



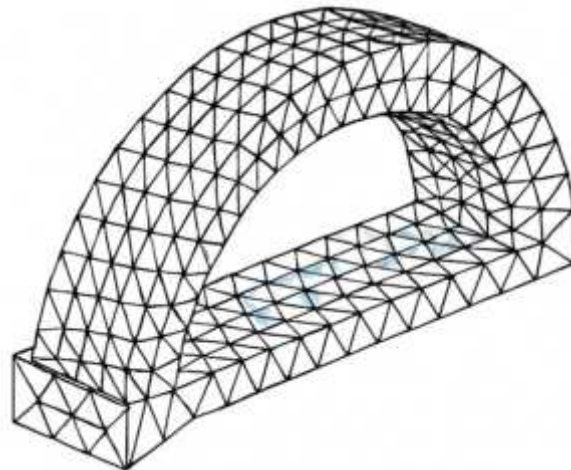
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE D'ORAN  
MOHAMED BOUDIAF (USTO-MB)

FACULTÉ d'ARCHITECTURE ET DE GÉNIE CIVIL

DÉPARTEMENT DE GÉNIE CIVIL

# Cours :

## Méthode des Éléments Finis



Cours préparé par :  
Dr. SEGUINI Meriem  
Maître de Conférence A

# Préface

La Méthode des Éléments Finis (MEF) occupe aujourd'hui une place centrale dans le calcul et le dimensionnement des structures. Devenue un standard industriel et académique, elle permet d'aborder avec précision un large éventail de problématiques mécaniques et physiques. Grâce à son approche numérique rigoureuse, la MEF offre des solutions approchées pour des configurations complexes, qu'il s'agisse de structures, de liaisons, de matériaux ou de phénomènes multi-physiques.

Indispensable pour les étudiants en génie civil, cette méthode s'applique à de nombreux domaines : analyse des structures, modélisation thermique, acoustique, électromagnétique, mécanique des fluides ou encore phénomènes couplés. Elle permet de traiter aussi bien des systèmes linéaires que non linéaires, transitoires, vibratoires, hétérogènes ou encore anisotropes. Depuis plus de trente ans, la MEF n'a cessé de démontrer sa robustesse, sa fiabilité et sa capacité à représenter la réalité physique au travers d'études de validation, de comparaisons expérimentales et de recalages numériques.

Cependant, mener une analyse par éléments finis dans de bonnes conditions exige de répondre à plusieurs questions essentielles :

- ✿ Expliciter les choix de modélisation et les hypothèses retenues ;
- ✿ Apprécier la confiance que l'on peut accorder aux résultats ;
- ✿ Interpréter ces résultats en cohérence avec les objectifs mécaniques visés.

L'objectif de ce polycopié est donc de présenter les fondements de la MEF et d'en structurer la démarche. L'accent est mis sur la logique d'enchaînement des différentes étapes, depuis la formulation mathématique jusqu'à l'analyse critique des résultats, afin de donner une vision claire, cohérente et opérationnelle du processus de calcul.

Ce document est destiné en priorité aux étudiants de première année Master en Génie Civil, option Voies et Ouvrages d'art, qui souhaitent comprendre en profondeur les principes théoriques et la mise en œuvre pratique de la méthode, notamment dans la perspective de développer ou d'utiliser des codes de calcul avancés.

Convaincu que l'apprentissage de la MEF passe avant tout par la pratique, ce polycopié adopte une pédagogie fondée sur deux axes complémentaires :

- ✿ Une présentation claire et structurée des concepts fondamentaux ;
- ✿ Une série d'exercices détaillés et résolus pas à pas, permettant de maîtriser les étapes clés du calcul.

L'ouvrage est organisé en six chapitres :

- ✿ **Chapitre I** : Introduction à la méthode des éléments finis;
- ✿ **Chapitre II** : Rappels sur le calcul matriciel;
- ✿ **Chapitre III** : Méthode de rigidité directe MDR;
- ✿ **Chapitre IV** : Éléments finis barres;
- ✿ **Chapitre V** : Éléments finis poutres de Bernoulli-Euler;
- ✿ **Chapitre VI** : Approximation ou fonctions d'interpolation;

# Table des matières

<b>CHAPITRE I</b>	<b>INTRODUCTION A LA METHODE DES ELEMENTS FINIS</b>	<b>3</b>
I.1	DEFINITION ET PRINCIPE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS	3
I.2	HISTORIQUE ET DEVELOPPEMENT	3
I.3	APPLICATION DE LA MEF EN GENIE CIVIL	3
I.4	MILIEU CONTINU ET STRUCTURE DISCRETE	4
I.4.1	POURQUOI PASSER DE L'ANALYSE ANALYTIQUE A LA DISCRETISATION ?	4
I.5	AVANTAGE DE LA DISCRETISATION	5
I.6	FONDEMENTS THEORIQUES DE LA MEF	5
I.7	ÉTAPES DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS	6
I.8	CLASSIFICATION DES ÉLÉMENTS FINIS	6
I.8.1	CLASSIFICATION SELON LA DIMENSION GEOMETRIQUE	7
I.8.2	CLASSIFICATION SELON LE TYPE DE COMPORTEMENT	8
I.8.3	CLASSIFICATION SELON L'ORDRE D'INTERPOLATION	8
I.9	AVANTAGES, LIMITES ET LOGICIELS DE LA METHODE DES ÉLÉMENTS FINIS	9
I.9.1	AVANTAGES DE LA METHODE DES ÉLÉMENTS FINIS	9
I.9.2	LIMITES ET CONTRAINTES D'UTILISATION	9
I.10	PRINCIPAUX LOGICIELS UTILISES EN GENIE CIVIL	9
<b>CHAPITRE II</b>	<b>RAPPEL SUR LES MATRICES</b>	<b>11</b>
II.1	INTRODUCTION	11
II.2	MATRICE TRANSPOSEE	11
II.3	FORMULATION ELEMENTAIRE	11
II.4	FORMULATION GLOBALE	12
<b>CHAPITRE III</b>	<b>METHODE DE RIGIDITÉ MDR</b>	<b>13</b>
III.1	DEFINITION ET PRINCIPE DE LA METHODE MDR	13
III.2	PROCEDURE DE RESOLUTION DES STRUCTURES PAR LA METHODE DISCRETE DE RIGIDITE	14
III.3	STRUCTURE EN TREILLIS	14
III.4	REPERE LOCALE ET GLOBALE	15
III.5	LES CONDITIONS AUX LIMITES (CL)	15
<b>CHAPITRE IV</b>	<b>ELEMENT FINIS BARRES</b>	<b>16</b>
IV.1	EXEMPLE DE TREILLIS	16
IV.2	FORMULATION DES EQUATIONS DANS LE REPERE LOCAL	17
IV.2.1	LOCALISATION	17
IV.2.2	ASSEMBLAGE ET RESOLUTION	18
IV.3	FORMULATION VARIATIONNELLE	20
IV.3.1	FONCTIONNELLE ENERGIE POTENTIELLE TOTALE	20
<b>CHAPITRE V</b>	<b>ELEMENTS FINIS POUTRE DE BERNOULLI-EULER</b>	<b>38</b>

<b>V.1</b>	<b>INTRODUCTION</b> .....	<b>38</b>
<b>V.2</b>	<b>TYPES DE POUTRE</b> .....	<b>38</b>
<b>V.3</b>	<b>TYPE DE CHARGEMENT</b> .....	<b>39</b>
<b>V.4</b>	<b>FORMULATION VARIATIONNELLE</b> .....	<b>40</b>
V.4.1	FONCTIONNELLE ENERGIE POTENTIELLE TOTALE .....	40
<b>V.5</b>	<b>ÉLÉMENT FINI POUTRE</b> .....	<b>41</b>
<b>V.6</b>	<b>EXEMPLE D'ASSEMBLAGE D'ÉLÉMENTS POUTRE</b> .....	<b>44</b>
<b>V.7</b>	<b>THEORIE DE LA POUTRE TIMOSHENKO</b> .....	<b>45</b>
V.7.1	LOI DE COMPORTEMENT .....	45
<b>CHAPITRE VI APPROXIMATION OU FONCTION D'INTERPOMATION</b> .....		<b>54</b>
<b>VI.1</b>	<b>INTRODUCTION</b> .....	<b>54</b>
<b>VI.2</b>	<b>ÉLASTICITE PLANE</b> .....	<b>55</b>
<b>VI.3</b>	<b>RELATION DEFORMATION-DEPLACEMENT</b> .....	<b>55</b>
<b>VI.4</b>	<b>CONTRAINTES PLANES</b> .....	<b>56</b>
<b>VI.5</b>	<b>DEFORMATIONS PLANES</b> .....	<b>56</b>
<b>VI.6</b>	<b>MATRICE DE RIGIDITE</b> .....	<b>57</b>
<b>VI.7</b>	<b>INTERPOLATION ET FONCTIONS DE FORME</b> .....	<b>57</b>
VI.7.1	CHAMP DE DEPLACEMENT .....	57
VI.7.2	ÉLÉMENT TRIANGULAIRE .....	58
VI.7.3	ÉLÉMENT QUADRANGULAIRE .....	61
VI.7.4	ELEMENT ISOPARAMETRIQUE .....	62
<b>VI.8</b>	<b>ÉLÉMENT DE VOLUME</b> .....	<b>65</b>
VI.8.1	RELATION DEFORMATION DEPLACEMENT .....	65
VI.8.2	LOI DE COMPORTEMENT .....	65
VI.8.3	ÉLÉMENT TETRAEDRIQUE .....	66
VI.8.4	ÉLÉMENTS HEXAEDRIQUES .....	67
<b>REFERENCES</b> .....		<b>70</b>

## Chapitre I INTRODUCTION A LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

### I.1 Définition et principe de la méthode des éléments finis

La résolution analytique exacte des équations d'équilibre qui régissent le comportement des structures est souvent impossible, surtout lorsqu'il s'agit de formes géométriques complexes, de conditions aux limites variées ou de propriétés de matériaux hétérogènes. C'est dans ce contexte qu'intervient la Méthode des Éléments Finis (MEF), une méthode numérique puissante et flexible, qui consiste à diviser un domaine continu en sous-ensembles appelés éléments finis, reliés entre eux par des nœuds. Cette méthode, largement utilisée en génie civil, permet d'analyser les structures en béton armé, acier, bois ou sol, soumises à diverses sollicitations : charges permanentes, mobiles, thermiques ou sismiques.

Le principe fondamental repose sur la discrétisation du domaine continu en un nombre fini d'éléments de forme simple (barres, triangles, quadrilatères...). À l'intérieur de chaque élément, on suppose que le champ de déplacement peut être approché par une fonction simple (linéaire, quadratique...) basée sur les déplacements des nœuds.

### I.2 Historique et développement

La Méthode des Éléments Finis (MEF) a connu un développement progressif à partir du milieu du XX<sup>e</sup> siècle, initialement motivé par les besoins croissants en calculs de structures mécaniques complexes. Les premières idées remontent aux travaux de Courant en 1943, qui proposa une technique d'approximation des solutions par sous-domaines, ouvrant la voie à la résolution de problèmes aux dérivées partielles sur des géométries irrégulières. Dans les années 1950, cette approche s'est étendue à l'industrie aéronautique, où la nécessité d'analyser des structures d'avions soumises à des sollicitations importantes a conduit à l'élaboration de modèles discrétisés. C'est en 1960 que Clough formalisa pour la première fois le terme Finite Element Method, en l'appliquant au calcul de structures dans le domaine du génie civil, contribuant ainsi à asseoir les bases de cette méthode dans l'analyse des ouvrages. Par la suite, Zienkiewicz et Taylor jouèrent un rôle fondamental dans la structuration théorique et la généralisation de la méthode à une large variété de problématiques mécaniques et physiques. Ils établirent notamment des formulations normalisées qui permirent de l'appliquer aux analyses thermiques, dynamiques et aux modèles de sol. À partir des années 1970, l'essor de la puissance informatique favorisa le déploiement de la MEF dans le génie civil, rendant possible l'étude de structures complexes telles que les bâtiments de grande hauteur, les ponts à haubans, les tunnels en terrain difficile, les barrages et les fondations profondes. La méthode s'imposa dès lors comme un outil incontournable, intégré aux logiciels spécialisés de calcul de structures et de simulation numérique.

### I.3 Application de la MEF en génie Civil

La Méthode des Éléments Finis trouve aujourd'hui des applications variées et indispensables dans le domaine du génie civil. Elle permet notamment le calcul et l'analyse des structures en

béton armé et en acier, qu'il s'agisse de bâtiments courants, de passerelles ou de structures spéciales. La MEF est également utilisée pour les études de stabilité des talus et des tunnels, en prenant en compte la nature des sols et les contraintes géotechniques spécifiques. Dans le domaine thermique, elle permet d'analyser les effets des ponts thermiques dans les structures et de simuler la dissipation de chaleur dans les bâtiments ou les ouvrages enterrés. En dynamique des structures, la MEF est un outil fondamental pour la simulation du comportement sismique des bâtiments et des infrastructures sensibles, en intégrant des charges dynamiques variables. Enfin, elle intervient dans le dimensionnement des fondations superficielles et profondes telles que les semelles et radiers, en prenant en compte l'interaction complexe entre le sol et la structure.

#### I.4 Milieu continu et structure discrète

En mécanique, on distingue deux types de modélisation des milieux matériels : le milieu continu et la structure discrète. Un milieu continu est une matière considérée comme infiniment divisible, où chaque point possède des propriétés physiques telles que le déplacement, la contrainte et la déformation. Le comportement mécanique de ce type de milieu est alors décrit par des équations différentielles continues, issues des lois de la mécanique des milieux continus. Par exemple, un voile en béton est assimilé à un milieu continu dans son comportement physique réel. À l'inverse, une structure discrète est composée d'un assemblage d'éléments finis reliés entre eux par des nœuds. Le comportement de cette structure est modélisé par des relations algébriques qui lient les déplacements des nœuds aux forces appliquées. Ainsi, dans le cadre d'une analyse numérique, le même voile en béton peut être modélisé sous forme de treillis 2D constitué d'éléments triangulaires ou quadrilatéraux, chacun connecté aux nœuds voisins. Ce procédé permet de simplifier le problème mécanique global en un système discret, tout en conservant une approximation fiable du comportement de la structure. La Méthode des Éléments Finis (MEF) s'inscrit précisément dans cette démarche : elle réalise la transition du modèle continu vers la structure discrète en subdivisant le domaine à étudier en éléments finis interconnectés (figure 1), rendant ainsi possible la résolution numérique de problèmes mécaniques complexes.

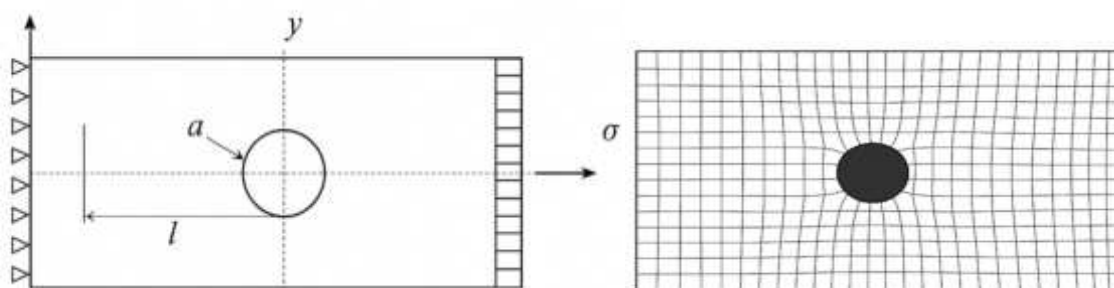


Fig.1. Structure réelle après discrétisation.

##### I.4.1 Pourquoi passer de l'analyse analytique à la discrétisation ?

Dans le domaine du génie civil, les structures que nous concevons et analysons présentent souvent des géométries complexes, des conditions aux limites variées et des matériaux ayant des comportements parfois non linéaires. Les méthodes analytiques classiques, bien qu'élégantes et rigoureuses, sont limitées à des cas idéalisés, tels que les poutres simplement appuyées, les structures symétriques ou les chargements uniformes.

**Exemple concret :** il est possible de résoudre analytiquement la déformation d'une poutre sous une charge ponctuelle appliquée au milieu. Cependant, que faire lorsqu'il s'agit d'un radier de fondation supportant plusieurs colonnes excentrées, sur un sol hétérogène avec des conditions de bord mixtes ?

**La solution (la discrétisation) :** c'est là qu'intervient la discrétisation, qui consiste à découper un domaine complexe en petites portions simples, appelées éléments finis. Chaque élément a un comportement mathématiquement maîtrisable et interagit avec les autres éléments à travers des nœuds communs (figure 2). L'assemblage de ces éléments permet de reconstituer le comportement global de la structure.

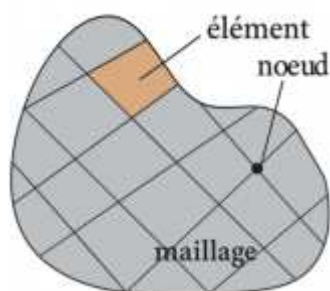


Fig.2. Discrétisation d'un élément.

### I.5 Avantage de la discrétisation

Cette méthode permet de transformer un problème, impossible à résoudre analytiquement, en un système d'équations algébriques qui peuvent être résolues numériquement. En génie civil, les ingénieurs sont régulièrement confrontés à des ouvrages soumis à des sollicitations variées : charges permanentes, charges mobiles, effets thermiques ou séismes. La résolution analytique de ces problèmes est souvent irréalisable en raison de la complexité des géométries, des matériaux et des conditions aux limites. La Méthode des Éléments Finis (MEF) offre une solution en transformant un problème continu en un ensemble de sous-problèmes locaux plus simples, qui sont résolus numériquement. Aujourd'hui, cette méthode est indispensable dans les domaines du calcul des structures, de la géotechnique, de l'hydraulique et de la dynamique sismique.

### I.6 Fondements théoriques de la MEF

La MEF s'appuie sur deux grands principes issus de la mécanique des milieux continus :

- ✿ **Principe des déplacements admissibles :**  
Les déplacements de la structure sont approchés par des fonctions continues à l'intérieur de chaque élément et qui satisfont aux conditions aux limites.
- ✿ **Principe des travaux ou énergies virtuelles :**  
L'équilibre de la structure implique l'égalité du travail virtuel des forces intérieures et extérieures pour tout déplacement virtuel admissible.

Ces principes permettent d'établir des équations locales pour chaque élément, puis de les assembler pour obtenir le comportement global de la structure.

### I.7 Étapes de la méthode des éléments finis

N°	Étape	Description
1	Modélisation	Définir la géométrie du domaine, les propriétés des matériaux, les charges et les conditions aux limites.
2	Discrétisation	Subdiviser le domaine continu en un ensemble d'éléments finis simples (barres, triangles, quadrilatères, etc.).
3	Choix des fonctions de forme	Sélectionner des fonctions d'interpolation pour approximer les champs de déplacements ou d'autres grandeurs physiques.
4	Formulation locale	Établir les équations d'équilibre au niveau de chaque élément à partir du principe des travaux virtuels ou de l'énergie potentielle.
5	Assemblage	Réunir les contributions de chaque élément pour constituer le système global d'équations du domaine.
6	Application des conditions aux limites	Introduire les conditions imposées sur les déplacements ou les forces dans le système global.
7	Résolution numérique	Résoudre le système d'équations (linéaires ou non linéaires) pour obtenir les inconnues aux nœuds (déplacements, températures...).
8	Post-traitement	Exploiter les résultats : calculer les contraintes, efforts internes, visualiser les déplacements et interpréter le comportement de la structure.

### I.8 Classification des Éléments Finis

La Méthode des Éléments Finis (MEF) repose sur la division du domaine d'étude en sous-ensembles appelés *éléments finis*, reliés entre eux par des *nœuds*. Ces éléments peuvent être classés suivant plusieurs critères fondamentaux qui influencent leur comportement et leur domaine d'application.

### I.8.1 Classification selon la Dimension Géométrique

Les éléments finis se distinguent en premier lieu par leur dimension géométrique, qui correspond au nombre de directions spatiales dans lesquelles ils s'étendent :

- ✿ **Éléments 1D** : utilisés pour modéliser des structures filaires telles que les barres, les ressort, les poutres ou les câbles. Ils possèdent généralement deux nœuds à leurs extrémités et peuvent intégrer des degrés de liberté de déplacement et de rotation.

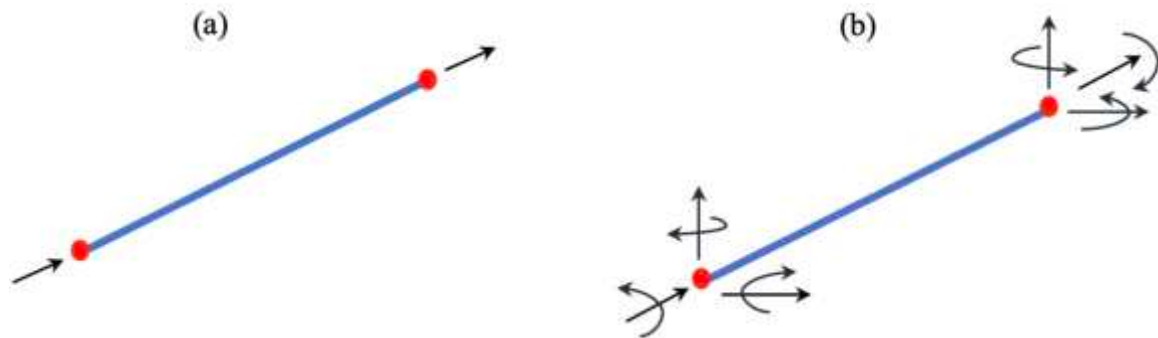


Fig.3. (a) Élément barre et (b) élément poutre.

- ✿ **Éléments 2D** : adaptés aux structures planes ou aux sections de structures tridimensionnelles. On distingue principalement les triangles et les quadrilatères. Ces éléments sont utilisés pour modéliser les plaques, membranes et coques minces.

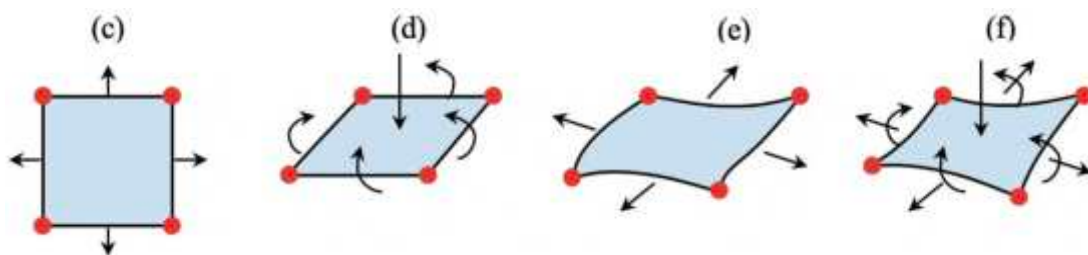


Fig.4. (c) Plaque mince, (d) plaque, (e) membrane et (f) coque.

- ✿ **Éléments 3D** : réservés aux structures tridimensionnelles complexes, ils comprennent des formes telles que les tétraèdres, les hexaèdres ou les prismes. Ils permettent de modéliser des massifs de sol, des structures en béton armé, ou des éléments volumineux.

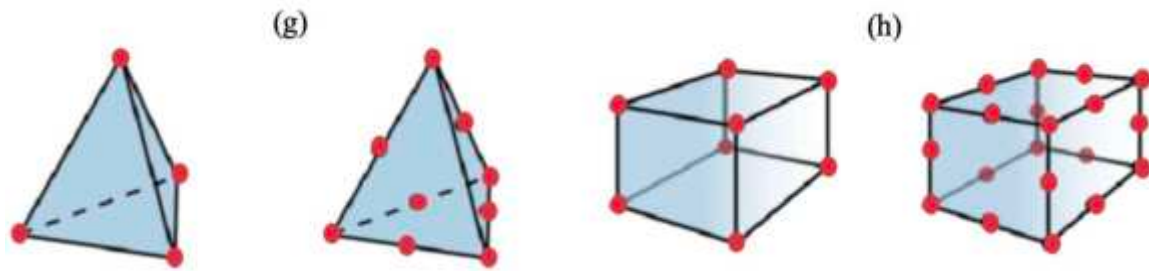


Fig.5. (g) Tétrahédre et (h) Hexaèdre.

### 1.8.2 Classification selon le Type de Comportement

Les éléments sont également classés en fonction du comportement mécanique qu'ils doivent représenter :

- ✿ **Éléments de traction-compression** : modélisent les efforts axiaux dans des barres ou câbles soumis à la traction ou à la compression.
- ✿ **Éléments en flexion** : adaptés pour représenter les moments de flexion dans les poutres ou plaques.
- ✿ **Éléments de coque** : combinent les comportements en membrane et en flexion, utilisés notamment dans les réservoirs, les toitures et les ouvrages de génie civil à parois minces. Les coques sont des structures caractérisées par une simple ou double courbure, combinant à la fois les propriétés des plaques et des voiles. Toutefois, leur comportement se rapproche davantage de celui des voiles, car les sollicitations qui s'y développent sont principalement de nature membranaire. Ainsi, les contraintes demeurent uniformes à travers l'épaisseur de la coque et agissent dans le plan tangent au point étudié. On parle alors d'un régime de contraintes membranaires.
- ✿ **Éléments de sol** : spécifiques aux analyses géotechniques, ces éléments modélisent les massifs de sol et leurs interactions avec les structures.

### 1.8.3 Classification selon l'Ordre d'Interpolation

Enfin, la précision des résultats est fortement influencée par le degré des fonctions de forme (ou polynômes d'interpolation) utilisées pour approximer le champ de déplacement à l'intérieur de chaque élément :

- ✿ **Éléments linéaires** : utilisent des fonctions de forme du premier degré. Ils sont simples à mettre en œuvre et rapides à calculer, mais moins précis pour modéliser des gradients complexes.
- ✿ **Éléments quadratiques** : emploient des fonctions du second degré et possèdent des nœuds intermédiaires sur les arêtes de l'élément. Ils offrent une meilleure précision et sont recommandés pour les analyses fines ou non linéaires.
- ✿ **Éléments cubiques** : basés sur des fonctions du troisième degré, ils restent rarement utilisés en génie civil en raison de leur coût numérique élevé et de leur complexité de mise en œuvre.

**NB :** cette classification est essentielle pour le choix des éléments adaptés à chaque problématique, en tenant compte de la géométrie du domaine, du comportement physique à simuler et du niveau de précision souhaité. Un choix judicieux permet d'optimiser à la fois la précision des résultats et le temps de calcul.

## **I.9 Avantages, Limites et Logiciels de la Méthode des Éléments Finis**

### **I.9.1 Avantages de la Méthode des Éléments Finis**

La Méthode des Éléments Finis (MEF) présente de nombreux atouts qui expliquent sa large adoption dans l'industrie et la recherche en génie civil et en ingénierie en général :

- ✿ Elle est applicable à des géométries complexes ainsi qu'à des configurations de chargement et de conditions aux limites difficilement traitables par des méthodes analytiques classiques.
- ✿ La méthode offre une grande flexibilité dans la prise en compte de comportements matériaux variés, qu'ils soient linéaires, non linéaires, isotropes ou anisotropes.
- ✿ Elle permet d'atteindre une précision élevée des résultats, notamment grâce à la possibilité d'effectuer un raffinement local du maillage dans les zones à forte concentration d'efforts ou de déformations.
- ✿ Enfin, la MEF est capable de modéliser des chargements variés et évolutifs dans le temps, tels que les sollicitations sismiques, thermiques, hydrauliques ou dynamiques.

### **I.9.2 Limites et Contraintes d'Utilisation**

Malgré ses nombreux avantages, la MEF présente certaines limites qui imposent rigueur et précautions dans sa mise en œuvre :

- ✿ Elle requiert un prétraitement de qualité incluant la modélisation géométrique, la définition des propriétés matériaux, des charges et des conditions aux limites. Une erreur dans cette phase peut compromettre la validité des résultats.
- ✿ La méthode est également sensible au choix des conditions aux limites et des fonctions de forme utilisées dans la discrétisation. Une sélection inappropriée peut induire des erreurs numériques significatives.
- ✿ Enfin, pour des modèles tridimensionnels détaillés ou des analyses non linéaires complexes, le coût numérique en termes de mémoire et de temps de calcul peut s'avérer élevé, nécessitant des ressources informatiques importantes.

## **I.10 Principaux Logiciels Utilisés en Génie Civil**

Dans le domaine du génie civil, plusieurs logiciels spécialisés intègrent des solveurs MEF performants et couvrent un large éventail d'applications :

- ✿ **Abaqus** : reconnu pour les analyses non linéaires complexes et les couplages multiphysiques.
- ✿ **ANSYS** : polyvalent et largement utilisé pour les analyses thermomécaniques, dynamiques et vibratoires.
- ✿ **SAP2000** : dédié à l'analyse et au dimensionnement des structures générales (bâtiments, ponts, infrastructures).

- ✿ **ETABS** : spécialisé dans le calcul des structures de bâtiments, notamment en zone sismique.
- ✿ **Plaxis** : référence pour les analyses géotechniques en 2D et 3D, intégrant les comportements sols-structures.
- ✿ **Robot Structural Analysis** : outil accessible pour le calcul et la vérification des structures en béton armé et en acier.

Ces logiciels permettent de réaliser des analyses statiques, dynamiques et non linéaires, avec des modules spécifiques pour les vérifications normatives et les études de performance structurelle.

## Chapitre II      RAPPEL SUR LES MATRICES

### II.1 Introduction

La méthode des éléments finis (MEF) consiste à remplacer un milieu continu soumis à des charges par un système discret composé d'éléments finis reliés entre eux par des nœuds. Le comportement mécanique du système est alors formulé sous forme matricielle, reliant les déplacements nodaux aux forces nodales via des matrices de rigidité.

L'intérêt du formalisme matriciel :

- ✳ Permet de systématiser l'écriture des équations d'équilibre
- ✳ Facilite l'assemblage global de la structure
- ✳ Simplifie la résolution numérique

### II.2 Matrice transposée

La matrice transposée d'une matrice  $A$  de dimension  $m \times n$  est une matrice notée  $A^T$  obtenue en inversant les lignes et les colonnes

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}; \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Avec  $(A^T)^T = A$

### II.3 Formulation élémentaire

Pour chaque élément fini (barre, triangle, quadrilatère...), on établit la relation suivante :

$$[K^e]\{u^e\} = \{F^e\} \quad (2.2)$$

Avec :

$[K^e]$  : matrice de rigidité de l'élément (dimension : nombre de ddl élémentaires  $\times$  nombre de ddl élémentaires)

$\{u^e\}$  : vecteur des déplacements nodaux de l'élément

$\{F^e\}$  : vecteur des forces nodales équivalentes appliquées à l'élément

Exemple pour un élément 2D triangulaire à 3 nœuds :

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Les matrices sont obtenues via l'intégration des équations différentielles locales, en fonction des propriétés de l'élément (géométrie, matériaux) et des fonctions de forme.

## II.4 Formulation globale

L'assemblage des matrices élémentaires dans une matrice de rigidité globale  $[K]$  se fait via la technique d'assemblage en se basant sur les correspondances des nœuds.

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (2.4)$$

Avec :

$[K]$  : matrice de rigidité globale (dimension : nombre total de ddl  $\times$  nombre total de ddl)

$\{U\}$  : vecteur global des déplacements nœuds

$\{F\}$  : vecteur global des forces nodales appliquées

✿ **Assemblage :**

Chaque matrice  $[K^e]$  est placée dans  $[K]$  à la position correspondant aux nœuds globaux de l'élément.

✿ **Conditions aux limites :**

Avant de résoudre, on applique les conditions de déplacements imposés (encastrement, articulation...) en  $[K]$  et  $\{F\}$ .

## Chapitre III METHODE DE RIGIDITÉ MDR

### III.1 Définition et principe de la méthode MDR

La méthode discrète de rigidité est une technique classique de calcul des structures dans laquelle une structure est modélisée par un ensemble de barres ou poutres connectées par des nœuds. Elle repose sur l'équilibre nodal des forces et la relation entre les efforts et les déplacements via les rigidités élémentaires. C'est l'approche directe historiquement utilisée avant la généralisation de la méthode des éléments finis pour les structures complexes.

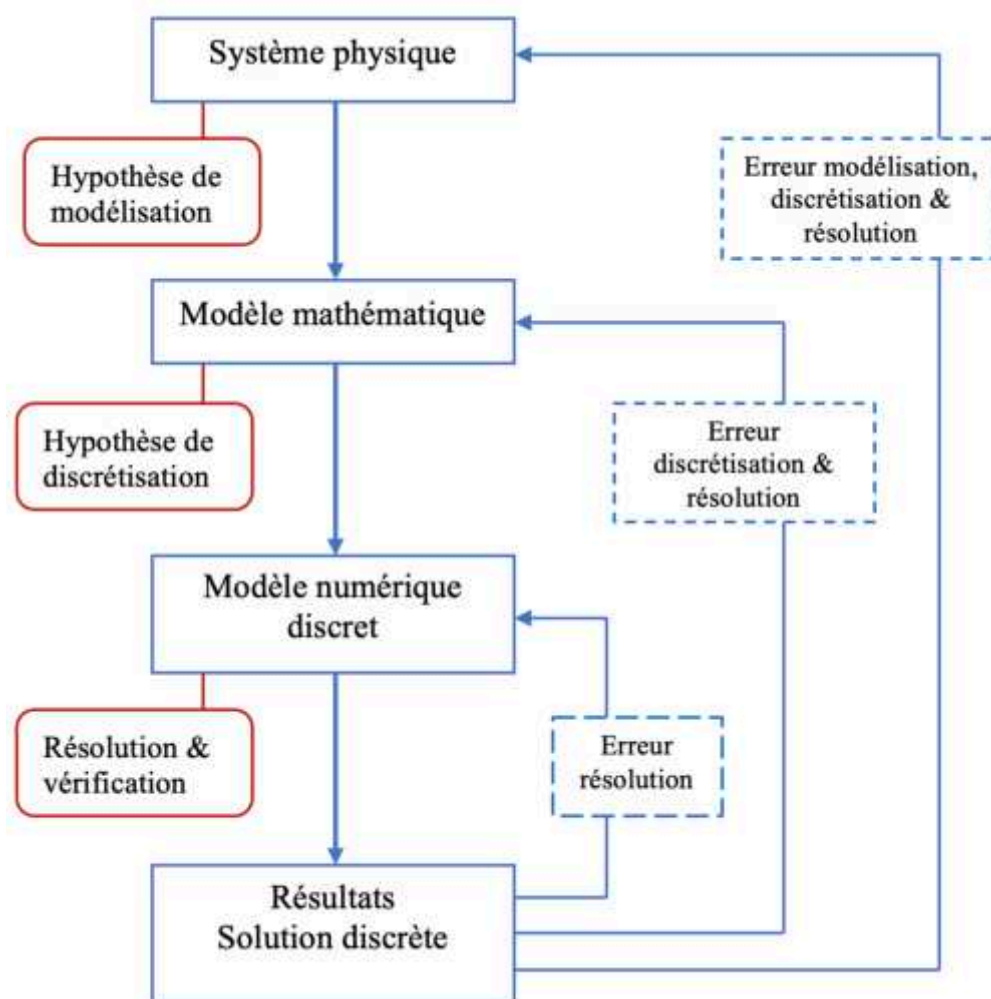


Fig.6. Organigramme du processus de modélisation, discrétisation et résolution en calcul numérique.

En effet l'organigramme de la figure 6 illustre les différentes étapes allant du système physique réel à la solution numérique discrète, en passant par le modèle mathématique et la discrétisation, tout en identifiant les sources potentielles d'erreurs à chaque niveau.

### III.2 Procédure de résolution des structures par la Méthode Discrète de Rigidité

La Méthode Discrète de Rigidité (MDR) repose sur un enchaînement méthodique d'étapes successives, visant à transformer un problème structurel en un système d'équations matricielles solvables. Ce processus rigoureux peut se diviser en deux grandes phases : la décomposition et l'assemblage-résolution, chacune comportant des sous-étapes spécifiques. La première phase, la décomposition, consiste à analyser chaque élément indépendamment du reste de la structure. Elle débute par une déconnexion virtuelle des éléments, c'est-à-dire qu'on considère chaque barre isolée, sans interaction avec ses voisines. Vient ensuite la phase de localisation, qui consiste à attribuer à chaque élément ses degrés de liberté et à positionner ses variables dans un système de coordonnées locales. Enfin, on procède à la formulation élémentaire, qui permet de déterminer la matrice de rigidité locale et le vecteur des forces nodales de l'élément en fonction de ses propriétés mécaniques et géométriques.

Dans la seconde phase, appelée **assemblage-résolution**, les informations élémentaires sont intégrées dans un modèle global. On commence par la **globalisation**, où les matrices et vecteurs locaux sont transcrits dans le repère global et assemblés pour former le système matriciel complet de la structure. La **fusion** consiste alors à additionner les contributions de tous les éléments partageant un même nœud. Une fois le système global constitué, on applique les **conditions aux limites** pour simuler les appuis fixes, les articulations ou les déplacements imposés. On passe ensuite à la **résolution** du système d'équations pour obtenir les déplacements aux nœuds, à partir desquels on peut calculer les efforts internes dans les éléments. Enfin, la méthode s'achève par le **calcul des grandeurs auxiliaires**, qui inclut le contrôle des contraintes admissibles, le calcul des réactions d'appui et la vérification des critères de stabilité ou de service, permettant ainsi de juger de la qualité et de la sécurité de la structure modélisée.

### III.3 Structure en treillis

Les structures en treillis sont des assemblages de barres droites, reliées entre elles par des articulations ou des nœuds, conçues pour ne transmettre que des efforts axiaux de traction ou de compression. Utilisées depuis l'Antiquité dans les charpentes en bois, elles ont connu un développement remarquable au XIX<sup>e</sup> siècle avec l'essor de la construction métallique et continuent aujourd'hui d'être largement employées dans les domaines du génie civil. Ce type de structure repose sur le principe fondamental de la stabilité géométrique par triangulation : en reliant des barres pour former des triangles rigides, on obtient un système stable et léger capable de supporter des charges importantes avec un minimum de matière. Cette simplicité géométrique dissimule une remarquable complexité analytique, notamment dans le calcul et la répartition des efforts internes, parfaitement adaptée aux approches matricielles et à la méthode des éléments finis. Un exemple concret, les ponts sont faits soit partiellement soit complètement en treillis qui est composé de membrure qui vont être jointes ensemble dans le but d'obtenir une structure stable et légère (figure 7). Pour faciliter les calculs on assimile les jointures à des nœuds constitués de pivots évidemment les treillis sont fait pour supporter les efforts extérieurs comme le poids des véhicules qui passent ou encore le vent. Dans un système donné on distingue deux catégories d'efforts : les efforts externes qui sont les efforts exercés par tout ce qui extérieur au système sur le système et les efforts internes qui représentent les actions et réactions des différents sous partie du système. Dans les méthodes de calculs simple les efforts sont toujours appliqués aux nœuds cela permet de négliger les contraintes plus complexes comme la flexion. Les éléments barres à deux dimensions sont des éléments définis par le module de Young  $E$ , la longueur  $L$ , la section droite  $A$ .



fig.7. Modélisation d'un pont à treillis.

### III.4 Repère locale et globale

En calcul d'un système en treillis, on travaille simultanément dans deux systèmes de coordonnées :

- ✿ **Le système local** est propre à chaque élément barre noté ( $e$ ) ou les déplacements et forces sont exprimés selon l'axe de l'élément  $(\bar{x}^{(e)}, \bar{y}^{(e)})$  et qui est utile pour déterminer la matrice de rigidité élémentaire.
- ✿ **Le système global** est commun à toute la structure et c'est dans ce repère global  $(x, y)$  qu'on assemble les matrices élémentaires et qu'on résout le système. Cependant, toutes les équations et inconnues  $y$  sont rassemblées et numérotées de manière unique pour l'ensemble des nœuds

### III.5 Les conditions aux limites (CL)

Les conditions aux limites définissent les déplacements connus ou les forces imposées aux nœuds, et sont indispensables pour garantir l'existence et l'unicité de la solution du système matriciel.

## Chapitre IV ELEMENT FINIS BARRES

### IV.1 Exemple de treillis

Dans un treillis 2D (figure 8). La position de chaque nœud est définie par ses coordonnées globales  $(x, y)$  et chaque nœud a des degrés de liberté ddl globaux  $u_{xi}, u_{yi}$ . Tandis que les conditions aux limites définissent les déplacements connus ou les forces imposées aux nœuds, et sont indispensables pour garantir l'existence et l'unicité de la solution du système matriciel.

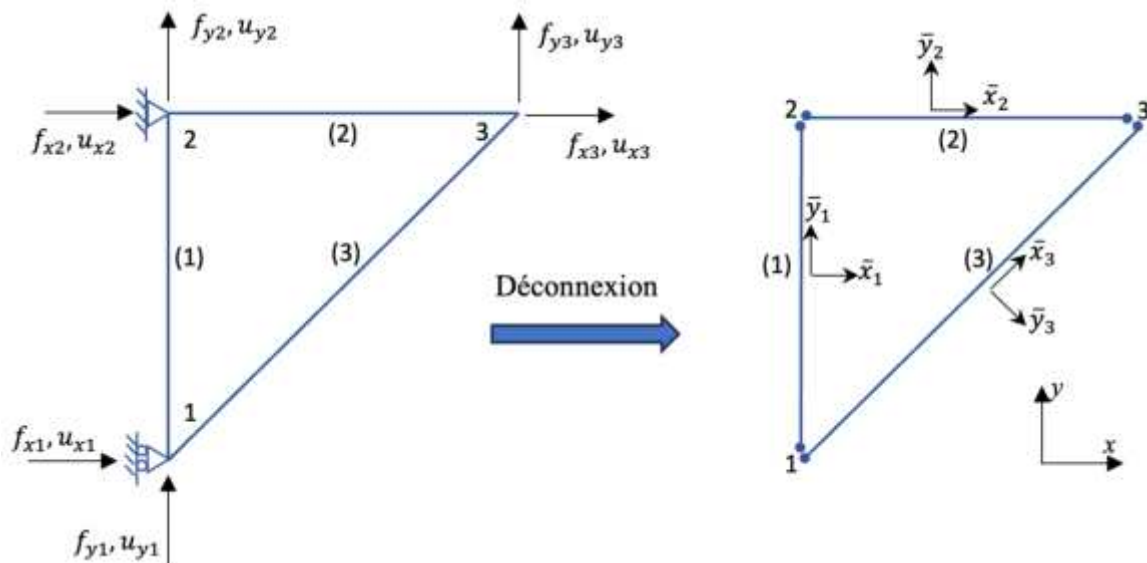




Fig.8. Exemple de treillis soumis à des forces extérieures.

Le tableau suivant résume les conditions aux limites appliquées aux différents nœuds du treillis 2D présenté dans la figure

Nœud	Type d'appui	Condition(s) imposée(s)	Réaction(s) correspondante(s)
1		$u_{x1} = 0, u_{y1} = 0$	$f_{x1}, f_{y1}$
2		$u_{y2} = 0$	$f_{y2}$
3	Nœud libre	Aucune	—

Les conditions aux limites ci-dessus permettent d’assurer la stabilité du système et la résolution correcte du modèle matriciel du treillis.

Suivant ce système l’équation globale linéaire est définie comme suit :

$$\{f\} = K\{u\} \tag{4.1}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{x1x1} & K_{x1y1} & K_{x1x2} & K_{x1y2} & K_{x1x3} & K_{x1y3} \\ K_{y1x1} & K_{y1y1} & K_{y1x2} & K_{y1y2} & K_{y1x3} & K_{y1y3} \\ K_{x2x1} & K_{x2y1} & K_{x2x2} & K_{x2y2} & K_{x2x3} & K_{x2y3} \\ K_{y2x1} & K_{y2y1} & K_{y2x2} & K_{y2y2} & K_{y2x3} & K_{y2y3} \\ K_{x3x1} & K_{x3y1} & K_{x3x2} & K_{x3y2} & K_{x3x3} & K_{x3y3} \\ K_{y3x1} & K_{y3y1} & K_{y3x2} & K_{y3y2} & K_{y3x3} & K_{y3y3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{Bmatrix} \tag{4.2}$$

$\{f\}$  : Vecteur global de forces nodales.

$\{u\}$  : Vecteur global des déplacements nodaux.

$K$  : Matrice globale de rigidité.

## IV.2 Formulation des équations dans le repère local

### IV.2.1 Localisation

Le système de rigidité en repère locale d’un élément ( $e$ ) de nœuds  $i$  et  $j$  (figure 9) se compose du vecteur forces  $\{\bar{f}\}$  et du vecteur déplacement  $\{\bar{u}\}$  locaux ainsi que de la matrice de rigidité locale  $[\bar{K}]$ . Il est défini comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \bar{f}_{x_i} \\ \bar{f}_{y_i} \\ \bar{f}_{x_j} \\ \bar{f}_{y_j} \end{Bmatrix} = \frac{E^{(e)}A^{(e)}}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} \bar{K}_{x_i x_i} & \bar{K}_{x_i y_i} & \bar{K}_{x_i x_j} & \bar{K}_{x_i y_j} \\ \bar{K}_{y_i x_i} & \bar{K}_{y_i y_i} & \bar{K}_{y_i x_j} & \bar{K}_{y_i y_j} \\ \bar{K}_{x_j x_i} & \bar{K}_{x_j y_i} & \bar{K}_{x_j x_j} & \bar{K}_{x_j y_j} \\ \bar{K}_{y_j x_i} & \bar{K}_{y_j y_i} & \bar{K}_{y_j x_j} & \bar{K}_{y_j y_j} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_{x_i} \\ \bar{u}_{y_i} \\ \bar{u}_{x_j} \\ \bar{u}_{y_j} \end{Bmatrix} \tag{4.3}$$



Fig. 9. Représentation d’un élément  $e$  de nœuds  $i$  et  $j$

NB : L’élément ressort (figure 10), possède un même fonctionnement uniaxial que l’élément barre. De ce fait l’élément ressort à les mêmes règles de construction que l’élément barre.



Fig.10. Représentation d’un élément ressort.

La différence réside dans le terme de rigidité  $k$  et les matrices de rigidité sont identique, la valeur de  $k$  se substituant à la rigidité  $\frac{EA}{L}$  de l'élément barre comme suit :

$$F = k \cdot d = \frac{EA}{L} d \quad (4.4)$$

$F$  est la force axiale interne et  $d$  est le déplacement axial.

$$\text{Avec } \begin{cases} F = -\bar{f}_{x_i} = \bar{f}_{x_j} \\ d = \bar{u}_{x_j} - \bar{u}_{x_i} \end{cases}$$

Donc l'équation finale du système est définie comme suit :

$$\{\bar{f}\}^{(e)} = \bar{K}^{(e)}\{\bar{u}\}^{(e)} \quad (4.5)$$

$$\{\bar{f}\}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \bar{f}_{x_i} \\ \bar{f}_{y_i} \\ \bar{f}_{x_j} \\ \bar{f}_{y_j} \end{Bmatrix} = \frac{E^{(e)}A^{(e)}}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_{x_i} \\ \bar{u}_{y_i} \\ \bar{u}_{x_j} \\ \bar{u}_{y_j} \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

$$\bar{K}^{(e)} = \frac{E^{(e)}A^{(e)}}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$\bar{K}^{(e)}$  est la matrice de rigidité d'un élément  $e$  en repère local.

## IV.2.2 Assemblage et résolution

### ✱ Globalisation

Dans cette étape, l'équation du système de rigidité est transformée du repère local  $(\bar{x}, \bar{y})$  au repère global  $(x, y)$  (figure 11) comme suit :

$$\begin{cases} \bar{u}_{x_i} = u_{x_i} \cos \varphi + u_{y_i} \sin \varphi \\ \bar{u}_{y_i} = -u_{x_i} \sin \varphi + u_{y_i} \cos \varphi \\ \bar{u}_{x_j} = u_{x_j} \cos \varphi + u_{y_j} \sin \varphi \\ \bar{u}_{y_j} = -u_{x_j} \sin \varphi + u_{y_j} \cos \varphi \end{cases} \quad \begin{cases} f_{x_i} = \bar{f}_{x_i} \cos \varphi - \bar{f}_{y_i} \sin \varphi \\ f_{y_i} = \bar{f}_{x_i} \sin \varphi + \bar{f}_{y_i} \cos \varphi \\ f_{x_j} = \bar{f}_{x_j} \cos \varphi - \bar{f}_{y_j} \sin \varphi \\ f_{y_j} = \bar{f}_{x_j} \sin \varphi + \bar{f}_{y_j} \cos \varphi \end{cases} \quad (4.8)$$

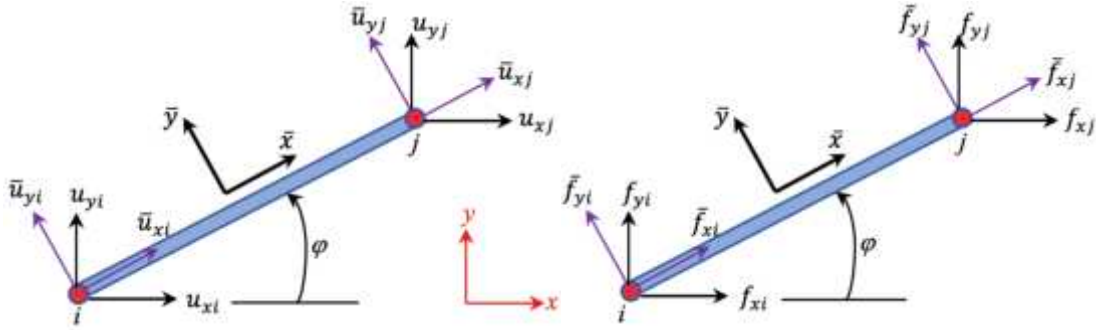


Fig.11. Déplacements et forces nodaux d'un élément de treillis, avec orientation de l'axe local  $\bar{x}$  formant un angle  $\varphi$  par rapport à l'axe global  $x$ .

Ce système peut aussi s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_{x_i} \\ \bar{u}_{y_i} \\ \bar{u}_{x_j} \\ \bar{u}_{y_j} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x_i} \\ u_{y_i} \\ u_{x_j} \\ u_{y_j} \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{f}_{x_i} \\ \bar{f}_{y_i} \\ \bar{f}_{x_j} \\ \bar{f}_{y_j} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{x_i} \\ f_{y_i} \\ f_{x_j} \\ f_{y_j} \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

$$\{\bar{u}^{(e)}\} = T^{(e)}\{u^{(e)}\} \quad (4.11)$$

$$\{\bar{f}^{(e)}\} = (T^{(e)})^T\{f^{(e)}\} \quad (4.12)$$

Où  $T^{(e)}$  représente la matrice de transformation et  $(T^{(e)})^T$  sa transposée, tout en sachant que  $T^T = T^{-1}$ . Cependant les équations de raideur de la barre dans les coordonnées globales seront écrites comme suit :

$$\{f^{(e)}\} = K^{(e)}\{u^{(e)}\} \quad (4.13)$$

$$\{\bar{u}^{(e)}\} = T^{(e)}\{u^{(e)}\} \quad (4.14)$$

$$\{f^{(e)}\} = (T^{(e)})^T\{\bar{f}^{(e)}\} \quad (4.15)$$

En mettant l'équation (4.5) dans (4.12) on obtient :

$$\{f^{(e)}\} = (T^{(e)})^T \bar{K}^{(e)} T^{(e)} \{\bar{u}^{(e)}\} \quad (4.16)$$

$$K^{(e)} = (T^{(e)})^T \bar{K}^{(e)} T^{(e)} \quad (4.17)$$

La matrice finale  $K^{(e)}$  est déterminée comme suit :

$$K^{(e)} = \left(\frac{EA}{L}\right)^e \begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$c = \cos\varphi$  et  $s = \sin\varphi$

### IV.3 Formulation variationnelle

#### IV.3.1 Fonctionnelle énergie potentielle totale

La matrice de rigidité d'une barre axiale est déduite à l'aide d'une approche formelle, pouvant s'appliquer à de nombreux autres types d'éléments.

On définit deux fonctions de forme linéaires (figure 12) :

$$N_i(\xi) = 1 - \xi, \quad N_j(\xi) = \xi \quad (4.19)$$

Où la variable  $\xi$  est reliée à la coordonnée réelle  $x$  par :

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (4.20)$$

Ces fonctions permettent d'interpoler le déplacement entre les deux nœuds  $i$  et  $j$ .

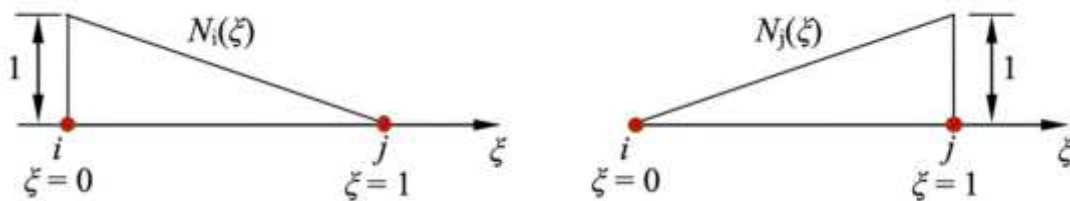


Fig.12. Représentation des fonctions d'interpolation.

Le déplacement de la barre s'écrit :

$$u(x) = N_i(\xi)u_i + N_j(\xi)u_j \quad (4.21)$$

Ou sous forme matricielle :

$$u = [N_i \ N_j] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = [N]\{u\} \quad (4.22)$$

La déformation est donnée par l'équation suivante :

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \left[\frac{dN}{dx}\right] u^e = [B]\{u\} \quad (4.23)$$

La matrice  $[B]$  est la matrice de déformation-déplacement, donnée par :

$$[B] = \frac{d}{dx} [N_i(\xi) \quad N_j(\xi)] = \frac{d}{d\xi} [N_i(\xi) \quad N_j(\xi)] \frac{d\xi}{dx} \quad (4.24)$$

Où  $\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{L}$ , donc :

$$[B] = \left[ -\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right] \quad (4.25)$$

La contrainte dans la barre est donnée par la loi de Hooke :

$$\sigma = E\varepsilon = E[B]u \quad (4.26)$$

L'énergie de déformation interne de la barre est définie par l'équation suivante :

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma^T \varepsilon dV = \frac{1}{2} \int_V (u^T B^T E B u) dV \quad (4.27)$$

$$= \frac{1}{2} u^T \left[ \int_V B^T E B dV \right] u \quad (4.28)$$

L'Énergie potentiel des forces extérieures est comme suit :

$$W = -f_i u_i - f_j u_j = -u^T f \quad (4.29)$$

L'énergie potentielle totale du système est :

$$\Pi = U + W \quad (4.30)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} u^T \left[ \int_V B^T E B dV \right] u - u^T f \quad (4.31)$$

Avec  $d\Pi = 0$  on obtient l'équation suivante qui nous permet de déduire la matrice de rigidité  $k$

$$\left[ \int_V B^T E B dV \right] u = f \quad (4.32)$$

$$k u = f \quad (4.33)$$

$$\text{Où } k = \int_V (B^T E B) dV \quad (4.34)$$

$$k = \int_0^L \begin{Bmatrix} -1/L \\ 1/L \end{Bmatrix} E [-1/L \quad 1/L] A dx = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Cependant, l'énergie de déformation peut s'écrire comme suit :

$$U = \frac{1}{2} u^T k u \quad (4.36)$$

**Exercice 1**

On considère une barre soumise à des charges axiales et divisée en plusieurs éléments comme indiqué sur la figure ci-dessous.

La barre est encastrée à son extrémité gauche et libre à l'autre. La barre est constituée de plusieurs éléments de longueurs  $L_1=L_2=100\text{mm}$  et  $L_3=150\text{mm}$ , de section  $A_1=A_2=200\text{mm}^2$  et  $A_3=100\text{mm}^2$  et de module d'élasticité  $E=200\text{GPa}$ .

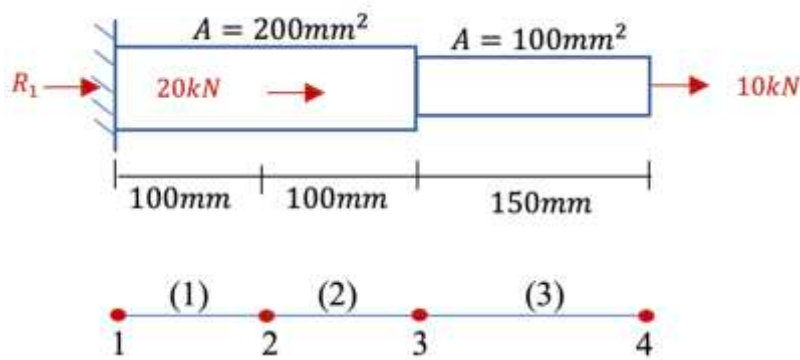
Les forces axiales sont appliquées au nœuds.

En utilisant la méthode de rigidité déterminer :

Les déplacements aux nœuds.

Les réactions à l'appui encastré.

La contrainte ( $\sigma$ ) dans chaque élément.



**Solution**

N° éléments	Nœuds	
(1)	1	2
(2)	2	3
(3)	3	4

$$[K_1] = \frac{A_1 E}{L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K_1] = \frac{200 \times 200 \times 10^3}{100} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$[K_2] = \frac{A_2 E}{L_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K_2] = \frac{200 \times 200 \times 10^3}{100} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$[K_3] = \frac{A_3 E}{L_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K_3] = \frac{100 \times 200 \times 10^3}{150} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 1.33 & -1.33 \\ -1.33 & 1.33 \end{bmatrix}$$

$$[K] = 10^5 \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 4 + 4 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 4 + 1.33 & -1.33 \\ 0 & 0 & -1.33 & 1.33 \end{bmatrix}$$

$$[K]\{u\} = \{f\}$$

$$[K] = 10^5 \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 5.33 & -1.33 \\ 0 & 0 & -1.33 & 1.33 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{cases} f_1 = R_1 \\ f_2 = 20 \times 10^3 \\ f_3 = 0 \\ f_4 = 10 \times 10^3 \end{cases}$$

#### Application des conditions aux limites

$$10^5 \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 5.33 & -1.33 \\ 0 & 0 & -1.33 & 1.33 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{cases} f_1 = R_1 \\ f_2 = 20 \times 10^3 \\ f_3 = 0 \\ f_4 = 10 \times 10^3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -4 & 5.33 & -1.33 \\ 0 & -1.33 & 1.33 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 0.075 \text{ mm} \\ u_3 = 0.1 \text{ mm} \\ u_4 = 0.1752 \text{ mm} \end{cases}$$

#### Calcul de $R_1$

$$10^5(4u_1 - 4u_2 + 0u_3 + 0u_4) = R_1$$

$$10^5(-4 \times 0.075) = R_1$$

$$R_1 = -30000 = -30 \text{ kN}$$

#### Calcul des contraintes

$$\sigma = E[B]\{u\}$$

$$\sigma_1 = E \frac{1}{L_1} [-1 \quad 1] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_1 = 200 \times 10^3 \times \frac{1}{100} [-1 \quad 1] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.075 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_1 = 150 \text{MPa}$$

$$\sigma_2 = E \frac{1}{L_2} [-1 \quad 1] \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_2 = 200 \times 10^3 \times \frac{1}{100} [-1 \quad 1] \begin{Bmatrix} 0.075 \\ 0.1 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_2 = 185 \text{MPa}$$

$$\sigma_3 = E \frac{1}{L_3} [-1 \quad 1] \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_3 = 200 \times 10^3 \times \frac{1}{150} [-1 \quad 1] \begin{Bmatrix} 0.1 \\ 0.1752 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_3 = 33.33 \text{MPa}$$

### Exercice 2

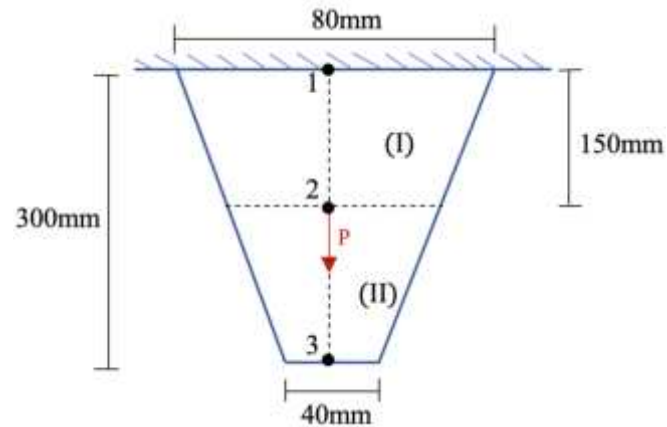
Soit une barre de section conique et d'épaisseur uniforme, comme illustré sur la figure ci-dessous. On demande de déterminer les déplacements aux nœuds en discrétisant la barre en deux éléments.

Les caractéristiques mécaniques de la barre sont :

- Masse volumique :  $\rho = 7800 \text{Kg/m}^3$
- Module de Young:  $E = 2 \times 10^5 \text{MN/m}^2$

La barre est soumise à une charge concentrée P en son centre.

Il est également demandé de déterminer les forces de réaction aux appuis.



**Solution**

**Détermination des déplacements**

Pour la barre conique

La surface de la section au nœud 1 :  $S_1 = 80 \times 10 = 800mm^2$

La surface de la section au nœud 3 :  $S_3 = 40 \times 10 = 400mm^2$

Et au nœud 2 :  $S_2 = \frac{800+400}{2} = 600mm^2$

Pour la barre à section variable (stepped)

-La section et le poids de l'élément 1 :

$$A_1 = \frac{S_1 + S_2}{2} = \frac{800 + 600}{2} = 700mm^2$$

$$w_1 = A_1 \times L_1 \times \rho \times g = 700 \times 150 \times 7800 \times 10^{-9} \times 9.81$$

$$w_1 = 8.034N$$

-La section et le poids de l'élément 2 :

$$A_2 = \frac{S_2 + S_3}{2} = \frac{600 + 400}{2} = 500mm^2$$

$$w_2 = A_2 \times L_2 \times \rho \times g = 500 \times 150 \times 7800 \times 10^{-9} \times 9.81$$

$$w_2 = 5.739N$$

**Calcul des forces appliquées aux nœuds**

$$F_1 = \frac{w_1}{2} = \frac{8.034}{2} = 4.017N$$

$$F_2 = \frac{w_1}{2} + \frac{w_2}{2} + P = 4.017 + \frac{5.739}{2} + 1000 = 1000.88N$$

$$F_3 = \frac{w_2}{2} = \frac{5.739}{2} = 2.87N$$

$$F = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.017 \\ 1006.88 \\ 2.87 \end{Bmatrix}$$

$$[K]\{u\} = [F]$$

$$[K^1] = \frac{700 \times 2 \times 10^5}{150} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K^2] = \frac{500 \times 2 \times 10^5}{150} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \frac{10^6}{15} \begin{bmatrix} 14 & -14 & 0 \\ -14 & 24 & -10 \\ 0 & -10 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\frac{10^6}{15} \begin{bmatrix} 14 & -14 & 0 \\ -14 & 24 & -10 \\ 0 & -10 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.017 \\ 1006.88 \\ 2.87 \end{Bmatrix}$$

**Application des conditions aux limites**

$$\frac{10^6}{15} \begin{bmatrix} 24 & -10 \\ -10 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1006.8 \\ 2.87 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{10^6}{15} (24u_2 - 10u_3) = 1006.887 \\ \frac{10^6}{15} (-10u_2 + 10u_3) = 2.87 \end{cases}$$

$$\frac{10^6}{15} (14u_2) = 1009.75$$

$$u_2 = 1082 \times 10^{-6}mm$$

$$u_3 = 1086 \times 10^{-6}mm$$

**Calcul de la réaction**

$$R_1 = \frac{10^6}{15} [14 \quad -14 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 1082 \times 10^{-6} \\ 1086 \times 10^{-6} \end{bmatrix} = 4.017$$

$$R_1 = \frac{10^6}{15} (0 - 14 \times 1082 \times 10^{-6} + 0) = 4.017$$

$$R_1 = -1013.8N$$

**Exercice 3**

Soit un élément barre de longueur L, de masse volumique constante, encastré des deux extrémités et soumis à une charge répartie axiale. Déterminer :

-Les réactions  $R_A$  et  $R_B$



**Solution**

$$R_A + R_B = \rho g AL$$

$$\delta = 0$$

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{P}{AE}$$

$$\delta = \int_0^L \varepsilon dx$$

$$P = -R_A - \rho g Ax$$

$$\varepsilon = \frac{-R_A}{AE} - \rho g x$$

$$\delta = \int_0^L \left( -\frac{R_A}{AE} - \frac{\rho g x}{E} \right) dx$$

$$-\frac{R_A}{AE} - \frac{\rho g}{E} L = 0$$

$$R_A = -\frac{A}{2} \rho g L$$

$$R_B = -\rho g AL - R_A$$

$$R_B = -\rho g AL + \frac{A}{2} \rho g L = \frac{1}{2} \rho g AL$$

$$\sigma(x) = \frac{p(x)}{A} = \frac{-\frac{A}{2} \rho g L - \rho g Ax}{A}$$

$$\sigma(x) = \rho g \left( \frac{L}{2} - x \right)$$

$$\varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E} = \frac{\rho g}{E} \left( \frac{L}{2} - x \right)$$

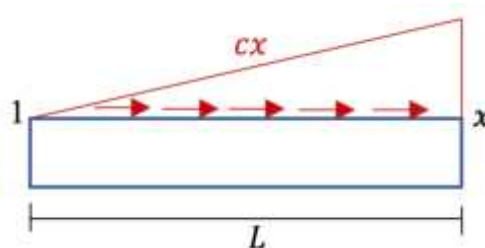
$$u(x) = \int_{x=0}^{x=x} \varepsilon(X) dX = \int_0^x \frac{\rho g}{E} \left( \frac{L}{2} - X \right) dX$$

$$u(x) = \frac{\rho g}{2E} (Lx - x^2)$$

#### Exercice 4

Soit une barre de longueur  $L$ , soumise à une charge axiale répartie de façon linéaire. Variant de 0 (nœud 1) à une valeur maximale au nœud 2.

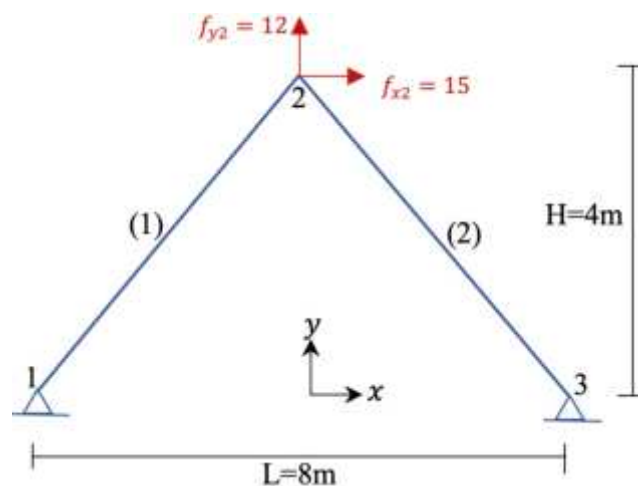
Déterminer les forces nodales équivalentes.



#### Exercice 5

Soit l'exemple treillis suivant composé de 2 barres telles numérotées sur la figure ci-dessous, de même module de Young  $E$  mais de sections différentes  $A^{(1)} \neq A^{(2)}$ . Deux forces sont appliquées au nœud 2 (horizontale et verticale). En plus des dimensions indiquées sur la figure, déterminer :

- La matrice de rigidité globale  $K$ ,
- Le vecteur déplacement solution global,
- Le vecteur force global.



**Solution**

**Calcul de la matrice de rigidité globale**

$$\text{Élément 1 : } tg\varphi^1 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\varphi^1 = 26.56^\circ$$

$$\cos\varphi^1 = c = 0.89$$

$$\sin\varphi^1 = s = 0.45$$

$$L^1 = L^2 = \sqrt{4^2 + 4^2} = 5.65^\circ$$

$$[K^1] = \frac{E^1 A^1}{L^1} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

$$[K^1] = \frac{1000 \times 3}{5.65} \begin{bmatrix} 0.79 & 0.40 & -0.79 & -0.40 \\ 0.40 & 0.20 & -0.40 & -0.20 \\ -0.79 & -0.40 & 0.79 & 0.40 \\ 0.40 & -0.20 & 0.40 & 0.20 \end{bmatrix}$$

$$[K^1] = \begin{bmatrix} 420 & 212 & -420 & -212 \\ 212 & 106 & -212 & -106 \\ -420 & -212 & 420 & 212 \\ -212 & -106 & 212 & 106 \end{bmatrix}$$

Élément 2 :

$$\varphi^2 = 360 - 26.5 = 333.44^\circ$$

$$\cos\varphi^2 = c = 0.89$$

$$\sin\varphi^2 = s = -0.45$$

$$[K^2] = \frac{E^2 A^2}{L^2} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

$$[K^2] = \frac{1000 \times 4}{5.65} \begin{bmatrix} 0.79 & -0.40 & -0.79 & 0.40 \\ -0.40 & 0.20 & 0.40 & -0.20 \\ -0.79 & -0.40 & 0.79 & -0.40 \\ 0.40 & -0.20 & -0.40 & 0.20 \end{bmatrix}$$

$$[K^2] = \begin{bmatrix} 559 & -283 & -559 & 283 \\ -283 & 142 & 283 & -142 \\ -559 & 283 & 559 & -283 \\ 283 & -142 & -283 & 142 \end{bmatrix}$$

**Assemblage des matrices**

$$[K] = \begin{bmatrix} 420 & 212 & -420 & -212 & 0 & 0 \\ 212 & 106 & -212 & -106 & 0 & 0 \\ -420 & -212 & 420 + 559 & 212 - 283 & -559 & 283 \\ -212 & -106 & 212 - 283 & 106 + 142 & 283 & -142 \\ 0 & 0 & -559 & 283 & 559 & -283 \\ 0 & 0 & 283 & -142 & -283 & 142 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 420 & 212 & -420 & -212 & 0 & 0 \\ 212 & 106 & -212 & -106 & 0 & 0 \\ -420 & -212 & 979 & -71 & -559 & 283 \\ -212 & -106 & -71 & 248 & 283 & -142 \\ 0 & 0 & -559 & 283 & 559 & -283 \\ 0 & 0 & 283 & -142 & -283 & 142 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 420 & 212 & -420 & -212 & 0 & 0 \\ 212 & 106 & -212 & -106 & 0 & 0 \\ -420 & -212 & 979 & -71 & -559 & 283 \\ -212 & -106 & -71 & 248 & 283 & -142 \\ 0 & 0 & -559 & 283 & 559 & -283 \\ 0 & 0 & 283 & -142 & -283 & 142 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 979 & -71 \\ -71 & 248 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x2} \\ u_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 15 \\ 12 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} 979u_{x2} - 71u_{y2} = 15 \\ -71u_{x2} + 248u_{y2} = 12 \end{cases}$$

$$u_{x2} = 0.020$$

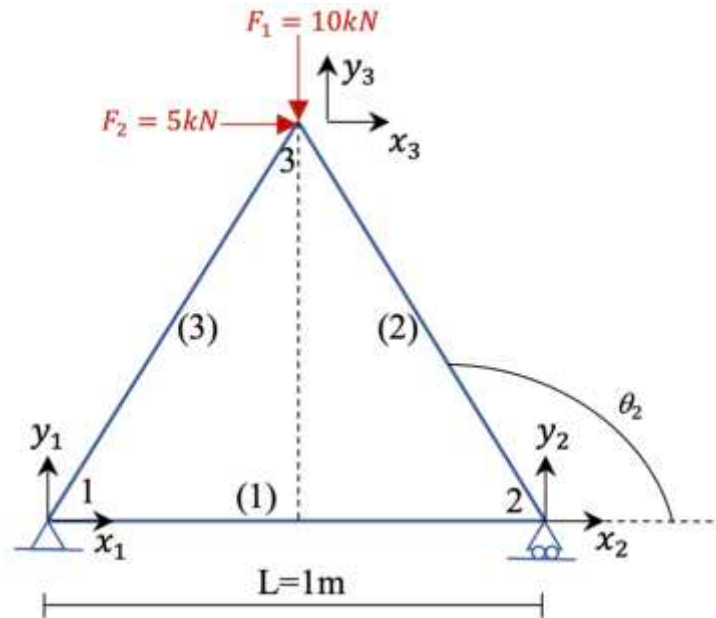
$$u_{y2} = 0.054$$

**Calcul Du Vecteur Force Global**

$$\{f\} = [K]\{u\} = \begin{Bmatrix} -420(0.020) - 212(0.054) \\ -212(0.020) - 106(0.054) \\ 15 \\ 12 \\ 559(0.020) + 283(0.054) \\ 283(0.020) - 142(0.054) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -19.84 \\ -9.964 \\ 15 \\ 12 \\ 4.102 \\ -2 \end{Bmatrix}$$

**Exercice 6**

Soit un système de treillis composé de 3barres (éléments) de même module de Young E et de même section  $A^{(1)}=A^{(2)}=A^{(3)}=0.001\text{m}^2$  et de même longueur  $L = 1\text{m}$ . On note également un appui double au nœud 1 et appui simple au nœud 2 et deux forces  $F_1$  et  $F_2$  appliquées au nœud 3 telle montré sur la figure ci-dessous.



**Solution**

Chaque nœud contient 2ddl donc le tableau de connectivité est défini comme suit :

N° éléments	Nœuds		$\theta$
(1)	1	2	0
(2)	2	3	$120^\circ = 2\pi/3$
(3)	1	3	$60^\circ = \pi/3$

Comme dans l'exercice précédent la matrice de rigidité doit être déterminée pour chaque élément puis l'assemblage sera effectué comme suit :

$$[K] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} C_1^2 + C_3^2 & C_1S_1 + C_3S_3 & -C_1^2 & -C_1S_1 & -C_3^2 & -C_3S_3 \\ C_1S_1 + C_3S_3 & S_1^2 + S_3^2 & -C_1S_1 & -S_1^2 & -C_3S_3 & -S_3^2 \\ -C_1^2 & -C_1S_1 & C_1^2 + C_2^2 & C_1S_1 + C_2S_2 & -C_2^2 & -C_2S_2 \\ -C_1S_1 & -S_1^2 & C_1S_1 + C_2S_2 & S_1^2 + S_2^2 & -C_2S_2 & -S_2^2 \\ C_3^2 & -C_3S_3 & -C_2^2 & -C_2S_2 & C_2^2 + C_3^2 & C_2S_2 + C_3S_3 \\ -C_3S_3 & -S_3^2 & -C_2S_2 & -S_2^2 & C_2S_2 + C_3S_3 & S_2^2 + S_3^2 \end{bmatrix}$$

Avec :

$$C_1 = \cos(\theta_1) = 1 \quad S_1 = \sin(\theta_1) = 0$$

$$C_2 = \cos(\theta_2) = -0.5 \quad S_2 = \sin(\theta_2) = \sqrt{3}/2$$

$$C_3 = \cos(\theta_3) = 0.5 \quad S_3 = \sin(\theta_3) = \sqrt{3}/2$$

$$\begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ 0 \\ f_{y2} \\ 5 \\ -10 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} C_1^2 + C_3^2 & C_1S_1 + C_3S_3 & -C_1^2 & -C_1S_1 & -C_3^2 & -C_3S_3 \\ C_1S_1 + C_3S_3 & S_1^2 + S_3^2 & -C_1S_1 & -S_1^2 & -C_3S_3 & -S_3^2 \\ -C_1^2 & -C_1S_1 & C_1^2 + C_2^2 & C_1S_1 + C_2S_2 & -C_2^2 & -C_2S_2 \\ -C_1S_1 & -S_1^2 & C_1S_1 + C_2S_2 & S_1^2 + S_2^2 & -C_2S_2 & -S_2^2 \\ C_3^2 & -C_3S_3 & -C_2^2 & -C_2S_2 & C_2^2 + C_3^2 & C_2S_2 + C_3S_3 \\ -C_3S_3 & -S_3^2 & -C_2S_2 & -S_2^2 & C_2S_2 + C_3S_3 & S_2^2 + S_3^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{x2} \\ 0 \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 5 \\ -10 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} C_1^2 + C_2^2 & -C_2^2 & -C_2S_2 \\ -C_2^2 & C_2^2 + C_3^2 & C_2S_2 + C_3S_3 \\ -C_2S_2 & C_2S_2 + C_3S_3 & S_2^2 + S_3^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 5 \\ -10 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 0.25 & -0.25 & -(-0.5)\sqrt{3}/2 \\ -0.25 & 0.25 + 0.25 & \frac{(-0.5)\sqrt{3}}{2} + \frac{(0.5)\sqrt{3}}{2} \\ -(-0.5)\sqrt{3}/2 & \frac{(-0.5)\sqrt{3}}{2} + \frac{(0.5)\sqrt{3}}{2} & 3/4 + 3/4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 5 \\ -10 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.625 & -0.525 & 0.9093 \\ 0.525 & 1.05 & 0 \\ 0.9093 & 0 & 3.15 \end{bmatrix} \times 10^5 \times \begin{Bmatrix} u_{x2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{Bmatrix}$$

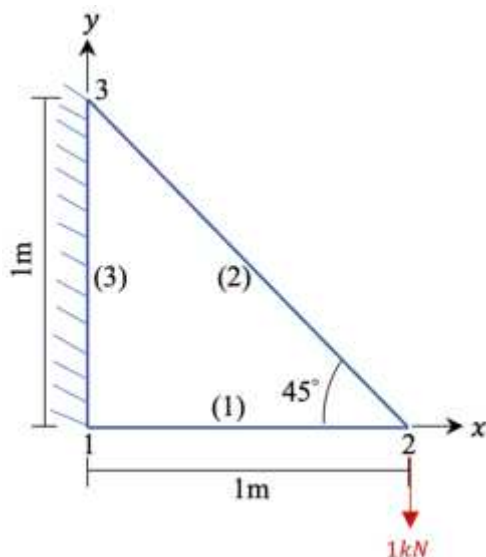
$$\begin{Bmatrix} u_{x2} = 0.256 \times 10^{-4} \\ u_{x3} = 0.604 \times 10^{-4} \\ u_{y3} = -0.3915 \times 10^{-4} \end{Bmatrix} [m]$$

### Calcul des réactions

$$\begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 0.67 \\ 0 \\ 9.33 \\ 5 \\ 10 \end{Bmatrix}$$

### Exercice 7

Calculez le déplacement nodal et les forces si la raideur de l'élément du treillis est de 10 kN/mm et que la structure est soumise à une charge de 1 kN comme illustré dans la figure ci-dessous.



**Solution**

N° éléments	Nœuds pour chaque élément	
(1)	1	2
(2)	2	3

Calcul de la longueur de l'élément (1) :

$$L_2 = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}$$

$$L_2 = \sqrt{2} \times 1000 = 1414mm$$

$$[K^e] = \frac{E^e A^e}{L^e} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

Élément	L(mm)	$\theta$	c	s
(1)	1000	0	1	0
(2)	1414	135	-0.707	0.707

**Détermination de La matrice de rigidité de l'élément 1**

$$[K^1] = 10.000 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Détermination de La matrice de rigidité de l'élément 2**

$$[K^2] = 10.000 \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

La matrice de rigidité globale est définie comme suit :

$$[K]_{1,2} = 10.000 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 + 0.5 & 0 + (-0.5) & -0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 + (-0.5) & 0 + (0.5) & 0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{1,2} = 10.000 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$[K][U] = [F]$$

$$10.000 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ f_{3x} \\ f_{3y} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} 10.000[1.5u_2 - 0.5v_2] = 0 & (a) \\ 10.000[-0.5u_2 + 0.5v_2] = -1000 & (b) \end{cases}$$

$$10.000 \times u_2 = -1000$$

$$u_2 = \frac{-1000}{10.000} = -0.1mm$$

$$1.5u_2 = 0.5v_2$$

$$v_2 = \frac{1.5u_2}{0.5} = \frac{1.5(-0.1)}{0.5}$$

$$v_2 = -0.3mm$$

### Détermination des forces de réaction

$$F_{1x} = 10.000[-1 \times u_2]$$

$$F_{1x} = 10.000[-1 \times (-0.1)]$$

$$F_{1x} = 1000N$$

$$F_{1y} = 0$$

$$F_{3x} = 10.000[-0.5u_2 + 0.5v_2]$$

$$F_{3x} = 10.000[(-0.5)(-0.1) + 0.5(-0.3)]$$

$$F_{3x} = -1000N$$

$$F_{3y} = 10.000[0.5u_2 - 0.5v_2]$$

$$F_{3y} = 10.000[0.5(-0.1) - 0.5(-0.3)]$$

$$F_{3y} = 1000N$$

**Vérification de l'équilibre des forces**

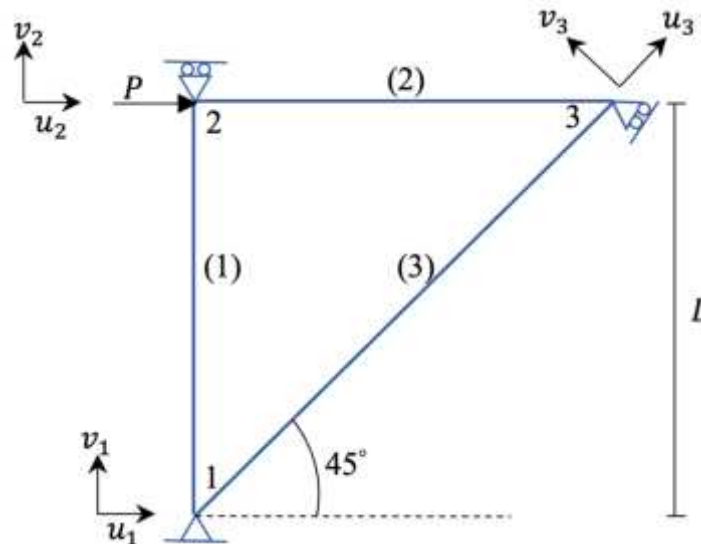
$$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 1000 + 0 - 1000 = 0$$

$$F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 0 - 1000 + 1000 = 0$$

**Exercice 8**

Pour l'exemple de treillis représenté sur la figure suivante, déterminez les déplacements ( $u_2$  et  $u_3$ ).

$P = 1000kN$ ,  $L = 1m$ ,  $E = 210Gpa$   
 $A = 6 \times 10^{-4}m^2$  Pour l'élément (1) et (2)  
 $A = 6\sqrt{2} \times 10^{-4}m^2$  Pour l'élément (3)



**Solution**

**Élément (1) :**  $\theta = 90^\circ$   
 $(c = \cos\theta, \quad s = \sin\theta)$

$$[K^e] = \frac{E^e A^e}{L^e} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

$$[K^1] = \frac{6 \times 10^{-4} \times 210 \times 10^9}{1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Élément (2) :**  $\theta = 0^\circ$

$$[K^2] = \frac{6 \times 10^{-4} \times 210 \times 10^9}{1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Élément (3) :  $\theta = 45^\circ$  ( $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $s = \frac{1}{\sqrt{2}}$ )

$$[K^3] = \frac{6\sqrt{2} \times 10^{-4} \times 210 \times 10^9}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

La matrice de rigidité globale est déterminée comme suit :

$$[K] = [K^1] + [K^2] + [K^3]$$

$$[K] = 1260 \times 10^5 \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 & 0 & -1 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & -1 & 0 & 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$[K]\{u\} = \{F\}$$

$$1260 \times 10^5 \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 & 0 & -1 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & -1 & 0 & 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ f_{3x} \\ f_{3y} \end{Bmatrix}$$

**Application des conditions aux limites**

$$u_1 = v_1 = 0$$

$$v_2 = 0; v_3 = 0$$

$$u_2 = u_3 = ?$$

$$1260 \times 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \times 10^5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 1260u_2 - 1260u_3 = 20 \\ -1260u_2 + 1890u_3 = 0 \end{cases}$$

$$630u_3 = 20$$

$$u_3 = 0.03174m$$

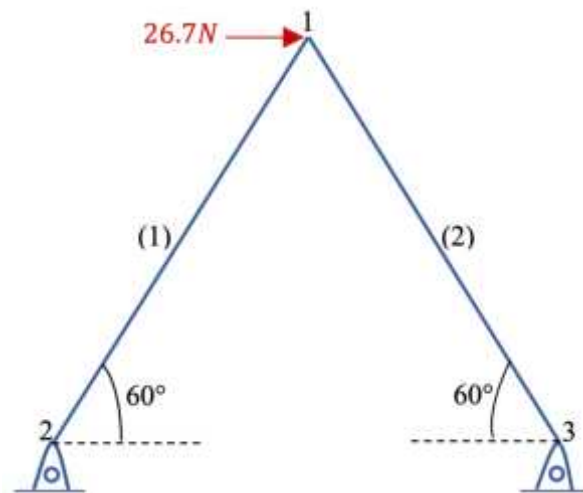
$$u_2 = 0.04761m$$

**Exercice 8**

Pour le treillis illustré dans la figure suivante, déterminez les composantes horizontale et verticale du déplacement au nœud 1.

Les données sont :

- Module d'élasticité  $E = 69 \text{ GPa} = 69 \times 10^9 \text{ Pa}$
- Longueur  $L = 2.54 \text{ m}$
- Charge  $P = 26.7 \text{ N}$



## Chapitre V ÉLÉMENTS FINIS POUTRE DE BERNOULLI-EULER

### V.1 Introduction

L'analyse par éléments finis des poutres constitue une étape essentielle dans la modélisation des structures en génie civil et mécanique. Les poutres sont des éléments structurels destinés à résister principalement à la flexion, mais également aux efforts tranchants et parfois à la torsion. Contrairement aux treillis, où seules les forces axiales sont considérées, les poutres doivent satisfaire à des conditions cinématiques et statiques plus complexes.

Deux grandes théories sont classiquement utilisées pour décrire le comportement des poutres :

- ❖ **La théorie d'Euler–Bernoulli**, qui suppose que les sections droites restent planes et perpendiculaires à l'axe neutre après déformation. Cette théorie est simple et efficace pour les poutres **minces** où les effets de cisaillement sont négligeables.
- ❖ **La théorie de Timoshenko**, plus générale, qui autorise la rotation des sections droites et prend en compte les déformations dues au cisaillement. Elle est adaptée aux poutres épaisses ou lorsque la distribution du cisaillement ne peut être ignorée.

L'objectif de l'analyse par éléments finis (AEF) appliquée aux poutres est de discrétiser la structure continue en éléments finis, chacun étant gouverné par une matrice de rigidité locale, dérivée des équations de la théorie choisie (Euler-Bernoulli ou Timoshenko). Cette approche permet de déterminer avec précision les déplacements, rotations, efforts internes et contraintes pour des conditions de charge et d'appui complexes.

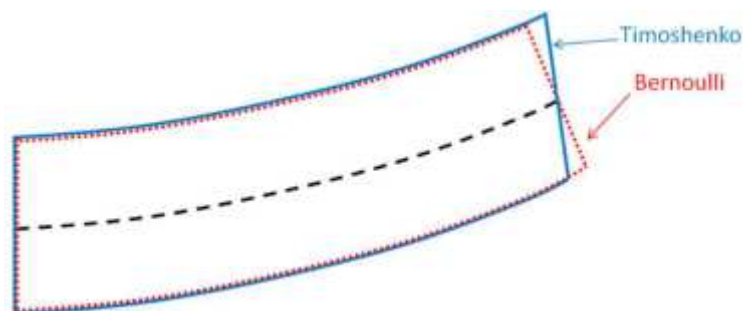


Fig. 13. Déformation d'une poutre selon les théories d'Euler–Bernoulli et de Timoshenko.

Les modèles de poutres sont omniprésents dans les bâtiments (poutres, planchers, linteaux, charpentes), les ponts, les structures portuaires et les structures industrielles et mécaniques. Les poutres constituent ainsi le socle fondamental de la modélisation structurelle, servant de base à des éléments plus complexes comme les plaques, coques, ou structures tridimensionnelles.

### V.2 Types de poutre

Il existe plusieurs types de poutres selon leurs conditions d'appui et leur mode de liaison avec la structure. Ces poutres se distinguent principalement par la manière dont leurs extrémités sont

soutenues ou bloquées, ce qui influence directement leur comportement mécanique, leur rigidité, et leur répartition des efforts internes. Ces différents types de poutres sont représentés sur la Figure 14, illustrant les principales configurations rencontrées dans la conception des structures.

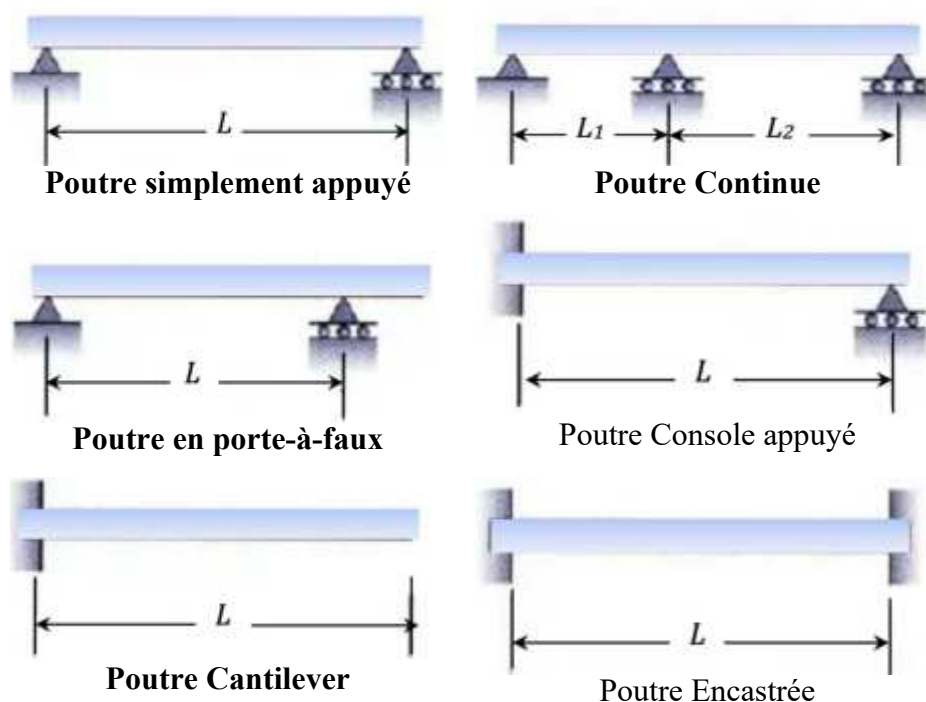


Fig.14. Types de poutres selon les conditions d'appui.

### V.3 Type de chargement

Les poutres peuvent être soumises à différents types de chargements, selon la nature des efforts exercés sur elles. Ces chargements provoquent des efforts internes (moment fléchissant, effort tranchant, effort normal) et des déformations variables selon leur distribution. Ces trois formes de chargement sont représentées sur la Figure 15, permettant de visualiser l'effet de chaque type de sollicitation sur une poutre simplement appuyée.

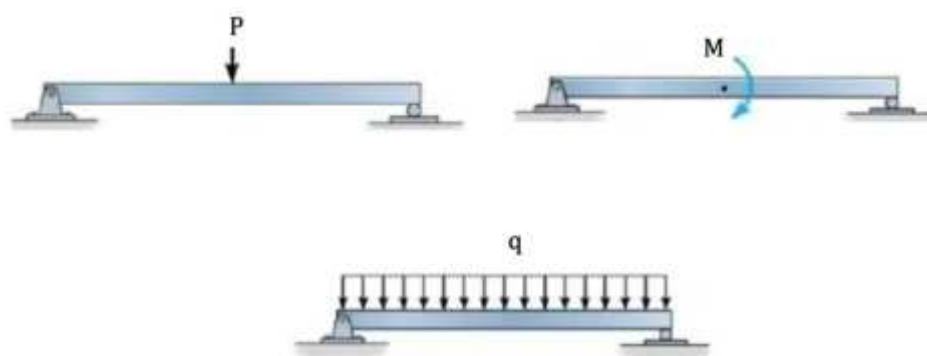


Fig.15. Types de chargements appliqués sur une poutre.

## V.4 Formulation variationnelle

### V.4.1 Fonctionnelle Energie Potentielle Totale

L'énergie potentielle totale est définie comme suit :

$$\pi = U + W \quad (5.1)$$

La matrice de rigidité d'un élément poutre est obtenue en utilisant l'équation de l'énergie interne prise de l'équation de l'énergie potentiel :

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma^T \varepsilon dV \quad (5.2)$$

$$u = y\theta. \quad (5.3)$$

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} \quad (5.4)$$

$$\theta = \frac{dv}{dx} \quad (5.5)$$

$\theta$  est la rotation de la section autour de l'axe  $z$

$$\varepsilon = \frac{d}{dx}(y\theta) = y \frac{d}{dx} \left( \frac{dv}{dx} \right) \quad (5.6)$$

$$\varepsilon = y \frac{d^2v}{dx^2} = y\beta \quad (5.7)$$

$\beta$  représente la courbe de l'axe de la poutre déformée.

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot y \frac{d^2v}{dx^2} \quad (5.8)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_V \left( E \cdot y \frac{d^2v}{dx^2} \right)^T \cdot y \frac{d^2v}{dx^2} dV \quad (5.9)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_V \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right)^T \cdot E^T \cdot y^T \cdot y \frac{d^2v}{dx^2} dV \quad (5.10)$$

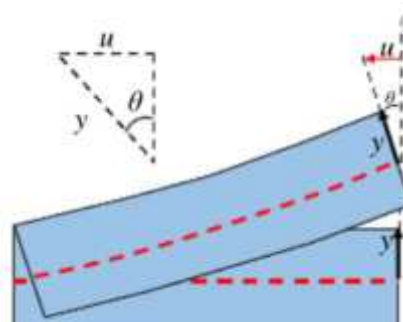
$$U = \frac{1}{2} \int_V \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right)^T \frac{d^2v}{dx^2} \cdot E \left( \int_A y^2 dA \right) dx \quad (5.11)$$

Avec  $I = \int_A y^2 dA$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right)^T \frac{d^2v}{dx^2} dx \quad (5.12)$$

L'énergie extérieure est définie comme suit :

$$W = - \int_0^L q(x)v(x)dx \quad (5.13)$$



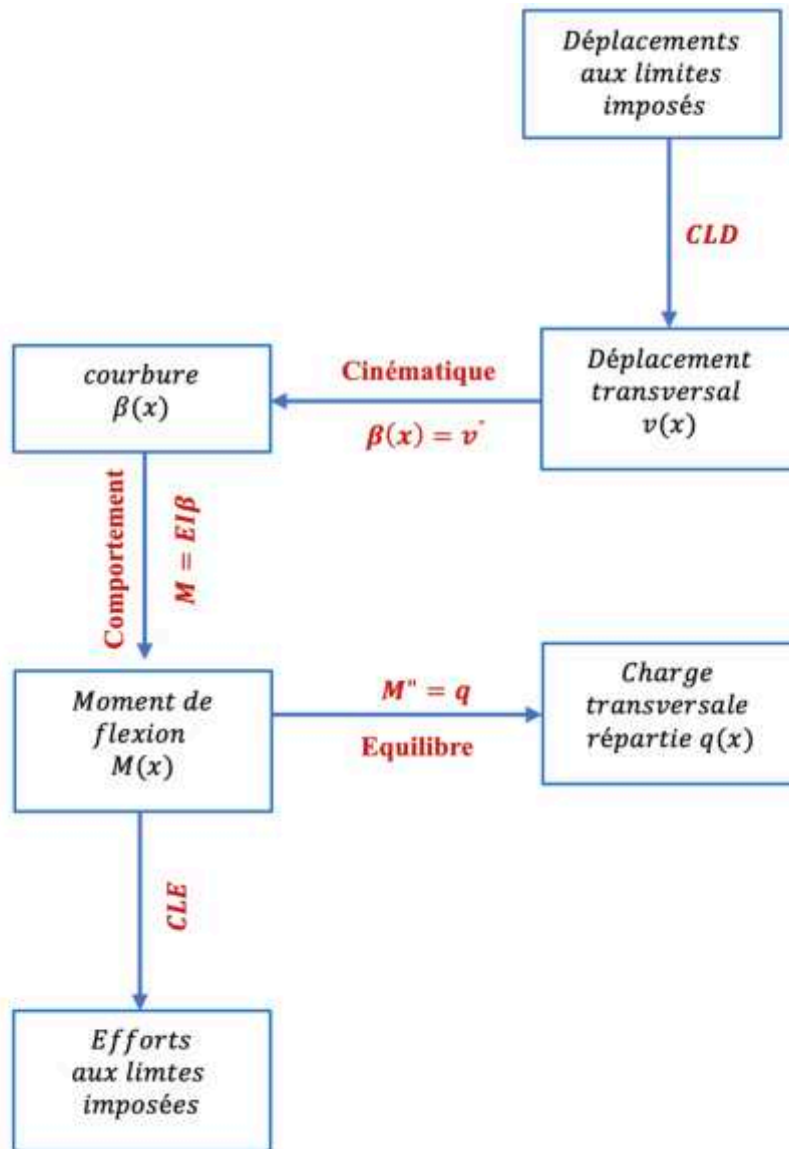
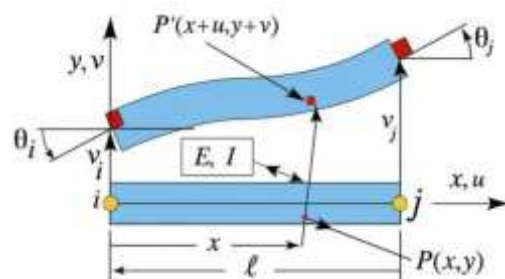


Fig.16. Diagramme de TONTI du modèle mathématique de l'élément poutre.

### V.5 Élément fini poutre

Les éléments finis de poutre sont obtenus en subdivisant longitudinalement les barres ou les poutres. Le type le plus simple d'élément de poutre plan selon Bernoulli-Euler possède deux nœuds d'extrémité : le nœud 1 et le nœud 2, et un total de quatre degrés de liberté (DOF). Ces degrés de liberté sont regroupés dans le vecteur de déplacement nodal :

$$\{u^e\} = \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (5.14)$$



## —CHAPITRE V—ÉLÉMENTS FINIS POUTRES DE BERNOULLI-EULER

L'élément est illustré dans la Figure, qui montre la configuration déformée et non déformée.

La fonction de déplacement  $v^e(x)$  dépend des fonctions d'interpolation cubique d'Hermite  $N^t$  (figure 17) et elle est définie comme suit :

$$v^e(x) = \begin{bmatrix} N_{vi}^{(e)} & N_{\theta i}^{(e)} & N_{vj}^{(e)} & N_{\theta j}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = N^t \{u^e\} \quad (5.15)$$

Avec :

$$\begin{cases} N_{vi}^{(e)} = 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3} \\ N_{\theta i}^{(e)} = x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \\ N_{vj}^{(e)} = \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} \\ N_{\theta j}^{(e)} = -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \end{cases} \quad (5.16)$$

Avec  $\xi = \frac{2x}{l} - 1$ ,  $-1 \leq \xi \leq 1$

En remplaçant l'équation dans l'équation on obtient les fonctions N comme suit :

$$\begin{cases} N_{vi}^{(e)} = \frac{1}{4}(1 - \xi)^2(2 + \xi) \\ N_{\theta i}^{(e)} = \frac{1}{8}l(1 - \xi)^2(1 + \xi) \\ N_{vj}^{(e)} = \frac{1}{4}(1 + \xi)^2(2 - \xi) \\ N_{\theta j}^{(e)} = -\frac{1}{8}l(1 + \xi)^2(1 - \xi) \end{cases} \quad (5.17)$$

$$\beta = \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} (N^t \{u^e\}) = \left( \frac{d^2}{dx^2} N^t \right) \{u^e\} = B \{u^e\} \quad (5.18)$$

Avec :

$$B = \frac{1}{l} \left[ \left( -\frac{6}{l} + \frac{12x}{l^2} \right); \left( -4 + \frac{6x}{l} \right); \left( \frac{6}{l} - \frac{12x}{l^2} \right); \left( -2 + \frac{6x}{l} \right) \right] \quad (5.19)$$

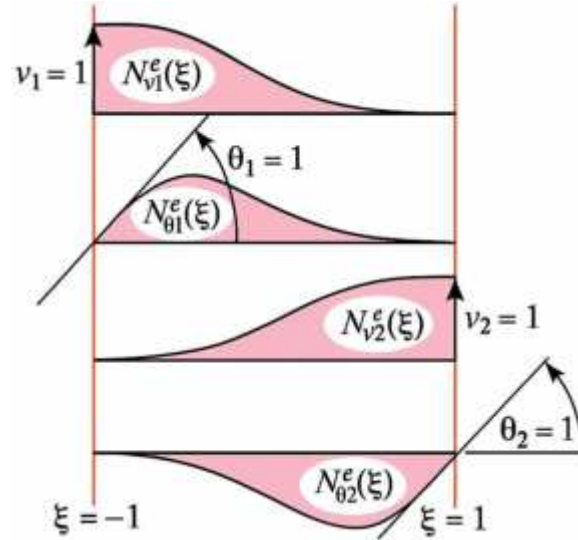


Fig. 17. Fonctions d'interpolation cubique d'Hermite d'un élément poutre.

✱ **Détermination de la matrice de rigidité**

La matrice de rigidité est déterminée en utilisant l'équation de l'Énergie interne

$$U^{(e)} = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{d^2 N^t}{dx^2} \{u^{(e)}\} EI \frac{d^2 N^t}{dx^2} \{u^{(e)}\} dx \quad (5.20)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L \{u^{(e)}\}^t B^t EIB \{u^{(e)}\} dx \quad (5.21)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L B^t EIB \{u^{(e)}\} dx \quad (5.22)$$

Où  $dx = \frac{1}{2} l d\xi$

$$K^{(e)} = \int_0^L EIBB^t dx = \frac{1}{2} l \int_{-1}^1 EIBB^t d\xi \quad (5.23)$$

$$K^{(e)} = \frac{1}{2} EIl \int_{-1}^1 BB^t d\xi = \frac{EIl}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{l} \begin{bmatrix} \frac{6\xi}{l} \\ 3\xi - 1 \\ -6\xi \\ \frac{l}{3\xi + 1} \end{bmatrix} \frac{1}{l} \begin{bmatrix} \frac{6\xi}{l} & 3\xi - 1 & -6\xi & 3\xi + 1 \end{bmatrix} d\xi \quad (5.24)$$

$$K^{(e)} = \frac{EI}{2l^3} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 36\xi^2 & 6\xi(3\xi - 1)l & -36\xi^2 & 6\xi(3\xi + 1)l \\ 6\xi(3\xi - 1)l & (3\xi - 1)^2 l^2 & -6\xi(3\xi - 1)l & (9\xi^2 - 1)l^2 \\ -36\xi^2 & -6\xi(3\xi - 1)l & 36\xi^2 & -6\xi(3\xi + 1)l \\ 6\xi(3\xi + 1)l & (9\xi^2 - 1)l^2 & -6\xi(3\xi + 1)l & (3\xi - 1)^2 l^2 \end{bmatrix} d\xi \quad (5.25)$$

$$K^{(e)} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

✿ Vecteur force nodales équivalente

$$W^{(e)} = \int_0^L qN^t\{u^{(e)}\}dx = -\{u^{(e)}\}^t \int_0^L Nqdx \quad (5.27)$$

$$\{f^{(e)}\} = \int_0^L Nqdx = \frac{1}{2}l \int_{-1}^1 Nqd\xi \quad (5.28)$$

$$\{f^{(e)}\} = \frac{ql}{2} \int_{-1}^1 Nqd\xi = \frac{ql}{2} \int_{-1}^1 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi) \\ \frac{1}{8}l(1-\xi)^2(1+\xi) \\ \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi) \\ -\frac{1}{8}l(1+\xi)^2(1-\xi) \end{array} \right\} d\xi \quad (5.29)$$

$$\{f^{(e)}\} = \left\{ \begin{array}{l} ql/2 \\ ql^2/12 \\ ql/2 \\ -ql^2/12 \end{array} \right\} \quad (5.30)$$

### V.6 Exemple d'assemblage d'éléments poutre

La figure (18) illustre le principe d'assemblage de la matrice de rigidité globale [K] pour une poutre continue en éléments finis. En effet elle montre comment dans la méthode des éléments finis, les matrices de rigidité locale s'assemblent dans une matrice globale en respectant la continuité et la compatibilité des déplacements entre les éléments connectés.

On a une poutre composée de trois éléments reliés en série avec une liaison interne au nœuds 2 et 3 (les deux éléments y partagent leurs degrés de liberté). Une force appliquée est au nœud 3 et un moment est appliqué au nœud 4.

La grande matrice colorée correspond à la matrice de rigidité globale du système, notée [K]. Chaque couleur met en évidence la contribution de chaque élément de poutre :

- les blocs **roses** correspondent au premier élément (entre les nœuds 1 et 2),
- les blocs **jaunes** au second (entre les nœuds 3 et 4).

Les zones où ces blocs se superposent (en orange) représentent l'**assemblage** : les rigidités locales associées aux **degrés de liberté communs** s'ajoutent. Ainsi, la matrice [K] regroupe l'ensemble des contributions locales de chaque élément pour former le **comportement global de la structure**, reliant les déplacements de chaque nœud aux forces correspondantes.

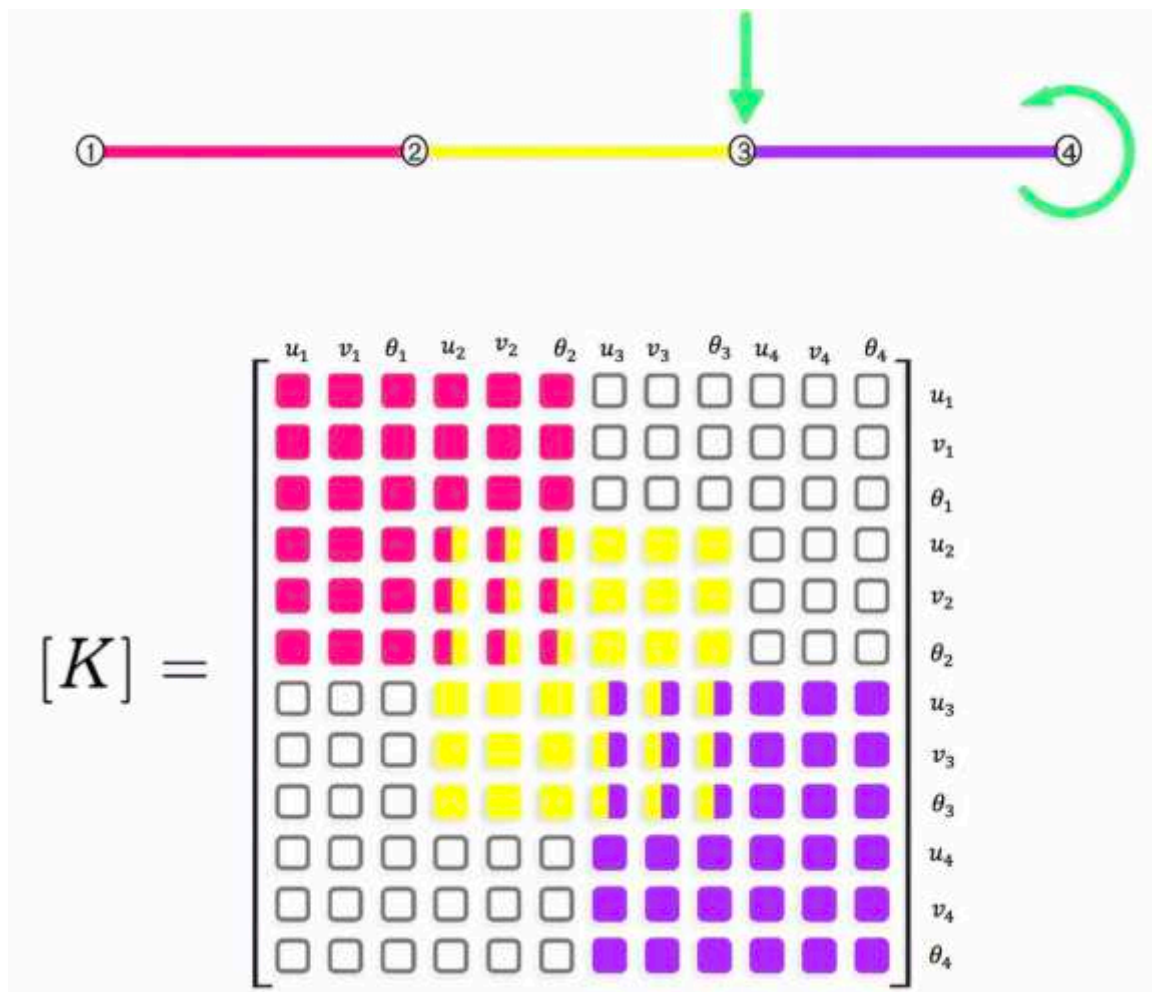


Fig. 18. Assemblage d'éléments poutre.

## V.7 Théorie de la poutre Timoshenko

### V.7.1 Loi de comportement

Contrairement au modèle classique d'Euler-Bernoulli, où l'on suppose que la sections planes restent planes et perpendiculaires à la fibre neutre après déformation, le modèle de Timoshenko admet que les sections planes ne demeurent pas nécessairement perpendiculaires à la surface neutre déformée et que les section planes restent planes (figure 19). Mais ne sont pas forcément normale à la surface neutre déformée.

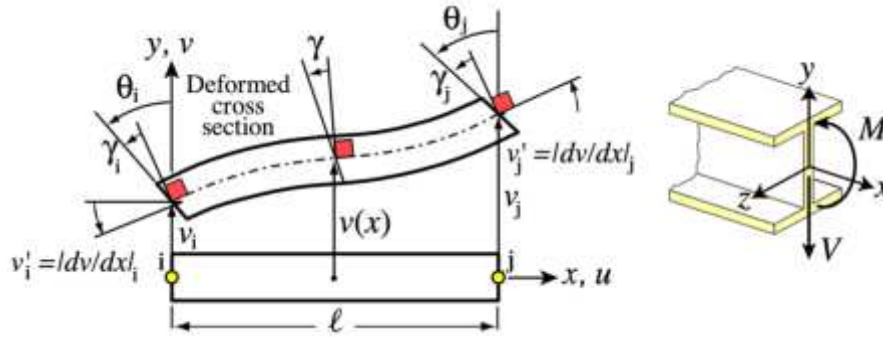


Fig.19. Élément de poutre plane de Timoshenko à deux nœuds.

L'angle de rotation de la section transversale  $\theta$  n'est pas égale à la pente de la fibre neutre  $v'$  car le cisaillement provoque un glissement angulaire supplémentaire. En négligeant les efforts axiaux, le champ de déplacement représente une similitude avec celui du modèle d'Euler-Bernoulli tout en intégrant une correction supplémentaire pour tenir compte de la déformation due au cisaillement :

$$u(x, y) = -y\theta \quad (5.31)$$

$$v(x, y) = v(x) \quad (5.32)$$

$$\text{Avec } \theta = \frac{\partial v}{\partial x} + \gamma = v' + \gamma, \quad \gamma = \frac{V}{GA_s} \quad (5.33)$$

$\gamma$  est la déformation de cisaillement,  $G$  est le module de cisaillement,  $A$  est la section transversale et  $V$  est l'effort tranchant.  $\phi$  est une grandeur sans dimension utilisée pour représenter le rapport de finesse au cisaillement de la poutre :

$$\phi = 12\gamma = \frac{12EI}{GA_sl^2} \quad (5.34)$$

$E$  est le module d'élasticité,  $I$  est le moment d'inertie de la section et  $l$  est la longueur de l'élément.

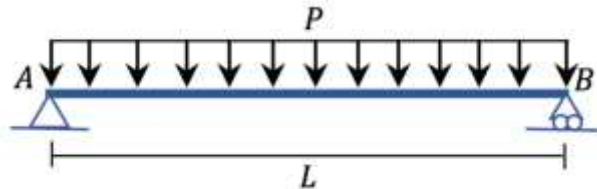
$$K^{(e)} = \frac{EI}{l^3(1+\phi)} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

A partir de l'équation de rigidité de la poutre Timoshenko il peut être noté que plus la valeur de  $\phi$  est élevée. Plus la contribution du cisaillement à la déformation est importante.

$$\{f^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} ql/2 \\ ql^2/12 \\ ql/2 \\ -ql^2/12 \end{Bmatrix} \quad (5.36)$$

**Exercice 1**

Soit une poutre appuyée-appuyée de longueur L est soumise à une charge répartie P. Déterminez la matrice de rigidité du système globale.



**Solution**

La poutre est discrétisée en deux éléments :

$$[K^1] = [K^2] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

**Assemblage des matrices et application des conditions aux limites :**

$$\frac{8EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 3L & -12 & 3L & 0 & 0 \\ 3L & L^2 & -3L & L^2/2 & 0 & 0 \\ -12 & -3L & 12 + 12 & -3L + 3L & -12 & 3L \\ 3L & L^2/2 & -3L + 3L & L^2 + L^2 & -3L & L^2/2 \\ 0 & 0 & -12 & -3L & 12 & -3L \\ 0 & 0 & 3L & L^2/2 & -3L & L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -PL/4 \\ -PL^2/48 \\ -PL/4 \\ PL^2/48 \\ PL/4 \\ PL^2/48 \end{Bmatrix}$$

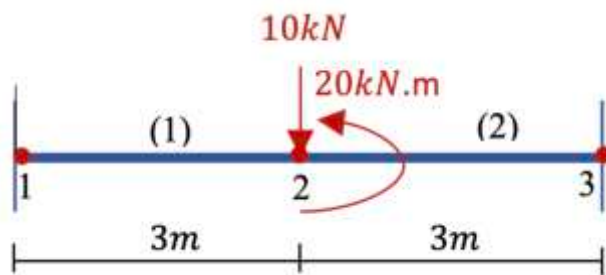
Donc le système réduit est donné par :

$$\frac{8EI}{L^3} \begin{bmatrix} L^2 & -3L & L^2/2 & 0 \\ -3L & 24 & 0 & 3L \\ L^2/2 & 0 & 2L^2 & L^2/2 \\ 0 & 3L & L^2/2 & L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -PL^2/48 \\ -PL/4 \\ PL^2/48 \\ PL^2/48 \end{Bmatrix}$$

**Exercice 2**

Soit une poutre encastree à ses deux extrémités et soumise à son milieu à une force P=10kN et à un moment M=20kN.m Le module de Young de la poutre E=210GPa et le moment d'inertie I=4x10<sup>-4</sup>. Déterminez :

- Le système de rigidité globale,
- Les déplacements inconnus,
- Les réactions.



**Solution**

La poutre est divisée en deux éléments avec :

$$[K^1] = [K^2] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$[K^1] = [K^2] = 3.1 \times 10^6 \begin{bmatrix} 12 & 18 & -12 & 18 \\ 18 & 36 & -18 & 18 \\ -12 & -18 & 12 & -18 \\ 18 & 18 & -18 & 36 \end{bmatrix}$$

Après avoir assemblé les deux matrices on obtient le système de rigidité globale comme suit :

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & \mathbf{24} & \mathbf{0} & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & \mathbf{0} & \mathbf{8L} & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{y1} \\ m_1 \\ f_{y2} \\ m_2 \\ f_{y3} \\ m_3 \end{Bmatrix}$$

**Application des conditions aux limites**

$$v_1 = v_3 = 0$$

$$\theta_1 = \theta_3 = 0$$

La matrice réduite devient comme suit :

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ M \end{Bmatrix}$$

$$3.1 \times 10^6 \begin{bmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 72 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ M \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.134mm \\ 8.96 \times 10^{-5}rad \end{Bmatrix}$$

**Calcul de réactions**

$$\begin{Bmatrix} f_{y1} \\ m_1 \\ f_{y3} \\ m_3 \end{Bmatrix} = 3.1 \times 10^6 \begin{bmatrix} -12 & 18 \\ -18 & 18 \\ -12 & -18 \\ 18 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} f_{y1} &= 10000N \\ m_1 &= 12500N.m \\ f_{y3} &= 0 \\ m_3 &= -2500N.m \end{aligned}$$

**Exercice 3**

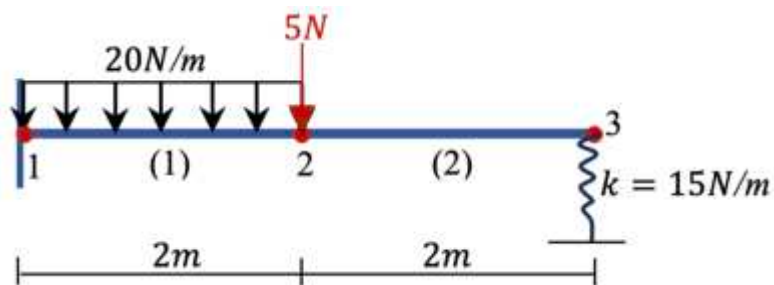
On considère une poutre en porte-à-faux de longueur totale 4 mètres, encadrée à son extrémité gauche et munie à son extrémité droite d'un appui élastique réalisé par un ressort vertical de raideur  $k = 15 \text{ N/m}$ .

La poutre possède une rigidité en flexion constante de  $EI = 20 \text{ N.m}^2$ .

Elle est soumise à deux charges extérieures :

- Une charge uniformément répartie de  $20 \text{ N/m}$  sur les 2 premiers mètres à partir de l'encastrement.
- Une charge ponctuelle verticale de  $5 \text{ N}$  appliquée à l'extrémité libre de la poutre à 4 mètres de l'encastrement.

-Déterminer la matrice de rigidité globale.



**Solution**

**Détermination de la matrice de rigidité globale**

$$[K^1] = [K^2] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$[K^1] = [K^2] = 2.5 \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Pour l'élément linéaire (3)

$$[K^3] = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -15 \\ -15 & 15 \end{bmatrix} = 2.5 \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$$

Assemblage des matrices

$$[K] = 2.5 \begin{bmatrix} & v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 & v_3 & \theta_3 & v_4 \\ \begin{bmatrix} 12 & 12 & -12 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 16 & -12 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -12 & 24 & 0 & -12 & 12 & 0 \\ 12 & 8 & 0 & 32 & -12 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -12 & 18 & -12 & -6 \\ 0 & 0 & 12 & 8 & -12 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 6 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Calcul du vecteur charge

$$F = \begin{Bmatrix} f_1 \\ m_1 \\ f_2 \\ m_2 \\ f_3 \\ m_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} PL/2 \\ -PL^2/12 \\ -PL/2 \\ PL^2/12 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -20 \\ -40 \\ -25 \\ 40 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Définition du système de rigidité globale et application des conditions aux limites

$$2.5 \begin{bmatrix} 12 & 12 & -12 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 16 & -12 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -12 & 24 & 0 & -12 & 12 & 0 \\ 12 & 8 & 0 & 32 & -12 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -12 & 18 & -12 & -6 \\ 0 & 0 & 12 & 8 & -12 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 20 \\ -40 \\ -25 \\ 40 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$2.5 \begin{bmatrix} 24 & 0 & -12 & 12 \\ 0 & 32 & -12 & 8 \\ -12 & -12 & 18 & -12 \\ 12 & 8 & -12 & 16 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -25 \\ 40 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} v_2 = -0.4118 \\ \theta_2 = 0.5294 \\ v_3 = 0.2157 \\ \theta_3 = 0.2059 \end{Bmatrix}$$

## —CHAPITRE V—ÉLÉMENTS FINIS POUTRES DE BERNOULLI-EULER

### Exercice 4

Soit une poutre encastrée des deux extrémités, discrétisée en deux éléments de longueur  $L_1=L_2$ . L'élément 1 est soumis à une charge répartie  $q$  et le nœud 2 est soumis à une charge concentrée  $P$ .

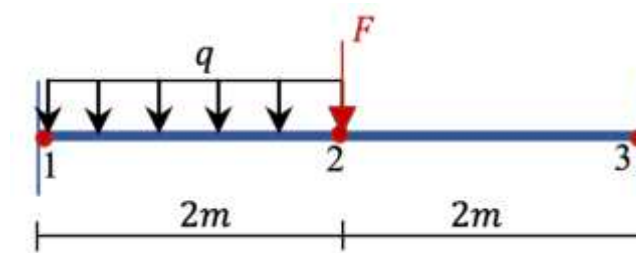
-Déterminer les déplacements,

-Calculer les réactions.

$$E=10^5$$

$$I=0.001$$

$$L=L_1=L_2=2$$



### Solution

#### Détermination de la matrice de rigidité

$$[K^1] = [K^2] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

-Element 1 (nœud 1-2)

$$[K^1] = [K^2] = \frac{10^5 \times 0.001}{(2)^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$q = \begin{pmatrix} -q_0L/2 \\ -q_0L^2/12 \\ -q_0L/2 \\ q_0L^2/12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -3.33 \\ -10 \\ +3.33 \end{pmatrix}$$

-Element 2 (nœud 2-3)

$$q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## —CHAPITRE V—ÉLÉMENTS FINIS POUTRES DE BERNOULLI-EULER

-Assemblage des matrices

$$[K] = 100 \begin{bmatrix} 1.5 & 1.5 & -1.5 & 1.5 & 0 & 0 \\ 1.5 & 2 & -1.5 & 1 & 0 & 0 \\ -1.5 & -1.5 & 1.5 + 1.5 & -1.5 + 1.5 & -1.5 & 1.5 \\ 1.5 & 1 & -1.5 + 1.5 & 2 + 2 & -1.5 & 1 \\ 0 & 0 & -1.5 & -1.5 & 1.5 & -1.5 \\ 0 & 0 & 1.5 & 1 & -1.5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[K] = 100 \begin{bmatrix} 1.5 & 1.5 & -1.5 & 1.5 & 0 & 0 \\ 1.5 & 2 & -1.5 & 1 & 0 & 0 \\ -1.5 & -1.5 & 3 & 0 & -1.5 & 1.5 \\ 1.5 & 1 & 0 & 4 & -1.5 & 1 \\ 0 & 0 & -1.5 & -1.5 & 1.5 & -1.5 \\ 0 & 0 & 1.5 & 1 & -1.5 & 2 \end{bmatrix}$$

**Détermination du vecteur force**

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} -10 \\ -3.33 \\ -10 - 1 \\ +3.33 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10 \\ -3.33 \\ -11 \\ +3.33 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

**Application des conditions aux limites**

$$u_1 = v_1 = \theta_1 = 0 \\ u_3 = v_3 = \theta_3 = 0$$

$$100 \begin{bmatrix} 1.5 & 1.5 & -1.5 & 1.5 & 0 & 0 \\ 1.5 & 2 & -1.5 & 1 & 0 & 0 \\ -1.5 & -1.5 & 3 & 0 & -1.5 & 1.5 \\ 1.5 & 1 & 0 & 4 & -1.5 & 1 \\ 0 & 0 & -1.5 & -1.5 & 1.5 & -1.5 \\ 0 & 0 & 1.5 & 1 & -1.5 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 11 \\ 3.33 \\ -10 \\ +3.33 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$100 \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -11 \\ -3.33 \end{Bmatrix}$$

$$v_2 = -3.66 \times 10^{-2} \\ \theta_2 = 8.35 \times 10^{-3}$$

**Calcul des réactions**

$$R_i = \sum_{j=1}^9 K_{ij} q_j - F_i$$

$$R_1 = -150(-3.7 \times 10^{-2}) + 150(-0.85 \times 10^{-2}) - (-10) = 14.27$$

## —CHAPITRE V—ÉLÉMENTS FINIS POUTRES DE BERNOULLI-EULER

$$R_2 = -150(-3.7 \times 10^{-2}) + 100(-0.85 \times 10^{-2}) - 3.4 = 1.3$$

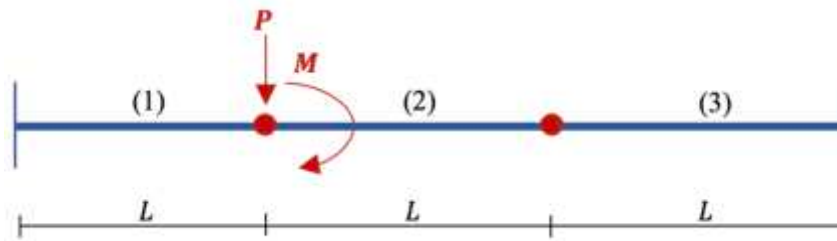
$$R_6 = -150(-3.7 \times 10^{-2}) - 150(-0.85 \times 10^{-2}) = 6.82$$

$$R_7 = 150(-3.7 \times 10^{-2}) + 100(-0.85 \times 10^{-2}) = -6.4$$

### Exercice 5

Soit une poutre discrétisée en trois éléments de même longueur, encadrée à ses deux et soumise à une force  $P$  et à un moment  $M$ . Les caractéristiques de cette poutre sont le module de Young  $E$  et le moment d'inertie. Déterminer :

- La matrice de rigidité globale,
- Les déplacements inconnus,
- Les réactions.



## Chapitre VI APPROXIMATION OU FONCTION D'INTERPOLATION

### VI.1 Introduction

Dans le cadre de la méthode des éléments finis, la formulation du champ de déplacement, de température ou de toute autre grandeur physique repose sur une représentation approchée de la solution exacte à l'intérieur de chaque élément. Cette représentation est assurée par des fonctions d'interpolation ou fonctions de forme, qui permettent d'exprimer la variable recherchée en fonction de ses valeurs nodales. L'objectif de cette approche est de construire une fonction continue, suffisamment régulière et conforme, capable d'approcher avec précision la solution du problème différentiel sur un domaine discrétisé. Les fonctions de forme jouent ainsi un rôle fondamental dans la qualité de l'approximation et la stabilité numérique du modèle. En général, ces fonctions sont choisies sous forme de polynômes, dont le degré dépend du type d'élément et du nombre de nœuds. Les interpolations polynomiales les plus courantes sont celles issues des polynômes de Lagrange et des polynômes d'Hermite.

Les polynômes de Lagrange assurent une interpolation exacte aux nœuds : chaque fonction de forme est égale à 1 en son nœud et à 0 aux autres. Les polynômes d'Hermite, quant à eux, permettent de prendre en compte non seulement les valeurs nodales mais également les dérivées (pentes), garantissant une meilleure continuité (notamment pour les éléments de poutre ou de plaque). La construction systématique de ces fonctions polynomiales repose sur une organisation combinatoire illustrée par le triangle de Pascal, qui permet de visualiser les termes du développement du binôme  $(x + y)^n$ . Chaque degré du triangle correspond à un niveau d'approximation, indiquant les puissances de  $x$  et  $y$  présentes dans les polynômes d'interpolation. Ainsi, le triangle de Pascal constitue une base conceptuelle pour la détermination des fonctions de forme bidimensionnelles, utilisées dans les éléments triangulaires ou quadratiques, et pour l'établissement des conditions de conformité entre éléments adjacents.

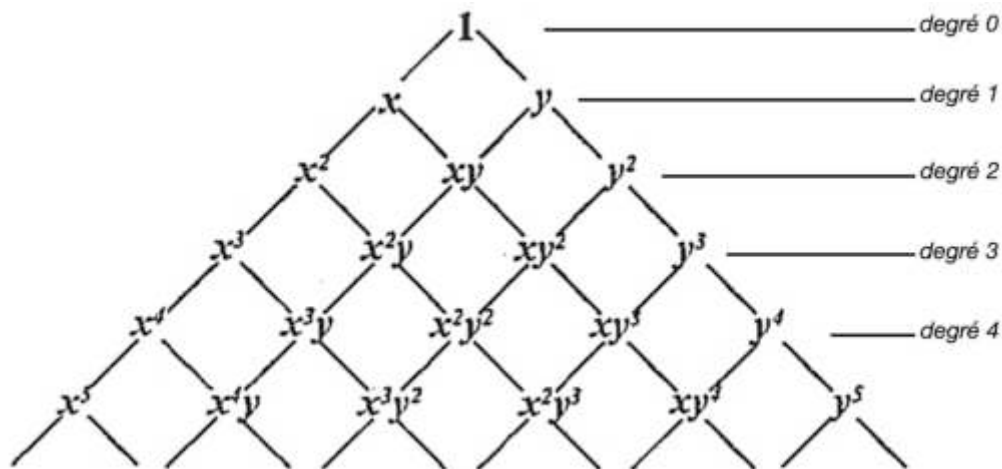


Fig.20. Représentation polynomiale du triangle de Pascal.

## VI.2 Élasticité Plane

Dans les problèmes bidimensionnels d'ingénierie, tels que les plaques minces, les barrages, les parois, les dalles ou les structures dont l'une des dimensions est très petite ou très grande devant les deux autres, il est possible de simplifier la description tridimensionnelle du comportement mécanique. Cette simplification conduit au modèle d'élasticité plane, dans lequel l'état des contraintes et des déformations est décrit à partir de deux variables spatiales seulement :  $x$  et  $y$ . L'objectif de l'élasticité plane est de représenter, avec une précision suffisante, le comportement d'un matériau élastique linéaire soumis à des chargements planaires, tout en réduisant significativement la complexité mathématique du problème tridimensionnel.

Deux modèles distincts sont utilisés selon la nature physique du phénomène étudié :

- **Le modèle en contraintes planes**, adapté aux structures minces où les efforts sont essentiellement appliqués dans le plan et où l'épaisseur est faible. Dans ce cas, la contrainte normale est négligeable.
- **Le modèle en déformations planes**, adapté aux structures très épaisses ou aux milieux massifs (comme les barrages ou les massifs rocheux), où les déplacements hors plan sont pratiquement nuls alors que la contrainte n'est pas négligeable.

Ces deux modèles reposent sur la même relation fondamentale entre les déplacements et les déformations, issue des équations de compatibilité, ainsi que sur une loi de comportement linéaire (loi de Hooke généralisée). La différence réside dans les hypothèses supplémentaires imposées sur les composantes en dehors du plan. L'étude de l'élasticité plane constitue une étape essentielle pour la formulation des éléments finis bidimensionnels. En effet, les matrices de rigidité des éléments (triangulaires ou quadrangulaires) reposent directement sur les relations déformation-déplacement et sur la matrice constitutive propre au modèle choisi (contraintes planes ou déformations planes). L'élasticité plane fournit ainsi le cadre mécanique général dans lequel s'inscrivent tous les éléments finis 2D présentés dans les sections suivantes. Elle assure la cohérence du modèle, garantit la représentativité du comportement physique et permet une formulation mathématique rigoureuse de la méthode des éléments finis en deux dimensions.

## VI.3 Relation déformation-déplacement

Dans le cadre de l'élasticité plane, la première étape consiste à établir la relation entre les déplacements du milieu et les déformations associées. Cette relation découle des hypothèses de petites déformations et de petites rotations, ce qui permet d'utiliser la formulation linéarisée du tenseur des déformations de Green-Lagrange comme suit :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (6.1)$$

Cette relation, dite relation déformation-déplacement, joue un rôle fondamental dans la formulation des éléments finis : elle permet de relier les déplacements nodaux d'un élément aux déformations internes du matériau. En introduisant les fonctions de forme appropriées, elles-mêmes dépendantes des coordonnées spatiales, cette relation devient directement

utilisable pour dériver la matrice de rigidité de chaque élément 2D. Ainsi, la relation déformation–déplacement constitue le pont mathématique entre les variables nodales qui définissent l'état de l'élément et les grandeurs mécaniques internes (déformations puis contraintes), indispensables au calcul structural.

### VI.4 Contraintes planes

Le modèle des contraintes planes s'applique aux structures dont l'épaisseur est très faible devant les dimensions dans le plan, comme les plaques minces, les voiles, les parois, ou encore les membranes. Dans ce type de configuration, les efforts appliqués sont essentiellement contenus dans le plan  $(x,y)$ , tandis que la contrainte normale perpendiculaire au plan,  $\sigma_z$ , peut être considérée comme négligeable. Dans le cas d'un matériau élastique linéaire et isotrope obéissant à la loi de Hooke, les contraintes planes se déduisent des déformations à l'aide de la matrice constitutive réduite :

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

où :

$E$  est le module d'Young,

$\nu$  est le coefficient de Poisson.

Cette matrice représente la loi de comportement du matériau dans le cas des contraintes planes. Elle exprime le lien linéaire entre les contraintes internes et les déformations produites dans le plan de l'élément. Le choix du modèle en contraintes planes est particulièrement approprié dans les situations où l'on étudie le comportement mécanique de structures minces, pour lesquelles les sollicitations hors plan sont négligeables et l'épaisseur n'a qu'un rôle secondaire. Dans le cadre de la méthode des éléments finis, cette formulation constitue un élément essentiel pour la construction des matrices de rigidité et l'évaluation des contraintes internes dans toutes les géométries 2D modélisées sous l'hypothèse des contraintes planes.

### VI.5 Déformations planes

Le modèle des déformations planes est utilisé lorsqu'une structure présente une très grande dimension hors du plan d'étude, de sorte que les déplacements selon la direction  $z$  sont pratiquement nuls. Ce cas apparaît notamment dans les ouvrages massifs tels que les barrages, les murs épais, les culées, les tunnels ou tout milieu dont l'épaisseur est très grande devant les dimensions dans le plan.

Dans cette configuration, on impose que les déplacements hors plan soient nuls :

$$u_z = 0 \quad (6.3)$$

Ce qui conduit aux déformations hors plan suivantes :

$$\varepsilon_z = 0, \quad \gamma_{xz} = 0, \gamma_{yz} = 0 \quad (6.4)$$

Ainsi, seules les déformations dans le plan  $(x,y)$  sont prises en considération :

$$\varepsilon_x, \quad \varepsilon_y, \quad \gamma_{xy} \quad (6.5)$$

Cependant, contrairement au cas des contraintes planes, la contrainte normale hors plan  $\sigma_z$  n'est pas nulle. Cette contrainte supplémentaire est calculée automatiquement par la loi de Hooke tridimensionnelle. En effet, le comportement du matériau dans le cas des déformations planes est donné par la matrice constitutive :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (6.6)$$

## VI.6 Matrice de rigidité

$$[C] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} = \frac{2G}{(1-2\nu)} \begin{bmatrix} a & \nu & 0 \\ \nu & a & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

$$K = \int_{V_{physique}} [B(x,y)]^T [C] [B(x,y)] dV \quad (6.8)$$

$$K = \int_{V_{parent}} [B(\xi,\eta)]^T [C] [B(\xi,\eta)] |J| dV \quad (6.9)$$

Par intégration on obtient la matrice de rigidité comme suit :

$$[K] = \frac{EG}{6(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 4a + 4\beta & 2\nu + 2\beta & 0 & 2\nu & -4a & -2\nu - 2\beta \\ 2\nu + 2\beta & 4a + 4\beta & 2\beta & 0 & -2\nu - 2\beta & -4\beta \\ 0 & 2\beta & \frac{3}{2}\beta & 0 & -2\beta & -2\beta \\ 2\nu & 0 & 0 & \frac{3}{2}a & -2\nu & -2a \\ 4a & -2\nu - 2\beta & -2\beta & -2\nu & 4a + 4\beta & 2\nu + 2\beta \\ -2 - 2\beta & -4\beta & -2\beta & -2a & 2\nu + 2\beta & 4a + 4\beta \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

## VI.7 Interpolation et fonctions de forme

### VI.7.1 Champ de déplacement

Dans le cas d'un problème plan, le comportement mécanique d'un élément fini est entièrement décrit par les champs de déplacement selon les directions  $x$  et  $y$ , notés respectivement  $u(x,y)$  et  $v(x,y)$ . Ces deux champs sont considérés comme indépendants mais définis de manière analogue à partir des valeurs nodales et des fonctions de forme associées.

Le rôle des fonctions de forme est d'assurer la continuité du champ de déplacement à travers les frontières communes entre éléments, tout en garantissant une interpolation exacte aux

nœuds. Ainsi, les déplacements à tout point de l'élément sont exprimés comme une combinaison linéaire des déplacements nodaux pondérés par ces fonctions.

### VI.7.2 Éléments triangulaire

Les éléments triangulaires sont largement utilisés en modélisation numérique, notamment dans les domaines présentant des géométries complexes ou des maillages irréguliers. Leur principale qualité réside dans leur grande flexibilité de maillage, qui permet de s'adapter à des contours quelconques. Cependant, ils offrent parfois une précision légèrement inférieure à celle des éléments quadrangulaires pour un même nombre de degrés de liberté, en raison de la simplicité de leurs fonctions de forme.

#### -Éléments à trois nœuds (éléments triangulaires linéaires)

L'élément triangulaire le plus simple est celui à trois nœuds, situé aux sommets du triangle. Les vecteurs nodaux de déplacement et de forces nodales s'écrivent :

$$\{u\}^T = \{u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3\} \quad (6.11)$$

$$\{F\}^T = \{F_{x1} \quad F_{y1} \quad F_{x2} \quad F_{y2} \quad F_{x3} \quad F_{y3}\} \quad (6.12)$$

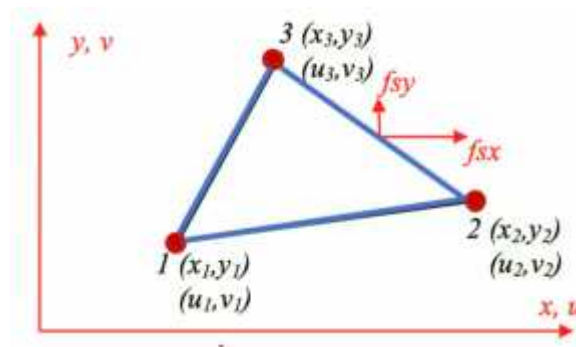


Fig.21. Éléments triangulaire à trois nœuds.

Pour chacun des deux champs de déplacement, on admet un polynôme complet de premier degré, traduisant une interpolation linéaire à l'intérieur de l'élément :

$$u(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y \quad (6.13)$$

$$v(x, y) = a_4 + a_5x + a_6y \quad (6.14)$$

Ces expressions garantissent une variation linéaire des déplacements à l'intérieur de l'élément, avec une continuité assurée sur les frontières partagées par deux éléments adjacents. Les coefficients  $\alpha_i$  sont déterminés à partir des valeurs nodales du déplacement en appliquant les conditions d'interpolation aux trois nœuds.

**Construction des fonctions de forme**

Pour un triangle de trois nœuds en élasticité plane les champs de déplacement sont interpolés par :

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \quad (6.15)$$

Les conditions nodales permettent de déterminer les valeurs des coefficients. Dans notre cas, ces conditions sont définies par le système :

$$\begin{Bmatrix} u(x_1, y_1) \\ v(x_1, y_1) \\ u(x_2, y_2) \\ v(x_2, y_2) \\ u(x_3, y_3) \\ v(x_3, y_3) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (6.16)$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (6.17)$$

Ce système est noté comme suit :

$$\{u_i\} = [A]\{a\} \quad (6.18)$$

Ou  $[A]$  dépend des coordonnées des nœuds,  $\{a\}$  est le vecteur des coefficients et  $\{u\}$  est le vecteur des déplacements nodaux. La solution de ce système est donc :

$$\{a\} = [A]^{-1}\{u\} \quad (6.19)$$

Pour simplifier, on introduit les paramètres classiques :

$$x_{ij} = x_i - x_j, y_{ij} = y_i - y_j, c_{ij} = x_i y_j - x_j y_i \quad (6.20)$$

L'inverse de la matrice  $[A]$  donne :

$$[A]^{-1} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} c_{23} & c_{31} & c_{12} \\ y_{23} & y_{31} & y_{12} \\ x_{31} & x_{31} & x_{12} \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

Avec  $D = c_{12} + c_{23} + c_{31}$ . Pour obtenir l'expression des fonctions de forme. On introduit ce résultat dans l'équation du déplacement :

$$\{u\} = [X]\{a\} = [X][A]^{-1}\{u_i\} \quad (6.22)$$

En comparant cette relation avec l'expression générale  $\{u\} = N\{u_i\}$ , on identifie  $[N]$  par :

$$[N] = [X][A]^{-1} \quad (6.23)$$

D'une façon similaire pour :

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \quad (6.24)$$

Pour le cas de l'élément triangulaire, en posant  $d_{ij} = xy_{ij} - yx_{ij}$ , on obtient :

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

$$= \frac{1}{D} \begin{bmatrix} c_{23} + d_{23} & 0 & c_{31} + d_{31} & 0 & c_{12} + d_{12} & 0 \\ 0 & c_{23} + d_{23} & 0 & c_{31} + d_{31} & 0 & c_{12} + d_{12} \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

Alors les fonctions de forme scalaires  $N_1, N_2, N_3$  deviennent :

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} c_{23} & d_{23} \\ c_{31} & d_{31} \\ c_{12} & d_{12} \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

Les relations déformation-déplacement donnent :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_2 \\ a_6 \\ a_3 + a_5 \end{Bmatrix} = B\{u_i\} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \{u_i\} \quad (6.28)$$

La matrice de rigidité de l'élément triangulaire linéaire est donnée par :

$$K = \int_V B^T [C] B dV = tAB^T CB \quad (6.29)$$

### -Élément à six nœuds

L'élément triangulaire à six nœuds constitue une amélioration de l'élément linéaire à trois nœuds. Dans ce type d'élément, un nœud supplémentaire est introduit au milieu de chacune des trois arêtes du triangle, permettant ainsi une interpolation plus fine du champ de déplacement.

Chaque élément comporte alors six nœuds et, pour un problème bidimensionnel, un total de douze degrés de liberté (deux par nœud :  $u_i$  et  $v_i$ ).

Les vecteurs nodaux s'écrivent :

$$\{u\}^T = \{u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4 \ u_5 \ v_5 \ u_6 \ v_6\} \quad (6.30)$$

$$\{F\}^T = \{F_{x1} \quad F_{y1} \quad F_{x2} \quad F_{y2} \quad F_{x3} \quad F_{y3} \quad F_{x4} \quad F_{y4} \quad F_{x5} \quad F_{y5} \quad F_{x6} \quad F_{y6}\} \quad (6.31)$$

L'ajout de ces nœuds intermédiaires permet de mieux représenter la courbure des déformations et d'améliorer la continuité du champ de déplacement entre les éléments adjacents.

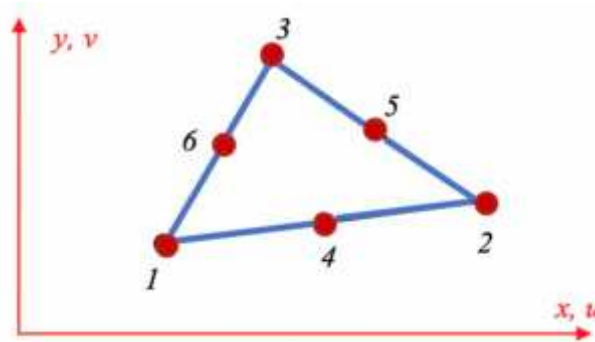


Fig.22. Élément triangulaire à six nœuds.

Sur le plan mathématique, les fonctions de forme associées sont des polynômes biquadratiques complets, capables de reproduire des variations quadratiques du déplacement à l'intérieur de l'élément :

$$u(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy + a_5x^2 + a_6y^2 \quad (6.32)$$

$$v(x, y) = a_7 + a_8x + a_9y + a_{10}xy + a_{11}x^2 + a_{12}y^2 \quad (6.33)$$

Ces fonctions permettent une interpolation plus précise que celle obtenue avec les éléments linéaires, notamment dans le cas de gradients de déformation non uniformes.

### VI.7.3 Élément quadrangulaire

L'élément quadrangulaire bilinéaire constitue l'un des éléments finis les plus utilisés en modélisation bidimensionnelle. Il comporte quatre nœuds, situés aux sommets du quadrilatère, soit un total de huit degrés de liberté (deux par nœud).

Les vecteurs nodaux s'écrivent :

$$\{u\}^T = \{u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4\} \quad (6.34)$$

$$\{F\}^T = \{F_{x1} \quad F_{y1} \quad F_{x2} \quad F_{y2} \quad F_{x3} \quad F_{y3} \quad F_{x4} \quad F_{y4}\} \quad (6.35)$$

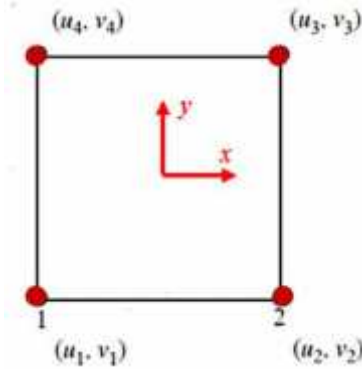


Fig.23. Élément quadrangulaire à quatre nœuds.

Dans ce cas, l'interpolation du champ de déplacement à l'intérieur de l'élément est réalisée à l'aide de fonctions de forme bilinéaires dérivées des polynômes de Lagrange en coordonnées naturelles. On adopte ainsi le polynôme suivant :

$$u(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \quad (6.36)$$

$$u(x, y) = a_7 + a_8x + a_9y + a_{10}xy \quad (6.37)$$

Les fonctions de forme sont données par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\ N_2 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\ N_4 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{aligned} \quad (6.38)$$

#### VI.7.4 Élément isoparamétrique

Dans la formulation iso paramétrique, chaque élément réel est associé à un élément de référence défini dans un système de coordonnées naturel  $(\xi, \eta)$ . L'objectif de cette approche est de représenter la géométrie et les champs de déplacement à l'aide des mêmes fonctions de forme, ce qui garantit une interpolation cohérente et une transformation géométrique régulière. La correspondance entre l'élément de référence et l'élément réel est assurée par une transformation géométrique du type :

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n N_i(\xi, \eta)x_i ; \quad y(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n N_i(\xi, \eta)y_i \quad (6.39)$$

Où :

$N$  est le nombre de nœud de l'élément.

$\xi, \eta$  sont les coordonnées d'un point de l'élément de référence.

$x(\xi, \eta)$  et  $y(\xi, \eta)$  sont les coordonnées d'un point de l'élément réel.

$x_i$  et  $y_i$  sont les coordonnées du  $i$  nœud de l'élément.

Les  $N_i(\xi, \eta)$  sont les fonctions de forme.

L'expression des dérivées partielles d'une fonction de forme dans le système naturel s'obtient via la règle de la chaîne :

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (6.40)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (6.41)$$

Sous forme matricielle:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (6.42)$$

La matrice jacobienne de la transformation est :

$$J(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{\partial \eta} y_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} \quad (6.43)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ \cdot & \cdot \\ x_i & y_i \\ \cdot & \cdot \\ x_n & y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (6.44)$$

Pour l'élément triangulaire quadratique (6 nœuds), les fonctions de forme des nœuds moyens proviennent du produit des coordonnées barycentriques associées aux trois sommets. Les coordonnées barycentriques sont  $L_1, L_3$  et  $L_5$ . Les fonctions de forme quadratiques des nœuds milieux sont alors :

$$N_2 = 4L_1L_3 \quad N_4 = 4L_3L_5 \quad N_6 = 4L_1L_5 \quad (6.45)$$

Tandis que les fonctions de forme des sommets s'écrivent :

$$N_1 = L_1 - 2L_1L_3 - 2L_1L_5 = L_1(1 - 2L_3 - 2L_5)$$

$$N_3 = L_3 - 2L_1L_3 - 2L_3L_5 = L_3(1 - 2L_1 - 2L_5) \quad (6.46)$$

$$N_5 = L_5 - 2L_3L_5 - 2L_1L_5 = L_5(1 - 2L_1 - 2L_3)$$

Avec :  $L_1 = 1 - \xi - \eta$        $L_3 = \xi$        $L_5 = \eta$

En remplaçant  $L_1, L_3$  et  $L_5$  on obtient explicitement :

$$N_1 = (1 - \xi - \eta)(1 - 2\xi - 2\eta) = 1 - 3\xi - 3\eta + 2\xi^2 + 2\eta^2 + 4\xi\eta$$

$$N_2 = 4\xi(1 - \xi - \eta) = 4\xi - 4\xi^2 - 4\xi\eta$$

$$N_3 = -\xi(1 - 2\xi) = -\xi + 2\xi^2 \quad (6.47)$$

$$N_4 = 4\xi\eta$$

$$N_5 = -\eta(1 - 2\eta) = -\eta + 2\eta^2$$

$$N_6 = 4\eta(1 - \xi - \eta) = 4\eta - 4\eta^2 - 4\xi\eta$$

La matrice jacobéenne est calculée par dérivation :

$$J = \begin{bmatrix} 4\xi + 4\eta - 3 & 4 - 4\eta - 8\xi & 4\xi - 1 & 4\eta & 0 & -4\eta \\ 4\xi + 4\eta - 3 & -4\xi & 0 & 4\xi & 4\eta - 1 & 4 - 8\eta - 4\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \\ x_5 & y_5 \\ x_6 & y_6 \end{bmatrix} \quad (6.48)$$

En remplaçant  $x_i$  et  $y_i$  par leurs valeurs, on obtient :

$$J = \begin{bmatrix} 4\xi + 4\eta - 3 & 4 - 4\eta - 8\xi & 4\xi - 1 & 4\eta & 0 & -4\eta \\ 4\xi + 4\eta - 3 & -4\xi & 0 & 4\xi & 4\eta - 1 & 4 - 8\eta - 4\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \\ 2a & 0 \\ a & a \\ 0 & 2a \\ 0 & a \end{bmatrix} \quad (6.49)$$

$$J = \begin{bmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2a \end{bmatrix} \quad (6.50)$$

La matrice  $[B]$  s'écrit sous la forme suivante :

$$[B] = [B_1 \dots B_i \dots B_n] \text{ avec } B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (6.51)$$

$$[B] = \frac{1}{2a} \begin{bmatrix} 4\eta & 0 & 0 & 0 & -4\eta & 0 \\ 0 & 4\xi & 0 & 4\eta - 1 & 0 & 4 - 8\eta - 4\xi \\ 4\xi & 4\eta & 4\eta - 1 & 0 & 4 - 8\eta - 4\xi & -4\eta \end{bmatrix} \quad (6.52)$$

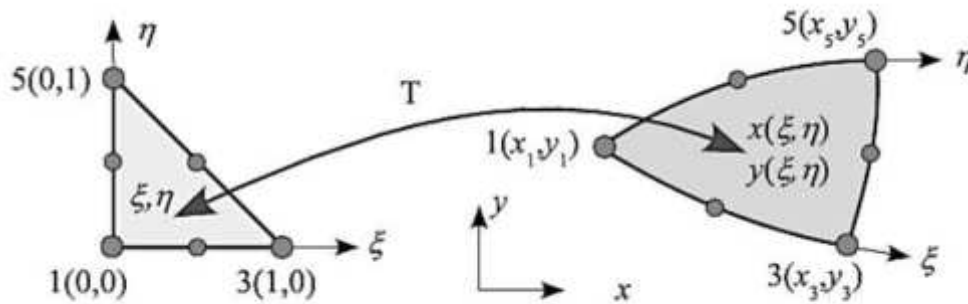


Fig.24. Élément Isoparamétrique.

### VI.8 Élément de volume

Les éléments volumiques constituent la base de la modélisation tridimensionnelle en analyse des structures. Ils sont particulièrement adaptés aux solides présentant des dimensions du même ordre dans les trois directions, tels que les blocs massifs, les pièces épaisses ou les matériaux continus.

#### VI.8.1 Relation déformation déplacement

Dans un milieu homogène, la relation déformation-déplacement est donnée par :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (6.53)$$

#### VI.8.2 Loi de comportement

La loi de comportement élastique isotrope est la suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (6.54)$$

**VI.8.3 Éléments tétraédrique**

Cet élément possède 12 degrés de liberté, soit trois composantes de déplacement par nœud :

$$\{u\}^T = \{u_1 \ v_1 \ w_1 \ \dots \ \dots \ u_4 \ v_4 \ w_4\} \quad (6.55)$$

Les forces nodales correspondantes sont :

$$\{F\}^T = \{F_{1x} \ F_{1y} \ F_{1z} \ \dots \ \dots \ F_{4x} \ F_{4y} \ F_{4z}\} \quad (6.56)$$

L'interpolation du déplacement à l'intérieur de l'élément est tri-linéaire :

$$\begin{pmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{pmatrix} = [1 \ x \ y \ z] \{a\} \quad (6.57)$$

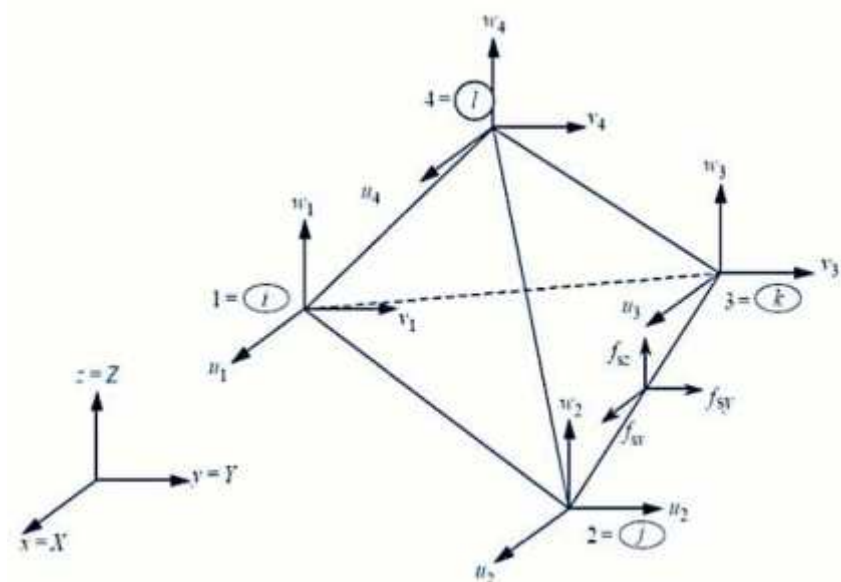
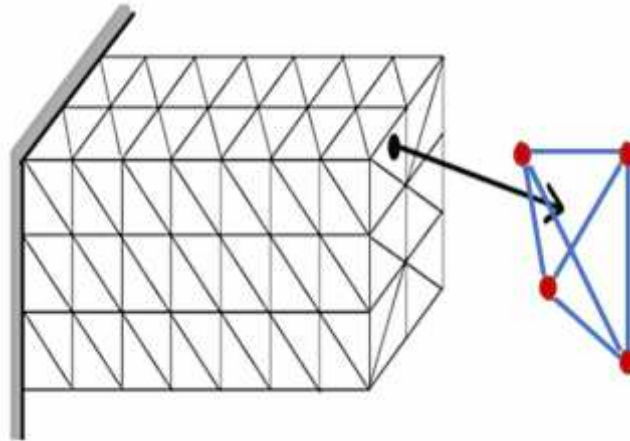


Fig.25. Éléments tétraédrique.

Les fonctions de forme sont construites à partir des coordonnées volumiques (ou barycentriques 3D). Celles-ci généralisent les propriétés barycentriques du triangle au tétraèdre. Pour un point intérieur, les coordonnées volumiques s'écrivent :

$$L_1 = \frac{V_{p234}}{V_{1234}} \quad L_2 = \frac{V_{p134}}{V_{1234}} \quad L_3 = \frac{V_{p123}}{V_{1234}} \quad L_4 = \frac{V_{p1234}}{V_{1234}} \quad (6.58)$$

Où  $V_{p234}$  et  $V_{1234}$  représentent, respectivement, les volumes des tétraèdres P234 et 1234. La coordonnée du volume peut également être considérée comme le rapport entre la distance du point P et le point 1 par rapport à la surface 234:

$$L_1 = \frac{d_{p134}}{d_{1234}} \quad L_2 = \frac{d_{p134}}{d_{1234}} \quad L_3 = \frac{d_{p124}}{d_{1234}} \quad (6.59)$$

On peut confirmer que :

$$L_i = \begin{cases} 1 & \text{pour le noeud } i \\ 0 & \text{pour les autres noeuds } jkl \end{cases}$$

Ces coordonnées définissent directement les fonctions de forme linéaires :

$$N_1 = L_1, \quad N_2 = L_2, \quad N_3 = L_3, \quad N_4 = L_4$$

La matrice des fonctions de forme devient :

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (6.60)$$

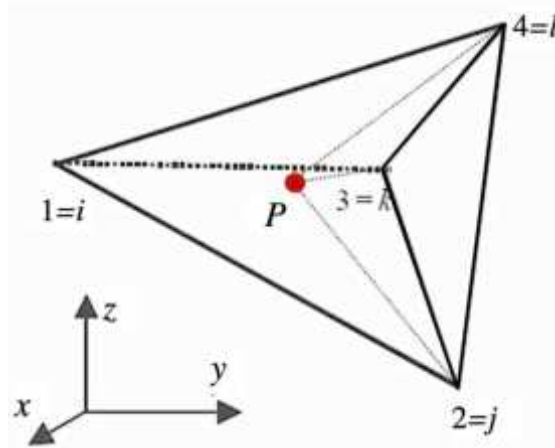


Fig.26. Élément tétraèdre.

### VI.8.4 Éléments Hexaédriques

Les éléments hexaédriques représentent l'extension tridimensionnelle des éléments quadrangulaires utilisés en 2D. En raison de leur géométrie régulière, ils sont souvent appelés éléments brique. Ce type d'élément est particulièrement adapté à la modélisation de structures présentant des volumes rectangulaires ou une topologie régulière.

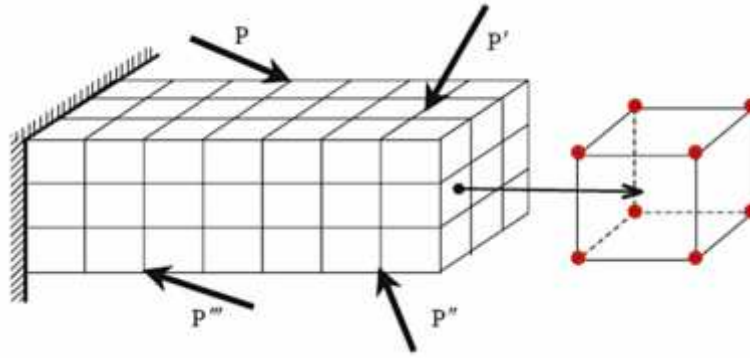


Fig.27. Élément hexaédrique.

**Hexaèdre à 8 nœuds**

Dans un élément hexaédrique à huit nœuds, chaque nœud est associé à trois composantes de déplacement ( $u, v, w$ ). Ainsi, les vecteurs nodaux comportent 24 degrés de liberté, exprimés sous la forme :

$$\{u\}^T = \{u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \dots \quad u_8 \quad v_8 \quad w_8\} \quad (6.61)$$

$$\{F\}^T = \{F_{1x} \quad F_{1y} \quad F_{1z} \quad \dots \quad F_{8x} \quad F_{8y} \quad F_{8z}\} \quad (6.62)$$

Pour cet élément, on adopte un polynôme de Lagrange trivarié, permettant d'interpoler le déplacement en tout point  $(x, y, z)$  de l'élément :

$$\begin{pmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{pmatrix} = [1 \quad x \quad y \quad z \quad xy \quad xz \quad yz \quad xyz] \{a\} \quad (6.63)$$

Ainsi, les expressions explicites des huit fonctions de forme sont :

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta, \xi) &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \xi) \\ N_2(\xi, \eta, \xi) &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \xi) \\ N_3(\xi, \eta, \xi) &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \xi) \\ N_4(\xi, \eta, \xi) &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \xi) \\ N_5(\xi, \eta, \xi) &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \xi) \\ N_6(\xi, \eta, \xi) &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \xi) \end{aligned} \quad (6.64)$$

$$N_7(\xi, \eta, \xi) = \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \xi)$$

$$N_8(\xi, \eta, \xi) = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \xi)$$

Ces fonctions assurent l'interpolation trivariée du champ de déplacement à l'intérieur de l'élément, garantissant la continuité entre les éléments adjacents et la précision de l'approximation dans l'espace tridimensionnel.

## Références

1. Alla Chateaufeuf (2005). La méthode des éléments finis par les exercices. Institut Français de Mécanique Avancée.
2. Imbert, J.F. (1995). Analyse des structures par éléments finis. Cépaduès-Édition.
3. Bathe, K.J. (1996). Finite Element Procedures. Prentice Hall.
4. Batou, J.L., Dhatt, G. (1998). Modélisation des structures par éléments finis. Hermès Édition.
5. Christian Wielgozes. (2002). Cours et exercices de résistance de matériaux, élasticité-plasticité, éléments finis. Ellipses.
6. Clough, R.W. (1960). The Finite Element Method in Plane Stress Analysis. Proceedings of the Second ASCE Conference on Electronic Computation.
7. Cook, R.D., Malkus, D.S., Plesha, M.E., & Witt, R.J. (2001). Concepts and Applications of Finite Element Analysis (4th Edition). Wiley.
8. Cook, R.D. et al. (2002). Concepts and Applications of Finite Element Analysis. Wiley.
9. Courant, R. (1943). Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations. Bulletin of the American Mathematical Society.
10. Dhatt, G., Touzot, G. (1981). Une présentation de la méthode des éléments finis. Maloine SA.
11. Fish, J., & Belytschko, T. (2007). A First Course in Finite Elements. Wiley.
12. Frey, F., & Jirousek, J. (2009). Méthode des éléments finis.
13. Gmur, T. (1998). Méthodes des éléments finis en mécanique des structures. Presses polytechniques et universitaires romandes.
14. Liu, Y.J. (1998). Introduction to Finite Element Method. University of Cincinnati.
15. Strang, G., & Fix, G.J. (2008). An Analysis of the Finite Element Method. Wellesley-Cambridge Press.
16. Zienkiewicz, O.C., & Taylor, R.L. (2005). The Finite Element Method (6th Edition). Elsevier.
17. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., & Zhu, J.Z. (2013). The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals (7th Edition). Butterworth-Heinemann.