

République Algérienne démocratique et populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed Boudiaf USTO - MB -

Faculté d'Architecture et de Génie civil

Département de Génie Civil



Polycopié

*Cours de Résistance des
Matériaux*

- Systèmes Isostatiques -

Elaboré par

Souad MALAB

Docteur en Génie Civil - Maître de Conférences B

Avant-propos

Le présent ouvrage est un cours de résistance des matériaux (RDM) adressé essentiellement aux étudiants de 2^e année licence (LMD) de la filière Génie Civil et à d'autres spécialités éventuellement. Ce polycopié est élaboré dans le but de faciliter à l'étudiant l'assimilation et la compréhension des cours dispensés.

Ce cours s'articule autour de six chapitres. Le premier chapitre concerne une introduction générale à la RDM ; où sont exposés : le but, les pièces étudiées, les hypothèses considérées dans le calcul des éléments de construction, ainsi que quelques définitions concernant les forces et les modes d'appui.

La deuxième partie concerne l'étude de la traction et la compression simple où sont déterminés les efforts axiaux ainsi que les contraintes normales et les allongements.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude des caractéristiques géométriques de la section où sont exposés, avec détail, la détermination du moment statique, position du centre de gravité, moments d'inertie, rayons de giration ainsi que le module de résistance ; dont la connaissance est essentielle aussi bien en RDM que dans d'autres spécialités.

Dans le quatrième chapitre, est étudiée la flexion simple, phénomène concernant les barres horizontales (ou les poutres). Dans cette partie, sont déterminés les efforts intérieurs dus à la flexion, à savoir : le moment fléchissant et l'effort tranchant, ainsi que les contraintes normales et tangentielles.

Le cinquième chapitre est dédié à l'étude des déplacements en flexion simple. Trois méthodes de calcul de la flèche sont proposées : la méthode de la double intégration, la méthode des paramètres initiaux et la méthode de la poutre fictive.

Enfin, le sixième et dernier chapitre concerne l'étude des treillis isostatiques ; à savoir la détermination des efforts normaux dans les barres par deux méthodes : la méthode des nœuds et la méthode des sections (ou méthode de Ritter).

Ayant la théorie, les étudiants pourront se référer aux principales questions qui sont illustrées par des exemples et des applications simples qui, toutefois, sont traités d'une manière détaillée.

Notations

- a : longueur d'un tronçon de la barre ;
- A : section droite ou transversale ;
- b : largeur d'une section droite ; longueur d'un tronçon de la barre ;
- d : diamètre d'un cercle ; diamètre intérieur d'un anneau ;
- C : constante d'intégration ;
- D : diamètre extérieur d'un anneau ; constante d'intégration ;
- E : module d'élasticité longitudinale ;
- f : flèche d'une poutre ;
- f_{adm} : flèche admissible ;
- H_A : réaction horizontale au point A ;
- I_x : moment d'inertie par rapport à x ;
- I_y : moment d'inertie par rapport à y ;
- I_p : moment d'inertie polaire ;
- I_{xy} : produit d'inertie ;
- i_x : moment de giration par rapport à x ;
- i_y : moment de giration par rapport à y ;
- $1/k$: courbure de la poutre ;
- l : longueur de la barre ;
- M : moment concentré ;
- M_A : moment d'encastrement au point A ;
- M_f : moment fléchissant ;
- M_{max} : moment fléchissant maximum ;
- M_e : moment extérieur appliqué ;
- N : effort normal ;
- p : charge surfacique uniformément répartie ;
- P : force concentrée extérieure appliquée ;

q : intensité de la charge répartie ;
 q_x : charge uniformément répartie suivant x ;
 Q : effort tranchant ;
 R : résultante de forces ;
 R_A : réaction au point A ;
 R_B : réaction au point B ;
 S_x : moment statique par rapport à l'axe x ;
 S_y : moment statique par rapport à l'axe y ;
 V_A : réaction verticale au point A ;
 V_B : réaction verticale au point B ;
 W_x : moment résistant par rapport à x ;
 W_y : moment résistant par rapport à y ;
 X_G : abscisse du centre de gravité ;
 Y_G : ordonnée du centre de gravité ;
 α : angle d'inclinaison de la charge concentrée ou d'une barre de treillis ;
 γ : poids spécifique du matériau ;
 Δl : allongement longitudinal d'une barre en traction ;
 ε : déformation longitudinale ;
 θ : angle de rotation de la section par rapport à sa position initiale en flexion ;
 ρ : rayon de courbure d'une poutre pendant le processus de déformation en flexion ;
 σ : contrainte normale ;
 σ_{adm} : contrainte normale admissible ;
 σ_{cal} : contrainte normale calculée ;
 σ_t^{max} : contrainte de traction maximale ;
 σ_c^{max} : contrainte de compression maximale ;
 τ : contrainte tangentielle ;
 τ_{max} : contrainte tangentielle maximale.

Sommaire

Page

Avant-propos	I
Notations	II
Sommaire	IV
1- Généralités	1
1.1. Objet	1
1.2. Problèmes et méthodes	1
1.3. Pièces étudiées en R.D.M	1
1.4. Hypothèses de la R.D.M	2
1.5. Forces extérieures et intérieures	3
1.6. Différents modes d'appuis et calcul des réactions d'appui	6
1.7. Détermination des réactions d'appui	7
Quelques exemples de calcul des réactions d'appui	7
2- Traction simple et compression	9
2.1. Définition	9
2.2. Détermination des efforts intérieurs	9
2.3. Application de la loi de Hooke	13
2.4. Essai de traction	15
- Diagramme de traction	16
2.5. Contrainte admissible	17
3 - Caractéristiques géométriques de la section	19
3.1. Moment statique	19
3.2. Moment d'inertie	22
3.3 Moment d'inertie centrifuge	22
- Moment d'inertie de quelques sections simples	23
1- Rectangle	23
2- Cercle	24
3- Anneau	25
4- Triangle	26
3.4. Rayon de giration	27
3.5. Module de résistance	28
1-Rectangle	28
2-cercle	28
3-Anneau	28
3.6. Variation des moments d'inertie par rapport à des axes parallèles	28
3.7. Variation des moments d'inertie par rapport à la rotation des axes de coordonnées	29
3.8. Axes d'inertie et moments d'inertie principaux	31

4- La flexion simple	33
4.1. Généralités	33
4.2. Règles de signe des moments fléchissants et des efforts tranchants	34
4.3. Détermination des efforts intérieurs en flexion	35
4.4. Relation entre le moment fléchissant, l'effort tranchant et l'intensité de la charge répartie	38
4.5. Détermination des contraintes normales	39
4.6. Conditions de la résistance par rapport aux contraintes normales	43
4.7. Calcul des contraintes tangentielles	44
5- Détermination des déplacements en flexion	47
5.1. Méthode de l'intégration de l'équation de l'axe élastique	47
5.2. Méthode des paramètres initiaux	51
Exercices d'application	55
5.3. Méthode de la poutre auxiliaire	56
Exercices d'application	57
6- Treillis isostatiques	61
6.1. Définition	61
6.2 Hypothèses	61
6.3. Systèmes isostatiques	61
6.4. Calcul des efforts dans les barres	62
6.4.1. Méthode des nœuds	62
6.4.2. Méthode des sections (méthode de Ritter)	65
Bibliographie	66

1- Généralités

1- Généralités

1.1. Objet

La résistance des matériaux est une science qui traite les méthodes d'ingénieur employées pour le calcul de résistance, de rigidité et de stabilité des éléments de machines et des ouvrages.

On appelle résistance la capacité d'une structure, de ses parties et de ses pièces de supporter, sans se détruire, une charge déterminée.

La rigidité est la capacité d'une structure et de ses éléments de s'opposer à l'action déformatrice de charges extérieures (modification de la forme et des dimensions).

La stabilité est la capacité d'une structure et de ses éléments de conserver une forme initiale donnée, correspondant à l'état d'équilibre élastique.

1.2. Problèmes et méthodes

La R.D.M doit permettre d'assurer en premier lieu la sécurité des constructions ; d'une part leur résistance, et d'autre part des déformations limitées, dans toutes les conditions d'emploi.

En second lieu, la R.D.M doit permettre de réaliser des constructions économiques.

1.3. Pièces étudiées en R.D.M

La R.D.M est la science la plus générale qui étudie la stabilité des machines et des ouvrages. La création de différents types de machines et mécanismes, ouvrages de génie civil, la construction des ponts, ligne de transport et antennes, hangars, navires, avions, turbines, groupes des centrales nucléaires, engins, fusées etc... tout cela est impensable sans une connaissance fondamentale de la R.D.M.

Malgré la diversité des ouvrages, ils peuvent être ramenés à un nombre relativement restreint de formes principales. Il s'agit : de barres, de plaques et de corps massifs.

On appelle barre ou poutre un corps dont la dimension longitudinale est beaucoup plus grande que les deux autres transversales et dont le centre de gravité G décrit un axe rectiligne ou curviligne G_0 et G_1 (Fig.1.1). La section transversale (A) reste normale à cet axe. (A) est appelée également section droite.

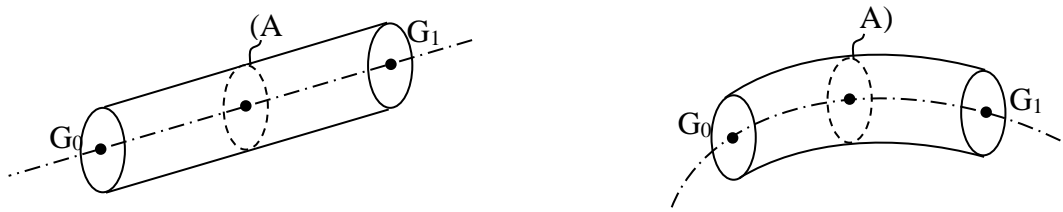


Fig.1.1

Elle doit concilier au mieux ces deux impératifs opposés et de choisir le compromis optimal.

La R.D.M s'attache essentiellement à deux sortes de problèmes :

1) La problématique de calcul des pièces :

Il s'agit de calculer les formes d'une pièce assurant la résistance et des déformations limitées, ceci en fonction des forces extérieures appliquées et du matériau (défini par ses caractéristiques mécaniques).

2) Le problème de la vérification :

Il s'agit pour une pièce donnée, connaissant les formes et la matière, de déterminer en fonction des forces extérieures :

- d'une part les efforts intérieurs ;
- d'autre part les déformations.

Pour résoudre ces problèmes, la R.D.M doit établir les relations qui existent entre ces différents paramètres :

- système des forces extérieures,
- formes géométriques,
- caractéristiques mécaniques des matériaux,
- répartitions des forces intérieures,
- déformations.

1.4. Hypothèses de la R.D.M

Pour appliquer la théorie de la résistance des matériaux, on considère les hypothèses suivantes :

- 1- Continuité du matériau ;
- 2- Le solide est homogène (constitué du même matériau et de même constitution physique et chimique : fer, cuivre, bois) ;
- 3- Le solide est supposé isotrope (a les mêmes propriétés mécaniques en chacun de ses points et dans toutes les directions) ;
- 4- Les déformations sont petites par comparaison avec les dimensions du corps déformé ;
- 5- Elasticité parfaite du matériau ;

- 6- Dépendance linéaire entre les déformations et les charges (Loi de Hooke $\sigma = E \cdot \varepsilon$);
- 7- Les sections planes perpendiculaires à l'axe de la barre, restent planes et perpendiculaires au cours du processus de déformation (Hypothèse de Navier-Bernoulli).

1.5. Forces extérieures et intérieures

On appelle forces ou charges extérieures les forces d'interaction entre un élément considéré et les corps qui sont en contact avec lui.

Une charge répartie sur la surface qu'on peut ramener au plan principal, c'est-à-dire une charge répartie sur une ligne porte le nom de charge par unité de longueur, se désigne ordinairement par la lettre q et se mesure le plus souvent en t/m ou N/m (Fig.1.2 a et b).

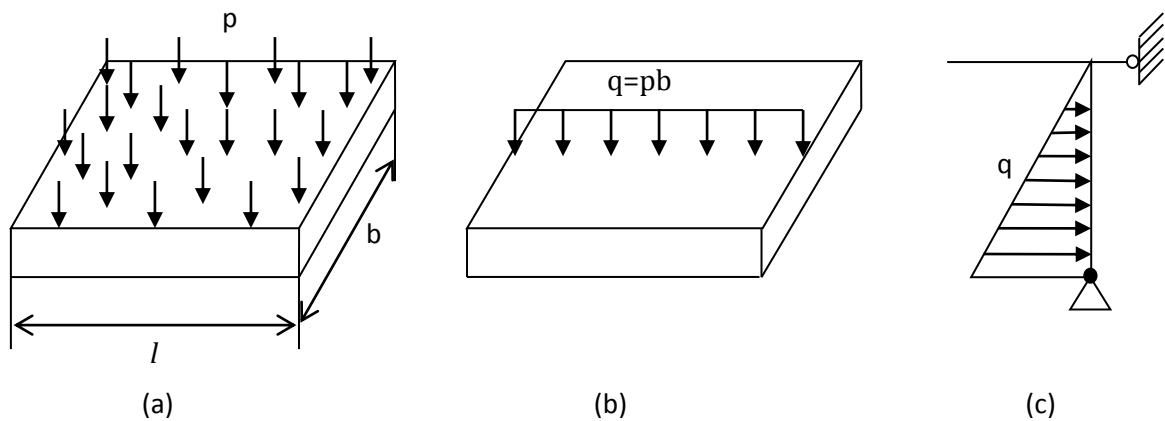


Fig.1.2

Dans le cas d'une charge uniformément répartie, le diagramme de q est rectangulaire. S'il s'agit d'une pression hydrostatique, le diagramme de q est triangulaire (Fig.1.2 c).

La résultante d'une charge répartie est numériquement égale à l'aire de son diagramme et est appliquée au centre de gravité de ce dernier. Si la charge est répartie sur une partie peu importante de la surface du corps, on la remplace toujours par sa résultante appelée force concentrée P mesurée en t (tonnes) ou en N (Newton).

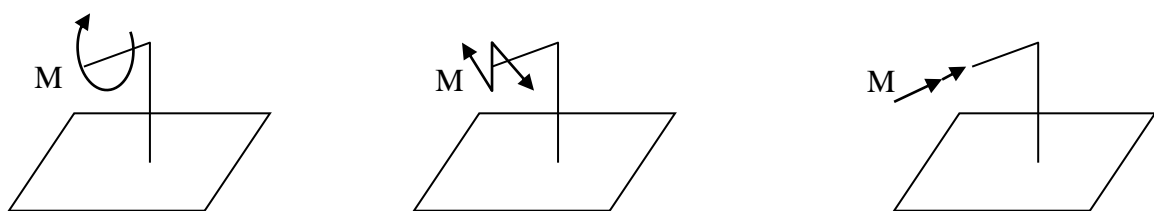


Fig.1.3

On rencontre des charges qui peuvent être représentées sous forme de moment concentré (couple) ou réparti.

Les moments sont mesurés en t.m ou N.m et sont représentés par la schéma ci-dessus (Fig.1.3).

Les forces qui ne sont pas le résultat d'un contact entre deux corps mais sont appliquées en chaque point du volume occupé par le corps (poids propre, force d'inertie) s'appellent forces volumiques ou massiques.

On appelle forces intérieures, des forces qui interviennent dans un corps sous l'action des forces extérieures. Les efforts intérieurs résultants déterminés ne sont rien d'autres que les composantes du vecteur principal et du moment principal des forces intérieures.

Pour calculer ces efforts, on applique la méthode des sections d'un corps en équilibre.

Rappel :

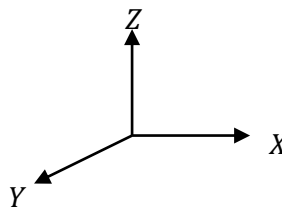
Un corps est dit en équilibre, si la somme des forces est égale à zéro et la somme des moments est nulle également.

Conditions d'équilibre :

$$\Sigma F_x = 0 \quad ; \quad \Sigma M_{/x} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad ; \quad \Sigma M_{/y} = 0$$

$$\Sigma F_z = 0 \quad ; \quad \Sigma M_{/z} = 0$$



Le principe de la méthode des sections est le suivant :

Un corps en équilibre est coupé suivant la section a-a (Fig.1.4).

L'une des parties est ensuite rejetée, d'habitude celle où les forces appliquées sont les plus nombreuses. Il apparaît alors, les efforts intérieurs qui équilibrent les forces extérieures appliquées à la partie découpée. Dans le cas où les forces extérieures reposent dans un plan, on applique en général à la section trois efforts intérieurs : l'effort N dirigée suivant l'axe de la barre qui s'appelle effort normal ; l'effort Q (ou T) qui agit dans le plan de la section droite et perpendiculairement à l'axe de la barre ; appelé effort tranchant et le moment M dont le plan d'action est perpendiculaire au plan de la section (Fig.1.4). Ce moment est produit par la flexion de la barre et s'appelle moment fléchissant.

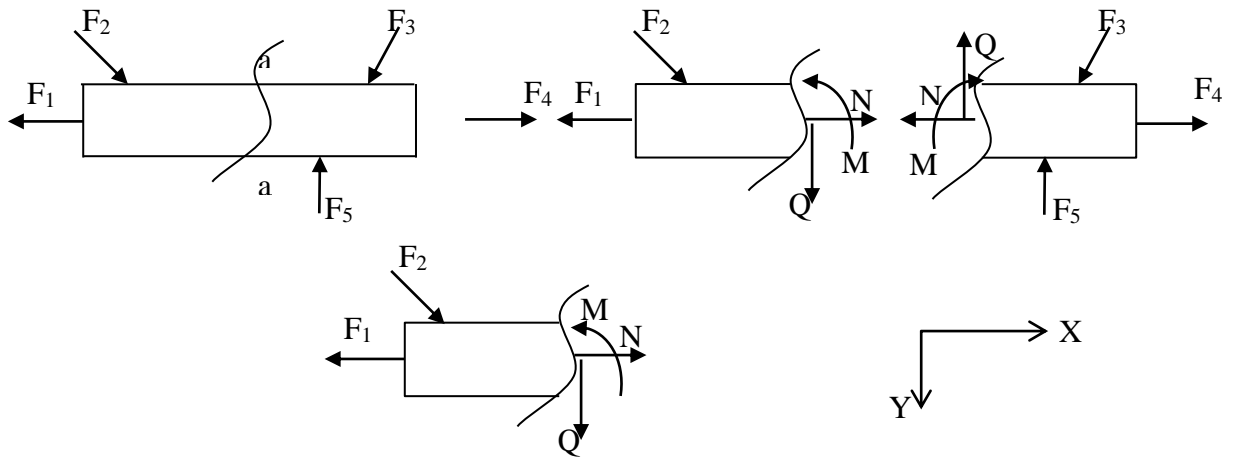


Fig. 1.4

Ensuite, on compose les équations d'équilibre de la partie sectionnée du corps, d'après lesquelles on calcule N , Q et M en faisant les projections des forces appliquées comme suit :

$\Sigma F_x = 0$ nous donne N ; $\Sigma F_y = 0$ nous donne Q et en annulant la somme des moments par rapport à n'importe quel point, on calcule M .

Si les forces extérieures ne reposent pas dans le même plan (problème spatial-repère OXYZ) et dans le cas général, la section droite peut être le siège de six efforts intérieurs : l'effort normal N , l'effort tranchant Q_x , l'effort tranchant Q_y et trois moments M_x , M_y et M_z , les deux premiers étant des moments fléchissant et le troisième M_z agissant dans le plan de la section appelé moment de torsion du fait qu'il est produit par la torsion de la barre (Fig.1.5).

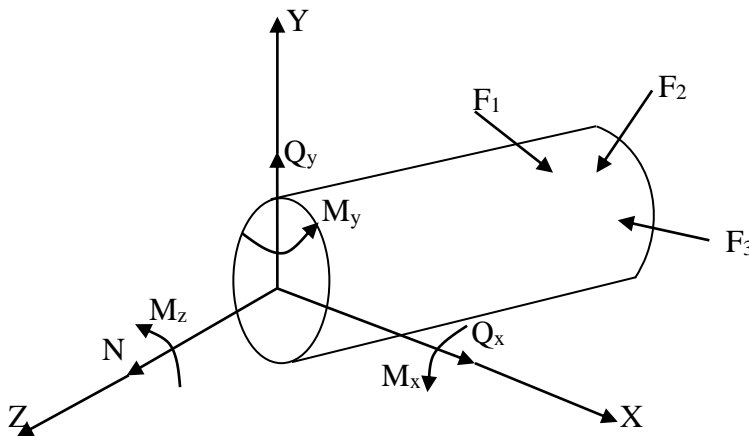


Fig.1.5

1.6. Différents modes d'appuis et calcul des réactions d'appui

Tous les organes d'appui pour poutre qu'on rencontre peuvent être schématisés sous forme de trois types principaux d'appui suivants :

- a- Appui articulé mobile : Dans lequel ne peut apparaître qu'une seule composante de réaction R_A dirigée le long de la tige d'appui (Fig.1.6). Il est appelé aussi appui simple.

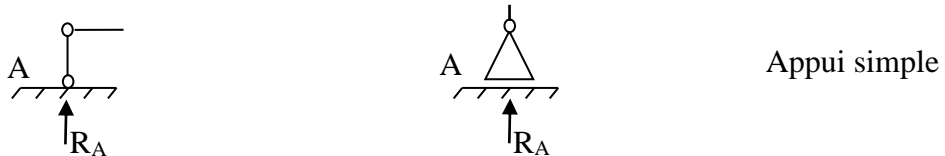


Fig.1.6

- b- Appui articulé immobile ou appui double : admet deux composantes de réactions que sont la réaction verticale V_A et la réaction horizontale H_A (Fig.1.7).

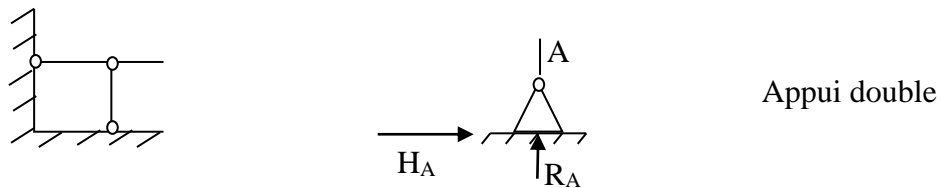


Fig.1.7

- c- Encastrement : où sont possibles trois composantes de réactions : la réaction verticale V_A ; horizontale H_A et le moment d'appui ou moment d'encastrement M_A (Fig.1.8).

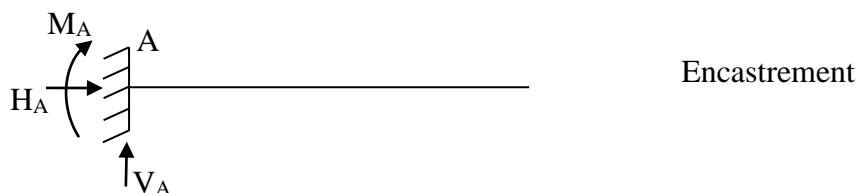
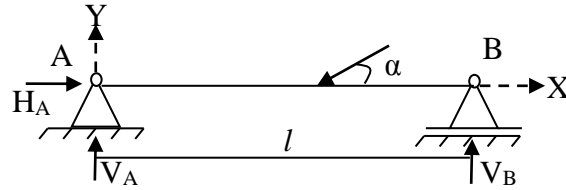


Fig.1.8

On suppose que tous les moments et réactions sont appliquées au point A, considéré comme le centre de gravité de la section d'appui.

1.7. Détermination des réactions d'appui

Considérons la poutre suivante :

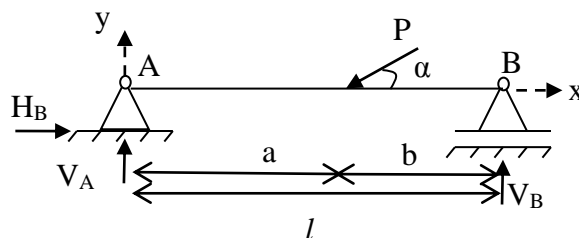


Déterminons les trois inconnues : V_A ; V_B et H_A .

- 1- La somme des projections de toutes les forces sur l'axe de la poutre est égale à zéro ; $\Sigma F_x = 0$; d'où nous trouvons H_A .
- 2- La somme des moments par rapport au point A est égale à 0 ; $\Sigma M_{/A} = 0$; d'où nous trouvons V_B .
- 3- La somme des moments par rapport au point B est égale à 0 ; $\Sigma M_{/B} = 0$; d'où nous trouvons V_A .
- 4- Pour la vérification, la somme des projections de toutes les forces sur l'axe Y ; $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V_A$ ou V_B .
- 5- Si le résultat d'une réaction est négatif, il convient de changer sa direction sur le dessin contre une direction opposée.
- 6- Si les charges agissant sur la poutre sont perpendiculaires à l'axe de cette dernière (l'axe x) ; $H_A = 0$ et on ne se sert plus de $\Sigma F_x = 0$.

Quelques exemples de calcul des réactions d'appui :

Exemple 1 :



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow H_B - P \cdot \cos \alpha = 0 \Rightarrow H_B = P \cdot \cos \alpha \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V_A + V_B - P \cdot \sin \alpha = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma M_{/A} = 0 \Rightarrow V_B \cdot l - P \cdot \sin \alpha \cdot a = 0 \Rightarrow V_B = P \cdot \frac{a}{l} \sin \alpha \quad (3)$$

On remplace V_B dans l'équation (2) ; on aura :

$$V_A + P \cdot \frac{a}{l} \sin \alpha - P \sin \alpha = 0 \Rightarrow V_A = P \left(1 - \frac{a}{l}\right) \sin \alpha$$

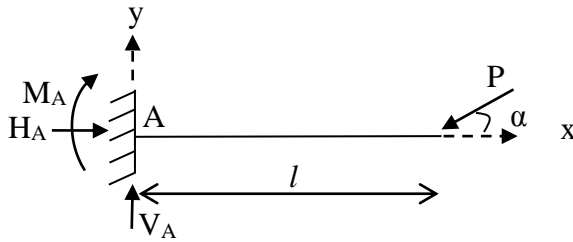
Pour la vérification :

$$\Sigma M_{/B} = 0 \Rightarrow -V_A \cdot l + P \cdot \sin \alpha \cdot b = 0 \Rightarrow V_A = P \cdot \frac{b}{l} \sin \alpha$$

$$b = l - a \Rightarrow V_A = P \cdot \frac{l - a}{l} \sin \alpha$$

$$V_A = P \left(1 - \frac{a}{l}\right) \sin \alpha \quad \text{C'est donc vérifié.}$$

Exemple 2 :



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow H_A - P \cdot \cos \alpha = 0$$

$$H_A = P \cdot \cos \alpha$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V_A - P \cdot \sin \alpha = 0$$

$$V_A = P \cdot \sin \alpha$$

$$\Sigma M_{/A} = 0 \Rightarrow -M_A - P \cdot \sin \alpha \cdot l = 0$$

$$M_A = -P \cdot l \sin \alpha$$

2- Traction et compression simple

2- Traction et compression simple

2.1. Définition

On dit qu'une pièce travaille en traction ou en compression simple quand elle est seulement soumise à deux forces extérieures égales et opposées, appliquées en ses extrémités.

2.2. Détermination des efforts intérieurs

Considérons le cas où les forces extérieures agissent suivant l'axe de la barre. Pour déterminer les efforts intérieurs appliquons la méthode des sections.

Réalisons une coupe suivant a-a et examinons l'équilibre de la partie découpée (Fig.2.1).

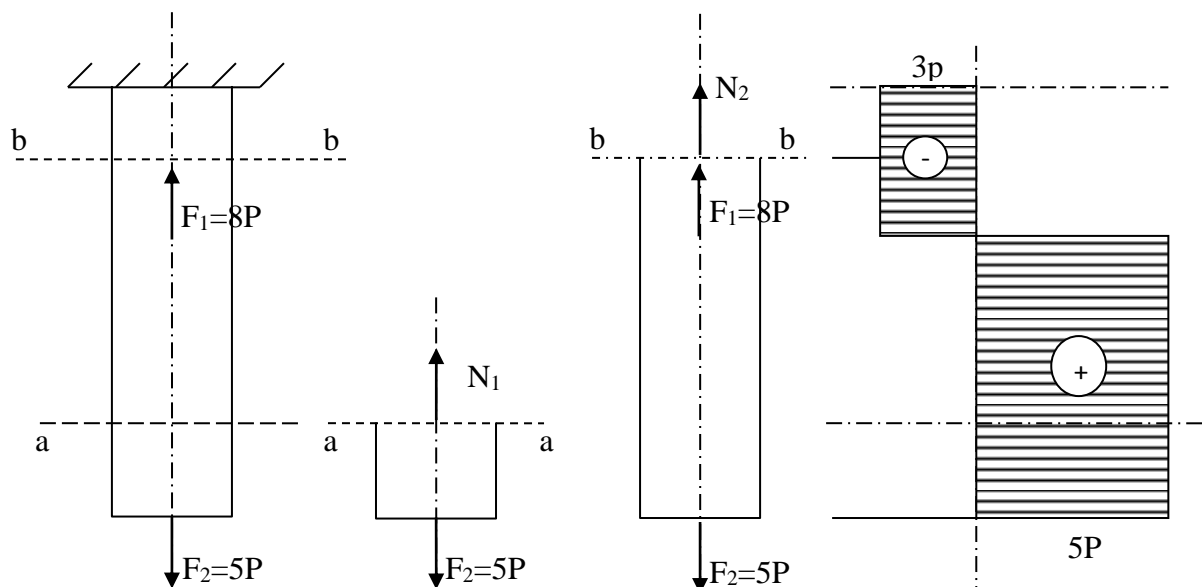


Fig.2.1

Remplaçons l'action de la partie supérieure rejetée par une force normale. Composons l'équation d'équilibre en projetant les forces sur la direction parallèle à l'axe de la barre.

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow N_1 - F_2 = 0 \Rightarrow N_1 = F_2 = 5P$$

Considérons que la force normale positive correspond à la traction.

D'une façon analogue, trouvons la force normale qui agit dans la section b-b.

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow N_2 + F_1 - F_2 = 0 \Rightarrow N_2 = F_2 - F_1$$

$$N_2 = 5P - 8P \Rightarrow N_2 = -3P$$

Le signe moins montre que la direction de la force N_2 n'est pas la traction mais la compression.

Remarque

La traction simple (ou compression) satisfait à trois conditions :

$$N_{(x)} \neq 0$$

$$T_{(y)} = 0$$

$$M = 0$$

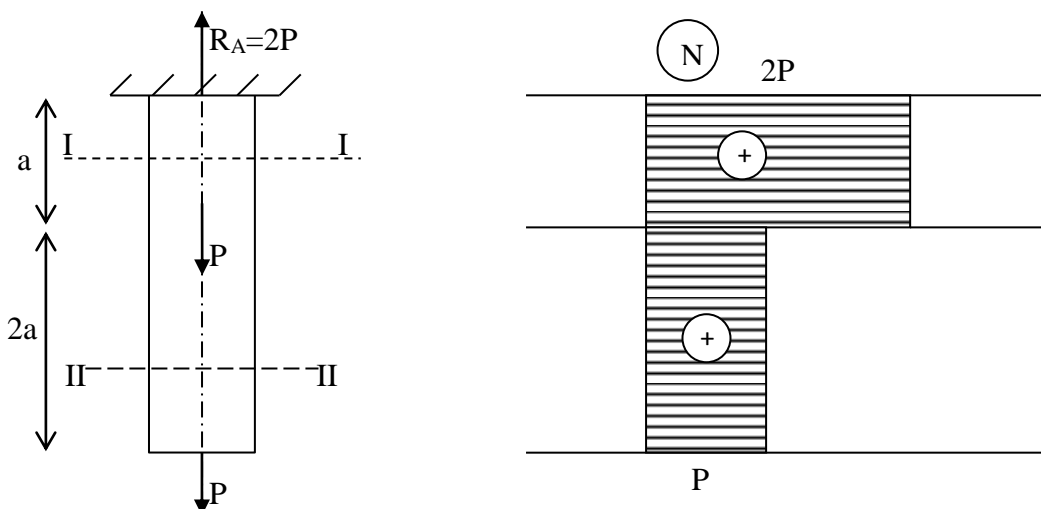
D'une manière générale la valeur de l'effort normal N_x dans une section droite quelconque d'une barre est égale à la somme algébrique de tous les efforts longitudinaux extérieurs (concentrés P et arbitrairement répartie, d'intensité q_x).

On admet que l'effort de traction est positif et l'effort de compression est négatif.

La formule générale donnant la valeur de l'effort normal dans une section droite arbitraire de la barre est de la forme :

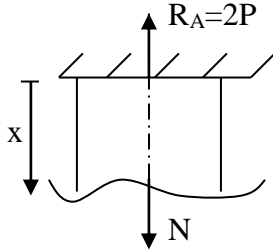
$$N_x = \Sigma P + \Sigma \int q_x dx$$

Exemple 1 :



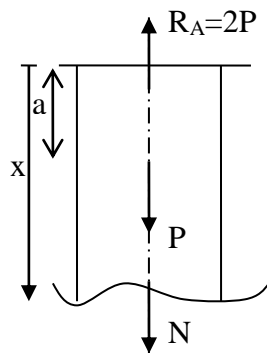
Calcul de R_A

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow -R_A + P + P = 0 \Rightarrow R_A = 2P$$

Section I-I: $0 \leq x \leq a$ 

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N - R_A = 0 \Rightarrow N = R_A$$

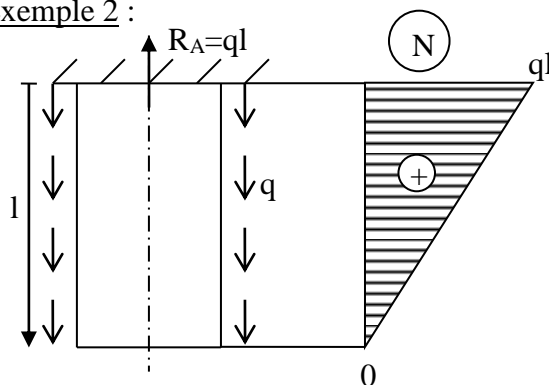
$$N = 2P$$

Section II-II $a \leq x \leq 3a$ 

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_2 - R_A + P = 0$$

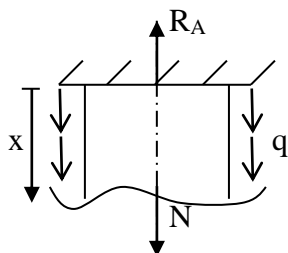
$$N_2 = 2P - P \Rightarrow N_2 = P$$

Exemple 2 :



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow -R_A + q \cdot l = 0$$

$$R_A = 2P$$

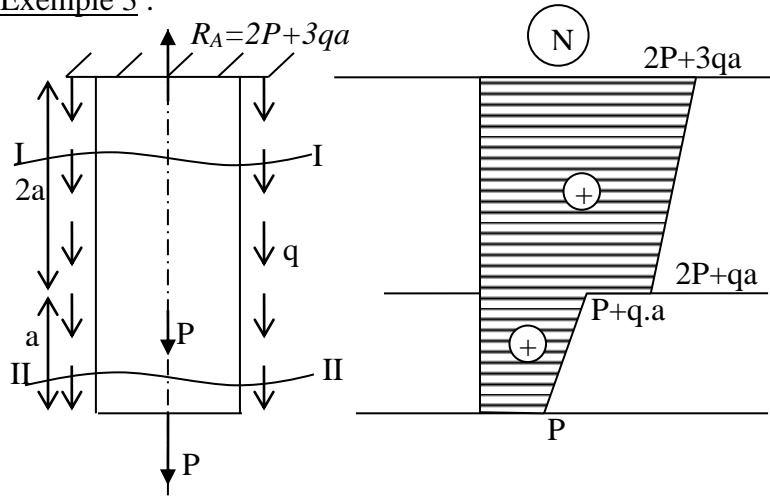
Section: $0 \leq x \leq l$ 

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N - R_A + q \cdot x = 0$$

$$N = q.l - q.x = q(l - x)$$

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow N = q.l \\ x = l \rightarrow N = 0 \end{cases}$$

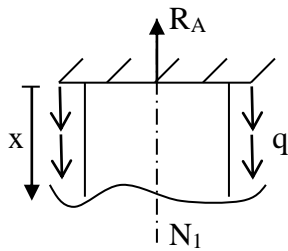
Exemple 3 :



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow -R_A + P + P + q(2a + a) = 0$$

$$R_A = P + P + 3a \cdot q$$

Section I-I: $0 \leq x \leq 2a$

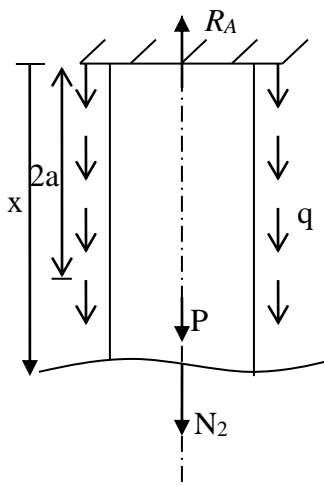


$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_1 - R_A + q \cdot x = 0$$

$$N_1 = R_A - qx = 2P + 3aq - qx$$

$$N_1 = 2P + q(3a - x) \quad \begin{cases} x=0 & N_1 = 2P + 3q \cdot a \\ x=2a & N_1 = 2P + q \cdot a \end{cases}$$

Section II-II: $2a \leq x \leq 3a$



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_2 - R_A + P + q \cdot x = 0$$

$$N_2 = R_A - P - qx = 2P + 3aq - P - qx$$

$$N_2 = P + q(3a - x) \quad \begin{cases} x=2a & N_2 = P + q \cdot a \\ x=3a & N_2 = P \end{cases}$$

2.3. Application de la loi de Hooke

On suppose que dans les sections droites des barres en traction ou en compression, les contraintes normales sont uniformément réparties. La valeur de la contrainte normale dans une section droite arbitraire est de ce fait déterminée par le rapport de l'effort longitudinal $N(x)$ à l'aire $A(x)$ de la section, soit :

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)}$$

Si N et A sont constants ; la formule devient :

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

Dans tous les cas la contrainte calculée σ_{cal} doit être inférieure à la contrainte admissible ; soit :

$$\sigma_{cal} \leq \sigma_{adm}$$

En admettant que les matériaux des barres obéissent à la loi de Hooke ($\varepsilon = \sigma/E$) où les déformations linéaires sont directement proportionnelles aux contraintes normales ; la valeur de l'allongement absolu longitudinale peut être calculée d'après la formule :

$$\Delta l = \sum \int \frac{N(x)dx}{E \cdot A(x)}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{dx} = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{N(x)}{E \cdot A(x)}$$

$$\Delta x = \frac{N(x)dx}{E \cdot A(x)}$$

$$\Delta l = \int \frac{N(x) \cdot dx}{EA(x)}$$

Où E est le module d'élasticité longitudinal du matériau appelé également module de Young.

L'intégration se fait suivant la longueur de chaque partie, et la sommation suivant les parties de la barre.

Si N et A sont constantes suivant la longueur l ; on a :

$$\Delta l = \sum \frac{N_i l_i}{E_i A_i} = \sum_{i=1}^{i=n} \Delta l_i$$

Effet du poids propre :

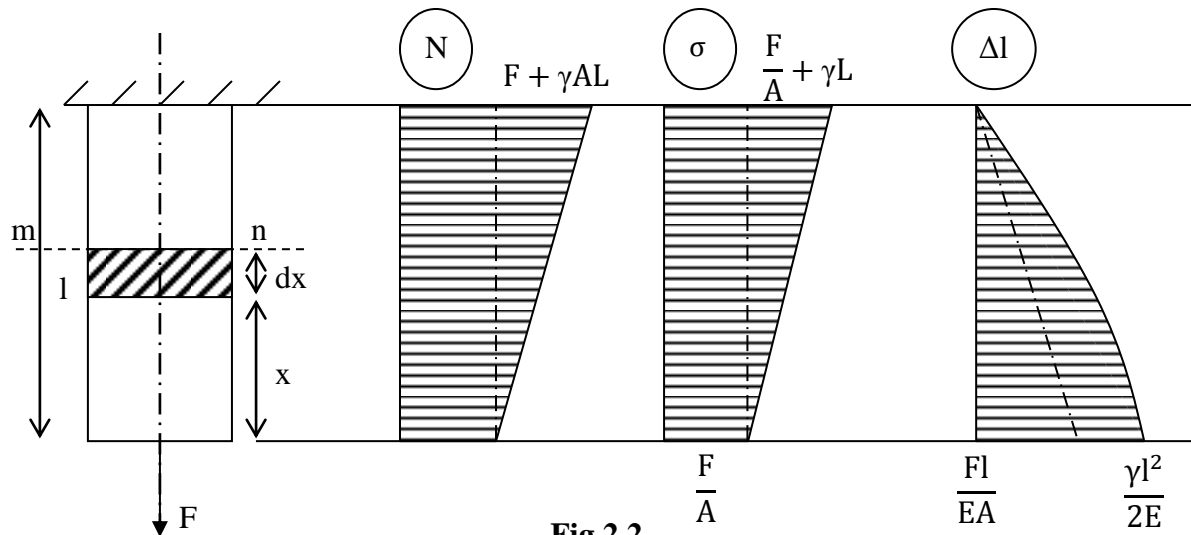


Fig.2.2

La contrainte d'une section quelconque d'une barre, de section constante, soumise à l'action d'une force extérieure de traction (Fig.2.2); compte-tenu du poids propre de la barre peut être déterminée à l'aide de l'hypothèse des sections planes d'après la formule :

$$\sigma = \frac{N(x)}{A}$$

$$N(x) = F + \gamma \cdot A \cdot x$$

Où A est l'aire de la section transversale, γ poids spécifique du matériau. Il est évident que:

$$N(x)_{max} = F + \gamma \cdot A \cdot l$$

$$\sigma_{max} = \frac{N(x)_{max}}{A} = \frac{F + \gamma \cdot A \cdot l}{A} = \frac{F}{A} + \frac{\gamma \cdot A \cdot l}{A} = \frac{F}{A} + \gamma \cdot l$$

La condition de résistance est donnée par:

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} + \gamma \cdot l \leq \sigma_{adm}$$

Ou encore:

$$A \geq \frac{F}{\sigma_{adm} - \gamma \cdot l}$$

Pour $F = 0$

$$\sigma_{max} = \gamma l \leq \sigma_{adm}$$

Le déplacement d'une section quelconque se trouvant à une distance x de l'extrémité libre de la barre sollicitée par une force extérieure F est donnée par la formule:

$$\Delta l(x) = \int_x^l \frac{N(x)}{E \cdot A} dx = \int_x^l \frac{F + \gamma \cdot A \cdot x}{EA} dx$$

$$\Delta l(x) = \left[\frac{F \cdot x + \gamma \cdot A \cdot x^2 / 2}{E \cdot A} \right]_x^l = \frac{F(l-x)}{E \cdot A} + \frac{\gamma \cdot A \cdot (l^2 - x^2)}{2EA}$$

$$\Delta l(x) = \frac{F(l-x)}{E \cdot A} + \frac{\gamma}{2E} (l^2 - x^2)$$

Le déplacement de l'extrémité inférieure de la barre est égal à l'allongement total de la barre, il est donné par la formule:

$$\begin{aligned} \Delta l(x=0) = \Delta l(0) &= \frac{F \cdot l}{E \cdot A} + \frac{\gamma l^2}{2E} \\ &= \frac{F \cdot l}{E \cdot A} + \frac{\gamma \cdot A \cdot l \cdot l}{2AE} \end{aligned}$$

2.4. Essai de traction

L'essai de traction est réalisé dans des conditions bien définies sur des éprouvettes normalisées (généralement à section droite circulaire en acier).

L'éprouvette est une barre cylindrique en acier de section droite circulaire constante dans sa partie centrale (Fig.2.3). Les extrémités de cette barre sont de diamètre supérieur.

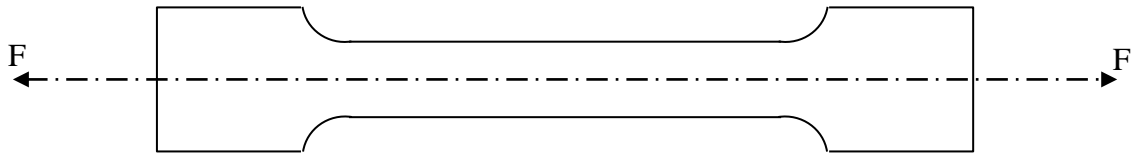


Fig.2.3

Celle-ci est soumise à deux efforts égaux et opposés appliqués en ses extrémités.

Diagramme de traction

Examinons les variations de la contrainte σ en fonction de l'allongement Δl (Fig.2.4). Le diagramme de traction de l'acier doux à l'allure suivante:

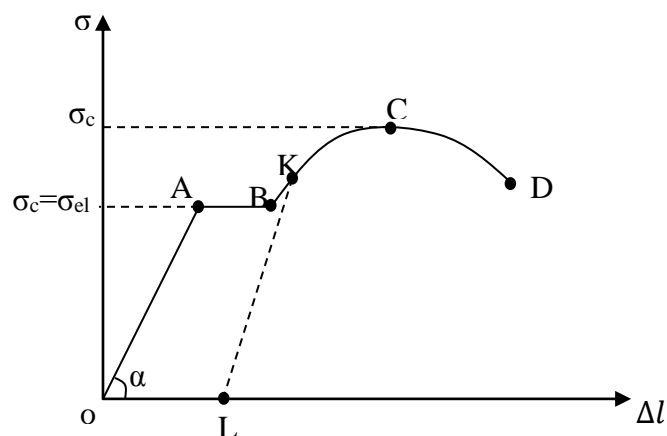


Fig.2.4

On remarque quatre zones :

1/ Zone OA :

Dans ce domaine de matériaux suit la loi de Hooke. OA, est une droite : si on décharge l'acier, la barre reprend sa longueur initiale, $\sigma = 0 \Rightarrow \Delta l = 0$.

La contrainte limite est appelée limite élastique suivante $\sigma_{el} = \sigma_A$.

2/ Zone AB :

C'est une zone d'écoulement plastique du matériau suivant un quasi-palier. L'allongement de la pièce augmente malgré que la charge reste constante.

3/ Zone BC :

Dans cette zone, on constate que la pièce reprend son élasticité, mais lorsqu'on la décharge, l'allongement ne disparaît pas, on a un allongement résiduel permanent OL .

Lorsqu'on fait croître la charge dans cette phase, des contractions transversales apparaissent en divers points de l'axe de la tige, dans une section SS' de moindre résistance un col se forme la diminution de la section s'accroît, au même temps que l'allongement augmente (Fig.2.5).

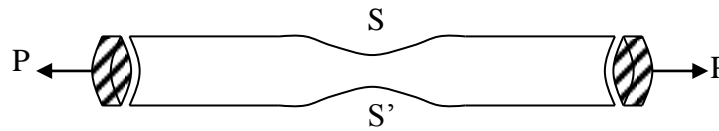


Fig.2.5

4/ Zone CD :

On constate que l'allongement augmente, pour des charges inférieures à la valeur maximale σ_c . C'est le phénomène de striction. Pour une certaine valeur de la charge plus faible que σ_c , il y a rupture de l'éprouvette.

σ_c : contrainte de rupture.

2.5. Contrainte admissible

- σ_A : contrainte limite élastique : c'est la contrainte maximum qui n'entraîne pas de déformation résiduelle ; elle est notée σ_{el} .
- σ_c : contrainte de rupture, elle est égale au quotient de la plus grande force que peut supporter la pièce par l'aire de la section droite initial ; elle est notée σ_u .

En pratique, il importe de fixer la contrainte maximale qu'une pièce pourra supporter sans risque de rupture ni de déformations inacceptables, cette contrainte maximale est appelée : contrainte admissible $\bar{\sigma}$ ou $\bar{\sigma}'$.

Elle est définie soit par rapport à la contrainte limite élastique, soit par rapport à la contrainte de rupture (on choisira celle qui est la plus facile à mesurer) et on posera :

$$\bar{\sigma} = \rho_1 \sigma_{el} \quad \text{ou} \quad \bar{\sigma} = \rho_2 \sigma_u$$

ρ_1 et ρ_2 sont des coefficients dont les valeurs dépendent de la nature des matériaux, du mode de sollicitation et des caractéristiques géométriques de la section considérée en général :

$$\frac{\sigma_{el}}{2} < \bar{\sigma} < \frac{2}{3} \sigma_{el} \quad \text{ou} \quad \frac{\sigma_u}{5} < \bar{\sigma} < \frac{\sigma_u}{3} \quad \text{pour les aciers.}$$

Il faudra donc vérifier, d'une façon générale, que dans la section la plus sollicitée, la plus grande contrainte qui se développe est inférieure à la contrainte admissible.

$\sigma_{max} < \bar{\sigma}$ En traction;

$\sigma'_{max} < \bar{\sigma}'$ En compression.

Les dimensions nécessaires de l'aire A de la section droite d'une barre en traction ou en compression sont choisies d'après la formule suivante :

$$\bar{\sigma} \geq \sigma = \frac{N_{max}}{A} \Rightarrow A \geq \frac{N_{max}}{\bar{\sigma}}$$

Donc

$$A_{min} = \frac{N_{max}}{\bar{\sigma}}$$

3- Caractéristiques géométriques de la section

3 - Caractéristiques géométriques de la section

3.1. Moment statique

On appelle moment statique S_x d'une section par rapport à un axe X quelconque, la caractéristique géométrique déterminée par l'intégrale de la forme :

$$S_x = \int_A y dA \quad (3.1)$$

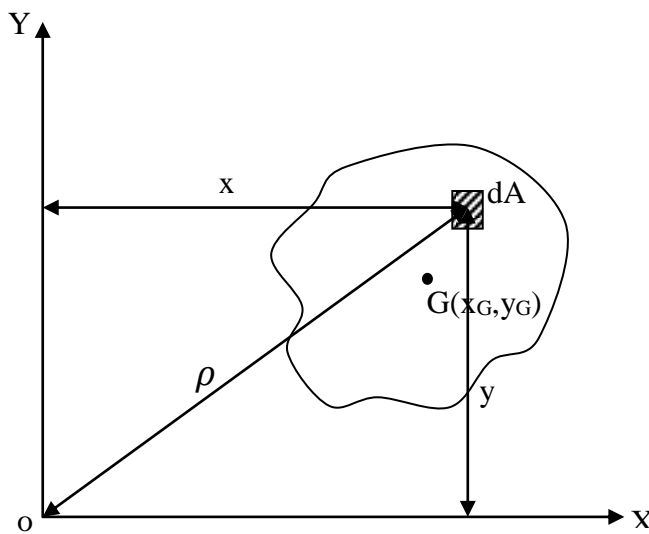


Fig.3.1

l'unité du moment statique est une unité de longueur à la puissance 3 (ordinairement cm^3 ou mm^3) le moment statique peut être positif, négatif ou nul.

Le moment statique de la section externe peut être envisagé comme la somme des moments statiques des sections par rapport à l'axe X et peut s'écrire :

$$S_x = \int_A y dA = A \cdot Y_G \quad (3.2)$$

Où A est la section totale et Y_G la distance entre le centre de gravité G de la figure et l'axe des X .

La formule (2) conduit à l'ordonnée du centre de gravité :

$$Y_G = \frac{S_x}{A} \quad (3.3)$$

D'une façon analogue, le moment statique par rapport à l'axe y est :

$$S_y = \int_A x \cdot dA = A \cdot x_G \quad (3.4)$$

D'où :

$$X_G = \frac{S_y}{A} \quad (3.5)$$

Les formules (3.2) et (3.4) entraînent que si les axes X et Y passent par le centre de gravité de la figure, le moment statique par rapport à ces axes est nul. On dit que ce sont des axes centraux.

Remarque :

Le moment statique d'une surface par rapport à un axe de symétrie est nul (puisque cet axe passe par le centre de gravité).

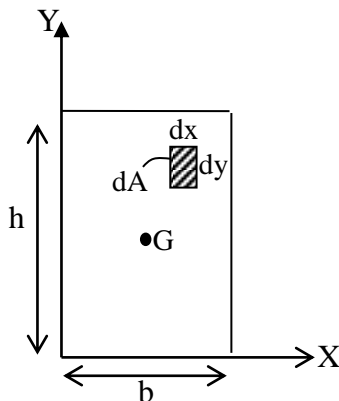
Dans certains cas, au lieu des intégrales simples de la forme (3.1) et (3.4), il est plus commode de recourir aux intégrales doubles de la forme :

$$S_x = \int_A y dA = \iint_D y dx dy \quad (a)$$

$$S_y = \int_A x dA = \iint_D x dx dy \quad (b)$$

D est le domaine d'intégration :

Exemple : Déterminer le centre de gravité de la section rectangulaire de dimension $b \times h$



$$\begin{aligned}
 S_x &= \int y dA = \iint_D y dx \cdot dy \\
 &= \int_0^b dx \int_0^h y dy = [x]_0^b \int_0^h y dy = b \int_0^h y dy = b \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^h \\
 S_x &= \frac{bh^2}{2}
 \end{aligned}$$

D'après la formule (3.3):

$$\begin{aligned}
 Y_G &= \frac{S_x}{A} \\
 Y_G &= \frac{bh^2}{2} \cdot \frac{1}{b \cdot h} \Rightarrow Y_G = \frac{h}{2} \\
 S_y &= \int_A x dA = \iint_D x dx dy = \int_0^b x dx \int_0^h dy \\
 &= \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^b \int_0^h dy = \frac{b^2}{2} [y]_0^h = \frac{b^2 h}{2}
 \end{aligned}$$

D'après la formule (3.5) :

$$\begin{aligned}
 X_G &= \frac{S_y}{A} \\
 X_G &= \frac{b^2 h}{2} \cdot \frac{1}{bh} \Rightarrow X_G = \frac{b}{2}
 \end{aligned}$$

Et puisque la section est constante on peut procéder comme suit :

$$\begin{aligned}
 X_G &= \frac{S_y}{A} = \frac{b \cdot h \cdot b/2}{b \cdot h} \Rightarrow X_G = \frac{b}{2} \\
 Y_G &= \frac{S_x}{A} = \frac{b \cdot h \cdot h/2}{b \cdot h} \Rightarrow Y_G = \frac{h}{2}
 \end{aligned}$$

3.2. Moment d'inertie

On appelle moment d'inertie axial ou équatorial la caractéristique géométrique égale numériquement à l'intégrale :

- par rapport à l'axe x :

$$I_x = \int_A y^2 dA = \iint_D y^2 dx dy$$

- par rapport à l'axe y :

$$I_y = \int_A x^2 dA = \iint_D x^2 dx dy$$

(3.6)

Où y est la distance entre l'aire élémentaire dA et l'axe X ; x , la distance entre la section élémentaire dA et l'axe Y ; D , le domaine d'intégration.

On appelle moment d'inertie polaire de la section la caractéristique géométrique déterminée par l'intégrale de la forme :

$$I_p = I_0 = \int_A \rho^2 dA = \iint_D \rho^2 dx dy \quad (3.7)$$

Où ρ est la distance entre l'aire dA et le point O appelé pôle.

Les moments d'inertie axiale et polaire sont toujours positifs.

3.3 Moment d'inertie centrifuge

C'est la caractéristique géométrique déterminée par l'intégrale de la forme :

$$I_{xy} = \int_A x \cdot y dA = \iint_D x \cdot y dx dy \quad (3.8)$$

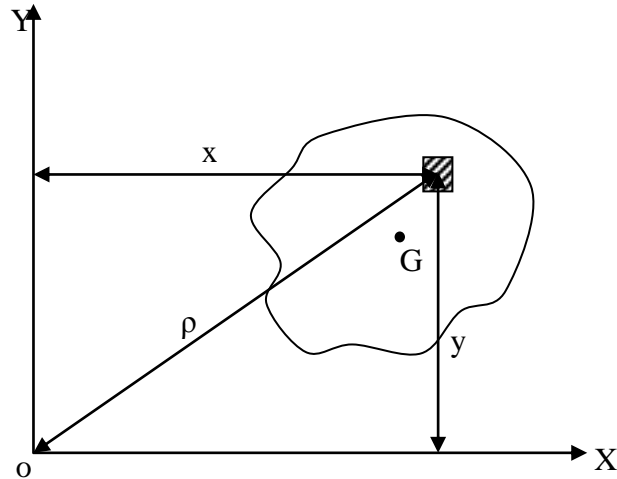
Où x et y sont les distances entre l'aire dA et les axes x et y .

Le moment d'inertie centrifuge peut être positif, négatif ou dans un cas particulier nul (quand il est calculé par rapport à un axe de symétrie).

Remarque :

L'unité du moment d'inertie en général (I_x, I_y, I_p et I_{xy}) est une unité de longueur de puissance 4 (exemple : en cm^4 ou mm^4)

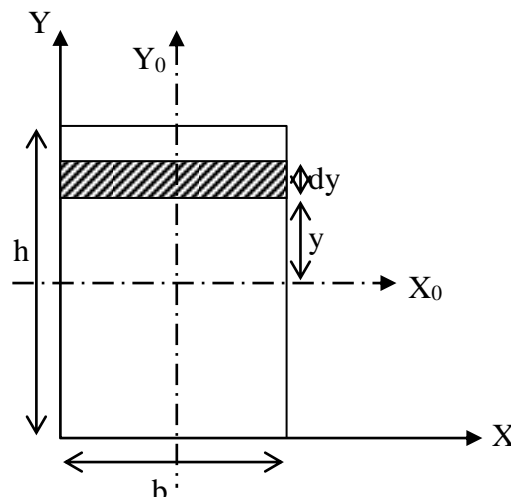
Le moment d'inertie polaire par rapport à un point quelconque est égal à la somme des moments d'inertie axiaux par rapport à deux axes perpendiculaires passant par ce point.

**Fig.3.2**

D'après la figure $\rho^2 = x^2 + y^2$. En portant cette valeur de ρ^2 dans la formule :

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \underbrace{\int_A x^2 dA}_{I_y} + \underbrace{\int_A y^2 dA}_{I_x}$$

$$I_p = I_x + I_y \quad (3.9)$$

Moment d'inertie de quelques sections simples :**1- Rectangle:**

Calculons le moment d'inertie de la section rectangulaire par rapport à l'axe X_0 passant par le centre de gravité.

$$I_{x0} = \int_A y^2 dA$$

$$dA = b \cdot dy$$

$$I_{x0} = b \left[\frac{(h/2)^3}{3} - \frac{(-h/2)^3}{3} \right] = \frac{b}{3} \left[\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8} \right]$$

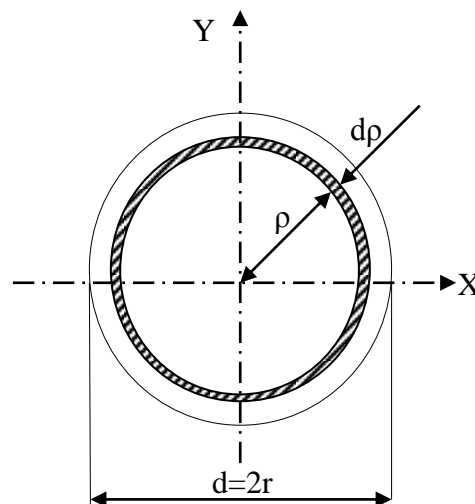
$$I_{x0} = \frac{bh^3}{12}$$

Calcul du moment d'inertie par rapport à l'axe x :

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_0^h y^2 b dy = b \int_0^h y^2 y dy = b \frac{y^3}{3} \Big|_0^h$$

$$I_x = \frac{bh^3}{3}$$

2- Cercle :



Déterminons d'abord le moment d'inertie polaire par rapport au centre du cercle.

$$I_p = \int_A \rho^2 dA$$

Adoptons pour dA l'aire d'un anneau infiniment mince d'épaisseur $d\rho$; soit $dA=2\pi \rho d\rho$, alors :

$$I_p = \int_0^r \rho^2 2\pi \rho d\rho = 2\pi \int_0^r \rho^3 d\rho$$

$$I_p = \frac{2\pi \rho^4}{4} \Big|_0^r = \frac{2\pi r^4}{4} = \frac{\pi r^4}{2}$$

Remplaçons r par $d/2$; d'où :

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4$$

Maintenant on trouve I_{x0} facilement. En effet d'après la formule (3.9), on a pour un cercle

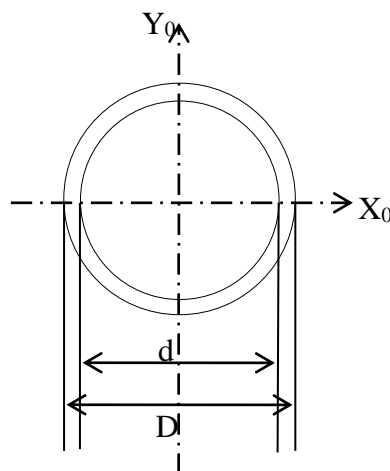
$I_p = I_{x0} + I_{y0}$ et comme $I_{x0} = I_{y0}$ par symétrie ; alors :

$$I_p = 2I_{x0} = 2I_{y0},$$

D'où :

$$I_{x0} = I_{y0} = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64} \approx 0.05 d^4$$

3- Anneau :



Dans ce cas le moment d'inertie axial est égal à la différence des moments d'inertie des cercles extérieur et intérieur.

$$I_{x0} = I_{y0} = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64}$$

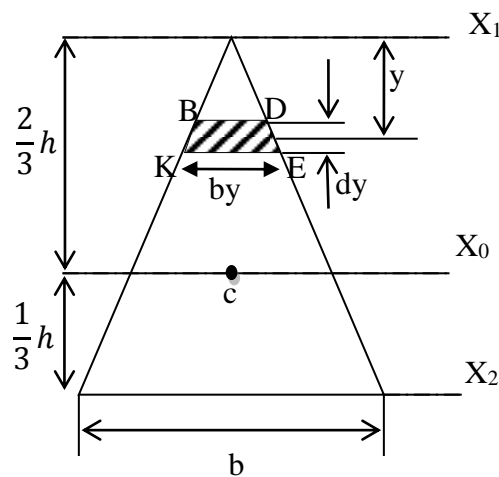
$$I_{x0} = I_{y0} = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) = 0.05 D^4 (1 - C^4)$$

$$\text{Avec : } C = d/D$$

D'une façon analogue, le moment d'inertie polaire :

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) = 0.1 D^4 (1 - C^4)$$

4- Triangle :



Déterminons le moment d'inertie par rapport à l'axe x_1 passant par le sommet du triangle.

$$I_{x1} = \int_A y^2 dA$$

Adoptons comme dA l'aire d'un trapèze infiniment mince KBDE. On peut admettre que son aire est égale à celle d'un rectangle; d'où :

$$dA = by \cdot dy \text{ ou } by \text{ est la longueur du rectangle.}$$

La similitude des triangles permet de tirer by ; d'où :

$$\frac{by}{b} = \frac{y}{h} \Rightarrow by = \frac{y \cdot b}{h}$$

Donc :

$$I_{x1} = \int_0^h y^2 \cdot by \cdot dy = \int_0^h y^2 \cdot \frac{y \cdot b}{h} dy = \int_0^h \frac{b}{h} y^3 dy$$

$$I_{x1} = \frac{b}{h} \int_0^h y^3 dy = \frac{bh^3}{4}$$

Déterminons le moment d'inertie par rapport à l'axe central passant par le centre de gravité:

$$I_{x0} = I_{x1} - A \cdot a^2 = \frac{bh^3}{4} - \frac{bh}{2} \left(\frac{2}{3}h\right)^2 = \frac{bh^3}{36}$$

Calculons le moment d'inertie par rapport à l'axe qui passe par la base:

$$I_{x2} = I_{x0} + A \cdot a^2 = \frac{bh^3}{4} - \frac{bh}{2} \left(\frac{1}{3}h\right)^2 = \frac{bh^3}{12}$$

3.4. Rayon de giration

Le moment d'inertie d'une figure par rapport à un axe quelconque peut être représenté sous forme de produit de l'aire de cette figure par le carré d'une certaine grandeur appelée rayon de giration :

$$I_x = \int_A y^2 dA = i_x^2 \cdot A$$

i_x étant le rayon d'inertie ou rayon de giration par rapport à l'axe X, d'où :

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad (c)$$

Remarque :

L'unité du rayon de giration est une unité de longueur (cm ou mm généralement).

Il en est de même pour i_y , tel que :

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad (d)$$

3.5. Module de résistance

On appelle module de résistance ou moment résistant axial le rapport entre le moment d'inertie par rapport à un axe donné et la distance de cet axe jusqu'au point le plus éloigné de la section transversale :

$$W_x = \frac{I_x}{y_{max}} \quad (e)$$

L'unité du moment résistant est une unité de longueur de puissance 3 (cm^3 ; mm^3)

Les moments résistants de différentes figures géométriques :

1-Rectangle :

$$W_x = \frac{I_x}{h/2} = \frac{bh^3/12}{h/2} = \frac{bh^2}{6}$$

$$W_y = \frac{I_y}{b/2} = \frac{b^3h/12}{b/2} = \frac{b^2h}{6}$$

2-cercle :

$$W_x = W_y = \frac{I_x}{r} = \frac{\pi r^4}{4} \cdot \frac{1}{r} = \frac{\pi r^3}{4} = \frac{\pi d^3}{32}$$

3-Anneau:

$$W_x = W_y = \frac{I_x}{D/2} = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) \frac{2}{D} = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4)$$

Tel que : $\alpha = d/D$

3.6. Variation des moments d'inertie par rapport à des axes parallèles (Théorème de HUYGENS)

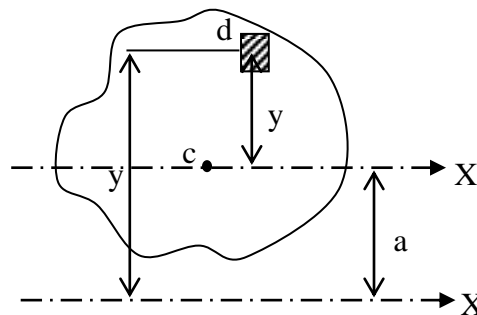


Fig.3.3

Déterminons le moment d'inertie par rapport à un axe x_1 quelque soit x_0 l'axe central passant par le centre de gravité et supposons le moment d'inertie I_{x_0} connu.

$$I_{x_1} = \int_A (a + y)^2 dA = \int_A (a^2 + 2ay + y^2) dA$$

$$I_{x_1} = \int_A a^2 dA + \int_A 2ay dA + \int_A y^2 dA$$

La 1^{ère} intégrale donne l'aire de la section, la deuxième qui est le moment statique par rapport à l'axe x_0 central est nulle. La troisième est le moment d'inertie I_{x_0} par rapport à l'axe x_0 d'où:

$$I_{x_1} = I_{x_0} + a^2 \cdot A \quad (3.10)$$

Le moment d'inertie par rapport à un axe quelconque est égal au moment d'inertie par rapport à l'axe central, parallèle à l'axe donné plus le produit de l'aire de la figure par le carré de la distance entre les axes.

3.7. Variation des moments d'inertie par rapport à la rotation des axes de coordonnées

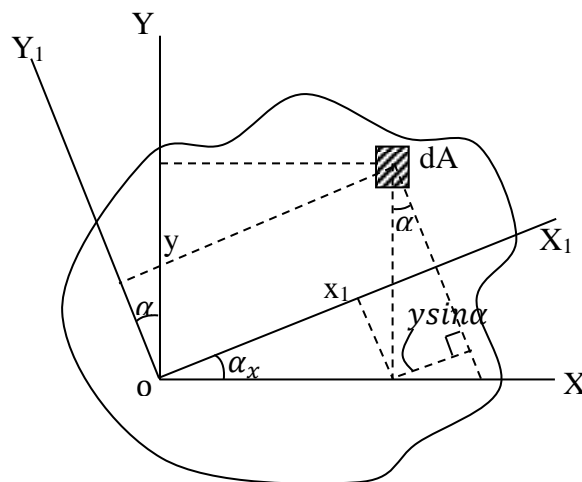


Fig.4.4

$$y_1 = y \cos \alpha - x \sin \alpha$$

$$x_1 = x \cos \alpha + y \sin \alpha$$

Déterminons le moment d'inertie par rapport aux axes X_1 et Y_1

$$\begin{aligned}
 I_{x_1} &= \int_A y_1^2 dA = \int_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dA \\
 &= \int_A y^2 \cos^2 \alpha dA - 2 \int_A xy \sin \alpha \cdot \cos \alpha dA + \int_A x^2 \sin^2 \alpha dA
 \end{aligned}$$

$$I_{x_1} = I_x \cdot \cos^2 \alpha + I_y \cdot \sin^2 \alpha - 2I_{xy} \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad (3.11)$$

De même pour I_{y_1}

$$\begin{aligned}
 I_{y_1} &= \int_A x_1^2 dA = \int_A (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 dA \\
 &= \int_A x^2 \cos^2 \alpha dA + \int_A y^2 \sin^2 \alpha dA + 2 \int_A xy \cos \alpha \cdot \sin \alpha dA.
 \end{aligned}$$

$$I_{y_1} = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + 2I_{xy} \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad (3.12)$$

De même également pour $I_{x_1 y_1}$:

$$\begin{aligned}
 I_{x_1 y_1} &= \int_A xy dA = \int_A (x \cos \alpha + y \sin \alpha)(y \cos \alpha - x \sin \alpha) dA \\
 &= \int_A xy \cos^2 \alpha dA - \int_A x^2 \sin \alpha \cos \alpha dA + \int_A y^2 \sin \alpha \cos \alpha dA \\
 &\quad - \int_A xy \sin^2 \alpha dA \\
 &= I_x \sin \alpha \cos \alpha - I_y \sin \alpha \cos \alpha + I_{xy}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)
 \end{aligned}$$

$$I_{x_1 y_1} = I_x \frac{\sin 2\alpha}{2} - I_y \frac{\sin 2\alpha}{2} + I_{xy} \cos 2\alpha \quad (3.13)$$

En additionnant (3.11) et (3.12), on obtient :

$$I_{x_1} + I_{y_1} = I_x(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + I_y(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$$

$$I_{x_1} + I_{y_1} = I_x + I_y = I_p \quad (3.14)$$

En retranchant (3.11) de (3.12), on aura :

$$I_{x_1} - I_{y_1} = I_x \cos^2 \alpha - I_x \sin^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_y \cos^2 \alpha - 4I_{xy} \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$I_{x1} - I_{y1} = I_x(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + I_y(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) - 4I_{xy} \sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$I_{x1} - I_{y1} = I_x \cos 2\alpha - I_y \cos 2\alpha - 4I_{xy} \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

$$I_{x1} - I_{y1} = (I_x - I_y) \cos 2\alpha - 2I_{xy} \sin 2\alpha \quad (3.15)$$

3.8. Axes d'inertie et moments d'inertie principaux

Lorsque l'angle α change, I_{x1} , I_{y1} et I_{xy} changent également. Déterminons l'angle α pour lequel les valeurs de I_{x1} , I_{y1} sont maximums. A cet effet, déterminons la dérivée première de I_{x1} ou I_{y1} par rapport à α et annulons là :

$$\frac{dI_{x1}}{d\alpha} = -2I_x \cos\alpha \cdot \sin\alpha + 2I_y \sin\alpha \cdot \cos\alpha - 2I_{xy} \cos 2\alpha = 0$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} \quad (3.16)$$

Cette formule détermine la position de deux axes dont le moment d'inertie est maximal pour l'un et minimal pour l'autre. Ces axes sont dits principaux. Les moments d'inertie par rapport aux axes principaux sont dits principaux.

En reportant la valeur de α tirée de la formule (3.16) et en utilisant les formules de la trigonométrie, on obtient :

$$I_{(max,min)} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} \quad (3.17)$$

En analysant la dérivée seconde $d^2I_x/d\alpha^2$, on peut établir que dans le cas considéré ($I_x > I_y$) le moment d'inertie est maximal (I_{max}) par rapport à l'axe principal tourné d'un angle α par rapport à l'axe X, alors qu'il est minimum par rapport à l'axe perpendiculaire.

En annulant le produit d'inertie I_{x1y1} d'après la formule (3.13) ; on obtient :

$$I_x \frac{\sin 2\alpha}{2} - \frac{I_y \sin 2\alpha}{2} + I_{xy} \cos 2\alpha = 0$$

$$\frac{1}{2} (I_x - I_y) \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha = 0$$

D'où :

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}$$

Cela montre que le moment d'inertie $I_{xy} = 0$ (est nul).

On appelle donc axes principaux, les axes ayant les propriétés suivantes :

1- par rapport à ces axes, le produit d'inertie est nul.

2- par rapport à ces axes, les moments d'inertie ont des valeurs extrémales (maximale pour l'un et minimale pour l'autre).

Les axes principaux qui passent par le centre de gravité de la section sont dits axes centraux principaux.

Si on suppose que pour une section quelconque les axes X et Y suivent les axes centraux principaux et, de plus $I_x = I_y$, les formules (3.11) et (3.12) entraînent que $I_x = I_y = I_{x_1} = I_{y_1}$ et la formule (3.13) montre que pour une telle figure $I_{x_1 y_1} = 0$, c'est-à-dire que les axes X_1 et Y_1 quelconques sont les axes d'inertie centraux principaux.

4- Flexion simple

4- La flexion simple

4.1. Généralités

Il est fréquent que les barres subissent l'action d'une charge transversale ou des couples extérieurs. Dans ces conditions, les sections droites de la barre sont sollicitées par des moments fléchissants, c'est-à-dire des moments intérieurs dont le plan d'action est perpendiculaire au plan de la section droite. L'action d'une charge provoque l'incurvation de l'axe de la barre (Fig.4.1).

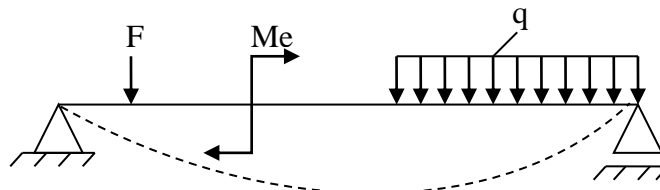


Fig.4.1

Cette forme de sollicitation s'appelle flexion, et les barres qui travaillent surtout à la flexion s'appellent "poutres".

La flexion est dite pure si le moment fléchissant est l'unique effort intérieur que supporte la section droite.

Il est plus fréquent, pourtant, que les sections droites des barres soient soumises en plus à des efforts tranchants. Une telle flexion est dite "simple".

L'étude de la flexion débute pour la flexion pure, ensuite on envisage le cas le plus général de la flexion simple.

Les appuis des poutres envisagées comme des systèmes plans peuvent être de trois types :

1. Appui simple ou glissant :

Un tel appui (Fig.4.2.a) n'interdit pas la rotation de l'extrémité de la poutre et son déplacement le long du plan de roulement. Il peut être le siège d'une seule réaction perpendiculaire au plan de roulement passant par le centre du rouleau. Un tel appui est schématisé sur la Fig.4.2.b.

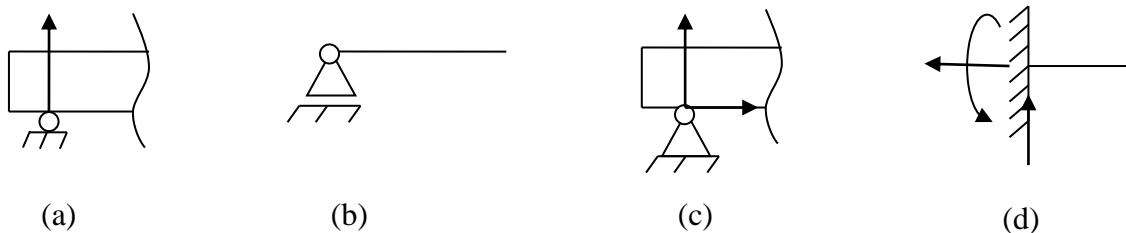


Fig.4.2

Les appuis simples ou glissants rendent possible le changement sans aléas de la longueur de la poutre lors de la variation de la température et éliminent par là les contraintes thermiques éventuelles.

2. Appui à rotule ou articulation :

Cet appui admet la rotation de l'extrémité de la poutre, mais interdit la translation quelle que soit sa direction (Fig.4.2.c). La direction dont il est le siège, peut être décomposée en deux composantes : horizontale et verticale.

3. Appui à encastrement :

Cette fixation interdit le déplacement de la section d'appui aussi bien linéaire qu'angulaire (Fig.4.2.d). Dans un cas général, un tel appui peut être soumis à une réaction décomposée ordinairement en deux composantes (verticale et horizontale) et un couple de réaction (ou moment).

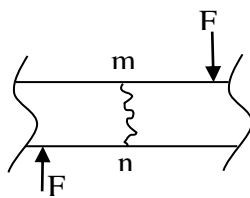
Une poutre à une seule extrémité encastree et l'autre libre s'appelle console.

Si pour le calcul des réactions d'appui les équations de la statique suffisent, on dit que les poutres sont isostatiques. Mais si le nombre de réactions d'appui est plus grand que le nombre d'équations de la statique possible pour le problème considéré, les poutres sont dites hyperstatiques. Pour de telles poutres, le calcul des réactions se fait en composant des équations complémentaires que sont les équations des déplacements.

4.2. Règles de signe des moments fléchissants et des efforts tranchants

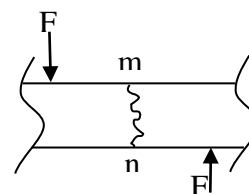
L'effort tranchant dans la section m-n d'une poutre (Fig.4.3.a) est considéré comme positif, si la résultante des forces extérieures à gauche de la section est dirigée de bas en haut, et à droite de la section, de haut en bas, et négative dans le cas contraire (Fig.4.3.b).

a) $Q_{mn} > 0$



(a)

b) $Q_{mn} < 0$



(b)

Fig.4.3

On admet que dans la section d'une poutre, par exemple dans m-n (fig.4.4.a), le moment fléchissant est positif si la résultante de tous les moments des forces extérieures à gauche de la section est dirigée dans le sens horaire, et négative si elle est dirigée dans le sens antihoraire (fig.4.4.b).

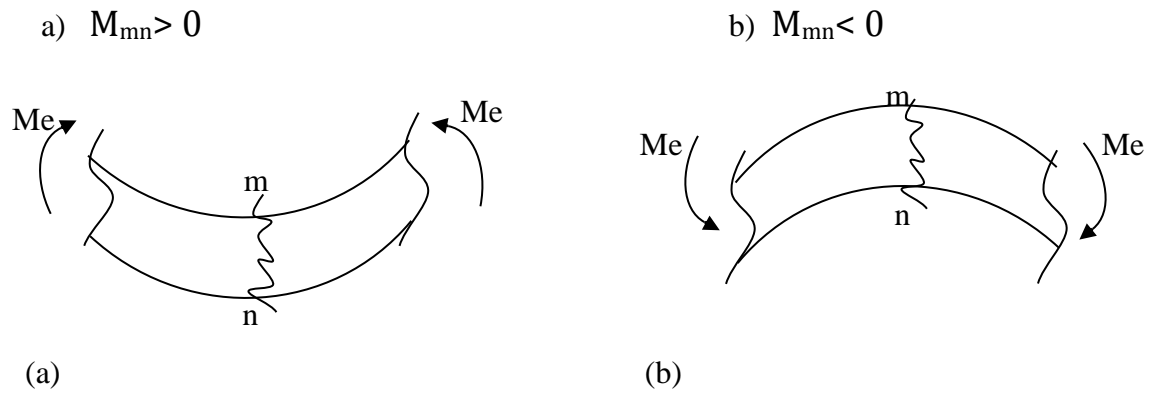


Fig.4.4

On en tire une autre règle des signes du moment fléchissant, plus commode à retenir. Le moment fléchissant est considéré comme positif si dans la section envisagée, la courbure de la poutre est orientée en bas. Dans ce qui suit, on démontre que les fibres de la partie concave de la poutre subissent la compression, et ceux de la partie convexe, la traction. De la sorte, en portant par convention les ordonnées positives du diagramme de M en haut à partir de l'axe, on obtient que le diagramme est dressé du côté des fibres comprimées de la poutre.

4.3. Détermination des efforts intérieurs en flexion

La flexion simple plane engendre dans les sections droites d'une poutre deux efforts intérieurs (deux facteurs de force intérieurs), le moment fléchissant M et l'effort tranchant Q .

Pour les déterminer, appliquons la méthode des sections. A l'endroit qui nous intéresse, pratiquons en pensée la coupe à la distance x de l'appui gauche (Fig.4.5). Rejetons une partie de la poutre, par exemple celle de droite, et considérons l'équilibre de la partie gauche.

Remplaçons l'interaction des parties de la poutre par les efforts intérieurs : le moment fléchissant M et l'effort tranchant Q (Fig.4.5.b).

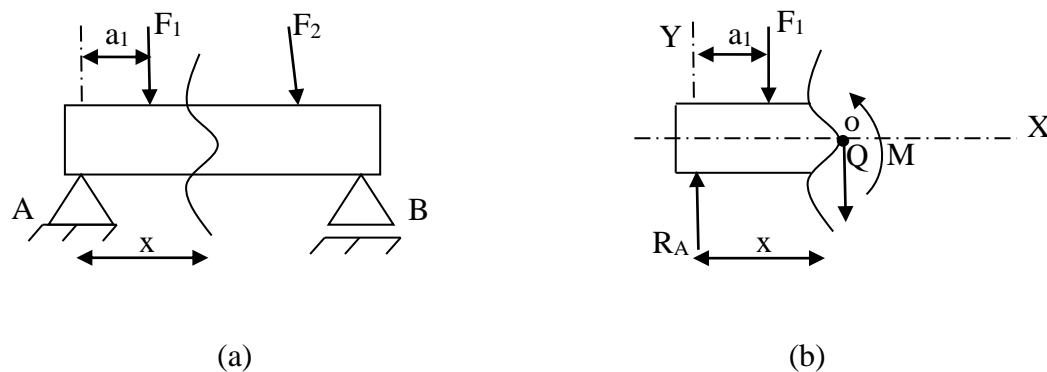


Fig. 4.5

Pour calculer M et Q , utilisons deux équations d'équilibre :

$$1. \Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_A - F_1 - Q = 0 \Rightarrow Q = -F_1 + R_A ;$$

$$Q = \Sigma (f_i)_y.$$

$$2. \Sigma M_0 = 0 \Rightarrow R_A \cdot x - F_1(x - a_1) - M = 0;$$

$$M = R_A \cdot x - F_1(x - a_1);$$

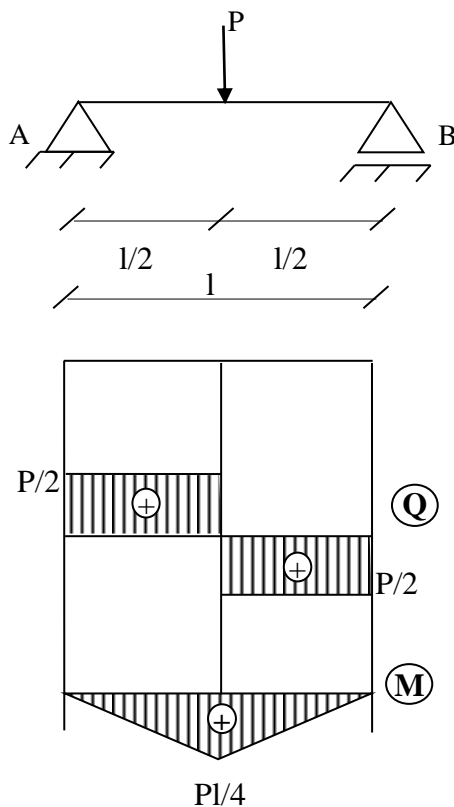
$$M = \Sigma m_0(F_i);$$

ainsi dans la section droite d'une poutre :

1°/ l'effort tranchant Q est numériquement égal à la somme algébrique des projections sur le plan de la section de toutes les forces extérieures appliquées d'un côté de la section ;

2°/ le moment fléchissant est numériquement égal à la somme algébrique des moments (calculés par rapport au centre de gravité de la section) des forces extérieures appliquées d'un côté de la section considérée.

Exemple 1 :



a- Calcul des réactions :

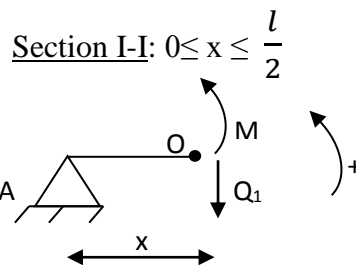
$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V_A + V_B = P$$

$$\Sigma M/A = 0 \Rightarrow -P \cdot \frac{l}{2} + V_B \cdot l = 0$$

$$V_B = \frac{P}{2} \text{ et } V_A = \frac{P}{2}$$

b- Calcul des efforts intérieurs :

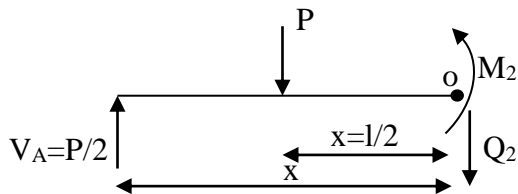


$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow Q_1 = V_A = \frac{P}{2}$$

$$\Sigma M/o = 0 \Rightarrow -V_A \cdot x + M_1 = 0$$

$$M_1 = \frac{P}{2} x \begin{cases} x=0 & M_1=0 \\ x=l/2 & M_1=Pl/4 \end{cases}$$

Section II-II: $\frac{l}{2} \leq x \leq l$



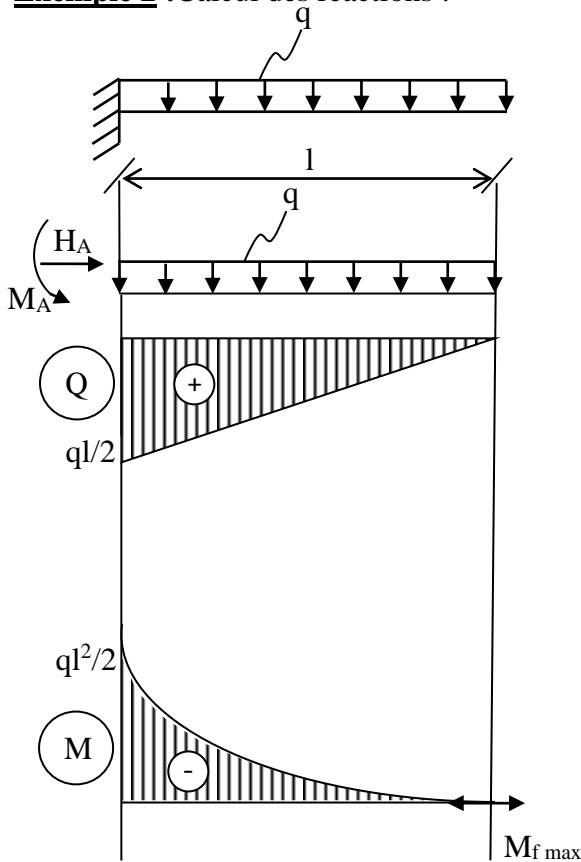
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V_A - P - Q_2 = 0$$

$$Q_2 = V_A - P = \frac{P}{2} - P \Rightarrow Q_2 = -\frac{P}{2}$$

$$\Sigma M/o = 0 \Rightarrow -V_A \cdot x + P(x - l/2) + M_2 = 0$$

$$M_2 = +\frac{P}{2} x - P(x - \frac{l}{2}) \begin{cases} x=l/2 & M_2=Pl \\ x=l & M_2=0 \end{cases}$$

Exemple 2 : Calcul des réactions :



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

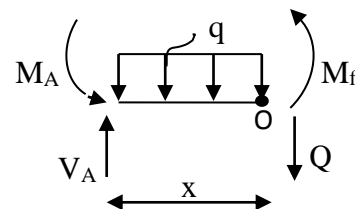
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V_A - q \cdot l = 0$$

$$V_A = q \cdot l$$

$$\Sigma M/A = 0 \Rightarrow M_A - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0$$

$$M_A = \frac{ql^2}{2}$$

1- Section: $0 \leq x \leq l$



$$\Sigma F = 0 \Rightarrow V_A - q \cdot x - Q = 0$$

$$Q = -q \cdot x + q \cdot l$$

$$= -q(x - l) \begin{cases} x=0 & Q = ql \\ x=l & Q = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Sigma M/o = 0 &\Rightarrow M_A - V_A \cdot x + q \cdot x \cdot \frac{l}{2} + M_f = 0 \\ M_f &= \frac{-qx^2}{2} + q \cdot l \cdot x - \frac{ql^2}{2} \\ &= -q \left(\frac{x^2}{2} - l \cdot x + \frac{l^2}{2} \right) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} x=0 \quad M_f = -\frac{ql^2}{2} \\ x=l \quad M_f = 0 \end{array} \right.$$

Recherche de l'extremum de la fonction du second degré en x :

$$M_f = -\frac{qx^2}{2} + q \cdot l \cdot x - \frac{ql^2}{2}.$$

$$M_{f'} = 0 \Rightarrow -qx + ql = 0 \Rightarrow -q(x - l) = 0 \Rightarrow x - l = 0 \Rightarrow x = l$$

On a donc : M_{min} pour $x = l$.

4.4. Relation entre le moment fléchissant, l'effort tranchant et l'intensité de la charge répartie

Considérons une poutre soumise à une charge arbitraire (Fig.4.6). Déterminons l'effort tranchant dans la section à la distance x de l'appui gauche. En projetant sur la verticale les forces à gauche de la section, on obtient :

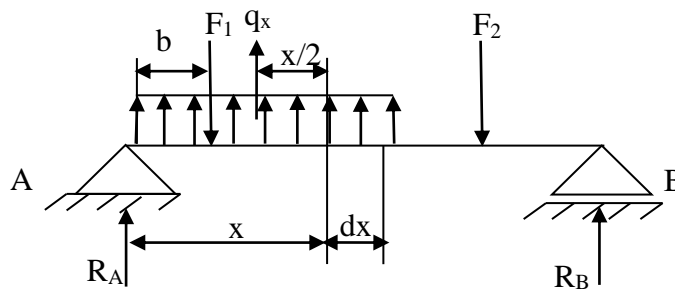


Fig.4.6

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow Q = R_A - F_1 + q \times x \quad (a)$$

D'une façon analogue, on calcule l'effort tranchant dans la section connexe se trouvant à la distance $x+dx$ de l'appui de gauche :

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow Q + dQ = R_A - F_1 + q(x + dx) \quad (b)$$

En retranchant (a) de (b), on trouve :

$$dQ = q \times dx \quad \text{d'où} \quad q = \frac{dQ}{dx} \quad (4.1)$$

c'est-à-dire que la dérivée de l'effort tranchant par rapport à l'abscisse de la section de la poutre est égale à l'intensité de la distribution de la charge répartie.

Calculons maintenant le moment fléchissant dans la section d'abscisse x , en prenant la somme des moments des forces appliquées à gauche de la section. A cet effet, la charge répartie sur le tronçon de longueur x est remplacée par sa résultante égale à $q \cdot x$ et est appliquée au milieu du tronçon à la distance $x/2$ de la section :

$$M = R_A \cdot x - F_1(x - b) + qx \cdot \left(\frac{x}{2}\right) \quad (c)$$

D'une façon analogue, on calcule le moment fléchissant subi par la section connexe à la distance $x+dx$ de l'appui gauche :

$$M + dM = R_A(x + dx) - F_1(x + dx - b) + q(x + dx) \times \frac{2}{2} \quad (d)$$

En retranchant (c) de (d), on obtient l'accroissement du moment fléchissant :

$$dM = R_A \times dx - F_1 \times dx + qx dx = dx(R_A + F_1 + qx)$$

L'expression entre parenthèses est l'effort tranchant Q . Donc :

$$dM = Q \cdot dx ; \text{ d'où} : Q = \frac{dM}{dx} \quad (4.2)$$

c'est-à-dire que la dérivée du moment fléchissant par rapport à l'abscisse de la section est égale à l'effort tranchant (théorème de Jouravski).

Après le calcul de la dérivée des deux membres de l'égalité (4.2), il vient :

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2} \quad (4.3)$$

c'est-à-dire qu'au vu de (4.1), la dérivée seconde du moment fléchissant par rapport à l'abscisse de la section de la poutre est égale à l'intensité de la charge répartie.

4.5. Détermination des contraintes normales

Dans le cas de la flexion simple pure les sections droites de la poutre ne sont sollicitées que par des moments fléchissants passant par l'un des axes principaux de la section.

Le moment fléchissant est le moment résultant des forces normales intérieures réparties suivant la section.

Pour établir la loi de distribution et la valeur des forces intérieures subies par les sections droites, les équations de la statique ne suffisent pas. Il faut utiliser les conditions de déformation de la poutre.

Si à la surface d'une poutre soumise à la flexion pure on trace un réseau, on découvre ce qui suit (Fig.4.7).

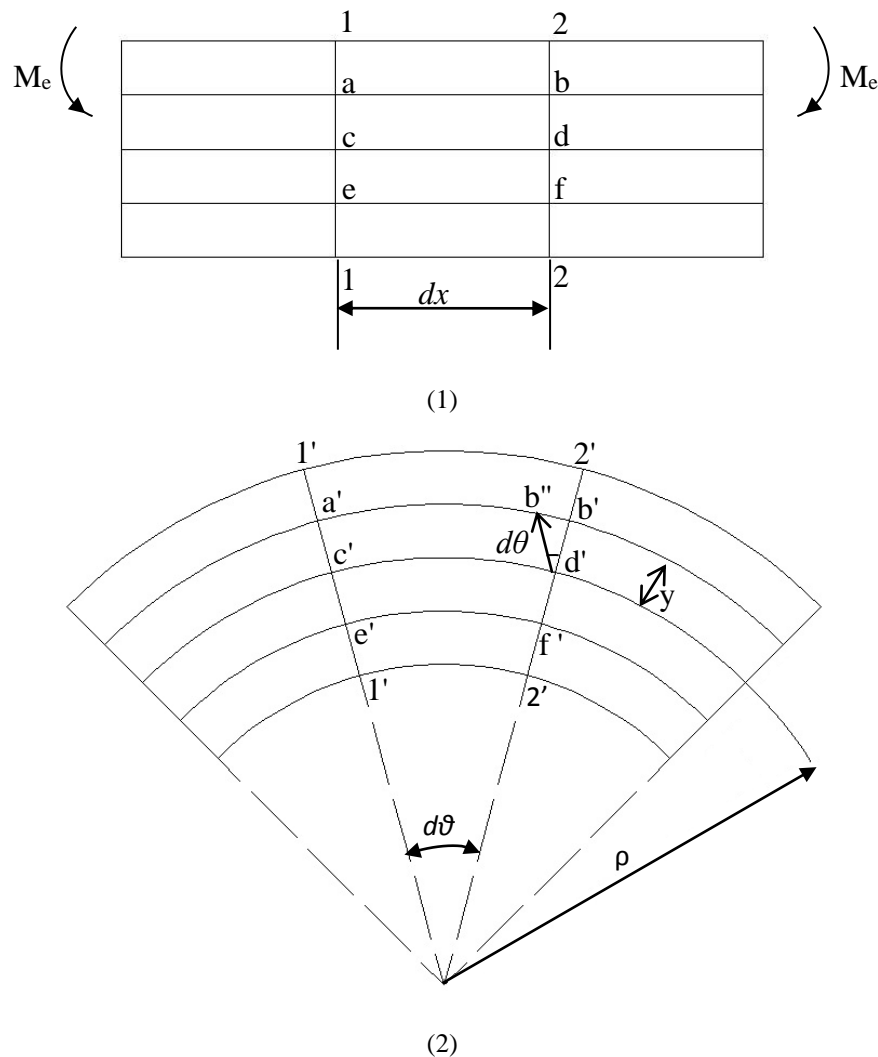


Fig.4.7

1°/ Après déformation, les lignes 1-1 et 2-2 tournent d'un certain angle $d\theta$ en restant droites. On peut poser que les sections droites de la poutre, planes avant la déformation, restent planes après la déformation (hypothèse des sections planes). Le réseau rectangulaire gardant sa forme après la déformation, on peut admettre que dans la section droite les contraintes tangentielles sont nulles.

2°/ La fibre ab du côté convexe de la poutre s'allonge, ce qui témoigne du fait que cette fibre subit la traction, alors que la fibre ef se raccourcit, ce qui témoigne de sa compression. Quant à

la longueur de la fibre cd, elle ne change pas, ce qui indique que cette fibre ne subit ni la traction, ni la compression.

La couche de la poutre (au niveau de la fibre cd) qui ne subit pas en flexion ni la traction ni la compression est dite neutre. La ligne d'intersection de la couche neutre avec le plan de la section droite de la poutre (Fig.4.7.2) s'appelle "axe neutre".

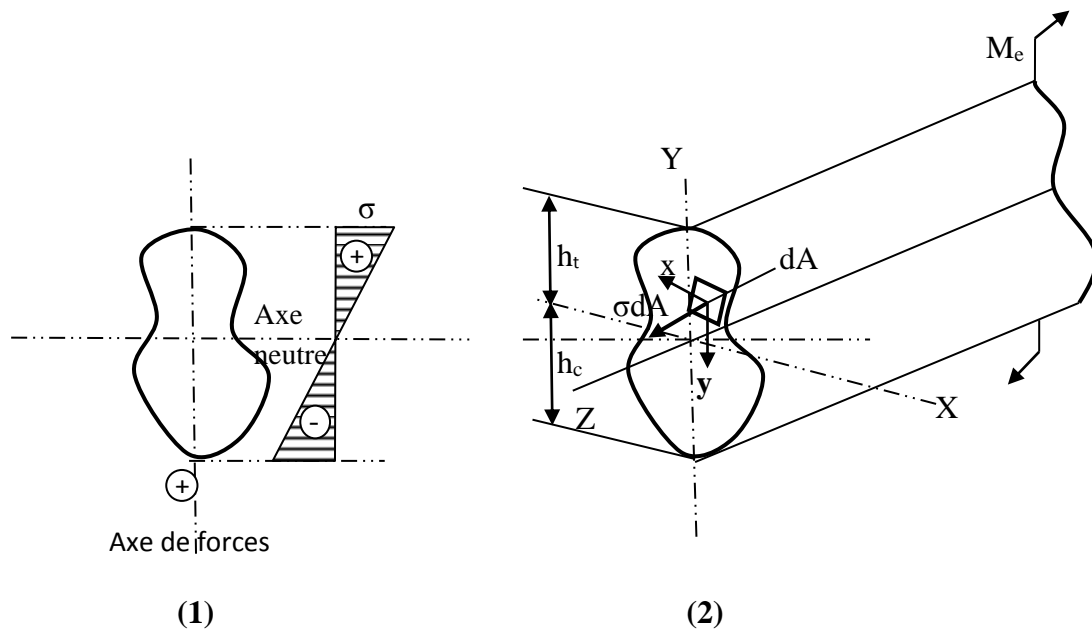


Fig.4.8

Le segment b'b'' présente l'allongement total de la fibre ab (Fig.4.7) dont la longueur avant déformation était égale à la longueur de la fibre ed appartenant à l'axe neutre. L'allongement relatif de cette fibre est :

$$\varepsilon = \frac{b'b''}{ab} = \frac{b'b''}{cd} = \frac{yd\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho} \quad (4.4)$$

Où ρ est le rayon de courbure de la couche neutre ; y , la distance de l'axe neutre à la fibre considérée.

D'après la loi de Hooke, on a pour état de contrainte uni-axial :

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{Ey}{\rho} \quad (4.5)$$

Les contraintes sont donc maximales aux bords supérieur et inférieur de la section. Elles sont positives à la traction.

Le diagramme de σ correspondant est représenté par (Fig.4.8.1). Les contraintes positives sont celles à la traction.

Remarque :

- En flexion, l'axe neutre passe par le centre de gravité de la section.
- La ligne de force et l'axe neutre sont réciproquement perpendiculaires.

Annulons la somme des moments des forces par rapport à l'axe x dans la Fig.4.8 :

$$\Sigma M_x = 0 \Rightarrow -M_e + \int y \sigma dA = 0$$

$$M_e = \int y \sigma dA$$

Selon la formule (5.5) où :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot y/\rho$$

$$M_e = \int y \frac{E \cdot y}{\rho} dA$$

$$M_e = \frac{E}{\rho} \int y^2 dA$$

L'intégrale $I_x = \int y^2 dA$ est le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe neutre X.

Dans l'équation d'équilibre $\Sigma M_x = 0$, figure la somme algébrique des moments de toutes les forces égale au moment fléchissant M subi par la section droite. D'où :

$$M = \frac{EI_x}{\rho} \quad (4.6)$$

Soit :

$$\frac{M}{EI_x} = \frac{1}{\rho} \quad (4.7)$$

La quantité $k = \frac{1}{\rho}$ est la courbure de la couche neutre de la poutre. Il s'en suit que l'expression (4.7) détermine la courbure de la poutre.

En flexion, la courbure de l'axe d'une poutre est proportionnelle au moment fléchissant et inversement proportionnelle à la grandeur EI_x appelée rigidité de la poutre.

En portant la valeur obtenue de $1/\rho$ dans (4.5), on aboutit à la formule de grand intérêt :

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I_x} \quad (4.8)$$

qui permet, d'après le moment fléchissant M et le moment d'inertie de la section, de calculer la contrainte normale en tout point de la section droite.

La formule (4.8) est déduite pour la flexion pure.

La flexion simple engendre dans les sections droites des contraintes normales et tangentielles.

Des études plus pensées montrent que pour la flexion simple, les résultats de la formule (4.8) sont satisfaisants.

4.6. Conditions de la résistance par rapport aux contraintes normales

Pour assurer la résistance d'une poutre fléchie dans la section dangereuse (section où M est maximal) ; il faut que les contraintes de traction et de compression maximales ne dépassent pas les contraintes admissibles correspondantes.

Introduisons la notation (4.8) ; h_t pour la plus grande distance entre l'axe neutre et la fibre tendue ; h_c , la distance entre l'axe neutre et la fibre la plus comprimée.

Alors en flexion, la contrainte de traction maximale vaut:

$$\sigma_t^{max} = \frac{Mh_t}{I_x} \quad (4.9)$$

La contrainte de compression maximale (en valeur absolue) vaut:

$$\sigma_c^{max} = \frac{Mh_c}{I_x} \quad (4.10)$$

Soit en traction :

$$\sigma_t^{max} = \frac{Mh_t}{I_x} = \frac{M}{W_{xt}} \quad (4.11)$$

Soit en compression :

$$\sigma_c^{max} = \frac{Mh_c}{I_x} = \frac{M}{W_{xc}} \leq \sigma_{adm}^c \quad (4.11.a)$$

Où W_{xt} sont W_{xc} sont les couples de réaction des fibres tendues et comprimées (ou modules de résistance). Si la section de la poutre est symétrique ; soit $ht=hc$, alors les 2 formules (4.9) et (4.10) se ramènent à une seule :

$$\sigma = \frac{M}{I_x/h/2} \quad (4.12)$$

En désignant $W_x = 2I_x/h$, on obtient pour les mêmes contraintes à la traction et à la compression σ_{adm} la condition de résistance suivante :

$$\sigma = \frac{M}{W_x} \leq \sigma_{adm} \quad (4.13)$$

W_x s'appelle couple de réaction axial ou couple de réaction à la flexion. C'est une caractéristique géométrique de la section droite d'une poutre, qui détermine sa résistance à la flexion.

Dans le cas des sections les plus simples, les valeurs de W_x sont :

- Pour un rectangle :

$$W_x = \frac{2I_x}{h} = \frac{bh^3}{\frac{12h}{2}} = \frac{bh^2}{6}$$

- Pour un cercle :

$$W_x = \frac{2I_x}{d} = \frac{\pi d^4}{64(\frac{d}{2})} = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3$$

- Pour un anneau :

$$W_x = \frac{2I_x}{D} = \frac{\pi D^4(1-c^4)}{\frac{64D}{2}} = \frac{\pi d^3(1-c^4)}{32} \approx 0,1D^3(1-c^4)$$

D'après la formule (5.13) :

$$W_x \geq \frac{M}{\sigma_{adm}} \quad (4.14)$$

Le moment fléchissant admissible :

$$M_{adm} \leq W_x \times \sigma_{adm} \quad (4.15)$$

4.7. Calcul des contraintes tangentielles

Dans le cas général de la flexion (flexion simple), les sections droites d'une poutre subissent des moments fléchissants et des efforts tranchants. La présence du moment fléchissant est

associée à l'apparition des contraintes normales qui peuvent être déterminées par la formule (4.8).

La présence de l'effort tranchant est due à l'apparition des contraintes tangentielles dans la section droite.

En général, la relation permettant de calculer la contrainte tangentielle est donnée par la formule suivante (S'_x , étant le moment statique de la section) :

$$\tau = \frac{QS'_x}{I_x \cdot b} \quad (4.16)$$

Cette relation a été établie pour la première fois par D. Jouravski et porte son nom.

Etudions la loi de distribution des contraintes tangentielles dans une poutre de section rectangulaire (Fig.4.9).

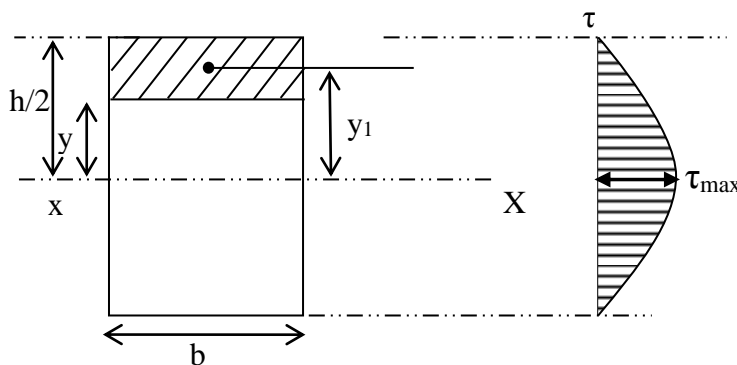


Fig.4.9

Cette loi est déterminée par la loi de variation de S'_x pour la section donnée, les autres quantités étant constantes, de plus,

$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

Le moment statique de l'aire hachurée par rapport à l'axe X :

$$S'_x = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

C'est l'équation d'une parabole.

La contrainte tangentielle vaut :

$$\tau = \frac{Q \cdot \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) 12}{2bh^3} = \frac{6Q}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

Construisons le diagramme de τ d'après les 3 points :

$$\tau_{(y=\frac{h}{2})} = 0; \quad \tau_{(y=0)} = \frac{3Q}{2A}; \quad \tau_{(y=-\frac{h}{2})} = 0.$$

- Pour une poutre de section rectangulaire, la contrainte tangentielle maximale se manifeste au niveau de l'axe neutre.

$$\tau_{max} = \frac{3Q}{2A} \quad (4.17)$$

- Pour une section circulaire, la valeur maximale de τ sur l'axe neutre vaut :

$$\tau_{max} = \frac{4Q}{3A} \quad (4.18)$$

- Pour une section annulaire :

$$\tau_{max} = \frac{2Q}{A} \quad (4.19)$$

5- Détermination des déplacements en flexion

5- Détermination des déplacements en flexion

Sous l'action d'une charge, une poutre fléchit, ses sections se déplacent perpendiculairement à l'axe initialement droit, tout en tournant simultanément (voir Fig.5.1) .

Le déplacement du centre de gravité de la section dans la direction perpendiculaire à l'axe s'appelle flèche (déflexion) notée f . l'angle θ de la rotation de la section par rapport à sa position initiale s'appelle angle de rotation de la section.

L'axe déformé de la poutre s'appelle axe élastique ou déformée

5.1. Méthode de l'intégration de l'équation de l'axe élastique

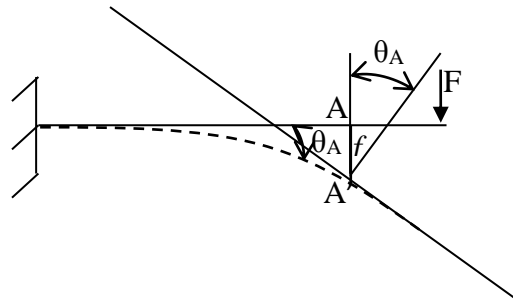


Fig. 5.1

Pour déterminer les déformations d'une poutre, prenons l'équation (4.7) du chapitre précédent ; soit :

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_x} \quad (5.1)$$

Avec : $k = \frac{1}{\rho}$ est la courbure de l'axe neutre de la poutre.

M : moment fléchissant.

EI_x : rigidité de la section. Dans ce qui suit on posera : $I_x = I$

La courbure d'une ligne est exprimée comme suit :

$$k = \pm \frac{f''}{[1 + (f')^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (5.2)$$

Où :

$$f' = \frac{df}{dx} \quad ; \quad f'' = \frac{d^2f}{dx^2}$$

En remplaçant (5.2) dans (5.1), on obtient :

$$\pm \frac{f''}{[1 + (f')^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{M}{EI} \quad (5.3)$$

(5.3) est l'équation différentielle exacte de l'axe fléchi d'une poutre et dans laquelle on néglige : $(f')^2 = tg^2\theta \approx \theta^2$ (car les déformations sont très petites) ; donc (5.3) devient :

$$\pm EI f'' = M \quad (5.4)$$

Le choix du signe est déterminé par le système de coordonnées adopté (Fig. 5.2) :

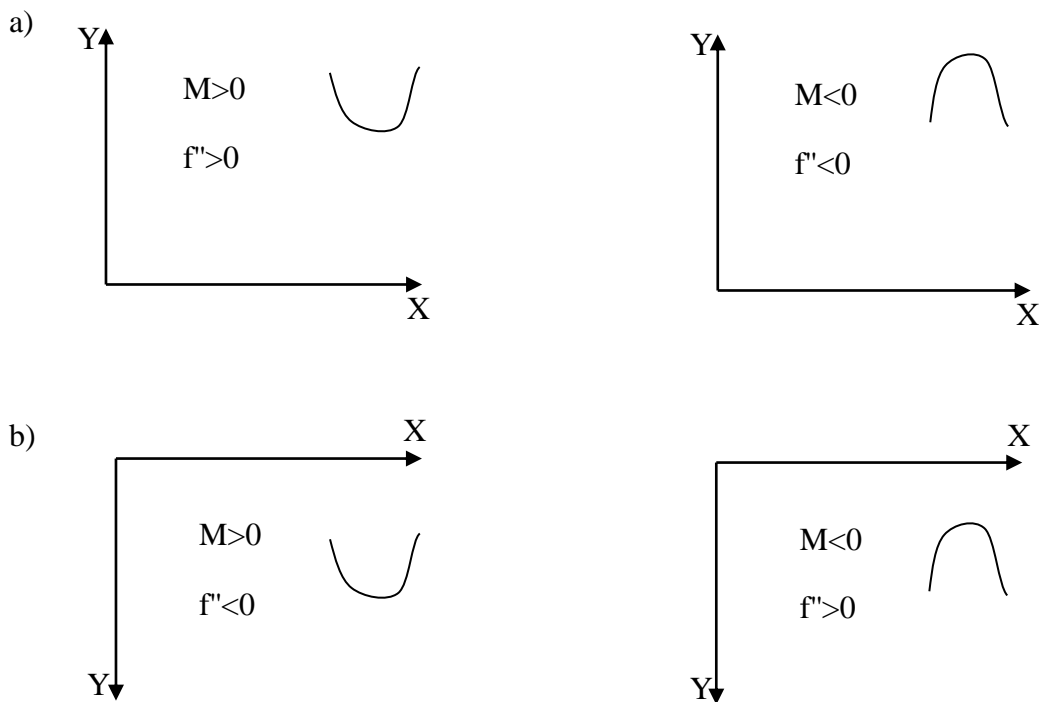


Fig. 5.2

- Quand le moment M et la courbure f'' ont les mêmes signes alors (5.4) s'applique sous la forme :

$$EI f'' = M \quad (5.5)$$

- Quand M et f'' sont de signe différent, (5.4) devient :

$$EI f'' = -M \quad (5.6)$$

- Dans ce qui suit, nous utiliserons le système de la Fig.5.2.a et l'équation (5.5).
- Les angles de rotation $\theta \approx f'$ et les flèches f sont calculés par l'intégration de l'équation (5.5), et pour ce faire on procède analytiquement ainsi :

- En intégrant une seule fois, on aboutit à l'équation de l'angle de rotation :

$$EI f' = \int M \cdot dx + C \quad (5.7)$$

Où C est une constante d'intégration.

- En intégrant deux fois, on aura l'équation des flèches :

$$EI f = \int dx \int M dx + Cx + D \quad (5.8)$$

Avec : D ; deuxième constante d'intégration.

Remarque :

C et D sont déterminées à partir des conditions d'appui de la poutre (conditions aux limites).

Ex : Poutre encastree $\rightarrow \theta = 0, f = 0$ (au niveau de l'encastrement).

Poutre sur 2 appuis $\rightarrow f = 0$ (aux deux appuis).

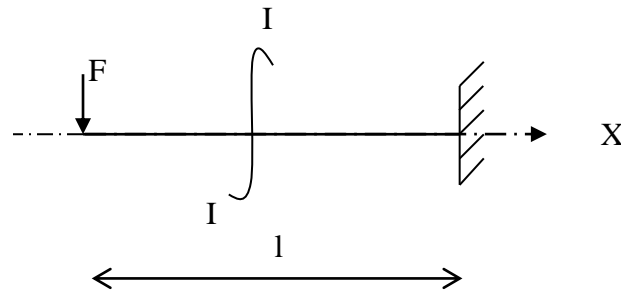
N.B : Les flèches maximales des poutres sont limitées par une grandeur définie dite « flèche admissible », f_{adm} , qui est fonction de la nature de l'ouvrage.

Ex : Poutres de pont roulant :

$$f_{adm} = \left(\frac{1}{600} \text{ à } \frac{1}{700} \right) l$$

Avec l : travée de la poutre.

Exemple : Déterminer f_{max} et θ_{max} pour une console chargée par une force concentrée à l'extrémité :



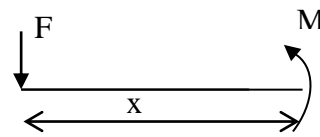
1- Calcul du moment fléchissant :

Section I - I : $0 \leq x \leq l$

$$M = -F \cdot x$$

Donc :

$$EI f'' = -F \cdot x$$



- Intégrons la 1^{ère} fois :

$$EI f' = -\frac{F \cdot x^2}{2} + C = EI \theta$$

- Intégrons la 2^{ème} fois :

$$EI f = -\frac{F \cdot x^3}{6} + C \cdot x + D$$

C et D seront déterminées par les conditions aux limites suivantes :

Pour :

$$x = l \Rightarrow f = 0$$

Pour :

$$x = l \Rightarrow \theta = f' = 0$$

De la deuxième condition on tire :

$$0 = -\frac{F \cdot l^2}{2} + C \Rightarrow C = \frac{F \cdot l^2}{2}$$

La 1^{ère} condition donne :

$$0 = -\frac{F \cdot l^3}{6} + \frac{F \cdot l^3}{2} + D \Rightarrow D = -\frac{F \cdot l^3}{3}$$

f_{max} et θ_{max} ont eu lieu à l'extrémité libre ($x = 0$) donc :

$$\theta_{max} = f'_{max} = \left(-\frac{F \cdot 0^2}{2} + \frac{Fl^2}{2} \right) \frac{1}{EI} \Rightarrow \theta_{max} = \frac{F \cdot l^2}{2EI}$$

$$f_{max} = \left(\frac{F \cdot 0^3}{6} + \frac{Fl^2}{2} \cdot 0 - \frac{F \cdot l^3}{3} \right) \frac{1}{EI} \Rightarrow f_{max} = \frac{-F \cdot l^3}{3EI}$$

$\theta > 0 \Rightarrow$ La section tourne dans le sens antihoraire.

$f < 0 \Rightarrow$ Le centre de gravité de la section se déplace vers le bas.

5.2. Méthode des paramètres initiaux

Si une poutre subit l'action d'une charge composée (Fig.5.3), la loi de variation des moments fléchissants dans des tronçons différents s'exprime par des équations différentes. l'équation différentielle de l'axe fléchi doit être établie pour chaque tronçon.

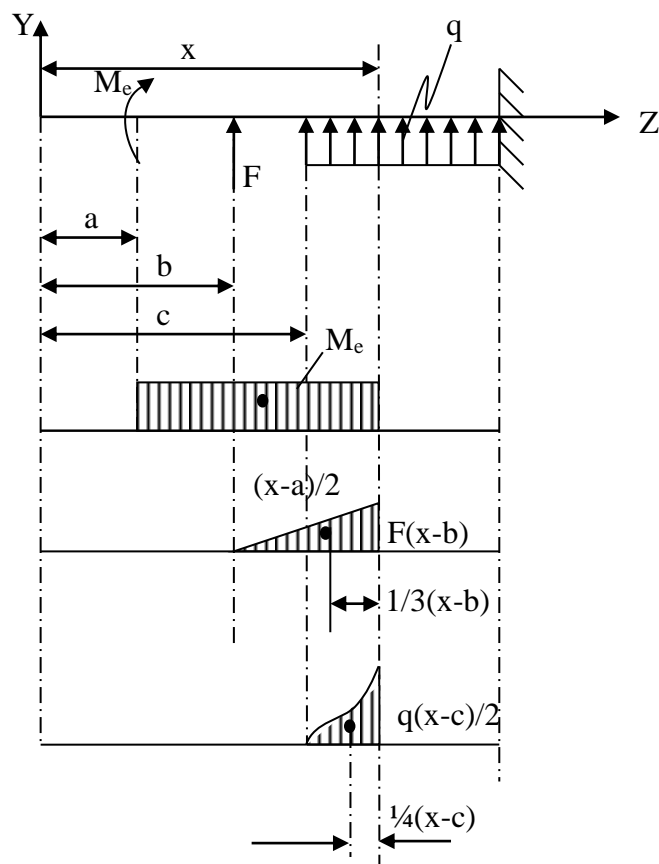


Fig. 5.3

Le nombre de constantes d'intégration est égal au double du nombre de tronçons. celles-ci peuvent être calculées en composant un nombre suffisant d'équations, en utilisant les conditions aux limites des poutres, où les flèches et les angles de rotation sont égaux entre eux. Toutefois, ce mode de résolution est très compliqué.

Il devient plus simple si l'intégration indéfinie de l'équation (5.5) est remplacée par l'intégration définie.

Intégrons encore une fois l'équation (5.5) dans les limites de zéro à x et en posant pour le moment $EI = \text{constante}$:

$$EI \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^x M dx = \int_{A'(0)}^{A'(x)} dA' \quad (5.9)$$

Où $dA' = M dx$ est la différentielle de l'aire du diagramme de M (Fig.5.4).

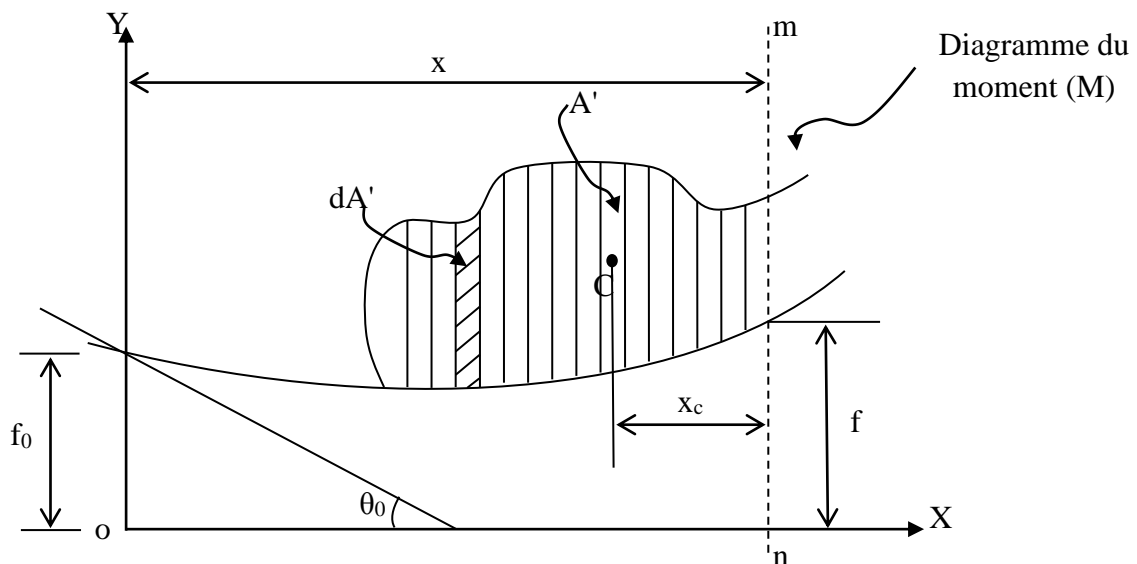


Fig. 5.4

Après intégration, on tire de (5.9) :

$$EI\theta = EI\theta_0 + A'(x) - A'(0) = EI\theta_0 + A' - A'(0)$$

Où :

$$EI\theta = EI\theta_0 + A' \quad (5.10)$$

Avec :

- $A(x) = A'$ c'est la partie rejetée du diagramme de M (surface comprise entre l'origine de coordonnées (Y) et la section (mn) où on détermine les déplacements)
- $A'(0)$, c'est la surface rejetée pour la section passant par l'origine des coordonnées o.

$$(5.10) \Rightarrow EI \frac{df}{dx} = EI\theta_0 + A'(x) \quad (5.11)$$

En intégrant de 0 à x :

$$EI \int_{f_0}^f df = EI\theta_0 \int_0^x dx + \int_0^x A'(x) dx = EI\theta_0 \int_0^x dx + \int_{S(0)}^{S(x)} dS \quad (5.12)$$

Où :

$dS = A'(x)dx$ est la différentielle du moment statique de la surface rejetée du diagramme de M .

(5.12) devient après intégration :

$$\begin{aligned} EIf &= EIf_0 + EI\theta_0 \cdot x + S(x) - S(0) \\ \Rightarrow EIf &= EIf_0 + EI\theta_0 \cdot x + S_{mn} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Où :

$S_x = S'_{mn} = A'y_c$; est le moment statique de l'aire rejetée du diagramme du moment fléchissant par rapport à la section courante $m-n$.

S_0 : moment statique de l'aire rejetée par rapport à la section qui passe par l'origine des coordonnées et $S_0 = 0$ car $A'_0 = 0$

Dans le cas où la rigidité des différents tronçons de la poutre n'est pas la même, on considère les formules suivantes :

$$f' = \theta = \theta_0 + A'_{red} \quad (5.14)$$

$$f = f_0 + \theta_0 \cdot x + S'_{red} \quad (5.15)$$

Avec :

- A'_{red} : l'aire réduite rejetée du diagramme des moments (diagramme dont les ordonnées sont divisées par EI).
- S'_{red} : le moment statique par rapport à la section envisagée de l'aire rejetée réduite du diagramme des moments.

L'aire A' est considérée positive si le diagramme de M est positif, et négative si le diagramme est négatif et ainsi le moment statique S est considéré positif si A' est positive, et négatif si A' est négative.

Si la rigidité de la poutre est constante, les formules (5.10) et (5.13) peuvent se mettre sous une forme analytique. Faisons-le pour trois types de forces extérieures représentées sur la figure (5.3) grâce au diagramme des moments fléchissants de chacune d'elle.

D'après les formules (5.10) et (5.13) ; on obtient les formules suivantes en calculant les surfaces et les moments statiques (par rapport à la section courante) des aires rejetées des diagrammes :

$$EI\theta = EI\theta_0 + Me(x - a) + \frac{F(x - b)^2}{2} + \frac{q(x - c)^3}{6} \quad (5.16)$$

$$EIf = EIf_0 + EI\theta_0 \cdot x + \frac{Me(x - a)^2}{2} + \frac{F(x - b)^3}{6} + \frac{q(x - c)^4}{24} \quad (5.17)$$

Dans le cas de l'action simultanée de plusieurs forces extérieures, les équations des angles de rotations et des flèches deviennent :

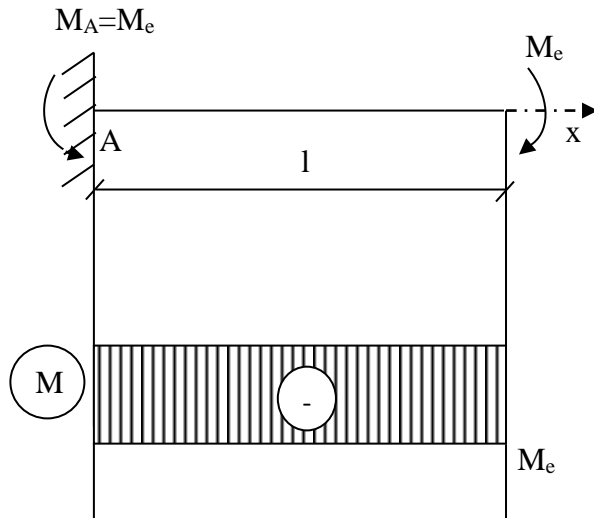
$$EIf' = EI\theta = EI\theta_0 + \Sigma Me(x - a) + \Sigma \frac{F(x - b)^2}{2} + \Sigma \frac{q(x - c)^3}{6} \quad (5.18)$$

$$EIf = EIf_0 + EI\theta_0 \cdot x + \Sigma \frac{Me(x - a)^2}{2} + \Sigma \frac{F(x - b)^3}{6} + \Sigma \frac{q(x - c)^4}{24} \quad (5.19)$$

Ces équations s'appellent équations universelles de l'axe fléchi d'une poutre. Dans ces formules figurent, avec leurs signes, toutes les forces extérieures (y compris les réactions d'appui) appliquées entre l'origine des coordonnées et la section d'abscisse x pour laquelle on détermine les déplacements. Les forces extérieures représentées sur la figure (5.3) entrent dans les équations universelles, avec le signe plus, et les forces extérieures orientées dans le sens opposé, avec un signe moins.

Exercices d'application :

Exemple 1 : calculer f_{max} et θ_{max} d'une console sollicitée par le couple M_e appliqué à l'extrémité libre.



Plaçons l'origine des coordonnées à l'extrémité gauche de la poutre. Alors pour $x=0$

$$\begin{cases} f_0=0 \\ \theta_0=0 \end{cases}$$

$$R_A = 0 \text{ et } M_A = M_e.$$

Les valeurs de f_{max} et θ_{max} sont enregistrées à l'extrémité droite de la poutre $x=l$.

En appliquant les équations universelles ; on a :

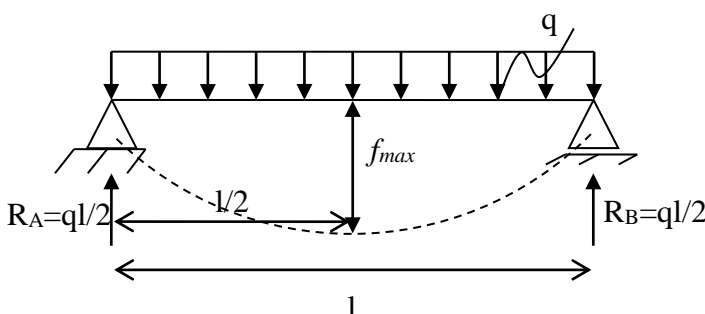
$$EIf_{max} = -\frac{M_e \cdot (l - 0)^2}{2} = -\frac{M_e l^2}{2}$$

$$f_{max} = -\frac{M_e \cdot l^2}{2EI} \quad (\text{en bas})$$

$$EIf'_{max} = EI\theta_{max} = -M_e(l - 0) = -M_e \cdot l$$

$$f'_{max} = \theta_{max} = -\frac{M_e \cdot l}{EI} \quad (\text{dans le sens horaire})$$

Exemple 2 : Déterminer f_{max} et θ_{max} pour la poutre représentée par la figure suivante :



En vertu de la symétrie

$$R_A = R_B = ql/2$$

Plaçons l'origine des coordonnées au droit de l'appui gauche. Alors $f_0 = 0$. Pour calculer θ_0 , utilisons la condition que pour $x = l$; $f = 0$. On a alors :

$$EI f_{(x=l)} = EI \theta_0 \cdot l + \frac{ql}{2} \cdot \frac{(l-0)^3}{6} - q \cdot \frac{(l-0)^4}{24} = 0$$

D'où :

$$\theta_0 = -\frac{ql^3}{24EI} = \theta_A$$

Il est clair que $\theta_A = \theta_B$ (la flèche maximale a lieu au milieu de la travée).

$$EI f_{(x=\frac{l}{2})} = EI f_{max} = -\frac{ql^3}{24} \cdot \frac{l}{2} + \frac{ql}{2} \left(\frac{l}{2} - 0\right)^3 - \frac{q \left(\frac{l}{2} - 0\right)^4}{24}$$

$$EI f_{max} = -\frac{5ql^4}{384}$$

D'où :

$$f_{max} = -\frac{5ql^4}{384EI}$$

5.3. Méthode de la poutre auxiliaire

Nous avons vu que :

- 1) Les moments fléchissants pouvaient s'obtenir à partir de la courbe de la charge, dans le cas de charges réparties, à l'aide de la relation :

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = M''(x) = -q$$

- 2) Que la déformée peut s'obtenir à partir des moments fléchissants à l'aide de la relation :

$$y'' = -\frac{M}{EI}$$

Ces deux relations ont des formes identiques et y est analogue à M à condition d'assimiler:

$$\frac{M(x)}{EI} = q$$

$$\frac{M(x)}{EI} = q_f(x)$$

Ainsi en considérant :

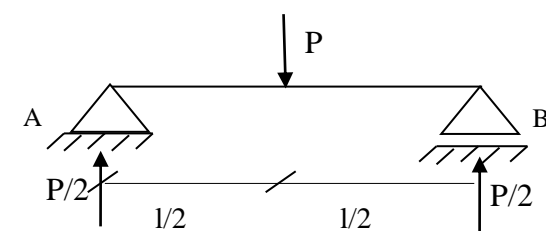
comme charge fictive sur la poutre auxiliaire, donne la flèche en chaque point.

Les charges fictives sont donc représentées par l'aire comprise entre l'axe de la poutre et cette courbe de charge fictive (soit le diagramme de M/EI inversé sur la poutre).

Par suite, la flèche en un point, mesurée par l'ordonnée de la courbe déformée est égale au moment fléchissant des charges fictives. La flèche est maximum dans la section où le moment fléchissant fictif est maximum, soit où l'effort tranchant fictif est nul.

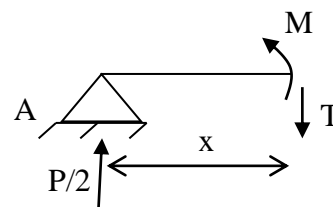
Exemples d'application

Exemple 1 : Soit la poutre représentée par la figure suivante :



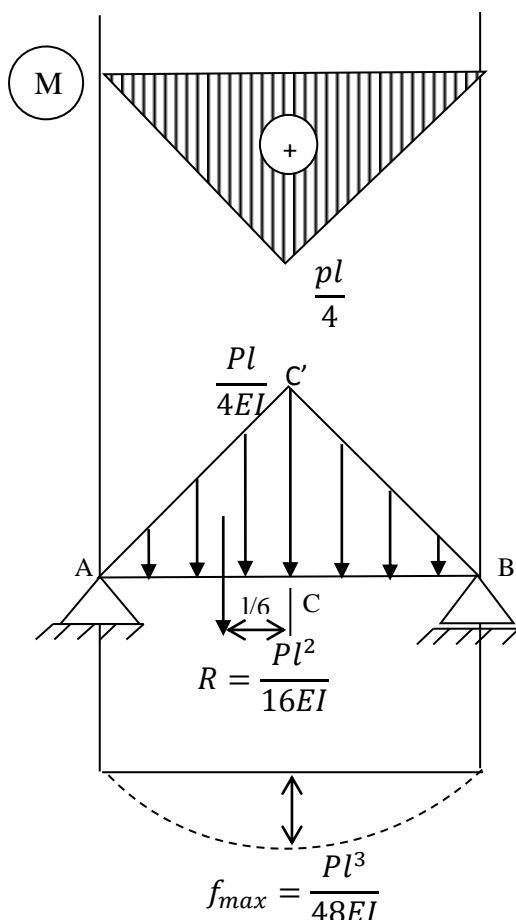
$$R_A = R_B = \frac{P}{2}$$

Section I-I : $0 \leq x \leq l/2$:



$$M(x) = \frac{p}{2} \cdot x \begin{cases} M=0 & x=0 \\ M=pl/4 & x=l/2 \end{cases}$$

Soit : $M_{max} = Pl/4$ (poutre symétrique)



On inverse M , le divise par EI et on considère M/EI comme chargement fictif.

La courbe de la charge fictive est donc constituée par les 2 segments AC' et C'B ; l'ordonnée CC' représente la valeur $\frac{pl}{4EI}$.

Les charges fictives représentées par l'aire du triangle AC'B sont donc mesurées par :

$$\frac{1}{2} \times l \times \frac{Pl}{4EI} = \frac{Pl^2}{8EI}$$

Pour des raisons de symétrie, les réactions en A et B sont égales à la moitié de la charge fictive; d'où :

$$R_A = \theta_A = \frac{Pl^2}{16EI} = \theta_B \quad \text{Correspondant à la valeur de la rotation en A.}$$

L'effort tranchant fictif est nul en C ; en effet à gauche de C, les charges fictives sont : R_A , charge fictive représentée par l'aire ACC'; la résultante est donc :

$$R = \frac{Pl^2}{16EI}$$

Par symétrie :

$$\theta_B = \theta_A = \frac{Pl^2}{16EI}$$

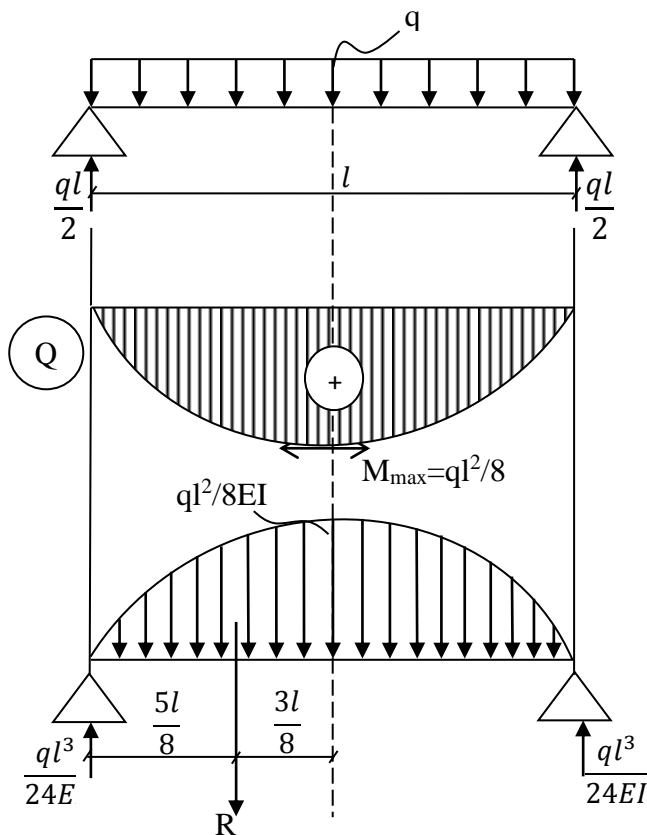
Le moment fléchissant fictif au milieu de la poutre est égal à :

$$f_{max} = f = \frac{R_A l}{2} - \frac{R}{3} \left(\frac{l}{2} \right)$$

$$f_{max} = \frac{Pl^2}{16EI} \cdot \frac{l}{2} - \frac{Pl^2}{16EI} \cdot \frac{l}{6} = \frac{Pl^3}{32EI} - \frac{Pl^3}{96EI}$$

$$f_{max} = \frac{Pl^3}{48EI}$$

Exemple 2 :



$$R_A = R_B = \frac{ql}{2}$$

$$M_{max} = \frac{ql^2}{8}$$

Charge fictive max est :

$$M_{max} = \frac{ql^2}{8EI}$$

Par symétrie :

$$R_A = R_B \Rightarrow \theta_A = \theta_B = \frac{2}{3} \cdot \frac{ql^3}{8EI} \cdot \frac{l}{2}$$

$$\theta_A = \theta_B = \frac{ql^3}{24EI} = R_A = R_B$$

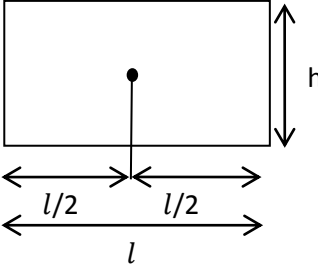
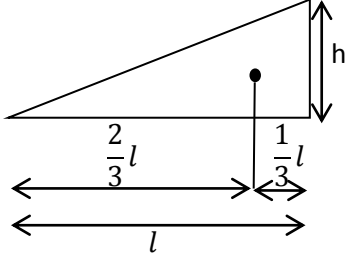
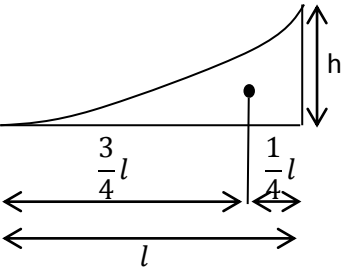
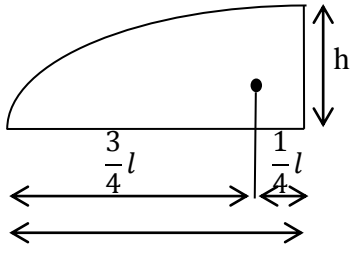
Par symétrie également :

$$f_{max} = R_A \cdot \frac{l}{2} - R \cdot \frac{3}{8}l = \frac{ql^3}{24EI} \cdot \frac{l}{2} - \frac{ql^3}{24EI} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{l}{2} = \frac{ql^4}{48EI} - \frac{ql^4}{64EI}$$

$$f_{max} = \frac{5ql^4}{192EI}$$

Le tableau 1 donne les diagrammes les plus fréquents des moments fléchissant avec indication de leurs aires et des positions du centre de gravité:

Tableau 1

Forme du diagramme	Aires du diagramme	Distance jusqu'au centre de gravité
	$h \times l$	$\frac{1}{2}l$
	$\frac{1}{2}hl$	$\frac{2}{3}l$
	$\frac{1}{3}hl$	$\frac{3}{4}l$
	$\frac{2}{3}hl$	$\frac{5}{8}l$

6- Treillis isostatiques

6- Treillis isostatiques

6.1. Définition

Les systèmes en treillis sont des systèmes de barres droites, articulées entre elles et constituant des corps rigides. On appelle communément barres, les pièces du système et nœuds ; leurs points d'assemblage. Les barres d'une poutre en treillis sont droites et rigides. Les nœuds sont constitués par des articulations (ou rotules) qui ne s'opposent pas aux variations angulaires des barres, les unes par rapport aux autres, lors des déformations du systèmes, donc chaque barre peut tourner librement dans l'articulation.

6.2 Hypothèses

Nous admettons que:

- les systèmes sont plans ;
- les liaisons des barres sont des articulations parfaites ;
- les forces extérieures sont contenues dans le même plan, et sont appliquées aux systèmes uniquement en leurs nœuds.
- les poids propres des barres sont négligeables devant les forces appliquées aux nœuds .

6.3. Systèmes isostatiques

6.3.1. Rigidité

a. Définition :

On dit qu'un système articulé est rigide s'il est indéformable (aux déformations dues aux seuls allongements des barres), et il ne l'est plus quand on enlève une des barres qui le constituent.

b. Conditions de rigidité :

Un système rigide indéformable peut se déplacer en bloc seulement dans son plan, c'est-à-dire qu'il a trois degrés de liberté, ou encore que sa position dans le plan se définit à l'aide de trois paramètres indépendants.

Si le système comprend n nœuds, on peut par exemple le définir par la position de ces n nœuds, ce qui nécessite $2n$ paramètres.

Mais comme ces n nœuds sont liés par b barres, les $2n$ paramètres précédents sont liés par b relations.

On a donc de cette façon $2n-b$ paramètres indépendants :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un système articulé comportant b barres et n nœuds soit rigide (ou isostatique) est donc que l'on est la relation :

$$2n - b = 3$$

Pour qu'un système soit isostatique extérieurement, au niveau des appuis il faut que le nombre d'inconnues soit égal au nombre d'équations

$$n_i = n_e \text{ ou } n_i - n_e = 0$$

Avec :

n_i : nombre d'inconnues ou nombre de réactions aux appuis ;

n_e : nombre d'équations d'équilibre.

6.4. Calcul des efforts dans les barres

6.4.1. Méthode des nœuds

Après le calcul des réactions, on prend chaque nœud séparément soumis à l'action des forces concourantes (efforts dans les barres + réactions + forces extérieures).

Donc pour chaque nœud, on peut écrire 2 équations d'équilibre statique :

$$\Sigma F_x = 0 \text{ et } \Sigma F_y = 0.$$

Remarque :

- Pour les 2 derniers nœuds, il restera 3 équations inutilisables, elles seront utilisées pour la vérification.

-Il est nécessaire de commencer avec un nœud ayant seulement deux inconnues et on continue avec le reste des nœuds avec 2 inconnues à chaque fois.

- Une erreur faite au cours du calcul ne pourra pas être localisée, elle sera aperçue seulement en écrivant les 3 dernières équations de vérification.

Avant tout calcul, on numérote les nœuds et ainsi les barres.

Exemple :

calculer les efforts dans les barres de la poutre en treillis suivante

$$\left. \begin{array}{l} n_i=3 \\ n_e=3 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Le système est isostatique extérieurement.}$$

Le nombre de nœuds est égal à 5 et le nombre de barres est égal à 7 ; soit :

$$2n - b = 2 \cdot 5 - 7 = 3 \Rightarrow \text{Le système est isostatique intérieurement.}$$

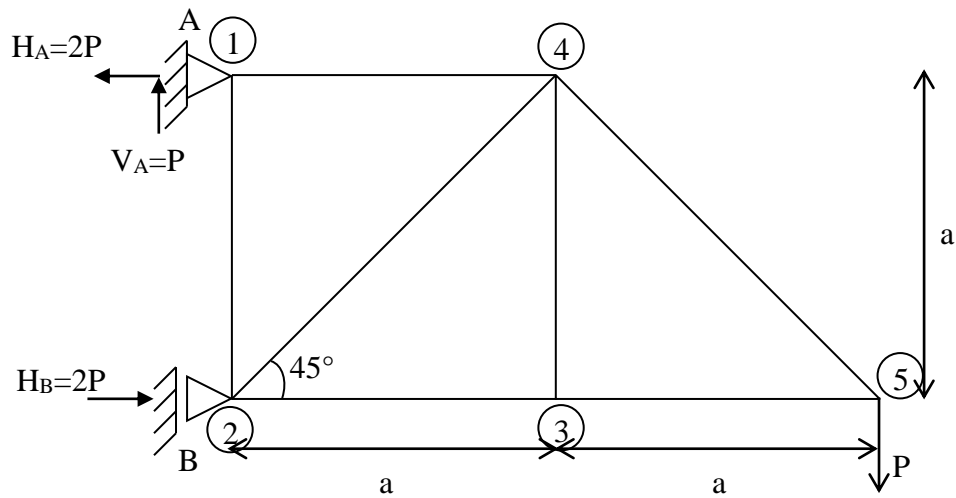


Fig.6.1

$$\alpha = 45 \Rightarrow \sin \alpha = \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Calcul des réactions :

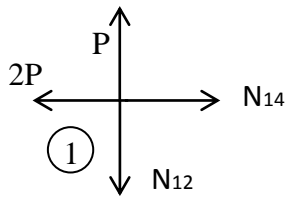
$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow H_A + H_B = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V_A - P = 0$$

$$V_A = P$$

$$\Sigma M_{/A} = 0 \Rightarrow H_B \cdot a - P \cdot 2a = 0 \Rightarrow H_B = 2P$$

$$H_A = -2P$$

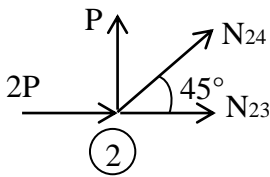
Nœud 1:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_{14} - 2P = 0$$

$$N_{14} = 2P$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -N_{12} + P = 0$$

$$N_{12} = P$$

Nœud 2:

$$\Sigma F_x = 0 \quad 2P + N_{23} + N_{24} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

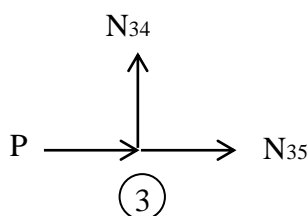
$$\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow P + \frac{N_{24}\sqrt{2}}{2} = 0.$$

$$N_{24} = -P \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -P\sqrt{2}$$

$$N_{24} = -P\sqrt{2}$$

$$N_{23} = -2P - N_{24} \frac{\sqrt{2}}{2} = -2P + P\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

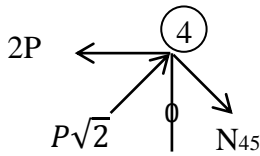
$$N_{23} = -P$$

Nœud 3:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_{35} = -P$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_{34} = 0$$

Nœud 4 :

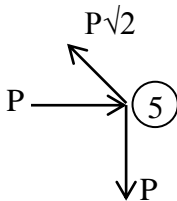


$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow -2P + P\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + N_{45} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

$$-P + N_{45} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$N_{45} = P\sqrt{2}$$

Nœud 5 : (nœud de vérification)



$$\Sigma F_x = P - P\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = P - P = 0.$$

$$\Sigma F_y = P\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - P = P - P = 0.$$

6.4.2. Méthode des sections (méthode de Ritter)

Le principe de cette méthode est de supposer une section de la poutre en treillis, coupant seulement trois barres d'efforts inconnus. Ainsi, on obtient deux parties : une qui restera à gauche et l'autre à droite par rapport à la section faite. Il faut mettre en évidence les efforts des barres sectionnées.

Il est à remarquer que :

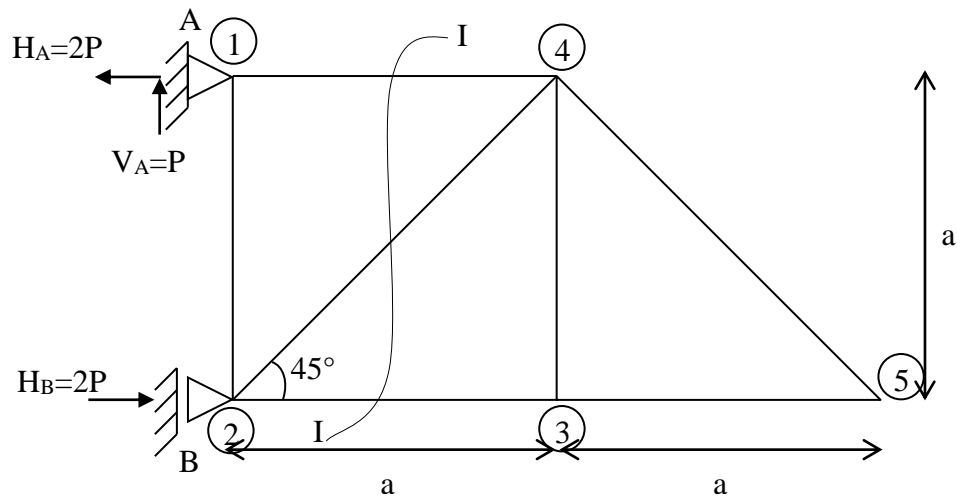
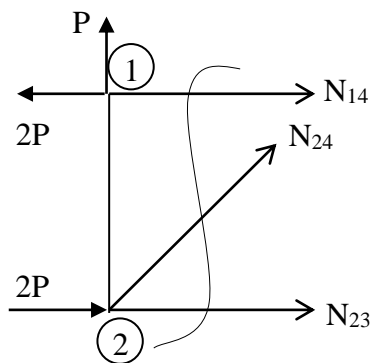
- Une faute faite pour une section ne peut pas se répercuter parce que la suivante section est complètement différente. On n'utilise aucune valeur précédemment obtenue.
- Chaque section doit avoir seulement trois barres ayant les efforts inconnus puisque pour un corps on peut écrire seulement 3 équations d'équilibre statique :

$$\Sigma F_x = 0 ; \Sigma F_y = 0 \text{ et } \Sigma M_i = 0$$

- Il est souhaitable d'écrire seulement des équations de moment pour éliminer les deux autres inconnues.

Exemple :

Déterminer les efforts normaux dans les barres 1-4, 2-4 et 2-3 dans le même exemple que précédemment.

Section I-I :

$$\Sigma M_{/2} = 0 \Rightarrow N_{14} \cdot a - 2P \cdot a = 0 \Rightarrow N_{14} = 2P$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_{24} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + P = 0$$

$$N_{24} = -P \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_{14} + N_{24} \frac{\sqrt{2}}{2} + N_{23} + 2P - 2P = 0$$

$$N_{23} = -N_{14} - N_{24} \frac{\sqrt{2}}{2} = -2P + P\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$N_{23} = -P$$

Bibliographie

Bibliographie

1. **DOBRESCU C. A.**, "STATIQUES des CONSTRUCTIONS. Problèmes. Tome 1. Office des Publications Universitaires (O.P.U). Réimpression 1994.
2. **MIROLIOUBOV I., ENGLALYTCHEC S., SERGUIEVSKI N., ALMAMETOV F., KOURYTSINE N, SMIRNOV-VASSILIEV K., YACHINA L.**, "RESISTANCE DES MATERIAUX", MANUEL DE RESOLUTION DES PROBLEMES, 3^e édition. Editions MIR. MOSCOU. Traduction française Editions Mir 1977.
3. **STEPINE P.**, "Résistance des matériaux". Editions MIR. MOSCOU. Traduction française, Editions Mir 1986.
4. **NASH W. A.**, "RESISTANCE DES MATERIAUX 1". COURS ET PROBLEMES. SERIE SCHAUM. Edition française : Henri LE BOITEUX et Robert BOUSSARD, 1985.
5. **NASH W. A.**, "Résistance des matériaux". Cours et problèmes, série Schaum, 2^e édition, 1994.