $Ox$ , la vitesse d'écoulement  $\vec{V}$  de l'eau peut s'écrire :

$$\vec{V} = V_x(x, y, z) \vec{u}_x + V_y(x, y, z) \vec{u}_y + V_z(x, y, z) \vec{u}_z$$

L'eau peut s'écouler à une vitesse différente suivant la profondeur représentée par  $z$ , ou suivant la distance à l'axe paramétrée par  $y$ . On notera que l'eau ne s'écoulant pas toujours parallèlement à l'axe  $Ox$ ,  $V_y$  et  $V_z$  ne sont pas forcément nulles.  $\vec{V}$  est un bon exemple de champ de vecteurs.

## I.2 Les opérateurs vectoriels

**1.2.1 Définition :** On appelle opérateur une application linéaire agissant sur un champ scalaire ou sur un champ de vecteurs. Un opérateur particulier est l'opérateur nabla, un vecteur noté  $\vec{\nabla}$  et défini en coordonnées cartésiennes par :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z \quad (I.1)$$

### 1.2.2 Le gradient

L'opérateur gradient est un opérateur différentiel qui s'applique à un champ scalaire  $f(x, y, z)$  et le transforme en un champ vectoriel. On définit le gradient de  $f$  par :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z \quad (I.2)$$

L'expression du gradient dans le système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  est

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z \quad (I.3)$$

alors que dans le système de coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  on obtient

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi \quad (I.4)$$

### Propriétés :

- L'opérateur gradient est un opérateur linéaire et vérifie donc

$$\vec{\nabla}(\alpha f + \beta g) = \alpha \vec{\nabla} f + \beta \vec{\nabla} g \text{ avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

- Le gradient d'un produit de champs scalaires vaut

$$\vec{\nabla}(fg) = g\vec{\nabla}f + f\vec{\nabla}g$$

où  $f$  et  $g$  sont deux fonctions de l'espace.

### Lien avec la différentielle

On peut définir le gradient à partir de sa relation avec la différentielle. Soit  $M$  un point de l'espace et  $M'$  un point infiniment voisin, la différentielle  $df$  représente la variation du champ scalaire  $f$  lorsque l'on se déplace de  $M$  à  $M'$  :

$$df = f(M') - f(M) = \vec{\nabla}f \cdot d\vec{l} \text{ avec } d\vec{l} = \overrightarrow{dMM'}$$

En conséquence,

- Le vecteur  $\vec{\nabla}f$  est normal en chaque point à la surface  $f = \text{constante}$  passant par ce point.
- Le vecteur gradient est orienté vers les valeurs croissantes de  $f$  et sa norme mesure le taux de variation spatiale dans la direction de plus grande pente

$$\|\vec{\nabla}f\| = \frac{df}{dl}$$

### 1.2.3 La divergence

L'opérateur divergence est un opérateur différentiel qui s'applique à un champ vectoriel  $\vec{A}(x, y, z)$  et le transforme en un champ scalaire. Il se note  $\text{div} \vec{A}$  ou  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ .

Cette notation permet de retenir l'expression de la divergence en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{A}(x, y, z) &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z \right) \cdot (A_x \vec{u}_x + A_y \vec{u}_y + A_z \vec{u}_z) \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (I.5)$$

L'expression de cet opérateur en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  devient :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial r A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (I.6)$$

De même dans le système de coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$ , on obtient :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 A_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta \sin \theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \quad (I.7)$$

### Propriétés :

- L'opérateur divergence est un opérateur linéaire et vérifie donc

$$\operatorname{div}(\alpha \vec{A} + \beta \vec{B}) = \alpha \operatorname{div} \vec{A} + \beta \operatorname{div} \vec{B} \text{ avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

- La divergence d'un produit vaut

$$\operatorname{div}(f \vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot (f \vec{A}) = f \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{\nabla} f = f \operatorname{div} \vec{A} + \vec{A} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} f$$

#### 1.2.3.1 Théorème de Green-Ostrogradsky (ou théorème de la divergence)

Le flux d'un champ vectoriel  $\vec{A}$  à travers une surface ( $S$ ) est défini par :

$$\phi(\vec{A}) = \iint \vec{A} \cdot \vec{dS}$$

Si ( $S$ ) est surface fermée quelconque limitant le volume ( $V$ ), Le flux du vecteur  $\vec{A}$  à travers cette surface est égal à l'intégrale triple de sa divergence étendue au volume intérieur de ( $S$ )

$$\oiint_S \vec{A} \cdot \vec{dS} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{A} dV \quad (I.8)$$

Un champ vectoriel est à flux conservatif si le flux est nul à travers une surface fermée quelconque ( $S$ ) :

$$\oiint_S \vec{A} \cdot \vec{dS} = 0$$

La condition nécessaire et suffisante est :

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0 \text{ en tout point}$$

#### 1.2.4 Le rotationnel

Soit  $\vec{A}$  un champ de vecteur, le rotationnel de  $\vec{A}$  est aussi un champ de vecteur que l'on note  $\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A}$  ou parfois  $\vec{\nabla} \times \vec{A}$  (ou  $\overrightarrow{\operatorname{curl}} \vec{A}$  dans la littérature anglo-saxonne) et qui peut être défini en coordonnées cartésiennes par :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z \quad (I.9)$$

L'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques ( $r, \theta, z$ ) est plus complexe

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z \quad (I.10)$$

De même, en coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$ , le rotationnel s'exprime

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial \sin \theta A_\varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{u}_r + \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial r A_\varphi}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_\varphi \quad (I.11)$$

### Propriétés :

Citons quelques propriétés utiles :

- L'opérateur rotationnel étant linéaire, on a

$$\overrightarrow{\text{rot}} (\alpha \vec{A} + \beta \vec{B}) = \alpha \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} + \beta \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \text{ avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

- Le rotationnel d'un gradient est nul.

$$\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{grad}} f) = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = \vec{0}$$

- La divergence d'un rotationnel est nulle.

$$\text{div} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

- Rotationnel d'un produit

$$\overrightarrow{\text{rot}} (f \vec{A}) = \vec{\nabla} \times f \vec{A} = f \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} f \times \vec{A} = f \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}} f \times \vec{A}$$

#### 1.2.4.1 Le théorème de Stokes

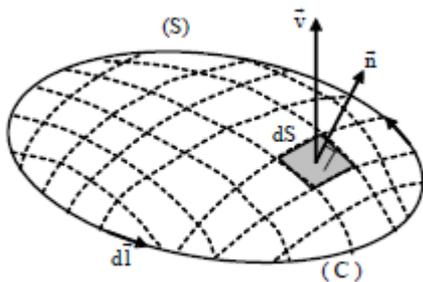
On définit d'abord la circulation d'un vecteur  $\vec{v}$  le long d'un contour (C), par l'intégrale curviligne :

$$C_{AB}(\vec{v}) = \int_A^B \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

La circulation le long d'un contour fermé est notée :

$$C(\vec{v}) = \oint \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

Le théorème de Stokes permet d'écrire :



$$\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (I.12)$$

Où (S) est une surface quelconque s'appuyant sur (C),  $d\vec{S}$  est dirigé à partir du sens de parcours de (C) et de la règle du tire-bouchon (figure I.1)

Figure I.1

Il est important de noter que les signes intégraux apparaissant avec un rond au milieu (équations I.8 et I.12) signifient que le contour ou les zones d'intégrations sont fermées sur elles-mêmes (la surface d'une sphère, le périmètre d'un cercle, etc. ...).

## 1.2.5 Le laplacien

### 1.2.5.1 Le laplacien scalaire

L'opérateur laplacien scalaire est un opérateur différentiel d'ordre deux qui transforme un champ scalaire en un autre champ scalaire. Le laplacien scalaire s'obtient en prenant la divergence du gradient et se note  $\Delta f$ . L'expression de cet opérateur dans les différents systèmes de coordonnées est

$$\begin{aligned}\Delta f = \vec{\nabla}^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (\text{cartésien}) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (\text{cylindrique}) \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \quad (\text{sphérique})\end{aligned} \quad (I.13)$$

### 1.2.5.2 Le laplacien vectoriel

Le laplacien s'applique également à un champ vectoriel. Dans ce cas il renvoie un champ vectoriel et se note  $\Delta \vec{A}$ . Par définition, le laplacien vectoriel s'obtient à l'aide de l'identité

$$\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A} \quad (I.14)$$

### Exercice d'application 1

Soit  $f$  un champ scalaire et soient  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  et  $\vec{C}$  des champs vectoriels.

On demande de vérifier les relations suivantes :

1.  $\text{div} (f\vec{A}) = f \text{div} \vec{A} + \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f$
2.  $\overrightarrow{\text{rot}} (f\vec{A}) = f \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}} f \times \vec{A}$
3.  $\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$
4.  $\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{grad}} f) = \vec{0}$  et  $\text{div} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = 0$
5.  $\text{div} (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} - \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}$

## Solution

1.

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(f\vec{A}) &= \frac{\partial(fA_x)}{\partial x} + \frac{\partial(fA_y)}{\partial y} + \frac{\partial(fA_z)}{\partial z} \\
 &= f \left[ \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right] + A_x \frac{\partial f}{\partial x} + A_y \frac{\partial f}{\partial y} + A_z \frac{\partial f}{\partial z} \\
 &= f \operatorname{div} \vec{A} + \vec{A} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} f
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 [\overrightarrow{\operatorname{rot}}(f\vec{A})]_x &= \left( \frac{\partial f A_z}{\partial y} - \frac{\partial f A_y}{\partial z} \right) = f \left[ \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right] + A_z \frac{\partial f}{\partial y} - A_y \frac{\partial f}{\partial z} \\
 &= f (\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A})_x + [\overrightarrow{\operatorname{grad}} f \times \vec{A}]_x
 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
 [\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A})]_x &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right] - \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] A_x \\
 &= [\overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div} \vec{A})]_x - [\Delta \vec{A}]_x
 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f) &= \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \right] \vec{u}_x + \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) \right] \vec{u}_y \\
 &\quad + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \right] \vec{u}_z \\
 &= \vec{0}
 \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

6.

$$\operatorname{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \frac{\partial}{\partial x} (A_y B_z - A_z B_y) + \frac{\partial}{\partial y} (A_z B_x - A_x B_z) + \frac{\partial}{\partial z} (A_x B_y - A_y B_x)$$

$$\begin{aligned}
&= B_x \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + B_y \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + B_z \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \\
&\quad - A_x \left( \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) - A_y \left( \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) - A_z \left( \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \\
&= \vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} - \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}
\end{aligned}$$

### Exercice d'application 2

1. Calculer :  $\overrightarrow{\text{grad}}(r)$  et  $\overrightarrow{\text{grad}}(1/r)$ .
2. Si  $U(r)$  est un champ scalaire à symétrie sphérique, montrer que  $\overrightarrow{\text{grad}}U(r)$  est un vecteur radial.
3. Calculer  $\text{div}(\vec{r})$  et en déduire que pour un champ vectoriel :  
 $\vec{E} = k \vec{r}/r^3$  on a  $\text{div}\vec{E} = 0$
4. Montrer que:  $\Delta(1/r) = 0$  ( $r \neq 0$ )
5. Calculer :  $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{r})$  et  $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)$  et en déduire que le champ de vecteur  $\vec{E}$  est un champ de gradient.

### Solution

1.

$$\begin{aligned}
[\overrightarrow{\text{grad}}(r)]_x &= \frac{\partial}{\partial x} [(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}] = \frac{x}{r} \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}(r) = \frac{\vec{r}}{r} \\
\left[\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\right)\right]_x &= \frac{\partial}{\partial x} [(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}] = -\frac{x}{r^3} \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}
\end{aligned}$$

2.

$$[\overrightarrow{\text{grad}}U(r)]_x = \frac{\partial U(r)}{\partial x} = \frac{dU(r)}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}U(r) = \frac{\vec{r}}{r} \frac{dU(r)}{dr}$$

3.

$$\begin{aligned}
\text{div}(\vec{r}) &= 3 \\
\text{div}\left(k \frac{\vec{r}}{r^3}\right) &= \frac{k}{r^3} \text{div}(\vec{r}) + \vec{r} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{k}{r^3}\right) = \frac{3k}{r^3} + \vec{r} \cdot \left(-3 \frac{k}{r^4}\right) \frac{\vec{r}}{r} = 0
\end{aligned}$$

4.

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = \text{div}\left[\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\right)\right] = \text{div}\left(-\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = 0$$

5.

$$\overrightarrow{rot}(\vec{r}) = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{rot}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \frac{\overrightarrow{rot}(\vec{r})}{r^3} + \overrightarrow{grad}\left(\frac{1}{r^3}\right) \times \vec{r} = \vec{0}$$

$$\vec{E} = k \frac{\vec{r}}{r^3} \Rightarrow \overrightarrow{rot}(\vec{E}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} = -\overrightarrow{grad} V$$

# Chapitre III

## CHAMP ET POTENTIEL ELECTROSTATIQUE

### Objectifs

- Introduire les notions de charge électrique et de densité de charges.
- Enoncer la loi de coulomb et introduire le concept de champ électrique.
- Enoncer les lois fondamentales que suit le champ électrique, introduire le potentiel électrique et approfondir les méthodes de calcul du champ électrique.

### II.1 La charge électrique

#### II.1.1 Approche historique

Les premières observations de phénomènes électriques et magnétiques datent de l'Antiquité. Vers 600 avant J.C., Thalès de Milet avait en effet remarqué qu'un morceau d'ambre minérale (résine fossilisée) attirait la paille ou des plumes après avoir été frotté contre de la laine ou de la fourrure. Au I<sup>er</sup> siècle avant J.C., le poète Lucrèce (98-55 av. J.C) décrivait dans ses œuvres la puissance mystérieuse des pierres d'aimant que l'on trouvait dans une région d'Asie Mineure appelée Magnésie. Ces aimants naturels avaient des propriétés différentes de celles de l'ambre, puisqu'ils n'attiraient que les objets en fer, et ce sans devoir être frottés. Vers le XI<sup>e</sup> siècle, les marins chinois et arabes utilisaient des aimants flottants en guise de boussole pour s'orienter.

En 1600, William Gilbert, fit paraître un ouvrage intitulé *De Magnete* consacré aux aimants et à l'électrisation. Gilbert montra que les effets électriques n'étaient pas particuliers à l'ambre et que bien d'autres substances pouvaient s'électrifier par frottement.

Le XVII<sup>e</sup> et le début XVIII<sup>e</sup> siècle voient apparaître les premières machines électriques qui vont permettre des électrisations quantitativement plus importantes. Ces machines fonctionnent toutes par frottement d'un matériau sur un autre. Par la suite, d'autres machines électriques capables de produire de fortes et parfois dangereuses étincelles furent utilisées comme source de divertissement.

Presque tous les phénomènes physiques que nous observons, comme les réactions chimiques, les propriétés de la matière ou la transmission des signaux par les fibres nerveuses, sont de nature électrique. La conception et le fonctionnement des moteurs, des ordinateurs ou des machines à rayon X reposent sur l'interaction entre des charges électriques. La charge est une propriété de la matière qui lui fait produire et subir des effets électriques et magnétiques. L'étude des effets électriques créés par des charges au repos est ce que l'on appelle l'**électrostatique**. Le mouvement des charges fait surgir des effets magnétiques combinés aux effets électriques. Les deux effets étant reliés, on parle d'**électromagnétisme** pour décrire l'ensemble des interactions. Pendant les deux siècles qui suivirent les premiers travaux de Gilbert, l'électricité et le magnétisme restèrent des disciplines distinctes. Nous allons maintenir cette distinction dans les prochains chapitres.

### II.1.2 Propriétés de la charge électrique

- La charge électrique existe sous deux formes : l'une positive et l'autre négative.
- La charge électrique est une grandeur conservative : dans un système fermé la charge totale du système reste constante.
- La charge électrique est une grandeur quantifiée : toute charge électrique est un multiple entier de  $q_e$

La charge électrique totale d'un système quelconque s'écrit donc :

$$Q = Z q_e \text{ avec } Z \in \mathbb{Z}$$

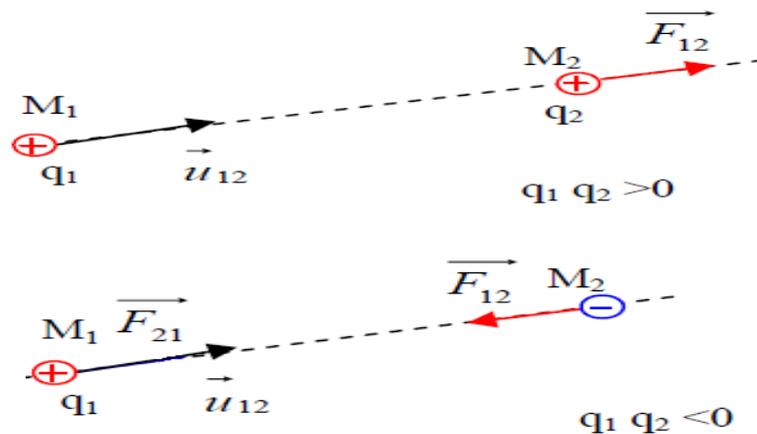
- Ce sont des particules élémentaires (proton, électron, etc.) qui portent la charge électrique. Ceci explique le fait que la charge électrique soit une grandeur quantifiée.

- La charge élémentaire est :  $q_e = 1,60217733 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ . Son unité est le **coulomb**, dont le symbole est **C**. En fonction des unités fondamentales du système international, on a :  $1 \text{ C} = 1 \text{ A.S}$

## II.2 La loi de Coulomb

Charles Coulomb (1736-1806) a effectué une série de mesures qui lui ont permis de déterminer avec un certain degré de précision les propriétés de la force électrostatique exercée par une charge « ponctuelle »  $q_1$  sur une autre charge « ponctuelle »  $q_2$  :

1. La force est radiale, c'est-à-dire dirigée selon la droite qui joint les deux charges ;
2. Elle est proportionnelle au produit des charges : soit répulsive si les charges sont de même signe, soit attractive si elles sont de signe opposé (voir figure II.1);
3. Enfin, elle est inversement proportionnelle au carré de la distance qui sépare les deux charges.



**Figure II.1** Illustration de la loi de Coulomb

L'expression mathématique de la force de Coulomb exercée par la particule 1 sur la particule 2 et traduisant les propriétés ci-dessus est la suivante

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\|\overline{M_1 M_2}\|^2} \vec{u}_{12} \quad (II.1)$$

avec  $\|\overline{M_1 M_2}\|$  la norme du vecteur  $\overline{M_1 M_2}$ ,  $\vec{u}_{12}$  le vecteur unitaire dirigé de 1 à 2 et  $\epsilon_0$  une constante appelée permittivité du vide telle que  $1/4\pi\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9 \text{ N.m}^2.\text{C}^{-2}$

## Remarques :

1. Cette relation n'est valable que pour des charges immobiles et dans le vide. Cette loi est la base même de toute l'électrostatique.
2. Cette force obéit au principe d'action et réaction de la mécanique classique, c'est-à-dire la force exercée par 1 sur 2 est bien entendu l'opposé de la force exercée de 2 sur 1.
3. La force de Coulomb présente une analogie remarquable avec la force d'attraction gravitationnelle qui s'exerce entre deux masses ponctuelles  $m_1$  et  $m_2$ .

## II.3 Champ et potentiel électrique

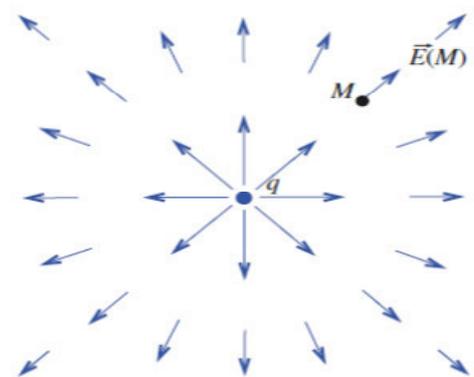
### II.3.1 Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

Si on considère une charge électrique  $q_1$  placée en un point quelconque  $M_1$  de l'espace, on sait maintenant que cette charge exercera la force  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$  donnée par l'équation II.1 sur toute charge  $q_2$  placée en un point quelconque  $M_2$  (différent de  $M_1$ ). L'expression de cette force on peut la mettre sous une forme plus intéressante :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = q_2 \vec{E}_1(M_2) \text{ avec } \vec{E}_1(M_2) = q_1 \cdot \overrightarrow{M_1 M_2} / 4\pi\epsilon_0 \cdot \|\overrightarrow{M_1 M_2}\|^3$$

$\vec{E}_1(M_2)$  est le champ électrostatique créé par la charge  $q_1$  (charge source) au point  $M_2$  dans le vide (ou dans l'air). Le champ créé par  $q_1$  caractérise l'influence de celle-ci sur l'espace qui l'entoure. Ainsi, le champ électrostatique créé dans l'espace par une particule de charge  $q$ , immobile au point origine  $O$  du repère de coordonnées sphériques, a pour expression (figure II.2) :

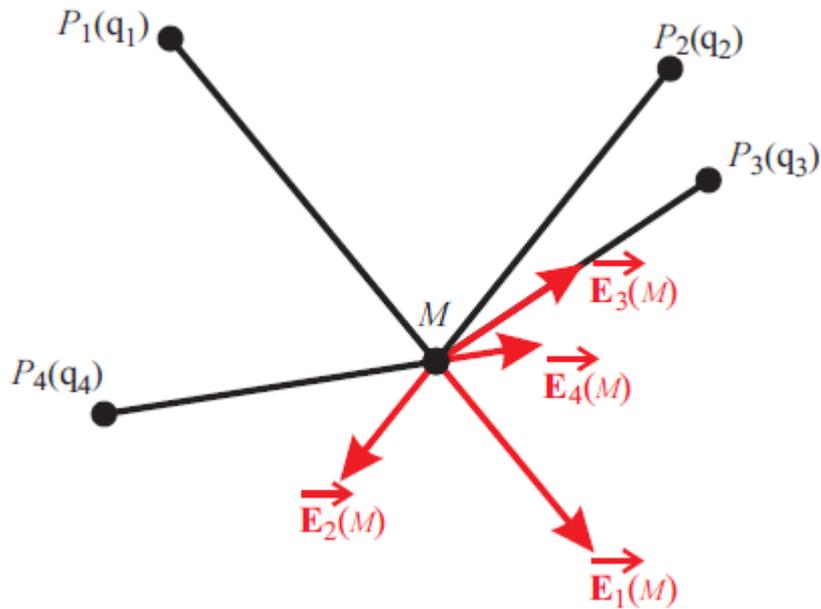
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_r}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|^3} \quad (II.2)$$



**Figure II.2** Champ d'une charge ponctuelle ( $q > 0$ )

### II.3.2 Principe de superposition (distribution discontinue de charge)

On considère maintenant  $N$  particules de charges électriques  $q_i$ , situées en des points  $P_i$  (voir la figure II.3) : quel est le champ électrostatique créé par cet ensemble de charges en un point  $M$  ?



**Figure II.3** Illustration de l'additivité du champ électrique, ici le point  $P_3$  porte une charge de signe opposé au signe des charges placées en  $P_1, P_2$  et  $P_4$

La réponse n'est absolument pas évidente car l'on pourrait penser que la présence du champ créé par des particules voisines modifie celui créé par une particule. En fait, il n'en est rien et l'expérience montre que la force totale subie par une charge  $q$  située en  $M$  est simplement la superposition des forces élémentaires,

$$\vec{F}(M) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_i}{\|P_iM\|^2} \vec{U}_i = q \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{\|P_iM\|^2} \vec{U}_i = q \vec{E}(M)$$

où  $\vec{U}_i = \overrightarrow{P_iM} / \|\overrightarrow{P_iM}\|$ , et il en résulte donc que

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{\|P_iM\|^2} \vec{U}_i = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i(M) \quad (II.3)$$

est le champ électrostatique créé par un ensemble discret de charges.

Cette propriété de superposition des effets électrostatiques est un fait d'expérience et énoncé comme le principe de superposition (comme tout principe, il n'est pas démontré). Ce principe peut être généralisé au cas d'une distribution continue de charges. Dans ce cas on considère que la région occupée par les charges est constituée d'un ensemble de "petits" éléments chargés et la sommation peut alors s'écrire sous la forme d'une intégrale.

### Exercice d'application 1

Quatre charges ponctuelles identiques  $-q$  ( $q > 0$ ) sont fixées aux sommets A, B, C et D d'un carré de côté  $a$ . Une cinquième charge  $q_0 > 0$  est maintenue fixe au centre O du carré.

Déterminer la valeur de  $q_0$  en fonction de  $q$  pour que la force électrostatique totale qui s'exerce sur chacune des cinq charges soit nulle.

#### Solution

La force électrostatique  $\vec{F}(O)$  exercée par les quatre charges identiques  $-q$  sur la charge  $q_0$  est nulle quelle que soit la valeur de  $q_0$ . Il reste à évaluer la force totale exercée sur chacune des charges  $-q$ , par exemple la charge placée en A (figure II.4).

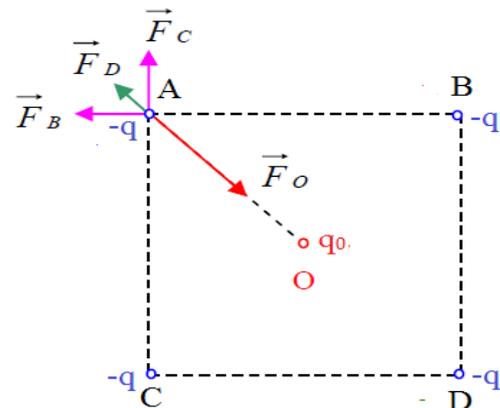


Figure II.4

D'après le principe de superposition :

$$\vec{F}(A) = \sum_{i=1}^4 \vec{F}_i(A) = \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D + \vec{F}_O = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\vec{BA}}{\|\vec{BA}\|^3} + \frac{\vec{CA}}{\|\vec{CA}\|^3} + \frac{\vec{DA}}{\|\vec{DA}\|^3} \right) - \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{OA}}{OA^3}$$

Or,

$$BA = CA = a, DA = \sqrt{2} a \text{ et } OA = a\sqrt{2}/2$$

Ainsi

$$\vec{F}(A) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^3} \left( \vec{BA} + \vec{CA} + \frac{\sqrt{2}}{4} \vec{DA} \right) - \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 a^3} 2\sqrt{2} \vec{OA}$$

$$\text{Puisque } \vec{BA} + \vec{CA} = (\vec{BO} + \vec{OA}) + (\vec{CO} + \vec{OA}) = 2 \vec{OA}$$

$$\vec{F}(A) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^3} \left( \left( 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) q - 2\sqrt{2} q_0 \right) \vec{OA}$$

La force  $\vec{F}(A)$  est nulle lorsque

$$q_0 = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{4} q$$

### II.3.3 Principe de superposition (distribution continue de charge)

Nous appliquerons le principe de superposition à une distribution de charges  $\mathcal{D}$  après l'avoir décomposée en un ensemble de fragments élémentaires chargés assimilés à des charges ponctuelles. Notons  $P$  un point décrivant l'espace occupé par la distribution. Une partie élémentaire de  $\mathcal{D}$ , située au voisinage de  $P$ ,

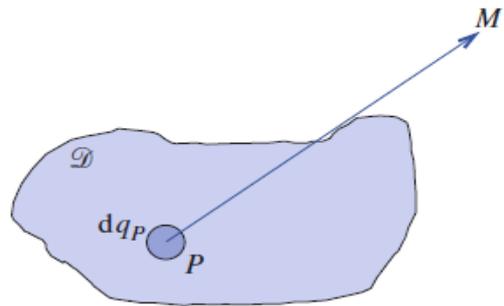


Figure II.5 Distribution de charge

contient une charge  $dq_p$  et crée un champ élémentaire  $d\vec{E}$  au point d'observation  $M$ . Nous obtenons le champ total créé en  $M$  par la distribution  $\mathcal{D}$  par superposition des champs de chacune de ses parties élémentaires selon :

$$\vec{E}(M) = \int dE_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{U}_{P \rightarrow M}}{\|\vec{PM}\|^2} dq_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} dq_p \quad (II.4)$$

Il nous reste à préciser l'élément d'intégration  $dq_p$  en fonction de la nature de la distribution considérée.

#### II.3.3.1 Champ électrique créé par une distribution linéique de charges électriques

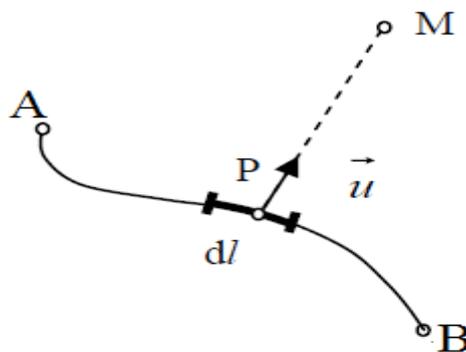


Figure II.6 Un exemple de distribution linéique de charges

Si sur une portion de courbe  $AB$  plongée dans l'espace (voir la figure II.6), on considère de petits éléments de la distribution de charges de longueur  $dl_p$ , situés aux points  $P$  portant chacun une charge  $dq_p = \lambda(P) dl_p$  où  $\lambda(P)$  est la densité linéique locale de charge électrique. Le champ électrique créé en un point  $M$  par l'ensemble de charges comprises entre  $A$  et  $B$  est :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \lambda(P) \frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} dl_p \quad (II.5)$$

### Exercice d'application 2

On considère un segment rectiligne  $P_1P_2$  de densité linéique homogène  $\lambda$ . Compte tenu des symétries, on travaille en coordonnées cylindriques avec l'axe  $z$  confondu avec l'axe du segment. Les bouts du segment sont respectivement  $z_1$  et  $z_2$ .

Calculer le champ électrique  $\vec{E}$  en un point  $M$  à une distance  $r$  du segment.

### Solution

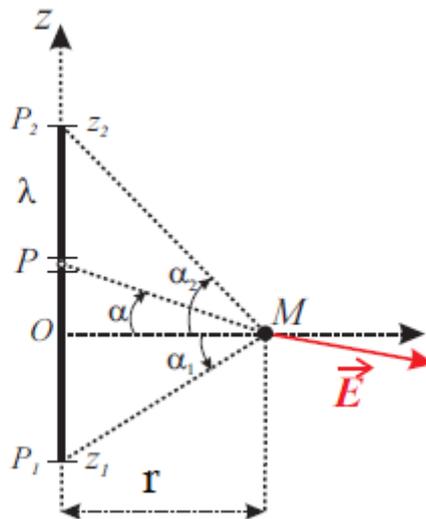


Figure II.7 Segment rectiligne de charge

Pour calculer le champ  $\vec{E}(M)$  créé en un point  $M$ , on va sommer les champs électriques élémentaires  $\overrightarrow{dE}$  créés par un tronçon élémentaire  $\overrightarrow{dl}$  du fil. Ce champ électrique élémentaire est donné par :

$$\vec{dE}(M) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} dl_p = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{U}}{\|\vec{PM}\|^2} dz$$

Un peu de trigonométrie conduit à  $\tan \alpha = z/r$ , soit en dérivant :

$$dz = r \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

Si on applique le théorème de Pythagore au triangle OPM, on obtient :

$$PM^2 = z^2 + r^2 = r^2(1 + \tan^2 \alpha) = \frac{r^2}{\cos^2 \alpha}$$

Ce qui donne le champ électrique élémentaire :

$$\vec{dE}(M) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos^2 \alpha}{r^2} r \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} \vec{U}$$

avec  $\vec{U} = \cos \alpha \vec{u}_r - \sin \alpha \vec{k}$ . Les coordonnées de  $\vec{dE}$  suivant les vecteurs unitaires  $\vec{u}_r$  et  $\vec{k}$  sont alors :

$$dE_r = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \cos \alpha d\alpha$$

$$dE_z = \frac{-\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \sin \alpha d\alpha$$

Il reste à intégrer (sommer les champs élémentaires) pour  $\alpha$  variant de  $\alpha_1$  à  $\alpha_2$  :

$$E_r = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha d\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)$$

$$E_z = \frac{-\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)$$

ou encore en fonction de  $r$  et les positions  $z_1$  et  $z_2$  :

$$E_r = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \left( \frac{z_2}{\sqrt{r^2 + z_2^2}} - \frac{z_1}{\sqrt{r^2 + z_1^2}} \right)$$

$$E_z = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{r^2 + z_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + z_1^2}} \right)$$

Ces expressions sont un peu compliquées, mais il convient de remarquer que si l'on s'intéresse qu'au **cas du fil infini**, cela revient à faire tendre  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  respectivement vers  $-\pi/2$  et  $+\pi/2$ . On a alors :

$$E_r = \lambda/2\pi\epsilon_0 r \text{ et } E_z = 0$$

Ce qui mène au résultat :

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r$$

### II.3.3.2 Champ électrique créé par une distribution surfacique de charges électriques

Dans ce cas on considère de petits éléments de la distribution surfacique de charges de surface  $dS_p$ , situés aux points  $P$  et portant chacun une charge  $dq_p = \sigma(P) dS_p$  où  $\sigma(P)$  est la densité surfacique locale de charge électrique (figure II.8). Le champ électrique créé en un point  $M$  par une distribution surfacique de charge de surface  $S$  est donné par :

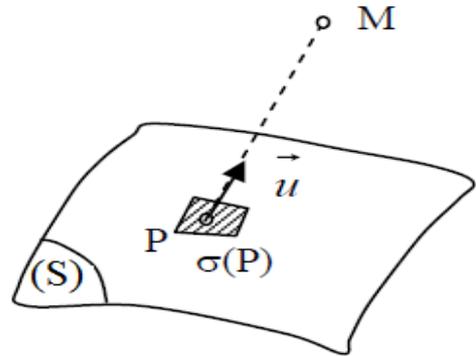


Figure II.8

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \sigma(P) \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} dS_p \quad (II.6)$$

#### Exercice d'application 3

Déterminer le champ  $\vec{E}(M)$  en un point de l'axe d'un disque de rayon  $R$  uniformément chargé avec la densité surfacique  $\sigma$  uniforme. En déduire le champ créé par un plan infini.

#### Solution

1- Le disque chargé présente une symétrie de révolution autour de son axe, donc, le champ en  $M$  est colinéaire à cet axe :

$$\vec{E}(M) = E(z) \vec{e}_z$$

Notons  $(r, \theta)$  les coordonnées polaires d'un point  $P$  du disque et  $ds = r dr d\theta$  l'élément de surface (infiniment petit d'ordre deux) associé en coordonnées polaires (figure II.9).

La charge élémentaire  $dq = \sigma ds = \sigma r dr d\theta$ , localisée en  $P$ , crée en  $M$  le champ élémentaire :

$$d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma r dr d\theta}{\rho^2} \vec{e}$$

La composante axiale de ce champ est :

$$dE(z) = d\vec{E}(M) \vec{e}_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma r dr d\theta}{\rho^2} \cos \alpha$$

Il nous faudra deux intégrations pour obtenir l'expression de  $E(z)$

$$dE(z) = d\vec{E}(M) \vec{e}_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma r dr d\theta}{\rho^2} \frac{z}{\rho} = \frac{z\sigma r dr d\theta}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right]$$

Soit,

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right] \vec{e}_z$$

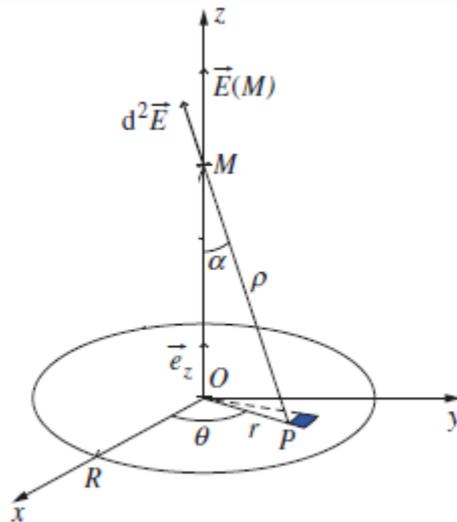


Figure II.9 Champ d'un disque uniformément chargé

2- Le champ créé par un plan infini (figure II.10) portant une densité de charge  $\sigma$  peut se déduire du résultat précédent, en faisant tendre  $R$  vers l'infini. On trouve :

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|} \vec{e}_z$$

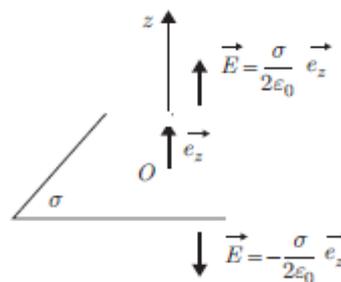


Figure II.10

### II.3.3.3 Champ électrique créé par une distribution volumique de charges électriques

Le dernier cas à envisager est celui d'une distribution volumique de charges dans un volume  $V$  délimité par une surface fermée  $S$ . On considère de petits éléments de cette distribution de volume  $dV_p$ , situés aux points  $P$  et portant chacun une charge  $dq_p = \rho(P)dV_p$  (figure II.9). Le champ électrique créé par cet ensemble de charge en un point  $M$  est :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \rho(P) \frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} dV_p \quad (II.7)$$

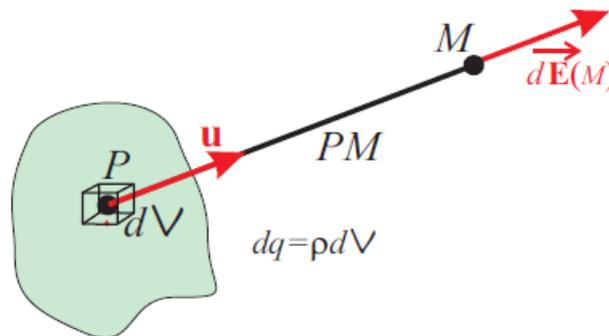


Figure II.9 Exemple de distribution volumique de charge

### II.3.4 Le potentiel électrostatique

Calculons le rotationnel du champ électrique  $\vec{E}(M)$  donné par la précédente équation.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \times \iiint \rho(P) \frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} dV_p \quad (II.8)$$

Comme on calcule le rotationnel au voisinage du point  $M$ , les dérivées partielles se calculent par rapport aux coordonnées  $(x, y, z)$  du point  $M$ , tandis que l'intégration de volume se fait par rapport aux coordonnées  $(x_p, y_p, z_p)$  du point  $P$ . De ce fait, l'opérateur  $\vec{\nabla} \times$  peut être introduit dans l'intégrale et on obtient alors :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \vec{\nabla} \times \left[ \rho(P) \frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} dV_p \right] \quad (II.9)$$

Or nous avons montré dans l'exercice résolu à la fin du premier chapitre que :

$$\vec{\nabla} \times \frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} = 0 \quad (II.10)$$

Il s'en suit le résultat fondamental :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (II.11)$$

Sachant que le rotationnel d'un gradient est nul, on en déduit qu'il existe un champ scalaire appelé potentiel électrostatique  $V$  tel que :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \quad (II.12)$$

A partir du résultat précédent on peut aisément montrer que :

$$dV = -\vec{E}d\vec{l} \quad (II.13)$$

Par intégration, on peut montrer que le potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle est :

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (II.14)$$

On dit que le champ électrostatique  $\vec{E}$  dérive d'un potentiel. On peut écrire de manière équivalente que le champ électrostatique est à circulation conservative, c'est-à-dire qu'il satisfait la relation intégrale suivante (voir équation I.12 du premier chapitre) :

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0 \quad (II.15)$$

Le principe de superposition peut être généralisé au calcul du potentiel électrostatique.

-Potentiel électrostatique créé par une distribution discrète de charges

$$V(M) = \sum_i^n V_{q_i} = \sum_i^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \quad (II.16)$$

-Potentiel électrostatique créé par une distribution linéique de charges

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda(P)}{PM} dl_p \quad (II.17)$$

- Potentiel électrostatique créé par une distribution surfacique de charges

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma(P)}{PM} dS_p \quad (II.18)$$

-Potentiel électrostatique créé par une distribution volumique de charges

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(P)}{PM} dV_p \quad (II.19)$$

### Exercice d'application 4

Soit une boucle circulaire de centre  $O$ , de rayon  $R$ , uniformément chargée avec une densité linéique  $\lambda$  (figure II.10).

Calculer le champ  $E$  créé par cette distribution de charges, en un point  $M$  de l'axe ( $Z'Z$ ) de la boucle à partir du potentiel électrostatique

#### Solution

Le potentiel  $dV(M)$  créé en un point  $M(0, 0, Z)$  par la charge  $dq_p = \lambda dl$  portée par un élément  $dl$  de la boucle entourant  $P$  (figure II.10) est :

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{PM} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{PM}$$

avec  $dl = R d\theta$  et  $PM = \sqrt{R^2 + Z^2}$

Le potentiel  $V(M)$  est obtenu par intégration sur le contour  $C$  de la boucle :

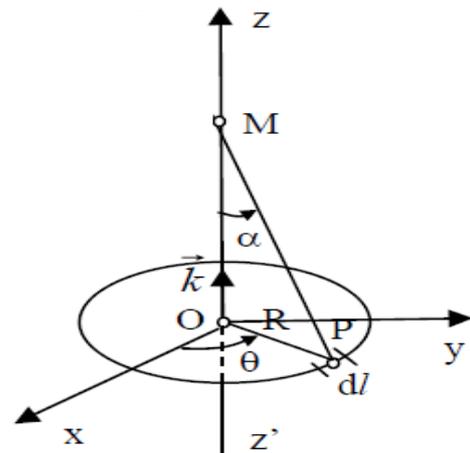


Figure II.10

$$V(M) = \int dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda R d\theta}{\sqrt{R^2 + Z^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R}{\sqrt{R^2 + Z^2}} \int_0^{2\pi} d\theta$$

Ce qui donne :

$$V(M) = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{\lambda R}{\sqrt{R^2 + Z^2}}$$

Le champ  $\vec{E}(M)$  est déduit du potentiel par dérivation :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} V(M) = -\frac{dV}{dZ} \vec{k} = \frac{\lambda R Z}{2\epsilon_0 (R^2 + Z^2)^{3/2}} \vec{k}$$

## II.3.5 Topographie du champ

### II.3.5.1 Ligne de champ

a) **Définition** : On appelle ligne de champ électrique  $\vec{E}$ , une ligne qui accepte comme tangente en chacun de ses points  $M$ , le champ électrique  $\vec{E}(M)$ . On oriente une ligne de champ dans le sens de  $\vec{E}(M)$  (figure II.11).

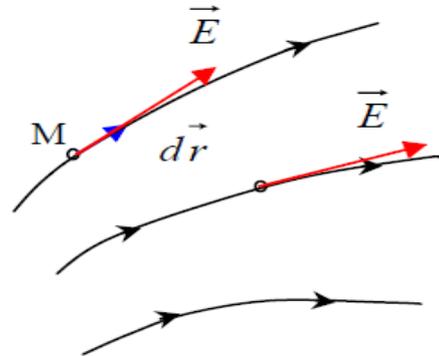


Figure II.11

b) **Equation d'une ligne de champ**

Si on considère un segment élémentaire  $d\vec{r}$  d'une ligne de champ en un point  $M$ , puisque  $\vec{E}(M)$  est tangent à cette ligne en  $M$ , on doit avoir :

$$d\vec{r} \times \vec{E}(M) = \vec{0} \quad (II.20)$$

C'est l'équation générale des lignes de champs. Elle permet d'obtenir des formules analytiques pour une famille de lignes de champ.

c) **Exemple de Ligne de champ**

Soit une charge ponctuelle en  $O$ . les lignes du champ créées par la charge ponctuelle sont des demi-droites concourantes en  $O$ , divergentes si  $q > 0$  (figure II.12-a) et convergentes si  $q < 0$  (figure II.12-b).

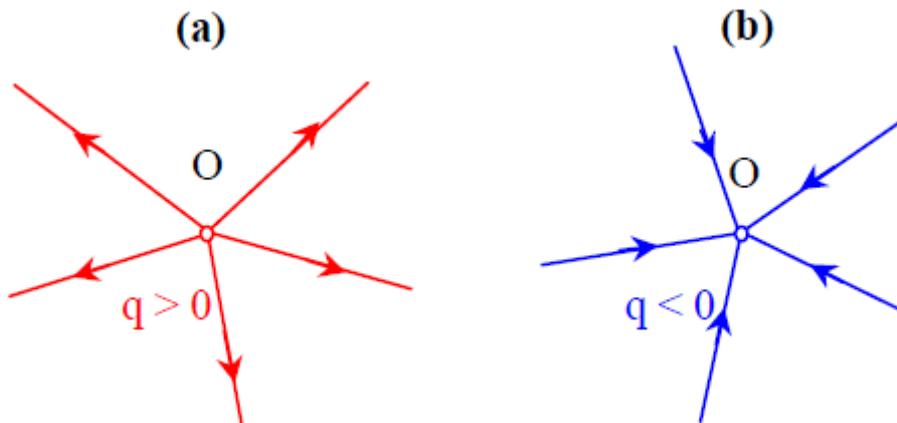


Figure II.12 Les lignes de champ d'une charge

- Notons que dans une région où le champ  $\vec{E}$  est un vecteur bien défini et non nul, on peut suivre de façon continue une ligne de champ.

- Deux lignes de champ ne peuvent se croiser : la figure II.12 montre que les lignes de champ commencent (figure II.12-a) ou s'arrêtent (figure II.12-b) sur les charges qui sont des points singuliers.

### II.3.5.2 Tube de champ

L'ensemble des lignes de champ s'appuyant sur un contour fermée ( $C$ ) engendre une surface ( $S$ ) appelée tube de champ, représentée sur la figure II.13.

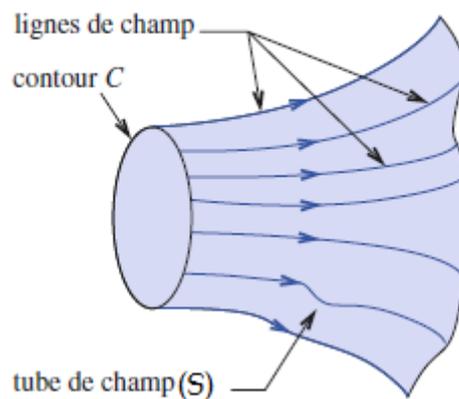


Figure II.13 Tube de champ

## II.3.6 Topographie du potentiel électrostatique

### II.3.6.1 Surfaces équipotentiellles d'une distribution

#### a) Définition

Une surface équipotentielle, de potentiel  $V_0$ , est définie par l'équation  $V(M) = V_0$ . Deux surfaces équipotentiellles correspondant à des potentiels distincts ne peuvent pas avoir d'intersection

#### b) Surfaces équipotentiellles et lignes de champ

Considérons deux points très proches appartenant à une même surface équipotentielle de potentiel  $V_0$  (figure II.14). Notons  $M$  le premier, le second, noté  $N$ , étant obtenu à partir de celui-ci par un déplacement

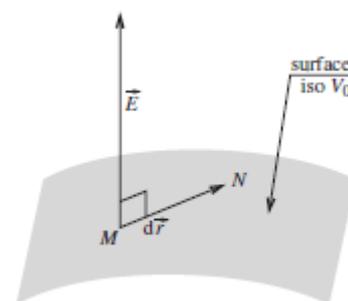
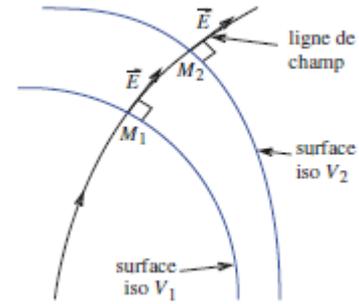


Figure II.14 Surface iso-  $V_0$

élémentaire  $d\vec{r}$  d'orientation quelconque dans le plan tangent en  $M$  à la surface équipotentielle. Par définition du potentiel  $V(M) - V(N) = -\vec{E}(M) \cdot d\vec{r}$ , et par définition de la surface  $V(M) = V(N)$ . Le champ électrostatique est donc normal à la surface équipotentielle. Considérons maintenant une ligne de champ rencontrant deux surfaces équipotentielles, de potentiels  $V_1$  et  $V_2$ , aux points  $M_1$  et  $M_2$  (figure II.15). Si le champ oriente la ligne de



**Figure II.15**

champ oriente la ligne de  $M_1$  vers  $M_2$ , nous avons :

$$V_2 - V_1 = V(M_2) - V(M_1) = \int_{M_1}^{M_2} -\vec{E}(M) \cdot d\vec{r} < 0$$

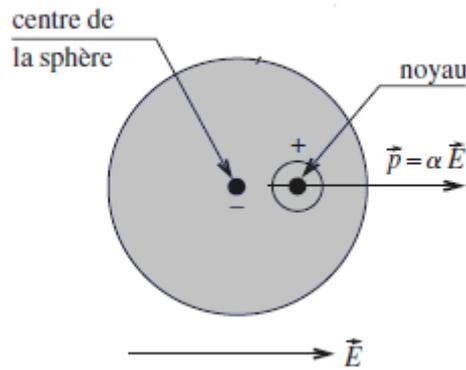
Le champ est perpendiculaire aux surfaces équipotentielles et les lignes de champ sont orientées dans le sens des potentiels décroissants.

### II.3.7 Le Dipôle électrostatique

Un **dipôle électrique** est constitué de deux charges de même grandeur et de signes opposés séparées par une certaine distance. Même s'ils sont électriquement neutres, les dipôles peuvent produire un champ électrique et subir une force électrique ; ils peuvent aussi subir un moment de force. Nous allons d'abord faire un survol de phénomènes et d'applications impliquant des dipôles et ensuite calculer le champ produit par un dipôle source ainsi que la force et le moment de force subis par un dipôle cible.

Toute molécule dans laquelle les centres des charges positives et négatives ne coïncident pas peut, en première approximation, être considérée comme un dipôle. Il peut s'agir d'un dipôle temporaire ou permanent.

Des dipôles temporaires sont formés lorsqu'un atome se trouve dans un champ électrique extérieur. Ce champ déplace les charges positives et négatives de l'atome en des sens opposés, ce qui induit un dipôle (figure II.16). Ce phénomène entraîne la polarisation des matériaux isolants. Dès qu'on supprime le champ extérieur, les dipôles induits qu'il avait engendrés disparaissent.

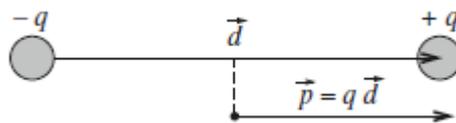


**Figure II.16** Polarisation d'un atome placé dans un champ  $\vec{E}$

Certaines molécules (comme HCl, CO et H<sub>2</sub>O) conservent même en absence de champ extérieur un dipôle permanent et sont appelées molécules polaires. De même, la plupart des molécules organiques portent des groupements polaires (comme -NH<sub>2</sub> -OH).

On peut décrire un dipôle (induit ou permanent) grâce à son **moment dipolaire électrique  $\vec{P}$** , un vecteur orienté de la charge négative  $-q$  vers la charge positive  $+q$  et dont le module est égal au produit de la grandeur de l'une des charges par la distance  $d$  qui les sépare (figure II.17) :

$$\vec{P} = q \vec{d} \quad (II.21)$$



**Figure II.17** Moment dipolaire d'un doublet de charges

### II.3.7.1 Potentiel et champ créés par un dipôle source

#### II.3.7.1.1 Approximation dipolaire

Si nous nous intéressons aux effets produits par le dipôle, l'approximation dipolaire consiste à supposer la distance à laquelle nous observons le champ créé par le dipôle est très grande devant ses dimensions :  $r \gg d$

Dans ces conditions, nous mènerons les calculs en ne déterminant que les termes d'ordre le plus bas en  $(d/r)$ .

### II.3.7.1.2 Potentiel du dipôle

Soient deux charges ponctuelles  $-q, +q$  fixées respectivement en  $A$  et  $B$  (figure II.18) distant de  $d$ . Considérons un point  $M$  très éloigné des charges, ce qui revient à considérer la distance  $d$  très inférieure à celle qui sépare  $M$  de l'une ou l'autre charge.

La position de  $M$  est repéré dans le système des coordonnées **polaires**  $(r, \theta)$ . Nous choisissons de prendre pour axe  $(Ox)$ , la droite qui joint les deux charges tel que l'origine  $O$  soit au milieu du segment  $AB$  qui joint les charges.

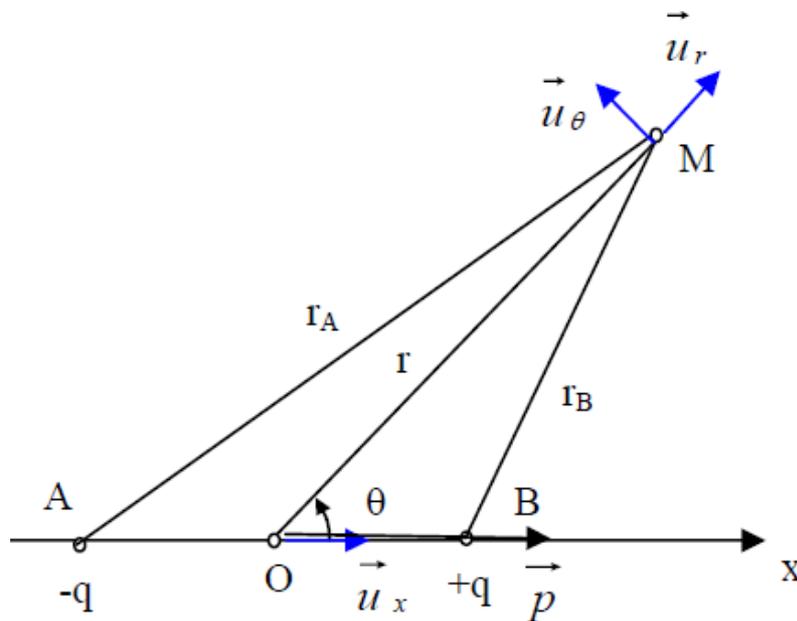


Figure II.18

D'après le principe de superposition, le potentiel  $V(M)$  créé par le dipôle en un point  $M$  repéré par ses coordonnées polaires  $(r, \theta)$  est donné avec les notations de la figure ci-dessus par :

$$V(M) = V_A(M) + V_B(M) = \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0 r_A} + \frac{q_B}{4\pi\epsilon_0 r_B} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \quad (II.22)$$

avec,

$$r_A^2 = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM})^2 = r^2 + dr \cos \theta + \frac{d^2}{4} \quad (II.23)$$

$$r_B^2 = (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM})^2 = r^2 - dr \cos \theta + \frac{d^2}{4} \quad (II.24)$$

Nous avons donc

$$r_A^{-1} = r^{-1} \left( 1 + \frac{d}{r} \cos \theta + \frac{d^2}{4r^2} \right)^{-1/2} \quad (II.25)$$

$$r_B^{-1} = r^{-1} \left( 1 - \frac{d}{r} \cos \theta + \frac{d^2}{4r^2} \right)^{-1/2} \quad (II.26)$$

Puisque  $d/r \ll 1$  (approximation dipolaire), on peut négliger les termes en  $(d^2/r^2)$  devant le terme  $(d/r)$  :

$$r_A^{-1} \cong r^{-1} \left( 1 + \frac{d}{r} \cos \theta \right)^{-1/2} \quad (II.27)$$

$$r_B^{-1} \cong r^{-1} \left( 1 - \frac{d}{r} \cos \theta \right)^{-1/2} \quad (II.28)$$

Si on fait un développement limité du premier ordre des équations (II.27) et (II.28) on a :

$$r_A^{-1} \cong r^{-1} \left( 1 - \frac{d}{2r} \cos \theta \right) \quad (II.29)$$

$$r_B^{-1} \cong r^{-1} \left( 1 + \frac{d}{2r} \cos \theta \right) \quad (II.30)$$

Le potentiel  $V(M)$  est donc donné par

$$V(M) = \frac{qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (II.31)$$

Il est intéressant de mettre ce résultat sous une forme indépendante du système de coordonnées, on fait apparaître la grandeur caractéristique du dipôle qu'est le moment dipolaire  $\vec{P}$  :

$$V(M) = \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (II.32)$$

### II.3.7.1.3 Champ du dipôle

Pour calculer le champ électrostatique en fonction de  $\vec{P}$  et de  $\vec{r}$ , il nous suffit maintenant d'utiliser le gradient de  $V(M)$ . On obtient ainsi :

$$\vec{E}(M) = - \overrightarrow{\text{grad}} V(M) = - \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right) = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \overrightarrow{\text{grad}} (\vec{P} \cdot \vec{r}) - \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0} \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{1}{r^3} \right) \quad (II.33)$$

Or,

$$\overrightarrow{\text{grad}} (\vec{P} \cdot \vec{r}) = \overrightarrow{\text{grad}} (xP_x + yP_y + zP_z) = P_x \vec{i} + P_y \vec{j} + P_z \vec{k} = \vec{P} \quad (II.34)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{1}{r^3} \right) = -\frac{3 \vec{r}}{r^5} \quad (II.35)$$

D'où l'expression intrinsèque de  $\vec{E}$  en fonction de  $\vec{P}$  et de  $\vec{r}$  :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3(\vec{P} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{P}}{r^3} \right) \quad (II.36)$$

Les effets électriques  $\vec{E}$  et  $V$  produits par le dipôle dans le cadre de l'approximation dipolaire sont entièrement déterminés par son moment dipolaire  $\vec{P}$ . Il faut remarquer que la décroissance du potentiel en  $(1/r^2)$  et du champ en  $(1/r^3)$  créés par un dipôle est plus rapide que dans le cas d'une charge ponctuelle.

### II.3.7.2 Action d'un champ extérieur sur un dipôle

Le système étudié ici est un dipôle électrique de moment  $\vec{P}$  (les charges sont placées aux points A et B, voir la figure II.19) plongé dans une région où règne le champ électrique  $\vec{E}_0$  uniforme, créé par un autre système que le dipôle (on le nommera alors **champ extérieur**). On cherche l'expression de la force totale  $\vec{F}$  subie par le dipôle de la part du champ  $\vec{E}_0$ . Cette force s'écrit comme la somme des forces  $\vec{F}_A$  et  $\vec{F}_B$  que subit le dipôle aux points A et B :

$$\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B$$

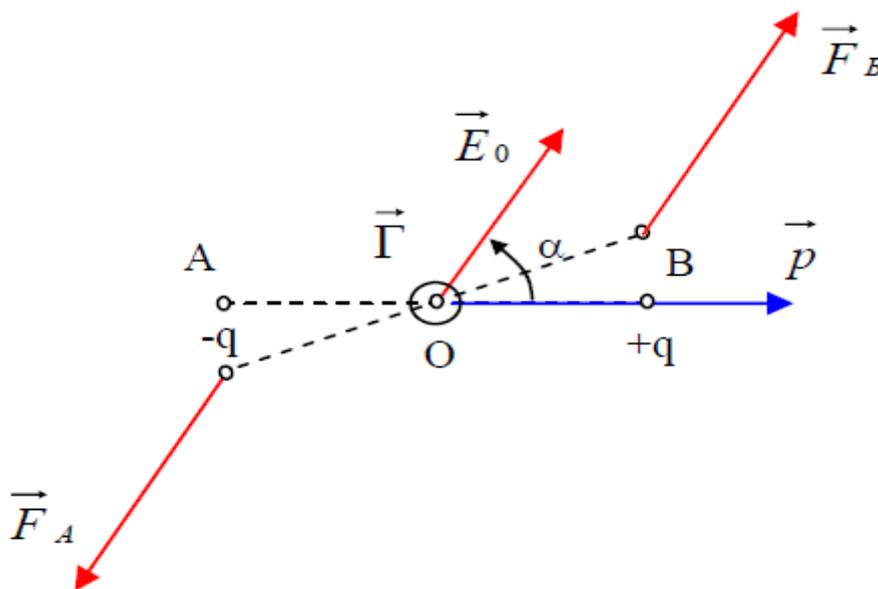


Figure II.19 Dipôle dans un champ uniforme

Puisque le champ extérieur est **uniforme**, la résultante des forces est évidemment nulle (on ne tiendra pas compte de la force exercée par  $q$  sur  $-q$  et réciproquement) :

$$\vec{F} = -q\vec{E}_0 + q\vec{E}_0 = \vec{0} \quad (II.37)$$

Par contre, le dipôle subit un **couple** de force ( $\vec{F}_A$  et  $\vec{F}_B$ ) dont le moment est :

$$\vec{\Gamma} = \vec{OA} \times \vec{F}_A + \vec{OB} \times \vec{F}_B = \vec{OA} \times (-\vec{F}_B) + \vec{OB} \times \vec{F}_B = \vec{AB} \times \vec{F}_B = q \vec{AB} \times \vec{E}_0$$

Ce qui donne :

$$\vec{\Gamma} = \vec{P} \times \vec{E}_0 \quad (II.38)$$

Si on libère le dipôle, il tend sous l'action de  $\vec{\Gamma}$  à tourner pour atteindre une position d'équilibre ( $\vec{\Gamma} = \vec{0}$ ) dans laquelle  $\vec{P}$  et  $\vec{E}_0$  sont colinéaires :  $\alpha = (\vec{P}, \vec{E}_0) = 0$  ou  $\pi$ .

- Pour  $\alpha = 0$  ( $\vec{P}$  a le même sens que  $\vec{E}_0$ ).

Si on écarte légèrement le dipôle de sa position d'équilibre, le couple de force tend à le ramener à cette position (figure II.20-a). L'équilibre est **stable**.

- Pour  $\alpha = \pi$  ( $\vec{P}$  est antiparallèle à  $\vec{E}_0$ ).

Si on écarte légèrement le dipôle de sa position d'équilibre, le couple de force tend à l'éloigner de cette position (figure II.20-b). L'équilibre est **instable**.

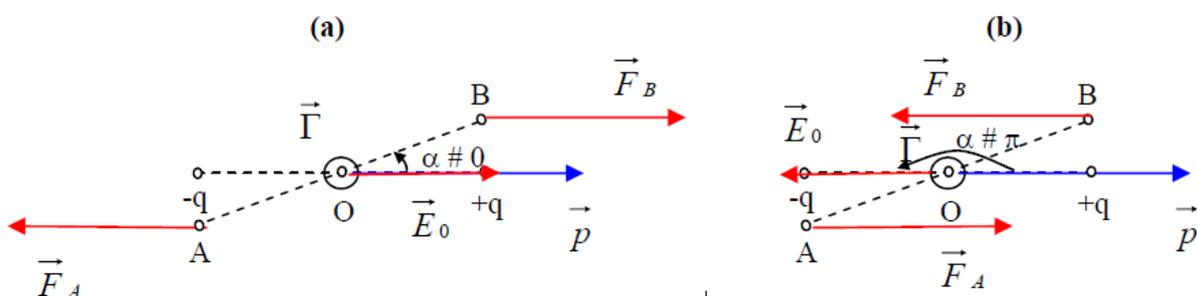


Figure II.20

### II.3.7.3 Energie potentiel d'un dipôle dans un champ extérieur uniforme

C'est l'énergie nécessaire pour amener  $+q$  et  $-q$  de l'infini à leur position en B et A. Les charges  $-q$  et  $+q$  fixées en A et B ont des énergies potentielles égales à  $-q(V_A - 0)$  et  $+q(V_B - 0)$  où  $V_A$  et  $V_B$  sont les potentiels électriques en A et B associés au champ électrique extérieur  $\vec{E}_0$ . Ainsi, l'énergie potentielle du système  $U$  est :

$$U = +q(V_B - V_A)$$

La différence de potentiel entre les deux points A et B s'écrit :

$$\begin{aligned}
V(A) - V(B) &= \int_A^B \vec{E}_0 \cdot \vec{dl} \\
&= \vec{E}_0 \int_A^B \vec{dl} \\
&= \vec{E}_0 \cdot \vec{AB}
\end{aligned}$$

L'énergie potentielle totale du dipôle est alors :

$$\begin{aligned}
U &= -q \vec{E}_0 \cdot \vec{AB} \\
&= -q \vec{AB} \cdot \vec{E}_0
\end{aligned}$$

On reconnaît l'expression du moment dipolaire  $\vec{P}$ , d'où le résultat final :

$$U = -\vec{P} \cdot \vec{E}_0 \quad (II.39)$$

Cette expression représente l'énergie d'interaction du dipôle associée au champ  $E_0$ .

Nous **retrouvons** les positions d'équilibre :

- Pour  $\alpha = 0$  ( $\vec{P}$  a le même sens que  $\vec{E}_0$ ),  $U = -P \cdot E_0$

L'énergie potentielle est **minimale** et l'équilibre est **stable**.

- Pour  $\alpha = \pi$  ( $\vec{P}$  est antiparallèle à  $\vec{E}_0$ ),  $U = P \cdot E_0$

L'énergie potentielle est maximale et l'équilibre est instable.

### II.3.8 Théorème de Gauss

Le champ électrostatique possède des propriétés très intéressantes. En effet considérons une charge ponctuelle  $q$  repérée par rapport à un référentiel par le vecteur  $\vec{r}_p$  qui crée en chaque point  $M(x, y, z)$  de l'espace qui l'entoure, un champ  $\vec{E}(M)$  donné par :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} \quad (II.40)$$

Comme nous pouvons le constater, le champ  $\vec{E}(M)$  possède une singularité en  $P$ .

Pour le calcul du flux de  $\vec{E}$  à travers une surface fermée ( $S$ ), deux cas peuvent se présenter :

a)  $q$  n'est pas englobée par ( $S$ )

Dans ce cas à l'intérieur du volume ( $\tau$ ) délimité par la surface ( $S$ ) le champ  $\vec{E}(M)$  ne possède pas de singularité. Nous pouvons donc calculer la divergence de  $\vec{E}(M)$ . Or nous avons montré dans l'exercice résolu [ chapitre I ] que :

$$\vec{\nabla} \cdot \left[ \frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} \right] = 0 \quad (II.41)$$

Il s'en suit le résultat :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (II.42)$$

D'après le théorème de la divergence, le flux à travers cette surface fermée est nul car :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \iiint_{\tau} \text{div } \vec{E} \, d\tau = 0 \quad (II.43)$$

en remarquant que  $\vec{E}$  est toujours défini dans le volume ( $\tau$ ).

b)  $q$  est englobée par ( $S$ )

Dans ce cas  $\text{div } \vec{E}$  n'est plus défini en  $P(x_p, y_p, z_p)$  et le théorème de la divergence (Green-Ostrogradski) n'est donc pas applicable. Pour contourner cette difficulté, on considère un volume limité par la surface extérieure ( $S$ ) et par une petite sphère de rayon  $r$  entourant la charge  $Q$ . Le volume  $\tau - \tau_Q$  ne contient pas de charge ; ce volume est limité par la surface fermée constituée par la surface extérieure ( $S$ ) et par la surface ( $S_Q$ ) en remarquant que le vecteur unitaire  $\vec{n}$  doit être dirigé de l'intérieur vers l'extérieur du volume  $\tau - \tau_Q$ . On exprime le flux de  $\vec{E}$  à travers la surface ( $S$ ) en l'écrivant sous la forme :

$$\begin{aligned} \phi &= \oiint_{(S)} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} \\ &= \oiint_{(S)} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} - \oiint_{(S_Q)} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}_Q + \oiint_{(S_Q)} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}_Q \end{aligned} \quad (II.44)$$

En utilisant le théorème de Green-Ostrogradski, on obtient :

$$\phi = \iiint_{\tau - \tau_Q} \text{div } \vec{E} \, d\tau + \phi_Q \quad (II.45)$$

où :

$$\phi_Q = \oiint_{(S_Q)} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}_Q \quad (II.46)$$

est le flux de  $\vec{E}$  à travers petite sphère de volume  $\tau_Q$  et de rayon  $r$ , entourant la charge ponctuelle  $Q$ .

Dans ce cas :

$$\iiint_{\tau-\tau_Q} \text{div } \vec{E} \, d\tau = 0 \quad (II.47)$$

car la divergence est définie partout sur  $\tau - \tau_Q$ . Il nous reste donc :

$$\phi = \phi_Q = \oiint_{(S_Q)} \vec{E} \cdot \vec{dS}_Q \quad (II.48)$$

Mais dans le cas d'une sphère, il est relativement facile de montrer que :

$$\oiint_{(S_Q)} \vec{E} \cdot \vec{dS}_Q = \oiint_{(S_Q)} E \cdot dS_Q = E \cdot \oiint_{(S_Q)} dS_Q = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (II.49)$$

Le flux du champ électrostatique à travers une surface (S) fermée entourant une charge ponctuelle  $Q$  est donc égal à  $Q/\epsilon_0$ .

On considère maintenant la surface fermée (S) entoure un ensemble de charges  $Q_i$ , les unes à l'intérieur du volume  $\tau$ , les autres à l'extérieur (figure II.21).

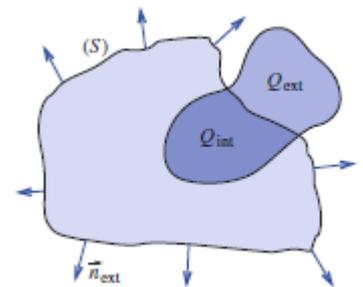
Si  $Q_i$  est à l'intérieur :  $\phi = Q_i / \epsilon_0$

Si  $Q_i$  est à l'extérieur :  $\phi = 0$

D'où le théorème de Gauss pour le champ électrostatique :

Le flux du champ résultant à travers une surface quelconque (S) n'est dû qu'aux seules charges intérieures à S:

$$\phi = \oiint_{(S)} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$



**Figure II.21** Le flux de  $\vec{E}$  créé par  $Q_{int} + Q_{ext}$

### Intérêt du théorème de Gauss

Par rapport au calcul direct du champ  $\vec{E}$ , le théorème peut présenter des avantages si des considérations de symétrie s'avèrent favorables : par exemple :  $\vec{E} \perp \vec{n}$  ( $\vec{E} \cdot \vec{n} = 0$ ) en tout point de la surface ou encore norme de  $\vec{E}$  constante.

### Exercice d'application 5

On considère une boule (sphère pleine) de centre O et de rayon R, chargée avec une distribution volumique homogène de charges  $\rho$ . Calculer le champ électrostatique puis le potentiel en tout point de l'espace.

#### Solution

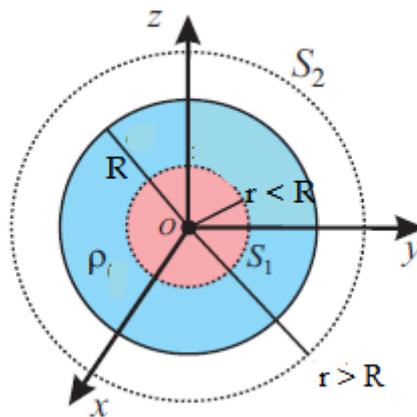
##### 1-Calcul du champ électrostatique $\vec{E}(M)$

Cette distribution possédant une symétrie sphérique, le champ électrostatique qui en résulte aura la même symétrie, donc  $\vec{E}(M) = E(r) \vec{u}_r$

La surface de Gauss adaptée à la symétrie du problème est une sphère de rayon  $r$  centrée sur l'origine et l'évaluation de l'intégrale surfacique dans le théorème de Gauss donne :

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_{(S)} E(r) \cdot dS = E(r) 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Avec ce résultat en main, il nous suffit à déterminer le champ dans les deux régions distinctes,  $r < R$  et  $r > R$  (figure II.22).



**Figure II.22** Surface de Gauss sphérique pour une distribution à symétrie sphérique

**a) Champ à l'intérieur :  $r < R$**

Soit ( $S_1$ ) la surface de Gauss passant par le point  $M$  intérieur (sphère de rayon  $r$ ).  
La charge totale de la sphère à l'intérieur de la surface de Gauss est donnée par :

$$Q_{int} = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$$

et la formule de l'équation précédente nous donne :

$$E(r) = \frac{Q_{int}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\frac{4}{3} \pi r^3 \rho}{4\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r$$

**b) Champ à l'extérieur :  $r > R$**

Soit ( $S_2$ ) la surface de Gauss passant par le point  $M$  extérieur (sphère de rayon  $r$ ).  
La sphère de Gauss enferme un volume  $V$  supérieur à celui de la boule, mais la distribution de charges n'est non nulle que jusqu'en  $r = R$ . Donc on a simplement que la charge à l'intérieur de  $S_2$  est :

$$Q_{int} = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$$

Le théorème de Gauss donne cette fois :

$$E(r) = \frac{Q_{int}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\frac{4}{3} \pi R^3 \rho}{4\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2}$$

On vient ainsi de démontrer, sur un cas simple, qu'une distribution de charges à symétrie sphérique produit à l'extérieur de la distribution, le même champ qu'une charge ponctuelle  $Q$ , située au centre de la sphère  $O$  (figure II.23) .

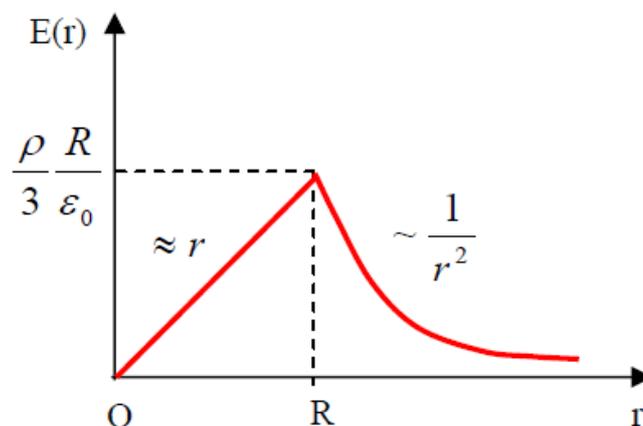


Figure II.23

## 2-Calcul du potentiel électrostatique $V(M)$

Le champ  $\vec{E}$  étant radial,  $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r} = -E dr$ .

À l'extérieur ( $r > R$ ), on a :

$$V = - \int E dr = - \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \int \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} + C_1$$

Lorsque  $r \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow 0 \Rightarrow C_1 = 0$

À l'intérieur ( $r < R$ ) :

$$V = - \int E dr = - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \int r dr = - \frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + C_2$$

Pour déterminer la constante nous pouvons utiliser la **continuité** du potentiel sur la surface de la sphère :

$$V(R^+) = V(R^-)$$

Ce qui donne :

$$\frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} = - \frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} + C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}$$

Finalement :

$$V(r) = - \frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + C_2 = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{r^2}{3R^2} \right]$$

Ainsi pour  $r > R$ , le champ et le potentiel sont les mêmes que si toute la charge  $Q$  était concentrée en O (figure II.24).

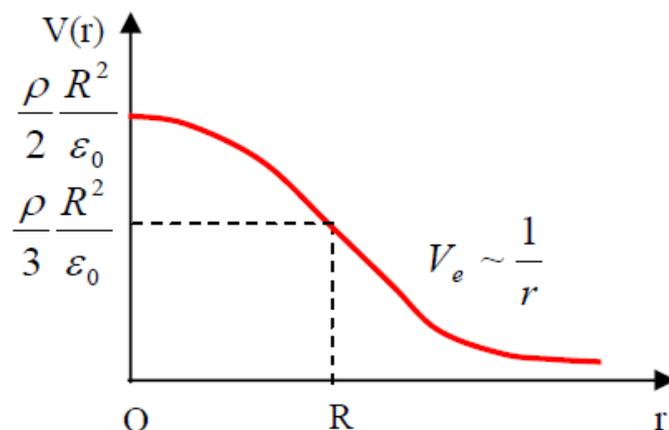


Figure II.24

# Chapitre

# III

## LES CONDUCTEURS

### Objectifs

- Introduire la notion de conducteur.
- Etudier les propriétés électrostatiques des conducteurs.
- Définir les condensateurs et en étudier quelques propriétés.

### III.1 Définition d'un conducteur

On appelle **conducteur** tout corps possédant à l'échelle microscopique des porteurs de charges mobiles susceptibles de se déplacer dans tout le volume du matériau.

Les métaux comme le cuivre sont des conducteurs électriques : ils possèdent des électrons libres pouvant se déplacer dans tout leur volume. Les solutions aqueuses sont également conductrices grâce aux ions qu'elles contiennent.

### III.2 Propriétés des conducteurs à l'équilibre

**Définition :** On dit qu'un conducteur est à l'équilibre électrostatique s'il ne présente pas de déplacements de charges électriques au sein de son volume ou de sa surface.

Du point de vue des charges élémentaires, cela signifie que **le champ électrostatique total à l'intérieur du conducteur est nul ( $\vec{E} = \vec{0}$ )**.

Puisque ce champ électrique dérive d'un potentiel  $V(r)$ , on a :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V(\vec{r}) = \vec{0}$$

Ceci revient à dire que le potentiel électrostatique est le même en tous points du conducteur :

$$V(\vec{r}) = Cst \quad (III. 1)$$

Ceci constitue la propriété fondamentale d'un conducteur à l'équilibre.

### III.2.1 Distribution de charges dans un conducteur

L'équilibre d'un conducteur impose une certaine forme de distribution de charges dans le conducteur. Supposons que les charges soient distribuées avec une distribution volumique  $\rho$ . Prenons un volume quelconque  $V$  situé à l'intérieur d'un conducteur à l'équilibre électrostatique. En vertu du théorème de Gauss, on a

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \iiint \frac{\rho dv}{\epsilon_0} = 0$$

puisque le champ  $\vec{E}$  est nul partout. Cela signifie que  $\rho = 0$  (autant de charges + que de charges -) et donc, qu'à l'équilibre, aucune charge non compensée ne peut se trouver dans le volume occupé par le conducteur. Toutes les charges non compensées se trouvent donc nécessairement localisées à la surface du conducteur.

Ce résultat peut se comprendre par l'effet de répulsion que celles-ci exercent les unes sur les autres. A l'équilibre, les charges tendent donc à se trouver aussi éloignées les unes des autres qu'il est possible de le faire.

### III.2.2 Lignes de champ

Nous avons vu que, à l'intérieur d'un conducteur (chargé ou non) le champ électrostatique total est nul. Mais ce n'est pas forcément le cas à l'extérieur, en particulier si le conducteur est chargé. Puisqu'un conducteur à l'équilibre est équipotentiel, cela entraîne alors que, sa surface étant au même potentiel, le champ électrostatique est normal à la surface d'un conducteur

D'où l'allure des lignes de champ :

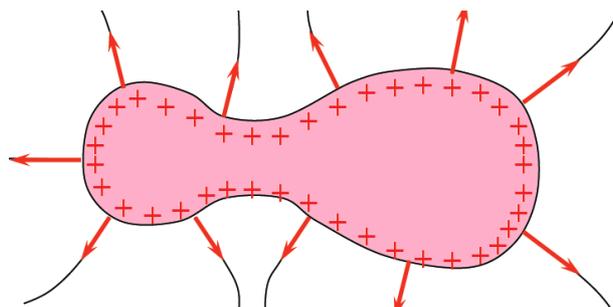


Figure III.1

### III.2.3 Champ électrique au voisinage d'un conducteur : théorème de Coulomb

Considérons un conducteur de forme quelconque. On se propose de calculer le champ électrique en un point au voisinage immédiat de la surface externe du conducteur. Construisons, pour cela, une surface de Gauss cylindrique, dont une base se trouve à l'extérieur de la surface et l'autre base à une profondeur telle que la charge superficielle soit totalement à l'intérieur du cylindre (figure III.2). En appliquant le théorème de Gauss sur cette surface fermée, nous obtenons:

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Comme mentionné dans la sous-section précédente, aux points situés au voisinage immédiat de la surface du conducteur, le champ est normal à la surface. Le champ étant nul partout à l'intérieur du conducteur, on ne tient compte que du flux à travers la surface située

à l'extérieur du conducteur. Le flux sortant de la surface latérale du cylindre étant nul, il ne reste plus que celui qui sort de la base, soit

$$\phi = E \cdot S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

où  $\sigma S$  est la charge nette comprise à l'intérieur de la surface de Gauss. On obtient alors :

$$E = \sigma / \epsilon_0 \text{ soit vectoriellement : } \vec{E} = \sigma \vec{n} / \epsilon_0$$

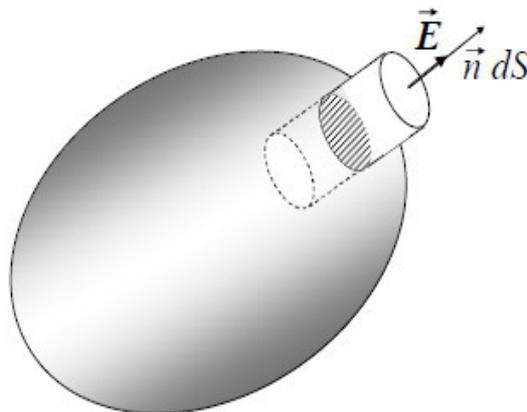


Figure III.2

C'est l'expression du champ électrostatique, au voisinage immédiat d'une surface conductrice chargée. C'est la formulation du *théorème de Coulomb*.

**Théorème :** le champ électrostatique à proximité immédiate d'un conducteur portant une charge de densité surfacique  $\sigma$  vaut :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n} \quad (III.2)$$

où  $\vec{n}$  est un vecteur unitaire normal au conducteur et orienté vers l'extérieur.

### III.2.4 Pression électrostatique

Soient deux points  $M$  et  $M'$  infiniment proches de la surface d'un conducteur de densité surfacique  $\sigma$ ,  $M$  situé à l'extérieur tandis que  $M'$  est situé à l'intérieur. Considérons maintenant une surface élémentaire  $dS$  située entre ces deux points. Soit  $\vec{E}_1$  le champ créé en  $M$  par les charges situées sur  $dS$  et  $\vec{E}_2$  le champ créé en  $M$  par toutes les autres charges situées à la surface du conducteur (figure III. 3).

Le théorème de Gauss appliqué au cylindre élémentaire indiqué sur la figure donne :

$$E_1 S + E_1 S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

Le champ extérieur créé par l'élément  $dS$  seul est donc :

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n}$$

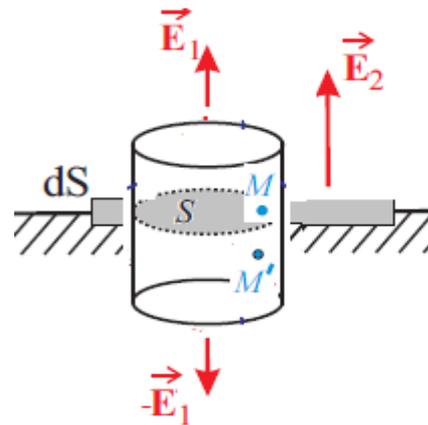


Figure III.3

Or le champ extérieur au voisinage de  $dS$  pris sur le conducteur chargé est selon l'équation (III.2)  $\vec{E} = \sigma \vec{n} / \epsilon_0$ .

On en déduit que le champ créé par le reste du conducteur (conducteur privé de  $dS$ ) est :

$$\vec{E}_2 = \vec{E} - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n}$$

L'élément  $\sigma dS$  « ne voyant pas » son propre champ, ne subit que l'action du champ  $\vec{E}_2$ . Il en résulte une force :

$$\vec{dF} = \sigma dS \vec{E}_2 = \frac{\sigma^2 dS}{2\epsilon_0} \vec{n}$$

On peut ainsi définir une pression électrostatique s'exerçant en tout point de la surface du conducteur chargé :

$$P = \frac{dF}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \quad (III.3)$$

ou encore

$$P = \frac{dF}{dS} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \quad (III.4)$$

où  $E$  est la norme du champ à la surface du conducteur.

### III.2.5 Capacité d'un conducteur isolé

Considérons un conducteur isolé en équilibre électrostatique, porteur d'une charge  $Q$ , répartie sur sa surface externe avec une densité surfacique  $\sigma$  telle que :

$$Q = \iint_{\text{Surface}} \sigma(p) \cdot dS$$

Le conducteur étant considéré seul dans l'espace, son potentiel est dû à la seule présence des charges électriques à sa surface et indépendant du point  $P$  considéré à cette surface, soit :

$$V = V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{\text{Surface}} \frac{\sigma(P)}{PM} dS_p$$

Imaginons une charge  $Q$  multipliée par un scalaire  $\alpha$  quelconque. La charge surfacique  $\sigma(p)$  en tout point  $P$  de la surface sera multipliée par ce paramètre  $\alpha$  et ce sera aussi le cas du potentiel  $V$  du conducteur.

Nous en déduisons que la charge d'un conducteur seul dans l'espace est proportionnelle au potentiel de ce conducteur, l'origine des potentiels étant choisie à l'infini. Le coefficient de proportionnalité est qualifié de *capacité* du conducteur seul dans l'espace :

$$Q = CV \quad (III.5)$$

Cette capacité ne dépend a priori que du détail de la forme géométrique de la surface du conducteur.

- **Exemple d'un conducteur sphérique seul dans l'espace**

Un conducteur sphérique de rayon  $R$  porteur d'une charge  $Q$  à l'équilibre présente, du fait de sa symétrie sphérique, une charge surfacique uniforme  $\sigma = Q/4\pi R^2$ .

À l'extérieur de la sphère, le champ et le potentiel ont pour expression :

$$\vec{E} = Q\vec{e}_r/4\pi\epsilon_0 r^2 = \sigma R^2\vec{e}_r/\epsilon_0 r^2 \text{ et } V(r) = Q/4\pi\epsilon_0 r = \sigma R^2/\epsilon_0 r$$

En particulier, à la surface du conducteur sphérique, pour  $r = R$ , le potentiel a pour valeur  $V = Q/4\pi\epsilon_0 R$  et nous en déduisons la valeur de la capacité d'une sphère de rayon  $R$  isolée :

$$C = Q/V = 4\pi\epsilon_0 R$$

### III.3 Phénomènes d'influence

#### III.3.1 Théorème des éléments correspondants

Soient deux conducteurs ( $A$ ) et ( $B$ ), placés l'un à côté de l'autre et portant des densités surfaciques  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  à l'équilibre. S'ils ne sont pas au même potentiel, des lignes de champ électrostatique relient ( $A$ ) à ( $B$ ) (figure III.4). Soit un petit contour fermé  $C_1$  situé sur la surface de ( $A$ ) tel que l'ensemble des lignes de champ s'appuyant sur  $C_1$  rejoignent ( $B$ ) et y dessinent un contour fermé  $C_2$  (on en déduit par construction que toutes les lignes de champ s'appuyant sur la surface  $A$  bornée par  $C_1$  se terminent sur la surface  $B$  bornée par  $C_2$ ).

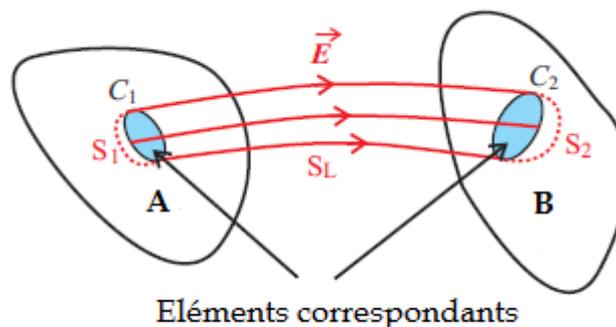


Figure III.4

L'ensemble de ces lignes de champ constitue ce qu'on appelle un tube de flux : le flux du champ électrostatique à travers la surface latérale  $S_L$  dessinée par ce tube est nul

par construction ( $\vec{E} \cdot \vec{dS} = 0$ ). Soit une surface fermée produite  $S = S_L + S_1 + S_2$  où  $S_1$  est une surface qui s'appuie sur  $C_1$  et plonge à l'intérieur de conducteur  $A$  et  $S_2$  une surface analogue pour le conducteur  $B$ .

En vertu du théorème de Gauss, on a

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \iint_{S_L} \vec{E} \cdot \vec{dS}_L + \iint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{dS}_1 + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{dS}_2 = 0 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{q_1 + q_2}{\epsilon_0}$$

où  $q_1$  est la charge contenue sur la surface de ( $A$ ) embrassée par  $C_1$  tandis que  $q_2$  est la charge contenue sur la surface correspondante de ( $B$ ).

**Théorème** : les charges électriques portées par deux éléments correspondants sont égales et opposées.

### III.3.2 Influence partielle

Considérons un conducteur  $A$  électriquement neutre (figure III.5.a).

Approchons de ce dernier, un conducteur  $B$  chargé positivement, tel que représenté sur la figure III.9.b. Le conducteur  $B$  crée dans l'espace et en particulier dans le conducteur  $A$  un champ électrique  $\vec{E}_B$

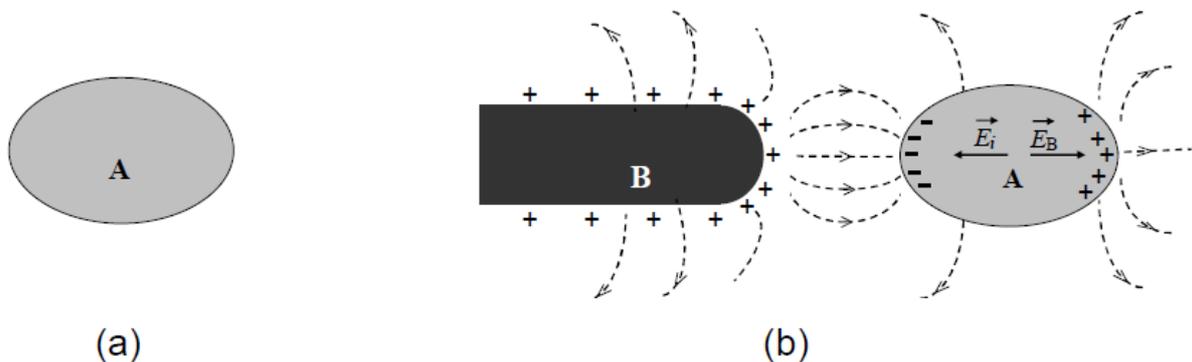


Figure III.5

Les électrons libres du conducteur  $A$  vont, sous l'action de ce champ, se déplacer dans le sens inverse de  $\vec{E}_B$ . Ces électrons s'accumulent progressivement sur la face en regard de  $B$  et forment à l'équilibre des charges négatives dont la résultante est  $-Q$ . A l'inverse, des charges positives, dont la résultante est  $+Q$ , vont apparaître sur l'autre face comme le montre la figure III.5.b. Ces charges, qui résultent d'une

électrisation par influence, apportent leur contribution au champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur du conducteur.

Elles créent un champ induit  $\vec{E}_i$  qui vient s'opposer au champ inducteur  $\vec{E}_B$  et réduire ainsi le champ électrique total. A l'intérieur du conducteur  $A$  les électrons libres ne cessent leur mouvement que lorsque le champ électrique total s'annule. Le système formé par les deux conducteurs atteint alors un état d'équilibre.

Dans cette expérience, le conducteur  $A$  a été électrisé par influence. Le système étant isolé, le principe de la conservation de la charge implique que la somme des charges induites est nulle. Ainsi, lors d'une électrisation par influence, il n'y a aucune création, mais simplement un déplacement de charges.

### III.3.3 Influence totale

On parle d'influence totale lorsque toutes les lignes de champ partant de  $B$  aboutissent sur  $A$ . Ceci est obtenu lorsque  $A$  entoure complètement  $B$  (figure III.6).

L'application du théorème des éléments correspondants, montre que la charge qui apparaît sur la surface interne de  $A$  est égale et opposée à la charge du conducteur  $B$ .

$$Q_1 = Q_B = -Q_{A,int}$$

On peut donc résumer la situation de la manière suivante :

- dans la partie massive de ( $B$ ):  $\vec{E}_1 = \vec{0}$ ,
- sur la surface de ( $B$ ) : charge  $Q_1 > 0$  créant  $\vec{E}$ ,
- sur la surface interne de ( $A$ ): charge  $-Q_1$ ,
- dans la partie massive de ( $A$ ):  $\vec{E}_2 = \vec{0}$ ,
- sur la surface externe de ( $A$ ): apparition de la charge  $Q_{A,ext} = +Q_1$ , pour assurer la neutralité de  $A$  (si l'on suppose  $A$  neutre au départ),
- à l'extérieur des deux conducteurs : le champ est celui créé par la seule charge  $+Q_1$  portée par la surface externe de ( $A$ ).

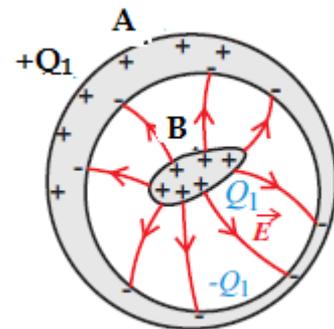


Figure III.6

### III.4 Les condensateurs

#### III.4.1 Définition d'un condensateur

On appelle **condensateur** un ensemble de deux conducteurs à l'équilibre en influence totale, de charges respectives  $-Q$  et  $+Q$ . Les conducteurs sont appelés armatures du condensateur.

#### III.4.2 Capacité d'un condensateur

**Définition :** Si  $V_1$  et  $V_2$  sont les potentiels électriques des armatures d'un condensateur et  $Q$  la charge portée par chacune des armatures ( $+Q$  pour l'une et  $-Q$  pour l'autre), on définit la capacité du condensateur par la relation :

$$C = \left| \frac{Q}{V_1 - V_2} \right| \quad (\text{III.6})$$

$C$  s'exprime en farad (F) et traduit la faculté que possède le condensateur à stocker des charges lorsqu'il y a une différence de potentiel donnée entre ses armatures.

##### III.4.2.1 Capacités de quelques condensateurs simples

Dans ce qui suit, nous allons voir plusieurs exemples de calculs de capacités. Pour obtenir la capacité  $C$  d'un condensateur, il faut calculer la relation entre sa charge  $Q$  et sa tension  $U$ , c'est-à-dire :

$$U = V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{C} \quad (\text{III.7})$$

Autrement dit, il faut être capable de calculer la circulation du champ électrostatique entre les deux armatures ainsi que la charge  $Q$ .

##### (a) Condensateur sphérique

On se donne un condensateur sphérique dont les armatures sont portées aux potentiels respectifs  $V_1$  et  $V_2$ , les charges sont  $+Q$  et  $-Q$ . L'armature centrale est une sphère de rayon  $R_1$ , la surface interne de l'armature externe est une sphère de rayon  $R_2$  (voir la figure III.7). D'après le théorème de Gauss, le champ électrostatique en un point  $M$  situé à un rayon  $r$  entre les deux armatures vaut :

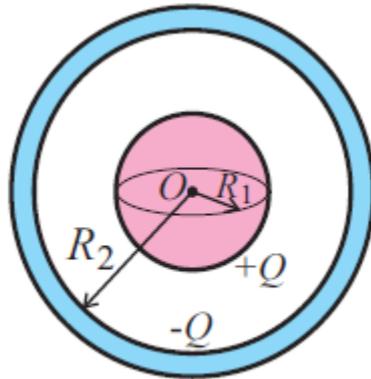
$$\vec{E} = \frac{Q\vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

en coordonnées sphériques, ce qui donne une tension

$$U = V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_2 R_1},$$

et fournit donc une capacité totale :

$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1} \quad (\text{III.8})$$



**Figure III.7**

Si  $(R_2 - R_1)$  est plus petit que  $R_1$ , cette capacité est plus grande que celle de la sphère isolée de rayon  $R_1$ . Ce résultat souligne l'intérêt que présente l'utilisation de tels condensateurs.

Évaluons l'ordre de grandeur d'une telle capacité. Pour un condensateur sphérique tel que  $R_1 = 1 \text{ cm}$ ,  $R_2 = 1.1 \text{ cm}$ , nous obtenons  $C \approx 10^{-11} \text{ F}$ .

### (b) Condensateur cylindrique

Soit un condensateur constitué de deux armatures cylindriques coaxiales de rayons  $R_1$  et  $R_2$  séparées par un vide ( $R_2 > R_1$ ), de longueurs  $l$  quasi-infinie ( $l \gg R_2$ ) et portant sur leurs surfaces en regard les charges  $+Q$  et  $-Q$  (figure III.8). Entre ces deux armatures, le théorème de Gauss permet d'écrire :

$$E 2\pi r l = Q/\epsilon_0 \Rightarrow \vec{E} = Q\vec{e}_r/2\pi\epsilon_0 r l$$

On en déduit :

$$U = V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

D'où la capacité :

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \quad (\text{III.9})$$

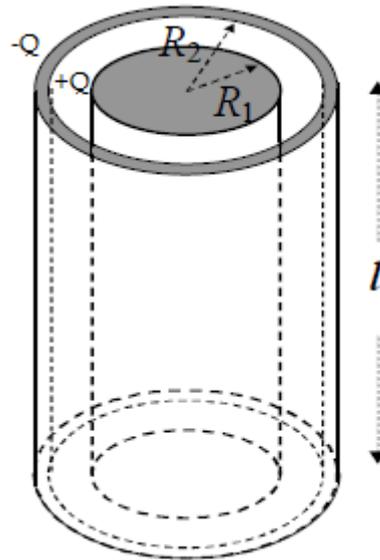


Figure III.8

**(c) Condensateur plan**

On envisage ici le cas d'un conducteur formé de deux plans « infini », tous deux chargés uniformément, l'un avec la charge totale  $+Q$  et l'autre avec  $-Q$ . Ces deux plans sont parallèles et la distance qui les sépare est  $d$  (voit la figure III.9). On notera bien que ces deux plans ne sont pas vraiment « infini », le terme « infini » signifie que leurs dimensions sont très grandes devant  $d$  et qu'on s'intéresse au champ électrique dans une région très éloignée des bords. L'aire des surfaces en regard de ces plans est noté  $S$ .

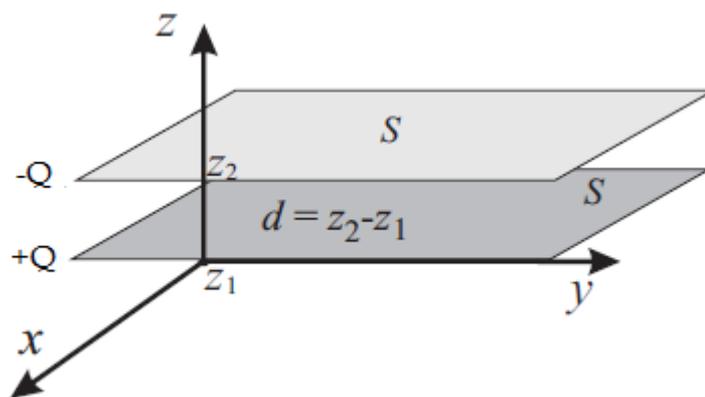


Figure III.9

Dans le paragraphe II.3.3.2 du chapitre II, on a déterminé l'expression du champ électrique créé par un plan infini uniformément chargé

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{z}{|z|} \vec{e}_z$$

Si on note  $\vec{E}_1$  le champ électrique créé par le plan 1 entre les armatures, et  $\vec{E}_2$  celui créé par le plan 2, on a alors :

$$\vec{E}_1 = -(-\sigma) / 2\varepsilon_0 \vec{e}_z, \quad \vec{E}_2 = \sigma / 2\varepsilon_0 \vec{e}_z$$

avec  $\sigma = Q/S$ . Le champ résultant est alors :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_z$$

La capacité de ce conducteur s'obtient en calculant la circulation de  $\vec{E}$  entre les deux armatures :

$$U = V_1 - V_2 = \int_{M_1}^{M_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{S\varepsilon_0} \int_{Z_1}^{Z_2} dz = \frac{Qd}{S\varepsilon_0}$$

en ayant posé  $d\vec{l} = dz \vec{e}_z$ . La capacité du condensateur plan infini est alors :

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d} \tag{III. 10}$$

### Exercice d'application 1

Deux sphères métalliques 1 et 2 concentriques de rayon  $R_1$ ,  $R_2 > R_1$  et  $R_2' > R_2$  sont séparées par l'air. La première sphère est reliée à une source de potentiel  $V_1$  et la seconde à une source de potentiel  $V_2$  (voir la figure II.10).

- 1- Calculer la charge  $Q_1$  de la sphère 1.
- 2- Trouver l'expression de la charge  $Q_2$  de la surface interne de la sphère 2.
- 3- Donner l'expression de la charge  $Q_2'$  portée par l'armature externe de la sphère 2.
- 4- Donner l'expression de la capacité  $C$  du condensateur formé par les deux sphères.
- 5- Quelle est l'expression approchée de  $C$  quand  $R_2$  est très voisin de  $R_1$  :

$$R_2 = R_1 + e.$$

### Solution

- 1- L'application du théorème de Gauss pour  $R_1 < r < R_2$  permet de montrer que le champ électrostatique est le même que celui créé par une charge ponctuelle située au centre de la sphère.

On cherche le champ électrostatique en un point  $M$  situé à une distance  $r$  du centre de la sphère 1. On sait que pour les distributions sphériques de charge, le champ électrostatique est radial :  $\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$

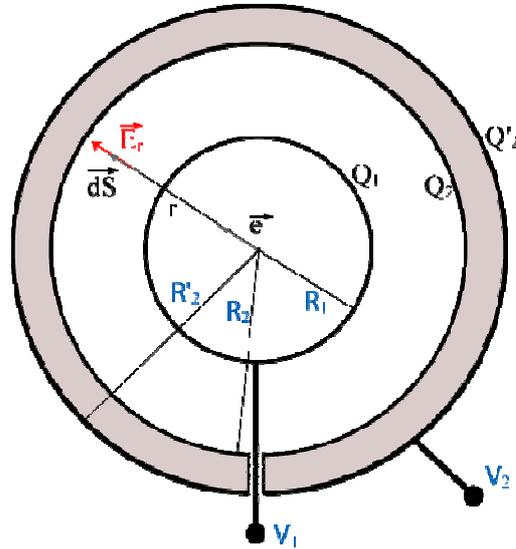


Figure III.10

On prend comme surface de Gauss une sphère de rayon  $r$ . Le flux à travers cette surface est

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \oiint_{(S)} E(r) \cdot dS = E(r) 4\pi r^2$$

La charge de la sphère métallique 1 est répartie sur sa surface. Cette surface est à l'intérieur de la sphère de Gauss précédente.

On a donc  $E = Q_1/4\pi\epsilon_0 r^2$ , ce qui conduit à  $V(r) = Q_1/4\pi\epsilon_0 r + C_1$ . La constante  $C_1$  peut être obtenue en tenant compte de la continuité du potentiel. En effet,  $V(r = R_2) = V_2$  et  $V_2 = Q_1/4\pi\epsilon_0 R_2 + C_1$  donne  $C_1 = V_2 - Q_1/4\pi\epsilon_0 R_2$

L'expression du potentiel est :

$$V(r) = V_2 + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right)$$

On sait aussi que le potentiel de la sphère 1 est  $V_1$  qui est égal à  $V(r = R_1)$  par continuité du potentiel.

On en déduit  $V_1 = V_2 + (Q_1/4\pi\epsilon_0) \cdot (1/R_1 - 1/R_2)$  et donc

$$Q_1 = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} (V_1 - V_2)$$

2- Les deux sphères sont sous influence totale et d'après le théorème des éléments correspondants, la charge interne  $Q_2$  est l'opposée de la charge  $Q_1$ .

$$Q_2 = -4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} (V_1 - V_2) = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} (V_2 - V_1)$$

3- Pour trouver  $Q'_2$ , on recherche d'abord l'expression du potentiel à l'extérieur des deux sphères, en utilisant d'abord le théorème de Gauss pour trouver l'expression du champ.

Pour  $r > R'_2$ , le champ électrostatique a pour expression :

$$E' = \frac{Q_1 + Q_2 + Q'_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q'_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

On en déduit que  $V'(r) = Q'_2/4\pi\epsilon_0 r + C'_2$ . On peut prendre  $C'_2 = 0$  car il n'y a pas de charges à l'infini. Par continuité du potentiel,  $V'(r = R'_2) = V_2$ , le potentiel de la sphère métallique 2 :

$$V_2 = Q'_2/4\pi\epsilon_0 R'_2 \quad \text{qui conduit à } Q'_2 = 4\pi\epsilon_0 R'_2 V_2.$$

4- La capacité est donnée par  $Q_1 = C(V_1 - V_2)$  où  $Q_2 = C(V_2 - V_1)$  et donc :

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

5- Dans ce cas, on a  $R_1 R_2 = R_1^2(1 + e/R_1) \approx R_1^2$  et  $R_2 - R_1 = e$

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1^2}{e} = \epsilon_0 \frac{4\pi R_1^2}{e} = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

On retrouve la formule de la capacité d'un condensateur plan.

### III.4.3 Associations de condensateurs

Pour des raisons pratiques, on utilise des associations de plusieurs condensateurs afin d'emmagasiner le plus d'énergie possible. On distingue deux types de groupements de condensateurs : le groupement en série et le groupement en parallèle. La capacité équivalente des systèmes qui en résultent dépend du groupement choisi.

#### III.4.3.1 Association en série

Soient  $N$  condensateurs de capacités  $C_i$  mis en série les uns derrière les autres. On porte aux potentiels  $V_0$  et  $V_N$  les deux extrémités de la chaîne et on apporte la charge  $Q$  sur le premier condensateur (voir la figure III.11). En supposant que tous les condensateurs sont initialement neutres, il s'établit la charge  $\pm Q$  (par influence) sur les armatures des condensateurs adjacents.

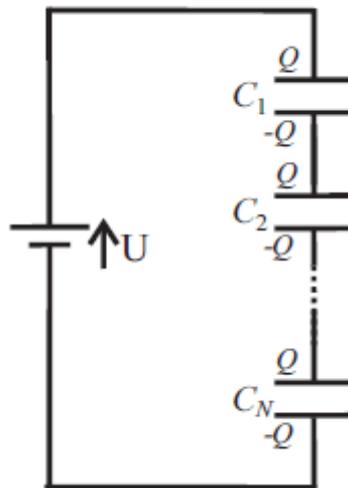


Figure III.11

La tension totale aux bornes de la chaîne de condensateurs s'écrit alors simplement

$$U = V_0 - V_N = (V_0 - V_1) + (V_1 - V_2) + \dots + (V_{N-1} - V_N)$$
$$= \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots + \frac{Q}{C_N} = \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i} \right) Q$$

et correspond à celle d'une capacité unique  $C$  de capacité équivalente

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i} \quad (III.11)$$

### III.4.3.2 Association en parallèle

Soient  $N$  condensateurs, placés en parallèle, avec la même différence de potentiel  $U$  (Figure III.12). On désigne par  $Q_i$  et  $C_i$  la charge électrique et la capacité du  $i^{\text{ème}}$  condensateur, on a

$$Q_i = C_i V$$

La charge électrique totale portée par l'ensemble des condensateurs est alors donnée par :

$$Q = \sum_{i=1}^N Q_i = \sum_{i=1}^N C_i V = V \sum_{i=1}^N C_i$$

ce qui correspond à une capacité équivalente :

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^N C_i \quad (III.12)$$

qui est la somme des capacités individuelles.

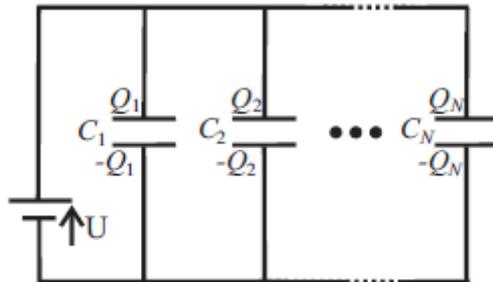


Figure III.12

### III.4.4 Énergie associée à un condensateur

Si nous soumettons les armatures indicées 1 et 2 d'un tel système à une différence de potentiel  $V = V_1 - V_2$ , il apparaît sur les armatures des charges  $Q_1 = -Q_2 = Q = CV$ ,  $C$  étant la capacité du condensateur. L'énergie associée à ces charges libres, habituellement appelée « énergie du condensateur  $U_c$  », est obtenue par :

$$\begin{aligned} U_c &= \frac{1}{2}(Q_1V_1 + Q_2V_2) = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \\ &= \frac{1}{2}CV^2 \end{aligned} \tag{III.13}$$

Cette énergie  $U_c$  joue un rôle très important dans l'étude des condensateurs. Elle correspond notamment à l'énergie que le générateur doit fournir au condensateur pour le charger.

# Chapitre IV

## COURANT ELECTRIQUE

### Objectifs

- Introduire les notions d'intensité et de densité de courant.
- Savoir comment un courant circulant dans un fil conducteur dépend de la différence de potentiel appliquée entre ses extrémités.
- Enoncer la loi d'Ohm et la loi de Joule.

### IV.1 Courants électriques

#### IV.1.1 Origine du courant électrique

Soient deux conducteurs A et B, initialement en équilibre électrostatique, portant des charges  $Q_A$  et  $Q_B$  et dont les potentiels respectifs sont  $V_A$  et  $V_B$  tels que  $V_A > V_B$  par exemple. Dans ces conditions, un champ électrique  $\vec{E}$  existe entre A et B. (Fig. IV. 1.a) Lorsqu'on relie les conducteurs A et B par un fil conducteur, l'équilibre se rompt et un mouvement de charges électriques apparaît, sous l'action d'une force électrique  $\vec{F} = q\vec{E}$ . Ce mouvement se poursuit jusqu'à l'établissement d'un nouvel état d'équilibre dans le nouveau conducteur formé par A, B et le fil (Fig. IV. 1.b).

Cette circulation de charges correspond au passage d'un **courant électrique** dans le fil de connexion. Ce courant est **temporaire**.



L'intensité  $I$  est exprimée en ampères ( $A$ ).

Un courant électrique est **continu** si son intensité  $I$  reste constante au cours du temps.

Le sens du courant reste à définir. En effet, un courant peut être engendré de façon équivalente par un flux de particules chargées positivement dans un sens, par un flux de particules chargées négativement dans l'autre sens ou par une combinaison appropriée des deux flux. Ainsi, on suit la convention suivante, qui provient historiquement de la théorie du « fluide » électrique de Franklin :

Le sens conventionnel du courant  $I$  est celui du mouvement des charges positives.

#### IV.1.4 Vecteur densité de courant

Considérons un fil conducteur de section  $S$ , dans lequel se trouvent  $n$  porteurs de charge  $q$  par unité de volume, animés d'une vitesse moyenne (on dit aussi vitesse d'entraînement ou de dérive)  $\vec{v}$ . Pendant un instant  $dt$ , ces charges parcourent une distance  $\vec{dl} = \vec{v} dt$  (voir figure IV.3). Soit  $\vec{dS}$  un élément infinitésimal de surface mesuré sur la section du fil, orienté dans une direction arbitraire. La quantité de charge électrique,  $dQ$ , qui traverse cette surface pendant  $dt$  est celle contenue dans le volume élémentaire  $dV = \vec{dl} \cdot \vec{dS}$  associé :

$$dQ = nq dV = nq \vec{v} dt \cdot \vec{dS} = dt \vec{J} \cdot \vec{dS}$$

où on a définie un vecteur,  $\vec{J}$ , qui décrit les caractéristiques de l'écoulement de charge véhiculé par les porteurs de courant et qu'on appelle la **densité de courant** :

$$\vec{J} = nq \vec{v} = \rho \vec{v} \quad (IV. 2)$$

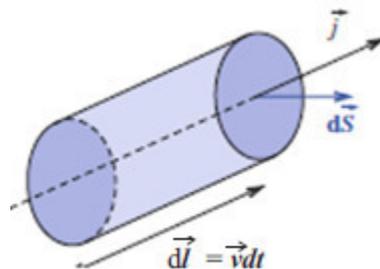


Figure IV.3

exprimée en Ampères par mètre carré ( $A \cdot m^{-2}$ ).

Si on considère, à présent, la section  $S$  du conducteur, la charge totale qui la traverse est :

$$dQ_T = \iint_S dQ = dt \iint_S \vec{J} \cdot \vec{dS}$$

C'est-à-dire :

$$I = \iint_S \vec{J} \cdot \vec{dS} \quad (IV.3)$$

L'intensité du courant électrique traversant une surface  $S$  apparaît comme le flux du vecteur densité de courants  $\vec{J}$  à travers cette surface.

#### IV.1.5 Lignes et tube de courant

Une ligne de courant est une ligne en tout point de laquelle le vecteur densité de courant est tangent.

Un tube de courant est un ensemble de lignes de courant s'appuyant sur un contour  $C$  (Figure IV.4).

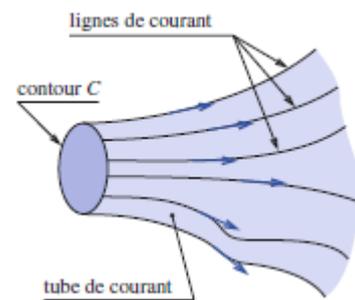


Figure IV.4

#### IV.2 Conductivité électrique : loi d'Ohm locale

Il s'agit d'exprimer la densité de courant  $\vec{J}$  dans un conducteur, en fonction du champ appliqué  $\vec{E}$ , en partant tout simplement du principe fondamental de la dynamique appliqué à une particule de charge  $q$  et de masse  $m$ .

On suppose la variation de  $\vec{E}$  au cours du temps nulle ou faible en chaque point du conducteur (régime stationnaire ou quasi stationnaire).

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} \Rightarrow \vec{v} = q\vec{E}t/m + \vec{v}_0$$

Visiblement, cette vitesse (et par conséquent  $\vec{J}$ ) tend vers l'infini au cours du temps, ce qui ne peut être satisfaisant. La solution consiste à envisager les « chocs » multiples que subit la charge  $q$  dans son mouvement, notamment sur les atomes du réseau cristallin.

Tout d'abord, la vitesse initiale  $\vec{v}_0$  étant aléatoire, sa valeur moyenne  $\vec{v}_0$  est nulle. En désignant par  $\tau$  le temps moyen séparant deux chocs successifs, la vitesse de dérive s'écrit :

$$\vec{v} = \langle \vec{v} \rangle = \frac{q\vec{E}}{m}\tau$$

On en déduit :

$$\vec{J} = \rho\vec{v} = \frac{nq^2\tau}{m}\vec{E}$$

puisque  $\rho = nq$  où  $n$  est le nombre de charges par unité de volume.

La relation cherchée s'écrit :

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} \tag{IV.4}$$

$$\text{où } \sigma = nq^2\tau/m \tag{IV.5}$$

$\sigma$  est la **conductivité électrique** du matériau, elle s'exprime en siemens par mètre.

La loi  $\vec{J} = \sigma\vec{E}$  constitue la loi d'Ohm dans sa forme locale, valable en tout point du conducteur.

Une telle loi implique que les lignes de champ quasi-électrostatique sont également des lignes de courant, indiquant donc le chemin pris par les charges électriques. Par ailleurs, comme  $\sigma$  est positif, cela implique que le **courant s'écoule dans la direction des potentiels décroissants**.

#### IV.2.1 La mobilité des porteurs

La mobilité  $\mu$  est définie par la relation :

$$\vec{v} = \mu\vec{E} \tag{IV.6}$$

et comme  $\vec{v} = q\vec{E}\tau/m$

on a :  $\mu = q\tau/m = \sigma/nq$

La mobilité définie ainsi est une grandeur algébrique, qui a le même signe de la charge  $q$ . Elle s'exprime en  $m^2.V^{-1}.s^{-1}$ .

#### IV.2.2 Résistivité électrique

La résistivité  $\rho$  est définie comme l'inverse de la conductivité :

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{nq\mu} \tag{IV.7}$$

elle s'exprime en  $\Omega.m$ .

### IV.3 Résistance électrique : loi d'Ohm macroscopique

Considérons un conducteur limité par deux sections ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ), portées respectivement aux potentiels  $V_1$  et  $V_2$ , grâce à un générateur fermant le circuit. On peut écrire :

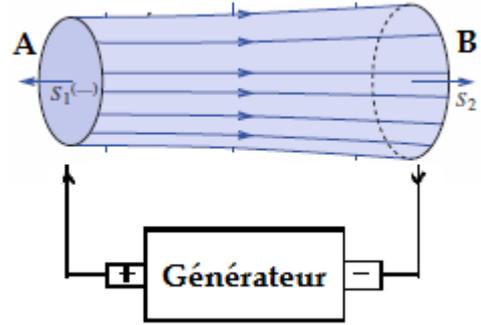


Figure IV.5

$$V_1 - V_2 = \int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{AB} \frac{\vec{j}}{\sigma} \cdot d\vec{l}$$

En régime stationnaire on peut définir la densité de courant en un point comme :

$$j = \frac{I}{S}$$

où  $I$  est l'intensité du courant et  $S$  l'aire de la section droite du conducteur en ce point.

On a donc :

$$V_1 - V_2 = \frac{I}{\sigma} \int_{AB} \frac{dl}{S}$$

En introduisant la résistance  $R$  du conducteur donnée par :

$$R = \frac{1}{\sigma} \int_{AB} \frac{dl}{S}$$

qui s'exprime en ohms ( $\Omega$ ) on obtient :

$$V_1 - V_2 = RI \tag{IV.8}$$

qui constitue la loi d'Ohm macroscopique.

#### ▪ Cas d'un conducteur cylindrique

Dans ce cas, la section est constante, on obtient le lien entre la résistance d'un conducteur (propriété macroscopique) et sa résistivité,  $\rho$  (propriété microscopique) par la relation :

$$R = \frac{1}{\sigma} \int_{AB} \frac{dl}{S} = \frac{l}{\sigma S} = \frac{\rho \cdot l}{S} \tag{IV.9}$$

### Exercice d'application 1

Calculer l'expression de la résistance d'un conducteur annulaire cylindrique, homogène de conductivité  $\sigma$ , dont les faces sont des cylindres de rayons  $r_1, r_2$  et de longueur  $l$ . Elles sont soumises à une différence de potentiel  $V = V_1 - V_2$ .

#### Solution

En raison de la symétrie du problème, les équipotentielles sont des cylindres coaxiaux de surface  $S$  et les lignes de champ et de courant sont radiales.

En tout point  $M$ , à l'intérieur du conducteur règne un champ  $\vec{E}$  tel que :

$$dV = -\vec{E} \cdot \vec{dr}$$

En intégrant de  $r_1$  à  $r_2$ , il vient

$$-\int_{V_1}^{V_2} dV = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot \vec{dr} \Rightarrow V = V_1 - V_2 = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot \vec{dr}$$

D'après la loi d'Ohm on a :  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$

D'où :

$$V = \frac{1}{\sigma} \int_{r_1}^{r_2} \vec{J} \cdot \vec{dr} = \frac{1}{\sigma} \int_{r_1}^{r_2} J \cdot dr$$

D'autre part l'intensité du courant est :

$$I = \iint_S \vec{J} \cdot \vec{dS} \text{ soit } I = J l \int_0^{2\pi} r d\theta = 2\pi r l J$$

$$\Rightarrow J = I / 2\pi r l$$

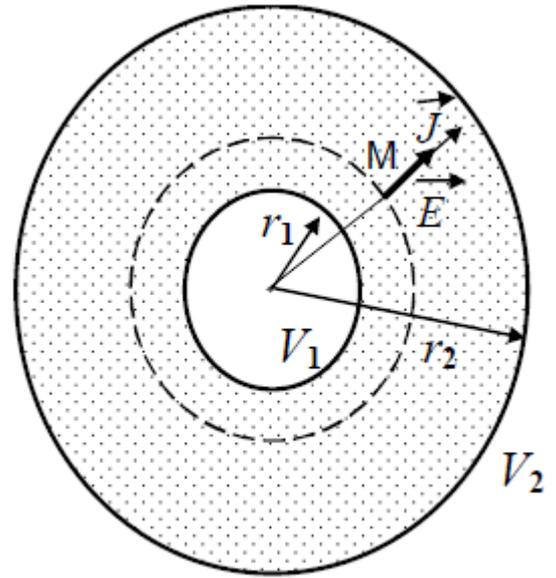


Figure IV.6

En effet  $J$  reste constant et perpendiculaire à la surface  $S = 2\pi r l$  donc parallèle à  $\vec{dS}$ .

A partir des expressions du potentiel et de densité du courant, on peut écrire :

$$V = \frac{I}{2\pi l \sigma} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \cdot dr = \frac{I}{2\pi l \sigma} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Sachant que  $V = RI$ , on en déduit :

$$R = \frac{1}{2\pi l \sigma} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

## IV.4 Association de résistances

### IV.4.1 Résistances en série

Soient  $N$  résistances  $R_i$  mises bout à bout dans un circuit et parcourues par un courant  $I$ . La tension aux bornes de la chaîne est simplement :

$$U = V_0 - V_N = (V_0 - V_1) + (V_1 - V_2) + \dots + (V_{N-1} - V_N) = R_1 I + R_2 I + \dots + R_N I$$

c'est-à-dire analogue à celle obtenue par une résistance unique dont la valeur est :

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^N R_i \quad (IV.10)$$

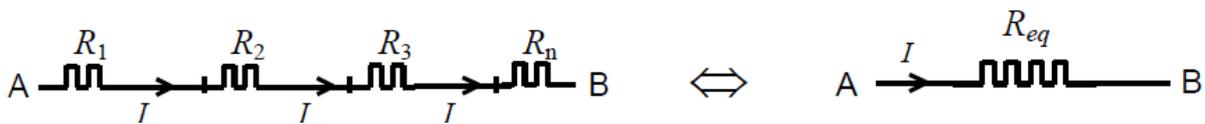


Figure IV.7

### IV.4.2 Résistances en parallèle

Soient  $N$  résistances  $R_i$  mises en parallèle sous une tension  $U = V_1 - V_2$  et alimentées par un courant  $I$ . Le courant se sépare alors en  $n$  courants :

$$I_i = \frac{U}{R_i},$$

dans chacune des  $N$  branches. En vertu de la conservation du courant, on a :

$$I = \sum_{i=1}^N I_i = \sum_{i=1}^N \frac{U}{R_i} = \frac{U}{R_{eq}}$$

c'est-à-dire que l'ensemble des  $N$  branches est analogue à une résistance équivalente en série :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i} \quad (IV.11)$$

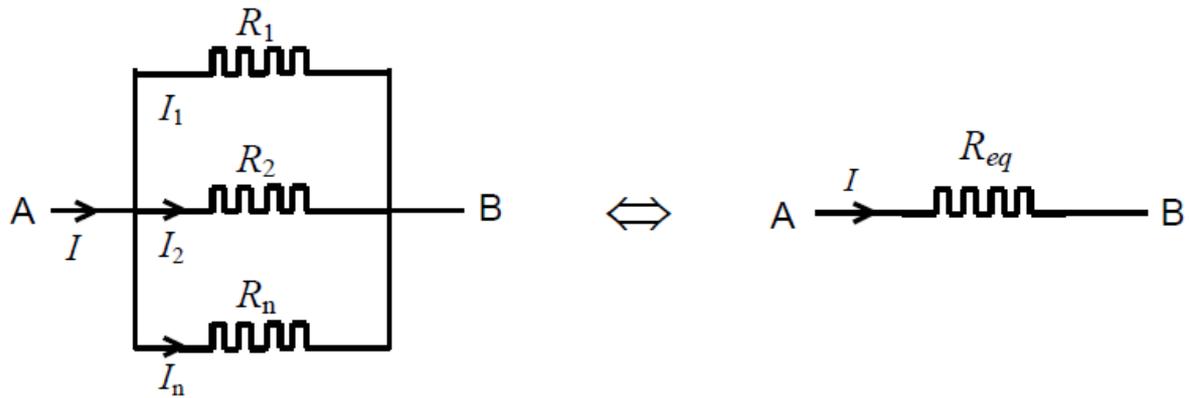


Figure IV.8

### IV.5 L'effet Joule

La circulation d'un courant  $I$  à travers un conducteur électrique, entraîne une perte d'énergie qui se traduit par un échauffement. On peut déterminer l'énergie dissipée pendant le passage du courant.

Si  $dq$  est la quantité de charge qui passe d'un point A à un point B du conducteur, le travail des forces électriques est :

$$dW = (V_A - V_B)dq$$

Cette quantité de charge est reliée au courant par :  $dq = Idt$

$$D'où : dW = (V_A - V_B)Idt$$

Si  $R$  est la résistance de ce conducteur, on a d'après la loi d'Ohm :

$$V_A - V_B = RI$$

Le travail s'écrit alors :

$$dW = RI^2 dt \tag{IV. 12}$$

Cette énergie est dissipée sous forme de chaleur : c'est l'effet Joule

Elle correspond à une puissance :

$$P = \frac{dW}{dt} = RI^2 \tag{IV. 13}$$

Dans le cas d'un conducteur cylindrique, cette expression s'écrit :

$$P = \frac{l(JS)^2}{\sigma S} = \frac{J^2 V}{\sigma}$$

$V$  est le volume du conducteur. En tout point  $M$ , la densité de puissance dissipée par effet Joule est :

$$P = J^2/\sigma \text{ soit } P = J \cdot E$$

Comme les vecteurs  $\vec{J}$  et  $\vec{E}$  sont parallèles on peut écrire :

$$P = \vec{J} \cdot \vec{E} \tag{IV.14}$$

Cette formule est générale.

#### IV.6 Rôle du générateur : force électromotrice

Un générateur électrique est un dispositif qui, placé dans un circuit électrique, est capable de maintenir un champ électrique. Par conséquent, si le générateur établit un champ entre  $A$  et  $B$  dans le conducteur, c'est qu'il est lui-même le siège d'un champ  $\vec{E}_m$  dit champ électromoteur (non électrostatique), qui transporte les charges (supposées positives pour simplifier) de  $V_B$  à  $V_A > V_B$ , leur faisant ainsi remonter le potentiel, alors que le champ électrostatique  $\vec{E}$  les transporte de  $V_A$  et  $V_B$  dans le conducteur. C'est la circulation de ce champ  $\vec{E}_m$  dans le générateur qui assure la différence de potentiel (d.d.p)  $V_A - V_B$ .

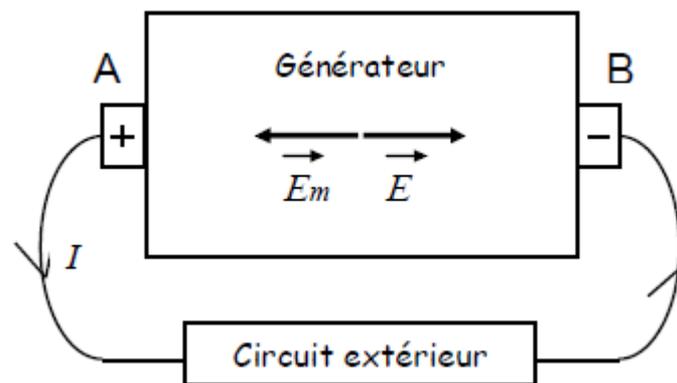


Figure IV.9

Cette circulation est appelée **force électromotrice**  $e$  du générateur (f.é.m.), bien qu'elle ait les dimensions d'un potentiel. On a :

$$e = \int_B^A \vec{E}_m \cdot \vec{dl} = V_A - V_B \tag{IV.15}$$

Le champ  $\vec{E}_m$  peut avoir des origines chimiques (piles et accumulateurs) ou magnétiques (f.é.m. induite).

### IV.6.1 Générateur de tension idéal

Un générateur de tension idéal ne possède pas de résistance interne ; il délivre une tension égale à sa f.é.m  $e$  quelque soit le courant débité. Il est modélisé par le schéma de la figure IV.10 .

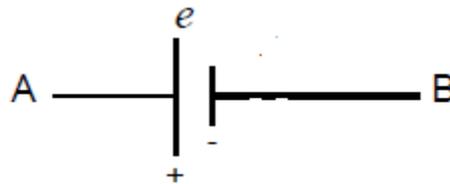


Figure IV.10

### IV.6.2 Générateur de tension réel

Un générateur de tension réel est modélisé par la mise en série d'un générateur de tension idéal et d'une résistance  $r$  appelée résistance interne du générateur (voir la figure IV.11).

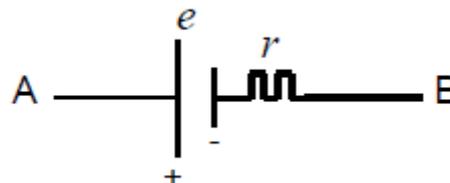


Figure IV.11

### IV.6.3 Récepteur

Alors que pour un générateur, le courant sort du pôle positif et rentre par le pôle négatif, pour un récepteur, le courant suit le chemin inverse : il sort par le pôle négatif. Dans ce cas, la f.é.m. qui est toujours positive, est appelée force contre-électromotrice (f.c.é.m). un récepteur peut être modélisé comme suit :

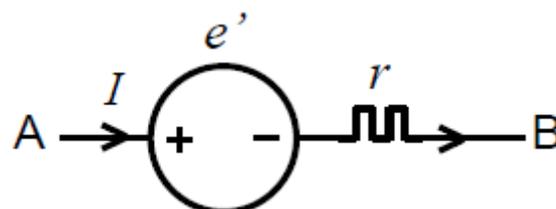


Figure IV.12

-  $e'$  représente la f.c.é.m du récepteur.

-  $r$  est sa résistance interne.

Dans un circuit complexe, comprenant des générateurs et des récepteurs, il peut arriver que le courant d'un générateur sorte par le pôle négatif. Dans ce cas, ce générateur se comporte comme un récepteur : il se charge.

#### IV.7 Les lois de Kirchhoff

- **Première loi**

En un nœud d'un circuit, la somme algébrique des courants est nulle

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0 \text{ (loi des nœuds)} \quad (IV.16)$$

où  $I_i$  désigne la valeur algébrique du  $i^{\text{ème}}$  courant. Cette valeur est affectée du signe (+) si le courant arrive au nœud considéré et du signe (-) s'il s'en éloigne.

- **Deuxième loi**

Pour une maille d'un circuit, la somme algébrique des f.é.m. est égale à la somme algébrique des produits  $RI$ .

$$\sum_{i=1}^n e_i - \sum_{i=1}^n R_i I_i = 0 \text{ (loi des mailles)} \quad (IV.17)$$

On choisit, sur chaque branche, un sens du courant arbitraire. On choisit un sens de parcours de la maille arbitraire. Chaque terme  $RI$  est affecté d'un signe (+) si le sens du parcours choisi coïncide avec le sens du courant. Sinon on l'affecte du signe (-).

La f.é.m. (ou f.c.é.m)  $e$  est affectée du signe du pôle par lequel on sort du générateur (ou du récepteur).

## Exercice d'application 2

On considère le circuit de la figure.

Déterminer les courants  $I_1, I_2, I_3$ , respectivement dans les branches AB, CD, EF.

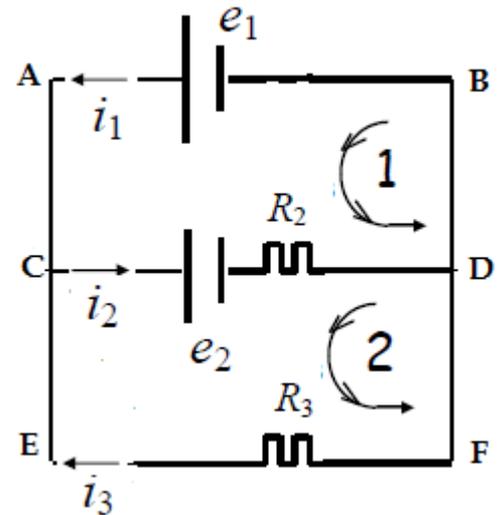


Figure IV.13

### Solution

Les sens des courants et des parcours des mailles étant choisis arbitrairement comme l'indique la figure, on applique :

La loi des nœuds en C :

$$i_2 = i_1 + i_3$$

La loi des mailles :

$$\sum_{i=1}^n (e_i - R_i I_i) = 0$$

Maille 1 :

$$-e_1 + e_2 + R_2 i_2 = 0$$

Maille 2 :

$$-e_2 - R_2 i_2 - R_3 i_3 = 0$$

La résolution de ce système de 3 équations à 3 inconnues  $i_1, i_2, i_3$  donne :

$$i_1 = \frac{(R_2 + R_3)e_1 - R_3 e_2}{R_2 R_3}$$

$$i_2 = \frac{e_1 - e_2}{R_2}$$

$$i_3 = \frac{-e_1}{R_3}$$

À partir de ces expressions, connaissant les valeurs numériques des f.é.m. et des résistances, on peut alors déterminer les véritables orientations des courants.

# Chapitre V

## MAGNETOSTATIQUE

### Objectifs

- Introduire les forces de Laplace et de Lorentz.
- Définir le champ magnétique, le flux du champ magnétique et l'énergie magnétique.
- Enoncer les deux propriétés fondamentales du champ magnétique : la conservation de son flux et le théorème d'Ampère.
- Donner des méthodes de détermination du champ magnétique.

### V.1 Introduction

Un courant électrique crée un champ magnétique, et un fil parcouru par un courant placé dans un champ magnétique subit une force dite de Laplace.

Historiquement ces notions se sont imposées progressivement, la référence à la matière aimantée compliquant l'interprétation des phénomènes.

Tout ou presque débute en 1819 avec Hans-Christian Oersted, physicien danois, qui observe le déplacement d'une aiguille aimantée à proximité d'un fil conducteur parcouru par un courant électrique.

En 1820, Jean-Baptiste Biot et Félix Savart étudient les propriétés de la force « subie par l'un des pôles magnétiques » de l'aiguille aimantée et Pierre-Simon de Laplace traduit cette loi par une formule qui porte le nom de Biot et Savart.

André-Marie Ampère (1775-1836), considéré comme le fondateur de l'électromagnétisme, déduit de cette étude la notion et les propriétés du champ magnétostatique créé par des courants.

Le choix du nom de ce physicien français, pour l'unité d'intensité électrique dans le système international d'unités, est une reconnaissance de ses travaux en électricité.

Au lieu de suivre l'ordre historique, et partir des lois de Biot et de Laplace, nous allons commencer par étudier l'action d'un champ magnétique sur une charge électrique en mouvement. Cette force, découverte par Lorentz, à la fin du dix-neuvième siècle va nous permettre de retrouver la force de Laplace. Puis nous donnerons, avec démonstration, la loi de Biot à partir de laquelle on calcule les champs magnétiques créés par différents circuits électriques.

## V.2 Loi de Lorentz

La force agissant sur une charge ponctuelle  $q$  dépend généralement non seulement de la position de cette charge mais également de sa vitesse  $\vec{v}$ . Cette force  $\vec{F}$  est décomposée en deux composantes, la composante électrique  $\vec{F}_e$  (qui ne dépend pas de la vitesse de la charge) et la composante magnétique  $\vec{F}_m$  (qui dépend de la vitesse de la charge). Toutes les propriétés de la force magnétique peuvent être décrites par l'introduction de la notion de champ magnétique noté usuellement  $\vec{B}$  qui s'exprime en tesla ( $T$ ). La force magnétique  $\vec{F}_m$  est décrite par :

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (V.1)$$

La force résultante agissant sur la particule chargée est appelée force de Lorentz ; elle s'écrit :

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}] \quad (V.2)$$

Cette définition est universelle, elle s'applique aussi bien pour les champs stationnaires que pour les champs dépendant du temps et quelle que soit la vitesse  $\vec{v}$ .

L'expression de la force de Lorentz peut être considérée comme la définition du champ électrique  $\vec{E}$  et du champ magnétique  $\vec{B}$ . Le champ magnétique  $\vec{B}$ , contrairement au champ électrique  $\vec{E}$ , n'exerce aucune force sur une charge immobile.

### V.3 Loi de Laplace

Lorsqu' un fil conducteur, parcouru par un courant  $I$ , est placé dans un champ magnétique  $\vec{B}$ , chaque élément  $d\vec{l}$  du fil subit une force :

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} \quad (V.3)$$

Cette force est perpendiculaire au plan formé par le champ  $\vec{B}$  et l'élément de courant considéré. Son sens est donné par la règle du bonhomme d' Ampère.

Le bonhomme d' Ampère, parcouru par le courant  $I$ , des pieds vers la tête, a la force à sa gauche lorsqu'il regarde les lignes de champ.

L'expression de la force de Lorentz nous permet de retrouver la force de Laplace.

Considérons par exemple, un fil parcouru par un courant  $I$  placé dans un champ magnétique  $\vec{B}$ . Ce courant  $I$  étant associé au déplacement des charges le long du fil à la vitesse  $\vec{v}$ , chaque charge électronique  $q$  subit la force de Lorentz  $q\vec{v} \times \vec{B}$ . S'il y a  $n$  charges par unité de volume, le nombre de charges élémentaires contenues dans un volume infinitésimal  $d\tau$  est égal à  $nd\tau$  et la force  $d\vec{F}$  agissant sur cet élément de volume est donc :

$$d\vec{F} = nq d\tau \vec{v} \times \vec{B}$$

La densité de courant étant par définition égale à  $\vec{j} = nq\vec{v}$ , la force  $d\vec{F}$  agissant sur l'élément de volume  $d\tau$  est égale à :

$$d\vec{F} = d\tau \vec{j} \times \vec{B}$$

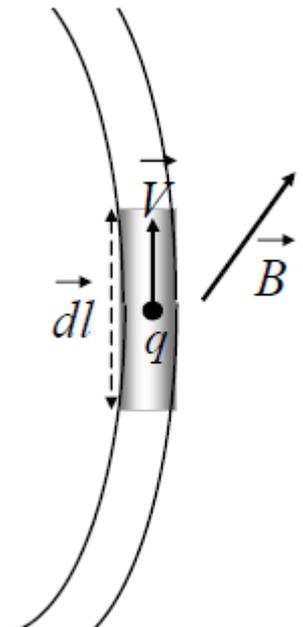


Figure V.1

Si le fil est de section uniforme  $S$ , le volume  $d\tau$  correspond à une longueur  $d\vec{l}$  de fil,

$d\tau = \vec{S} \cdot d\vec{l}$  nous pouvons alors réécrire la force :

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

C'est l'expression de la loi de Laplace.

## V.4 Expressions du champ magnétique

### V.4.1 Champ magnétique créé par une charge en mouvement

Le champ magnétique créé en un point  $M$  par une particule de charge  $q$  située en un point  $P$  et animée d'une vitesse  $\vec{v}$  dans un référentiel galiléen est :



Figure V.2

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} \quad (V.4)$$

Où  $\mu_0 = 1/\epsilon_0 c^2$ , ce facteur est la perméabilité du vide : il décrit la capacité du vide à « laisser passer » le champ magnétique. Sa valeur dans le système d'unités international MKSA est :

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} H \cdot m^{-1} \quad (H \text{ pour Henry}) \quad (1\text{Henry} = 1VA^{-1}s).$$

De même que pour le champ électrostatique, le principe de superposition s'applique au champ magnétique. Si on considère  $N$  particules alors le champ magnétique créé en un point  $M$  quelconque de l'espace sera la somme vectorielle des champs créés par chaque particule.

$$\vec{B}(M) = \sum_{i=1}^N \vec{B}_i(M) \quad (V.5)$$

### V.4.2 Champ magnétique créé par un ensemble de charges en mouvement

Considérons  $N$  particules de charges  $q_i$  situés en des points  $P_i$  et de vitesse  $\vec{v}_i$ . En vertu du principe de superposition, le champ magnétique créé en un point  $M$  est la somme vectorielle des champs créés par chaque particule et vaut

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N \frac{q_i \vec{v}_i \times \overrightarrow{P_i M}}{\|\overrightarrow{P_i M}\|^3} \quad (V.6)$$

Si le nombre de particules est très grand dans un volume  $V$  donné et qu'on s'intéresse à des échelles spatiales bien plus grandes que la distance entre ces particules, il est

avantageux d'utiliser une description continue. Il faut donc définir des distributions continues comme nous l'avons fait en électrostatique.

Le passage à la limite continue consiste à assimiler tout volume élémentaire  $dV$ , situé autour d'un point  $P$  quelconque de la distribution de charges en mouvement, à une charge  $dq$  animée d'une vitesse moyenne  $\vec{v}$ . Le champ magnétique résultant s'écrit alors

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{dq \vec{v} \times \overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} \quad (V.7)$$

où l'intégrale porte sur le volume  $V$  total embrassé par ces charges. En toute généralité, considérons  $\alpha$  espèces différentes de particules (ex : électrons, ions) chacune animée d'une vitesse  $\vec{v}_\alpha$  de charge  $q_\alpha$  et d'une densité numérique  $n$ . On peut alors écrire  $dq = \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \vec{v}_\alpha dV$ , où la somme porte sur le nombre d'espèces différentes et non sur le nombre de particules. On reconnaît ainsi l'expression générale du vecteur densité locale de courant  $\vec{J} = \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \vec{v}_\alpha$ .

L'expression du champ magnétique créé par une distribution volumique de charges quelconque est donc :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}(P) \times \overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} dV \quad (V.8)$$

Cette dernière expression constitue la loi de Biot-Savart pour le champ magnétique  $\vec{B}$  ; elle exprime le champ magnétique créé au point  $M$  par les vecteurs densité de courants  $\vec{J}(P)$  localisés aux points  $P$  à l'intérieur du volume  $V$ .

#### V.4.3 Champ créé par un circuit électrique (formule de Biot et Savart)

Dans le cas particulier d'un circuit filiforme, parcouru par un courant permanent  $I$ , une expression pratique plus intéressante peut être obtenue pour calculer  $\vec{B}$  en fonction du courant  $I$ . D'après l'équation V.7, le champ magnétique élémentaire  $d\vec{B}$  créé par la charge  $dq$  se déplaçant à la vitesse  $\vec{v}$  est

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dq \vec{v} \times \overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} \quad (V.9)$$

Puisque  $I = dq/dt$ , on peut réécrire pour un élément du circuit  $d\vec{l}_p$

$$dq\vec{v} = dq \frac{d\vec{l}_P}{dt} = \frac{dq}{dt} d\vec{l}_P = I d\vec{l}_P$$

L' équation V.9 peut être transformée pour donner le champ élémentaire  $\vec{dB}$  produit par un élément de courant  $I d\vec{l}_P$  :

$$\vec{dB}(M) = \frac{\mu_0 I d\vec{l}_P \times \vec{PM}}{4\pi \|\vec{PM}\|^3}$$

soit avec une écriture plus légère :

$$\vec{dB}(M) = \frac{\mu_0 I d\vec{l}_P \times \vec{u}}{4\pi \|\vec{PM}\|^2}$$

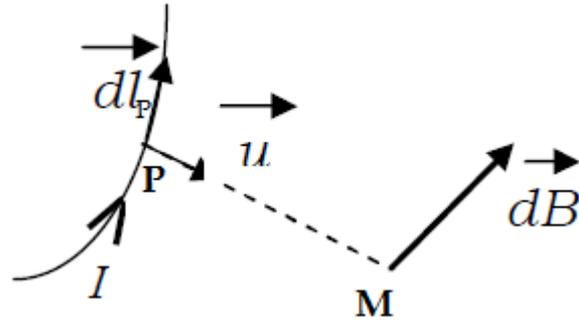


Figure V.3

où  $\vec{u}$ , est un vecteur unitaire pointant de l'élément de courant vers le point où on calcule le champ qu'il produit.

**Loi de Biot et Savart** : en un point  $M$  quelconque de l'espace, le champ magnétique créé par un circuit parcouru par un courant permanent  $I$  est :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\Gamma_{AB}} \frac{d\vec{l}_P \times \vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} \quad (V.10)$$

où  $P$  est un point quelconque le long du circuit  $\Gamma_{AB}$ .

### Exercice d'application 1

Soit un fil vertical infini parcouru par un courant constant  $I$ . Trouver l'expression du champ magnétique créé par ce courant à une distance  $r$  du fil en utilisant la formule de Biot et Savart.

#### Solution

L'expression du champ créé par un élément de courant est

$$\vec{dB}(M) = \frac{\mu_0 I d\vec{l}_P \times \vec{PM}}{4\pi \|\vec{PM}\|^3}$$

Dans cette formule, les variables sont  $z$ ,  $\vec{u}$ ,  $l$  et  $\alpha$ , l'angle entre la normale au fil et  $\vec{u}$ . Le calcul le plus simple se fait avec l'angle  $\alpha$ .

On va utiliser un repère cylindrique  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$

Dans ce repère,  $d\vec{l}_P \times \overrightarrow{PM} = dz \vec{e}_z \times l \vec{u} = dz l \cos \alpha \vec{e}_\theta$

On a aussi  $\text{tg } \alpha = z/r$  et  $\cos \alpha = r/l$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\cos \alpha}{r^2} \frac{r d\alpha}{\cos^2 \alpha} \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \cos \alpha d\alpha \vec{e}_\theta$$

En intégrant de  $-\pi/2$  à  $\pi/2$ , on trouve l'expression du champ magnétique :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

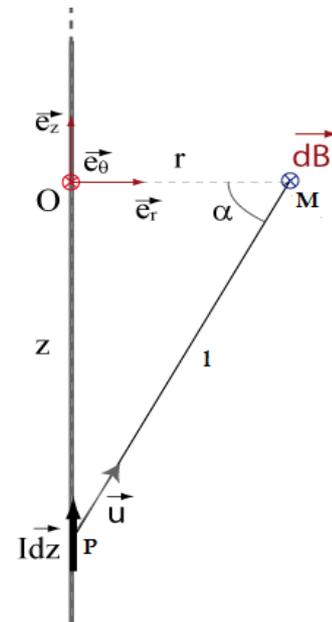


Figure V.4

### Exercice d'application 2

Une spire circulaire de rayon  $R$  est parcourue par un courant d'intensité constante  $I$ . Trouver l'expression du champ magnétique créé par ce circuit en un point  $M$  sur l'axe de la spire à une distance  $x$  de son centre. On exprimera le résultat en fonction de l'angle sous lequel on voit la spire à partir du point  $M$ .

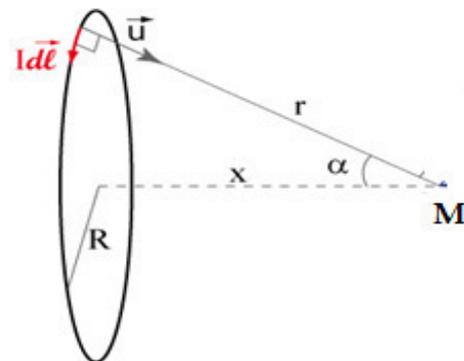


Figure V.5

### Solution

Tout plan qui contient l'axe de la spire et le point  $M$  où on calcule le champ magnétique est un plan d'antisymétrie car le courant arrive d'un côté et repart de l'autre. Le champ magnétique est contenu dans ce plan. Le champ magnétique en un point  $M$  de l'axe est donc sur l'axe de la spire. On va donc rechercher l'expression de la composante sur cet axe du champ magnétique créé par un élément de courant.

L'expression du champ créé par un élément de courant est :

$$\vec{dB}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{dl}_P \times \vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{dl} \times \vec{u}}{r^2}$$

et la composante sur l'axe est

$dB_x = \mu_0 I dl \sin \alpha / 4\pi r^2$  où  $\alpha$  est l'angle sous lequel on voit la spire du point  $M$  tel que

$$\sin \alpha = R/r$$

Dans cette dernière expression, la seule variable est  $l$ . En intégrant sur toute la spire, on obtient :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I \sin \alpha}{4\pi r^2} R \int_0^{2\pi} d\theta \vec{e}_x = \frac{\mu_0 I \sin^3 \alpha}{4\pi R^2} 2\pi R \vec{e}_x$$

Cette expression peut aussi s'écrire en fonction de  $x$  en utilisant

$\sin \alpha = R/r = R/\sqrt{R^2 + x^2}$  et on obtient

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I R^2}{2} \frac{1}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \vec{e}_x$$

### V.5 Interaction entre deux fils électriques

Le système présenté ici est constitué de deux fils électriques rectilignes parcourus par des courants d'intensités respectives  $I_1$  et  $I_2$ . Ces deux fils sont parallèles, distants de  $a$  et « infinis » (leurs longueurs sont très grandes par rapport à  $a$ ). Chaque fil est plongé dans le champ magnétique produit par l'autre fil et subit donc une force exercée par ce champ. Le champ  $\vec{B}_1$  produit par le fil 1 est perpendiculaire au plan des deux fils et orienté comme le montre la figure suivant la règle du « bonhomme d'Ampère » : celui-ci, lorsqu'il est parcouru par  $I_1$ , des pieds vers la tête, voit en  $M$  le champ à sa gauche. D'après la loi de Biot, le champ a pour module (exercice d'application 1) :

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$$

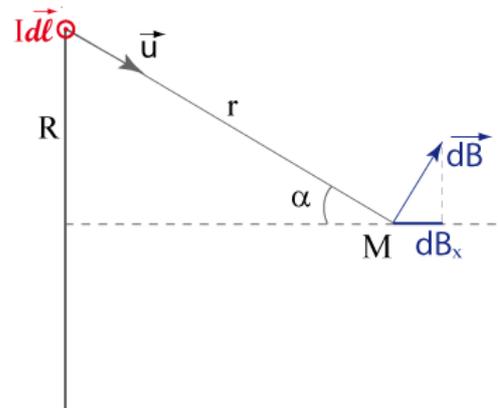


Figure V.6

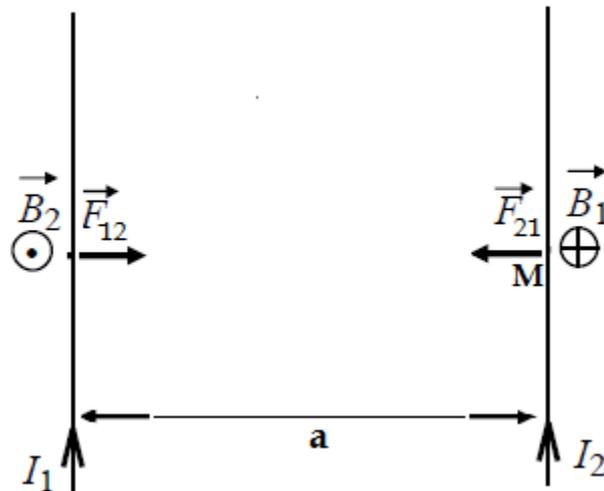


Figure V.7

Ce champ exerce, sur la longueur  $l_2$  du fil 2, une force  $\vec{F}_{21}$  dirigée et orientée comme l'indique la figure. Son module est en vertu de la loi de Laplace :

$F_{21} = B_1 I_2 l_2$  soit en remplaçant  $B_1$  par sa valeur :

$$F_{21} = \frac{\mu_0}{2\pi a} I_1 I_2 l_2 \quad (V.11)$$

On retrouve une expression similaire pour  $F_{12}$ , à partir du champ  $\vec{B}_2$  produit par le fil 2. On constate que des courants de même sens s'attirent mutuellement. Par contre, des courants de sens opposés se repoussent. Le module de la force magnétique par unité de longueur exercée sur chaque fil (par exemple,  $F_{21}/l_2$  sur le fil 2) est le même :

Module de la force magnétique par unité de longueur entre deux fils parallèles

$$\frac{F_B}{l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} \quad (V.12)$$

## V.6 Flux du champ magnétique

### V.6.1 Conservation du flux magnétique

Nous avons vu que la forme microscopique de la loi de Biot-Savart permet de calculer le champ magnétique créé par n'importe quelle distribution de densité de courant  $\vec{j}$ . Cette loi nous permet d'en déduire deux lois fondamentales de la magnétostatique. Pour ce faire, nous allons d'abord écrire l'équation V.8 avec une

notation un peu plus sophistiquée où  $\vec{r}_M$  indique la position du point de mesure du champ  $M$  et  $\vec{r}_P$  indique la position de la source du champ  $P$ . L'élément de volume,  $dV$  autour du point  $P$  sera ici dénoté  $\overrightarrow{d^3r_P}$  et la forme microscopique de la loi de Biot-Savart avec cette notation s'écrit :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}_P) \times (\vec{r}_M - \vec{r}_P)}{\|\vec{r}_M - \vec{r}_P\|^3} \overrightarrow{d^3r_P}$$

Commençons par prendre la divergence de ce champ au point  $M$  :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}_P) \times (\vec{r}_M - \vec{r}_P)}{\|\vec{r}_M - \vec{r}_P\|^3} \overrightarrow{d^3r_P}$$

Bien entendu, l'opérateur  $\vec{\nabla}$  n'agit que sur les coordonnées du point  $M$  et pas du tout sur celles de  $P$  ou du courant  $\vec{J}$ . On peut donc faire entrer cet opérateur à l'intérieur de l'intégrale de volume :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{J}(\vec{r}_P) \times (\vec{r}_M - \vec{r}_P)}{\|\vec{r}_M - \vec{r}_P\|^3} \overrightarrow{d^3r_P}$$

Pour calculer cette intégrale, il convient de transformer l'expression à intégrer en utilisant les propriétés de différenciation d'un produit vectoriel

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b})$$

et le fait que  $\vec{\nabla}$  n'opère pas sur  $\vec{J}$  :

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{J}(\vec{r}_P) \times (\vec{r}_M - \vec{r}_P)}{\|\vec{r}_M - \vec{r}_P\|^3} = -\vec{J}(\vec{r}_P) \cdot \vec{\nabla} \times \frac{\vec{r}_M - \vec{r}_P}{\|\vec{r}_M - \vec{r}_P\|^3}$$

Le second terme de l'équation précédente est toujours nul (voir application 2 du chapitre 1). Nous obtenons la relation fondamentale :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{V.13}$$

Cette équation est absolument générale, aucune condition particulière sur la forme du circuit n'ayant été nécessaire pour l'établir. Elle s'applique à toutes les distributions de courants.

Cette propriété locale du champ magnétique a un équivalent macroscopique. En effet, si nous calculons le flux de  $\vec{B}$  à travers toute surface fermée  $S$  enveloppant le volume  $V$ , en vertu du théorème de Green, nous obtenons :

$$\Phi = \oiint_{(S)} \vec{B} \cdot \overrightarrow{dS} = \iiint_V \text{div } \vec{B} \, dV = 0 \tag{V.14}$$

Le flux du champ magnétique à travers toute surface fermée est strictement nul, Par conséquent, le "flux magnétique"  $\Phi$  est conservatif.

La loi de conservation du flux magnétique permet de montrer que :

Le flux du vecteur champ magnétique  $\vec{B}$  à travers toute surface s'appuyant sur un même contour est le même.

En effet, considérons un contour  $C$  avec le sens de parcours indiqué sur la figure V.8 et, dans une première étape, deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$  placés de part et d'autre de  $C$  et s'appuyant sur ce contour. L'ensemble formé par  $S_1$  et  $S_2$  constitue une surface fermée  $S$ . En orientant cette surface vers l'extérieur, la loi de conservation du flux donne :

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = 0$$

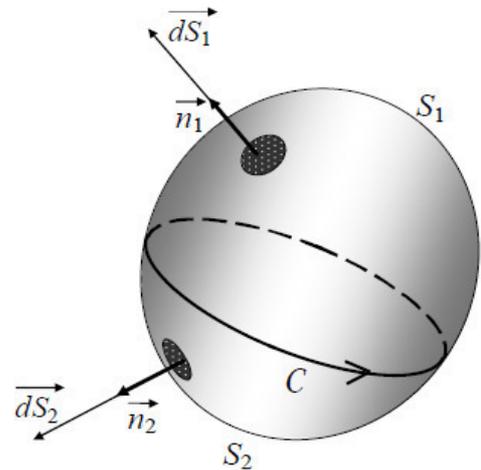


Figure V.8

$\Phi$ ,  $\Phi_1$ , et  $\Phi_2$  désignent respectivement les flux qui traversent les surfaces  $S$ ,  $S_1$  et  $S_2$ .

L'expression précédente montre que :

$$\Phi_1 = -\Phi_2$$

Le signe (-) provient de la convention d'orientation de la normale. Le flux est le même dans les deux cas.

## V.7 Circulation du champ magnétique

Nous avons vu dans le paragraphe V.4.3 que la loi Biot et Savart prédit que le champ créé par un fil infini en un point  $M(r, \theta, z)$  s'écrit en coordonnées cylindriques :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

Considérons maintenant une courbe fermée quelconque  $\Gamma$ . Un déplacement élémentaire le long de cette courbe s'écrit  $\vec{dl} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z$ . La circulation élémentaire du champ magnétique du fil est donc :

$$dC = \vec{B} \cdot \vec{dl} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\theta$$

### V.7.1 Circulation du champ sur un contour enlaçant le fil

La figure V.9 représente un contour  $\Gamma$  enlaçant le fil dans le sens direct ; ce contour est donc orienté. Lorsque le point  $M(r, \theta, z)$  décrit le contour  $\Gamma$ , l'angle  $\theta$  varie de  $0$  à  $2\pi$  par valeurs croissantes. La circulation du champ sur ce contour se déduit immédiatement du résultat précédent :

$$C_\Gamma = \oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad (V.15)$$

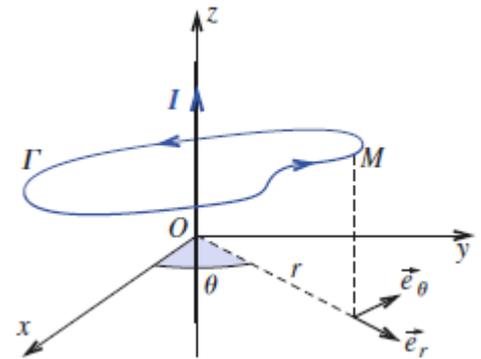


Figure V.9

Si le contour enlace le fil dans le sens indirect, la circulation vaut  $C_\Gamma = -\mu_0 I$ .

### V.7.2 Circulation du champ sur un contour n'enlaçant pas le fil

Si le contour n'enlace pas le fil (figure V.10), la variation de l'angle  $\theta$  lorsque  $M$  décrit le contour  $\Gamma$  est globalement nulle, donc :

$$C_\Gamma = \oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (V.16)$$

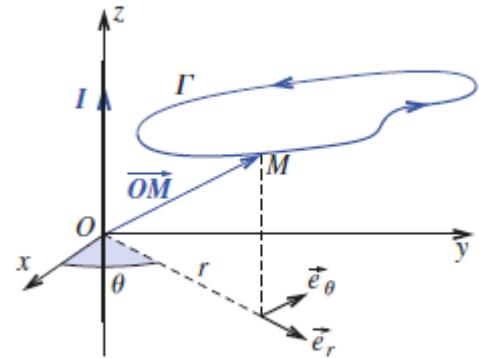


Figure V.10

## V.8 Théorème d'Ampère

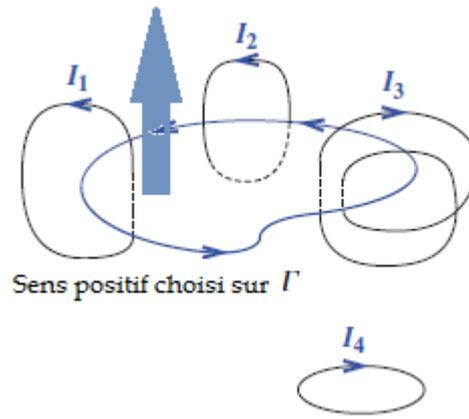
On admet qu'on peut généraliser les résultats précédents à toutes les situations, on retiendra donc :

Si  $\Gamma$  est un contour fermé de l'espace entourant  $N$  conducteurs filiformes parcourus par les courants d'intensités  $I_k$ , on a alors la relation :

$$\oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \sum_{k=1}^N I_k \quad (V.17)$$

Ceci est la forme intégrale du **théorème d'Ampère**. On notera que les intensités électriques  $I_k$  sont des grandeurs algébriques (elles peuvent être négatives ou positives). Sur le chemin  $\Gamma$ , on choisit un sens de parcours qui définit implicitement un sens positif pour compter les intensités sur les conducteurs, ceci en respectant la

règle des doigts de la main droite: enroulant les autres doigts autour du pouce dans le sens choisi sur  $\Gamma$ , le pouce désigne le sens positif sur les conducteur (voir la figure V.11).



**Figure V.11**

Dans l'exemple de cette figure, le sens choisi sur le contour  $\Gamma$  définit un sens dans lequel sont comptées positivement les intensités dans les conducteurs. Dans ce cas, le théorème d'Ampère s'écrit :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_1 - I_2 + 2 I_3)$$

On notera que l'intensité  $I_4$  n'a pas été prise en compte car le quatrième conducteur n'est pas entouré par le circuit  $\Gamma$ .

### Remarque

Il faut garder à l'esprit que le théorème d'Ampère n'est rigoureusement valable que pour les régimes indépendants du temps, donc en magnétostatique. En particulier, dans des cas où les lignes de courant sont interrompues, donnant lieu à des accumulations de charges, nous ne pouvons pas l'appliquer. Nous pouvons en revanche l'employer dans l'approximation des régimes quasi permanents lorsque le vecteur  $\vec{j}$  est à flux conservatif.

### Exercice d'application 3

Considérons un solénoïde « infini » de section circulaire, parcouru par un courant  $I$  et possédant  $n$  spires par unité de longueur.

Déterminer le champ créé par ce solénoïde en tout point de l'espace à l'aide du théorème d'Ampère.

#### Solution

Le solénoïde est assimilé à un assemblage de spires jointives, contenues dans des plans perpendiculaires à  $(Oz)$  (figure V.12).

Tout plan normal à  $(Oz)$  est un plan de symétrie de la distribution de courants, donc :

$$\vec{B} = B(r, \theta, z) \vec{e}_z$$

L'invariance de la distribution par translation parallèlement à  $(Oz)$ , et par rotation autour de  $(Oz)$  permet de simplifier l'expression du champ:

$$\vec{B} = B(r) \vec{e}_z$$

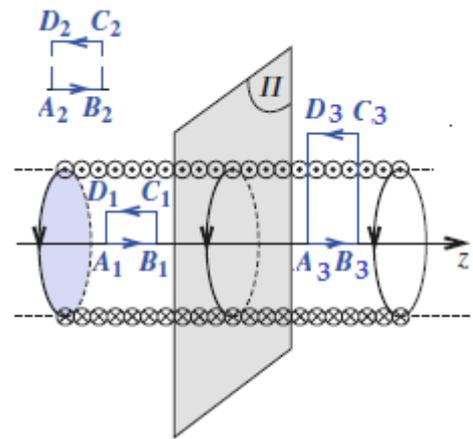


Figure V.12

On choisit trois contours d'Ampère, chacun en forme de rectangle de longueur arbitraire  $l$ , possédant deux côtés parallèles à  $(Oz)$ .

-Pour un contour de type  $A_1B_1C_1D_1A_1$  à l'intérieur du solénoïde, non traversé par le bobinage du solénoïde, le théorème d'Ampère donne :

$$l \cdot B_{axe} - l \cdot B(r) = 0 \text{ tant que } r < R.$$

Par conséquent, le champ à l'intérieur du solénoïde infini est constant.

-Pour un contour de type  $A_2B_2C_2D_2A_2$ , on obtient le même résultat, c'est-à-dire un champ uniforme à l'extérieur. Mais comme ce champ doit être nul à l'infini, on en déduit qu'il est nul partout (pour  $r > R$ ,  $B_{ext} = 0$ )

- Pour un contour de type  $A_3B_3C_3D_3A_3$ , traversé par  $nA_3B_3 = nl$  spires du solénoïde, le théorème d'Ampère donne :

$$l \cdot B_{axe} - l \cdot B_{ext} = \mu_0 n l I$$

Donc, le champ à l'intérieur du solénoïde infini est uniforme, égal à sa valeur sur l'axe :

$$\vec{B}_{int} = \vec{B}_{axe} = \mu_0 n I \vec{e}_z$$

### V.8.1 Rotationnel du champ magnétostatique

Nous allons maintenant établir une formulation locale du théorème d'Ampère. Le théorème de Stokes (voir chapitre I) nous permet en effet d'écrire :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$S$  étant une surface limitée par le contour  $\Gamma$ . Nous pouvons formellement introduire la densité de courant  $\vec{J}$  traversant la surface  $S$  (bien entendu, dans le cas du circuit  $\Gamma$  étudié, cette densité est non nulle uniquement à l'intérieur du circuit lui-même, elle sera prise nulle ailleurs); nous avons donc par définition :

$$I = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Nous obtenons ainsi :

$$\iint_S \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Puisque cette équation est vraie quels que soient le contour et la surface qui s'appuie dessus, nous pouvons en déduire l'expression locale du rotationnel de  $\vec{B}$  :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \tag{V.18}$$

## V.9 Induction électromagnétique

On appelle induction magnétique la production d'effets électriques à partir de champ magnétique. Ce phénomène permet notamment de faire circuler un courant dans un circuit fermé qui ne comporte aucune pile. En d'autre terme, le phénomène d'induction joue le même rôle qu'une pile : il est responsable de la production d'une force électro-motrice (f.é.m.) dans ce circuit, appelée **f.é.m. induite**.

### V.9.1 La loi de Lenz

On peut induire une f.é.m dans un circuit filiforme ( $C$ ) fermé en faisant varier le flux magnétique à travers le circuit. Les cas de variations du flux du champ magnétique à travers un circuit sont :

- Le cas d'un circuit mobile dans un champ magnétique permanent,
- Le cas d'un circuit fixe dans un champ magnétique variable,
- le cas général d'un circuit mobile dans un champ magnétique variable.

Pour trouver de manière qualitative le sens du courant induit, on utilise la loi de Lenz qui stipule que :

*Le sens du courant induit est tel que le champ magnétique qu'il crée s'oppose à la variation de flux qui lui a donné naissance.*

Puisque une f.é.m. apparaît dans le circuit ( $C$ ) et y fait circuler un courant ceci implique l'existence d'un champ électromoteur agissant sur les porteurs de charge du circuit ( $C$ ). Ce champ est appelé champ électrique induit.

### **V.9.2 Loi de Faraday**

Pendant un temps  $dt$ , la variation du flux magnétique total à travers une surface quelconque s'appuyant sur le circuit ( $C$ ) est  $d\Phi$ ; la f.é.m induite  $e$  s'exprime à l'aide de la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (\text{V.19})$$

Cette loi, établie expérimentalement pour des variations relativement lentes du flux magnétique en fonction du temps. L'induction électromagnétique est donc un phénomène qui dépend intrinsèquement du temps et sort du cadre de la magnétostatique (étude des phénomènes magnétiques stationnaires).

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Haris Benson. « Physique 2 Electricité et Magnétisme », édition de Boeck, 1996.
- [2] Richard Feynman , Robert B. Leighton , Matthew Sands , Michel Bloch , Goéry Delacôte, « Le Cours de Physique de Feynman : Electromagnétisme », Addison-Wesley, 1994.
- [3] Daniel Cordier, « Cours de Physique Electromagnétisme 1. Electrostatique et Magnétostatique», Dunod, Paris, 2004.
- [4] Djelouah Hakim, « Electromagnétisme », Ed. Les Cours de la Faculté de Physique, 2012.
- [5] John R. Reitz, Frederick J. Milford, Robert W. Christy, « Foundations of Electromagnetic Theory », Addison-Wesley, 1979.
- [6] Émile Amzallag, Josep Cipriani , Josseline Ben Aim, Norbert Piccioli, « Electrostatique et Electrocinétique », Dunod, Paris, 2006.
- [7] Jean-Marie Brébec, Thierry Desmarais, Marc Ménétrier, Bruno Noel, Régine Noel, Claude Orsini « Electromagnétisme », Hachette Livre, Paris, 2003.
- [8] C. Templier, « Electromagnétisme : régimes permanents et régimes variables », Erasmus-Socrates KTU 2006 , Université de Poitiers, France.
- [9] Ait-Gougam Leila, Bendaoud Mohamed, Doulache Naïma, Mékidèche Fawzia, « Licence de Physique S2 : Electricité », Ed. Les Cours de la Faculté de Physique, 2012.
- [10] Zouhaier Hafsia, Saliha Nouri, « Notes de cours d'électrostatique », Ed. Les Cours de l'Ecole Supérieure des Sciences et Technique de Tunis, 2009.
- [11] Michel Saint-Jean, Janine Bruneaux, Jean Matricon, « Electrostatique et magnétostatique », Belin, Paris, 2002.