Introduction à l'analyse complexe

Cours et exercices corrigés

BENNOUAR Abdelmadjid

Introduction à l'analyse complexe

BENNOUAR Abdelmadjid

Département de Mathématiques, USTO-MB- 2022

Préface

Ces notes de cours sont destinées principalement aux étudiants inscrits en deuxième année Mathématiques L2 système LMD. Elles peuvent également être utiles pour les filières de physique et des sciences techniques. Ce cours est une introduction à la théorie d'analyse complexe, portant essentiellement sur le calcul différentiel et intégrale des fonctions d'une variable complexe ainsi que leurs applications. Chaque chapitre présenté dans ce polycopié est suivi d'une série d'exercices, dont certains sont résolus, servant à illustrer les nombreux résultats sur les différentes notions abordées.

Table des matières

Chapitre 1

Topologie dans le plan complexe $\mathbb{C}$

1.1 L'ensemble des nombres complexes

1.1.1 Définitions et formules de base

Définition 1.1.1. 1. L'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des opérations "+" et ".", définies par :

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b).(c, d) = (ac - bd, ad + bc),$$

s'appelle $\mathbb{C}$. Notons que

$$(a, b) = (a, 0) + (0, 1).(b, 0)$$
$$(0, 1).(0, 1) = (-1, 0)$$
$$(a, 0).(b, 0) = (ab, 0);$$

ainsi, en écrivant i [1] pour $(0, 1)$ et en confondant a avec $(a, 0)$, on peut écrire chaque élément de $\mathbb{C}$ simplement comme $a + ib$ [2] avec $i^2 = -1$. Il est évident que $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel de dimension 2, $\{1, i\}$ étant une base. Il n'est pas très difficile de vérifier que $\mathbb{C}$ est un corps commutatif contenant $\mathbb{R}$ comme un sou-corps. Notons que si $a + ib \neq 0$ (cela veut dire qu'au moins un des nombres réels a, b est non nul) alors

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

2. Les éléments de $\mathbb{C}$ s'appellent les nombres complexes ; un élément de $\mathbb{C}$ est de la forme $a + ib, \forall a, b \in \mathbb{R}$.
3. L'espace $\mathbb{R}^2$ vu comme $\mathbb{C}$ sera aussi appelé le plan complexe. [3]

Définition 1.1.2. 1. Si $z = x + iy, x, y$ réels, est un élément de $\mathbb{C}$, on pose

$$x = \text{Re}z, \ y = \text{Im}z;$$

x s'appelle la partie réelle de z et y la partie imaginaire [4] de z.

1. Notation introduite par Euler en 1777.
2. Ecriture algébrique d'un nombre complexe.
3. L'ensemble des nombres complexes et le plan complexe, ont le même sens.
4. Le mot "imaginaire" fut employé par Descartes en 1637.

2. L'élément $\overline{z} = x - iy$ s'appelle le conjugué complexe de z. Notons que, pour $z \in \mathbb{C}$,
$$\text{Re}z = \frac{1}{2}(z + \overline{z}),\ \text{Im}z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}),$$
et le nombre positif (éventuellement nul)
$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2},$$
s'appelle le module de $z = x + iy, x, y$ réels ; si $y = 0$ on dit que z est réel et si $x = 0$ on dit que z est purement imaginaire ou que $z \in i\mathbb{R}$.

Propriété 1.1.1. *Soient z, z_1 deux nombres complexes, on a alors :*

1.
$$\overline{\overline{z}} = z,\ \overline{z + z_1} = \overline{z} + \overline{z_1},\ \overline{zz_1} = \overline{z}\ \overline{z_1},\ \overline{\left(\frac{z}{z_1}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z_1}}.$$

2.
$$|\overline{z}| = |z|\,,\ |zz_1| = |z|\,|z_1|\,,\ \left|\frac{z}{z_1}\right| = \frac{|z|}{|z_1|},\ si\ z_1 \neq 0.$$

3.
$$|Rez| \leq |z|\,,\ |Imz| \leq |z|\,.$$

Proposition 1.1.1. *Soient z, z_1 deux nombres complexes, alors on a l'inégalité triangulaire suivante :*
$$|z + z_1| \leq |z| + |z_1|\,,$$
avec l'égalité si et seulement si $z = 0$ ou $z_1 = 0$ ou $z_1 \neq 0$ et $z = \lambda z_1, \lambda > 0$.

1.1.2 Forme exponentielle d'un nombre complexe

Définition 1.1.3. Soit $z = x + iy, x, y$ réel, $z \neq 0$. Si $r = |z|$, on sait de la trigonométrie élémentaire qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :
$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,$$
donc $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, est appelée représentation polaire de z. Rappelons que θ n'est déterminé qu'à un multiple de 2π près. La valeur de θ qui se trouve dans l'intervalle $]-\pi, \pi[$, s'appelle la valeur principale de l'argument (ou l'amplitude) de z, qu'on note $\arg z$. On dit aussi que toutes les déterminations de l'argument de z sont données par $\theta + 2n\pi, \forall n \in \mathbb{Z}$ où θ est $\arg z$.

Définition 1.1.4. 1. L'ensemble des nombres complexes de module 1, qu'on note $\mathcal{U}$ (intiale de unité) est défini par :
$$\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C}/\,|z| = 1\}\,.$$

2. Pour tout réel $\theta \in \mathbb{R}$, on a :
$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}.$$

Remarque 1.1.1. 1. Comme $\left|e^{i\theta}\right| = 1, \theta \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\mathcal{U}$ sera défini par :
$$\mathcal{U} = \left\{e^{i\theta}/\theta \in \mathbb{R}\right\}.$$

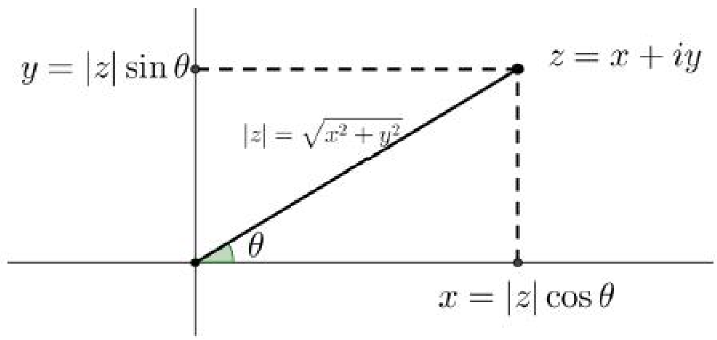

FIGURE 1.1 – Représentation polaire.

2. Si $z = x + iy \in \mathbb{C}$, alors e^z est défini par :

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Proposition 1.1.2. *1.* $\forall \theta, \theta_1 \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} e^{i\theta_1} = e^{i(\theta+\theta_1)}$.

2. $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} \neq 0$, $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$.

3. $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$, *(Formule de Moivre).*

On donne ci-après quelques valeurs usuelles de la fonction $\theta \mapsto e^{i\theta}$;

$$e^0 = 1,\ e^{i2\pi} = 1,\ e^{i\frac{\pi}{2}} = i,\ e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i,\ \text{et la formule due à Euler},\ e^{i\pi} = -1.$$

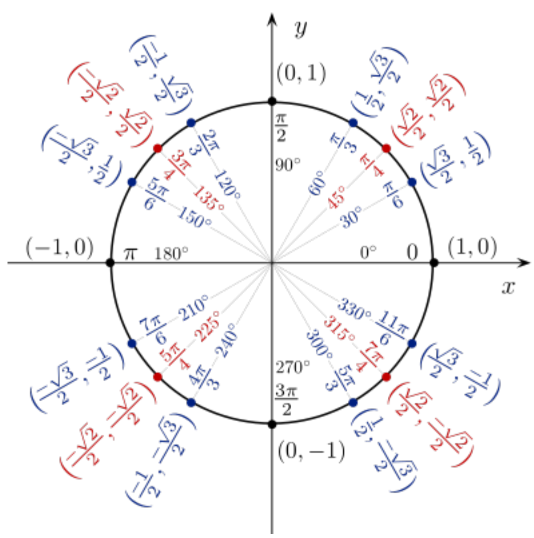

FIGURE 1.2 – Cercle trigonométrique.

Théorème 1.1.1. *1.* $\forall \theta \in \mathbb{R}$, *on a :*

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}),\ \sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}).$$

2. $\forall \theta \in \mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\}$, *on a :*

$$\tan\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{i(e^{i\theta} + e^{-i\theta})}.$$

1.1.3 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation z^n admet une solution et une seule à savoir $z = 0$. On se donne désormais un nombre complexe non nul ς, et on cherche à résoudre l'équation

$$z^n = \varsigma = \rho e^{i\theta}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \rho > 0, \theta \in \mathbb{R} \tag{1.1.1}$$

On pose

$$z = re^{i\alpha}, r > 0, \alpha \in \mathbb{R},$$

donc

$$z^n = \varsigma \iff r^n e^{in\alpha} = \rho e^{i\theta} \iff \begin{cases} r^n = \rho \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \text{ où } k = 0, 1, ..., n-1 \end{cases}$$

***Exemple* 1.1.1.** *Trouvons les solutions de l'équation*

$$z^3 = 8i. \tag{1.1.2}$$

On pose $z = re^{i\alpha}$, on a alors :

$$z^3 = 8i \iff r^3 e^{i3\alpha} = 8e^{i(\frac{-\pi}{2} + 2k\pi)} \iff \begin{cases} r = 2 \\ \alpha_k = \frac{-\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}. \text{ où } k = 0, 1, 2 \end{cases}$$

Ainsi, les solutions de l'équation (1.1.2) *sont :*

$$z_1 = 2e^{i\frac{-\pi}{6}} = \sqrt{3} - i, \; z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i, \; z_3 = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = -\sqrt{3} - i.$$

1.2 Topologie de $\mathbb{C}$

On a vu que $\mathbb{C}$, en tant qu'un ensemble, s'identifie avec $\mathbb{R}^2$. La topologie de $\mathbb{C}$ sera donc celle obtenue à partir de cette identification. Néaunmoins, nous rappelons dans cette section, un certain nombre de notions de base pour fixer les notations.

Ensembles ouverts et fermés

Soient $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$.

1. L'ensemble
$$D(a, r) = D_r = \{z \in \mathbb{C}, |z - a| < r\},$$
s'appelle le disque ouvert de centre a et de rayon r.
2. L'ensemble
$$\overline{D}(a, r) = \overline{D}_r = \{z \in \mathbb{C}, |z - a| \leq r\},$$
s'appelle le disque fermé centré en a et de rayon r.
3. L'ensemble
$$\mathcal{F}rD(a, r) = D(0, 1) = \{z \in \mathbb{C}, |z - a| = r\},$$
s'appelle le cercle centré en a et de rayon r.
4. Une partie $\mathcal{A}$ de $\mathbb{C}$ est dite ouverte, si pour tout point $a \in \mathcal{A}$, il existe un disque ouvert $D(a, r)$ contenu dans $\mathcal{A}$.
5. Une partie $\mathcal{A}$ de $\mathbb{C}$ est dite fermée, si $\mathcal{A}^c$ est ouverte.

Points intérieurs, extérieurs et frontières

Soit $\mathcal{A}$ une partie quelconque de $\mathbb{C}$.

1. On dit que a est un point intérieur de $\mathcal{A}$ si $\exists r > 0$ *tel que* $D(a,r) \subset \mathcal{A}$.
2. On dit que a est extérieur de $\mathcal{A}$ si a est intérieur de $\mathcal{A}^c$.
3. Un point a s'appelle un point frontière de $\mathcal{A}$ si $\exists r > 0$, tels que :

$$D(a,r) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset \textit{ et } D(a,r) \cap \mathcal{A}^c \neq \emptyset.$$

Ensemble compact et connexe

1. Un ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathbb{C}$ est dit borné si $\mathcal{A} \subset D(0,r)$ pour un certain $r > 0$.
2. Un ensemble $\mathcal{K}$ de $\mathbb{C}$ est dit compact dans $\mathbb{C}$, s'il est fermé borné dans $\mathbb{C}$.
3. Un ensemble ouvert $\mathcal{A}$ de $\mathbb{C}$ est dit connexe s'il ne peut pas être la réunion de deux ouverts disjoints non vides.

1.3 Exercices

***Exercice* 1.3.1.** *Déterminer sous forme algébrique :*

1. *Les racines carrées de* $11 + 4\sqrt{3}i$.
2. *Les racines quatrièmes de* $-7 + 24i$.

***Exercice* 1.3.2.** *Démontrer les égalités suivantes :*

1. $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^{59} = 2^{58}\left(1 - i\sqrt{3}\right)$.
2. $(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\frac{n+2}{2}} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$, $n \in \mathbb{N}$.

***Exercice* 1.3.3.** *Soit* $z = \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

1. *Calculer* z^2*, puis déterminer son module et son argument. Ecrire* z^2 *sous forme trigonométrique.*
2. *En déduire le module et un argument de* z.
3. *En déduire* $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ *et* $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

***Exercice* 1.3.4.** *Déterminer sous forme trigonométique :*

1. *Les racines sixièmes de -27.*
2. *Les racines cubiques de* $4\left(1 + i\sqrt{3}\right)$.

***Exercice* 1.3.5.** *En écrivant* $\cos(5\theta)$ *en fonction de* $\cos(\theta)$*, calculer* $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

***Exercice* 1.3.6.** *On considère l'application* f *définie par :*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & f(z) = \frac{z}{1+|z|}. \end{array}$$

1. *Démontrer que* z *et* $f(z)$ *ayant le même argument.*
2. *Démontrer que* $|f(z)| < 1, \forall z \in \mathbb{C}$. *Déterminer* $f(\mathbb{C})$.
3. *Démontrer que* f *est injective.* f *est-elle surjective ?*

4. *Considérons les applications f_n, $n \in \mathbb{N}$ définies comme suit :*

$$f_0 = Id,\ \ f_1 = f, f_2 = f \circ f, ..., f_n = f \circ f_{n-1}.$$

Démontrer en utilisant le raisonnement par récurrence que f_n est injective.

Chapitre 2

Fonctions analytiques d'une variable complexe

2.1 Série entière à une variable complexe

2.1.1 Convergence des séries entières

Définition 2.1.1. On appelle série entière à une variable z, toute série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ avec $f_n(z) = a_n z^n$ où les $a_n \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont donnés. Une telle série est notée $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$.

Théorème 2.1.1. (Lemme d'Abel) *On suppose qu'il existe un nombre complexe $z_0 \neq 0$ telle que la suite $(|a_n z_0^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ soit majorée, alors :*
a. La série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ converge normalement sur tout disque fermé $\overline{D_r} = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq r\}$, avec $0 < r < |z_0|$.
b. Elle converge absolument sur le disque ouvert, $D_{|z_0|} = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq |z_0|\}$=$D(0, |z_0|)$.

Remarque 2.1.1. On rappelle que :

1. $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge absolument si la série $\sum\limits_{n\geq 0} |f_n|$ converge.
2. On dit que la série $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ est normalement convergente sur D s'il existe une série numérique réelle à termes positifs $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ convergente telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in D, |f_n(z)| \leq U_n$.

Démonstration. La série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D_r}$, donc elle converge absolument sur $\overline{D_r}$, $\forall\ 0 < r < |z_0|$. Or, $D_{|z_0|} = \bigcup\limits_{0<r<|z_0|} \overline{D_r}$, en effet :

1. Soit $z \in D_{|z_0|}$, $|z| < |z_0|$, et alors $\exists r > 0 / |z| \leq r\,|z_0|$, d'où $z \in \bigcup\limits_{0<r<|z_0|} \overline{D_r}$.
2. Soit $z \in \bigcup\limits_{0<r<|z_0|} \overline{D_r}$, alors $\exists r > 0, r < |z_0|$ tel que $z \in \overline{D_r}$ c'est à dire $|z| \leq r < |z_0|$, d'où $z \in D_{|z_0|}$.

Démontrons maintenant que $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ est normalement convergente sur $\overline{D_r}$, on a :

$$\forall z \in \overline{D_r}, \forall n \in \mathbb{N}, |a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq M \left|\frac{r}{z_0}\right|^n,$$

or, $r < |z_0| \iff \underbrace{\frac{r}{|z_0|}}_{q} < 1$ et $\sum\limits_{n\geq 0} q^n$ est une série géométrique à termes positifs de raison q avec $|q| < 1$, donc convergente, et alors $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ est normalement convergente sur $\overline{D_r}$, donc absolument convergente. $\square$

Proposition 2.1.1. (Réf.[1]) *Soit* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ *une série entière. Alors l'ensemble* $E = \{r \in \mathbb{R}^+/(a_n r^n)$ *est bornée* $\} \subset \mathbb{R}^+$, *est un intervalle de type* $[0, R]$ *ou* $[0, R[$ *avec* $R \in \mathbb{R}$ *ou* $R = +\infty$.

Définition 2.1.2. On appelle rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$, le nombre réel positif R (ou $R = +\infty$) défini par

$$R = \sup\left\{r \in \mathbb{R}^+/(a_n r^n) \text{ est bornée }\right\}$$

Théorème 2.1.2. *Soient* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ *et* R *le nombre (réel* ≥ 0*) (éventuellement* $R = +\infty$*) défini ci-dessus, alors :*
1. La série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ *converge normalement sur tout disque fermé* $\overline{D_r}$*, contenu dans le disque ouvert* D_R, $0 < r < R$.
2. La série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ *converge absolument sur le disque ouvert* D_R *c'est à dire* $|z| < R$.
3. La série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ *diverge* $\forall z, |z| > R$.

Démonstration. Les deux premiers points découlent immédiatement du lemme d'Abel et la remarque 2.1.2. Pour ce qui est du dernier point, si $|z| > R$, la suite n'est pas majorée et par conséquent, elle n'admet pas 0 comme limite, et alors, la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ diverge. $\square$

Définition 2.1.3. 1. Le nombre positif R (*éventuellement* $+\infty$) defini ci-dessus est dit rayon de convergence de la série entière.
2. Le disque ouvert $D_R = \{z \in \mathbb{C}/\,|z| < R\}$ est appelé disque de convergence de la série entière.
3. Le théorème n'affirme rien si $|z| = R$.

Remarque 2.1.2. D'après ce qui précède, on distingue trois cas :
1er cas :$R = 0$
La série entière converge uniquement en $z = 0$.
2ème cas :$R = +\infty$
La série converge absolument sur $\mathbb{C}$ et normalement sur $\overline{D_r}$.
3 ème cas :$R \neq 0, R \neq +\infty$
La série converge absolument sur D_R et normalement sur $\overline{D_r}$.

2.1.2 Somme et produit par un scalaire

Proposition 2.1.2. (Réf.[1]) *1. Si* $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ *et* $\sum\limits_{n\geq 0} g_n$ *sont deux séries de fonctions convergentes sur* $D \subset \mathbb{C}$, *et si* λ *est un scalaire (réel ou complexe), alors les séries* $\sum\limits_{n\geq 0} (f_n + g_n)$ *et* $\sum\limits_{n\geq 0} (\lambda f_n)$ *convergent sur* D. *De plus,* $\sum\limits_{n\geq 0} (f_n + g_n) = \sum\limits_{n\geq 0} f_n + \sum\limits_{n\geq 0} g_n$.
2. $\sum\limits_{n\geq 0} (\lambda f_n) = \lambda \sum\limits_{n\geq 0} f_n$.

Remarque 2.1.3. Si $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge et $\sum\limits_{n\geq 0} g_n$ diverge, alors $\sum\limits_{n\geq 0} (f_n + g_n)$ diverge. Par contre, une série $\sum\limits_{n\geq 0} (f_n + g_n)$ peut converger même si les séries $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} g_n$ divergent.

***Exemple* 2.1.1.** *Soient $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ et $\sum\limits_{n\geq 0} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}\right)$ deux séries divergentes, mais $\sum\limits_{n\geq 0} \left(\frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}\right)\right) = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{n^2}$ converge.*

Corollaire 2.1.1. *Soient $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergences respectifs R_1 et R_2. Soit R le rayon de convergence de la série somme $\sum\limits_{n\geq 0} (a_n + b_n) z^n$, alors si :*
1. $R_1 \neq R_2$, on a $R = min(R_1, R_2)$.
2. $R_1 = R_2$, on a $R \geq R_1 = R_2$, de plus,

$$\forall z, |z| < min(R_1, R_2), \sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n\geq 0} a_n z^n + \sum_{n\geq 0} b_n z^n$$

Démonstration. 1. Si $R_1 \neq R_2$, pour $|z| < min(R_1, R_2)$ alors $\sum\limits_{n\geq 0} (a_n + b_n) z^n$ converge. Pour $|z| > min(R_1, R_2)$, on suppose que $min(R_1, R_2) = R_1$, donc $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ diverge. Supposons que $\sum\limits_{n\geq 0} (a_n + b_n) z^n$ converge, alors $\sum\limits_{n\geq 0} b_n z^n$ diverge ce qui n'est pas vrai.
2. $R_1 = R_2$, $\forall z, |z| < R_1 = R_2$, les séries $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} b_n z^n$ convergent, donc $\sum\limits_{n\geq 0} (a_n + b_n) z^n$ converge et comme R est le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geq 0} (a_n + b_n) z^n$, alors $R \geq R_1 = R_2$. □

2.1.3 Continuité et principe des zéros isolés

Théorème 2.1.3. *Soit $R \neq 0$ ($R > 0$ ou $R = +\infty$) le rayon de convergence d'une série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$. La fonction somme de cette série, $f(z) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$, est une application définie et continue sur $D_R = \{z \in \mathbb{C} / |z| < R\}$.*

Démonstration. D'après le théorème 2.1.2, pour tout r, $0 < r < R$ la série converge normalement donc uniformément sur $\overline{D_r}$. Comme chaque application $z \longmapsto a_n z^n$ est continue en particulier sur $\overline{D_r}$, alors la fonction $S_n : z \longmapsto \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$ est continue sur $\overline{D_r}$. Or, S_n converge vers $S = f$ uniformément lorsque $n \longmapsto +\infty$ et comme les S_n sont continues, alors f qui est la limite uniforme de fonctions continues, est aussi continue sur $\overline{D_r}$ $\forall r$, $0 < r < R$. Comme $D_R = \bigcup\limits_{0<r<R} \overline{D_r}$, alors f est continue sur D_R. □

Remarque 2.1.4. Ce théorème n'affirme rien pour ce qui est de l'existence de la somme f ni de la continuité de f sur la frontière de D_R.

2.1.4 Principe des zéros isolés pour les séries entières

Théorème 2.1.4. (Réf.[2]) *Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \neq 0$. Si les coefficients a_n ne sont pas tous nuls, alors il existe r, $0 < r < R$, telle que $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n \neq 0$, $\forall z \in D_r \backslash \{0\}$ $(0 < |z| < r)$.*

Corollaire 2.1.2. *S'il existe un disque D_r $(r > 0)$, sur lequel deux séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ convergent et aient la même somme, $\sum_{n\geq 0} a_n z^n = \sum_{n\geq 0} b_n z^n, \forall z \in D_r$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = b_n$.*

Démonstration. La série entière $\sum_{n\geq 0} (a_n - b_n) z^n$ converge sur D_r et sa somme est la fonction nulle $\sum_{n\geq 0} (a_n - b_n) z^n = \sum_{n\geq 0} a_n z^n - \sum_{n\geq 0} b_n z^n = 0, \forall z \in D_r$ et d'après le théorème 2.1.4, tous les coefficients $(a_n - b_n)$ sont nuls, d'où $a_n = b_n, \forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

Définition 2.1.4. Une fonction f définie dans un voisinage de 0, est dite développement en série entière en 0, si $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$, $\forall |z| < r$ avec $r > 0$ et $a_n \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Remarque 2.1.5. Une fonction discontinue en 0 n'admet pas de développement en série entière en 0.

2.2 Multiplication et dérivation des séries entières

Théorème 2.2.1. *Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergences respectifs non nuls R_1 et R_2. Soit R le rayon de convergence de la série produit $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$, définie par :*

$$c_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k}, \forall n \in \mathbb{N}$$

, alors $R \geq min\,(R_1, R_2)$. De plus, $\forall |z| < min\,(R_1, R_2)$, on a :

$$\sum_{n\geq 0} c_n z^n = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \sum_{n\geq 0} b_n z^n$$

.

Démonstration. On sait que pour les séries numériques, $\sum_{n\geq 0} U_n$ et $\sum_{n\geq 0} V_n$, la série produit $\sum_{n\geq 0} W_n$ est définie par $W_n = \sum_{k=0}^{n} U_k V_{n-k}$. Dans notre cas, pour $U_n = a_n z^n$ et $V_n = b_n z^n$, $\forall n$, on obtient :

$$W_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} z^n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$\square$

Théorème 2.2.2. *Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \neq 0$ et de somme f, alors :*
(1). La série entière $\sum_{n\geq 0} n a_n z^{n-1}$ a pour rayon de convergence R.
(2). f est dérivable sur D_R et vérifie :

$$f^{'}(z) = \sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}, \forall |z| < R,$$

c'est à dire

$$\frac{d}{dz}\left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{d}{dz}\left(a_n z^n\right).$$

Démonstration. Exercice. □

Remarque *2.2.1.*

1. Dans (2), si $z \in D_R \subset \mathbb{C}$ alors, $f'(z) = \lim\limits_{|h|\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ avec $h = s+it$ où $s, t \in \mathbb{R}$.
2. $f'''(z) = \sum\limits_{n\geq 2} n(n-1) a_n z^{n-2}, \forall |z| < R$. On répète cela jusqu'à l'ordre n et on montre par un raisonnement de récurrence qu'on ait :

$$f^p(z) = \sum_{n\geq p} \frac{n!}{(n-p)!} a_n z^{n-p}, \forall p \in \mathbb{N},$$

d'où,

$$f^p(0) = p! a_p, \forall p \in \mathbb{N},$$

ce qui entraîne

$$a_p = \frac{f^p(0)}{p!}, \forall p \in \mathbb{N}.$$

Définition 2.2.1. Soit f une fonction définie et de classe C^∞ dans un voisinage de $z = 0$, alors la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{f^n(0)}{n!} z^n$ existe et est appelée série de Taylor associée à f en 0.

Remarque *2.2.2.*

1. D'après ce qui précède, si f est développable en série entière en 0, alors f est de classe C^∞ dans un voisinage de 0.
2. Si f est développable en série entière en 0 alors cette série entière ne peut être que sa série de Taylor en 0.
3. La réciproque de (1) n'est pas vraie en général, en effet :
   Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f(0) = 0$, $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^{\frac{-1}{h^2}}}{h} = 0$, $f'(0) = f''(0) = ... = f^n(0) = 0$ et on montre que $f^{n+1}(0) = 0$, d'où $f^n(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Ainsi, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, pourtant elle n'est pas développable en série entière en 0, car celle-ci ne serait que sa série de Taylor qui est nulle pour tout x appartient au voisinage de 0.

2.3 Fonctions analytiques d'une variable complexe

2.3.1 Définitions et exemples

Définition 2.3.1. Une fonction f définie au voisinage d'un point z_0 de $\mathbb{C}$, est dite développable en série entière en z_0, s'il existe $r > 0$ et une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres $a_n \in \mathbb{R}$ ou $a_n \in \mathbb{C}$, tels que :

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z - z_0)^n, \forall |z - z_0| < r$$

Définition 2.3.2. 1. Soit D un ouvert de $\mathbb{R}$ ou ($\mathbb{C}$), une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ou ($\mathbb{C}$) est dite analytique sur D si elle est développable en série entière en tout point z_0 de D, c'est à dire :

$$\forall z_0 \in D, \exists r_{z_0}, \exists \left(a_n\left(z_0\right)\right) \in \mathbb{R} \; ou \; \mathbb{C}, f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n\left(z_0\right)\left(z - z_0\right)^n, \forall \left|z - z_0\right| < r_{z_0}.$$

2. Une fonction complexe analytique dans $\mathbb{C}$ tout entier, est appelée fonction entière.

Propriété 2.3.1. (Réf.[2])

1. *Une fonction analytique sur un ouvert D est continue et de classe C^∞ sur D et ses dérivées $f^{'}, f^{''}, ..., f^n$ sont analytiques.*
2. *Si f et g sont analytiques sur D et si $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors $f + g$ et λf sont analytiques sur D.*
3. *Si D et D_1 sont deux ouverts de $\mathbb{C}$ et $f : D \longrightarrow D_1$ est analytique sur D et que $g : D_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ est analytique sur D_1, alors $g \circ f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ est analytique sur D.*
4. *La série de Taylor associée à une fonction analytique f, est convergente et le développement en série de Taylor associé en z_0 de D est :*

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^n\left(z_0\right)}{n!}\left(z - z_0\right)^n, \; pour \; \left|z - z_0\right| \; assez \; petit.$$

Exemple 2.3.1. *La fonction polynômiale $P(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$ est analytique sur $\mathbb{C}$ tout entier donc c'est une fonction entière car :*

$$P(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k, \forall z \in \mathbb{C} \; avec \; a_k = 0, \; pour \; k \geq n + 1.$$

Exemple 2.3.2. *La fonction $z \longmapsto \frac{1}{z}$ est analytique sur $\mathbb{C} \backslash \{0\}$, en effet :*
Il suffit de démontrer que $\forall z_0 \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ la fonction $\frac{1}{z}$ est développable en série entière au voisinage de z_0, c'est à dire :

$$\frac{1}{z} = \sum_{n \geq 0} a_n\left(z - z_0\right)^n, \; pour \; \left|z - z_0\right| \; assez \; petit.$$

On a :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z - z_0 + z_0} = \frac{1}{z_0}\left(\frac{1}{1 + \frac{z - z_0}{z_0}}\right),$$

or, on sait que $\frac{1}{1+u} = \sum\limits_{n \geq 0} (-1)^n u_n$, pour $|u| < 1$, donc pour $u = \frac{z - z_0}{z_0}$ on obtient :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z_0} \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{\left(z - z_0\right)^n}{z_0^n}, \; pour \; \left|\frac{\left(z - z_0\right)}{z_0}\right| < 1,$$

ainsi,

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z_0} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{z_0^{n+1}}\left(z - z_0\right)^n, \; pour \; \left|z - z_0\right| < \left|z_0\right|,$$

d'où, la fonction $\frac{1}{z}$ est analytique sur $\mathbb{C} \backslash \{0\}$.

2.3.2 Analycité de la somme d'une série entière

Soit $f(z) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n, \forall z \in D_R$, alors $f^p(z) = \sum\limits_{n\geq p} \frac{n!}{(n-p)!} a_n z^{n-p}, \forall z \in D_R$. Or, on sait que le seul développement de f en série entière en z_0 de D_R, est sa série de Taylor en z_0, c'est à dire :

$$\sum_{p\geq 0} \frac{f^p(z_0)}{p!}(z-z_0)^p = \sum_{p\geq 0}\left(\sum_{n\geq p} \frac{n!}{(n-p)!} a_n z_0^{n-p}\right)\frac{(z-z_0)^p}{p!}.$$

On montre que cette dernière série converge absolument pour $|z-z_0| < R - |z_0|$ et que $\sum\limits_{p\geq 0} \frac{f^p(z_0)}{p!}(z-z_0)^p = \sum\limits_{p\geq 0}\left(\sum\limits_{n\geq p} \frac{n!}{(n-p)!} a_n z_0^{n-p}\right)\frac{(z-z_0)^p}{p!} = f(z) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$, pour $|z-z_0| < R - |z_0|$.
Donc, f est analytique sur D_R, pour plus de détail voir [2] .

On obtient alors le résultat suivant :

Théorème 2.3.1. *Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \neq 0$ et de somme $f(z) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n, \forall z \in D_R$. Alors f est analytique sur D_R. De plus, si R_1 est le rayon de convergence de la série de Taylor associée à f en un point $z_0 \in D_R$, alors $R_1 \geq R - |z_0|$.*

Remarque 2.3.1. On peut avoir $R_1 > R - |z_0|$, voir par exemple l'exercice 1.5.3.

2.3.3 Prolongement des fonctions analytiques

Remarque 2.3.2. Soit f une fonction développable en série entière en z_0, f est alors de classe C^∞ dans un voisinage de z_0 et de plus on a :

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^n(z_0)}{n!}(z-z_0)^n, \textit{ pour } |z-z_0| \textit{ assez petit.}$$

Donc la donnée des dérivées successives en z_0 d'une fonction f de classe C^∞ dans un voisinage de z_0, ne suffit pas à déterminer f avec exactitude dans un voisinage de z_0, mais uniquement en z_0.

***Exemple* 2.3.3.** *Soient les fonctions f et g définies par :*

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases} \quad et\ g(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

On a $f^n(0) = g^n(0)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, pourtant $f \neq g$, $f = g$ uniquement en $x = 0$.

Théorème 2.3.2. (Réf.[1]) *Soient D un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, z_0 un point de D et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réelles ou complexes. S'il existe une fonction analytique sur D telle que $f^n(z_0) = a_n, \forall n \in \mathbb{N}$, alors f est unique sur D.*
Autrement dit, si D un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, z_0 un point de D et f et g sont deux fonctions analytiques sur D. Si $f^n(z_0) = g^n(z_0), \forall n \in \mathbb{N}$, alors $f \equiv g$ sur D.

Remarque 2.3.3.
1. Le théorème ci-dessus ne donne pas une méthode de calcul de $f(z)$ à partir des $f^n(z_0)$ sur D, mais on le sait uniquement au voisinage de z_0. En revanche, il nous montre qu'une fonction analytique sur un ouvert connexe D est parfaitement déterminée par ses dérivées successives en un point z_0 de D.

2. Le théorème n'est plus vrai si D n'est pas connexe, en effet, Soient D_1 et D_2 des ouverts non vides disjoints et $D = D_1 \cup D_2$. On considère deux fonction f_1 et f_2 définies par :

$$f_1 = \begin{cases} 1 & \text{sur } D_1 \\ 0 & \text{sur } D_2 \end{cases} \quad et\ f_2 = \begin{cases} 2 & \text{sur } D_1 \\ 0 & \text{sur } D_2 \end{cases}$$

Soit $z_0 \in D_2$, on a $f_{1|D_2} = f_{2|D_2} = 0$ donc $f_1^n(z) = f_2^n(z) = 0, \forall z \in D_2$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}$, en particulier $f_1^n(z_0) = f_2^n(z_0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.
De plus f_1 est analytique, en effet, soit z_1 quelconque de D, on aura :

(a) Si $z_1 \in D_1$, $f_1(z_1) = 1$ sur D_1, donc $f_1(z) = 1$, $\forall z \in D_1$ et alors $f_1(z) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n (z - z_0)^n$ pour $|z - z_0|$ assez petit, avec $a_0 = 1$ et $a_n = 0, \forall n \geq 2$.

(b) Si $z_1 \in D_2$, $f_1(z_1) = 0$ sur D_2 et alors $f_1(z) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n (z - z_0)^n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Ainsi, $f_1(z)$ est développable en série entière en z_1, donc elle est analytique sur D.
On fait de même pour f_2.
Donc on a prouvé que les deux fonctions f_1 et f_2 sont analytiques et que $f_1^n(z_0) = f_2^n(z_0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, pourtant $f_1 \neq f_2$ sur D.

Corollaire 2.3.1. (Principe du prolongement analytique) *Si deux fonctions analytiques sur un ouvert connexe D de $\mathbb{C}$ coïncident au voisinage d'un point z_0 de D, alors elles sont égales sur D.*

Remarque 2.3.4. Le corollaire 2.3.1 peut être vu autrement, Soit f une fonction analytique sur un ouvert connexe D de $\mathbb{C}$. s'il existe $z_0 \in D$ telle que $f \equiv 0$ dans un voisinage de z_0, alors $f \equiv 0$ sur D.

Corollaire 2.3.2. (Principe des zéros isolés) *Les zéros (racines) d'une fonction analytique non identiquement nulle sur un ouvert connexe D de $\mathbb{C}$, sont isolés. Autrement dit, Soit f une fonction analytique sur un ouvert connexe D de $\mathbb{C}$ telle que $f \neq 0$ sur D. Soit z_0 un zéro de f, alors z_0 est isolé, c'est à dire : $\exists \epsilon > 0 / f(z) \neq 0, \forall z, 0 < |z - z_0| < \epsilon$.*

Démonstration. Soit D un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, comme f est analytique sur D, on suppose que $f(z_0) = 0$ et $f \neq 0$ sur D, alors d'après la remarque 2.3.5, f n'est pas identiquement nulle au voisinage z_0 de D. On a alors :

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + ..., \forall |z - z_0| < r,$$

avec

$$f(z_0) = 0 \Longleftrightarrow a_0 = 0.$$

Or, $f \neq 0$ au voisinage z_0, soit donc k le plus grand naturel strictement positif tel que $a_k \neq 0$, on a :

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n\geq k} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n\geq 0} a_{n+k} (z - z_0)^n (z - z_0)^k .$$

Donc,

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z), \forall |z - z_0| < r \text{ et } k \in \mathbb{N}^*,$$

avec

$$g(z) = \sum_{n\geq 0} a_{n+k} (z - z_0)^k \, , \ pour \ |z - z_0| < r.$$

Comme $g(z)$ est continue, car analytique sur $D(z_0, r)$ en particulier en z_0 et $g(z_0) \neq 0$, on obtient ainsi :

$$f(z) \neq 0, \ pour \ |z - z_0| < \epsilon, \ (\epsilon > 0 \ assez \ petit).$$

Autrement dit, le point z_0 possède un voisinage dans lequel il est l'unique zéro de la fonction $f(z)$. □

Définition 2.3.3. Si g est analytique au voisinage d'un point z_0 et si $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$ avec $g(z_0) \neq 0$. L'entier $k > 0$ s'appelle l'ordre de multiplicité du zéro z_0 pour la fonction f. On dit que z_0 est un zéro multiple de f d'ordre k. L'ordre de multiplicité est aussi caractérisé par :

$$f(z_0) = f^{'}(z_0) = ... = f^{k-1}(z_0) = 0 \ et \ f^k(z_0) \neq 0$$

Corollaire 2.3.3. *Si f et g sont analytiques sur un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, si pour une suite $(z_n)_{n\geq n_0}$ de points de D distincts deux à deux avec $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = z^{'} \in D$, on a : $\forall n \geq n_0, f(z_n) = g(z_n)$, alors $f = g$ sur D.*

Démonstration. Exercice. □

Définition 2.3.4. Soit f une fonction analytique définie sur un ouvert U. S'il existe un ouvert connexe D avec $U \subset D$ et une fonction analytique g définie sur D telle que $g_{|U} = f$. Alors g est dite prolongement analytique de f sur l'ouvert connexe D.

Remarque 2.3.5. On sait que si g existe, alors elle est unique, mais on ne sait rien sur son existance.

2.4 Exercices

***Exercice* 2.4.1.** *Démontrer que $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$ ont le même rayon de convergence R.*

***Exercice* 2.4.2.** *Soient $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \neq 0$ et $f(z) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n, \forall z \in D_R$. Démontrer que $f(z)$ est dérivable sur D_R et que $f^{'}(z) = \sum\limits_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$.*

***Exercice* 2.4.3.** *1. Soit la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} i^n z^n$, déterminer son rayon de convergence R et sa somme f.*
2. Donner la série de Taylor associée à f en un point $z_0 = x_0 \in]-1, +1[$ et comparer son rayon avec de convergence R_1 avec $R - |x_0|$.

***Exercice* 2.4.4.** *Développer en série entière, au voisinage de 0, les fonctions suivantes :*

$$f(x) = \ln\left(1 + x - 2x^2\right), \ g(x) = \ln(a + x), \ a > 0$$

***Exercice* 2.4.5.** *1. Montrer que la fonction $z \longmapsto \frac{1}{z}$ est analytique sur $\mathbb{C} \backslash \{0\}$.*

2. *En déduire que si f est analytique sur un ouvert D de $\mathbb{C}$ alors $\frac{1}{f}$ est analytique sur un ouvert D' de $\mathbb{C}$ à préciser.*

Exercice 2.4.6. 1. *Soit f une fonction analytique sur un ouvert connexe D de $\mathbb{C}$, contenant un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. On suppose que $f = 0$ sur I, montrer que $f = 0$ sur D.*

2. *En déduire que si f est une fonction entière, nulle sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, alors elle est nulle sur $\mathbb{C}$.*

Exercice 2.4.7. *Si f et g sont analytiques sur un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, si pour une suite $(z_n)_{n\geq n_0}$ de points de D distincts deux à deux avec $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = z^{'} \in D$, on suppose que $f(z_n) = g(z_n), \forall n \geq n_0$, démontrer que $f = g$ sur D.*

Exercice 2.4.8. *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(z) = \begin{cases} \cos x & si\ x < 0 \\ 0 & si\ x = 0 \\ \sin x & si\ x > 0 \end{cases}$$

f est-elle analytique sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2.4.9. *Soit $r > 0$, existe-il une fonction analytique f sur $B(0, r)$ telle que :*

$$f\left(\frac{1}{3n}\right) = f\left(\frac{1}{3n+1}\right) = \frac{1}{n},\ pour\ r\ assez\ grand\ ?$$

2.5 Indications et solutions des exercices

Exercice 2.4.1 Soit R le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$.

1. **1er cas : $R > 0$.** Soit $0 < |z_0| < R$, alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ converge, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n z^n = 0$, et on a :

$$|a_n z_0^n| < 1 = \epsilon,\ pour\ n \geq N,$$

d'où,

$$\left|n a_n z^{n-1}\right| = n\,|a_n|\left|z^{n-1}\right| \leq n\left|\frac{1}{z_0}\right|^n |z|^{n-1} \leq \underbrace{n\frac{|z|^{n-1}}{|z_0|^n}}_{=U_n(z)}, \forall n \geq N.$$

Or, en appliquant le critère de d'Alambert sur $\sum\limits_{n\geq 0} U_n(z)$, on obtient :

$$\left|\frac{U_{n+1}(z)}{U_n(z)}\right| = \frac{n+1}{n}\frac{|z|}{|z_0|} \longrightarrow \frac{|z|}{|z_0|} < 1,\ lorsque\ n \mapsto +\infty,$$

et alors, pour $|z| < |z_0| < 1$, $\sum\limits_{n\geq 0} U_n(z)$ est convergente, d'où $\sum\limits_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$ converge pour $|z| < |z_0| < 1$, c'est à dire dans $D_{|z_0|}$ donc converge absolument dans D_R.

D'autre part, si $|z| > R$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n z^n \neq 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n a_n z^{n-1} \neq 0$, et alors la série $\sum\limits_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$ diverge, et par conséquent, le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$ est R.

2. **2ème cas : $R = 0$.** Trivial.

Exercice 2.4.2. Soit z fixé quelconque dans D_R, il suffit de prouver que :

$$\Delta(h) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\left\{f(z+h) - f(h)\right\} - \sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}\right) = 0,\ ou\ \lim_{h\to 0}\Delta(h) = 0,$$

avec,

$$\Delta(h) = \frac{1}{h}\left(\sum_{n\geq 1} a_n (z+h)^n - \sum_{n\geq 1} a_n z^n\right) - \sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1},\ où\ \ |z+h| < R.$$

Exercice 2.4.3.

1. La série $\sum\limits_{n\geq 0} i^n z^n$ est une série numérique de raison $q = iz$ et de premier terme 1. Elle converge pour $|q| < 1$, i.e $|iz| = |z| < 1$, et diverge pour $|z| > 1$, donc $R = 1$. Sa somme f est définie par :

$$f(z) = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-iz}, \forall\, |z| < 1,\ i.e\ \forall z \in D_1.$$

2. Déterminons la série de Toylor associée à f en $z_0 = x_0 \in]-1,1[$, i.e $x_0 \in D_1 \cap \{axe\ des\ x\}$. Comme,

$$f(z) = \frac{1}{1-iz} = \sum_{n\geq 0} i^n z^n, \forall z \in D_1,$$

f est donc analytique sur D_1, et $\forall z_0 \in D_1$, on a :

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^n(z_0)}{n!}(z-z_0)^n,\ pour\ \ |z-z_0|\ \ assez\ petit.$$

Ici,

$$\frac{1}{1-iz} = \frac{1}{1-iz_0 - i(z-z_0)} = \frac{1}{1-iz_0}\left(\frac{1}{1-\frac{i(z-z_0)}{1-iz_0}}\right).$$

En posant $u = \frac{i(z-z_0)}{1-iz_0}$, on obtient pour $\left|\frac{i(z-z_0)}{1-iz_0}\right| < 1$:

$$\frac{1}{1-iz} = \frac{1}{1-iz_0}\sum_{n\geq 0} u^n = \frac{1}{1-iz_0}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{i(z-z_0)}{1-iz_0}\right)^n = \sum_{n\geq 0}\frac{i^n}{(1-iz_0)^n}(z-z_0)^n,$$

pour $|z-z_0| < |1-iz_0|$ et $\forall z_0 \in D_1$. Ainsi, le rayon de convergence de la série de Taylor associée à f en $z_0 \in D_1$ est $R_1 = |1-iz_0|$ et pour $x_0 \in D_1 \cap \mathbb{R}$, on a :

$$\sum_{n\geq 0}\frac{i^n}{(1-ix_0)^n}(z-x_0)^n,\ qui\ converge\ pour\ \ |z-x_0| < |1-ix_0|.$$

Or, $|1-ix_0| = \sqrt{1+x_0^2}$, pour $]-1,1[\setminus\{0\}$, on a :

$$R_1 = \sqrt{1+x_0^2},\ et\ R - |x_0| = 1 - |x_0| > 0,$$

d'où, $R_1^2 > (R-|x_0|)^2$ ce qui entraîne que $R_1 > R - |x_0|$.

Exercice 2.4.4.

1. On a $1+x-2x^2=(1-x)(1+2x)$ donc la fonction est définie sur $I=]\frac{-1}{2},1[$, et sur cet intervalle elle s'écrit

$$\ln(1+x-2x^2)=\ln(1-x)+\ln(1+2x).$$

Or, on sait que

$$\ln(1-x)=-\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n},\ \textit{pour}\ \ |x|<1,$$

et

$$\ln(1+2x)=\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{(2x)^n}{n},\ \textit{pour}\ \ |x|<\frac{1}{2},$$

alors en effectuant la somme, on déduit que :

$$f(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}2^n-1}{n}x^n,\ \textit{pour}\ \ |x|<\frac{1}{2}.$$

2. D'une manière similaire, pour $a>0$, on trouve :

$$g(x)=\ln a+\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{na^n}x^n,\ \textit{pour}\ \ |x|<a.$$

Exercice 2.4.5.

1. Il suffit de démontrer que la fonction $g:z\mapsto g(z)=\frac{1}{z}$ est développable en série entière en $z_0, \forall z_0\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$, c'est à dire

$$\frac{1}{z}=\sum_{n\geq 0}a_n\left(z-z_0\right)^n,\ \textit{pour}\ \ |z-z_0|\ \textit{assez petit}.$$

on suit le même raisonnement que l'exercice 2.4.3, on trouve :

$$g(z)=\frac{1}{z}=\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{z_0^{n+1}}\left(z-z_0\right)^n,\ \textit{pour}\ \ |z-z_0|<|z_0|,$$

d'où, g est analytique sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$

2. Soit la fonction analytique sur un ouvert D de $\mathbb{C}$, alors

$$\frac{1}{f}=g\circ f:z\longmapsto g(f(z))=\frac{1}{f(z)},$$

$\frac{1}{f(z)}$ est donc analytique sur $D^{'}=\{z\in D/f(z)\neq 0\}=D\cap f^{-1}\left(\mathbb{C}\backslash\{0\}\right)$, ouvert de $\mathbb{C}$.

Exercice 2.4.6.

1. f est anlytique sur un ouvert connexe D de $\mathbb{C}$, $I\subset D$, avec I un intervalle de $\mathbb{R}$, telle que $f\equiv 0$. Montrons que $f\equiv 0$ sur D. On a $\forall z\in I$, $f(z)=0$, donc $f^n(z)=0, \forall n\in\mathbb{N}, \forall z\in I$. Ainsi, soit $z_0\in I$ fixé, alors comme $I\subset D, z_0\in D$ et comme $z_0\in I$, $f^n(z_0)=0, \forall n\in\mathbb{N}$. Or, la focntion $g:z\mapsto g(z)=0$ est analytique sur D et $g^n(z)=0, \forall n\in\mathbb{N}, \forall z\in D$, donc en particulier, $g^n(z_0)=0, \forall n\in\mathbb{N}$ et alors $f^n(z_0)=g^n(z_0)=0, \forall n\in\mathbb{N}$, donc d'après le théorème 2.3.2., $f=g$ sur D i.e $f\equiv 0$ sur D.

2. D'après ce qui précède, en posant $D = \mathbb{C}$, on en déduit que $f \equiv 0$ sur $\mathbb{C}$.

Exercice 2.4.7. On a $f - g$ est analytique sur l'ouvert connexe D. Supposons que $f - g \neq 0$ sur D. On a :

$$(f-g)(z^{'}) = (f-g)(\lim_{n\to+\infty} z_n) = \lim_{n\to+\infty}(f-g)(z_n) = 0, \ car\ (f-g)(z_n) = 0, \forall n \geq n_0.$$

Donc, $z^{'}$ est un zéro de la fonction $(f - g)$ et d'après le corollaire 2.3.2., il sera donc un zéro isolé de $(f - g)$, c'est à dire

$$\exists \epsilon > 0/\forall z, 0 < \left|z - z^{'}\right| < \epsilon, (f-g)(z) \neq 0,$$

or,

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = z^{'} \in D \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\epsilon \Longrightarrow \left|z_n - z^{'}\right| < \epsilon.$$

Soit $N_\epsilon^{'} = \max(n_0, N_\epsilon)$, on a :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon^{'} \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\epsilon \Longrightarrow \left|z_n - z^{'}\right| < \epsilon.\ et\ (f-g)(z_n) = 0,$$

d'où, la contradiction ainsi, $f - g = 0$ sur D.

Remarque 2.5.1. $z^{'} \in D$ est très important, en effet : soit

$$f(z) = \sin\frac{1}{z},\ et\ z_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi},$$

f est analytique sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ qui est un ouvert connexe, $z_n \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, \forall n \in \mathbb{N}$, les points de $(z_n)_n$ sont distincts deux à deux et $\lim_{n\to+\infty} z_n = 0 \notin \mathbb{C}\backslash\{0\}$. On a $f(z_n) = 1$, on prend $g \equiv 1$ sur $D = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ qui est analytique avec $f(z_n) = g(z_n)$ pourtant $f \neq g$ sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Exercice 2.4.9. Il n'existe pas une fonction analytique f sur $B(0, r)$ telle que :

$$f\left(\frac{1}{3n}\right) = f\left(\frac{1}{3n+1}\right) = \frac{1}{n},\ pour\ r\ assez\ grand.$$

Pour prouver cela, on peut appliquer le résultat démontré dans l'exercice 2.4.7., en considérant la fonction h définie sur $B(0, r)$ par, $h : z \mapsto h(z) = f(z) - 3z$,

Chapitre 3

Fonctions élémentaires

3.1 Fonction exponentielle

Définition 3.1.1. La série entière $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ converge absolument $\forall z \in \mathbb{C}$, on définit donc une fonction entière, qui est la somme d'une série entière convergente sur $\mathbb{C}$, par la formule :

$$e^z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + ... + \frac{z^n}{n!} + ..., \forall z \in \mathbb{C}, \tag{3.1.1}$$

et on dit que $z \longmapsto e^z$ est la fonction exponentielle complexe.

Remarque 3.1.1. La fonction $z \longmapsto e^z$ est dérivable par rapport à z sur $\mathbb{C}$ et on a

$$\frac{d}{dz}(e^z) = e^z, \forall z \in \mathbb{C},$$

en effet,

$$\frac{d}{dz}(e^z) = \left(\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}\right)' = \sum_{n\geq 1} \frac{nz^{n-1}}{n!} = \sum_{n\geq 1} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} = e^z.$$

Proposition 3.1.1. *On a :*

$$e^{z+z'} = e^z e^{z'}, \forall z, z' \in \mathbb{C}. \tag{3.1.2}$$

Démonstration. Pour démontrer cette formule sans calcul, on considère pour $x \in \mathbb{R}$ fixé quelconque, les fonctions suivantes :

$$\begin{array}{rcccl} f_x & : & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & & z & \mapsto & e^{z+x} \end{array} \quad et \quad \begin{array}{rcccl} g_x & : & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & & z & \mapsto & e^z e^x \end{array}$$

Les fonctions f_x et g_x sont analytiques sur $\mathbb{C}$. De plus, si $z \in \mathbb{R}$, on obtient,

$$f_x(z) = e^{z+x} = e^z e^x = g_x(z),$$

d'où, $f_x = g_x$ sur $\mathbb{R}$, ainsi d'après l'exercice 2.4.3, on a $f_x = g_x$ sur $\mathbb{C}$.
En considérant ensuite les fonctions $z \longmapsto e^{z+z'}$ et $z \longmapsto e^z e^{z'}$ pour un z' complexe fixé quelconque, on déduit de ce qui précède que ce sont des fonctions entières de z qui conïcident pour tout z réel et on obtient la formule (3.1.2) pour z et z' complexes quelconques □

Remarque *3.1.2.*

1. Dans (3.1.2), on pose $z^{'} = -z$, on obtient alors
$$e^0 = 1 = e^z e^{-z}.$$
d'où, $e^z \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$, et
$$e^{-z} = \frac{1}{e^z}, \forall z \in \mathbb{C}.$$
2. En remplaçant z par ix, avec $x \in \mathbb{R}$, dans la formule (3.1.1) et sachant que :
$$\cos x = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \; et \; \sin x = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$
on obtient la formule d'Euler, $\forall x \in \mathbb{R}$
$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \tag{3.1.3}$$
3. La fonction $z \longmapsto e^{iz}$ est une fonction entière dans $\mathbb{C}$ égale à
$$e^{iz} = \sum_{n\geq 0} \frac{(iz)^n}{n!}, \forall z \in \mathbb{C},$$
d'où, l'on peut définir les fonctions cosinus et sinus trigonométriques complexes, en posant, $\forall z \in \mathbb{C}$
$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$
et
$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$
Ainsi,
$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \tag{3.1.4}$$
De la formule (3.1.4) on déduit la formule de Moivre :
$$(\cos z + i \sin z)^n = e^{inz} = \cos nz + i \sin nz, \forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}.$$
On a aussi :
$$\cos z^2 + \sin z^2 = 1, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Remarque 3.1.3. Les fonctions $\cos z$ et $\sin z$ dans la formule (3.1.4) ne sont pas respectivement les parties réelles et imaginaires de e^{iz} pour $z \in \mathbb{C}$.

Définition 3.1.2. On définit les fonctions cosinus et sinus hyperboliques complexes, en posant :
$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \forall z \in \mathbb{C},$$
et
$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \forall z \in \mathbb{C}.$$

3.2 Fonction logarithme

Soient $z = x + iy$, $\omega = a + ib = e^z$, $\forall x, y, a, b \in \mathbb{R}$. Nous allons chercher les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation

$$e^z = \omega, \forall \omega \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

On a :

$$\omega = a + ib = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y),$$

d'où,

$$x = \ln |\omega| \ et \ y = \arg \omega, \ avec \ k \in \mathbb{Z}, \omega \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

Ainsi les solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation $e^z = \omega$, avec $\omega \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, fixé, sont :

$$z = \ln |\omega| + i \arg(\omega).$$

***Exemple* 3.2.1.** *Résoudre dans* $\mathbb{C}$, $\sin z = 2$. *On a :*

$$\sin z = 2 \Longleftrightarrow \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = 2 \Longleftrightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 4i.$$

Donc,

$$e^{i2z} - 4ie^{iz} - 1 = 0 \Longleftrightarrow Z^2 - 4Z - 1 = 0, \ où \ Z = e^{iz},$$

d'où,

$$Z = 2i \pm i\sqrt{3}, \ et \ e^{iz} = i(2 \pm \sqrt{3}).$$

On trouve alors,

$$iz = \ln \left|2 \pm \sqrt{3}\right| + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi), \ k \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi les solutions de l'équation proposée sont données par :

$$z = (\frac{\pi}{2} + 2k\pi) - i \ln \left|2 \pm \sqrt{3}\right|, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Remarque 3.2.1. On constate que l'équation $e^z = \omega$ admet une infinité de solutions $z = \ln |\omega| + i \arg(\omega), \forall \omega \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Ainsi chaque élément de $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ possède une infinité de logarithmes complexes. Si l'on veut pouvoir parler d'une fonction logarithme complexe, il faudrait alors restreindre l'ensemble des valeurs de la variable et préciser quelle est la détermination choisie.

Définition 3.2.1. On définit sur $\Omega = \{\omega \in \mathbb{C}, \omega = a + ib\} \backslash \{a + ib, a \leq 0 \ et \ b = 0\} = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$, la fonction logarithme complexe, appelée détermination principale du logarithme complexe, par :

$$\begin{array}{rccl} Log & : & \Omega & \rightarrow \mathbb{C} \\ & & z & \mapsto \quad Log(z) = \ln |z| + i \arg(z), \ \arg(z) \in]-\pi, +\pi] \end{array}$$

où ln désigne le logarithme népérien réel usuel.

Remarque 3.2.2. (Réf.[2]) La détermination principale du logarithme complexe, $Log(z)$, est analytique sur Ω.

Propriété 3.2.1. (Réf.[1]) *On a :*

1. $\frac{d}{dz}(Logz) = \frac{1}{z}, \forall z \in \Omega$

2. $Log(e^z) = z + 2i\pi\mathbb{Z}$, *dès que* $e^z \in \Omega$.

3. $Log(z+1) = \sum\limits_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$ *si* $|z| < 1$.

***Exemple* 3.2.2.** 1. $Log(1+i) = \ln|1+i| + i\arg(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}$.

2. $Log(-1) = \ln|-1| + i\arg(-1) = i\pi$.

3.3 Fonction puissance complexe

Définition 3.3.1. Soit $z' \in \mathbb{C}$, on appelle détermination principale de la fonction puissance complexe, la fonction $z^{z'}$ définie par :

$$\begin{array}{lll} \mathbb{C}\backslash\{0\} & \to \mathbb{C} & \\ z & \mapsto & z^{z'} = e^{z' Logz} \end{array}$$

Remarque 3.3.1. La fonction $z^{z'}$ est continue sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ et anlytique sur $\Omega = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$.

Proposition 3.3.1. *Soient* $z' \in \mathbb{C}$ *et* $z \in \Omega$. *On a alors :*

$$\frac{d}{dz}(z^{z'}) = z' z^{z'-1}.$$

Démonstration. On a :

$$\frac{d}{dz}(z^{z'}) = \frac{d}{dz}(e^{z' Logz}) = \frac{d}{dz}(e^{U(z)}),\ où\ U(z) = z' Logz,$$

or,

$$\frac{d}{dz}(e^{U(z)}) = \frac{d}{dz}U(z)e^{U(z)} = \frac{z'}{z}e^{z' Logz} = \frac{z'}{z}z^{z'},$$

c'est à dire, $\frac{d}{dz}(z^{z'}) = \frac{z'}{z}z^{z'}$, mais $z^{-1} = e^{-Logz} = \frac{1}{e^{Logz}} = \frac{1}{z}$,
ainsi,

$$\frac{d}{dz}(z^{z'}) = z' z^{-1} z^{z'}.$$

D'autre part, on peut vérifier aisément qu'on ait :

$$z^{z'} z^{z''} = e^{Log(z)^{z'+z''}}, \forall z', z'' \in \mathbb{C}, \forall z \in \Omega,$$

d'où, $z^{z'} z^{-1} = z^{z'-1}$ et $\frac{d}{dz}(z^{z'}) = z' z^{z'-1}, \forall z' \in \mathbb{C}, \forall z \in \Omega$. □

Remarque 3.3.2. Pour $z = x > 0$ et $z = \alpha \in \mathbb{R}$, $z^{z'} = x^\alpha = e^{\alpha Logx}$, coïncide avec notre formule.

***Exemple* 3.3.1.** *1.* $i^i = e^{iLogi} = e^{-\frac{\pi}{2}}$.

2. $(-2)^\pi = e^{\pi Log-2} = e^{\pi(Log2+i\pi)} = e^{\pi Log2}e^{i\pi^2} = 2^\pi e^{i\pi^2}$.

Remarque 3.3.3. On a :

$$(z^\alpha)^k = z^{\alpha k}, \forall \alpha \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{Z}$$

mais dans le cas général,

$$(z^\alpha)^\beta \neq z^{\alpha\beta}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C},$$

3.4 Exercices

***Exercice* 3.4.1.** *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* $e^z = -3$, $e^z = 0$ *puis* $\cos z = 4$.

***Exercice* 3.4.2.** *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* $\cosh z = 0$ *puis* $\sinh z = 0$.

***Exercice* 3.4.3.** *Calculer* $|\cos z|$, $|\sin z|$, $|\cosh z|$, *où* $z = x + iy$ *et* $x, y \in \mathbb{R}$.

***Exercice* 3.4.4.** *Calculer les nombres complexes suivants :*

$$e^{i\frac{\pi}{2}},\ e^{i\pi},\ e^{1+i\frac{\pi}{3}},\ \cos i,\ \cosh\frac{i\pi}{2}.$$

***Exercice* 3.4.5.** *Calculer les déterminations principales des logarithmes complexes suivants :*

$$\log 3,\ \log(-1+i),\ log(-1+i)^2.$$

***Exercice* 3.4.6.** *L'égalité suivante, entre les déterminations principales du logarithme complexe, est-elle vraie ? Justifier votre réponse ;*

$$log(zz^{'}) = \ logz + \ logz^{'},\ \forall z, z^{'} \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$$

***Exercice* 3.4.7.** *Calculer les déterminations principales des puissances suivantes, en mettant en évidence le module et l'argument ;*

$$(-4)^i,\ (1+i)^{\frac{5}{2}},\ (1+i)^i.$$

3.5 Indications et solutions des exercices

Exercice 3.4.1.

1. Résolvons l'équation
$$e^z = -3.$$
On a :
$$e^z = -3 = 3(-1 + i0) = 3(\cos\pi + i\sin\pi),$$
d'où,
$$e^z = -3 \Longleftrightarrow z = \ln 3 + i(\pi + 2k\pi), \forall k \in \mathbb{Z}.$$
2. Facile.

3. Résolvons l'équation
$$\cos z = 4.$$
On a :
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \forall z \in \mathbb{C},$$
d'où,
$$e^{iz} + e^{-iz} = 8 \Longleftrightarrow e^{i2z} - 8e^{iz} + 1 = 0.$$
Posons $Z = e^{iz}$, l'équation $Z^2 - 8Z + 1 = 0$ admet donc deux solutions à savoir $Z = 4 \pm \sqrt{15} = e^{iz}$.

- *Pour* $\mathrm{e}^{iz} = 4 + \sqrt{15}$,
$$e^{iz} = (4 + \sqrt{15})(1 + i0) = (4 + \sqrt{15})(\cos\theta + i\sin\theta),\ \textit{où}\ \theta = 0 \in]-\pi, +\pi].$$
D'où,
$$iz = \ln(4 + \sqrt{15}) + i2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z},$$
ainsi,
$$z = 2k\pi - i\ln(4 + \sqrt{15}), \forall k \in \mathbb{Z}.$$

- *Pour* $\mathrm{e}^{iz} = 4 - \sqrt{15}$, et d'une manière sémilaire, on trouve :
$$z = 2k\pi - i\ln(4 - \sqrt{15}), \forall k \in \mathbb{Z},$$
et par conséquent,
$$\cos z = 4 \Longleftrightarrow z = 2k\pi - i\ln(4 \pm \sqrt{15}), \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 3.4.3. On a :
$$\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy = \sin x \cosh y + i\cos x \sinh y,$$
donc,
$$|\sin z|^2 = \sin x^2 \cosh y^2 + \cos x^2 \sinh y^2 = \sin x^2(\sinh y^2 + 1) + (1 - \sin x^2)\sinh y^2.$$
Ainsi,
$$|\sin z|^2 = \sin x^2 + \sinh y^2.$$

D'une manière analogue, on trouve :
$$|\cos z|^2 = \cos x^2 + \sinh y^2,\ |\cosh z|^2 = \cos y^2 + \sinh x^2\ \textit{et}\ |\sinh z|^2 = \sin y^2 + \sinh x^2.$$

Exercice 3.4.4. On trouve :
$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i,\ e^{i\pi} = -1,\ e^{i\frac{\pi}{3}+1} = e(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}),\ \cos i = \cosh 1\ \textit{et}\ \cosh i\frac{\pi}{2} = 0.$$

Exercice 3.4.5. On a :
$$Log z = \ln|z| + i\arg(z),\ \textit{où}\ \arg(z) \in]-\pi, +\pi],$$

donc si $z = \rho e^{i\theta}$, avec $\rho = |z|$ et $\theta \in]-\pi, +\pi]$, alors

$$Logz = \ln \rho + i\theta, \ \textit{où} \ \theta \in]-\pi, +\pi]. \tag{3.5.1}$$

Ainsi, en appliquant (3.5.1), on peut aisément trouver :

$$Log(3) = \ln 3, \ Log(-1+i) = \ln\sqrt{2} + i\frac{3\pi}{4} \ \textit{et} \ Log(-1+i)^2 = \ln 2 - i\frac{\pi}{2}.$$

Remarque 3.5.1. On a $\forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$,

$$Log(z)^2 \neq 2Log(z).$$

Exercice 3.4.6. L'égalité entre les déterminations principales du logarithme complexe ;

$$log(zz^{'}) = \ logz + \ logz^{'}, \ \forall z, z^{'} \in \mathbb{C}\backslash\{0\},$$

n'est pas vraie, en effet : $\forall z, z^{'} \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $\exists \theta, \theta^{'} \in]-\pi, \pi]$, telles que :

$$Logz = \ln \rho + i\theta, \ \textit{et} \ Logz^{'} = \ln \rho^{'} + i\theta^{'}.$$

De plus, on a :

$$zz^{'} = \rho\rho^{'} e^{i(\theta+\theta^{'})}, \ \textit{avec} \ -2\pi < \theta + \theta^{'} \leq 2\pi,$$

donc si $\theta + \theta^{'} \in]-\pi, \pi]$, alors

$$log(zz^{'}) = \ln(\rho\rho^{'}) + i(\theta + \theta^{'}) = \ln \rho + \ln \rho^{'} + i\theta + i\theta^{'} = Logz + Logz^{'}.$$

Cependant, si par exemple θ et $\theta^{'}$ sont dans $]\frac{\pi}{2}, \pi]$, alors

$$Logz = \ln \rho + i\theta, \ \textit{et} \ Logz^{'} = \ln \rho^{'} + i\theta^{'}, \ \textit{avec} \ \ -2\pi < \theta + \theta^{'} \leq 2\pi,$$

d'où,

$$-\pi < \theta + \theta^{'} - 2\pi \leq 0, \ \textit{et} \ \theta + \theta^{'} - 2\pi = \arg(zz^{'}) \in]-\pi, \pi],$$

et alors

$$log(zz^{'}) = \ln \rho + \ln \rho^{'} + i\theta + i\theta^{'} - 2i\pi = Logz + Logz^{'} - 2i\pi.$$

Exercice 3.4.7. Soit $z^{'} \in \mathbb{C}$, la détermination principale de la fonction puissance est définie par :

$$z^{z^{'}} \overset{déf.}{=} e^{z^{'} Logz}, \ \forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

Donc, en appliquant la définition, on trouve :

$$(-4)^i = e^{-\pi} e^{iLog4}, \ (1+i)^{\frac{5}{2}} = (\sqrt{2})^{\frac{5}{2}} e^{i\frac{5\pi}{8}}, \ (1+i)^i = e^{-\frac{\pi}{4}} e^{\frac{i}{2}Log2}.$$

Chapitre 4

Intégration complexe et théorie de Cauchy

4.1 Intégrales curvilignes

4.1.1 Formes différentielles de degré 1 sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Définition 4.1.1. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On appelle forme différentielle de degré 1 (ou une 1-forme) de classe C^k, une application de classe C^k ω de U dans $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ [1]. C'est à dire, il existe des fonctions $a_1, a_2, ..., a_n$ de classe C^k de U à valeurs dans $\mathbb{R}$, tel que $\forall x \in U$, on a :

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)dx_i = a_1dx_1 + a_2dx_2 + ... + a_ndx_n,$$

où $\{dx_1, dx_2, ..., dx_n\}$ désigne la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Remarque 4.1.1.

1. Pour $i = \{1, ..., n\}$, on note

$$dx_i : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, ..., x_n) & \mapsto & x_i, \end{array}$$

   ainsi, pour $x \in U$ on notera parfois ω_x au lieu de $\omega(x)$ et pour $u = (u_1, u_2, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n$ on a alors

$$\omega_x(u) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)u_i.$$

2. En dimension 2, on pourra noter (dx, dy) au lieu de (dx_1, dx_2), et pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la forme différentielle de degé 2 s'écrit alors comme suit :

$$\omega_{(x,y)} = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

***Exemple* 4.1.1.** *Soit f une fonction de classe C^k de $U \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, avec $k \geq 1$. Pour tout $x \in U \subset \mathbb{R}^n$, la différentielle f au point x est donnée par :*

$$\forall h = (h_1, h_2, ..., h_n) \in \mathbb{R}^n, (d_xf)(h) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)h_i,$$

ou bien $df = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i$, ainsi df définit bien une 1-forme différentielle de C^{k-1} sur U.

1. l'ensembles des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$,

Définition 4.1.2. Une 1-forme ω sur U est dite exacte s'il existe une fonction f de classe C^1 sur U telle que $df = \omega$.

***Exemple* 4.1.2.** *La 1-forme ω définie sur $\mathbb{R}^2$ par :*

$$\omega_{(x,y)} = xdx + ydy,$$

est exacte car c'est la différentielle de la fonction $f : (x, y) \mapsto \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ sur $\mathbb{R}^2$.

4.1.2 Intégrale d'une 1-forme le long d'une courbe paramétrée

Définition 4.1.3.
1. Une courbe paramétrée de classe C^k, est une application γ de classe C^k d'un intervalle $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.
2. On dit que γ est fermée si $\gamma(a) = \gamma(b)$, et qu'elle est simple si sa restriction à $]a, b[$ est injective.
3. On appelle support de γ, l'ensemble $supp(\gamma) = \{\gamma(t)/t \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^n$.

***Exemple* 4.1.3.** *On considère la courbe $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$ de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :*

$$\gamma(t) = \begin{cases} r\cos t \\ r\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi].$$

γ est une courbe fermée puisque $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = (r, 0)$, dont le support est le cercle de centre 0 est de rayon r.

Définition 4.1.4. Soient ω une 1-forme différentielle continue sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$, $I = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $\gamma : I \longrightarrow U$ une courbe de classe C^1. On appelle intégrale curviligne, l'intégrale de la 1-forme le long de la courbe γ définie comme suit :

$$\int_\gamma \omega \ = \int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\gamma^{'}(t))\, dt.$$

Si on note $\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)dx_i$ et $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$, on aura

$$\int_\gamma \omega \ = \int_a^b \sum_{i=1}^{n} a_i(\gamma(t))x_i^{'}(t)\ dt.$$

***Exemple* 4.1.4.** *On considère l'arc de courbe d'équation $y = e^{x^2}$ entre les points $(-1, e)$ et $(2, e^4)$ et calculons $\int_\gamma \omega$ où*

$$\omega_{(x,y)} = xydx + 3y^2dy.$$

On définit la courbe γ comme suit :

$$\gamma : \begin{array}{ccc} [-1, 2] & \to \mathbb{R}^2 & \\ t & \mapsto & \gamma(t) = (t, e^{t^2}). \end{array}$$

D'où,

$$\int_\gamma \omega \ = \int_{-1}^2 \omega_{\gamma(t)}\gamma^{'}(t)\, dt = \int_{-1}^2 te^{t^2}dt + \int_{-1}^2 6te^{3t^2}dt = \frac{1}{2}(e^4 - e) + (e^{12} - e^3).$$

Théorème 4.1.1. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et ω une 1-forme différentielle exacte sur U, alors l'intégrale curviligne $\int_\gamma \omega$ ne dépend que des extrémités $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$ et non pas de γ.*

Démonstration. Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Comme ω est exacte, alors $\omega = df$ où f de classe C^1. On a alors :

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\gamma^{'}(t))\,dt = \int_a^b df_{\gamma(t)}(\gamma^{'}(t))dt = \int_a^b (f\circ\gamma)^{'}(\gamma^{'}(t))dt = \int_a^b [(f\circ\gamma)\,(t)]^{'}dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

□

Corollaire 4.1.1. *Si la 1-forme ω est exacte, alors pour toute courbe fermée dans U, $\oint \omega = 0$*

***Exemple* 4.1.5.** *Soit la 1-forme ω définie sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ par :*

$$\omega_{(x,y)} = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}.$$

On considère le cercle unité paramétrisé par la courbe suivante :

$$\begin{array}{rccl} \gamma: & [0,2\pi] & \to \mathbb{R}^2 & \\ & t & \mapsto & \gamma(t) = (\cos t, \sin t), \end{array}$$

donc,

$$\oint \omega = \int_0^{2\pi} \omega_{\gamma(t)}(\gamma^{'}(t))\,dt = 2\pi \neq 0$$

d'où, ω n'est pas exacte.

4.2 Chemins dans $\mathbb{C}$

4.2.1 Définitions

Définition 4.2.1.

1. Soit $I = [a,b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. On appelle chemin dans $\mathbb{C}$, une application $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, continue sur $[a,b]$ et contiûment dérivable par morceaux sur $[a,b]$, c'est à dire, $\gamma^{'}$ existe et continue sauf peut être en un nombres fini de points t_k de $[a,b]$ où elle admet cependant une limite à droite et à gauche. On dit encore que $\gamma^{'}$ est continue par morceaux sur $[a,b]$. Lorsque t varie entre a et b, le point $\gamma(t)$ décrit donc dans $\mathbb{C}$ une trajectoire $\gamma(I)$, qui admet une tangente de direction le vecteur $\gamma^{'}(t)$ (voir la figure 4.1). $\gamma(a)$ est dit origine du chemin γ et $\gamma(b)$ est dit extrémité du chemin.
2. Un chemin est dit lacet dans $\mathbb{C}$, si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Définition 4.2.2. On apelle opposé de γ (ou chemin opposé de γ), qu'on note γ°, le chemin $\gamma^\circ : [a,b] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \gamma^\circ(t) = \gamma(a+b-t)$. γ° est bien un chemin dans $\mathbb{C}$, ayant pour origine $\gamma(b)$ et pour extrémité $\gamma(a)$.

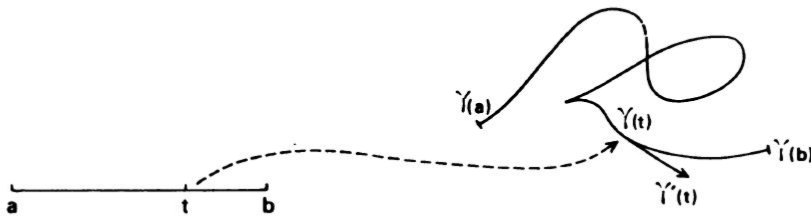

FIGURE 4.1 – Chemin dans $\mathbb{C}$

Définition 4.2.3. (Juxtaposition de chemins) Soient deux chemins $\gamma_1 : I = [a,b] \to \mathbb{C}$ et $\gamma_2 : J = [c,d] \to \mathbb{C}$ tels que $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$. On appelle juxtaposition de γ_1 et γ_2 et on note $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$, le chemin $\gamma : [a, b+d-c] \to \mathbb{C}$ défini comme suit (voir la figure 4.2) :

$$\gamma = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{si } t \in [a,b] \\ \gamma_2(t-b+c) & \text{si } t \in [b, d+b-c] \\ , \end{cases}$$

où $\gamma_1 \vee \gamma_2$ a pour origine $\gamma_1(a)$ et pour extrémité $\gamma_2(d)$.

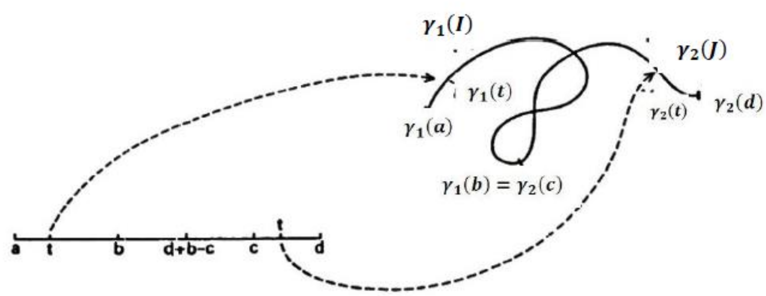

FIGURE 4.2 – Juxtaposition de $\gamma_1 \vee \gamma_2$

4.2.2 Intégration le long d'un chemin

Définition 4.2.4. Soient $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin dans $\mathbb{C}$, f une fonction complexe continue dans $\gamma([a,b])$. On appelle intégrale de f le long du chemin γ, le nombre complexe :

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt,$$

on a, $f \circ \gamma : [a,b] \xrightarrow{\gamma} \gamma([a,b]) \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ est continue sur $[a,b]$, $\gamma'(t)$ est continue par morceaux sur $[a,b]$, $(f\circ\gamma)'.\gamma'$ est continue par morceaux sur $[a,b]$, donc intégrable au sens de Riemann.

Propriété 4.2.1. *1.* $\int_\gamma f(z)dz = -\int_{\gamma^\circ} f(z)dz$.

2. Si $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$*, alors on a :*

$$\int_{\gamma=\gamma_1\vee\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

3. *si* $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$ *est un lacet dans* $\mathbb{C}$, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, *alors* $\int_\gamma f(z)dz$ *ne dépend pas de l'origine de ce lacet. En effet :*

$$\int_{\gamma_1 \vee \gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2 \vee \gamma_1} f(z)dz.$$

4. *Si* γ *est un lacet constant, c'est à dire* $\gamma : t \mapsto \gamma(t) = z_0, \forall t \in [a,b]$, *alors pour toute fonction complexe* f *continue sur* $\gamma([a,b])$, $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

Exemple 4.2.1. 1. *Soit la fonction complexe* $f(z) = \frac{1}{z}$ *définie sur* $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. *Calculons* $\int_{\gamma_r} f(z)dz$, *tel que le chemin* γ_r *est défini par :*

$$\begin{array}{rlll} \gamma_r : & [0,2\pi] & \to \mathbb{C} & \\ & t & \mapsto & \gamma_r(t) = re^{it}, \end{array}$$

on a f *est continue en particulier sur* $\gamma([0,2\pi])$, *donc :*

$$\int_{\gamma_r} f(z)dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} ire^{it}\, dt = \int_0^{2\pi} i\, dt = 2i\pi, \forall r > 0.$$

2. *Soit* $f(z) = \overline{z}$ *qui est continue sur* $\mathbb{C}$. *Nous allons intégrer la fonction* f *de* $t = 0$ *à* $t = 3$, *le long de la courbe définie par* $\gamma_r(t) = t + 3it^2$. *On a alors :*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \overline{z}dz = \int_0^3 (t - 3it^2)(1 + 6it)\, dt = 171 + i54.$$

4.3 Primitives de fonctions analytiques

Remarque 4.3.1. Les séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$ ont le même rayon de convergence R. De même, les séries $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ ont le même rayon de convergence R. Donc si $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n, \forall z \in D_R$ et $F(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}, \forall z \in D_R$, alors $F' = f(z), \forall z \in D_R$. C'est à dire, F est une primitive de f sur D_R, et toute autre primitive de G de f est donnée par :

$$G(z) = F(z) + cste \in \mathbb{C}$$

.

Soit $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe, il se peut que certaines fonctions analytiques dans D n'admettent pas de primitives dans D. L'intégrale le long d'un chemin permet de donner une condition nécessaire et suffusante pour qu'une telle primitive exite :

Théorème 4.3.1. *Soit* f *une fonction analytique dans un ouvert connexe* D *de* $\mathbb{C}$. *Alors,*
f *admet une primitive* F *dans* $D \iff \int_\gamma f(z)dz = 0$, *pour tout lacet contenu dans* D.
Lorsqu'il en est ainsi, Toute primitive F *dans* D *s'obtient de la façon suivante :*

$$\forall z \in D, F(z) = \int_{\beta(z)} f(u)du + k,$$

où $\beta(z)$ *est un chemin quelconque contenu dans* D, *d'origine un point fixe (arbitraire)* $z_0 \in D$ *et d'extrémité* z, *et* k *une constante dépendant de* z_0.

Démonstration.

1. Démontrons la nécessité de la condition : On suppose que f une fonction analytique dans l'ouvert connexe D de $\mathbb{C}$, on a $F^{'} = f(z), \forall z \in D$. Soit $\gamma : [a,b] \to D$ un lacet dans D, donc,

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma^{'}(t)\,dt = \int_a^b (F^{'}\circ\gamma)(t)\gamma^{'}(t)\,dt = \int_a^b ((F^{'}\circ\gamma)\gamma^{'})(t)\,dt = \int_a^b ((F\circ\gamma)^{'})(t)\,dt.$$

Ainsi, comme γ est un lacet, on obtient au final :

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0.$$

Cela nous montre également que si une primitive F de f dans D existe, on aura :

$$\int_{\beta(z)} f(u)du = F(z) - F(z_0), \forall z \in D. \tag{4.3.1}$$

2. Pour prouver que la condition de l'énoncé est suffisante, on doit (voir [2] pour la preuve) :
   (a) Démontrer que Le nombre comlexe $\int_{\beta(z)} f(u)du$ ne dépend pas du chemin $\beta(z)$ dans D, mais uniquement de z_0 et z. Cela nous permettra de définir F comme application dans D par la formule (4.3.1).
   (b) Démontrer que F est analytique sur D et que $F^{'} = f$ sur D.

□

***Exemple* 4.3.1.** *Soit la fonction complexe $f(z) = \frac{1}{z}$ définie sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. La fonction f est analytique sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ qui est un ouvert connexe, mais elle n'admet pas de primitive dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, car d'après l'exemple 3.2.1, on a :*

$$\int_{\gamma_r} f(z)dz = 2i\pi \neq 0, \text{ où } \gamma_r : t \mapsto \gamma_r(t) = re^{it} \in \mathbb{C}, \forall t \in [0, 2\pi].$$

Ainsi, d'après le théorème 4.3.1., f n'admet pas de primitive.

Définition 4.3.1. (Homotopie de chemins)

1. Soient D un ouvert de $\in \mathbb{C}$ et γ_1, γ_2 deux chemins dans D définis sur le même intervalle $[a,b]$. On appelle homotopie de γ_1 à γ_2, toute application $H : [a,b]\times[c,d] \to D$, où $[c,d]$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, telles que :
   (a) $H(t,s)$ est continue sur $[a,b]\times[c,d]$,
   (b) $\forall t \in [a,b]$, $H(t,c) = \gamma_1(t)$ et $H(t,d) = \gamma_2(t)$.
2. Deux lacets γ_1 et γ_2 dans D définissent sur $[a,b]$ sont dits homotopes dans D si :
   (a) Ils sont homotopes comme lacets.
   (b) $H(a,s) = H(b,s)$, $\forall s \in [c,d]$.

***Remarque* 4.3.2.** 1. Intuitivement, l'homotopie de deux chemins, est une "déformation continue" faisant passer de l'un à l'autre.

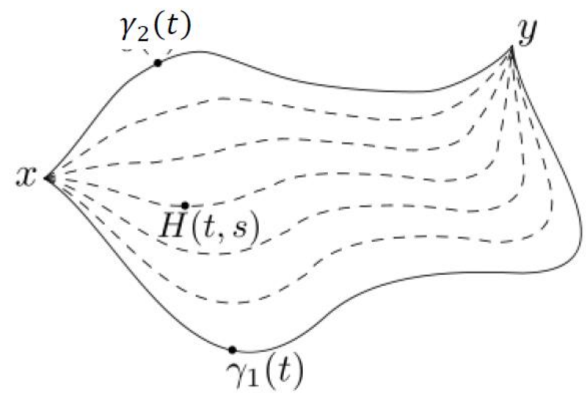

FIGURE 4.3 – Chemins strictement homotopes

2. Deux chemins γ_1 et γ_2 sont dits strictement homotopes s'ils ont même origine et même extrémité, voir la figure 4.3.
3. Deux chemins dans $D' \subset D$ peuvent être homotopes dans D et ne pas l'être dans D'. Par exemple, un lacet dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ est homotope à un point dans $\mathbb{C}$, mais pas nécessairement dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.
4. L'homotopie de chemins (respectivement lacets) est une relation d'équivalence dans l'ensemble des chemins (respectivement lacets) qui sont dans D et définis dans un même intervalle $[a, b]$.

Définition 4.3.2. Un ouvert connexe D dans $\mathbb{C}$, est dit simplement connexe si tout lacet dans D est homotope à un lacet constant. Intuitivement, tous les points intérieurs à une ligne brisée fermée dans D, soient dans D.

Exemple 4.3.2. *1. Le disque ouvert $D = \{z \in \mathbb{C}/\,|z| < 1\}$ est simplement connexe. En effet, soient γ_1, γ_2 deux chemins définis comme suit :*

$$\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{C}/\gamma_1(a) = \gamma_1(b), et\ \gamma_2 : [0, 1] \to \mathbb{C}/\gamma_2(t) = z_0.$$

Définissons maintenant la fonction H par :

$$H : [a, b] \times [0, 1] \to D/H(t, s) = sz_0 + (1 - s)\gamma_1(t).$$

On a :

(a) $H(a, s) = sz_0 + (1 - s)\gamma_1(a) = z_0 + (1 - s)\gamma_1(b) = H(b, s), \forall s \in [0, 1]$, d'où

$$|H(s, t)| = |sz_0 + (1 - s)\gamma_1(t)| \leq |s|\,|z_0| + (1 - s)\,|\gamma_1(t)| < s + 1 - s < 1.$$

(b) $H(t, 0) = \gamma_1(t)$ et $H(t, 1) = \gamma_2(t) = z_0, \forall t \in [a, b]$.

(c) H est continue par rapport à $(t, s) \in [a, b] \times [0, 1]$.

2. Tout ouvert D de $\mathbb{C}$, qui est étoilé par rapport à l'un de ses points z_0, est simplement connexe.

Théorème 4.3.2. (Théorème de Cauchy Réf. [2]) *Soient D un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction analytique dans D. Si γ_1 et γ_2 sont deux lacets dans D qui sont homotopes dans D comme lacets, alors*

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

Corollaire 4.3.1. *Si D est simplement connexe de $\mathbb{C}$ et si f est analytique dans D, alors*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0, \text{ pour tout lacet } \gamma \text{ dans } D.$$

Corollaire 4.3.2. *Si D est simplement connexe, toute fonction analytique dans D admet une primitive dans D.*

Démonstration. Cela resulte du théorème 4.3.2 et le corollaire 4.3.1. □

Remarque 4.3.3. L'ouvert $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ est connexe non simplement connexe, on peut prouver cela en appliquant le corollaire 4.3.1 et le corollaire 4.3.2, à la fonction $f(z) = \frac{1}{z}$.

4.4 Formule de Cauchy et quelques conséquences

4.4.1 Indice d'un point par rapport à un lacet

On a vu dans l'exemple 4.2.1, que

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = 2i\pi \neq 0, \text{ avec } \gamma_1 : t \mapsto \gamma_1(t) = e^{it} \in \mathbb{C}, \forall t \in [0, 2\pi],$$

où γ_1 est le cercle unité centré à l'origine et parcouru une fois dans le sens direct.
En général, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$ et tout $p \in \mathbb{C}$, on considère le lacet $\gamma_{n,p}$ défini par :

$$\gamma_{n,p} : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}\backslash\{p\} / \gamma_{n,p}(t) = e^{int} + p,$$

où $\gamma_{n,p}$ est le cercle unité centré en p, parcouru n-fois dans le sens direct si $n > 0$ et n-fois dans le sens indirect si $n < 0$. On a alors :

$$\int_{\gamma_{n,p}} \frac{1}{z-p} dz = \int_0^{2\pi} int \frac{e^{int}}{e^{int}} dt = 2in\pi \tag{4.4.1}$$

la fonction $z \mapsto \frac{1}{z-p}$ étant analytique sur $\mathbb{C}\backslash\{p\}$ qui est un ouvert connexe, on peut donc affirmer à l'aide du théorème de Cauchy que :

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z-p} dz = 2in\pi, \tag{4.4.2}$$

pour tout lacet γ dans $\mathbb{C}\backslash\{p\}$ homotope à $\gamma_{n,p}$ dans $\mathbb{C}\backslash\{p\}$, d'où le résultat suivant :

Proposition 4.4.1. *Pour tout point p de $\mathbb{C}$ et tout lacet dans $\mathbb{C}\backslash\{p\}$,*

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z-p} dz = 2in\pi, \text{où } n \in \mathbb{Z}^*,$$

Définition 4.4.1. Soient $p \in \mathbb{C}$ et γ un lacet dans $\mathbb{C}\backslash\{p\}$, on appelle indice de p par rapport au lacet γ, le nombre entier ($\in \mathbb{Z}$), qu'on note $\Im(p;\gamma)$, défini par :

$$\Im(p;\gamma) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{1}{z-p}dz$$

Remarque 4.4.1. Intuitivement, l'indice $\Im(p;\gamma)$ peut être interprété comme étant le nombre de tours que fait le point $\gamma(t)$ autour du point p lorsque t décrit $[a,b]$. Ainsi, l'indice est défini si p ne se trouve pas sur la ligne fermée décrite par γ.

Proposition 4.4.2. *Si γ_1 et γ_2 sont deux lacets dans $\mathbb{C}\backslash\{p\}$ qui sont homotopes dans $\mathbb{C}\backslash\{p\}$ comme lacets, alors $\Im(p;\gamma_1) = \Im(p;\gamma_2)$.*

Démonstration. $\Im(p;\gamma_1) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1}\frac{1}{z-p}dz = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_2}\frac{1}{z-p}dz = \Im(p;\gamma_2)$. □

Proposition 4.4.3. *Si γ un lacet dans $\mathbb{C}\backslash\{p\}$ et γ° désigne le lacet opposé à γ, alors on a $\Im(p;\gamma^\circ) = -\Im(p;\gamma)$.*

Démonstration. On a :

$$\Im(p;\gamma^\circ) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma^\circ}\frac{1}{z-p}dz = -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{1}{z-p}dz = -\Im(p;\gamma)$$

. □

Proposition 4.4.4. *Si γ_1 et γ_2 sont deux lacets dans $\mathbb{C}\backslash\{p\}$ ayant même origine (de façon que $\gamma_1 \vee \gamma_2$ soit un lacet de même origine), alors $\Im(p;\gamma_1 \vee \gamma_2) = \Im(p;\gamma_1) + \Im(p;\gamma_2)$.*

Proposition 4.4.5. *Si $\mathcal{O}$ est un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ et si γ est un lacet dans $\mathcal{O}$. Alors, pour tout $p \notin \mathcal{O}$, $\Im(p;\gamma) = 0$.*

Démonstration. Puisque la fonction $z \mapsto \frac{1}{z-p}$ est analytique sur $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}\backslash\{p\}$, donc d'après le corollaire 3.3.1, on aura :

$$\Im(p;\gamma) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{1}{z-p}dz = 0.$$

□

Proposition 4.4.6. *Soient γ un lacet défini sur $I = [a,b]$ dans $\mathbb{C}$ et $p \in \mathbb{C}\backslash\{\gamma(I)\}$, alors pour tout ouvert $D \subset \mathbb{C}\backslash\{\gamma(I)\}$, la fonction $z \mapsto \Im(p;\gamma)$ est constante.*

Démonstration. Il suffit de montrer que la fonction $z \mapsto \Im(p;\gamma)$ est localement constante dans D, car toute fonction vectorielle localement constante sur un ouvert connexe D, est constante sur D. □

Théorème 4.4.1. (Formule intégrale de Cauchy) *Soient D un ouvert de $\mathbb{C}$ simplement connexe et $\gamma : I = [a,b] \to D$ un lacet dans D. Alors, pour toute fonction analytique sur D et tout point $p \in D\backslash\{\gamma(I)\}$, on a :*

$$\Im(p;\gamma)f(p) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-p}dz, \forall p \in D\backslash\{\gamma(I)\}.$$

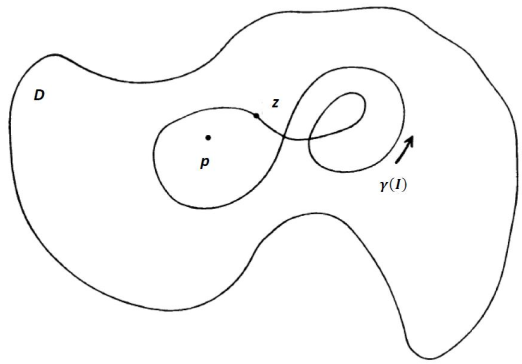

FIGURE 4.4 – $\Im(p;\gamma)$ est bien défini

Démonstration. Soit l'application g définie sur l'ouvert simplement connexe D de $\mathbb{C}$ par :

$$\begin{array}{llll} g: & D & \to \mathbb{C} & \\ & z & \mapsto & g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(p)}{z-p} & \text{si } z \neq p \\ f^{'}(p) & \text{si } z = p \end{cases} \end{array}$$

La fonction $g(z)$ est analytique sur D, en effet :

1. g est analytique sur $D \backslash \{p\}$ car f et $z \mapsto \frac{1}{z-p}$ le sont.
2. Prouvons que g est développable en série entière en p. Comme f est analytique sur D, alors en partculier f est développable en série entière en p. Donc, $\exists V_p$ voisinage ouvert de p, telle que

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^n(p)}{n!}(z-p)^n, \forall z \in V_p,$$

d'où,

$$\forall z \in V_p \backslash \{p\}, \frac{f(z)-f(p)}{z-p} = \sum_{n\geq 1} \frac{f^n(p)}{n!}(z-p)^{n-1} = f^{'}(p) + f^{''}(p)\frac{1}{2}(z-p) + f^{'''}(p)\frac{1}{3!}(z-p)^3 + ...$$

Or, par définition $g(p) = f^{'}(p)$, donc :

$$g(z) = f^{'}(p) + f^{''}(p)\frac{1}{2}(z-p) + f^{'''}(p)\frac{1}{3!}(z-p)^3 + ... = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{n+1}(p)}{(n+1)!}(z-p)^n, \forall z \in V_p.$$

D'autre part, D un ouvert de $\mathbb{C}$ simplement connexe, γ est un lacet dans D et g est analytique sur D, alors d'après le corollaire 3.3.1,

$$\int_\gamma g(z)dz = 0,$$

c'est à dire,

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-p}dz - f(p)\int_\gamma \frac{1}{z-p}dz = 0 \Longleftrightarrow f(p)\Im(p;\gamma) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{1}{z-p}dz.$$

□

Remarque 4.4.2. 1. Si $f \equiv 1$ on retrouve

$$\Im(p;\gamma) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{1}{z-p}dz$$

2. Si $\Im(p;\gamma) \neq 0$ et grace à la formule intégrale de Cauchy, on pourra trouver les valeurs de f en tout point de D à partir de la seule connaissance de f sur $\gamma(I)$.

Exemple 4.4.1. *Calculons*

$$\int_\gamma \frac{z+3}{z-1}dz,$$

où γ est le lacet de $\mathbb{C}$ parcouru 1-fois dans le sens direct avec $\gamma(I)$ est le carré de centre 1, dont un sommet est $(0,1)$.
Nous allons utiliser la formule intégrale de Cauchy, considérons pour cela la fonction $f(z) =$

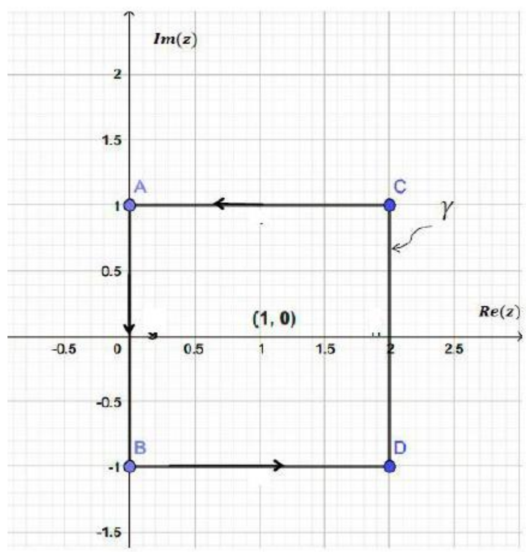

FIGURE 4.5 – γ est un carré centré en (1, 0)

$z+3$. *La fonction est analytique sur $\mathbb{C}$ qui est un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ et γ est lacet dans $\mathbb{C}$ avec $p = 1 \in \mathbb{C}\backslash\{\gamma(I)\}$ (voir la figure 4.5), donc d'après la formule intégrale de Cauchy on a :*

$$\Im(1;\gamma)f(1) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{z+3}{z-1}dz,$$

or, $p = 1$ est "intérieur" à γ, parcouru 1-fois dans le sens direct alors $\Im(1;\gamma) = +1$, avec $f(1) = 4$, on obtient au final :

$$\int_\gamma \frac{z+3}{z-1}dz = 8i\pi.$$

Théorème 4.4.2. (Réf. [2]) *Soient $\gamma : I = [a,b] \to \mathbb{C}$ un lacet dans $\mathbb{C}$ et $g : \gamma(I) \to \mathbb{C}$ une application définie et continue sur $\mathbb{C}\backslash\{\gamma(I)\}$. Soit f l'application définie sur $\mathbb{C}\backslash\{\gamma(I)\}$ par :*

$$\forall p \in \mathbb{C}\backslash\{\gamma(I)\}, f(p) = \int_\gamma \frac{g(z)}{z-p}dz$$

alors

1. *f est analytique sur $\mathbb{C}\backslash\{\gamma(I)\}$.*
2. *Si $T_a = \sum_{n\geq 0} c_n(p-a)^n$ est la série de Taylor associée à f en un point quelconque $a \in \mathbb{C}\backslash\{\gamma(I)\}$, alors les coefficients c_n de T_a sont donnés par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \int_\gamma \frac{g(z)}{(z-a)^{n+1}} dz.$$

3. *Le rayon de convergence R_a de T_a vérifie $R_a \geq \delta$, avec $\delta = d(a, \gamma(I)) = \inf_{s\in\gamma(I)} |a-s|$.*
4. *De plus,*

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^n(a) = n! \int_\gamma \frac{g(s)}{(s-a)^{n+1}} ds, \forall a \in \mathbb{C}\backslash\{\gamma(I)\}.$$

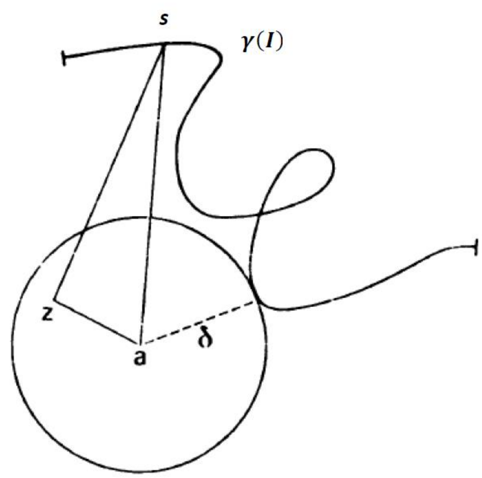

FIGURE 4.6 – $\delta = d(a, \gamma(I)) = \inf_{s\in\gamma(I)} |a-s|$

Théorème 4.4.3. (Formule intégrale de Cauchy généralisée) *Sous les mêmes hypothèses de la formule de Cauchy, on a pour tout $n \geq 1$:*

$$\Im(p;\gamma) f^n(p) = \frac{n!}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-p)^{n+1}} dz, \forall p \in D\backslash\{\gamma(I)\}.$$

Démonstration. Exercice. □

4.4.2 Inégalité de Cauchy

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit f une fonction analytique sur Ω et $z_0 \in D$. Soit $D(z_0, \xi)$, où $\xi = d(z_0, \Omega^c) > 0$, le plus grand disque ouvert centré en z_0 et contenu dans D. Considérons maitenant le lacet γ_r défini par :

$$\begin{array}{rcccl} \gamma_r & : & [0, 2\pi] & \to & D(z_0, \xi) \\ & & t & \mapsto & \gamma_r(t) = z_0 + re^{it}, \end{array}$$

parcouru une fois dans le sens direct avec $0 < r < \delta$. γ_r est un lacet dans $D(z_0, \xi)$, f est analytique en particulier sur $D(z_0, \xi)$ qui est un ouvert simplement connexe, donc d'après la formule intégrale de Cauchy généralisée, et comme $z_0 \in D(z_0, \xi) \backslash \{\gamma_r(I)\}$, alors on a :

$$\Im(z_0; \gamma) f^n(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Or, z_0 est "intérieur" à γ_r, parcouru une fois dans le sens direct donc $\Im(z_0; \gamma) = +1$, d'où,

$$f^n(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{r^{n+1} e^{i(n+1)t}} ire^{it} dt = \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{e^{int}}, \forall n \in \mathbb{N},$$

et alors,

$$|f^n(z_0)| \leq \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \frac{|f(z_0 + re^{it})|}{|e^{int}|}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Notons $M(r) = \sup\limits_{t \in [0, 2\pi]} |f(z_0 + re^{it})| = \sup\limits_{sur\ \ \gamma_r(I)} |f|$, on obtient :

$$|f^n(z_0)| \leq \frac{n!}{2\pi r^n} M(r) 2\pi = \frac{n!}{r^n} M(r), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi, Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$ est analytique sur Ω, $\forall z_0 \in \Omega$, on a l'inégalité de Cauchy suivante :

$$|f^n(z_0)| \leq \frac{n!}{2\pi r^n} M(r) 2\pi = \frac{n!}{r^n} M(r), \forall n \in \mathbb{N},$$

avec $M(r) = \sup\limits_{sur\ \ \gamma_r(I)} |f|$, γ_r est le cercle de centre z_0 contenu dans le plus grand disque ouvert centré en z_0, $D(z_0, \xi)$, inclu dans Ω (i.e $0 < r < \xi$).

Théorème 4.4.4. (Théorème de Liouville) *Une fonction analytique sur $\mathbb{C}$ tout entier et bornée dans $\mathbb{C}$, est constante.*

Démonstration. $\forall z_0 \in \mathbb{C}$, $f(z) = \sum\limits_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n, \forall z \in \mathbb{C}$ (la série de Taylor associée à f étant convergente sur $\mathbb{C}$), comme f est bornée sur $\mathbb{C}$, alors $\exists M > 0, f(z) \leq M, \forall z \in \mathbb{C}$. D'où,

$$|f^n(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} M(r), \forall n \in \mathbb{N}, \forall r > 0.$$

et

$$|a_n| = \left| \frac{|f^n(z_0)|}{n!} \right| \leq \frac{M(r)}{r^n}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall r > 0,$$

or, $\lim\limits_{r \to +\infty} \frac{n!}{r^n} M(r) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, alors $\lim\limits_{r \to +\infty} |a_n| = 0$ c'est à dire, $a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, d'où $f(z) = a_0, \forall z \in \mathbb{C}$. □

Remarque 4.4.3. Il n' y a pas de résultats analogues à l'inégalité de Cauchy, ni au théorème de Liouville pour les fonctions réelles. En effet,

1. la fonction $x \mapsto \cos x$ est analytique sur $\mathbb{R}$ tout entier, bornée sur $\mathbb{R}$ pourtant elle n'est pas constante.
2. la fonction $x \mapsto \cos kx$ est analytique sur $\mathbb{R}$ et $|\cos kx| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Pourtant l'inégalité de Cauchy n'est pas satisfaite, car pour $x_0 \in \mathbb{R}$ on a :

$$\left| f'(x_0) \right| = |-k \sin k(x_0| = k \left| \sin k(x_0 \right| \leq k.$$

4.5 Conditions de Cauchy

4.5.1 Fonctions holomorphes

Définition 4.5.1. 1. Soient $f : D \to \mathbb{C}$ (D une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $z_0 \in D$. On dit que f est holomorphe en z_0 ou $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 si

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}, \text{ existe où } h = s+it, \text{ avec } s,t \in \mathbb{R}.$$

Si cette limite existe, i.e $l = l_1 + il_2,\ l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ existe, on la note $f^{'}(z_0)$. La condition précédente peut s'écrire sous la forme :

$$f(z_0+h) - f(z_0) = lh + |h|\,\epsilon(h),\ avec\ \lim_{h\to 0}\epsilon(h) = 0.$$

2. On dit que f est holomorphe dans un ouvert D si elle est holomorphe en tout point $z_0 \in D$.

***Exemple* 4.5.1.** *1. $z \mapsto \exp z, z \mapsto \cos z, z \mapsto \sin z$ sont holomorphes dans $\mathbb{C}$ car analytiques sur $\mathbb{C}$.*

2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{C}$ par $f : z \mapsto f(z) = \overline{z}$. Etudions l'holomorphie de f en z_0, on a par définition :

$$L = \lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\overline{z_0+h}-\overline{z_0}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\overline{h}}{h} = \lim_{(s,t)\to(0,0)}\frac{(s-it)^2}{s^2+t^2},$$

en passant en coordonnées locales, $s = r\cos\theta, t = r\sin\theta$ on trouve :

$$L = \lim_{r\to 0}\frac{r^2(\cos\theta - i\sin\theta)^2}{r^2} = (\cos\theta - i\sin\theta)^2.$$

La limite dépend de θ, donc elle n'existe pas, ainsi f n'est pas holomorphe à aucun point $z_0 \in \mathbb{C}$ et donc non analytique sur aucun ouvert de $\mathbb{C}$.

Théorème 4.5.1. *Toute fonction complexe $f : D \to \mathbb{C}$ définie sur un ouvert D de $\mathbb{C}$, holomorphe dans D et à dérivée continue dans D ($f^{'} : D \to \mathbb{C}$, continue), est analytique sur D.*

Démonstration. Il suffit de montrer que :

$$f(p) = \int_\gamma \frac{g(z)}{z-p}dz,$$

avec g une fonction continue sur $\gamma(I)$. On prend $\gamma = \gamma_r$, le cercle centré en a et de rayon r parcouru une fois dans le sens direct, et $g(z) = \frac{f(z)}{2i\pi}$, avec l'usage du théorème 4.4.2, voir [2] pour plus de détail. □

***Remarque* 4.5.1.** 1. En fait, $f : D \to \mathbb{C}$ définie sur D, un ouvert de $\mathbb{C}$, holomorphe dans D + dérivée continue dans $D \Longleftrightarrow f$ analytique dans D.

2. Une fonction d'une variable réelle, peut être de classe C^1 sans même avoir de dérivée seconde. On peut facilement vérifier cela, en prenant par exemple la fonction f définie par :

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f(x) = |x|\,x \end{array}$$

4.5.2 Conditions d'holomorphie de Cauchy

Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$, toute fonction complexe f définie sur D, analytique ou non, peut s'écrire comme suit :

$$f(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y),$$

où P et Q sont des fonctions réelles dans D (comme ouvert de $\mathbb{R}^2$) et x, y étant réels.

Remarque 4.5.2.

1. f est dite continue en $z_0 = x_0 + iy_0$, si P et Q sont continues en (x_0, y_0).
2. f est dite $\mathbb{R}$-différentiable dans D si P et Q sont différentiable dans D (comme ouvert de $\mathbb{R}^2$).

Théorème 4.5.2. *Soient D un ouvert de $\mathbb{C}$, $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ et $f : D \to \mathbb{C}$ telle que $f(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$, alors f est holomorphe en $z_0 = (x_0, y_0)$ si et seulement si*

1. *P et Q sont différentiable en (x_0, y_0),*
2. *(S) : $\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0). \end{cases}$*

De plus, si f est holomorphe en z_0, alors

$$f^{'}(z_0) = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) \overset{notation}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$$

Remarque 4.5.3. Si P et Q vérifient le système (S), on dit que P et Q vérifient les conditions d'holomorphie de Cauchy en (x_0, y_0) (ou carremment conditions de Cauchy).

Démonstration. Soient D un ouvert de $\mathbb{C}$, $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ et $f : D \to \mathbb{C}$ telle que $f(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$.

1. Supposons que f est holomorphe en z_0, alors

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}, \ \textit{existe} = l \in \mathbb{C}, l = l_1 + il_2, \ l_1, l_2 \in \mathbb{R}, \ \textit{avec}\ h = s + it, \ s, t \in \mathbb{R}$$

ou encore

$$f(z_0+h) - f(z_0) = lh + |h|\,\epsilon(h), \tag{4.5.1}$$

avec $\lim\limits_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$, c'est à dire, $\epsilon(s+it) = \epsilon_1(s,t) + i\epsilon_2(s,t)$ avec $\lim\limits_{(s,t)\to(0,0)} \epsilon_1(s,t) = \lim\limits_{(s,t)\to(0,0)} \epsilon_2(s,t) = 0$.

Or, la formulr (4.5.1) s'écrit :

$$(P(x_0+s, y_0+t)) - (P(x_0,y_0)) + i\left(Q(x_0+s, y_0+t)\right) - (Q(x_0,y_0)) - l_1 s + l_2 t - i(l_2 s + l_1 t) =$$

$$= \sqrt{s^2+t^2}\left(\epsilon_1(s,t) + i\epsilon_2(s,t)\right),$$

ce qui est équivalent à :

$$\begin{cases} P(x_0+s, y_0+t) - P(x_0,y_0) l_1 s + l_2 t = \epsilon_1(s,t)\sqrt{s^2+t^2} \\ Q(x_0+s, y_0+t) - Q(x_0,y_0) - l_2 s - l_1 t = \epsilon_2(s,t)\sqrt{s^2+t^2}, \end{cases}$$

où $\lim_{(s,t)\to(0,0)} \epsilon_1(s,t) = \lim_{(s,t)\to(0,0)} \epsilon_2(s,t) = 0$.

Cela signifie donc que :

$$\begin{cases} \lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{P(x_0+s,y_0+t)-P(x_0,y_0)-l_1 s+l_2 t}{\|(s,t)\|} = 0 \\ \lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{Q(x_0+s,y_0+t)-Q(x_0,y_0)-l_2 s-l_1 t}{\|(s,t)\|} = 0. \end{cases}$$

Autrement dit, P et Q sont différentiable en (x_0, y_0) avec,

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) = l_1 = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) = l_2 = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0). \end{cases}$$

De plus,

$$f'(z_0)) \overset{déf.}{=} l = l_1 + il_2 = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$$

2. Inversement, comme P et Q sont différentiable en (x_0, y_0), on a alors :

$$\begin{cases} P(x_0+s,y_0+t) - P(x_0,y_0) - \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0)s - \frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0)t = \epsilon_1(s,t)\,\|(s,t)\| \\ Q(x_0+s,y_0+t) - Q(x_0,y_0) - \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)s - \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0)t = \epsilon_2(s,t)\,\|(s,t)\|, \end{cases}$$

avec $\lim_{(s,t)\to(0,0)} \epsilon_1(s,t) = \lim_{(s,t)\to(0,0)} \epsilon_2(s,t) = 0$.
Ainsi, après un calcul direct, on trouve au final :

$$f(z_0+h) - f(z_0) = lh + |h|\,\epsilon(h), \text{ avec } \lim_{h\to 0}\epsilon(h) = \lim_{(s,t)\to(0,0)}\epsilon(s,t) = 0,$$

donc f est holomorphe en z_0 avec $f'(z_0) = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)$.

□

***Exemple* 4.5.2.** *Soit la fonction $f(z) = z^2$, on a :*

$$f(z) = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + x^2 - i2xy,$$

d'où,

$$P(x,y) = x^2 - y^2 \text{ et } Q(x,y) = 2xy,$$

ainsi,

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = 2x = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -2y = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y). \end{cases}$$

et comme P et Q sont différentiable dans $\mathbb{R}^2$, donc la fonction f est holomorphe dans $\mathbb{C}$ et

$$f'(z) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 2x + i2y = 2(x+iy) = 2z.$$

Remarque 4.5.4. Si f est holomorphe en z_0 alors,

$$f'(z_0) = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) - i\frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0),$$

ainsi, les conditions de Cauchy en z_0 sont équivalents à

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = 0$$

4.5.3 Fonctions harmoniques

Définition 4.5.2. Soit P une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. La fonction P est dite de classe C^2 sur D si P admet des dérivées partielles d'ordre 2 sur D et que chacune de ces quatre dérivées partielles est continue sur D et on écrit, $P \in C^2(D, \mathbb{R})$.

Définition 4.5.3. Soit $P \in C^2(D, \mathbb{R})$, on dit que la fonction P est harmonique si :

$$\Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0, \forall x, y) \in D.$$

Remarque 4.5.5. 1. ΔP est appelé Laplacien de P.

2. L'équation $\Delta P = 0$ est appelée équation de Laplace.

Proposition 4.5.1. *Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^2$, si $P, Q : D \to \mathbb{R}$ sont de classe C^2 vérifiant les conditions de Cauchy dans D, alors $\Delta P = \Delta Q = 0$.*

Démonstration. On a :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)$$

et

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial Q}{\partial x}\right), \ car\ Q \in C^2(D, \mathbb{R}).$$

D'où,

$$\Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0, \ dans\ D.$$

Même raisonnement pour Q. □

Remarque 4.5.6. Si la fonction $f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$ est holomorphe dans D avec $P, Q \in C^2(D, \mathbb{R})$, alors $\Delta P = \Delta Q = 0$.

***Exemple* 4.5.3.** *Soit la fonction P définie par :*

$$P(x, y) = x^2 - y^2 + x, x, y \in \mathbb{R}.$$

Trouvons la fonction Q pour que la fonction $f = P + iQ$ soit holomorphe. Puisque f est holomorphe alors P et Q vérifient les conditions de Cauchy, c'est à dire :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) = 2x + 1 ...(1) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = 2y ...(2) \end{cases}$$

De (1), *on a :*

$$\frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) = 2x + 1 \Longrightarrow Q(x, y) = \int 2x + 1 dy = 2xy + y + \phi(x),$$

on dérive $Q(x, y)$ par rapport à x et on remplace dans (2), *on trouve :*

$$2y + \phi^{'}(x) = 2y \Longrightarrow \phi(x) = c, c \in \mathbb{R}.$$

D'où,

$$Q(x, y) = 2xy + y + c, \forall c \in \mathbb{R}.$$

Dans ce cas, Q est appelée fonction conjuguée harmonique de P.

4.6 Exercices

Exercice 4.6.1. *Calculer*

$$\int_\gamma |z|^2 \bar{z} dz,$$

où γ est le chemin décrit par :

$$\{|z| = 1, Imz \geq 0\} \text{ et le segment de droite} : \{Imz = 0,\ \ |z| \leq 1\},$$

parcouru 1-fois dans le sens direct.

Exercice 4.6.2. *Calculer*

$$\int_\gamma \frac{dz}{z+1},$$

où, γ est le chemin décrit par :

1. *Le segment de droite $[0, z_0]$ orienté de 0 à $z_0 = 2 + i$.*
2. *Le segment : $Imz = 0$, $0 \leq Rez \leq \sqrt{5}$ et l'arc de cercle de centre 0 et de rayon $\sqrt{5}$ joingnant les points $\sqrt{5}$ et z_0. Commenter !*

Exercice 4.6.3. *Calculer*

$$\int_\gamma \frac{z+3}{z-1} dz,$$

où γ est le lacet parcouru 1-fois dans le sens direct avec :

1. *$\gamma(I)$ est le carré de centre 1, dont un segment est $(0, 1)$.*
2. *$\gamma(I)$ est l'ellipse d'équation : $x^2 + 4x + 4y^2 = 0$.*

Exercice 4.6.4. *Déterminer, en utilisant la formule intégrale de Cauchy, l'intégrale suivante :*

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2+1}$$

où γ désigne le cercle $|z - i| = 1$ parcouru 2-fois dans le sens direct.

Exercice 4.6.5. *Soient D un ouvert de $\mathbb{C}$ simplement connexe et $\gamma : I \longrightarrow D$ un lacet dans D. Démontrer que pour toute fonction analytique sur D et tout point $p \in D \setminus \gamma(I)$, on ait :*

$$\Im(p;\gamma) f^n(p) = \frac{n!}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-p)^{n+1}} dz, \forall n \geq 1, \forall p \in D \backslash \{\gamma(I)\}.$$

Exercice 4.6.6. *Soit γ le lacet décrit par le cercle de centre $(1 - i)$, de rayon 2 parcouru 1-fois dans le sens direct. Calculer :*

$$(a)\ \int_\gamma \frac{z}{1-i-z} dz;\ (b) \int_\gamma \frac{\sin(\pi z)}{1-i-z} dz;\ (c)\ \int_\gamma \frac{z^2+1}{(z+2i)^2} dz$$

Exercice 4.6.7. *A l'aide de la définition, calculer la dérivée de la fonction* $f(z) = z^p$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ *au point* $z = z_0$.

Exercice 4.6.8. *Etudier la continuité, la* $\mathbb{R}-$*différentiabilité et la* $\mathbb{C}-$*dérivabilité des fonctions suivantes :*

$$f(z) = \begin{cases} \frac{Re(z)}{z} & si\ z \neq 0 \\ 0 & si\ z = 0 \end{cases} \quad , \quad g(z) = \begin{cases} \frac{Re(z^2)}{z} & si\ z \neq 0 \\ 0 & si\ z = 0 \end{cases}$$

Exercice 4.6.9. *Soit*

$$P(x, y) = 3shx \cos y - 2x + 7, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

1. *Démontrer que* P *est harmonique.*
2. *Déterminer* Q *de telle sorte que la fonction* $f = P + iQ$ *soit holomorphe.*

Exercice 4.6.10. *Soient* $a, b, c \in \mathbb{R}$. *Pour* $x, y \in \mathbb{R}, z = x + iy$, *on pose :*

$$P(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a, b, c *pour qu'il existe une fonction holomorphe* f *vérifiant* $P = Re(f)$.

Exercice 4.6.11. *Démontrer qu'il existe une fonction* $P : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ *harmonique définie par :*

$$P(x, y) = h\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right),$$

.

où h *est une fonction réelle d'une seule variable réelle* $r > 0$ *de classe* C^2.

4.7 Indications et solutions des exercices

Exercice 4.6.1. Calculons

$$\mathcal{I} = \int_\gamma |z|^2 \bar{z} dz,$$

où γ est le lacet parcouru une fois dans le sens direct, présenté par la figure 4.7 ; On considère la fonction f suivante :

$$f(z) = |z|^2 \bar{z}$$

f est définie et continue sur $\mathbb{C}$, car c'est la composée de fonctions continues sur $\mathbb{C}$, en particulier elle l'est sur $\gamma(I)$, où $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$ tels que :

$$\gamma_1 : [-1, 1] \to \mathbb{C}/\gamma_1(t) = t, et\ \gamma_2 : [0, \pi] \to \mathbb{C}/\gamma_2(t) = e^{it}.$$

Alors, par définition on a :

$$\mathcal{I} = \int_{\gamma=\gamma_1\vee\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} |z|^2 \bar{z}dz + \int_{\gamma_2} |z|^2 \bar{z}dz,$$

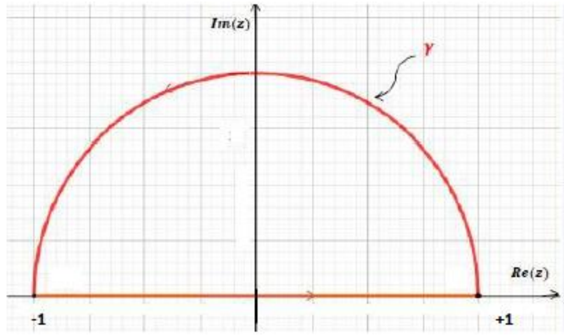

Figure 4.7 –

d'où,

$$\mathcal{I} = \int_0^{\pi} ie^{-it}e^{it}dt + \int_{-1}^{1} t^3 dt = i\pi.$$

Exercice 4.6.2. Calculons l'intégrale

$$\mathcal{I} = \int_{\gamma} \frac{dz}{z+1},$$

1. γ étant le segment de droite $[0, z_0]$ de 0 à $z_0 = 2 + i$, paramétrisé par (voir la figgure 4.8) :

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}/\gamma(t) = tz_0,$$

γ est de classe C^{∞}, donc γ est un chemin, alors par définition on a :

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z+1} = \int_0^1 \frac{z_0}{tz_0+1}dt,$$

Or on sait que

$$\forall z \in \Omega = \mathbb{C}\backslash\{[0, x[\}, \frac{d(Logz}{dz} = \frac{1}{z},$$

et on a, $\forall t \in [0,1], tz_0 + 1 = (2t+1) + it$, donc

- $Si\ t \in]0,1], (2t+1) + it \in \Omega,$

- $Si\ t = 0, (2t+1) + it = 1 \in \Omega$, de plus,

$$\frac{d}{dt}(tz_0 + 1) = \frac{z_0}{tz_0+1}.$$

Ainsi,

$$\mathcal{I} = [Log(tz_0+1)]_0^1 = Log(z_0+1) = Log(3+i) = Log(\sqrt{10}) + i\theta,\ o\grave{u}\ \theta = \arg(z_0+1) \in]-\pi, \pi]$$

2. Calculons l'intégrale

$$\mathcal{J} = \int_{\gamma'} \frac{dz}{z+1},$$

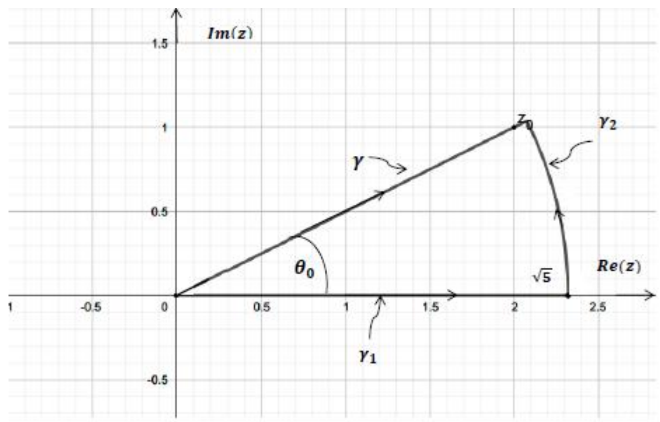

FIGURE 4.8 – Le chemin fermé $\gamma \vee \gamma_1 \vee \gamma_2$.

où $\gamma^{'}$ est le segment de droite $Imz = 0$, $0 \leq Rez \leq \sqrt{5}$ et l'arc de cercle de centre 0 et de rayon $\sqrt{5}$ joingnant les points $\sqrt{5}$ et z_0. On considère le lacet $\gamma^{'} = \gamma_1 \vee \gamma_2$ (voir figure 4.8) tels que,

$$\gamma_1 : [0, \sqrt{5}] \to \mathbb{C}/\gamma_1(t) = t, et\ \gamma_2 : [0, \theta_0 = \arg z_0] \to \mathbb{C}/\gamma_2(t) = \sqrt{5}e^{it}.$$

On a alors,

$$\mathcal{J} = \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z+1} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z+1} = \int_0^{\sqrt{5}} \frac{dt}{1+t} + \int_0^{\theta_0} \frac{i\sqrt{5}e^{it}}{\sqrt{5}e^{it}+1} dt,$$

or,

$$\int_0^{\sqrt{5}} \frac{dt}{1+t} = Log(1+\sqrt{5}),$$

et

$$\int_0^{\theta_0} \frac{i\sqrt{5}e^{it}}{\sqrt{5}e^{it}+1} dt = [Log(\sqrt{5}e^{it}+1)]_0^{\theta_0} = Log(\sqrt{5}e^{i\theta_0}+1) - Log(\sqrt{5}+1).$$

Ainsi,

$$\mathcal{J} = \int_{\gamma'} \frac{dz}{z+1} = Log(3+i).$$

Commentaire : On constate que

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z+1} = \int_{\gamma'} \frac{dz}{z+1}.$$

En effet, soit le lacet $\Gamma = \gamma^{\circ} \vee \gamma^{'}$ et considérons la fonction

$$f(z) = \frac{1}{z+1},$$

qui est analytique en particulier sur l'ouvert $D = \{z \in \mathbb{C}/\mathcal{R}ez > -1\}$ qui est simplement connexe. Ainsi, d'après le corollaire 4.3.1., on a :

$$\int_{\Gamma = \gamma^{\circ} \vee \gamma'} \frac{dz}{z+1} = \int_{\gamma^{\circ}} \frac{dz}{z+1} + \int_{\gamma'} \frac{dz}{z+1} = 0,$$

d'où,

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z+1} = \int_{\gamma'} \frac{dz}{z+1}.$$

Exercice 4.6.3. Calculons l'intégrale suivante

$$\mathcal{I} = \int_{\gamma} \frac{z+3}{z-1} dz,$$

où γ est le lacet parcouru une fois dans le sens direct tels que :

1. $\gamma(I)$ est le carré de centre 1, dont un segment est $(0,1)$;

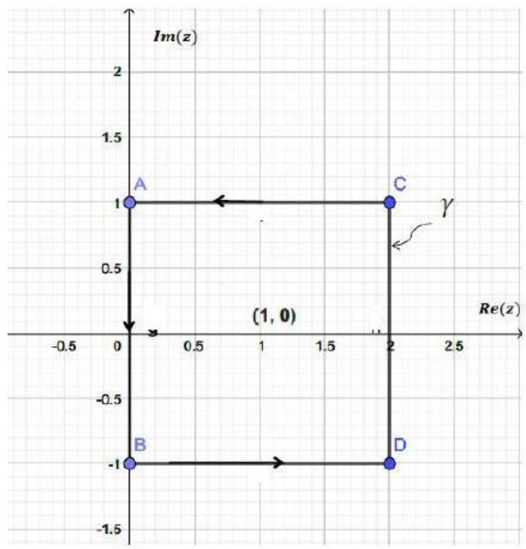

FIGURE 4.9 – γ est un carré centré en (1, 0)

On a :

$$\frac{z+3}{z-1} = \frac{z-1+4}{z-1} = 1 + \frac{4}{z-1},$$

d'où,

$$\int_{\gamma} \frac{z+3}{z-1} dz = \int_{\gamma} dz + 4 \int_{\gamma} \frac{dz}{z-1}.$$

D'une part, la formule intégrale de Cauchy nous donne

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-1} = \Im(p;\gamma) 2i\pi = 2i\pi,$$

et d'autre part, pour $f(z) = 1, \forall z \in \mathbb{C}$, f est analytique sur $\mathbb{C}$ qui est simplement connexe, γ un lacet dans $\mathbb{C}$ donc

$$\int_{\gamma} dz = 0.$$

Ainsi,

$$\mathcal{I} = 4 \int_{\gamma} \frac{dz}{z-1} = 8i\pi.$$

2. $\gamma(I)$ est l'ellipse d'équation $x^2 + 4x + 4y^2 = 0$. On a :

$$x^2 + 4x + 4y^2 = 0 \Longleftrightarrow (x+2)^2 + (2y)^2 = 4 \Longleftrightarrow \frac{(x+2)^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1,$$

on obtient ainsi l'équation cartésienne de l'ellipse centrée en $(-2, 1)$ avec les demi-axes 2 et 1, voir la figure ci-dessous ;

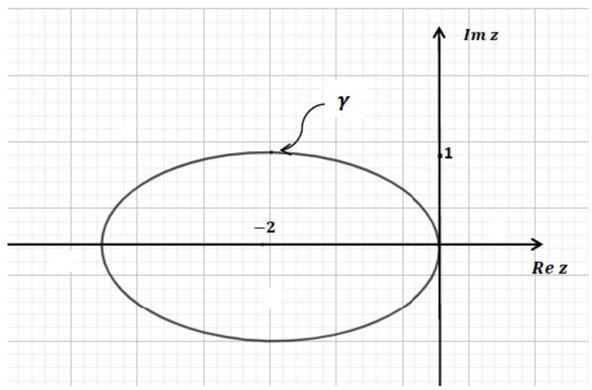

FIGURE 4.10 – γ est l'ellipse centrée en (-2, 1)

Ainsi, en appliquant le même raisonnement vu dans le 1er cas, on trouve :

$$\mathcal{I} = \int_\gamma \frac{z+3}{z-1} dz = 0.$$

Exercice 4.6.4. En utilisant la formule intégrale de Cauchy, on trouve :

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2+1} = 2\pi,$$

où γ est le cercle $|z - i| = 1$ présenté par le figure 4.11 ;

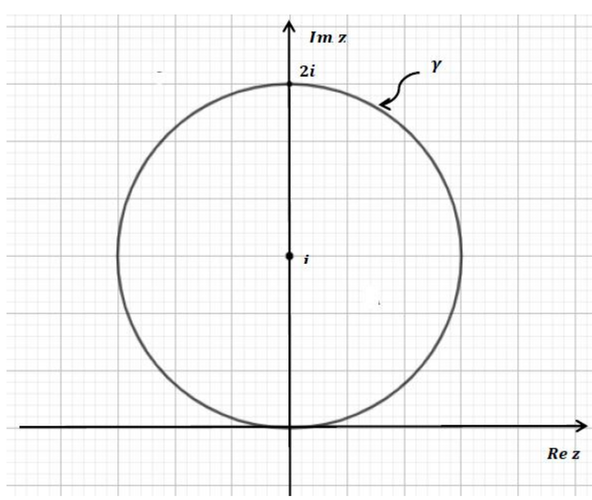

FIGURE 4.11 – Le cercle $|z - i| = 1$

Exercice 4.6.5. On a d'après la formule intégrale de Cauchy (F. I. C.),

$$\Im(p;\gamma)f(p) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-p}dz, \forall p \in D\backslash\{\gamma(I)\}.$$

On pose

$$h(p) = \Im(p;\gamma)f(p)2i\pi,$$

on a donc

$$h(p) = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-p}dz, \forall p \in D\backslash\{\gamma(I)\}.$$

Ainsi, en appliquant le théorème 4.4.2. sur la fonction h, on obtient directement

$$\Im(p;\gamma)f^n(p) = \frac{n!}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-p)^{n+1}}dz, \forall n \geq 1, \forall p \in D\backslash\{\gamma(I)\}.$$

Exercice 4.6.6. (a) Calculons

$$\mathcal{I} = \int_\gamma \frac{z}{1-i-z}dz.$$

Soit la fonction $f(z) = -z$ qui est analytique sur $\mathbb{C}$, un ouvert simplement connexe, et γ un lacet dans $\mathbb{C}$ (voir la figure 4.12) et $p = (1-i) \in \mathbb{C}\backslash\{\gamma(I)\}$, alors d'après la F. I. C., on a :

$$\Im(p;\gamma)f(p) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-p}dz, \forall p \in D\backslash\{\gamma(I)\},\ où\ p = (1-i).$$

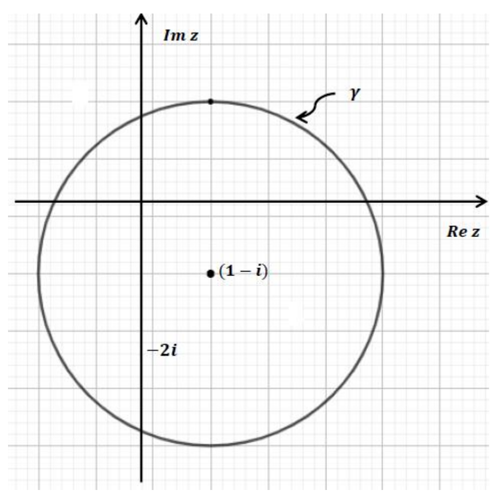

FIGURE 4.12 – γ est un cercle centré en $(1-i)$

Or, p est "intérieur" à γ parcouru une fois dans le sens direct, alors $\Im(p;\gamma) = +1$, ainsi,

$$\mathcal{I} = -2\pi - 2i\pi.$$

(b) On utilise la F. I. C., on trouve :

$$\int_\gamma \frac{\sin(\pi z)}{1-i-z}dz = 2\pi \sinh \pi.$$

(c) Calculons

$$\mathcal{K} = \int_\gamma \frac{z^2+1}{(z+2i)^2}dz$$

Soit la fonction analytique $f(z) = z^2+1$ sur $\mathbb{C}$ qui est simplement connexe, $p = -2i \in \mathbb{C}\backslash\{\gamma(I)\}$, γ est un lacet dans $\mathbb{C}$ (voir la figure 4.12), donc d'après la formule intégrale de Cauchy généralisée (dans ce cas $n = 1$), on a :

$$\Im(p;\gamma)f^n(p) = \frac{n!}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-p)^{n+1}}dz, \forall n \geq 1, \forall p \in D\backslash\{\gamma(I)\}.$$

$p = -2i$ est "intérieur" à γ parcouru une fois dans le sens direct, alors $\Im(p;\gamma) = +1$. On a $f^{'}(z) = 2z$, donc $f^{'}(-2i) = -4i$. Ainsi,

$$\mathcal{K} = \int_\gamma \frac{z^2+1}{(z+2i)^2}dz = 8\pi.$$

Exercice 4.6.7.

1. **1er cas** : $p \neq 1$. On a par définition :

$$f^{'}(z_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(z_0+h)^p - z_0^p}{h}.$$

   On sait que

$$(z_0+h)^p = \sum_{k=0}^{p} C_k^p z_0^k h^{p-k},\ où\ C_k^p = \frac{p!}{k!(p-k)!}.$$

   D'où,

$$(z_0+h)^p = h^p + z_0^p + \sum_{k=1}^{p-1} C_k^p z_0^k h^{p-k} \Longrightarrow (z_0+h)^p - z_0^p = h\left(h^{p-1} - \sum_{k=1}^{p-1} C_k^p z_0^k h^{p-k-1}\right),$$

   ainsi,

$$\frac{(z_0+h)^p - z_0^p}{h} = h^{p-1} - \sum_{k=1}^{p-1} C_k^p z_0^k h^{p-k-1}.$$

   Maintenant on calcule le terme pour $k = p-1$, on trouve :

$$\frac{(z_0+h)^p - z_0^p}{h} = h^{p-1} + C_{p-1}^p z_0^{p-1} h^{p-p+1-1} + \sum_{k=1}^{p-2} C_k^p z_0^k h^{p-k-1}.$$

   Donc,

$$f^{'}(z_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = C_{p-1}^p z_0^{p-1} = p z_0^{p-1}.$$

2. **2ème cas** : $p = 1$, là $f(z) = z$, on a :

$$f^{'}(z_0) = \lim_{h\to 0}\frac{z_0+h-z_0}{h} = 1.$$

Exercice 4.6.8.

1. Soit la fonction complexe f définie par :

$$f(z) = \begin{cases} \frac{Re(z)}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0\ . \end{cases}$$

On a :

$$f(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y),$$

avec,

$$P(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon}\ , \end{cases}$$

et

$$Q(x,y) = \begin{cases} \frac{-xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon}\ . \end{cases}$$

(a). La continuité de f

(a) P et Q sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, car elles se composent de fonctions continues, donc f est continue sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

(b) Au point $z_0 = 0$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} P(x,y) \overset{si\exists}{=} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim_{(r\to 0} \frac{r^2\cos\theta^2}{r^2} = \cos\theta^2,$$

donc la limite n'existe pas et alors P n'est pas continue en $(0,0)$, ainsi f ne l'est pas en 0.

(b). La $\mathbb{R}$-différentiabilité

i. P et Q sont différentiable sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, donc f est $\mathbb{R}$-différentiable sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

ii. Au point $z_0 = 0$, f n'est pas continue en $z_0 = 0$, donc f n'est pas $\mathbb{R}$-différentiable en $z_0 = 0$.

(c). La $\mathbb{C}$-dérivabilité

i. f n'est pas $\mathbb{C}$-dérivable en $z_0 = 0$ car non $\mathbb{R}$-différentiable.

ii. La $\mathbb{C}$-dérivabilité sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$: On a,

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = 2xy^2\frac{1}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -2yx^2\frac{1}{(x^2+y^2)^2}$$

et

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{-x^3+xy^2}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = \frac{-y^3+yx^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

On suppose que f est $\mathbb{C}$-dérivable, donc les conditions de Cauchy sont vérifiées, c'est à dire :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \end{cases}, \forall (x,y) \neq (0,0) \Longleftrightarrow \begin{cases} xy^2 + x^3 = 0 \\ yx^2 + y^3 = 0, \end{cases}$$

ce qui est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{l} x(y^2+x^2)=0 \\ \\ y(y^2+x^2)=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ \\ y=0, \end{array}\right. \quad \textit{ce qui est absurde.}$$

Ainsi, les conditions de Cauchy ne sont pas satisfaites en aucun point de $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, alors f n'est pas $\mathbb{C}$-dérivable en aucun point de $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, donc elle ne l'est pas en aucun point de $\mathbb{C}$.

2. même raisonnement pour g.

Exercice 4.6.9. 1. Démontrons que P est harmonique : On a,

$$\left\{\begin{array}{l} P'_x(x,y)=3chx\ \cos y-2 \\ P''_{x^2}(x,y)=3shx\ \cos y \end{array}\right.$$

et

$$\left\{\begin{array}{l} P'_y(x,y)=-3shx\ \sin y \\ P''_{y^2}(x,y)=-3shx\ \cos y \end{array}\right.$$

Donc,

$$\Delta P(x,y)=P''_{x^2}(x,y)+P''_{y^2}(x,y)=0, \text{ d'où } P \text{ est harmonique.}$$

2. $f=P+iQ$ est holomorphe, alors le couple (P,Q) vérifie les conditions de Cauchy, c'est à dire :

$$\left\{\begin{array}{ll} P'_x(x,y)=Q'_y(x,y) & (1) \\ P'_y(x,y)=-Q'_x(x,y) & (2) \end{array}\right.$$

De l'équation (1), on obtient

$$Q'_y(x,y)=3chx\ \cos y-2$$

d'où,

$$Q(x,y)=\int(3chx\ \cos y-2)\,dy=3chx\ \sin y-2y+\phi(x), \text{ où } \phi \text{ est une fonction dépendant que de } x.$$

On dérive la fonction $Q(x,y)$ par rapport à x, puis en remplaçant la formule obtenue dans l'équation (2), on trouve

$$-3shx\ \sin y=-3shx\ \sin y-\phi'(x)\Longrightarrow\phi(x)=k, \text{ où } k\in\mathbb{R}$$

Finalement,

$$Q(x,y)=3chx\ \sin y-2y+k,\ k\in\mathbb{R}$$

Exercice 4.6.10. On vérifie aisément que $a=-c$ est une condition nécessaire et suffisante pour que f soit holomorphe.

Exercice 4.6.11.

La fonction

$$\begin{array}{rccccc} P: & \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* & \xrightarrow{h} & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \sqrt{x^2+y^2} & \longmapsto & h\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = h(r) \end{array},$$

est de classe C^2 composée de deux fonctions de classe C^2.

P est harmonique $\Longleftrightarrow \triangle P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$, sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) &= h'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \text{ où } h' \doteqdot \frac{\partial h}{\partial r} \\ \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x,y) &= h''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \frac{x^2}{x^2+y^2} + h'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) &= h'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,y) &= h''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \frac{y^2}{x^2+y^2} + h'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

ceci $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, et alors :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,y) = h''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + \frac{h'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0, \ \forall (x,y) \neq (0,0)$$

Cela revient à résoudre l'équation

$$h''(r) + \frac{h'(r)}{r} = 0, \ \forall r > 0 \text{ avec } r = \sqrt{x^2+y^2}$$

Posons $h'(r) = \varphi(r)$, $\forall r > 0$, on aura :

$$\varphi'(r) + \frac{\varphi(r)}{r} = 0 \text{ ou } \frac{\varphi'(r)}{\varphi(r)} = \frac{-1}{r}.$$

D'où,

$$\varphi(r) = \frac{k}{r} = h'(r), \text{ où } k = cte \ (k \in \mathbb{R}),$$

donc

$$h(r) = kLogr + c, \ c \in \mathbb{R}$$

Ainsi,

$$P(x,y) = h\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = kLog\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + c, \text{ avec } k, \ c \in \mathbb{R}$$

Chapitre 5

Singularités des fonctions analytiques. Résidus

5.1 Développement en série de Laurent

5.1.1 Fonctions analytiques sur une couronne

Définition 5.1.1. Soient $0 \leq r_0 < r_1$ et $a \in \mathbb{C}$, on appelle couronne ouverte centrée en a, l'ensemble noté $C_a(r_0, r_1)$ défini par :

$$C_a(r_0, r_1) = \{z \in \mathbb{C} / r_0 < |z - a| < r_1\}$$

Remarque 5.1.1.

1. Si $r_0 = 0$, $C_a(r_0, r_1) = \{z \in \mathbb{C} / 0 < |z - a| < r_1\} = D(a, r_1) \backslash \{a\}$.
2. $C_a(r_0, r_1)$ est un ouvert connexe.
3. Soient γ_r et $\gamma_{r'}$ deux lacets définis sur $C_a(r_0, r_1)$ par (voir la figure 5.1) :

$$\gamma_r : [0, 2\pi] \to C_a(r_0, r_1) / \gamma_r(t) = a + re^{it}, \ et \ \gamma_{r'} : [0, 2\pi] \to C_a(r_0, r_1) / \gamma_{r'}(t) = a + r^{'} e^{it}.$$

   Les deux chemins sont homotopes comme lacets dans $C_a(r_0, r_1)$, il suffit de prendre l'homotopie suivante :

$$H : [0, 2\pi] \times [0, 1] \to C_a(r_0, r_1) / H(t, s) = a + \left(r(1 - s) + sr^{'} \right) e^{it}.$$

   Donc d'après le théorème de Cauchy, on a :

$$\int_{\gamma_r} f(z) dz = \int_{\gamma_{r'}} f(z) dz,$$

   pour toute fonction f anlytique sur $C_a(r_0, r_1)$.

4. $C_a(r_0, r_1)$ n'est pas simplement connexe. Sinon on aurait $\int_{\gamma_r} f(z) dz = 0$, pour toute fonction f analytique sur $C_a(r_0, r_1)$ et tout lacet γ_r, avec $r_0 < r < r_1$. Or, en considérant la fonction

$$f(z) = \frac{1}{z - a},$$

   on obtient

$$\int_{\gamma_r} \frac{dz}{z - a} = 2i\pi \Im(a; \gamma_r) \neq 0.$$

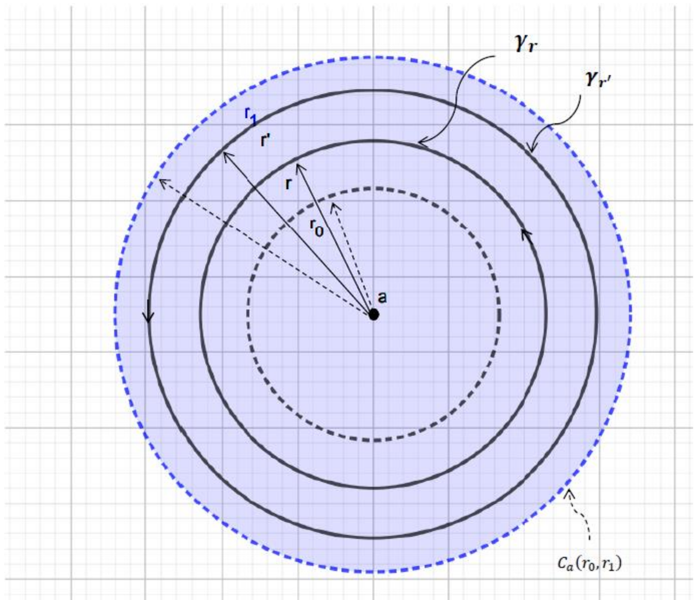

FIGURE 5.1 – γ_r et $\gamma_{r'}$ tracés sur la couronne $C_a(r_0, r_1)$

Proposition 5.1.1. *Soient $0 \le r_0 < r_1$, $a \in \mathbb{C}$ et $p \in C_a(r_0, r_1)$. Il existe des réels positifs r et r' tels que $0 \le r_0 < r < |p-a| < r' < r_1$. Si f est analytique sur $C_a(r_0, r_1)$, alors :*

$$f(p) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{r'}} \frac{f(z)}{z-p}dz - \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-p}dz,$$

où γ_r et $\gamma_{r'}$ sont des lacets dans $C_a(r_0, r_1)$, parcourus une fois dans le sens direct définis par :

$$\gamma_r(t) = a + re^{it}, \text{ et } \gamma_{r'}(t) = a + r'e^{it}, \forall t \in [0, 2\pi].$$

Démonstration. Exercice. □

5.1.2 Série de Laurent

***Exemple* 5.1.1.** *Soit la fonction f définie par :*

$$f(z) = \frac{1}{(z-5)(z-2)},$$

f est analytique sur $\mathbb{C}\setminus\{2,5\}$. Soit la couronne ouverte $C_0(2,5)$, alors :

$$f(z) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(z-5)} - \frac{1}{z-2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{\frac{-1}{5}}{\frac{-z}{5}+1} - \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{2}{z}}\right), \text{ où } \left|\frac{z}{5}\right| < 1, \text{ et } \left|\frac{2}{z}\right| < 1,$$

d'où,

$$f(z) = \frac{-1}{3.5}\underbrace{\sum_{n\ge 0}\frac{z^n}{5^n}}_{CV\ pour\ |z|<5} - \frac{1}{3z}\underbrace{\sum_{n\ge 0}\frac{2^n}{z^n}}_{CV\ pour\ |z|>2}.$$

On obtient au final,

$$f(z) = \sum_{n\ge 0}\left(\frac{-1}{3.5^{n+1}}\right)z^n + \sum_{n\ge 1}\left(\frac{-2^{n-1}}{3}\right)\frac{1}{z^n},$$

qui est de type,

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n + \sum_{n\geq 1} \frac{d_n}{z^n},$$

où $\sum\limits_{n\geq 0} c_n z^n$ *converge pour* $|z| < 5$ *et* $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{d_n}{z^n}$ *converge pour* $|z| > 2$.

Théorème 5.1.1. (Réf. [2]) *Soient* $0 \leq r_0 < r_1$ *et* $a \in \mathbb{C}$. *Si* f *est anlytique sur* $C_a(r_0, r_1)$, *alors* $\forall z \in C_a(r_0, r_1)$, *on a :*

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n (z-a)^n + \sum_{n\geq 1} \frac{d_n}{(z-a)^n},$$

où la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} c_n (z-a)^n$ *converge pour* $|z-a| < r_1$ *et la série entière* $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{d_n}{(z-a)^n}$ *converge pour* $|z-a| > r_0$, *avec,*

$$c_n = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \text{ et } d_n = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z)(z-a)^{n-1} dz, \forall n \geq 1,$$

pour tout γ *décrivant le cercle* $C(a, \rho) \subset C_a(r_0, r_1)$, *parcouru une fois dans le sens direct, où* $r_0 < \rho < r_1$.

Définition 5.1.2. Soient $0 \leq r_0 < r_1$, $a \in \mathbb{C}$ et f une fonction anlytique sur $C_a(r_0, r_1)$. On appelle série ou bien développement le Laurent de f en a, si pour tout $z \in C_a(r_0, r_1)$, f s'écrit comme suit :

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n (z-a)^n + \sum_{n\geq 1} \frac{d_n}{(z-a)^n},$$

où $\sum\limits_{n\geq 0} c_n (z-a)^n$ est dite partie régulière de f en a et $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{d_n}{(z-a)^n}$ partie singulière de f en a.

Définition 5.1.3.

1. Si la fonction f s'écrit comme suit :

$$f(z) = \sum_{n\geq m} c_n (z-a)^n = c_m (z-a)^m + c_{m+1} (z-a)^{m+1} + ...,$$

avec $c_m \neq 0$ (le 1er coefficient non nul $c_0 = c_1 = ... = c_{m-1} = 0, c_m \neq 0$), alors la singularité a est dite zéro multiple d'odre m de f.

2. Si la partie singulière comporte un nombre fini de termes :

$$u(z) = \frac{d_1}{z-a} + \frac{d_2}{(z-a)^2} + ... + \frac{d_{n_0}}{(z-a)^{n_0}},$$

où n_0 est le plus grand indice non nul, alors la singularité a est dite pôle d'ordre n_0 de f.

3. S'il existe un nombre infini de $d_n \neq 0$, alors a est dit point singulier essentiel isolé de f.

5.2 Théorème des résidus

5.2.1 Intégration de f sur $D_r \backslash \{a\} = \{z \in \mathbb{C} / 0 < |z-a| < r\}$

Soit f une fonction analytique sur $D_r \backslash \{a\}$, on a :

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n (z-a)^n + \sum_{n\geq 1} \frac{d_n}{(z-a)^n}, \forall z \in D_r \backslash \{a\}.$$

Soit γ un lacet quelconque dans $D_r \setminus \{a\}$, alors :

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \sum_{n\geq 0} c_n(z-a)^n dz + \int_\gamma \sum_{n\geq 2} \frac{d_n}{(z-a)^n} dz + \int_\gamma \frac{d_1}{z-a} dz.$$

La somme $\sum\limits_{n\geq 0} c_n \frac{(z-a)^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de $\sum\limits_{n\geq 0} c_n(z-a)^n$ sur D_r donc sur $D_r \setminus \{a\}$, qui est un ouvert connexe et γ est un lacet dans $D_r \setminus \{a\}$, donc

$$\int_\gamma \sum_{n\geq 0} c_n(z-a)^n dz = 0.$$

De même une primitive de $\frac{1}{(z-a)^n} = (z-a)^{-n}$ est $\frac{(z-a)^{-n+1}}{-n+1}$, $\forall n \neq 1$, donc une primitive de $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{d_n}{(z-a)^n}$ est donnée par $\sum\limits_{n\geq 2} d_n \frac{(z-a)^{-n+1}}{-n+1}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ donc sur $D_r \setminus \{a\}$. De plus, $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{d_n}{(z-a)^n}$ est analytique sur $D_r \setminus \{a\}$, d'où,

$$\int_\gamma \sum_{n\geq 2} \frac{d_n}{(z-a)^n} dz = 0,$$

ainsi, si f est analytique sur $D_r \setminus \{a\}$, alors

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \frac{d_1}{z-a} dz = 2i\pi d_1 \Im(a;\gamma_r), \forall \gamma \textit{ un lacet dans } D_r \setminus \{a\}, \tag{5.2.1}$$

où d_1 est le seul terme du développement en série de Laurent de f en a qui reste.

Définition 5.2.1. d_1 est appelé résidu de f en a, qu'on note $Res_a f$, et la formule (5.2.1) s'écrit donc :

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi Res_a f \Im(a;\gamma),$$

$\forall f$ anlytique sur $D_r \setminus \{a\}$ et $\forall \gamma$ un lacet dans $D_r \setminus \{a\}$.

Définition 5.2.2. Soient D un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et a un point frontière de D. a est dit point frontière isolé de D, s'il existe un disque ouvert $D(a,r)$ dans $\mathbb{C}$ dont les points, sauf a, sont dans D.

***Exemple* 5.2.1.** *Soir $D = D(a,R) \setminus \{a\}$, $Fr(D) = C(a,R) \cup \{a\}$. Le point a est un point frontière de D, qui est isolé car $\exists r (0 < r \leq R)$ tel que tous les points de $D_1(a,r)$, sauf a, sont dans D.*

Théorème 5.2.1. (Théorème des résidus) *Soient D un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, $\{a_1, a_2, ..., a_m\}$, $m-$points de D, distincts deux à deux, qui sont des points frontières isolés de l'ouvert $\Omega = D \setminus \{a_1, a_2, ..., a_m\}$. Alors, pour toute fonction complexe f, analytique sur Ω et tout lacet γ dans Ω , on a :*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{m} Res_{a_k} f \Im(a_k;\gamma).$$

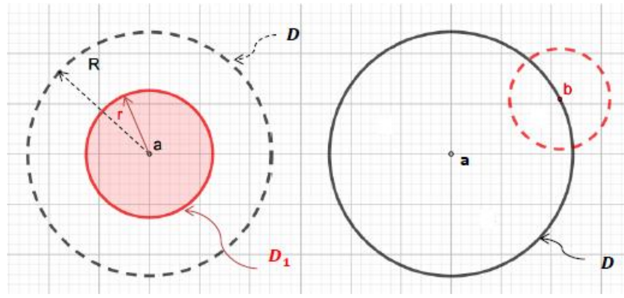

FIGURE 5.2 – a est un point forntière isolé et b un point forntière non isolé.

Démonstration. f admet un développement en série de Laurent en chaque point $a_k, k = 1, ..., m$, on a alors $\forall z \in V_{a_k} \setminus \{a_k\}$ (pour k fixé),

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} c_{k,n}(z-a_k)^n + \underbrace{\sum_{n\geq 1} \frac{d_{k,n}}{(z-a_k)^n}}_{U_k(z)},$$

où $U_k(z)$ est la partie singulière de f en a_k, $\forall k = 1, ..., m$, U_k est analytique sur Ω. Considérons la fonction g ;

$$g(z) = f(z) - U_1(z) - U_2(z) - ... - U_m(z).$$

On a g est analytique sur Ω, ainsi pour $k = 1, ..., m$ (k fixé) et $\forall z \in V_{a_k} \setminus \{a_k\}$,

$$g(z) = \sum_{n\geq 0} c_{k,n}(z-a_k)^n - \sum_{n\geq 1} \frac{d_{1,n}}{(z-a_1)^n} - ... - \underbrace{\sum_{n\geq 1} \frac{d_{k-1,n}}{(z-a_{k-1})^n}}_{U_{k-1}(z)} - \underbrace{\sum_{n\geq 1} \frac{d_{k+1,n}}{(z-a_{k+1})^n}}_{U_{k+1}(z)} - ... - \underbrace{\sum_{n\geq 1} \frac{d_{m,n}}{(z-a_m)^n}}_{U_m(z)}.$$

g est prolongeable analytiquement sur V_{a_k} par $G(z)$ telle que :

$$G(z) = \begin{cases} g(z) & \forall z \in V_{a_k} \setminus \{a_k\} \\ \\ \lambda_k & \text{si } z = a_k \ , \end{cases}$$

où $\lambda_k = c_{k_0} - U_1(a_k) - ... - U_{k-1}(a_k) - U_{k+1}(a_k) - ... - U_m(a_k)$, et ceci pour k quelconque, $k = 1, ..., m$. D'où, g est prolongeable analytiquement par G sur D, avec :

$$G(z) = \begin{cases} g(z) & \text{si } \forall z \in \Omega = D \setminus \{a_1, a_2, ..., a_m\} \\ \\ \lambda_k & \text{si } z = a_k, \forall k = 1, ..., m \ . \end{cases}$$

G est donc analytique sur D qui est simplement connexe, γ est un lacet dans Ω donc

$$\int_\gamma G(z)dz = 0 \Longleftrightarrow \int_\gamma g(z)dz = 0,$$

et alors

$$\int_\gamma (f(z) - U_1(z) - ... - U_m(z))dz = 0 \Longrightarrow \int_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{m} \int_\gamma U_k(z)dz,$$

ainsi, il résulte de ce qui précède que :

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{m} Res_{a_k} f \Im(a_k;\gamma).$$

□

5.2.2 Calcul pratique des résidus

1. f anlytique au voisinage de "a" :

$\exists r > 0,\ f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-a)^n, \forall z \in D_r(a,r),\ |z-a| < r, Res_a f = 0.$

2. "a" est un pôle simple de f :

- On a :

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n(z-a)^n + \frac{d_1}{z-a}, \forall z \in D_r\setminus\{a\},\ avec\ d_1 \neq 0.$$

Donc,

$$f(z) = \frac{1}{z-a}\underbrace{\left(d_1 + \sum_{n\geq 0} c_n(z-a)^{n+1}\right)}_{f_1(z)}, \forall z \in D_r\setminus\{a\},$$

d'où,

$$f(z) = \frac{1}{z-a} f_1(z),\ avec\ f_1(a) = d_1 \neq 0,$$

où f_1 est analytique au voisinage de a, on obtient donc :

$$(z-a)f(z) = \frac{z-a}{z-a} f_1(z),\ si\ z \neq a,$$

et alors,

$$Res_a f = \lim_{z\to a}(z-a)f(z).$$

- Soit $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z))}$, avec P et Q sont analytiques au voisinage de "a". Si "a" est un zéro simple de Q et $P(a) \neq 0$, on aura :

$$Q(z) = (z-a)\left(c_1 + \underbrace{c_2(z-a) + c_3(z-a)^2 + ...}_{Q_1(z)}\right),\ avec\ c_1 \neq 0,$$

Q_1 est analytique au voisinage de a et $Q_1(a) \neq 0$, donc $\frac{P(z)}{Q(z)}$ est analytique dans un voisinage de a, en particulier $f(z) = \frac{P(z)}{Q_1(z)}$ est développable en série entière en a et on aura :

$$\frac{P(z)}{Q_1(z)} = \sum_{n\geq 0} b_n(z-a)^n = b_0 + \sum_{n\geq 1} b_n(z-a)^n,\ pour\ \ |z-a|\ assez\ petit,\ avec\ b_0 = \frac{P(a)}{Q_1(a)} \neq 0,$$

d'où,

$$f(z) = \frac{b_0}{z-a} + \sum_{n\geq 1} b_n(z-a)^{n-1} = \frac{1}{z-a} f_2(z), avec\ b_0 \neq 0,$$

où, $f_2 = b_0 + \sum_{n\geq 1} b_n(z-a)^n$ avec $f_2(a) = b_0 \neq 0$. Ainsi, d'après ce qui précède,

$$Res_a f = f_2(a) = b_0 \frac{P(a)}{Q_1(a)},$$

or, $Q(z) = (z-a)Q_1(z)$ ce qui entraîne $Q^{'}(z) = Q_1(z) + (z-a)Q_1^{'}(z),\ avec\ Q^{'}(a) = Q_1(a)$, d'où,

$$Res_a f = \frac{P(a)}{Q^{'}(a)} \tag{5.2.2}$$

Exemple 5.2.2. *Soit* $f(z)\frac{e^{iz}}{z^2+1}$*, on pose* $P(z) = e^{iz}$ *et* $Q(z) = z^2+1$*.* P *et* Q *sont analytiques au voisinage de* i *et* $-i$*.* i *et* $-i$ *sont des zéros simples de* Q *avec* $P(i) = e^{-1} \neq 0$ *et* $P(-i) = e^{1} \neq 0$*, donc*

$$Res_i f = \frac{P(i)}{Q^{'}(i)} = \frac{e^{-1}}{2i},\ et\ Res_{-i} f = \frac{P(-i)}{Q^{'}(-i)} = \frac{e^{1}}{-2i}$$

3. "a" **est un pôle multiple d'ordre** $n \geq 1$

On a

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n(z-a)^n + \frac{d_1}{z-a} + \frac{d_2}{(z-a)^2} + ... + \frac{d_m}{(z-a)^m},\ où\ d_m \neq 0,$$

c'est à dire,

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^m}\left\{ d_m + d_{m-1}(z-a) + ... + d_1(z-a)^m + \sum_{n\geq 0} c_n(z-a)^{n+m} \right\},\ où\ d_m \neq 0.$$

On considère maintenant la fonction f :

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^m} g(z),$$

où $g(z) = \left\{ d_m + d_{m-1}(z-a) + ... + d_1(z-a)^m + \sum_{n\geq 0} c_n(z-a)^{n+m} \right\},\ avec\ g(a) = d_m \neq 0.$ Donc g est analytique au voisinage de a et le résidu de f (est d_1), est égal au coefficient de $(z-a)^{m-1}$ dans le développement en série de Taylors de g en a, or

$$g(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{g^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n,$$

d'où,

$$d_1 = \frac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!} = \frac{1}{(m-1)!}\left((z-a)^m f(z)\right)^{(m-1)}_{|z=a}.$$

Ainsi,

$$Res_a f = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to a} \left((z-a)^m f(z)\right)^{(m-1)}, \forall m \geq 1 \tag{5.2.3}$$

***Exemple* 5.2.3.** *Soit la fonction f définie par :*

$$f(z) = \frac{e^{z^2} + z^4}{(z-3)^2}.$$

On pose $g(z) = e^{z^2} + z^4$, donc $z = 3$ est un pôle double de f et alors

$$Res_3 f = \frac{1}{1!} \lim_{z \to 3} \left((z-3)^2 \left(\frac{e^{z^2} + z^4}{(z-3)^2}\right) \right)' = 6e^9 + 108.$$

5.3 Application du théorème des résidus au calcul d'intégrales

5.3.1 Calcul de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, intégrale réelle généralisée convergente

Soit D un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ telle que Im $z \geq 0$: demi-plan fermé $\subset D$. Soit $f : z \mapsto f(z)$ une fonction analytique dans $\Omega = D \setminus \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ où les $a_k \in \mathbb{C}$ et Im $a_k > 0$ $(k = 1, ..., m)$. On considère $\int_\gamma f(z)\,dz$, où γ est le lacet parcouru une fois dans le sens direct définie par $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$ comme suit (voir la figure 5.3) :

$$\gamma_1(t) = t, \forall t \in [-R, R], \text{ et } \gamma_2(t) = Re^{it}, \forall t \in [0, \pi].$$

D'une part, d'après le théorème des résidus, on a :

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{m} Res_{a_k} f \Im(a_k; \gamma),$$

or pour R assez grand, $\Im(a_k; \gamma) = +1, \forall k = 1, ..., m$ d'où,

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{m} Res_{a_k} f.$$

D'autre part,

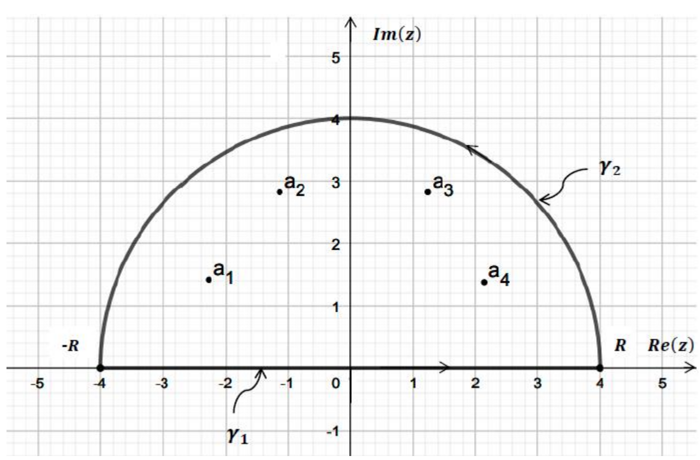

FIGURE 5.3 – $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$

$$\int_{\gamma=\gamma_1 \vee \gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz,$$

or, par définition on a :

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(t)dt, \ et \ \int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_0^{\pi} f(Re^{it})iRe^{it}dt,$$

d'où,

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx = \int_{\gamma} f(z)dz - \int_0^{\pi} f(Re^{it})iRe^{it}dt = 2i\pi\sum_{k=1}^{m} Res_{a_k}f - \int_{\gamma_2} f(z)dz, \ pour\ R\, assez\ grand,$$

et alors,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \stackrel{déf.}{=} \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx,$$

ainsi,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2i\pi\sum_{k=1}^{m} Res_{a_k}f - \lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Proposition 5.3.1. [1] *si f est une fonction complexe définie et continue dans un secteur argument,* $\arg z \in [0,\pi]$ *et si* $\lim\limits_{|z|\to+\infty} zf(z) = 0$, *alors* $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{\gamma_2} f(z)dz = 0$, *gamma*$_2(t) = Re^{it}, \forall t \in [0,\pi]$.

Démonstration. On a :

$$\left|\int_{\gamma_2} f(z)dz\right| = \left|\int_0^{\pi} f(Re^{it})iRe^{it}dt\right|.$$

Soit $M(R) = \sup\limits_{t\in[0,\pi]} |f(Re^{it})| = \left|f(Re^{i\theta_0})\right|, \theta_0 \in [0,\pi]$, d'où,

$$\left|\int_{\gamma_2} f(z)dz\right| \leq \left|\int_0^{\pi} f(Re^{it})Rdt\right| \leq RM(R)\pi.$$

Comme $\lim\limits_{|z|\to+\infty} zf(z) = 0$, alors $\lim\limits_{|z|\to+\infty} |z|\,|f(z)| = 0$, ce qui entraîne que

$$\lim_{R\to+\infty} Rf(Re^{i\theta_0}) = 0.$$

□

***Exemple* 5.3.1.** *Calculons l'intégrale suivante :*

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)^2}.$$

On considère pour cela, la fonction $f(z) = \frac{1}{(z^2+9)^2}$, *on a f est analytique sur* $\mathbb{C}\setminus\{-3i, 3i\}$, *qui n'est pas simplement connexe, soit* $D = \{z \in \mathbb{C}/Imz > -3\}$ *un ouvert simplement connexe de* $\mathbb{C}$ *et alors f est analytique sur* $\Omega = D\setminus\{3i\}$. *"$3i$" est un point frontière isolé de Ω (pour $R \neq 3$)*

1. Proposition du secteur argument

et $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$ *est un lacet dans* Ω *(on prend le lacet présenté par la fig. 4.3). Ainsi, d'après le théorème des résidus :*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \frac{dz}{(z^2+9)^2} = 2i\pi Res_{3i} f \Im(3i;\gamma),$$

et pour R *assez grand, "3i" est "intérieur" à* γ *parcouru une fois dans le sens direct donc* $\Im(3i;\gamma) = +1$*, d'où,*

$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{(z^2+9)^2} = 2i\pi Res_{3i} f.$$

Pour calculer le $Res_{3i} f$*, on considère* $f(z) = \frac{1}{(z^2+9)^2}$*. Posons* $P(z) = 1$ *et* $Q(z) = (z-3i)^2(z+3i)^2$*.* P *et* Q *sont analytiques au voisinage de "3i" et "3i" est un zéro double de* Q *telle que* $P(3i) = 1 \neq 0$*, donc un pôle double de* f*, d'où en appliquant la formule (5.2.3), on trouve :*

$$Res_{3i} f = \frac{2}{6^3 i}.$$

Ainsi,

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z^2+9)^2} = \frac{\pi}{54}.$$

D'autre part,

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(t)dt + \int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{(x^2+9)^2} + \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Or, $\lim\limits_{|z|\to+\infty} \frac{z}{(z^2+9)^2} = 0$*, alors d'après la proposition du secteur argument,* $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{\gamma_2} f(z)dz = 0$*. D'où,*

$$\int_{-R}^{R} \frac{dx}{(x^2+9)^2} = \frac{\pi}{54},$$

et par conséquent

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx \overset{\exists}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \frac{\pi}{54}.$$

5.3.2 Intégrale du type $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x).\{\cos\lambda x \ \ ou \ \ \sin\lambda x\}\ dx, \lambda \in \mathbb{R}_+^*$

On considère $\int_{-\infty}^{+\infty} F(z)e^{i\lambda z}dz$, F est analytique sur$\Omega = D\backslash\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ et Im $a_k > 0$, avec D un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, on prend dans ce cas le lacet donné par la figure (4.3).

Lemme 5.3.1. (Lemme de Jordan)
Si dans un demi-plan fermé : Im $z \geq 0$*, la fonction complexe continue* F*, vérifie*

$$\lim_{|z|\to+\infty} F(z) = 0, \ ou \ \ |F(z)| \leq \frac{M(R)}{R^k} \ avec\ k > 0, \forall z/ \arg z \in [0,\pi].$$

Alors,

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_2} F(z)e^{i\lambda z}dz = 0, \ où\ \gamma_2(t) = Re^{it}, \forall t \in [0,\pi].$$

Démonstration. On suit le même raisonnement vu dans la preuve de la proposition 5.3.1. □

Exemple 5.3.2. *Calculons l'intégrale suivante :*

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{(x^2+1)} dx \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}_+^*.$$

On considère $\int_0^{+\infty} F(z)e^{i\lambda z}dz$, *où* $F(z) = \frac{1}{(z^2+1)}$, *F est donc analytique sur* $\mathbb{C}\backslash\{-i,i\}$, *en particulier elle l'est sur* $\Omega = D\backslash\{-i,i\}$, *avec D est l'ouvert simplement connexe défini par,* $D = \{z \in \mathbb{C}/Imz > -1\}$ *et alors F est analytique sur* $\Omega = D\backslash\{i\}$. *"i" est un point frontière isolé de* Ω, *pour* $R \neq 1$*et* $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$ *est un lacet dans* Ω *(voir la figure 5.3). Ainsi, d'après le théorème des résidus :*

$$\int_\gamma F(z)e^{i\lambda z}dz = 2i\pi Res_i g \Im(i;\gamma), \text{ où } g(z) = F(z)e^{i\lambda z}$$

et pour R assez grand, "i" est "intérieur" à γ *parcouru une fois dans le sens direct donc* $\Im(i;\gamma) = +1$, *d'où,*

$$\int_\gamma F(z)e^{i\lambda z}dz = 2i\pi Res_i g.$$

Soit la fonction $g(z) = \frac{e^{i\lambda z}}{(z^2+1)}$, *on pose* $P(z) = e^{i\lambda z}$ *et* $Q(z) = z^2+1 = (z-i)(z+i)$. *P et Q sont analytiques au voisinage de "i" et "i" est un zéro simple de Q telle que* $P(i) = e^{-\lambda} \neq 0$, *donc un pôle simple de g, d'où en appliquant la formule (5.2.3), on trouve :*

$$Res_i g = \frac{e^{i\lambda}}{2i},$$

ainsi,

$$\int_\gamma F(z)e^{i\lambda z}dz = 2i\pi\frac{e^{i\lambda}}{2i} = \pi e^{-\lambda}.$$

D'autre part,

$$\int_\gamma \frac{e^{i\lambda z}}{(z^2+1)}dz = \int_{\gamma_1} g(z)dz + \int_{\gamma_2} g(z)dz = \int_{-R}^{R} g(t)dt + \int_{\gamma_2} g(z)dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{i\lambda x}}{(x^2+1)}dx + \int_{\gamma_2} g(z)dz.$$

Et comme, $\lim\limits_{|z|\to+\infty} F(z) = 0$, *alors d'après lemme de Jordan,* $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{\gamma_2} g(z)dz = 0$.
Par conséquent,

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{i\lambda x}}{(x^2+1)}dx \overset{\exists}{=} \pi e^{-\lambda}.$$

Or,

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{i\lambda x}}{(x^2+1)}dx = \int_{-R}^{R} \frac{\cos\lambda x}{x^2+1}dx + i\int_{-R}^{R} \frac{\sin\lambda x}{x^2+1}dx = \pi e^{-\lambda},$$

sachant que

$$\int_{-R}^{R} \frac{\cos\lambda x}{x^2+1}dx = 2\int_0^R \frac{\cos\lambda x}{x^2+1}dx \text{ et } \int_{-R}^{R} \frac{\sin\lambda x}{x^2+1}dx = 0,$$

ainsi,

$$2\lim_{R\to+\infty}\int_0^R \frac{\cos\lambda x}{x^2+1}dx = \pi e^{-\lambda},$$

donc,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos\lambda x}{(x^2+1)}dx = \frac{\pi}{2}e^{-\lambda}.$$

5.3.3 Intégrale du type $\mathcal{J} = \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt$

Soit $R(x, y)$ une fonction rationnelle n'admettant pas de pôles sur le cercle unité. On pose $z = e^{it}$ où $t \in [0, 2\pi]$, on considère le lacet parcouru une fois dans le sens direct défini par :

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}/\gamma(t) = e^{it}.$$

Donc on a :

$$dz = ie^{it}dt \Longrightarrow dt = \frac{dz}{iz},$$

de plus,

$$\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) \ et \ \sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}) = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})$$

et alors,

$$R(\cos t, \sin t) = R\left\{\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})\right\} \overset{not.}{=} h(z),$$

et $\mathcal{J}$ devient :

$$\mathcal{J} = \int_\gamma \underbrace{\frac{h(z)}{iz}}_{g(z)} dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{m} Res_{a_k} g \Im(a_k; \gamma).$$

On ne considère dans ce cas, que les singularités a_k de g qui sont "intérieurs" à γ (voir la figure 5.4), donc $\Im(a_k; \gamma) = +1$, et alors

$$\mathcal{J} = 2i\pi \sum_{k=1}^{m} Res_{a_k} g.$$

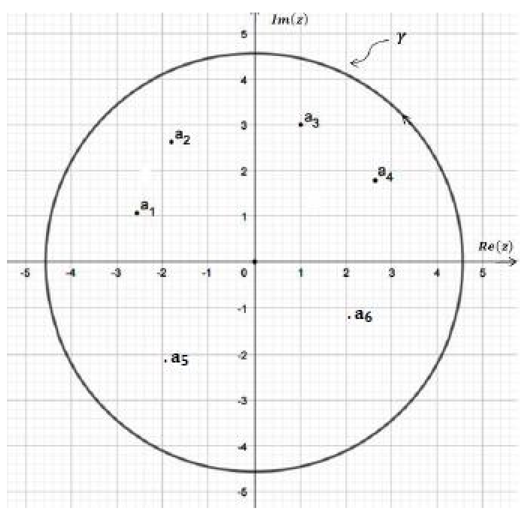

FIGURE 5.4 – $\gamma : t \mapsto e^{it}, \forall t \in [0, 2\pi]$

***Exemple* 5.3.3.** *Calculons*

$$\mathcal{I} = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \cos t}.$$

Posons $z = e^{it}$, *alors*

$$dz = ie^{it}dt \Longrightarrow dt = \frac{dz}{iz}, \text{ avec } \cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}),$$

d'où,

$$\mathcal{I} = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \cos t} = \int_0^{2\pi} \frac{dz}{iz(2 + \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})}) = \int_0^{2\pi} \frac{dz}{i\frac{1}{2}(4z + z^2 + 2}).$$

On pose

$$g(z) = \frac{1}{i\frac{1}{2}(4z + z^2 + 2)},$$

donc g *est analytique sur* $\mathbb{C} \backslash \{z \in \mathbb{C}, 4z + z^2 + 2 = 0\} = \mathbb{C} \backslash \{a_1 = -2 + \sqrt{2}, a_2 = -2 - \sqrt{2}\} = \Omega$, $\mathbb{C}$ *est simplement connexe,* a_1, a_2 *sont des points frontières isolés de* Ω, γ *est un lacet dans* Ω *(le cercle unité), ainsi d'après le théorème des résidus, on :*

$$\mathcal{I} = 2i\pi \sum_{k=1}^{2} Res_{a_k} g \Im(a_k; \gamma).$$

Le point a_1 *se trouve à "l'intérieur" à* γ *et* a_2 *est "extérieur" à* γ, *d'où*

$$\mathcal{I} = 2i\pi(Res_{a_1} g \underbrace{\Im(a_1; \gamma)}_{=+1} + Res_{a_2} g \underbrace{\Im(a_2; \gamma)}_{=0}).$$

D'autre part,

$$g(z) = \frac{1}{(z - a_1)(z - a_2}, $$

comme a_1 *est un pôle simple de* g, *alors*

$$Res_{a_1} g = \lim_{z \to a_1} (z - a_1) g(z) = \frac{-1}{4}.$$

Ainsi,

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \cos t} = \pi.$$

5.4 Exercices

Exercice 5.4.1. *1. Développer en série de Laurent la fonction suivante :*

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 5z + 4}$$

(a) *Sur la couronne* $C_0(1, 4)$

(b) *Sur la couronne* $C_0(0, 1)$

2. Développer en série de Laurent les fonction suivantes aux points indiqués :

$$f(z) = \frac{\exp(2z)}{(z + 2)^2}, \text{ en } z = -2; \quad f(z) = \frac{z^3}{(z - 3)^2}, \text{ en } z = 3$$

Exercice 5.4.2. *Soient* $0 \leq r_0 < r_1$, $a \in \mathbb{C}$ *et* $p \in C_a(r_0, r_1)$. *Il existe des réels positifs* r *et* r' *tels que* $0 \leq r_0 < r < |p-a| < r' < r_1$. *Démontrer que si* f *est analytique sur* $C_a(r_0, r_1)$, *alors :*

$$f(p) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{r'}} \frac{f(z)}{z-p} dz - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-p} dz,$$

où γ_r *et* $\gamma_{r'}$ *sont des lacets dans* $C_a(r_0, r_1)$, *parcourus une fois dans le sens direct définis par :*

$$\gamma_r(t) = a + re^{it}, \text{ et } \gamma_{r'}(t) = a + r'e^{it}, \forall t \in [0, 2\pi].$$

Exercice 5.4.3. *Déterminer les résidus des fonctions suivantes :*

$$(1) \quad f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+3)}, \quad (2) \quad f(z) = \frac{1}{z^6+1}, \quad (3) \quad f(z) = \frac{z^2+z+1}{z(z^2+1)^2}, \quad (4) \quad f(z) = \frac{1}{\sin z}$$

Exercice 5.4.4. *Calculer les intégrales suivantes :*

$$(1) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^4}, \quad (2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^6+1}, \quad (3) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$$

Exercice 5.4.5. *Calculer les intégrales suivantes :*

$$(1) \quad \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \lambda x}{x^2+1} dx \text{ où } \lambda > 0, \quad (2) \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin 3t}{5 - 4\cos t} dt$$

Exercice 5.4.6. *1. Calculer*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2} dx,$$

en considérant une fonction complexe f *convenable et* $\int_\gamma f(z)\, dz$, *où* γ *est le lacet décrit par la figure 5.5.*

2. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$.

Exercice 5.4.7. *Montrer que*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2},$$

en considérant l'intégrale

$$\int_\gamma \frac{\exp(iz)\, dz}{z},$$

où γ *étant le lacet décrit par la figure 5.5.*

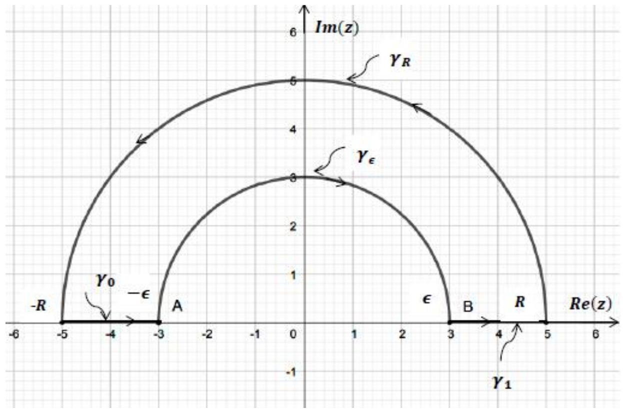

FIGURE 5.5 –

5.5 Indications et solutions des exercices

Exercice 5.5.1.

1. Développons en série de Laurent la fonction suivante :

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 5z + 4}, f \text{ } est \text{ } analytique \text{ } sur \text{ } \mathbb{C}\setminus\{1,4\}.$$

(a) Sur la couronne $C_0(1,4)$, on a :

$$f(z) = \frac{1}{(z-4)(z-1)} = \frac{-1}{3(z-1)} + \frac{1}{3(z-4)},$$

avec

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right) = \frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{z^n} = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{z^{n+1}}, \text{ } pour \text{ } |z| > 1,$$

et

$$\frac{1}{z-4} = \frac{-1}{4}\left(\frac{-1}{1-\frac{z}{4}}\right) = \frac{-1}{4}\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{4^n} = \sum_{n\geq 0} -\frac{z^n}{4^{n+1}}, \text{ } pour \text{ } |z| < 4.$$

D'où,

$$f(z) = -\frac{1}{3}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{z^{n+1}} - \frac{1}{3}\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{4^{n+1}}, \forall z \in C_0(1,4),$$

ainsi, f est développable en série de Laurent sur $C_0(1,4)$, et on a :

$$f(z) = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{-1}{34^{n+1}}\right)z^n + \sum_{n\geq 1}\left(\frac{-1}{3}\right)\frac{1}{z^n}, \forall z \in C_0(1,4).$$

(b) Sur la couronne $C_0(0,1)$, on trouve :

$$f(z) = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4^{n+1}}\right)z^n, \forall \text{ } 0 < |z| < 1.$$

2. (a) Développons en série de Laurent la fonction suivante :

$$f(z) = \frac{\exp(2z)}{(z+2)^2}, \text{ en } z = -2$$

On a f est analytique sur $\mathbb{C}\setminus\{-2\}$, posons $u = z+2$, on a alors :

$$f(u) = \frac{e^{2(u-2)}}{u^2} = \frac{e^{-4}}{u^2}\sum_{n\geq 0}\frac{(2u)^n}{n!} = e^{-4}\sum_{n\geq 0}\frac{2^n u^{n-2}}{n!} = e^{-4}\left(\frac{2}{u}+\frac{1}{u^2}+\sum_{n\geq 0}\frac{2^{n+2}}{(n+2)!}u^n\right).$$

D'où,

$$f(z) = e^{-4}\left(\frac{2}{z+2}+\frac{1}{(z+2)^2}+\sum_{n\geq 0}\frac{2^{n+2}}{(n+2)!}(z+2)^n\right).$$

(b) Même raisonnement.

Exercice 5.5.2. On considère la fonction g définie dans C_a par :

$$\begin{array}{llll} g: & D & \to \mathbb{C} & \\ & z & \mapsto & g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(p)}{z-p} & \text{si } z \neq p \\ f'(p) & \text{si } z = p \end{cases}, \end{array}$$

alors la fonction $g(z)$ est analytique sur C_a (voir la preuve du théorème 4.4.1.). Or, en utilisant la remarque 5.1.1, c'est à dire

$$\int_{\gamma_r} g(z)dz = \int_{\gamma_{r'}} g(z)dz,$$

on obtient le résultat voulu.

Exercice 5.5.3. (2) Déterminons les résidus de la fonction

$$f(z) = \frac{1}{z^6+1}.$$

On a f est analytique sur $\mathbb{C}\setminus\{z\ \mathbb{C}, z^6+1=0\}$. Résolvons donc l'équation $z^6 = -1$;

$$z^6 = -1 \Longleftrightarrow z^6 = e^{i(\pi+2k\pi)}, \forall k \in \mathbb{Z},$$

ainsi, $z_k = e^{\frac{1}{6}(\pi+2k\pi)}$, pour $k = 0, ..., 5$ sont des solutions de l'équation $z^6+1=0$. On obtient alors les six racines complexes suivantes :

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{6}}, z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}}, z_2 = e^{i\frac{5\pi}{6}}, z_3 = e^{i\frac{\pi}{6}}, z_4 = e^{i\frac{3\pi}{2}}, z_5 = e^{i\frac{11\pi}{6}}.$$

Posons maintenant $P(z) = 1$ et $Q(z) = z^6+1$, $\forall z \in \mathbb{C}$. $z = z_{k=0,...,5}$ sont des zéros simples pour Q et $P(z_k) \neq 0$, P et Q sont analytiques en particulier au voisinage de $z = z_{k=0,...,5}$, $z = z_{k=0,...,5}$ sont des pôles simples de f, alors on aura :

$$Res_{zk}f = \frac{P(z_k)}{Q'(z_k)} = \frac{1}{6z_k^5} = \frac{-z_k}{6}.$$

(4) Déterminons les résidus de la fonction

$$f(z) = \frac{1}{\sin z},$$

en utilisant son développement en série de Laurant. On a f est analytique sur $\mathbb{C}\setminus\{z \in \mathbb{C}, \sin z = 0\}$. Donc,

$$\sin z = 0 \Longleftrightarrow \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = 0 \overset{\times\left(e^{iz}\right)}{\Longrightarrow} e^{-2z} = 1 \Longrightarrow i2z = Log1 + i\left(0+2k\pi\right), \forall k \in \mathbb{Z}.$$

$$\Longrightarrow z = k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

D'où, f est analytique sur $\mathbb{C}\backslash\{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. On pose $u = z - k\pi$, on obtient alors,

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{\sin(u + k\pi)} = \frac{1}{\sin u \cos k\pi + \sin k\pi \cos u} = \frac{1}{(-1)^k \sin u}.$$

D'autre part, on a :

$$\frac{1}{\sin u} = \frac{1}{\sum\limits_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} u^{2n+1}} = \frac{1}{u - \frac{u^3}{6} + \frac{u^5}{5!} + ...} = \frac{1}{u} + \frac{u}{6} + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{5!}\right) u^3 + ..., \forall u \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{\sin z} = (-1)^k \left\{\frac{1}{z - k\pi} + \frac{(z - k\pi)}{6} + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{5!}\right)(z - k\pi)^3 + ...\right\}, \forall z \in \mathbb{C}\backslash\{k\pi\}.$$

Par conséquent, $z = k\pi$ est un pôle simple de f et $Res_z f = (-1)^k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 5.5.4.

1. On utilise le théorème des résidus, on trouve :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^4} = \frac{-5\pi}{16}.$$

2. Calculons l'intégrale

$$\mathcal{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^6+1}.$$

On considère la fonction suivante :

$$f(z) = \frac{1}{z^6+1},$$

d'après le deuxième cas de l'exercice 5.5.2., f est analytique sur $\mathbb{C}\backslash\{z\ \mathbb{C}, z^6+1=0\}$, c'est à dire elle est analytique sur $\mathbb{C}\backslash\{a_k, k = 1, ...6\}$, avec

$$a_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}, a_2 = e^{i\frac{\pi}{2}}, a_3 = e^{i\frac{5\pi}{6}}, a_4 = e^{i\frac{\pi}{6}}, a_5 = e^{i\frac{3\pi}{2}}, a_6 = e^{i\frac{11\pi}{6}}.$$

Soit D l'ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ défini par :

$$D = \left\{z \in \mathbb{C}, Imz > \frac{-1}{2}\right\}.$$

f est donc analytique sur $\Omega = D\backslash\{a_1, a_2, a_3\}$, a_1, a_2, a_3 sont des points frontières isolés de Ω, γ est un lacet dans Ω (voir la figure 5.6) pour R assez grand,$R \neq 1$, et d'après le théorème des résidus :

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{3} Res_{a_k} f \Im(a_k;\gamma).$$

Or, a_1, a_2, a_3 sont "intérieurs" à γ, parcouru une fois dans le sens direct alors, $\Im(a_k;\gamma) = 1, \forall k = 0, 1, 2$, on a donc

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{3} Res_{a_k} f,$$

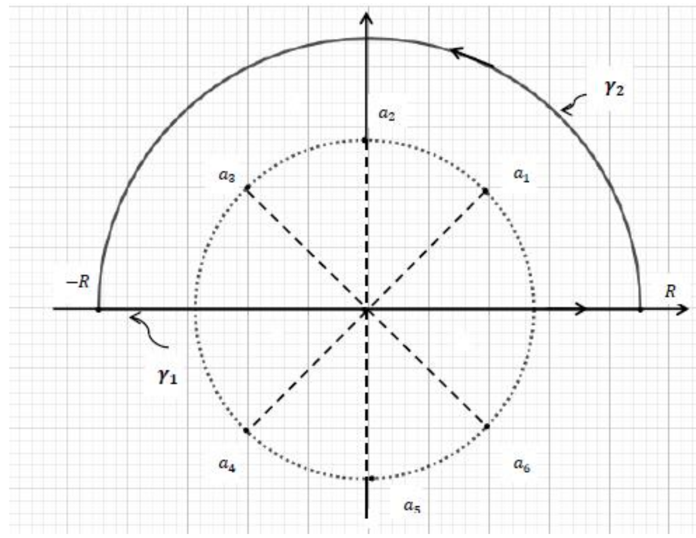

FIGURE 5.6 – Le lacet $\gamma_1 \vee \gamma_2$

où,

$$Res_{a_1} f = \frac{-a_0}{6} = \frac{-e^{i\frac{\pi}{6}}}{6}, Res_{a_2} f = \frac{-a_1}{6} = \frac{-e^{i\frac{\pi}{2}}}{6}, Res_{a_3} f = \frac{-a_2}{6} = \frac{-e^{i\frac{5\pi}{6}}}{6},$$

d'où,

$$\int_\gamma f(z)dz = \frac{2\pi}{3}.$$

D'autre part,

$$\int_{\gamma=\gamma_1\vee\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz,$$

or, par définition on a :

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(t)dt,\ et\ \int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_0^\pi f(Re^{it})iRe^{it}dt,$$

où

$$\gamma_1(t) = t, \forall t \in [-R, R],\ et\ \gamma_2(t) = Re^{it}, \forall t \in [0, \pi].$$

d'où,

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx = \int_\gamma f(z)dz - \int_0^\pi f(Re^{it})iRe^{it}dt = 2i\pi \sum_{k=1}^{3} Res_{a_k} f - \int_{\gamma_2} f(z)dz,$$

ainsi,

$$\int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^6+1} = \frac{2\pi}{3} - \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Or, pour R assez grand,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \overset{déf.}{=} \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx,$$

donc,

$$\mathcal{I} = \frac{2\pi}{3} - \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

et comme $\lim\limits_{|z|\to+\infty} \frac{z}{z^6+1} = 0$, alors d'après la proposition du secteur argument, $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{\gamma_2} f(z)dz = 0$.
Et par conséquent,

$$\mathcal{I} = \frac{2\pi}{3}.$$

Exercice 5.5.5.

1. Pour calculer l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \lambda x}{x^2+1} dx \text{ où } \lambda > 0,$$

on considre l'intégrale complexe suivante

$$\int_\gamma \frac{z}{z^2+1} e^{i\lambda z} dz,$$

où γ étant le lacet présenté par la figure 5.6, et en appliquant le théorème des résidus, on trouve :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \lambda x}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2} e^{-\lambda z} \text{ où } \lambda > 0.$$

2. Calculons l'intégrale suivante :

$$\mathcal{I} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin 3t}{5 - 4\cos t} dt.$$

On pose $\mathcal{R} = (\cos t, \sin t) = \frac{\sin 3t}{5-4\cos t}$. On a $\mathcal{R}$ est définie et continue si et seulement si $\cos t \neq \frac{5}{4}$, donc $\mathcal{I}$ existe. Posons $z = e^{it}$, alors

$$dz = ie^{it}dt \Longrightarrow dt = \frac{dz}{iz},$$

de plus,

$$\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) \ et \ \sin t = \frac{1}{2i}(e^{3it} - e^{-3it}) = \frac{1}{2i}(z^3 - \frac{1}{z^3})$$

avec, γ est le cercle unité parcouru une fois dans le sens direct défini par :

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}/\gamma(t) = e^{it}.$$

Ainsi,

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2} \int_\gamma \frac{z^6 - 1}{z^3(-2z^2 + 5z - 2)} dz.$$

On considère maintenant la fonction

$$g(z) = \frac{z^6 - 1}{z^3(-2z^2 + 5z - 2)},$$

g est analytique sur $\mathbb{C}\setminus \{z \ \mathbb{C}/z^3 = 0 \vee -2z^2 + 5z - 2 = 0\} = \mathbb{C}\setminus \left\{0, \frac{1}{2}, 2\right\} = \Omega$, $\mathbb{C}$ est un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ et γ est un lacet dans Ω, $0, \frac{1}{2}, 2$ sont des points frontières isolés, alors d'après le théorème des résidus :

$$\int_\gamma g(z)dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{3} Res_{a_k} g \Im(a_k; \gamma).$$

Or, $a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{2}$ sont "intérieurs" à γ, parcourus une fois dans le sens direct, alors $\Im(a_1;\gamma) = \Im(a_2;\gamma) = +1$, mais $a_3 = 2$ est "extérieur" à γ alors $\Im(a_3;\gamma) = 0$. D'où,

$$\int_\gamma g(z)dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{2} Res_{a_k},$$

avec $Res_{a_1} g = \frac{21}{8}$ et $Res_{a_2} g = \frac{-21}{8}$. Ainsi,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin 3t}{5 - 4\cos t} dt = 0.$$

Exercice 5.5.6. 1. Calculons l'intégrale suivante

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2} dx$$

soit

$$f(z) = \frac{e^{iz} - e^{i2z}}{z^2}$$

et $\int\limits_\gamma f(z)\, dz$, où γ est le lacet décrit par la figure 5.7. ci-dessous.

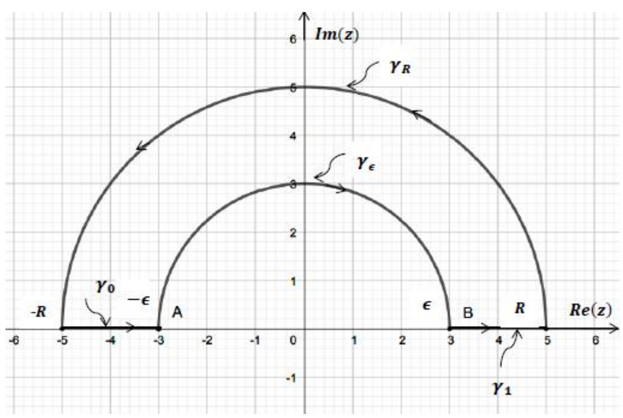

FIGURE 5.7 –

f est analytique sur $\mathbb{C}\setminus\{0\} = \Omega$, $\mathbb{C}$ est un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, "0" est un point frontière isolé de Ω, γ est un lacet, et d'après le théorème des résidus ;

$$\int\limits_\gamma f(z)\, dz = 2i\pi Res_0 f + \Im(0;\gamma),$$

or, "0" est "extérieur" à γ, alors l'indice $\Im(0;\gamma) = 0$, d'où

$$\int\limits_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

D'autre part, on a :

$$\int\limits_{\gamma=\gamma_1\vee\gamma_R\vee\gamma_2\vee\gamma_\epsilon} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma_R} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma_\epsilon} f(z)\,dz$$

avec,

$$\begin{aligned}\gamma_1 &: [\varepsilon, R] \longrightarrow \mathbb{C},\ \gamma_1(t) = t\\ \gamma_2 &: [-R, -\epsilon] \longrightarrow \mathbb{C},\ \gamma_2(t) = t\\ \gamma_R &: [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{C},\ \gamma_R(t) = R\ \mathrm{e}^{it}\\ \gamma_\epsilon &: [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{C},\ \gamma_\epsilon(t) = \epsilon\ \mathrm{e}^{it}\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz &= \int\limits_{\epsilon}^{R} f(t)\,dt + \int\limits_{-\epsilon}^{-R} f(t)\,dt + \int\limits_{\gamma_R} f\left(R\ \mathrm{e}^{it}\right) iR\ \mathrm{e}^{it}dt + \int\limits_{\gamma_\epsilon} f\left(\epsilon\ \mathrm{e}^{it}\right) i\epsilon\ \mathrm{e}^{it}dt = 0\\ &= \int\limits_{\epsilon}^{R} \frac{e^{it} - e^{i2t}}{t^2}dx + \int\limits_{-\epsilon}^{-R} \frac{e^{it} - e^{i2t}}{t^2}dt + \int\limits_{\gamma_R} f\left(R\ \mathrm{e}^{it}\right) iR\ \mathrm{e}^{it}dt + \int\limits_{\gamma_\epsilon} f\left(\epsilon\ \mathrm{e}^{it}\right) i\epsilon\ \mathrm{e}^{it}dt = 0\\ &\overset{t=-x}{=} \int\limits_{\epsilon}^{R} \frac{\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) - \left(e^{i2x} + e^{-i2x}\right)}{x^2}dx + \int\limits_{\gamma_R} f\left(R\ \mathrm{e}^{it}\right) iR\ \mathrm{e}^{it}dt + \int\limits_{\gamma_\epsilon} f\left(\epsilon\ \mathrm{e}^{it}\right) i\epsilon\ \mathrm{e}^{it}dt,\end{aligned}$$

ainsi,

$$\int\limits_{\epsilon}^{R} \frac{2\cos x - 2\cos 2x}{x^2}dx = -\int\limits_{\gamma_R} f(z)\,dz - \int\limits_{\gamma_\epsilon} f(z)\,dz.$$

On passe à la limite $R \longrightarrow +\infty$, $\epsilon \longrightarrow 0$, on a $\lim\limits_{|z|\longrightarrow+\infty} F(z) = \lim\limits_{|z|\longrightarrow+\infty} \frac{1}{z^2} = 0$ et d'après le lemme de Jordan, $\lim\limits_{R\longrightarrow+\infty} \int\limits_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0$. D'autre part, on a :

$$e^{iz} = \sum_{n\geq 0} \frac{(iz)^n}{n!},\ e^{i2z} = \sum_{n\geq 0} \frac{(i2z)^n}{n!}$$

d'où,

$$f(z) = \frac{e^{iz} - e^{i2z}}{z^2} = \frac{-i}{z} + \frac{3}{2} + \frac{7}{6}iz + ... + \frac{(iz)^n - (i2z)^n}{n!}\frac{1}{z} + ...,\ \forall\mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

Donc $z = 0$, est un pôle simple de f et $Res_0 f = -i$, et d'après le lemme du pôle simple, on a :

$$\lim_{\epsilon\longrightarrow 0} \int\limits_{\gamma_\epsilon} f(z)\,dz = iRes_0 f(-\pi) = -\pi$$

.

On obtient finalement,

$$\lim_{R\longrightarrow+\infty,\epsilon\longrightarrow 0} \int\limits_{\epsilon}^{R} \frac{2\cos x - 2\cos 2x}{x^2}dx = \pi,$$

ainsi,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

2. On sait que $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, d'où

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{2x^2} dx \overset{2x=\lambda}{=} \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos \lambda}{\lambda^2} d\lambda = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx.$$

Par conséquent,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos 2x - 1 + \cos x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Bibliographie

[1] H. Cartan, Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes 1961, Hermann éditeurs des sciences et des arts.

[2] J. Dieudonné, Calcul infinitésimal 1980, Hermann éditeurs des sciences et des arts.

[3] M. HERVE, Les fonctions analytiques, Presses Universitaires de France, 1982.

[4] W. Rudin, Analyse réelle et complexe. Masson, Paris, 1975. Manuel de deuxième cycle.