



**MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**



**UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE D'ORAN
(Mohamed BOUDIAF)
FACULTE DE GENIE ELECTRIQUE
Département d'Électrotechnique**

-0 0 0-

**SOUTENANCE DE THESE DE DOCTORAT ES SCIENCES
Spécialité: Électrotechnique- Calcul du Champ
Option: ELECTROTHERMIE**

-0 0 0-

Présentée par:

Mr. MEROUANE Boudjemaâ

TITRE

**Distribution des champs électromagnétique et
thermique dans une billette placée dans
un four à induction**

-0 0 0-

Président	M.RAHLI	Professeur	USTO(M.B)
Rapporteur	M.SEBBANI	Professeur	UNIV.ORAN
Examineur	A.H.BELBACHIR	Professeur	USTO(M.B)
Examineur	A.BELAIDI	Professeur	ENSET-ORAN
Examineur	A.CHAKER	Professeur	ENSET-ORAN

REMERCIEMENTS

Je remercie les différents membres du Jury pour avoir accepté de consacrer du temps à la lecture et à l'examen minutieux de ce travail:

- Professeur Mostefa RAHLI, qui a accepté de présider le Jury
- Professeur Ahmed Hafid BELBACHIR, examinateur
- Professeur Abdelkader CHAKER, examinateur
- Professeur Abdelkader BELAIDI, examinateur

Je souhaite remercier particulièrement le Professeur Mohammed SEBBANI, directeur de thèse, pour ses conseils éclairés et son soutien.

Aux miens.

TABLE DE MATIERES**INTRODUCTION****CHAPITRE I INTRODUCTION A L'ELECTROTHERMIE**

1.1.	Introduction à l'électrothermie	I-2
1.2.	Les avantages du chauffage par induction	I-3
1.3.	Schéma de principe d'une installation de chauffage par induction	I-5
1.4.	Recherche et installations de chauffage par induction	I-6

CHAPITRE II FORMULATION GENERALE DES EQUATIONS DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE

2.1.	Introduction	II-2
2.2.	Les équations de Maxwell et les lois du milieu	II-3
2.3.	Équation du champ électrique \vec{E} et de la densité de courant \vec{J}	II-5
2.4.	Équation du champ magnétique	II-6
2.5.	Équation du potentiel vecteur \vec{A}	II-8
2.6.	Équation du potentiel scalaire V	II-8
2.7.	Vecteur de POYNTING et puissance transmise	II-9
2.8.	Hypothèse de quasi-stationnarité	II-10
2.9.	Conditions aux limites	II-12
2.9.1.	Les conditions aux limites de DIRICHLET	II-13
2.9.2.	Les conditions aux limites de NEUMANN	II-14
2.9.3.	Les conditions aux limites de ROBIN	II-17

CHAPITRE III FORMULATION GENERALE DES EQUATIONS DU CHAMP THERMIQUE.

3.1.	Modes de transfert de la chaleur	III-2
3.1.1.	Conduction	III-2
3.1.2.	Convection	III-3
3.1.3.	Rayonnement	III-5
3.1.3.1.	Loi de Planck	III-5

3.1.3.2. Loi de Stefan-Boltzmann	III-6
3.1.3.3. Échange d'énergie entre 2 surfaces grises	III-7
3.2. Équation de la chaleur	III-10
3.3. Conditions aux limites	III-13
CHAPITRE IV MODELISATION DES PARAMETRES ELECTROMAGNETIQUES	
4.1. Introduction	IV - 2
4.1.1. Modélisation par un tronçon de parabole	IV - 2
4.1.2. Modélisation par la fonction arctangente	IV - 3
4.1.3. Modélisation par une fraction rationnelle	IV - 3
4.1.4. Modélisation par la méthode de Frohlin-Kenelly	IV - 6
4.2. Modélisation de l'aimantation \vec{M} , étude détaillée du fer pur	IV - 8
4.2.1. Introduction	IV - 8
4.2.2. Équations de Maxwell	IV - 9
4.2.3. Modélisation	IV - 10
4.2.3.1. Fonction de Brillouin $B_j(x)$	IV - 10
4.2.3.2. Loi de Curie	IV - 13
4.2.3.3. Ferromagnétisme et loi de Curie Weiss	IV - 14
4.2.3.4. Variation de l'aimantation de saturation avec la température	IV - 15
4.3. Application au cas simple du Nickel	IV - 22
4.4. Modélisation de la conductivité électrique σ	IV - 24
4.4.1. Modélisation de la conductivité électrique de l'aluminium	IV - 24
4.4.2. Modélisation de la conductivité électrique du cuivre	IV - 24
4.4.3. Modélisation de la conductivité électrique du fer pur	IV - 25
CHAPITRE V MODELISATION DES PARAMETRES THERMIQUES.	
5.1. Modélisation de la capacité calorifique à volume constant par les fonctions de Brillouin et de Debye	V-2
5.1.2. Modèle de DEBYE de la capacité calorifique à volume constant $C_v(T / \theta_D)$	V-2
5.1.3. Modélisation analytique de $C_v(T / \theta_D)$	V-5
5.1.4. Applications	V-7
5.1.4.1. Valeur moyenne de $C_v(T / \theta_D)$ sur un intervalle $[T_0, T]$	V-7

5.1.4.2. Calcul de l'énergie interne E sous forme analytique dans $[T_0, T]$	V-9
5.1.4.3. Application à une tige Cu-Fe	V-11
5.2. Modélisation de la conductivité thermique k des métaux	V-14
5.2.1. Conductivité thermique k de l'Aluminium	V-14
5.2.2. Conductivité thermique k du Cuivre	V-15
5.2.3. Conductivité thermique k du fer pur	V-16
5.3. Propriétés physiques de l'air	V-18

CHAPITRE VI APPLICATIONS A UN MATERIAU AMAGNETIQUE

6.1. Introduction	VI-2
6.2. Étude d'un dispositif constitué d'une seule spire filiforme	VI-3
6.2.1. Solution numérique	VI-3
6.2.2. Solution analytique	VI-15
6.2.2.1. Étude de l'effet pelliculaire dans l'inducteur	VI-15
6.2.2.2. Potentiel vecteur créé par une spire inductrice	VI-19
6.2.2.2.1. Aperçu sur les intégrales elliptiques	VI-21
6.2.2.2.2. Calcul du vecteur de Poynting le long de l'arête de la billette	VI-23
6.3. Étude électromagnétique et thermique d'un dispositif constitué de 11 spires	VI-29
6.3.1. Étude électromagnétique	VI-29
6.3.2. Étude thermique	VI-32

CHAPITRE VII. APPLICATIONS A UN MATERIAU MAGNETIQUE

7.1. Introduction	VII-2
7.2. Étude de la billette à $T=298K$	VII-4
7.3. Étude de la billette à $T= 573K$	VII-10
7.4. Étude de la billette à $T= 933K$	VII-15
7.5. Étude de la billette à $T=1042,95K$	VII-21
7.6. Étude de la billette à $T>T_C$	VII-27
7.7. Récapitulatif	VII-33
7.8. Conclusion	VII-36

Résumé

Mots clé:

Chauffage par induction , équations de Maxwell, équation de la chaleur, modélisation, aimantation, capacité calorifique, éléments finis, Fer, Aluminium, Cuivre, analyse numérique et analytique, puissance spécifique, puissance volumique, Poynting, Maple, MATLAB, FlexPDE.

Les dispositifs électromagnétiques engendrent toujours des échauffements. Ceux-ci peuvent être bénéfiques, comme dans le cas du chauffage par induction, ou néfastes, comme dans les machines électriques. La durée de vie de ces dispositifs dépend beaucoup de la température atteinte en régime permanent. Dans le chauffage par induction, on cherche toujours à obtenir des températures élevées, localisées ou à cœur, et avec des rendements élevés.

Ces dernières années, les systèmes électromagnétiques deviennent à la fois plus complexes et plus performants. Cela est dû à une analyse thermique et électromagnétique de plus en plus précise. On doit ces progrès à divers facteurs. Les plus en vue sont la puissance de calcul des ordinateurs, mais aussi au développement de codes de calculs dont la méthode des éléments finis est le plus connu.

L'analyse thermo-électromagnétique est réalisée à partir de la résolution des équations aux dérivées partielles qui régissent les phénomènes thermo-électromagnétiques. Il s'agit de l'équation de la chaleur pour le champ de température et des équations de Maxwell pour le champ électromagnétique. Ces dernières se trouvent largement simplifiées si on profite de la symétrie géométrique du dispositif étudié. Le choix de la grandeur électromagnétique d'étude en découle. Dans notre cas, le dispositif à étudier présentant une symétrie axisymétrique, la grandeur naturelle à choisir est le potentiel vecteur magnétique.

Les équations du champ thermo-électromagnétique sont fortement couplées. Les caractéristiques physiques, perméabilité, conductibilité électrique et conductibilité thermique dépendent de la température. Le niveau de température atteint dépend du courant injecté ou du champ magnétique appliqué. Il existe aujourd'hui des codes de calcul par la méthode des éléments finis qui peuvent résoudre des équations électromagnétothermiques couplées. C'est le cas de FlexPDE, utilisé dans ce travail.

L'objectif de notre travail est d'étudier les comportements électromagnétothermiques des dispositifs de chauffage par induction couplés, linéaires et non-linéaires.

INTRODUCTION

Les dispositifs électromagnétiques engendrent toujours des phénomènes d'échauffement. Ceux-ci peuvent être bénéfiques, comme dans le cas du chauffage par induction, ou néfastes, comme dans les machines électriques. La durée de vie de ces dispositifs dépend beaucoup de la température atteinte en régime permanent. Dans le chauffage par induction, on cherche toujours à obtenir des températures élevées, localisées ou à cœur, et avec des rendements élevés.

Ces dernières années, les systèmes électromagnétiques deviennent à la fois plus complexes et plus performants. Cela est dû à une analyse thermique et électromagnétique de plus en plus précise. On doit ces progrès à divers facteurs. Les plus en vue sont la puissance de calcul des ordinateurs, mais aussi au développement de codes de calculs dont la méthode des éléments finis est le plus connu.

L'analyse thermo-électromagnétique est réalisée à partir de la résolution des équations aux dérivées partielles qui régissent les phénomènes thermo-électromagnétiques. Il s'agit de l'équation de la chaleur pour le champ de température et des équations de Maxwell pour le champ électromagnétique. Les équations de Maxwell se trouvent largement simplifiées si on profite de la symétrie géométrique du dispositif étudié. Le choix de la grandeur électromagnétique en découle. Dans notre cas, le dispositif à étudier présentant une symétrie axisymétrique, la grandeur naturelle à choisir est le potentiel vecteur magnétique.

Les équations du champ thermo-électromagnétique sont fortement couplées. Les caractéristiques physiques, perméabilité, conductibilité électrique et conductibilité thermique dépendent de la température. Le niveau de température atteint dépend du courant injecté ou du champ magnétique appliqué. Il existe aujourd'hui des codes de calcul par la méthode des éléments finis qui peuvent résoudre des équations électromagnétothermiques couplées. C'est le cas de FlexPDE, utilisé dans ce travail.

L'objectif de notre travail est d'étudier les comportements électromagnétothermiques des dispositifs de chauffage par induction couplés, linéaires et non-linéaires.

Notre travail est composé de sept chapitres.

Le **premier chapitre** est consacré à la définition de l'électrothermie, en particulier le chauffage par induction et ses diverses applications. Quelques performances industrielles réalisées en matière de puissance installée et de fréquences utilisées sont citées. Le schéma-bloc d'une installation de chauffage par induction par onduleur à résonance série est donné.

Dans le **deuxième chapitre**, on introduit les équations de Maxwell desquelles découle la formulation générale des équations du champ électromagnétique. Ainsi sont établies les équations différentielles aux dérivées partielles qui régissent le champ électrique, la densité de courant, le champ magnétique, le potentiel vecteur magnétique et le potentiel scalaire. Le vecteur de Poynting, essentiel pour le calcul de la puissance spécifique est défini. Les conditions aux limites électromagnétiques de Dirichlet, Neumann et Robin sont décrites.

Le **troisième chapitre** est dédié aux trois modes de transfert de la chaleur: conduction, convection, rayonnement. La loi de Planck et Stefan-Boltzmann sont citées pour les pertes par radiation. L'équation de la chaleur et les conditions aux limites thermiques sont établies.

Le **quatrième chapitre** consiste en la modélisation des paramètres électromagnétiques par différentes méthodes. Il introduit la fonction de Brillouin qui permet de modéliser la magnétisation (ou la perméabilité) du fer aussi bien en fonction du champ magnétique appliqué que de la température. La variation de l'aimantation de saturation propre au fer est établie. Ce chapitre se termine par la modélisation en fonction de la température des conductivités électriques de l'aluminium, du cuivre et du fer.

Le **cinquième chapitre** consiste en la modélisation des paramètres thermiques. La capacité calorifique est modélisée en fonction de la température par une fonction analytique basée sur la fonction de Brillouin mais aussi sur la fonction et la température de Debye. De cette modélisation résulte celle, analytique aussi, de l'énergie interne. Il faut rappeler que ces deux grandeurs n'étaient données que par des intégrales qu'on ne sait résoudre que numériquement. Les conductivités thermiques de l'Aluminium, du cuivre et du fer ont été également modélisées en fonction de la température.

Dans le **sixième chapitre**, le côté pratique est abordé. Il s'agit de l'étude électromagnétique d'un premier dispositif constitué de la billette et d'une seule spire inductrice. La **solution numérique** à l'aide de FlexPDE a permis de calculer les courants réel et imaginaire dans la spire, mais aussi le courant, la densité de courant, le potentiel vecteur magnétique, la

puissance spécifique et la puissance volumique dans la billette. Ces calculs ont permis la validation des résultats car la courbe donnant la puissance spécifique calculée par nous et celle établie dans [52] coïncident parfaitement. La solution analytique de ce même dispositif a été établie par nous-mêmes et corrobore la solution numérique.

L'étude numérique électromagnétique et thermique d'un deuxième dispositif constitué de la billette et d'un inducteur de 11 spires a été entreprise. Là aussi, la puissance spécifique calculée par nous-mêmes et celles trouvées dans [52] et [38] sont en accord.

L'étude numérique thermique consiste en la distribution du champ de température dans la billette.

Le **septième chapitre** aborde l'étude numérique des grandeurs électromagnétiques (courants, densités de courants, puissances spécifique et volumique) principalement dans la billette en fonction de la variation de la perméabilité relative avec la température. Ainsi, quatre températures d'étude judicieusement réparties sur la courbe donnant l'aimantation de saturation réduite en fonction de la température, ont permis de suivre les grandeurs électromagnétiques du fer en phase magnétique. Une cinquième température, supérieure à la température de Curie du fer, a permis de calculer les mêmes grandeurs en phase amagnétique du fer.

Pour tous les calculs numérique pour la distribution du champ, et analytique pour les diverses modélisations les logiciels MAPLE, MATLAB et FlexPDE ont été utilisés.

CHAPITRE I

INTRODUCTION A L'ELECTROTHERMIE

- | | |
|--|-----------------|
| 1.1. Introduction à l'électrothermie | page I-2 |
| 1.2. Les avantages du chauffage par induction | page I-3 |
| 1.3. Schéma de principe d'une installation de chauffage par induction | page I-5 |
| 1.4. Recherche et installations de chauffage par induction | page I-6 |

1.1. Introduction à l'électrothermie

L'Union Internationale d'Électrothermie a défini l'électrothermie comme étant: " la partie de la science et de la technologie traitant des transformations de l'énergie électrique en chaleur à des fins utiles".

Le champ des applications de l'électrothermie est très vaste. Très vite, une classification s'est imposée. le critère retenu est le mode de transformation de l'énergie électrique en chaleur. On distingue alors:

- Le chauffage par résistance, où la chaleur est dissipée par effet Joule dans des résistances connectées directement à la source d'énergie. On distingue le chauffage par résistance direct ou indirect selon que la pièce à chauffer est traversée ou non par le courant électrique.
- Le chauffage par arc:
 - La chaleur est produite par un arc électrique qui est la manifestation du passage du courant entre deux électrodes. Il permet de mettre en œuvre de grandes puissances et d'atteindre des températures très élevées, qui peuvent être de l'ordre de 300 °C.
- Le chauffage par rayonnement infra-rouge:
 - Ce mode de chauffage utilise un rayonnement infra-rouge pour le transfert de l'énergie à un corps susceptible d'absorber tout ou partie des radiations émises par des sources dont les longueurs d'onde sont comprises entre les limites du spectre visible et celles des ondes hertziennes. Il est utilisé dans les traitements à basse température: séchage de vernis et peintures par exemple.
- le chauffage par hystérésis diélectrique:
 - La chaleur est principalement engendrée par les déplacements des charges électriques à l'échelle atomique ou moléculaire sous l'action d'un champ électrique de fréquence élevée.
- le chauffage par bombardement électronique:
 - La chaleur nécessaire est fournie par un faisceau d'électrons à grande énergie. Ceux-ci sont accélérés par un champ électrique de forte intensité, puis focalisés par des champs magnétiques ou électriques avant d'être projetés sur la charge à fondre sous forme d'un faisceau concentré. Leur énergie cinétique est transformée en cha-

leur pratiquement sans pertes. La puissance spécifique peut être réglée à volonté en jouant sur la concentration des électrons. Elle peut atteindre 8 MW/cm^2 .

- Le chauffage par plasma:

Les procédés de chauffage par plasma ont fourni à l'industrie des possibilités nouvelles grâce aux températures atteintes qui peuvent dépasser 10000 °K . Les produits les plus réfractaires peuvent alors être fondus. Sous l'influence d'une énergie extérieure, les atomes peuvent être ionisés. Lorsque l'ionisation atteint un pourcentage important d'atomes, la matière est dans un état différent de son état initial. Cet état est désigné sous le nom de plasma qui est considéré comme le quatrième des états de la matière. Dans un plasma gazeux, les particules sont soumises à une agitation thermique intense. A la pression atmosphérique, les chocs entre ions, atomes et électrons libres qui en résultent sont suffisamment nombreux pour que la transformation en chaleur de leur énergie cinétique entraîne une élévation considérable de température.

- le chauffage par induction électromagnétique:

Les courants de chauffage par effet Joule sont créés à l'intérieur même de la pièce à chauffer ou à fondre par induction électromagnétique. Il s'agit de courant de Foucault. Ce type de chauffage nécessite l'utilisation d'un convertisseur (élévateur) de fréquence. Dans ce type de chauffage, la fréquence joue un rôle primordial car elle conditionne le rendement, la puissance transmise à la charge et l'épaisseur de chauffage.

1.2. Les avantages du chauffage par induction:

Il est certain que le chauffage par induction présente des avantages qu'on ne trouverait pas ou peu dans les autres types classiques de chauffage. Ces avantages sont:

- la souplesse: les installations de chauffage par induction permettent l'utilisation d'un large éventail de matières premières économiquement et écologiquement intéressantes (ferrailles de récupération de toute nature), dans la production de nuances métallurgiques diverses. On peut également admettre des métaux différents dans la même installation. La régulation des temps de production et la programmation des débits de métal liquide sont rendues plus faciles par l'utilisation possible d'une chaîne

d'automatisation, car les constantes de temps sont plus faibles, surtout quand il s'agit d'installations dotées de convertisseurs de fréquence à semi-conducteurs.

- La régularité. Elle caractérise essentiellement la reproductibilité des opérations de fusion ou de traitement de surface qui sont répétées fidèlement tant au point de vue métallurgique que du point de vue consommation d'énergie.
- La précision. Elle conduit à travers tous les contrôles possibles (puissance, courant, tension, fréquence), en cours de marche, à des analyses en temps réel et à des températures à la demande.
- La propreté. La fusion électrique et en particulier par le chauffage par induction est certainement la moins salissante et la moins polluante. Ceci est dû à l'absence de flammes, de cendres, de fumées caractéristiques des combustibles fossiles liquides, solides ou gazeux.
- Dans le chauffage par induction, l'énergie est créée directement à l'intérieur de la masse de la charge, d'où un meilleur rendement entre autres.
- Le chauffage par induction réalise dans les fours à induction un brassage électromagnétique des métaux fondus. Ce brassage est caractérisé par un soulèvement du métal fondu qui s'écoule du centre vers la périphérie, la dénivellation pouvant atteindre quelques centimètres [BM2]. Le brassage électromagnétique permet d'homogénéiser le métal ou les alliages fondus, et favorise ainsi leur affinage, en permettant le renouvellement rapide des surfaces de contact avec le laitier qui prend naissance au-dessus du bain. La hauteur de la dénivellation est proportionnelle à la puissance spécifique P_s qui est une grandeur fondamentale dans le calcul des installations de chauffage par induction. Elle sera systématiquement calculée dans les chapitres VI et VII à travers le vecteur de Poynting. La puissance spécifique est la puissance par unité de surface de la charge que la source d'énergie peut fournir. Voici quelques puissances spécifiques pour fixer les idées [BM1]:
 - chalumeau oxyacétylénique: $1\text{kW}/\text{cm}^2$ et la température peut atteindre 3500°C .
 - chauffage par induction: $20\text{ kW}/\text{cm}^2$

- chauffage par bombardement électronique: 500 MW/cm^2 . Le diamètre du faisceau est inférieur au millimètre.
- chauffage par laser: $2 \cdot 10^{13} \text{ kW/cm}^2$; le fonctionnement se faisant par impulsions.

1.3. Schéma de principe d'une installation de chauffage par induction

Le chauffage par induction électromagnétique nécessite l'utilisation de courants alternatifs de fréquence élevée. Il existe néanmoins des installations qui fonctionnent à 50 ou 60 Hz. La production de la moyenne et haute fréquence obtenue jadis par des groupes convertisseurs tournants (générateurs synchrones) est obtenue aujourd'hui par des convertisseurs statiques (onduleurs) à base d'électronique de puissance (thyristors et transistors).

Le convertisseur statique de fréquence à thyristors destiné à une installation de chauffage par induction électromagnétique est décrit [BM1], figure 1.1. Il s'agit d'un onduleur à résonance série car l'inductance L et la résistance R modélisant la charge sont en série. Dans le cas d'une installation de chauffage par induction électrostatique, L et R sont mises en parallèle: l'onduleur est à résonance parallèle.

Une installation de chauffage par induction électromagnétique avec onduleur à résonance série comprend:

- ❖ un transformateur destiné à abaisser la tension
- ❖ un redresseur de courant du type pont de Graetz à thyristors ou simplement à diodes.
- ❖ une inductance de lissage destinée à filtrer le courant redressé fourni. La tension continue de sortie, fonction de la tension secondaire du transformateur, peut être réglée par action sur l'électronique de commande du pont de thyristors. Mais, ce dispositif a un mauvais facteur de puissance dû à l'angle de retard à l'amorçage des thyristors, contrairement au pont à diodes qui est à amorçage naturel.
- ❖ un onduleur à thyristors monophasé destiné à transformer le courant continu qui le traverse en courant alternatif de fréquence calculée par le concepteur en fonction de la nature de la charge et obtenue par une batterie de condensateurs C de manière à obtenir la résonance: $LC\omega^2 = 1$.

Une installation de chauffage par induction électromagnétique comprend en plus:

- le circuit de charge formé par l'inducteur du four qui contient lui-même la charge métallique à chauffer ou à fondre. Ce circuit est modélisé par un dipôle $L-R$ dont L et R ont été préalablement calculées [BM1].
- une batterie de condensateurs pour l'obtention de la résonance.
- des circuits annexes qui peuvent être :
 - des circuits de refroidissement des thyristors
 - les circuits de la commande électronique des gâchettes des thyristors.
 - des circuits destinés à permettre l'automatisation des séquences de travail et la régulation, en particulier l'action sur la puissance du four.

Le circuit de charge modélisé sous forme de dipôle $L-R$, avec l'inducteur et la batterie de condensateurs forment un circuit oscillant $L-R-C$ série qui tend spontanément à osciller à sa fréquence de résonance.

1.4. Recherche et installations de chauffage par induction

C'est la crise pétrolière de 1973 qui a donné un nouvel essor au chauffage par induction électromagnétique [54]. Les pays occidentaux, voulant se dégager de la dépendance des pays producteurs de pétrole, ont cherché à développer l'énergie nucléaire. A titre d'exemple, en 1984, le "nucléaire a représenté 59% de la production française de l'énergie électrique. Les énergies fossiles classiques (pétrole, gaz), devenues rares ou coûteuses, ou épuisées (charbon) et de toute manière non renouvelables, la sidérurgie et la métallurgie devaient connaître une mutation profonde dans les processus même de production. Jusqu'alors, les problèmes de chauffage par induction ont été résolus de manière empirique, sauf quelques cas simples. Aussi, d'énormes progrès restaient à faire. Ainsi, des équipes de recherche rassemblant des industriels, des constructeurs, des utilisateurs, des producteurs d'électricité et des chercheurs universitaires se sont constituées. Ces compétences, mises en commun, avaient pour objectif la "modélisation et le calcul des systèmes magnétoélectrothermiques". Trois points essentiels résumaient la démarche de ces équipes:

- définition et évaluation des paramètres de la magnétoélectrothermie,

- définition et résolution, à partir des équations générales et des conditions aux limites, des modèles mathématiques étudiés. ce travail a été grandement facilité par le développement de codes de calcul très puissants, comme par exemple, l'analyse numérique par la méthode des éléments finis.
- validation expérimentale de ces modèles.

Les applications du chauffage par induction sont de plus en plus nombreuses et des puissances installées de plus en plus importantes. Ainsi, un réchauffeur de brames de 37 MW a été installé en Suède, et un réchauffeur de rives d'ébauche de 4 MW installé au Japon. Toutes applications confondues, la puissance installée serait largement supérieure à 4000 MW aux U.S.A. et à 1000 MW en Suède [55].

Comme réalisations industrielles à thyristors, on peut citer une installation de 1 MW, 1500-2000 Hz, 3 tonnes/heure. Une autre installation est de 2 MW, 1000-1500 Hz, - tonnes/heure.

Parmi les applications du chauffage par induction, on peut citer:

- soudage par induction des rails de chemin de fer,
- assemblage de métaux par magnétoformage,
- préparation de silicium de haute pureté par plasma inductif haute fréquence
- utilisation de la lévitation électromagnétique pour la préparation de métaux ou d'alliages strictement définis.

Les performances rendement- fréquence- puissance des onduleurs convertisseurs de fréquence sont résumés dans le tableau suivant.

	Convertisseurs de fréquence avec		
	thyristors	transistors	Tubes à vide
rendement	90-97%	75-90%	55-70%
Gamme de fréquence	100 Hz à 10 kHz	≈ 500 kHz	≈ 3000 kHz
Gamme de puissance	≈ 10 MW	≈500 kW	≈ 1200 kW

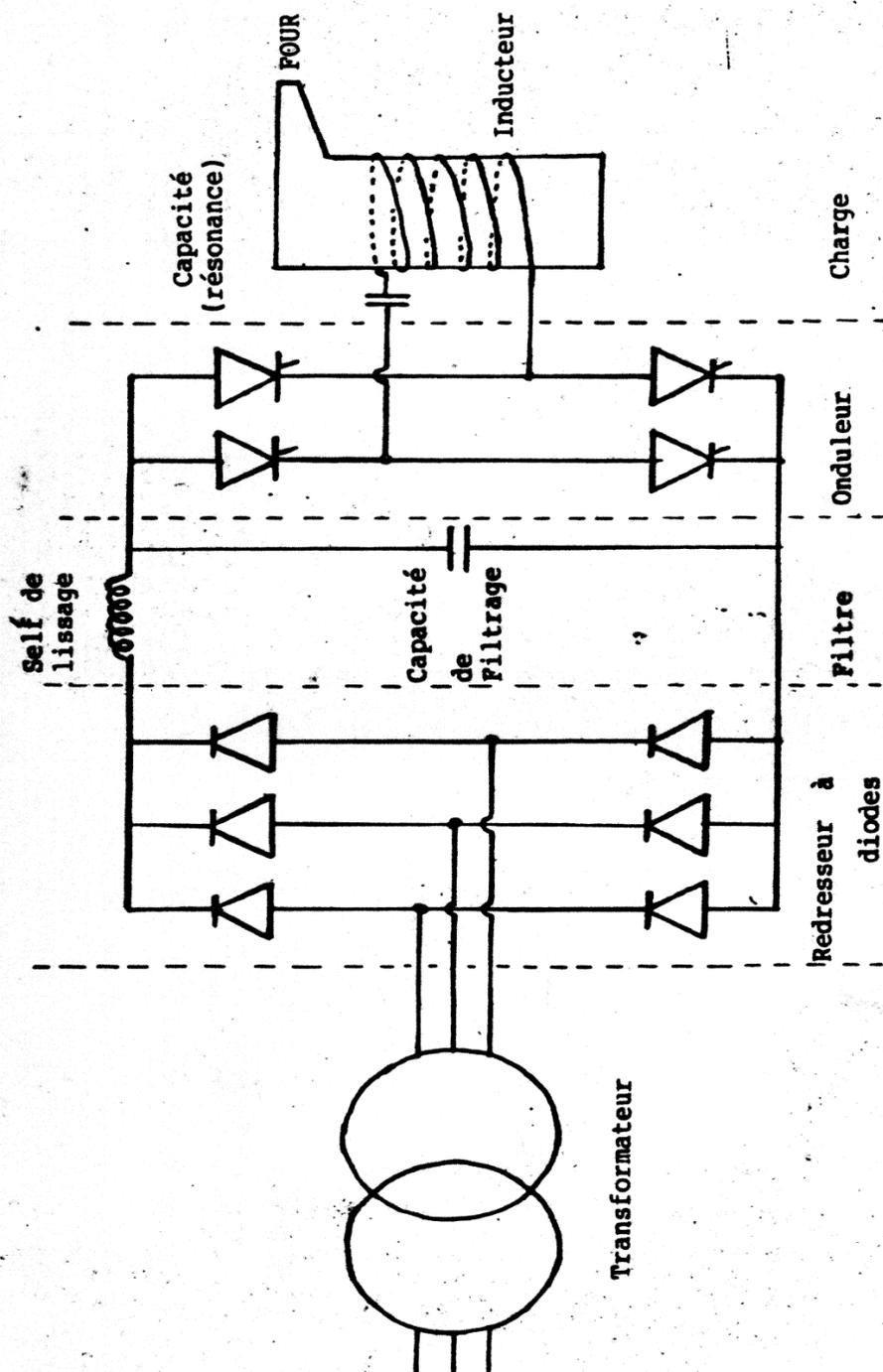


Figure 1.1. Schéma de principe d'une installation de chauffage par induction par onduleur à résonance série. [BM1]

La figure 1.2 représente le principe du chauffage par induction électromagnétique.

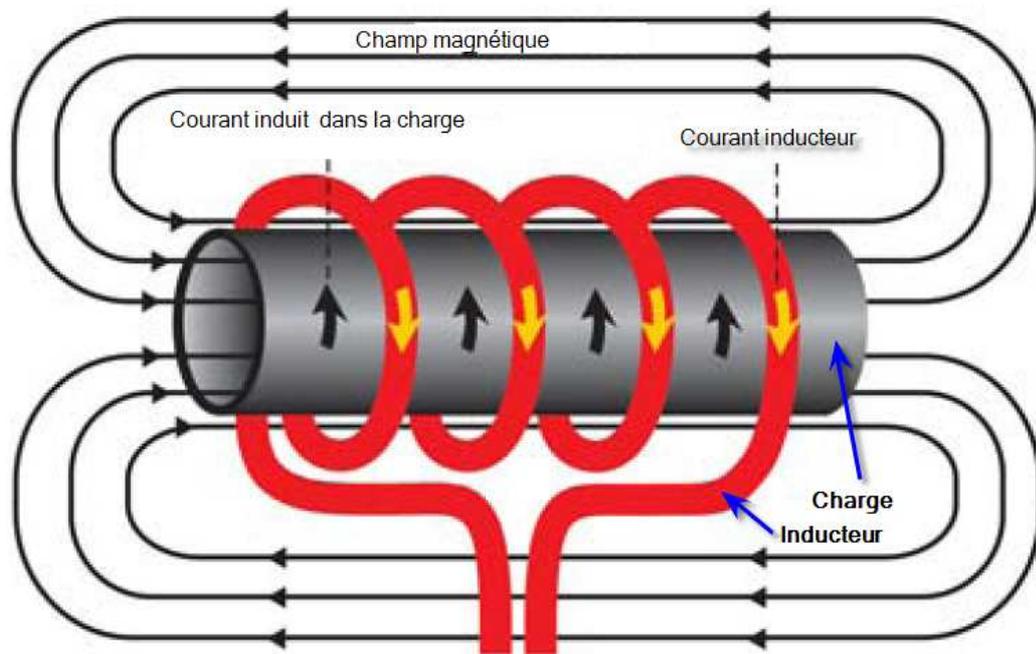


Figure 1.2. Principe du chauffage par induction électromagnétique

CHAPITRE II

FORMULATION GENERALE DES

EQUATIONS DU CHAMP

ELECTROMAGNETIQUE

2.1. Introduction	II - 2
2.2. Les équations de Maxwell et les lois du milieu	II - 3
2.3. Équation du champ électrique \vec{E} et de la densité de courant \vec{J}	II - 5
2.4. Équation du champ magnétique	II - 6
2.5. Équation du potentiel vecteur \vec{A}	II - 8
2.6. Équation du potentiel scalaire V	II - 8
2.7. Vecteur de POYNTING et puissance transmise	II - 9
2.8. Hypothèse de quasi-stationnarité	II - 10
2.9. Conditions aux limites	II - 12
2.9.1. Les conditions aux limites de DIRICHLET	II - 13
2.9.2. Les conditions aux limites de NEUMANN	II - 14
2.9.3. Les conditions aux limites de ROBIN	II - 17

CHAPITRE II

FORMULATION GENERALE DES EQUATIONS DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE.

2.1. Introduction :

Les équations de Maxwell définissent la distribution spatio-temporelle du champ électromagnétique dans un repère immobile en fonction des sources de ce champ. Ces sources sont les charges électriques immobiles et / ou mobiles. Elles traduisent, sous forme mathématique, une somme de recherches expérimentales qui mettent en jeu quatre vecteurs : \vec{H} , \vec{B} et \vec{E} , \vec{D} . \vec{H} et \vec{B} sont respectivement le champ et l'induction magnétiques. \vec{E} et \vec{D} sont respectivement le champ et l'induction électriques.

Les équations de Maxwell résultent de l'action d'un scalaire ρ appelé "densité totale volumique et / ou superficielle de charges électriques", et d'un vecteur \vec{J} dit "densité totale volumique et / ou superficielle de courant électrique".

La résolution directe de ces équations est impossible dans le cas général. C'est la raison pour laquelle on cherche des méthodes de calcul indirectes basées sur la substitution aux grandeurs de champ la notion du / des potentiels électromagnétiques.

Le raisonnement de cette substitution est le suivant : les sources du champ étant représentées par ρ et \vec{J} , cherchons un champ \vec{A} , de vecteur unique \vec{J} , appelé "potentiel-vecteur", et un champ scalaire unique dit "potentiel scalaire", exprimons ces deux potentiels à l'aide de ρ et \vec{J} et peut-être, pourrions-nous calculer plus aisément les grandeurs $[\vec{H}, \vec{B}, \vec{E}, \vec{D}]$ aux moyens de ces potentiels, plutôt que par ρ et \vec{J} .

Deux couples de potentiels électromagnétiques s'imposent par leur aspect pratique :

- un potentiel-vecteur magnétique \vec{A} associé à un potentiel scalaire V ;
- un potentiel-vecteur \vec{T} associé à un potentiel scalaire magnétique Ψ .

Dans la suite, nous n'introduirons que le couple (\vec{A}, V) , car de loin le plus utilisé. Nous rappelons d'abord l'introduction des potentiels \vec{A} et V ainsi que les problèmes généraux liés à leur formulation. Nous développerons ensuite le cas des problèmes bidimensionnels, objets principaux de notre travail.

2.2. Les équations de Maxwell et les lois du milieu :

Les équations de Maxwell qui gouvernent l'ensemble des phénomènes électromagnétiques, peuvent s'écrire sous la forme différentielle suivante

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (2.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (2.3)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.4)$$

où : \vec{E} est le champ électrique, \vec{D} le déplacement ou bien l'induction électrique,

ρ est la densité totale de charges électriques volumiques et superficielles, \vec{B} est l'induction magnétique, \vec{H} est le champ magnétique et \vec{J} est la densité totale de

courant de conduction. La quantité $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ est la densité de courant de déplacement.

D'autre part, nous savons que l'induction \vec{B} est à flux conservatif, c'est-à-dire que $\operatorname{div} \vec{B} = 0$. Alors, nous pouvons écrire :

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad (2.5)$$

où \vec{A} est le potentiel-vecteur. La relation (2.2) devient alors:

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot}\vec{A}) = \text{rot}\left(-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) \quad (2.6)$$

Nous constatons que \vec{E} et $-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ ont le même rotationnel et ne diffèrent donc que par un gradient, d'après les règles du calcul vectoriel. Nous écrivons donc:

$$\vec{E} = -\text{grad}V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad (2.7)$$

où V est le potentiel scalaire.

Les lois du milieu nécessaires à la résolution des équations de Maxwell sont :

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E} \quad (2.8)$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \quad (2.9)$$

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} \quad (2.10)$$

où $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$ est la permittivité diélectrique absolue ; ϵ_0 la permittivité du vide ;

ϵ_r la permittivité relative.

$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$ est la perméabilité magnétique absolue ; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H / m}$, la perméabilité du vide et μ_r la perméabilité relative. σ est la conductibilité électrique.

Dans un milieu magnétique, la relation $\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$ peut également se mettre sous la forme :

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H}_0 + \vec{M}) \quad (2.11)$$

où \vec{H}_0 est le champ magnétique appliqué comme si le milieu magnétique était remplacé par le vide. Le vecteur \vec{M} est la densité ou intensité d'aimantation. Il sera étudié en détail dans le chapitre relatif à la modélisation des paramètres physiques.

Si l'on pose:

$$\vec{M} = \chi(H_0) \cdot \vec{H}_0 \quad (2.12),$$

la relation (2.8) devient :

$$\vec{B} = \mu_0 [1 + \chi(H_0)] \cdot \vec{H}_0 = \mu_0 \cdot \mu_r(H_0) \cdot \vec{H}_0 \quad (2.13)$$

$$\text{avec :} \quad \mu_r(H_0) = 1 + \chi(H_0) \quad (2.14)$$

et où $\chi(\vec{H}_0)$ est la susceptibilité magnétique.

De même, pour les diélectriques, la relation $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ peut s'écrire :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} + \vec{P} \quad (2.15)$$

où \vec{P} est le vecteur polarisation. Si l'on pose :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi(\vec{E}) \cdot \vec{E} \quad (2.16)$$

alors la relation (2.12) devient :

$$\vec{D} = \epsilon_0 [1 + \chi(E)] \cdot \vec{E} \quad (2.17)$$

où, dans ce cas:

$$\epsilon_r = 1 + \chi(E) \quad (2.18)$$

et où $\chi(E)$ est la susceptibilité diélectrique.

Les matériaux que nous serons amenés à considérer seront linéaires, homogènes et isotropes (l.h.i.). Mais, ils peuvent être non-linéaires, homogènes et isotropes. De ce fait, dans les relations qui caractérisent ces milieux, les paramètres physiques μ , ϵ , σ , M , χ ne s'expriment pas par des tenseurs comme dans le cas de l'anisotropie, mais par des scalaires.

2.3. Équation du champ électrique \vec{E} et de la densité de courant \vec{J} :

Si nous prenons le rotationnel des deux membres de l'équation (2.2), nous pouvons écrire:

$$\text{rot} \vec{(\text{rot} \vec{E})} = -\text{rot} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot} \vec{B}) \quad (2.19)$$

Or, nous savons que d'après une règle bien connue du calcul vectoriel:

$$\text{rot} \vec{(\text{rot} \vec{E})} = \text{grad} (\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} \quad (2.20)$$

Il s'ensuit que :

$$\text{grad} (\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot} \vec{B}) = 0 \quad (2.21)$$

Si nous supposons que la matière est idéale, et compte tenu des relations (2.1) et (2.4), ainsi que de $\vec{B} = \mu \vec{H}$ et $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, alors, il vient:

$$\text{grad} \vec{\left(\frac{1}{\epsilon} \text{div} \vec{D} \right)} - \Delta \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \vec{J} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.22)$$

$$\text{D'où:} \quad \Delta \vec{E} - \mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \text{grad} \vec{\left(\frac{\rho}{\epsilon} \right)} = 0 \quad (2.23)$$

Compte tenu de la relation $\vec{J} = \sigma \vec{E}$, (2.23) devient:

$$\Delta \vec{E} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \text{grad} \vec{\left(\frac{\rho}{\epsilon} \right)} = 0 \quad (2.24)$$

L'équation (2.24) constitue l'équation différentielle aux dérivées partielles (EDDP) régissant aussi bien le champ électrique \vec{E} que le vecteur densité de courant \vec{J} car ils sont reliés par l'équation $\vec{J} = \sigma \vec{E}$.

Deux formes utiles de l'équation (2.24) sont relatives :

- d'une part, à un matériau conducteur tel que $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ et $\rho = 0$:

$$\Delta \vec{E} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.25)$$

qui est une équation différentielle aux dérivées partielles de **diffusion**.

- d'autre part, à un milieu non conducteur $\vec{J} = 0$ et $\rho = 0$:

$$\Delta \vec{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.26)$$

qui est une équation différentielle aux dérivées partielles de **propagation**.

2.4. Équation du champ magnétique:

Si nous prenons le rotationnel des deux membres de l'équation $\text{rot}\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$,

nous pouvons écrire:

$$\text{rot}\vec{(\text{rot}\vec{H})} = \text{rot}\vec{(\vec{J})} + \frac{\partial}{\partial t}(\text{rot}\vec{D}) \quad (2.27)$$

ou bien:
$$\text{grad}\vec{(\text{div}\vec{H})} - \Delta\vec{H} = \text{rot}\vec{(\vec{J})} + \frac{\partial}{\partial t}(\text{rot}\vec{D}) \quad (2.28)$$

Si la matière est idéale et compte tenu de $\vec{B} = \mu\vec{H}$ et $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, il vient:

$$\Delta\vec{H} + \text{rot}\vec{(\vec{J})} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}(\text{rot}\vec{E}) - \text{grad}\vec{\left(\frac{1}{\mu} \text{div}\vec{B}\right)} = 0 \quad (2.29)$$

Les relations $\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ et $\text{div}\vec{B} = 0$ permettent d'écrire:

$$\Delta\vec{H} + \text{rot}\vec{(\vec{J})} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.30)$$

- Pour un conducteur défini par $\vec{J} = \sigma\vec{E}$, cette équation devient:

$$\Delta\vec{H} - \mu\sigma \frac{\partial\vec{H}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.31)$$

Il s'agit d'une équation différentielle aux dérivées partielles de **diffusion** à cause du terme

$$\mu\sigma \frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$$

- Pour un corps isolant, $\vec{J} = 0$, elle devient:

$$\Delta\vec{H} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.32)$$

Il s'agit d'une équation différentielle aux dérivées partielles de **propagation**.

2.5. Équation du potentiel vecteur \vec{A} :

En prenant le rotationnel de $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$, nous obtenons:

$$\text{rot}\vec{B} = \text{rot}(\text{rot}\vec{A}) = \text{grad}(\text{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A} \quad (2.33)$$

Si la matière est idéale et compte tenu de l'équation $\text{rot}\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ et des relations

$\vec{B} = \mu\vec{H}$ et $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$, on obtient:

$$\Delta\vec{A} + \mu\vec{J} + \mu\epsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \text{grad}(\text{div}\vec{A}) = 0 \quad (2.34)$$

Remplaçant \vec{E} par la relation $\vec{E} = -\text{grad}V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$, il vient:

$$\Delta\vec{A} + \mu\vec{J} + \mu\epsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\text{grad}V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) - \text{grad}(\text{div}\vec{A}) = 0 \quad (2.35),$$

$$\text{soit:} \quad \Delta\vec{A} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} + \mu\vec{J} - \text{grad}\left(\text{div}\vec{A} + \mu\epsilon\frac{\partial V}{\partial t}\right) = 0 \quad (2.36)$$

Cette équation se simplifie si on tient compte de la jauge de LORENTZ:

$$\text{div}\vec{A} + \mu\epsilon\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (2.37)$$

D'où l'équation déterminant le potentiel-vecteur:

$$\Delta\vec{A} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} + \mu\vec{J} = 0 \quad (2.38)$$

2.6. Équation du potentiel scalaire V:

Si nous prenons la divergence de l'équation $\vec{E} = -\text{grad}V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$,

$$\text{nous obtenons:} \quad \text{div}\vec{E} = \text{div}\left(-\text{grad}V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = -\Delta V - \frac{\partial}{\partial t}\text{div}\vec{A} \quad (2.39)$$

Si la matière est idéale et compte tenu de $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, nous obtenons:

$$\frac{1}{\epsilon} \operatorname{div} \vec{D} + \Delta V + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{A} = 0 \quad (2.40)$$

Cette expression peut être écrite sous la forme suivante si on fait apparaître la condition de LORENTZ:

$$\Delta V - \mu \epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho}{\epsilon} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\underbrace{\operatorname{div} \vec{A} + \mu \epsilon \frac{\partial V}{\partial t}}_{=0} \right) = 0 \quad (2.41)$$

$$\text{D'où l'équation régissant le potentiel scalaire: } \Delta V - \mu \epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho}{\epsilon} = 0 \quad (2.42)$$

2.7. Vecteur de POYNTING et puissance transmise:

Le vecteur de Poynting \vec{P}_g est défini par la relation :

$$\vec{P}_g = \vec{E} \wedge \vec{H} . \quad [2.43]$$

Il joue un rôle très important dans la prévision des échanges d'énergie. Calculons la divergence du vecteur de Poynting:

$$\operatorname{div} \vec{P}_g = \operatorname{div} (\vec{E} \wedge \vec{H}) = \vec{H} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{H} \quad [2.44] ,$$

d'après une relation bien connue du calcul vectoriel.

Nous savons que: $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ et $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$. Si nous remplaçons dans

l'expression [2.44], il vient:

$$\operatorname{div} \vec{P}_g = \vec{H} \cdot \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) - \vec{E} \cdot \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \quad [2.45].$$

Le flux du vecteur de Poynting à travers une surface $\Sigma(\tau)$ délimitant un volume τ est:

$$\Phi(\vec{P}_g) = \iint_{\Sigma(\tau)} \vec{P}_g \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma = \iiint_{\tau} \operatorname{div}(\vec{P}_g) d\tau = -\iiint_{\tau} \left(\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \vec{J} \right) d\tau \quad [2.46]$$

Cette relation peut s'écrire:

$$\Phi(\vec{P}_g) = -\iiint_{\tau} \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left(\frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} + \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \right)}_{\frac{\partial W_{em}}{\partial \tau}} d\tau - \iiint \vec{E} \cdot \vec{J} d\tau \quad [2.47]$$

La densité volumique d'énergie électromagnétique $\frac{\partial W_{em}}{\partial \tau}$ en W/m^3 est:

$$\frac{\partial W_{em}}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} + \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \quad [2.48]$$

$$\Phi(\vec{P}_g) = -\iiint_{\tau} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial W_{em}}{\partial \tau} \right) d\tau - \iiint \vec{E} \cdot \vec{J} d\tau \quad [2.49]$$

Les relations [2.46] et [2.49] donnent:

$$\text{div} \vec{P}_g = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial W_{em}}{\partial \tau} \right) - \vec{E} \cdot \vec{J} \quad [2.50]$$

La relation [2.50] peut également s'écrire:

$$\text{div} \vec{P}_g = -\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial W_{em}}{\partial t} \right) - \vec{E} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial}{\partial \tau} (S_{em}) - \vec{E} \cdot \vec{J} \quad [2.51]$$

Si S_{em} est la puissance apparente, P la puissance active, Q la puissance réactive, nous avons:

$$S_{em} = P_{em} + jQ_{em} \quad [2.52]$$

Finalement:

$$\text{div} \vec{P}_g = -\frac{\partial P_{em}}{\partial \tau} - j \frac{\partial Q_{em}}{\partial \tau} - \vec{E} \cdot \vec{J} \quad [2.53]$$

2.8. Hypothèse de quasi-stationnarité:

L'approximation des états quasi-stationnaires est basée sur le rapport des amplitudes des deux termes du second membre de l'équation $\text{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$. Elle est en

particulier liée à la rapidité des variations des phénomènes électromagnétiques en fonction du temps et donc de la fréquence. Ainsi, on est en mesure de négliger le courant de

déplacement $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, dû au caractère diélectrique plus ou moins affirmé du matériau étudié

, devant le courant de conduction $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ et inversement. Si les phénomènes varient sinusoidalement dans le temps à une pulsation ω , nous pouvons écrire :

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = j\omega\epsilon\vec{E} \quad (2.54)$$

où j est tel que $j^2 = -1$.

Et si nous souhaitons, par exemple, savoir si le matériau à étudier se comporte à la fréquence de travail plutôt comme un bon conducteur, il faut vérifier la relation:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \gg \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = j\omega\epsilon\vec{E} \quad (2.55)$$

Ce qui se traduit en module par :

$$\sigma \gg \omega\epsilon \quad (2.56)$$

Pour certains auteurs,[82], un bon conducteur ou mauvais diélectrique est défini par :

$$\frac{\omega\epsilon}{\sigma} < \frac{1}{10} \quad (2.57),$$

alors qu'un bon diélectrique ou mauvais conducteur est caractérisé par :

$$\frac{\omega\epsilon}{\sigma} > \frac{1}{10} \quad (2.58)$$

Le tableau suivant contient ,en particulier, le cas d'un très bon conducteur (le cuivre) et celui d'un très bon diélectrique (l'eau de mer, [5],[BM1],[BM10],[BM13]).Il indique la fréquence maximale au-dessous de laquelle le courant de déplacement est

négligeable devant le courant de conduction et qui vérifie la relation : $\frac{\omega\epsilon}{\sigma} < \frac{1}{100}$:

	σ	$\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$	ϵ_r	$f <$
eau de mer		5	80	10^7 Hz
graphite		10^5	1	$18 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$
cuivre		$0,6 \cdot 10^8$	1	10^{16} Hz

Ainsi, pour les métaux, l'approximation des états quasi-stationnaires est justifiée dans le domaine des fréquences radioélectriques ($f < 10^{12}$ Hz), et, à plus forte raison dans le domaine des fréquences usuellement utilisées dans les machines électriques (50 ou 60 Hz et leurs harmoniques), mais aussi dans le domaine du chauffage par induction où les fréquences varient entre 50 ou 60 Hz et 20.000 Hz dans la plupart des applications. Mais elles peuvent avoir les valeurs de 50 kHz, 100 kHz, 200 kHz, 500 kHz et même 1 MHz, en particulier dans les traitements de surface.

En conclusion, cette hypothèse est largement justifiée dans la suite de notre travail car on ne considérera que des métaux plutôt bons conducteurs. La relation $\text{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ sera donc utilisée sans le terme correspondant au courant de déplacement. En fait, cette hypothèse exclut la présence d'un terme de propagation en $\partial^2 / \partial t^2$ et ne garde que le terme de diffusion en $\partial / \partial t$ dans les équations aux dérivées partielles qui régissent le comportement des champs \vec{H} , \vec{B} , \vec{E} , \vec{J} , et \vec{A} .

2.9. Conditions aux limites:

Physiquement, l'amplitude des champs électromagnétiques décroît comme l'inverse de la distance à la source de courant. Ces champs doivent s'annuler à l'infini. Dans une analyse par la méthode des éléments finis, le domaine d'étude doit être fermé par une frontière artificielle choisie assez loin des sources produisant ces champs pour ne pas nuire à la précision envisagée. Pour [38], quand la distance de la source (billette) est égale à 5 fois la hauteur de la billette, la puissance dissipée dans la billette est connue avec une précision inférieure à 2%. L'imposition de conditions aux limites pour les champs

électromagnétiques sur la frontière extérieure est exigée par les techniques mathématiques de résolution d'équation différentielles. Dans les problèmes qui traitent des régimes transitoires, ce sont les conditions initiales qui sont imposées. Les conditions aux limites doivent être bien adaptées, sinon elles risquent d'influencer le calcul et déformer la solution.

Intuitivement, les conditions aux limites règlent le flux de l'énergie électromagnétique et thermique sur les frontières qui constituent les différentes régions qui délimitent le domaine d'étude. Elles imposent les formules mathématiques qui traduisent ces échanges d'énergie.

Les conditions aux limites nécessaires pour la résolution des équations de la physique mathématique sont de trois types:

- les conditions aux limites de Dirichlet
- les conditions aux limites de Neumann,
- Les conditions aux limites mixtes ou de Robin.

2.9.1. Les conditions aux limites de DIRICHLET:

Le champ électromagnétique est imposé sur les frontières. Il peut être égal à une constante nulle ou non nulle, comme il peut être égal à une expression mathématique qui gère les flux d'énergie dans un sens ou un autre. Le dispositif physique étudié dans le cadre de ce travail présente une symétrie axiale. Le champ électromagnétique le plus approprié est le potentiel vecteur magnétique. Les conditions aux limites de Dirichlet dans ce cas s'écrivent:

$$\left\{ \begin{array}{l} A|_{\text{frontière}} = A_0 \text{ ou} \\ A|_{\text{frontière}} = \text{expression mathématique} \end{array} \right.$$

Lorsque le problème possède une géométrie symétrique, et les courants sont disposés de manière antisymétrique, nous devons avoir une condition de Dirichlet nulle sur l'axe de symétrie: $A|_{\text{frontière}} = 0$. C'est le cas sur l'axe de la billette.

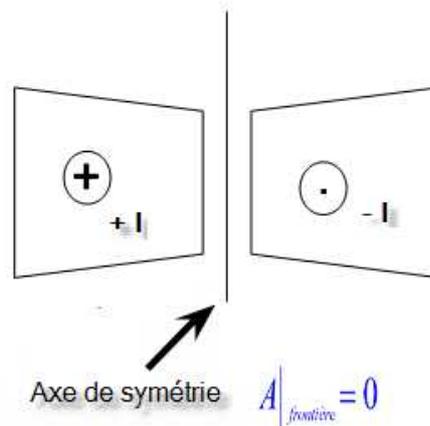


Figure 1: Condition aux limites nulle de Dirichlet pour les problèmes ayant une symétrie géométrique et une excitation antisymétrique.

2.9.2. Les conditions aux limites de NEUMANN:

La dérivée du champ électromagnétique par rapport à la normale extérieure est imposée sur les frontières. Elle peut être nulle ou non nulle. Elle peut aussi être égale à une expression mathématique traduisant le phénomène physique qui traduit les échanges d'énergie entre les deux domaines adjacents. Dans notre cas, les conditions aux limites de Neumann s'écrivent:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A}{\partial n} \Big|_{\text{frontière}} = A_0 \text{ ou} \\ \frac{\partial A}{\partial n} \Big|_{\text{frontière}} = \text{expression mathématique} \end{array} \right.$$

Cette condition est utilisée dans le cas de problèmes possédant une symétrie aussi bien de

géométrie que de courant: $\frac{\partial A}{\partial n} \Big|_{\text{frontière}} = 0$

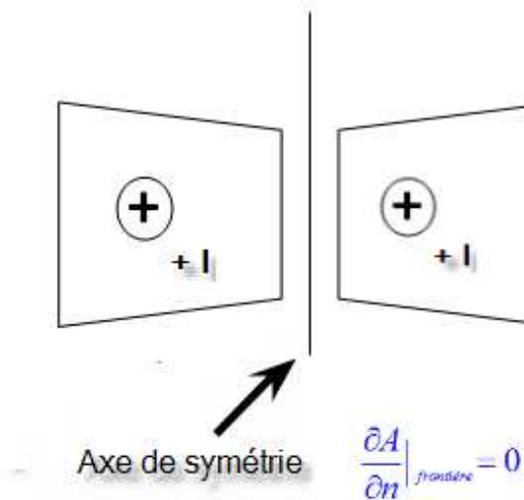


Figure 2: Condition aux limites nulle de Neumann pour les problèmes ayant une symétrie géométrique et une symétrie d'excitation.

On peut également utiliser cette condition pour une interface avec un matériau de perméabilité infinie, c'est-à-dire ayant une réluctance nulle et de ce fait constitue un conducteur de flux parfait. Dans la pratique, c'est le cas entre l'air ($\mu_r = 1$) et des matériaux ferromagnétiques ($\mu_r =$ quelques centaines ou quelques milliers).

Condition de périodicité ou d'anti-périodicité:

On doit fixer alors: $A|_s = k \cdot A_{s+S}$

- S est la période spatiale
- et k un paramètre qui prend la valeur 1 quand il s'agit de périodicité et -1 quand il s'agit d'antipériodicité.

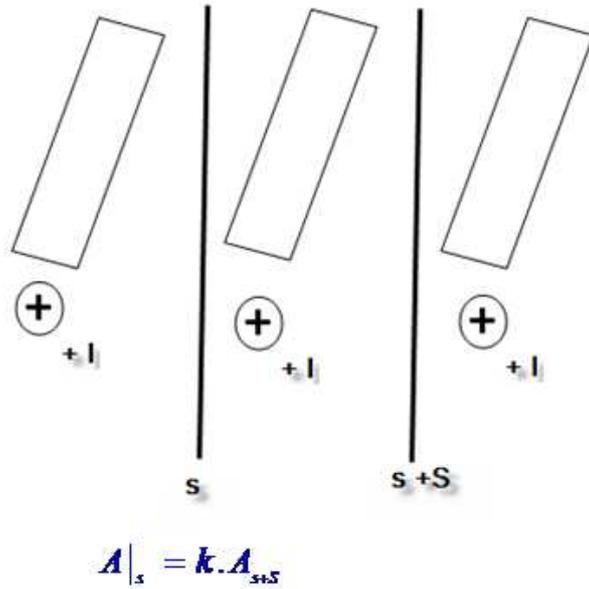


Figure 3: Condition de périodicité pour les problèmes ayant une structure et une excitation répétitives.

Dans le cas de coordonnées cylindriques axisymétriques, les conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann sont résumées sur la figure 4.

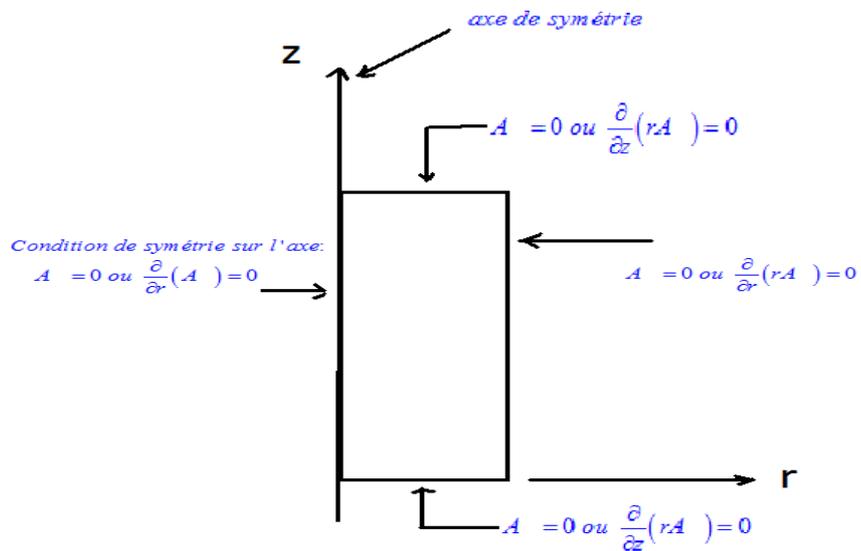


Figure 4: Conditions aux limites de type Dirichlet ou de type Neumann.

2.9.3. Les conditions aux limites de ROBIN:

Les conditions aux limites de type Robin sont des conditions aux limites mixtes. Elles allient à la fois les conditions aux limites de type Dirichlet et les conditions aux limites de type Neumann.

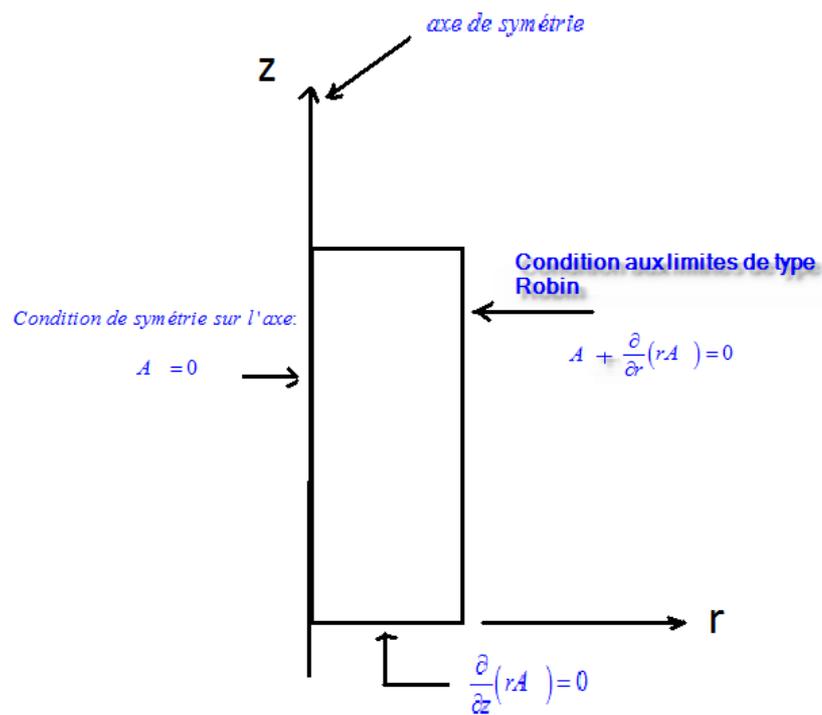


Figure 5 : Conditions aux limites de type Robin

CHAPITRE III

FORMULATION GENERALE DES EQUATIONS

DU CHAMP THERMIQUE.

3.1.	Modes de transfert de la chaleur	III - 2
3.1.1.	Conduction	III - 2
3.1.2.	Convection	III - 3
3.1.3.	Rayonnement	III - 5
3.1.3.1.	Loi de Planck	III - 5
3.1.3.2.	Loi de Stefan-Boltzmann	III - 6
3.1.3.3.	Échange d'énergie entre 2 surfaces grises	III - 7
3.2.	Équation de la chaleur	III - 10
3.3.	Conditions aux limites	III - 13

CHAPITRE III

FORMULATION GENERALE DES EQUATIONS DU CHAMP THERMIQUE.

3.1. Modes de transfert de la chaleur :

Le transfert de chaleur ou thermocinétique est la science dont l'objet est l'étude des échanges thermiques. La thermocinétique doit permettre :

- le calcul du flux thermique pour le favoriser au maximum dans la conception des échangeurs et réacteurs, ou le restreindre au maximum dans la conception des isolations thermiques.
- le calcul de la distribution des températures pour s'assurer que le champ de températures des dispositifs étudiés reste dans des limites raisonnables compte tenu des propriétés physiques des matériaux qui les constituent. Il s'agit ici d'une opération d'analyse.
- le calcul des dimensions et des formes géométriques requises des surfaces d'échange pour satisfaire un cahier des charges. Il s'agit là d'une opération de synthèse.

Les différents modes de transfert de la chaleur sont : la conduction thermique, la convection thermique, et le rayonnement thermique. Dans la pratique, on a en général une combinaison de ces trois modes, mais lorsque l'un des modes est dominant, on néglige les deux autres.

3.1.1. Conduction :

De même que la conduction électrique est le transfert de charges électriques sous l'influence d'un gradient de potentiel, la conduction thermique correspond au transfert de

la chaleur d'un point à un autre sous l'influence d'un gradient de température, sans déplacement appréciable de particules dans les corps solides. De ce fait, l'analogie électrique d'une différence de température est une différence de potentiel.

Le flux thermique \dot{Q} est la quantité de chaleur échangée par unité de temps et correspond donc à la dérivée par rapport au temps de la quantité de chaleur Q :

$$\dot{Q} = \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (3.1)$$

De ce fait, son analogue électrique est le courant électrique I . \dot{Q} s'exprime en Watt.

La densité de flux thermique \dot{q} est un vecteur dirigé dans le sens du flux thermique et dont le module est la quantité de chaleur échangée par unité de temps et de surface normale S_n à la direction du flux. On a alors :

$$\dot{q} = \frac{\partial \dot{Q}}{\partial S_n} = \frac{\partial}{\partial S_n} \left(\frac{\partial Q}{\partial t} \right) \quad (3.2)$$

\dot{q} s'exprime en Watt/m². L'analogie électrique de \dot{q} est la densité de courant électrique J .

La loi fondamentale de la conduction thermique est due à Fourier (1822) : la densité de flux thermique \dot{q} est proportionnelle au gradient de la température. Le coefficient de proportionnalité k est la conductivité thermique :

$$\vec{\dot{q}} = -k \cdot \vec{\nabla} T \quad \text{Watt/m}^2 \quad (3.3).$$

Le vecteur $\vec{\nabla} T$ au point $\mathbf{M}(x, y, z)$ est orienté dans la direction pour laquelle la variation de la température par unité de longueur est la plus forte, c'est-à-dire normal à la surface

isotherme passant par $\mathbf{M}(x, y, z)$: $\vec{\nabla} T = \vec{n} \cdot \frac{\partial T}{\partial n}$.

3.1.2. Convection :

On distingue deux types de convection : la convection naturelle et la convection forcée. La convection naturelle, qui nous intéresse dans ce travail, est le transfert d'énergie

dû à des mouvements macroscopiques du fluide (air) vers le haut. Ce transfert est dû à un gradient de densité dû lui-même à un gradient de température. Les particules de fluide en contact avec un corps chaud deviennent plus légères et montent en cédant leur place à d'autres particules qui ne sont pas encore chaudes. Ces dernières, à leur tour s'échauffent, montent et le cycle recommence. La formulation générale du problème de la convection exige le calcul de la vitesse \vec{v} avec ses trois composantes, la pression \mathbf{p} , ainsi que la température \mathbf{T} en fonction des coordonnées spatiales et du temps, la densité du fluide étant fixé par l'équation d'état. Le flux de chaleur \dot{q}_{conv} évacué à partir de la surface d'un solide vers un fluide est exprimé par la loi de Newton :

$$\dot{q}_{conv} = h_c \cdot (T_s - T_0) \quad (3.4).$$

- h_c ($\text{W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$) est le coefficient de transfert convectif ;
- T_0 est la température de l'air ambiant ;
- T_s est la température de la surface du solide à chauffer.

Le coefficient de transfert h_c est fonction des caractéristiques géométriques du corps, de sa rugosité, des caractéristiques du fluide (densité, capacité calorifique, viscosité, etc.), de la nature de l'écoulement (régime laminaire ou turbulent), et de la vitesse caractéristique.

L'ordre de grandeur de h_c , exprimé en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$, est de 2 à 50 pour l'air.

La convection forcée est due à un gradient de pression imposée par une action mécanique externe telle :

- un pompage dans les échangeurs industriels ou dans un chauffage central ;
- une ventilation (moteurs électriques, radiateurs de véhicules, sèche-cheveux) ;
- ou une agitation mécanique dans les réactions chimiques.

3.1.3. Rayonnement :

Le rayonnement est un mode d'échange de chaleur par émission et absorption de radiations électromagnétiques. Les longueurs d'onde thermiques vont en gros de 1 à 100 μm . On définit alors :

- Un facteur d'absorption (absorptivité) **a**. Si **a=1** : on a un corps noir
- Un facteur de réflexion (réflectivité) **r**. Si **r=1** : on a un corps blanc
- Un facteur de transmission (transmittivité) **t**. Si **t=0** : on a un corps opaque.

Il est évident que :

$$a + r + t = 1 \quad (3.5)$$

3.1.3.1. Loi de Planck :

L'émittance monochromatique $M_{\lambda, cn}$, en Watt/m^3 , relative à la longueur d'onde λ , d'un corps noir émetteur vers un corps récepteur s'écrit [7]:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{\lambda, cn} = \frac{C_1}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1} \quad \text{W / m}^3 \\ C_1 = 3,741 \cdot 10^{-16} \quad \text{W} \cdot \text{m}^2 \\ C_2 = 0,014388 \quad \text{m} \cdot \text{K} \end{array} \right. \quad (3.6)$$

T en K, λ en m. La [figure3.1](#) représente cette fonction avec pour paramètres les températures 600 K, 800 K, 900 K, 1000 K, 1100 K, 1200 K, 1500 K.

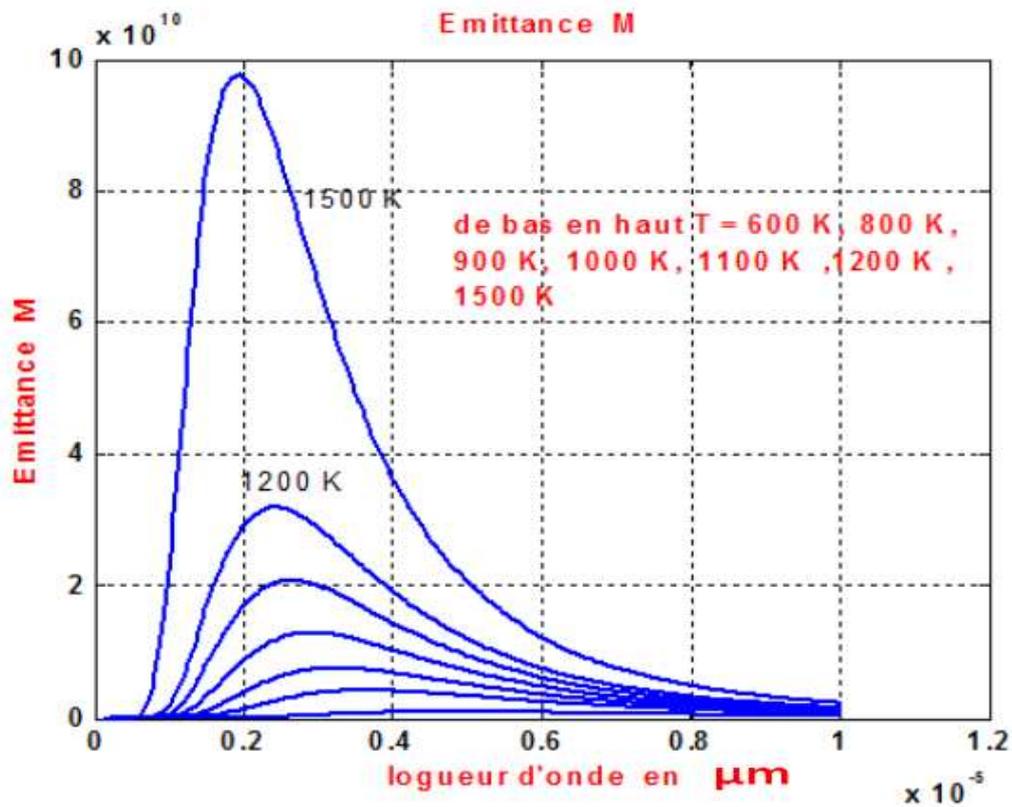


Figure 3.1: $M_{\lambda, cn} = \frac{C_1}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1}$ en fonction de λ en μm

La loi de Wien donne la longueur d'onde λ_m pour laquelle M_{λ} est maximale.

Après dérivation de $M_{\lambda, cn}$ par rapport à λ et annulation de cette dérivée, les calculs donnent :

$$\lambda_m \cdot T = 2896 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{K} \quad (3.7)$$

3.1.3.2. Loi de Stefan-Boltzmann:

Cette loi donne pour un corps noir, l'émittance pour toutes les longueurs d'onde :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{cn} = \int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} M_{\lambda,cn} \cdot d\lambda = \sigma \cdot T^4 \\ \sigma = 5,76 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K^4} \end{array} \right. \quad (3.8)$$

σ : constante de Stefan-Boltzmann

Pour un corps gris, on a :

$$M_{cg} = \varepsilon(T) \cdot \sigma \cdot T^4 = \varepsilon(T) \cdot M_{cn} \quad (3.9)$$

où $\varepsilon(T)$ est le facteur d'émission ou émissivité.

3.1.3.3. Échange d'énergie rayonnante entre 2 surfaces grises :

Pour les corps noirs (corps absorbants idéaux), l'absorptivité $\mathbf{a=1}$. Pour les corps gris, $\varepsilon(T)$ dépend de la surface rayonnante et de la température. Les émissivités $\varepsilon(T)$ de l'Aluminium, du Cuivre, et du fer sont données par les tableaux ci-après [38] :

Aluminium	Température en °C	Émissivité $\varepsilon(T)$
Pur poli	204 à 592	0,038 à 0,06
Fortement oxydé	93 à 538	0,2 à 0,33
Oxydé	227	0,11
Non oxydé rugueux	27	0,05 à 0,07

Tableau 1. Émissivité de l'Aluminium

Cuivre	Température en °C	Émissivité $\varepsilon(T)$
poli	38 à 260	0,04 à 0,05
oxydé	38	0,78

Tableau 2. Émissivité du Cuivre

Fer	Température en °C	Émissivité $\varepsilon(T)$
Poli	426 à 483	0,14
Fonte tournée	38	0,44
Fonte rugueuse très oxydée	38 à 260	0,06 à 0,08

Tableau 3. Émissivité du Fer

Quand 2 surfaces grises S_1 et S_2 maintenues à des températures uniformes T_1 et T_2 rayonnent l'une vers l'autre (figure 3.2), la quantité de chaleur échangée par rayonnement est :

$$Q = \frac{\sigma \cdot F_{12}}{1 + \frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} \cdot F_{12} + \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} \cdot F_{21}} \cdot (T_1^4 - T_2^4) \quad (3.10)$$

où ϵ_1 et ϵ_2 sont les émissivités respectives des surfaces S_1 et S_2 . F_{12} et F_{21} sont les "facteurs d'angle" respectifs de S_1 vers S_2 et de S_2 vers S_1 .

Le facteur d'angle d'une surface S_i vers une surface S_j est donné par [8]:

$$F_{ij} = \frac{1}{S_i} \cdot \iint_{S_i, S_j} \frac{\cos \varphi_i \cdot \cos \varphi_j}{\pi r^2} \cdot dS_i dS_j \quad (3.11)$$

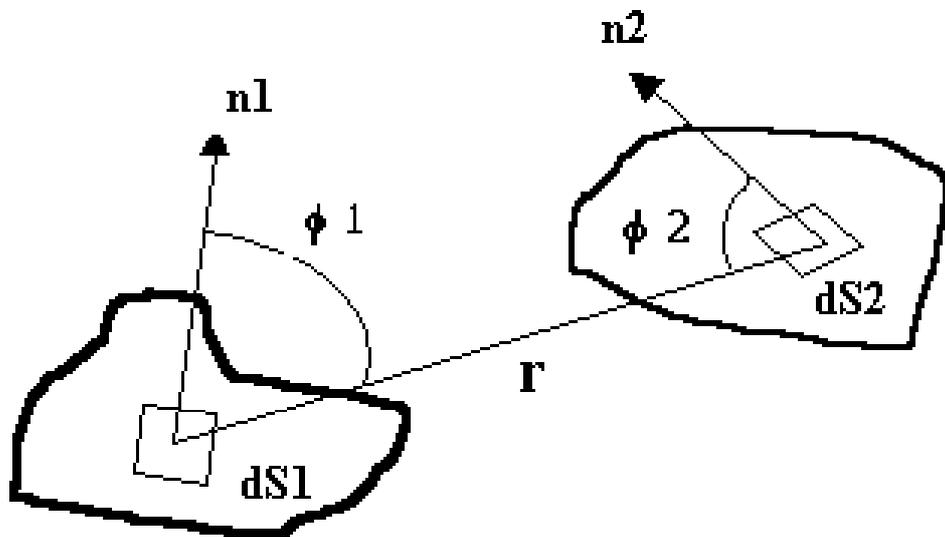


figure 3.2

F_{ij} est un nombre sans dimension qui représente la fraction du flux total hémisphérique de S_i qui atteint S_j .

Il existe des catalogues complets des relations analytiques, [8], [38], donnant les facteurs d'angle. A titre d'exemple, la [figure 3.4](#) représente le facteur d'angle entre 2 cylindres concentriques de longueur finie.

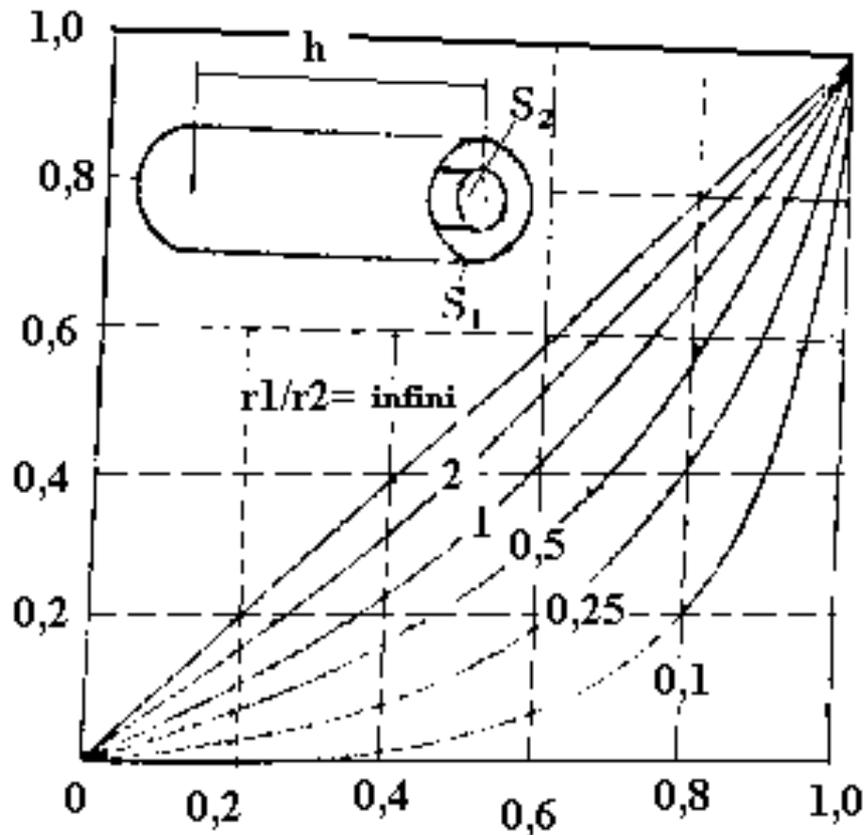


Figure 3.4

Ainsi, le flux rayonnant de chaleur \dot{q}_{ray} évacué à partir de la surface d'un solide vers un fluide est exprimé par la loi :

$$\dot{q}_{ray} = \sigma \cdot \varepsilon \cdot (T_s^4 - T_0^4) \quad W / m^2 \quad (3.12).$$

L'échange de flux total de chaleur en Watt/m², d'un corps solide à partir de sa surface externe vers le milieu ambiant est la somme du flux convectif et du flux rayonnant:

$$\dot{q} = h_c \cdot (T_s - T_0) + \sigma \cdot \varepsilon \cdot (T_s^4 - T_0^4) \quad W / m^2 \quad (3.13)$$

3.2. Équation de la chaleur:

On considère un matériau solide de masse volumique $\rho(x, y, z)$, de capacité calorifique à volume constant $C_v(x, y, z, T)$, fonction des coordonnées $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ et de la

température \mathbf{T} , ainsi que de conductivité thermique $k(x, y, z)$. Si $T(x, y, z, t_0)$ est la température à l'instant initial $t = t_0$, nous nous proposons d'établir l'équation différentielle qui permet de connaître \mathbf{T} pour $t > t_0$.

Soit donc \mathbf{v} un domaine de \mathbf{V} , figure 3.5. Selon la loi de Newton, la quantité de chaleur q_1 reçue dans le temps (t_1, t_2) avec $t_0 \leq t_1 \leq t_2$, dans \mathbf{v} à travers la surface de séparation Σ entre \mathbf{v} et \mathbf{V} est :

$$q_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \cdot \iint_{\Sigma} k(x, y, z) \frac{\partial T}{\partial n} d\Sigma \quad (3.14)$$

où \vec{n} est la normale extérieure à Σ .

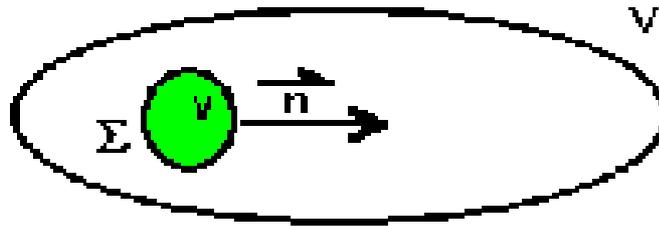


Figure 3.5 : définition de V, v, Σ, \vec{n}

Si \mathbf{V} contient des sources chauffantes de densité volumique $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t})$, la quantité de chaleur q_2 générée dans \mathbf{v} durant (t_1, t_2) est :

$$q_2 = \int_{t_1}^{t_2} dt \cdot \iiint_v f(x, y, z, t) dx dy dz \quad (3.15)$$

La variation de l'énergie interne q_3 dans \mathbf{v} , durant (t_1, t_2) est :

$$q_3 = \iiint_v C_v(x, y, z, T) \cdot \rho(x, y, z) \cdot [T(x, y, z, t_2) - T(x, y, z, t_1)] dx dy dz \quad (3.16).$$

Mais, nous savons que :

$$T(x, y, z, t_2) - T(x, y, z, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial n} dt \quad (3.17).$$

D'après OSTROGRADSKY :

$$\iint_{\Sigma} k(x, y, z) \cdot \frac{\partial T}{\partial n} = \iiint_v \operatorname{div}[k(x, y, z) \cdot \vec{\nabla} T] dx dy dz \quad (3.18).$$

Pour le volume \mathbf{v} , pendant (t_1, t_2) , nous avons le bilan énergétique suivant :

Énergie \mathbf{q}_1 reçue dans \mathbf{v} + Énergie \mathbf{q}_2 générée dans \mathbf{v} = variation d'énergie interne \mathbf{q}_3 de \mathbf{v} . En tenant compte de (3.14), (3.15), (3.16), (3.17), (3.18), nous avons:

$$C_v(x, y, z, T) \rho(x, y, z) \cdot \frac{\partial T}{\partial n} - \operatorname{div}[k(x, y, z) \cdot \vec{\nabla} T] = f(x, y, z, t) \quad (3.19).$$

avec $\mathbf{t} > \mathbf{t}_0$.

La relation (3.19) est l'équation différentielle aux dérivées partielles qui régit la propagation de la chaleur.

Dans le cas des phénomènes électriques, le module de la source chauffante de densité volumique $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t})$ s'écrit:

$$|f(x, y, z, t)| = \frac{|J|^2}{\sigma} \quad (3.20),$$

où $|J|$ est le module de la densité de courant et σ la conductivité électrique.

Si C_v, ρ et k sont des grandeurs indépendantes des coordonnées, l'équation (3.19) devient:

$$\rho \cdot C_v(T) \cdot \frac{\partial T}{\partial n} - k \Delta T = \frac{|J|^2}{\sigma} \quad (3.19).$$

C'est $C_v(T)$ que nous modéliserons par une fonction analytique formellement semblable à la fonction de Brillouin au chapitre V.

3.3. Conditions aux limites :

Les conditions initiales temporelles et les conditions aux limites spatiales complètent la description du problème électromagnétothermique. On peut citer :

- condition initiale : la température T_0 à l'instant t_0 est donnée par une relation connue :

$$T(x, y, z, t_0) = T_0(x, y, z) \quad (3.20)$$

- conditions aux limites spatiales :

1. Condition de Dirichlet :

La température est imposée sur la surface de séparation de 2 milieux (condition d'isothermie) :

$$T_s = f(x_s, y_s, z_s, t) \quad (3.21)$$

où $f(x_s, y_s, z_s, t)$ est une fonction donnée et connue sur la surface de séparation.

2. Condition de Neumann :

Cette condition est appelée en thermique la condition de Fourier, où la loi d'échange thermique est connue sur la surface de séparation. La densité de flux \dot{q} est alors imposée sur la surface de séparation :

$$\dot{q} = -k \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{surface} = g(x_s, y_s, z_s, t) \quad (3.22)$$

où $g(x_s, y_s, z_s, t)$ est une fonction donnée sur la surface de séparation. Si un corps est thermiquement isolé, le flux thermique est nul en tout point de sa surface (surface adiabatique) :

$$\dot{q} = -k \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{surface} = 0 \quad (3.23)$$

Le transfert de chaleur vers le milieu ambiant se fait alors selon 3 cas:

- transfert par convection:

$$-k \cdot \frac{\partial T}{\partial n} = h \cdot (T - T_a) \quad (3.24)$$

où h en $\text{W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$, est le coefficient de transfert convectif et T_a la température ambiante.

- transfert par rayonnement:

$$-k \cdot \frac{\partial T}{\partial n} = \varepsilon \cdot \sigma \cdot (T^4 - T_a^4) \quad (3.25)$$

où ε est l'émissivité et σ est la constante de Stefan-Boltzmann.

Les émissivités des matériaux métalliques sont disponibles dans [8] et [38]. Le tableau suivant fournit ces émissivités selon [38].

Surface	Température [°C]	Emissivité ϵ
Matériaux métalliques		
<u>Aluminium</u>		
Pur poli	204 - 592	0.038 - 0.06
Fortement oxydé	93 - 538	0.2 - 0.33
Oxydé	227	0.11
Non oxydé rugueux	27	0.05 - 0.07
<u>Laiton</u>		
Pur poli	250 - 370	0.028-0.031
Terne	50 - 350	0.22
Oxydé	204 - 538	0.60
<u>Cuivre</u>		
Poli	38 - 260	0.04 - 0.05
Oxydé	38	0.78
<u>Fer</u>		
Poli	426 - 483	0.14 - 0.38
Fonte tournée	38	0.44
Fonte rugueuse très oxydé	38 - 260	0.06 - 0.08
<u>Acier</u>		
Poli	212	0.066
Doux	27	0.1 - 0.15
	227	0.20 - 0.34
Oxydé	227	0.79
Tôle d'acier brute	930	0.55
Tôle d'acier laminé	27	0.66
Inoxydable Type 316	204 - 1040	0.24 - 0.31
Inoxydable Type 301	450 - 1725	0.54 - 0.63

Tableau 4. Émissivités de certains métaux et alliages

- transfert par convection et rayonnement:

$$-k \cdot \frac{\partial T}{\partial n} = h \cdot (T - T_a) + \epsilon \cdot \sigma \cdot (T^4 - T_a^4). \quad (3.26)$$

La condition de transfert par convection et rayonnement peut être considérée comme une condition générale de transfert de la chaleur vers le milieu ambiant. Si ϵ tend vers 0, elle approche la condition (3.24) relative à la convection. Si h tend vers 0, elle approche la condition (3.25) relative au rayonnement.

CHAPITRE IV

MODELISATION DES PARAMETRES

ELECTROMAGNETIQUES

4.1.	Introduction	IV - 2
4.1.1.	Modélisation par un tronçon de parabole	IV - 2
4.1.2.	Modélisation par la fonction arctangente	IV - 3
4.1.3.	Modélisation par une fraction rationnelle	IV - 3
4.1.4.	Modélisation par la méthode de Frohlin-Kenelly	IV - 6
4.2.	Modélisation de l'aimantation \vec{M} , étude détaillée du fer pur	IV - 8
4.2.1.	Introduction	IV - 8
4.2.2.	Equations de Maxwell	IV - 9
4.2.3.	Modélisation	IV - 10
4.2.3.1.	Fonction de Brillouin $B_j(x)$	IV - 10
4.2.3.2.	Loi de Curie	IV - 13
4.2.3.3.	Ferromagnétisme et loi de Curie Weiss	IV - 14
4.2.3.4.	Variation de l'aimantation de saturation avec la température	IV - 15
4.3.	Application au cas simple du Nickel	IV - 22
4.4.	Modélisation de la conductivité électrique σ	IV - 24
4.4.1.	Modélisation de la conductivité électrique de l'aluminium	IV - 24
4.4.2.	Modélisation de la conductivité électrique du cuivre	IV - 24
4.4.3.	Modélisation de la conductivité électrique du fer pur	IV - 25

CHAPITRE IV

MODELISATION DES PARAMETRES

ELECTROMAGNETIQUES

4.1. Introduction :

La modélisation de la courbe de première aimantation $B=B(H)$, dans le cas non-linéaire a fait l'objet de plusieurs travaux . Nous citons dans ce qui suit quelques cas. Ils en existent d'autres, par exemple, l'approximation par les fonctions splines. Il est bon de rappeler que $B=B(H)$ ne représente que l'induction moyenne, le trajet réel étant le cycle d'hystérésis car les matériaux ferromagnétiques ont une "mémoire".

4.1.1. Modélisation par un tronçon de parabole:

Ce modèle représente la caractéristique magnétique $B=B(H)$ dans un plan (OH, OB) par une parabole de la forme :

$$(B - B_0)^2 = 4a(H - H_0) \quad (4.1).$$

où (H_0, B_0) sont les coordonnées du point par lequel passe la tangente verticale parallèle à l'axe OB ; et a est la distance de ce point au foyer de la parabole.

Ce modèle ne peut être précis que sur une partie restreinte de la courbe $B = B(H)$.

4.1.2. Modélisation par la fonction arctangente:

Le comportement non-linéaire de la loi $B = B(H)$ est donné par le modèle analytique :

$$\begin{cases} B(H) = \frac{2}{\pi} B_s \cdot \arctan g(C\mu_0 H) + \mu_0 H \\ C = \frac{\pi}{2B_s} \left(\frac{1}{\nu_{ini}} - 1 \right) \end{cases} \quad (4.2),$$

où : B_s est l'induction de saturation et ν_{ini} la réductivité initiale.

4.1.3. Modélisation par une fraction rationnelle:

Dans ce cas, la réductivité est donnée par la formule [40], [41] :

$$\nu = \nu_0 \left[\nu_{ri} + (\nu_{rf} - \nu_{ri}) \frac{B^{2\alpha}}{B^{2\alpha} + r} \right] = \nu_0 \nu_r \quad (4.3)$$

où:

- ν_{ri} correspond à la réductivité relative initiale ;
- ν_{rf} correspond à la réductivité relative finale .
- α règle la courbure de la caractéristique $B = B(H)$;
- r détermine la position du coude de saturation ;

Ainsi, pour l'approximation d'une courbe donnée, ν_{ri} et ν_{rf} sont déterminées directement.

Mais α et r peuvent être connus par une technique de minimisation de l'erreur, la méthode des moindres carrés par exemple.

A titre d'exemples, pour le fer ARMC0 : $\nu_{ri} = 1/1600$, $\nu_{rf} = 1$, $\alpha = 4$, et $r = 12000$.

Pour un acier doux [41], ces mêmes valeurs sont les suivantes :

$\nu_{ri} = 0.00105$, $\nu_{rf} = 1$, $\alpha = 4$, et $r = 16330$.

Les figures 4.1. , 4.2. , 4.3, ci-après représentent respectivement les fonctions

$\nu = \nu(B)$, $\mu_r = \mu_r(H)$, $B=B(H)$ pour l'acier doux.

Cette modélisation est très performante, mais elle ne tient pas compte de la température. Or, ce facteur est très important. Par exemple, quand les machines électriques tombent en panne, ce sont les isolants (diélectriques) qui "cèdent" généralement les premiers par vieillissement thermique; mais ce sont les conducteurs (courants de conduction) et les circuits magnétiques en tôles (courants de Foucault et hystérésis) qui sont les sièges de dégagement de chaleur.

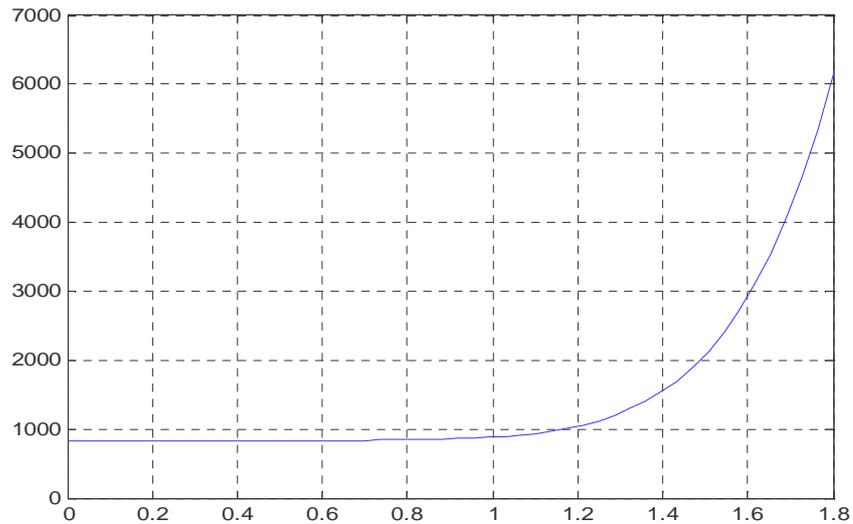


Figure 4.1. Acier doux, $v = f(B)$ selon formule (4.3)

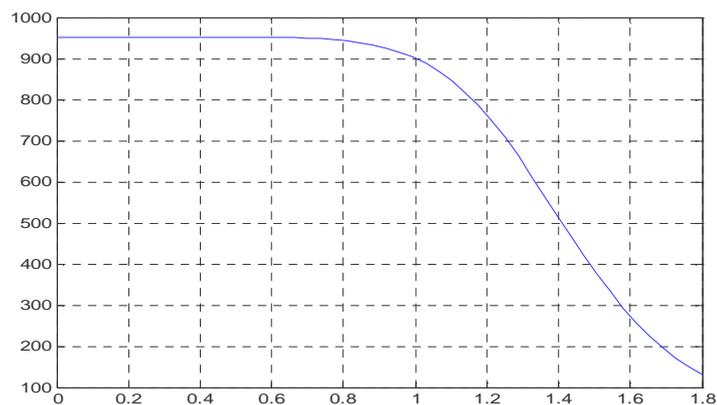
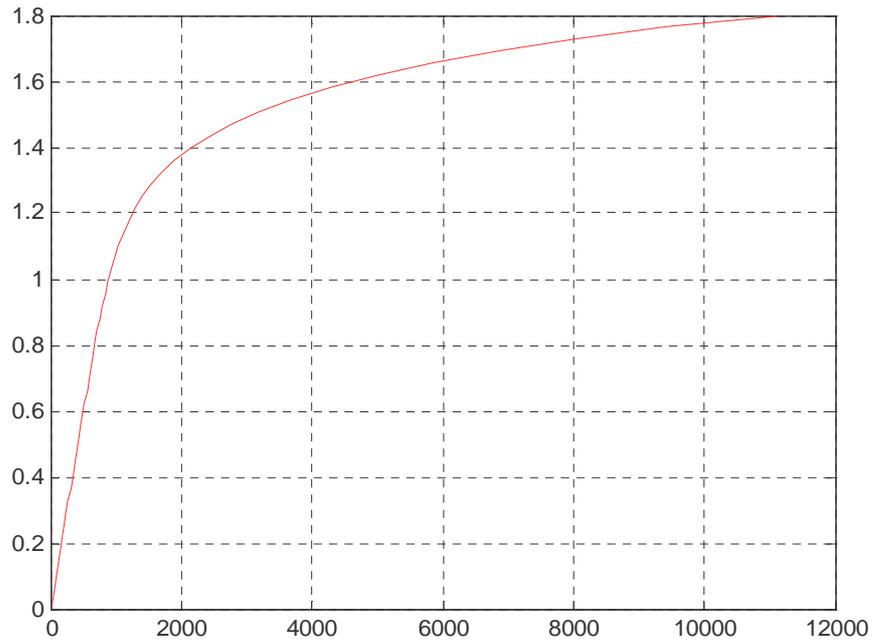
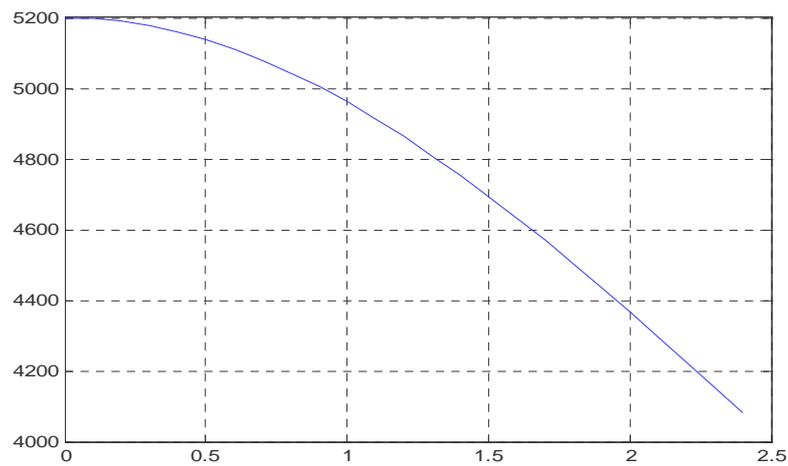


Figure 4.2. Acier doux, $\mu_r = f(B)$

Figure 4.3. Acier doux, $B = f(H)$

Selon [80], la perméabilité d'un acier est :

$$\mu(B) = \frac{5000}{1 + 0.05B^2} + 200 \quad (4.4)$$

Figure 4.4. $\mu(B) = \frac{5000}{1 + 0.05B^2} + 200$

Selon [80], la perméabilité de l'alliage Cobalt-Nickel-Cuivre est:

$$\mu(B) = 8265 \cdot e^{-\frac{(B-0.63)^{13}}{0.02}} \left(1 - \frac{1}{24} e^{\frac{B}{0.19}} \right) + 265 \quad (4.5)$$

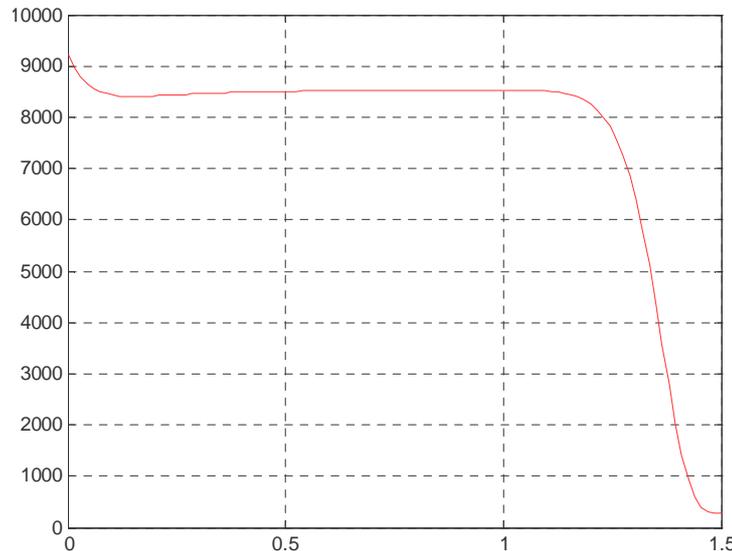


Figure 4.5. $\mu(B) = 8265 \cdot e^{-\frac{(B-0.63)^{13}}{0.02}} \left(1 - \frac{1}{24} e^{\frac{B}{0.19}} \right) + 265$

4.1.4. Modélisation par la méthode de Frohlich-Kenelly

la courbe de première aimantation $B = f(H)$ d'un matériau ferromagnétique est fournie par le fabricant du matériau. Elle comporte 3 parties:

- une première partie linéaire et commençant à l'origine. Elle est utilisée dans les appareils de mesure où la linéarité est requise.
- une deuxième partie, de grande pente, forme le coude. Elle est utilisée pour la conception de circuits magnétiques (moteurs, transformateurs, etc.) de moindre réluctance car la perméabilité y est plus grande.
- une troisième partie, de faible pente presque égale à $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H / m}$, forme la partie saturation.

les deux dernières parties sont généralement modélisées par la relation de Frohlich-Kenelly [81]:

$$B = \left(\mu_0 + \frac{\alpha}{\beta + H} \right) H \quad (4.6)$$

où α et β sont des constantes obtenues par ajustement en utilisant les techniques de l'Analyse Numérique.

Labbé dans [81] utilise deux définitions de la perméabilité μ :

- $\mu = \frac{B}{H}$
- $\mu = \frac{\partial B}{\partial H}$.

Labbé affirme, en citant des références, que des auteurs ont utilisé l'une ou l'autre définition et que chacune est mieux adaptée à un type particulier de problèmes.

La définition $\mu = \frac{\partial B}{\partial H}$ donne la relation:

$$\mu(H) = \mu_0 + \alpha \left[\frac{1}{\beta + H} - \frac{H}{(\beta + H)^2} \right] \quad (4.7)$$

D'autre part, la perméabilité est aussi fonction de la température T . Pour tenir compte de ce fait, α et β ne sont plus des constantes, mais deviennent des fonctions de la température. mais, une meilleure formulation consiste à séparer la dépendance de μ du champ magnétique H et sa dépendance de la température T . La formulation générale est alors:

$$\mu(H, T) = \mu_0 + \alpha \left[\frac{1}{\beta + H} - \frac{H}{(\beta + H)^2} \right] \cdot f(T) \quad (4.8)$$

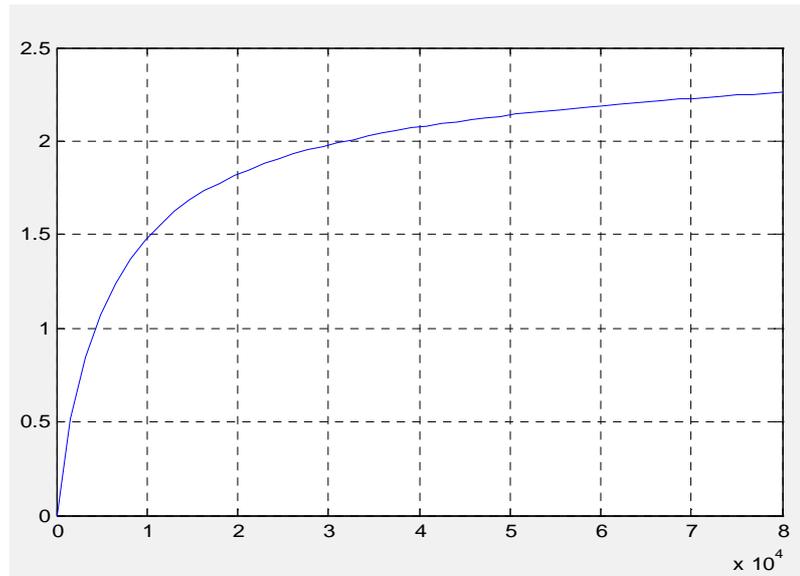
Beaucoup de formulations existent pour $f(T)$ [81]. L'une d'elles est:

$$f(T) = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^\gamma \quad (4.9)$$

où T_c est la température de Curie et γ est le paramètre de sensibilité de la température.

Pour l'acier 21NiCrMo5, nous avons: $\alpha = 2,31695$ et $\beta = 5769,55$. La figure 4.6 montre

la courbe $B = f(H)$ pour ces 2 valeurs.

Figure 4.6. $B = f(H)$

4.2. Modélisation de l'aimantation M, étude détaillée du fer pur:

4.2.1. Introduction

On est souvent amené à résoudre, en particulier dans le domaine du chauffage par induction, le système d'équations couplées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{*Equations de Maxwell} \\ \quad + \text{ conditions aux limites et initiales} \quad \text{électromagnétiques} \\ \text{* Equation de la Chaleur} \\ \quad + \text{ conditions aux limites et initiales} \quad \text{thermiques} \end{array} \right.$$

Les grandeurs physiques thermiques (capacité calorifique et conductivité thermique ,..) et électromagnétiques (perméabilité ,susceptibilité ,réductivité, permittivité, conductivité électrique) dépendent de la température pour les premières , de la température et du champ magnétique ou électrique pour les secondes. La modélisation de la perméabilité en fonction du champ appliqué seul abonde dans la littérature scientifique. Par contre, sa modélisation en fonction et du champ appliqué et de la température est rare.

Le but de ce travail est donc d'établir cette modélisation. Pour ce faire, on introduit les équations de Maxwell et la fonction de Brillouin, base de cette modélisation.

La modélisation des paramètres physiques d'un matériau dans la plage de variation des grandeurs telles que le champ magnétique, la température, la fréquence, les conductivités électrique et thermique, etc., est nécessaire aux calculs ultérieurs qui ont pour but la détermination de grandeurs pertinentes. Celles-ci font partie intégrante du cahier des charges pour la conception puis la réalisation des produits envisagés.

Dans ce paragraphe, on se propose de modéliser les paramètres électromagnétiques en fonction des variables adéquates, en particulier en fonction du champ magnétique appliqué et de la température. Ces paramètres peuvent être:

- l'aimantation M ;
- la perméabilité relative μ_r ou la susceptibilité magnétique χ ;
- la réductivité relative ν_r ;
- la conductivité électrique σ

Un matériau ferromagnétique de volume τ , plongé dans un champ magnétique \vec{H}_0 acquiert un moment magnétique $\vec{\mathfrak{S}}$. On définit alors pour un élément de volume $d\tau$ un vecteur densité d'aimantation \vec{M} ou simplement aimantation par :

$$\vec{M} = \frac{\partial \vec{\mathfrak{S}}}{\partial \tau} \quad (4.10).$$

Cette aimantation sera modélisée dans ce travail par la fonction de Brillouin $B_j(x)$.

4.2.2. Equations de Maxwell

Pour une matière homogène et isotrope la permittivité ϵ , la perméabilité μ , la conductivité σ ne s'expriment par des constantes que dans le cas où la matière est linéaire. En particulier, la perméabilité μ est une fonction non-linéaire du champ appliqué H et de la température T . Les équations de Maxwell s'écrivent alors:

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (4.11)$$

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \quad (4.12)$$

$$\text{div}\vec{B} = 0 \quad (4.13)$$

$$\text{div}\vec{D} = \rho \quad (4.14)$$

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E} \quad (4.15)$$

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} \quad (4.16)$$

$$\begin{cases} \vec{B} = \mu(H_0, T) \cdot \vec{H}_0 = \mu_0 \mu_r(H_0, T) \cdot \vec{H}_0 = \mu_0 [\vec{H}_0 + \vec{M}(H_0, T)] \\ \vec{M}(H_0, T) = \chi(H_0, T) \cdot \vec{H}_0 \end{cases} \quad (4.17)$$

De la dernière relation ci-dessus, on tire :

$$\mu_r(H_0, T) = 1 + \chi(H_0, T) \quad (4.18)$$

Où \vec{E} est le champ électrique, \vec{J} la densité totale de courant, σ la conductivité électrique, \vec{D} l'induction électrique, ρ densité de charge volumique et superficielle, ϵ la permittivité. \vec{B} l'induction magnétique, \vec{H} le champ magnétique \vec{H}_0 le champ magnétique appliqué, \vec{M} la densité d'aimantation, μ et μ_r perméabilités absolue et relative ; χ susceptibilité magnétique. C'est à travers la densité d'aimantation \vec{M} , donnée par la fonction de Brillouin $B_J(x)$, que nous allons modéliser la courbe $B = f(H, T)$ et donc l'aimantation \vec{M} , la perméabilité, la susceptibilité, etc.

4.2.3. Modélisation:

4.2.3.1. Fonction de Brillouin $B_J(x)$

La théorie quantique du paramagnétisme conduit à une expression de l'aimantation M donnée par la fonction de Brillouin $B_J(x)$:

$$M = N \cdot J \cdot g \cdot \mu_B \cdot B_J(x) \quad (4.19),$$

où:

- ◆ N est le nombre d'atomes par unité de volume,
- ◆ J est le nombre quantique magnétique. Le moment cinétique total s'exprime alors par $\hbar \cdot J$, avec $\hbar = h / 2\pi$ où $h = 6,62620 \cdot 10^{-34}$ Joule.s est la constante de Planck.
- ◆ g est le facteur de décomposition spectrale. Pour un spin électronique, $g = 2,0023$.
Pour un atome libre, ayant un moment cinétique orbital L , le facteur g est donné par l'équation de Landé :

$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} \quad (4.20).$$

- * L est le nombre quantique azimutal ou secondaire. Le moment cinétique orbital total est alors $\hbar L$.
 - * S est le nombre quantique de spin. le moment cinétique de spin est alors $\hbar S$.
- $\mu_B = 0,927410 \cdot 10^{-23}$ Joule / Tesla est le magnéton de BOHR défini par :

$$\mu_B = \frac{e \cdot \hbar}{2m} \quad (4.21),$$

où $e = 1,60219 \cdot 10^{-19}$ Coulomb et $m = 9,10956 \cdot 10^{-31}$ kg sont la charge et la masse de l'électron.

- ◆ $B_J(x)$ est la fonction de Brillouin. Son calcul est basé sur la théorie statistique de Boltzmann, [1], [2], [5]. Elle vaut :

$$B_J(x) = \frac{2J+1}{2J} \cdot \coth \frac{2J+1}{2J} x - \frac{1}{2J} \coth \frac{x}{2J} \quad (4.22)$$

avec:

$$x = J \cdot g \cdot \frac{\mu_B B_0}{k_B T} \quad (4.23),$$

$$B_0 = \mu_0 H_0 \quad (4.24),$$

où : B_0 est l'induction appliquée ; $k_B = 1,38062 \cdot 10^{-23}$ Joule / degré Kelvin est

la constante de Boltzmann, T est la température absolue. La fonction $B_j(x)$ est tracée, figure 4.7, pour les valeurs de $J = 1/2, 3/2, 7/2$ et $15/2$.

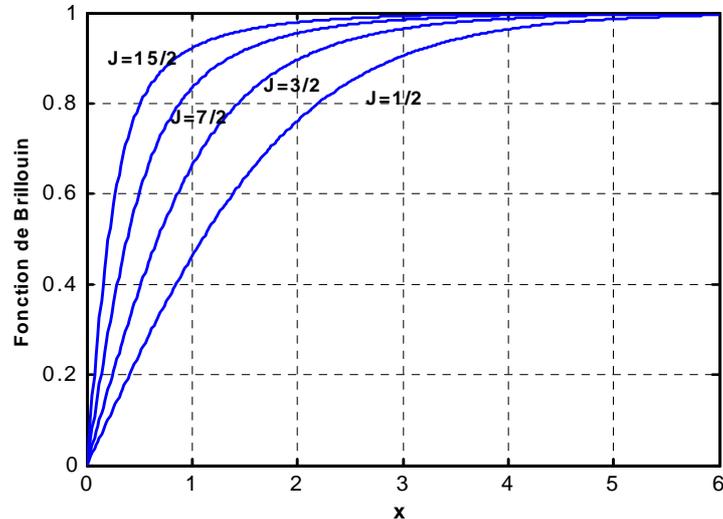
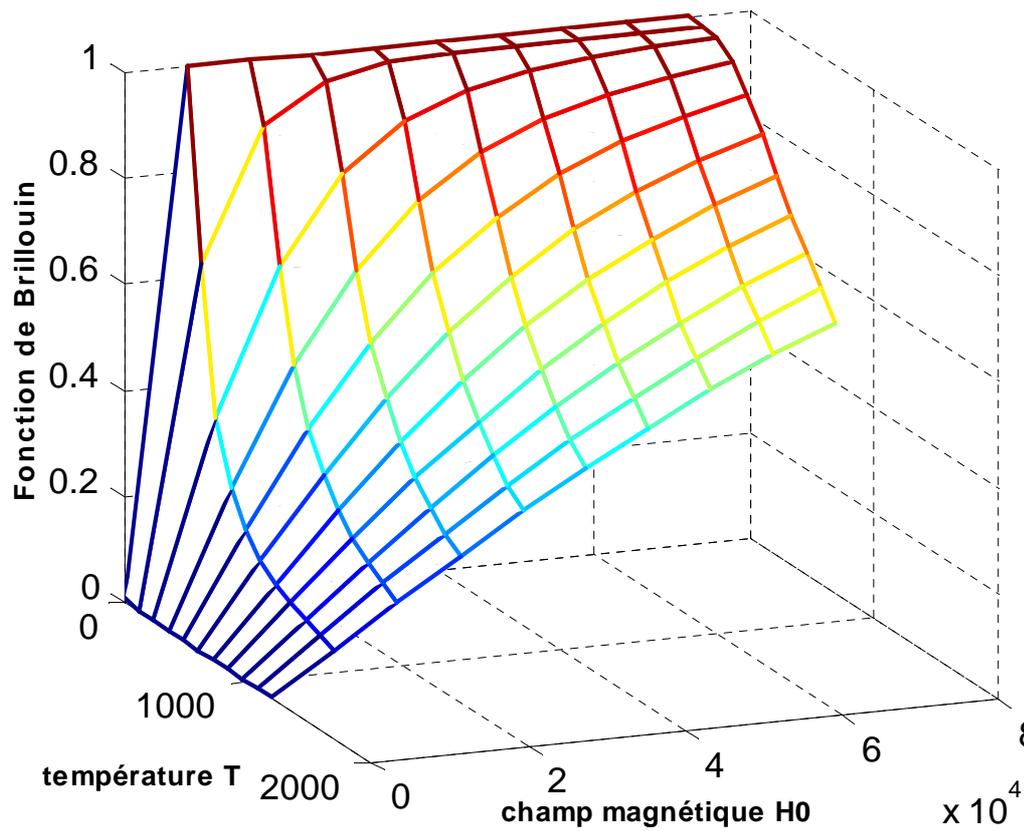


Figure 4.7. Fonction de BRILLOUIN

On remarque que $B_j(x)$ admet une asymptote horizontale égale à 1 quand x est suffisamment grand. Pour donner un ordre de grandeur, il faut noter que $\coth(\pi) = 1,003742$. D'autre part, un développement limité au premier ordre de $B_j(x)$ pour x suffisamment petit ($B_0 / T < 0,5$) donne :

$$B_j(x) \cong \frac{1}{3} \frac{J+1}{J} x, \quad x \ll 1 \quad (4.25)$$

Un "mapage " de $B_j(x)$ pour J variant de 1 à 10, H variant entre 0 et $80 \cdot 10^3$ A/m et T variant entre 0 et 1200° K, figure 4.8, illustre la variation en 3 D de la fonction de Brillouin.


 Figure 4.8. Mapage de $B_J(x)$

4.2.3.2. Loi de Curie

Partant du développement en série de $B_J(x)$, l'aimantation M s'écrit, tout calcul fait:

$$M = N \cdot J(J+1) \frac{g^2 \mu_B^2 \mu_0}{3k_B} \cdot \frac{H_0}{T} = \chi(T) \cdot H_0 \quad (4.26).$$

L'expression précédente donne pour la susceptibilité magnétique $\chi(T)$:

$$\chi(T) = \frac{M}{H_0} = N \cdot J(J+1) \frac{g^2 \mu_B^2 \mu_0}{3k_B} \cdot \frac{1}{T} = \frac{\mu_0 C_J}{T} \quad (4.27),$$

$$\text{où : } C_J = N \cdot J(J+1) \frac{g^2 \mu_B^2}{3k_B} \quad (4.28),$$

est la constante de Curie. La susceptibilité magnétique $\chi(T)$ varie donc en $1/T$ pour les petites valeurs de x : soit H_0 faible ou T grand.

4.2.3.3. Ferromagnétisme et loi de Curie-Weiss:

Un corps ferromagnétique possède un moment magnétique spontané, c'est-à-dire même en l'absence de champ magnétique extérieur. Il a ainsi une aimantation M qui peut être très grande, même si le champ appliqué est faible. Le moment magnétique spontané, appelé également moment de saturation, suggère que les spins électroniques et les moments magnétiques sont arrangés de façon régulière. Pour le fer, une induction extérieure de l'ordre de **800 T** serait nécessaire à la température ambiante pour arriver au voisinage de la saturation si le fer obéissait à la seule loi du paramagnétisme selon Brillouin. Mais, l'expérience montre qu'une induction de **0,001 T** suffit dans certaines conditions. Tout se passe comme si à l'intérieur du fer, ou les ferromagnétiques en général, existait une induction magnétique très intense qui oriente fortement les moments intrinsèques des atomes.

En 1907, Pierre Weiss émet l'hypothèse du champ moléculaire ou champ d'échange ou champ moyen H_m . Il a supposé que chaque atome subissait de la part des atomes voisins un champ magnétique uniforme H_m proportionnel à l'aimantation moyenne M du matériau et de même direction que celle-ci: $H_m = \lambda \vec{M}$ où λ est une constante indépendante de la température mais dépendant du matériau ferromagnétique. Pour le fer pur, $\lambda = 5000$. Dans ces conditions, chaque atome d'une substance magnétique s'aimante non seulement sous l'action d'une induction extérieure $B_0 = \mu_0 H_0$, mais aussi sous l'action d'une induction $\mu_0 \lambda M$, due au champ moléculaire H_m . Au total, chaque atome subit $(B_0 + \mu_0 \lambda M)$.

$$\text{Ainsi } x = Jg \frac{\mu_B B_0}{k_B T} \text{ devient: } x_w = Jg \frac{\mu_B (B_0 + \mu_0 \lambda M)}{k_B T} \quad (4.29).$$

Compte tenu du champ moléculaire, l'aimantation M s'écrit donc :

$$M = N \cdot J \cdot g \cdot \mu_B \cdot B_J(x_w) \quad (4.30).$$

Un développement limité de l'expression de M ci-dessus donne:

$$M = NJ(J+1) \cdot g^2 \cdot \mu_B^2 \cdot \frac{\mu_0 H_0 + \mu_0 \lambda M}{3k_B T} = C_J \cdot \frac{\mu_0 H_0 + \mu_0 \lambda M}{T} \quad (4.31)$$

La résolution par rapport à \mathbf{M} de l'équation ci-dessus, puis l'application de la formule $M = \chi H_0$ donne la loi de Curie-Weiss pour la susceptibilité χ :

$$\chi = \frac{M}{H_0} = \frac{\mu_0 C_J}{T - T_c} \quad (4.32),$$

$$\text{avec :} \quad T_c = \mu_0 \lambda C_J \quad (4.33),$$

où T_c est la température de Curie. Pour le fer pur : $T_c = 1043^\circ K$. La température de Curie est la température au-dessus de laquelle l'aimantation spontanée disparaît. Elle sépare donc la phase amagnétique désordonnée pour $T > T_c$ et la phase ferromagnétique pour laquelle $T < T_c$.

4.2.3.4. Variation de l'aimantation de saturation avec la température :

Pour étudier la variation de l'aimantation M et donc de la susceptibilité χ (ou bien μ_r , ou bien V_r , selon la formulation pratique des équations du champ électromagnétique) en fonction de la température, nous utiliserons la théorie de Weiss au-dessus de la température de Curie.

L'aimantation de saturation M_s est l'aimantation spontanée, c'est-à-dire en champ magnétique extérieur H_0 nul et à la température zéro absolu. Nous établissons d'abord la relation en champ nul, puis nous en étudierons la variation en fonction de la température, en particulier en faisant tendre celle-ci vers $0^\circ K$.

En champ nul donc, l'expression de M_s , obtenue en faisant $B_0 = 0$ dans l'expression de x_w et en utilisant l'expression (4.19) est :

$$M_s = NJg\mu_B \cdot B_J \left(\frac{Jg\mu_B\mu_0\lambda M_s}{k_B T} \right) \quad (4.34).$$

L'aimantation de saturation réduite est :

$$m_s = \frac{M_s}{N\mu_B} \quad (4.35).$$

Compte tenu de la relation donnant T_c , et tout calcul fait, nous obtenons la relation suivante de m_s :

$$m_s = \frac{2J+1}{2} \cdot g \cdot \coth\left(\frac{2J+1}{2J} \cdot \frac{3T_c}{(J+1)g} \cdot \frac{m_s}{T}\right) - \frac{g}{2} \cdot \coth\left(\frac{1}{2J} \cdot \frac{3T_c}{(J+1)g} \cdot \frac{m_s}{T}\right) \quad (4.36).$$

Cette équation transcendante a une solution en m_s pour une température donnée et détermine la variation de l'aimantation spontanée m_s en fonction de la température T .

Le nombre effectif de magnétions de Bohr paramagnétiques p du fer défini par $p = g\sqrt{J(J+1)}$ devrait être théoriquement égal, à saturation absolue, à $4\mu_B$, en respectant les règles de Hund et le principe d'exclusion [1] et [44]. Le nombre effectif de magnétions n_B d'un corps ferromagnétique est défini par :

$$M_s(T=0) = n_B \cdot N \cdot \mu_B \quad (4.37).$$

Les données magnétothermiques concernant le fer, utiles à notre travail sont :

1. $n_B(T=0^\circ \text{K}) = 2,22$ selon [1].
2. La température de Curie est $T_c = 1043^\circ \text{K}$, [1] et [44].
3. Le champ coercitif valant $H_c = 4 \text{ A/m}$. Ce champ est suffisamment faible pour justifier le fait que l'hystérésis sera négligée.
4. A $T = 286,4^\circ \text{K}$, l'aimantation spontanée est $M_s = 1,718 \cdot 10^6 \text{ A/m}$. [44].
5. Le champ magnétique de saturation technique est : $H_{st} = 79580 \text{ A/m}$, [44].

La saturation technique est la valeur de l'induction pour laquelle une augmentation de champ magnétique ne produit qu'une très faible augmentation de l'induction. L'induction à saturation

B_s a pour valeur alors :

$$B_s = 4\pi \cdot 10^{-7} (79580 + 1,718 \cdot 10^6) = 2,26 \text{ Tesla} \quad (4.38).$$

A cette même température, la perméabilité maximale relative vaut :

$$\mu_{rm} = 2 \cdot 10^5 \quad (4.39).$$

6. A $T = 4,21^\circ\text{K}$ (température de l'Hélium liquide), l'aimantation spontanée est $M_s = 1,7456 \cdot 10^6 \text{ A/m}$. [44], ce qui équivaut à une induction de saturation :

$$B_s = 4\pi \cdot 10^{-7} (79580 + 1,7456 \cdot 10^6) = 2,29 \text{ T} \quad (4.40).$$

Avec les données numériques ci-dessus, l'équation transcendante (4.36) devient:

$$m_s = 3,221150 \cdot \coth\left(1075,262377 \frac{m_s}{T}\right) - 1,001150 \cdot \coth\left(334,197081 \frac{m_s}{T}\right) \quad (4.41).$$

Elle a été résolue pour $T \in [0, T_c]$ à l'aide du logiciel **Maple** et la figure 4.9 montre la variation de m_s en fonction de la température T .

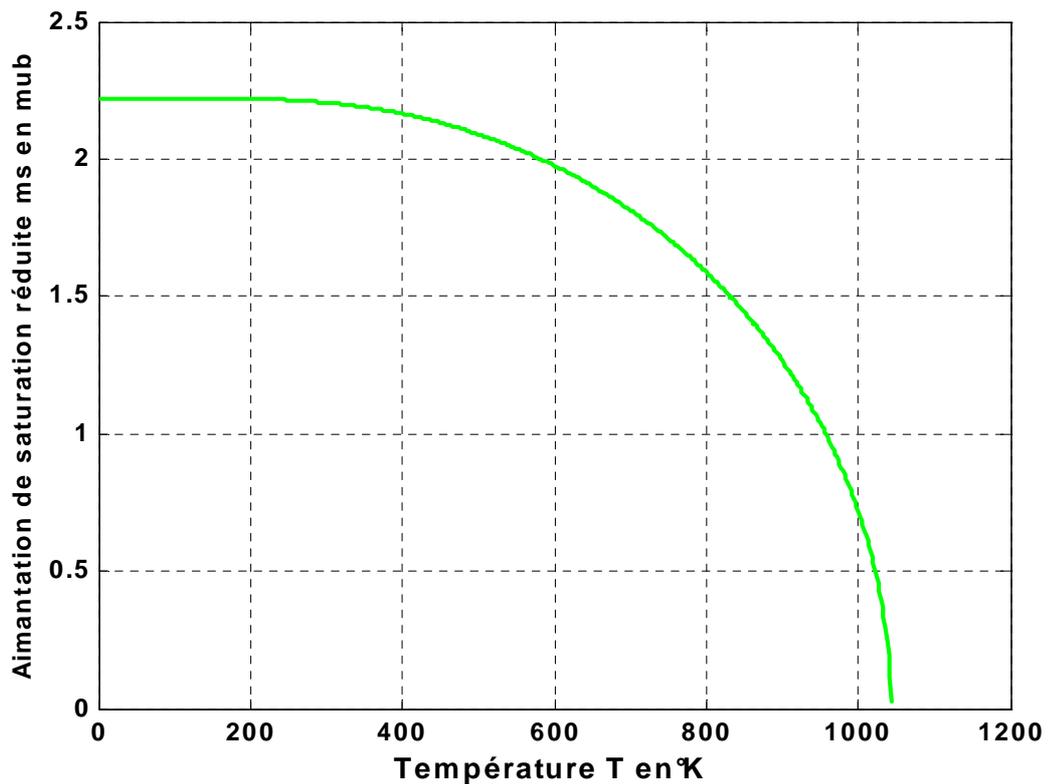
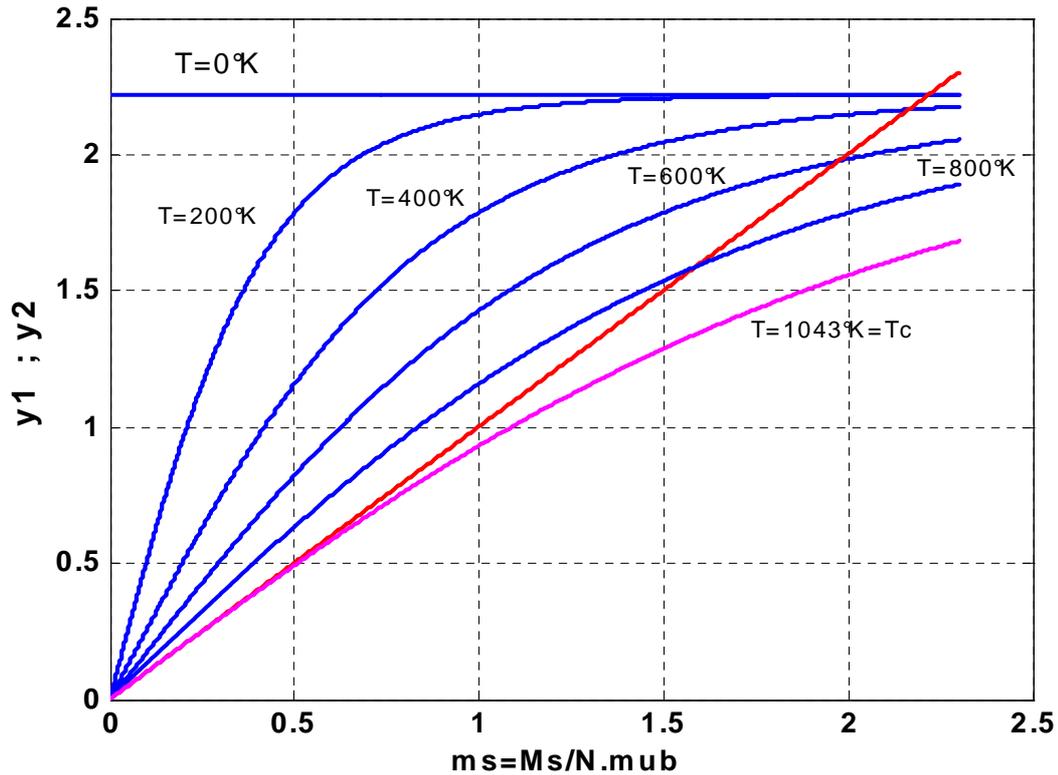


Figure 4.9. Fer pur, formule (4.41): $m_s = m_s(T)$.

Figure 4.10. $y_1 = m_s$ et $y_2 = y_2(m_s)$

La résolution graphique de l'équation (4.36) permet de distinguer la phase ferromagnétique ($T < T_c$) de la phase amagnétique ($T \geq T_c$).

Sur la figure 4.10, sont tracées la courbe (bissectrice) :

$$y_1 = m_s \quad (4.42),$$

et la courbe :

$$y_2 = 3,221150 \cdot \coth\left(1075,262377 \frac{m_s}{T}\right) - 1,001150 \cdot \coth\left(334,197081 \frac{m_s}{T}\right) \quad (4.43)$$

pour les températures $T = 0, 200, 400, 600, 800, 1043$ °K. Les courbes y_1 et y_2 pour $T = 0, 200, 400, 600, 800$ °K ont un point d'intersection : le matériau est dans sa phase ferromagnétique. Par contre, pour $T = T_c = 1043$ °K, y_2 est tangente à y_1 et marque ainsi le début de la phase amagnétique pour $T \geq T_c$.

Compte tenu des formules précédentes, en particulier les formules (4.17), (4.19), (4.36), les grandeurs $\mathbf{M} = \mathbf{M} (H_0, T)$, $\mathbf{B} = \mathbf{B} (H_0, T)$ et $\chi = \chi(H_0, T)$ sont tracées figure (4.11), figure (4.12), et figure (4.13), pour différentes températures. Les valeurs ainsi obtenues pour \mathbf{M} , \mathbf{B} et χ sont en parfaite concordance avec les valeurs connues dans [1] et [44]. Ainsi :

$$\mathbf{M}_s (T = 4,21\text{K}) = 1,7456 \cdot 10^6 \text{ A / m} \quad [1], [44]$$

et $\mathbf{M}_s (T = 4,21\text{K}) = 1,749 \cdot 10^6 \text{ A / m}$ selon figure (4.11).

$$\mathbf{M}_s (T = 286,4 \text{ K}) = 1,718 \cdot 10^6 \text{ A / m.} \quad [44]$$

et $\mathbf{M}_s (T = 286,4 \text{ K}) = 1,725 \cdot 10^6 \text{ A / m}$ selon figure (4.11).

$$\mathbf{B}_s (T = 4,21\text{K}) = 2,29 \text{ T} \quad [44]$$

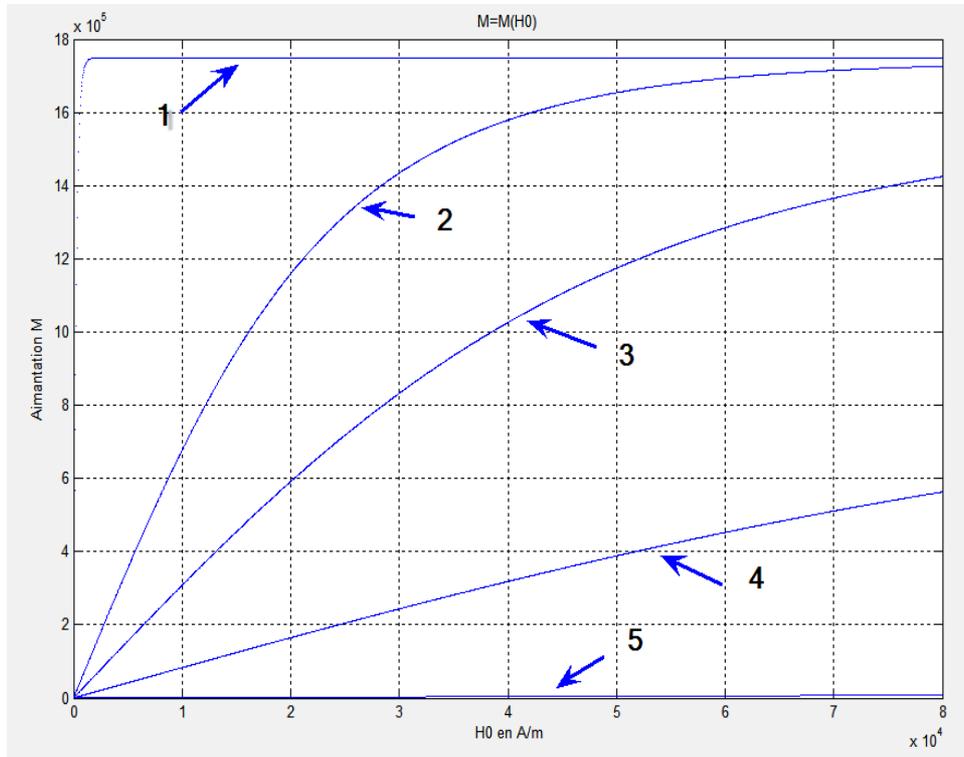
et $\mathbf{B}_s (T = 4,21\text{K}) = 2,30 \text{ T}$ selon figure (4.12).

$$\mathbf{B}_s (T = 286,4 \text{ K}) = 2,26 \text{ T} \quad [44]$$

et $\mathbf{B}_s (T = 286,4 \text{ K}) = 2.265 \text{ T}$ selon figure (4.12).

$$\mu_{\text{m}} (T = 286,4 \text{ K}) = 2 \cdot 10^5 \quad [1], [44]$$

et $\mu_{\text{m}} = 1 + \chi (T = 286,4 \text{ K}) = 1 + 2 \cdot 10^5$ selon figure (4.13).

Figure 4.11. $M = M (H_0, T)$

- | | |
|---|--|
| { | 1. $T = 4,21^\circ \text{ K} ; m_s = 2.22000$ |
| | 2. $T = 286,4^\circ \text{ K} ; m_s = 2.20845$ |
| | 3. $T = 573^\circ \text{ K} ; m_s = 2.01144$ |
| | 4. $T = 933^\circ \text{ K} ; m_s = 1.12229$ |
| | 5. $T = 1043^\circ \text{ K} ; m_s = 0.02399$ |

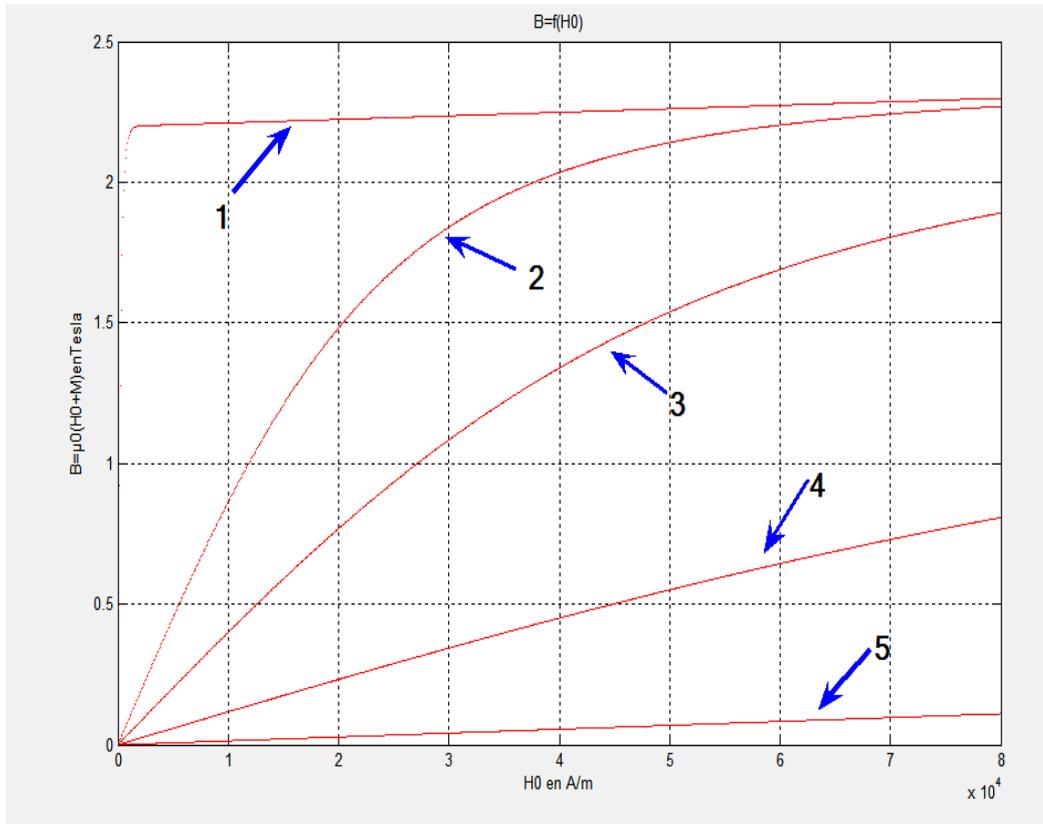


Figure 4.12 $B = B (H_0, T)$

- 1. $T = 4,21^\circ \text{ K} ; m_s = 2.22000$
- 2. $T = 286,4^\circ \text{ K} ; m_s = 2.20845$
- 3. $T = 573^\circ \text{ K} ; m_s = 2.01144$
- 4. $T = 933^\circ \text{ K} ; m_s = 1.12229$
- 5. $T = 1043^\circ \text{ K} ; m_s = 0.02399$

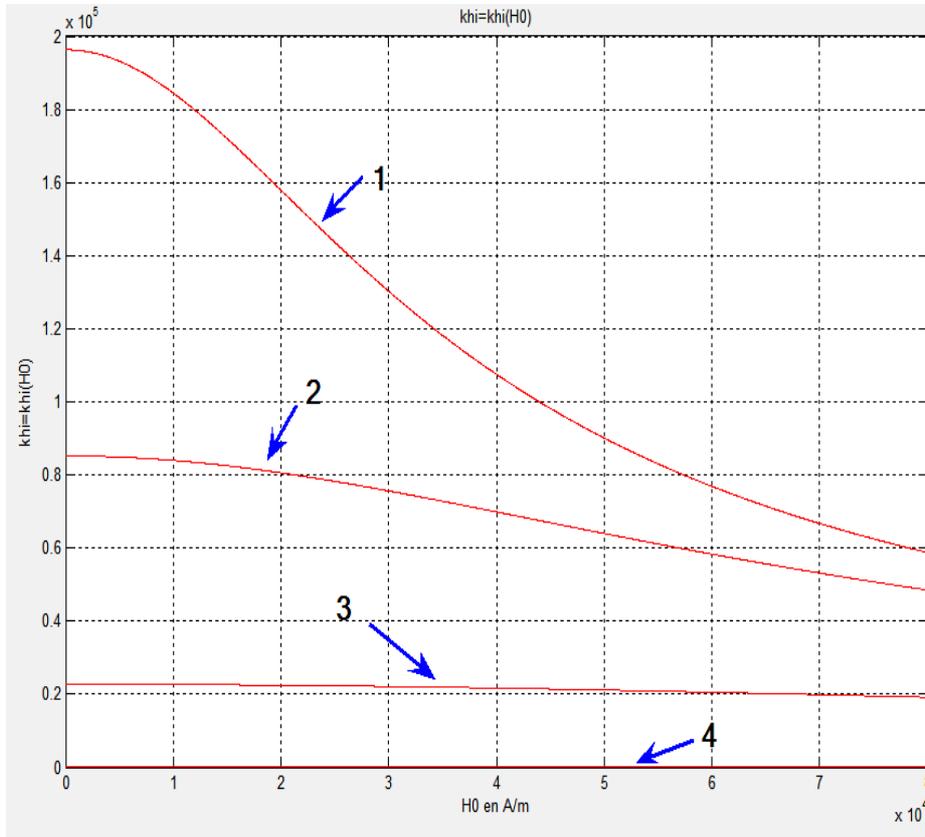


Figure 4.13. $\chi = \chi(H_0, T)$

- | | | |
|---|---------------------------------|-----------------|
| { | 1. $T = 286,4^{\circ}\text{K};$ | $m_s = 2.20845$ |
| | 2. $T = 573^{\circ}\text{K};$ | $m_s = 2.01144$ |
| | 3. $T = 933^{\circ}\text{K};$ | $m_s = 1.12229$ |
| | 4. $T = 1043^{\circ}\text{K};$ | $m_s = 0$ |

4. 3. Application au cas simple du Nickel :

Pour le Nickel, pour lequel $J=1/2$, [1], [2], l'aimantation \mathbf{M} et l'aimantation de saturation réduite \mathbf{m}_s se réduisent à:

$$M = N \cdot \mu_B \cdot th\left(\frac{\mu_B \cdot \mu_0 \cdot H_0}{k_B T}\right) \quad (4.44),$$

et

$$m_s = th\left(m_s \cdot \frac{T_c}{T}\right) \quad (4.45),$$

où T_c est la température de Curie qui vaut pour le Nickel $T_c = 631^\circ \text{ K}$, [44].

L'équation $m_s = th\left(m_s \cdot \frac{T_c}{T}\right)$ peut être résolue par rapport à T :

$$m_s \cdot \frac{T_c}{T} = \text{Argth}(m_s) = \text{Ln} \sqrt{\frac{1+m_s}{1-m_s}} \quad (4.46)$$

soit :

$$T = \frac{2m_s}{\text{Ln} \frac{1+m_s}{1-m_s}} \cdot T_c \quad (4.47).$$

La figure 4 représente la courbe $m_s = m_s(T)$ à partir de la formule (4.47)

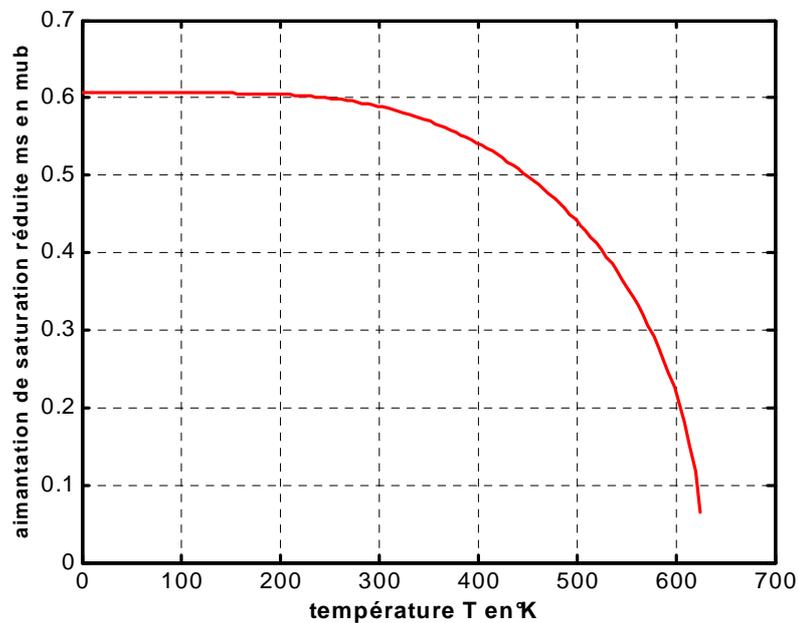


Figure 4. 14. Nickel: $m_s = m_s(T)$.

4.4. Modélisation de la conductivité électrique σ :

4.4.1. Modélisation de la conductivité électrique de l'Aluminium :

La conductivité électrique σ ($\text{Ohm}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$) de l'Aluminium en fonction de la

température T est donnée par[38] :

$$\sigma(T) = \frac{3,3 \cdot 10^7}{1 + 0,01 \cdot T} \quad (4.48)$$

Elle est représentée figure 4. 15.

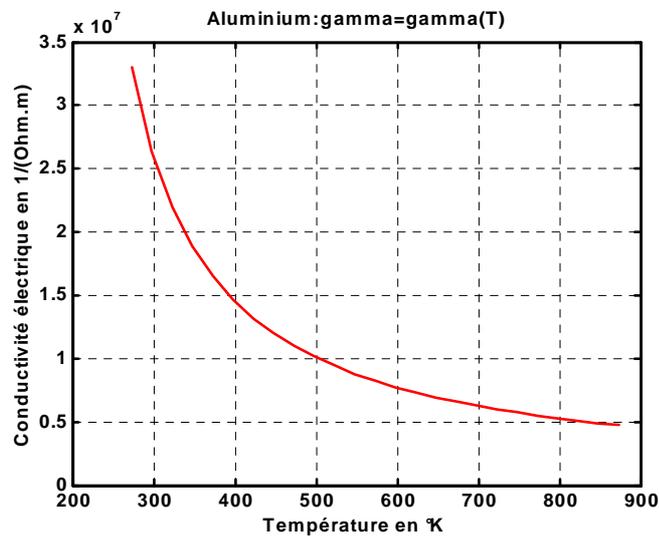


Figure 4. 15. Aluminium: $\sigma(T) = \frac{3,3 \cdot 10^7}{1 + 0,01 \cdot T}$

4.4.2. Modélisation de la conductivité électrique du Cuivre :

La conductivité électrique σ ($\text{Ohm}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$) du Cuivre en fonction de la température T

en °K est donnée par [38] :

$$\sigma(T) = \frac{6,4 \cdot 10^7}{1 + 0,004 \cdot T} \quad (4.49).$$

Elle est représentée figure 4. 16 :

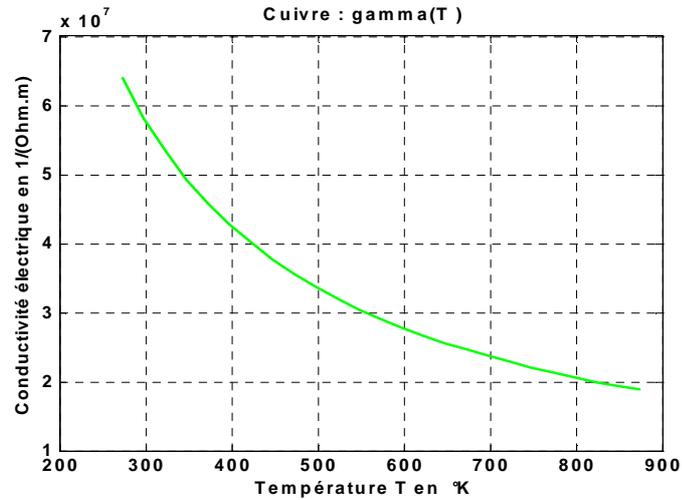


Figure 4.16. Cuivre: $\sigma(T) = \frac{6,4 \cdot 10^7}{1 + 0,004 \cdot T}$

4.4.3. Modélisation de la conductivité électrique du Fer pur :

La conductivité électrique σ ($\text{Ohm}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$) du fer pur en fonction de la température T en °K est donnée par [38], [BM1] :

$$\sigma(T) = \frac{95,24 \cdot 10^6}{1 + 0,0045 \cdot T} \quad (4.50).$$

Elle est représentée figure 4.17 :

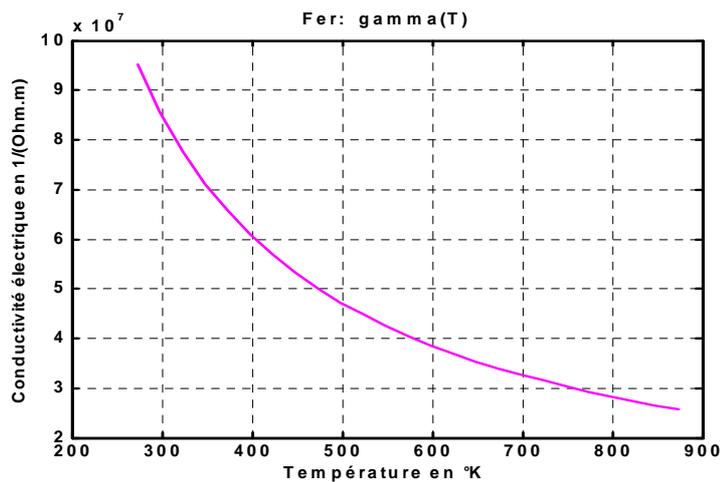


Figure 4. 17. Fer pur: $\sigma(T) = \frac{95,24 \cdot 10^6}{1 + 0,0045 \cdot T}$

CHAPITRE V

MODELISATION DES PARAMETRES THERMIQUES.

5.1	Modélisation de la capacité calorifique à volume constant par les fonctions de Brillouin et de Debye	V-2
5.1.2.	Modèle de DEBYE de la capacité calorifique à volume constant $C_v(T / \theta_D)$	V-2
5.1. 3.	Modélisation analytique de $C_v(T / \theta_D)$	V-5
5.1. 4.	Applications	V-7
5.1.4.1.	Valeur moyenne de $C_v(T / \theta_D)$ sur un intervalle $[T_0, T]$	V-7
5.1. 4.2.	Calcul de l'énergie interne E sous forme analytique dans $[T_0, T]$	V-9
5.1.4.3.	Application à une tige Cu-Fe	V-11
5.2.	Modélisation de la conductivité thermique k des métaux	V-14
5.2.1.	Conductivité thermique k de l'Aluminium	V-14
5.2.2.	Conductivité thermique k du Cuivre	V-15
5.2.3.	Conductivité thermique k du fer pur	V-16
5.3.	Propriétés physiques de l'air	V-18

5.1. Modélisation de la capacité calorifique à volume constant par les fonctions de Brillouin et de Debye :

Dans le chauffage par induction, dans le calcul des pertes des machines électriques, dans la construction mécanique, dans le calcul de la distribution du champ thermique, l'équation de la chaleur est requise. Celle-ci fait intervenir la capacité calorifique à volume constant $C_v(T / \theta_D)$ qui dépend fortement de la température T et de la température de Debye θ_D , qui est une constante pour chaque métal. La Physique de l'État Solide, à travers l'étude des propriétés acoustiques et thermiques des métaux, établit une formule donnant $C_v(T / \theta_D)$ par une intégrale qu'on ne peut calculer que numériquement. Cela est dû à la forme même de la fonction de distribution de Debye.

Nous allons proposer une formulation analytique de $C_v(T / \theta_D)$ par analogie avec la fonction de Brillouin largement utilisée en ferromagnétisme. Cette formulation a l'avantage de mettre à la disposition de l'Ingénieur des concepts propres au Physicien. Un autre avantage est la facilité de "saisir" cette nouvelle formulation par des fonctions qui relèvent du domaine de l'Analyse Numérique, type spline ou autre. Cette même formulation permettra aussi de trouver une formulation analytique de l'énergie interne $E(T / \theta_D)$, alors qu'elle était donnée par une intégrale qu'on ne peut calculer que numériquement.

5.1.2. Modèle de DEBYE de la capacité calorifique à volume constant $C_v(T / \theta_D)$:

Pour l'étude des propriétés thermiques des solides, on définit la capacité calorifique à volume constant par, [1],[2] :

$$C_v = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_v \quad (5.1)$$

où E est l'énergie interne et T la température.

Le calcul mathématique, ou théorie de DEBYE, de l'énergie totale des phonons en fonction de la température donne la capacité calorifique $C_v(T / \theta_D)$ d'un solide :

$$C_v(T / \theta_D) = 9R \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 \int_0^{\theta_D/T} \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} dx \quad (5.2).$$

$\theta_D = \frac{h\nu_m}{k_B}$ est la température de Debye, h est la constante de Planck et k_B celle de

Boltzmann. ν_m est la fréquence de l'onde de plus courte longueur d'onde des phonons.

$R = k_B N$ est la constante des gaz parfaits, où N est le nombre d'Avogadro.

La température de Debye θ_D est déterminée pour chaque métal en faisant coïncider la courbe

théorique $C_v = f\left(\frac{T}{\theta_D}\right)$, fonction de T / θ_D et les points expérimentaux. Le Tableau I

montre les températures de Debye de certains solides [2].

Solide	temp. de Debye en ° K	Solide	temp. de Debye en °K
Argent	215	Germanium	290
Aluminium	390	Potassium	100
Or	170	Sodium	150
Béryllium	1100	Nickel	370
C(Diamant)	1860	Plomb	88
Cuivre	315	Silicium	620
Fer	420		

Tableau I: températures de Debye de certains solides [2].

La fonction $C_v(T / \theta_D)$ donnée par la relation (5.2) est tracée point par point, [figure 1](#), après calcul de l'intégrale pour différentes valeurs de T / θ_D à l'aide du logiciel MAPLE.

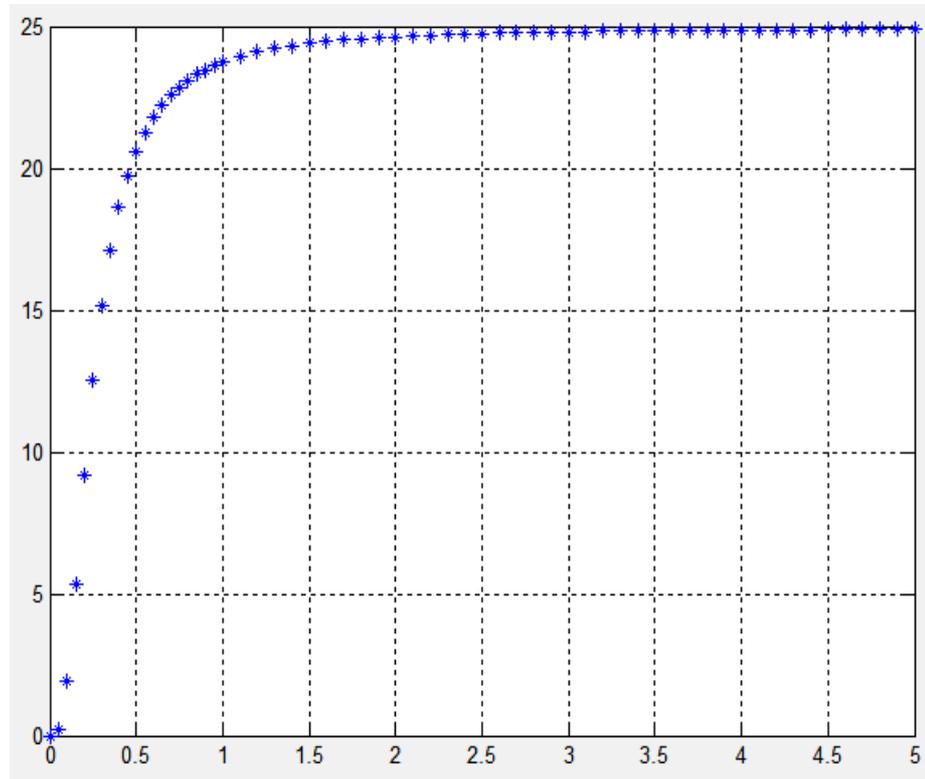


figure 1: $C_v = f\left(\frac{T}{\theta_d}\right)$ selon l'expression (5.2)

Quand la température est suffisamment faible, C_v peut être modélisée par une loi

en T^3 :

$$C_v = AT + BT^3 \quad (5.3).$$

Pour certains auteurs [1], à partir de $T \geq 0.1\theta_d$, on n'est plus dans la zone de variation en T^3 .

Quand la borne supérieure d'intégration de (5.2) est suffisamment grande (infinie), C_v tend vers, [1], [7]:

$$C_v = 3R = 24.9435 \quad \text{J}/(\text{mole.K}) . \quad (5.4).$$

On retrouve ainsi la loi de Dulong et Petit.

D'autre part, si T_0 est la température ambiante, prise ici égale à **15°C (288 °K)**, le rapport T_0 / θ_D , selon le Tableau I, est toujours supérieur à 0.4 sauf pour le Béryllium (0.26) et le Diamant (0.1548).

La plupart des phénomènes thermiques de la nature se passant à une température supérieure à T_0 et la ressemblance de $C_v = C_v(T / \theta_D)$, **figure 1**, avec la fonction de Brillouin $B_j(x) = f(x)$, déjà étudiée au chapitre IV, incitent à modéliser formellement $C_v(T / \theta_D)$ de la même manière que $B_j(x)$.

5.1. 3. Modélisation analytique de $C_v(T / \theta_D)$:

Cette modélisation analytique est basée sur une formalisation mathématique identique à celle de $B_j(x)$, c'est-à-dire par l'utilisation de 2 fonctions cotangente hyperbolique. A cet effet, un programme informatique a été réalisé à l'aide du logiciel MATLAB. Il donne :

$$C_v(T / \theta_D) = 26,8590 \cdot \coth\left(9,4151 \cdot \frac{T}{\theta_D}\right) - 1,9185 \cdot \coth\left(0,6725 \cdot \frac{T}{\theta_D}\right)$$

avec $\frac{T}{\theta_D} \geq 0,4$ (5.5).

Cette courbe est tracée, **figure 2**, en même temps que la courbe selon l'expression (5.2) de la **figure**

1, mais seulement pour $\frac{T}{\theta_D} \geq 0,4$.

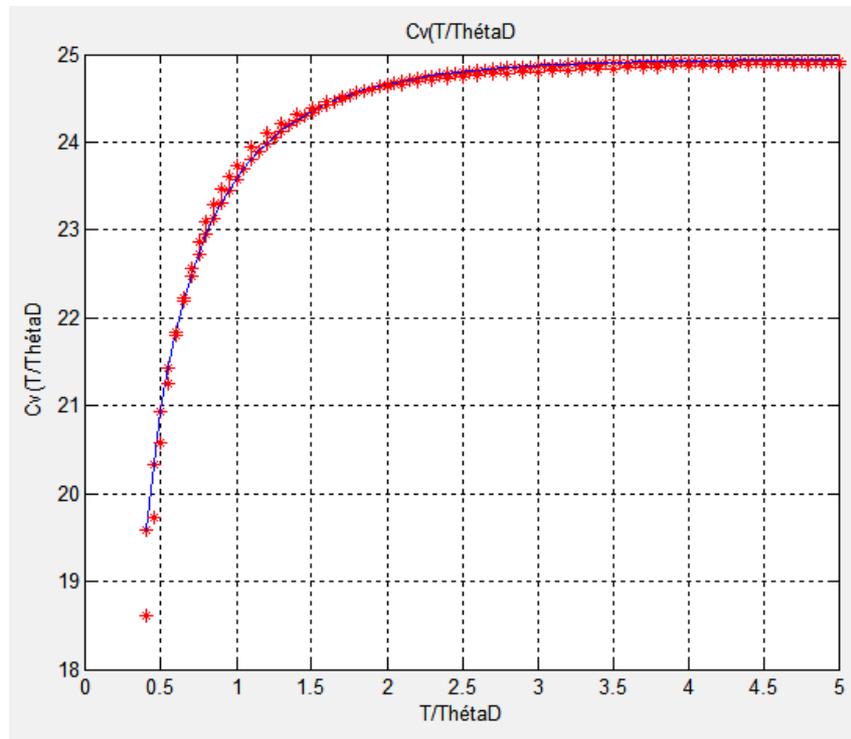


figure 2. ****: expression (5.2)

en continu: expression (5.5)

La valeur absolue de l'erreur relative entre les valeurs données par (5.2) et les valeurs données par (5.5) est inférieure ou égale à 5%, ou même inférieure à 1% dès que $T / \theta_D \geq 0.45$ comme le montre la [figure 3](#). L'erreur relative absolue est représentée sous forme d'histogramme.

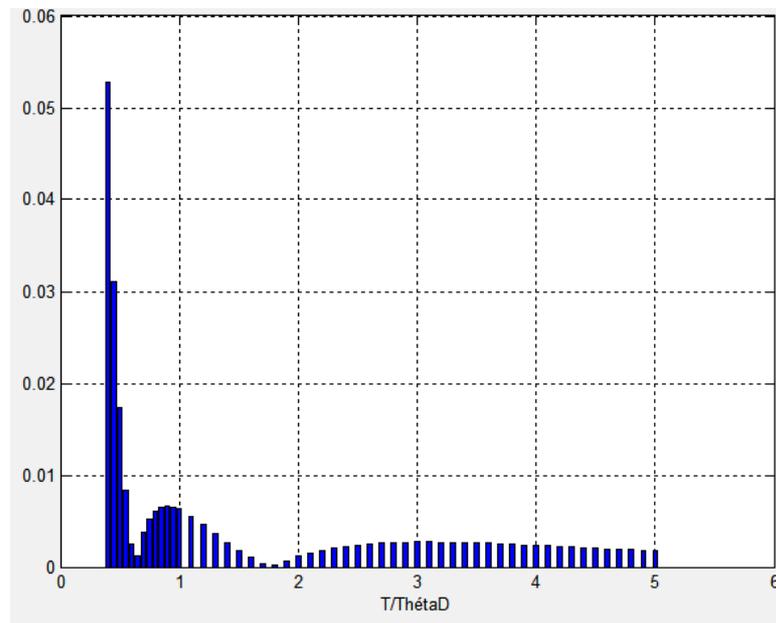


Figure 3: Valeur absolue de l'erreur relative sur C_v

5.1. 4. Applications:

Plusieurs applications peuvent découler de cette nouvelle formulation de $C_v(T / \theta_D)$. En voici quelques unes.

5.1.4.1. Valeur moyenne de $C_v(T / \theta_D)$ sur un intervalle $[T_0, T]$:

Le terme $C_v(T) \rho \frac{\partial T}{\partial t}$ figurant dans l'équation de la chaleur peut être simplifié sous certaines contraintes de précision que l'utilisateur s'impose. A cet effet, il peut utiliser par exemple la valeur moyenne de $C_v(T / \theta_D)$ pour avoir un coefficient constant pour ce même terme. La valeur moyenne, donc, de $C_v(T / \theta_D)$ entre T_0 et T est:

$$C_{vm} \left(\frac{T}{\theta_D}, \frac{T_0}{\theta_D} \right) = \frac{1}{\frac{T}{\theta_D} - \frac{T_0}{\theta_D}} \int_{\frac{T_0}{\theta_D}}^{\frac{T}{\theta_D}} C_v \left(\frac{T}{\theta_D} \right) d \left(\frac{T}{\theta_D} \right) \quad (5.6)$$

En remplaçant $C_v(T / \theta_D)$ par son expression analytique (5.5), et en effectuant les

calculs, il vient:

$$C_{vm} = \frac{1}{\frac{T}{\theta_D} - \frac{T_0}{\theta_D}} \left[2,852785 Ln \frac{\sinh\left(9,4151 \frac{T}{\theta_D}\right)}{\sinh\left(9,4151 \frac{T_0}{\theta_D}\right)} - 2,852788 Ln \frac{\sinh\left(0,6725 \frac{T}{\theta_D}\right)}{\sinh\left(0,6725 \frac{T_0}{\theta_D}\right)} \right] \quad (5.7)$$

L'expression (5.7) est représentée **figure 4**, pour $\theta_D = 420^\circ\text{K}$ (fer) et pour $\frac{T_0}{\theta_D} = 0,30$.

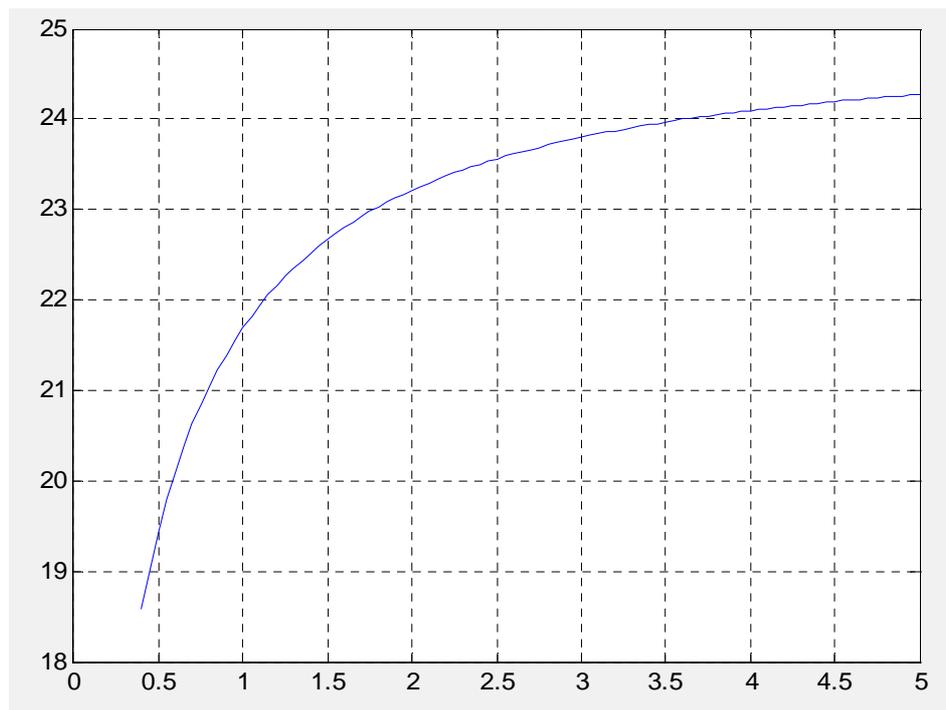


Figure 4: C_{vm} en fonction de $\frac{T}{\theta_D}$, expression (5.7)

5.1. 4.2. Calcul de l'énergie interne E sous forme analytique dans $[T_0, T]$:

La formule (5.1) nous permet d'écrire:

$$E\left(\frac{T}{\theta_D}\right) = \int_{T_0}^T C_v \left(\frac{T}{\theta_D}\right) dT \quad (5.8).$$

En utilisant la formule (5.5) et après calculs faits, il vient:

$$E\left(\frac{T}{\theta_D}\right) = \theta_D \cdot \left[2,852758 \operatorname{Ln} \frac{\sinh(9,4151T / \theta_D)}{\sinh(9,4151T_0 / \theta_D)} - 2,852788 \operatorname{Ln} \frac{\sinh(0,67251T / \theta_D)}{\sinh(0,67251T_0 / \theta_D)} \right] \quad (5.9).$$

D'autre part, l'on sait que [1], [2] :

$$E\left(\frac{T}{\theta_D}\right) = 9.R. \theta_D \cdot \left(\frac{T}{\theta_D}\right)^4 \cdot \int_0^{\frac{\theta_D}{T}} \frac{x^3}{e^x - 1} dx \quad (5.10).$$

La **figure 5** représente $\frac{1}{\theta_D} E\left(\frac{T}{\theta_D}\right)$ aussi bien sous sa forme analytique (5.4) que sous sa forme intégrale (5.5). L'erreur est pratiquement nulle.

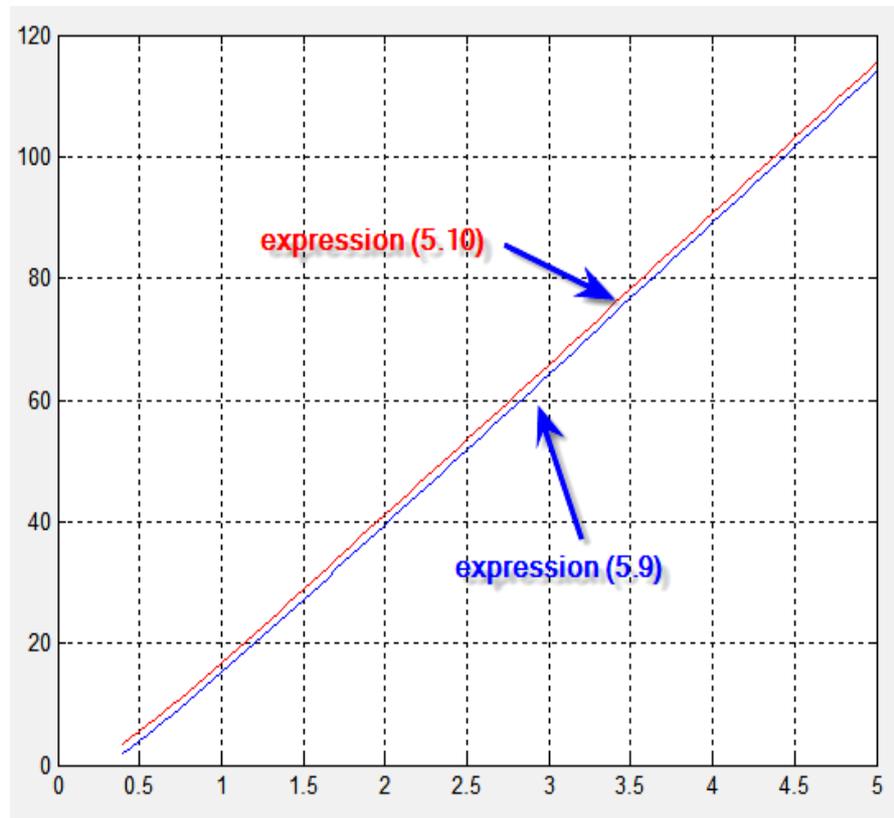


Figure 5. $\frac{1}{\theta_D} E\left(\frac{T}{\theta_D}\right)$ en fonction de $\frac{T}{\theta_D}$

Conclusion :

La modélisation analytique de $C_v(T / \theta_D)$ et de $E(T / \theta_D)$ par des fonctions analytiques simples, valables pour les températures les plus courantes dans le domaine des sciences physiques a été établie. Cette modélisation est encore plus précise dans le domaine du chauffage par induction où les températures sont élevées. Elle a l'avantage de mettre à la disposition de l'Ingénieur des concepts propres au Physicien. Cette formulation est facilement manipulable par des fonctions relevant de l'Analyse Numérique.

5.1.4.3. Application pratique à une tige Cu-Fe

Pour illustrer l'application pratique de la modélisation de $C_v(T)$, nous avons choisi de résoudre l'équation de la chaleur dans une tige composée de cuivre et de fer dans les cas linéaire et non linéaire. Cette tige rectangulaire est représenté figure 6.

Cas linéaire

Les capacités calorifiques du cuivre et du fer sont constantes et valent: $C_v(Cu) = 385J / kg$ et $C_v(Fe) = 449J / kg$ [7]. Les conductivités thermiques sont constantes aussi: $k(Cu) = 400W / m^{\circ}C$ et $k(Fe) = 82W / m^{\circ}C$

La densité du cuivre est $\rho_{Cu} = 8960kg / m^3$; celle du fer est $\rho_{Fe} = 7870kg / m^3$. La température $T = 400K$ est imposée sur la face gauche de la tige.

L'équation différentielle linéaire à résoudre est:

$$\rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (-k \vec{\nabla} T) = 0 \quad (5.11)$$

Les résultats sont illustrés dans les figures 6 ,7 et 8.

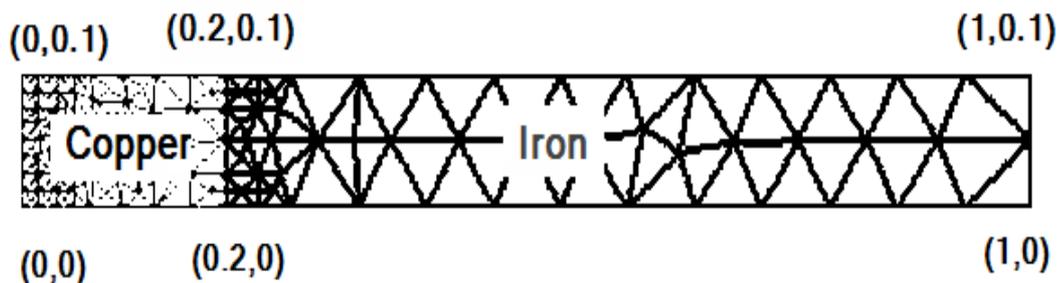


Figure 6: géométrie de la tige et maillage (569 noeuds)

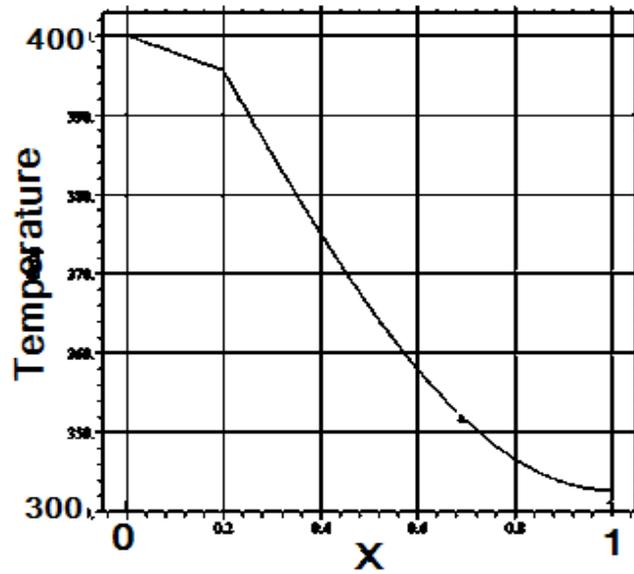


Figure 7 : Distribution de la température dans l'axe de la tige

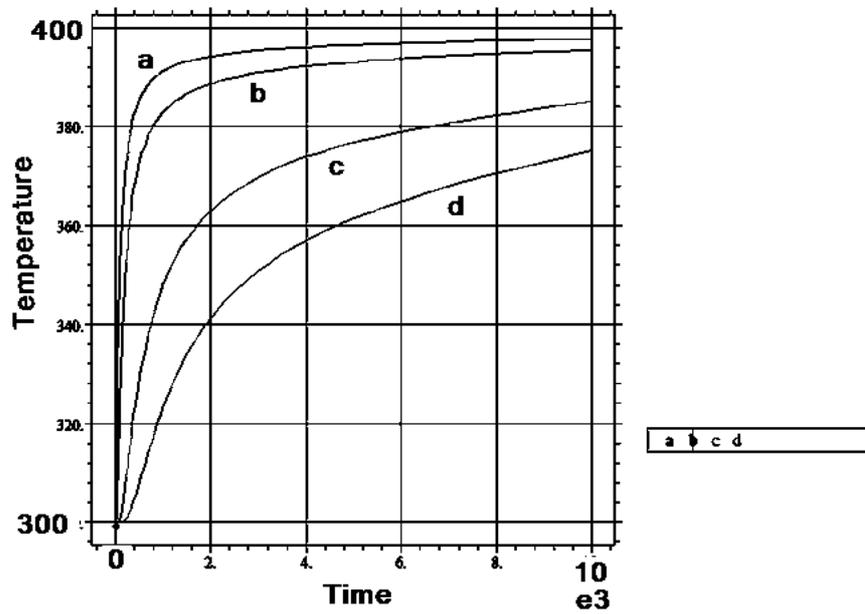


Figure 8. Température en fonction du temps en a (0.1, 0.05), b (0.2, 0.05), c (0.3, 0.05), d (0.4, 0.05)

Cas non linéaire:

Dans ce cas la capacité calorifique $C_v(T)$ dépend de la température pour les deux métaux et est donnée par la formule (5.5) respectivement pour les deux températures de Debye correspondantes du tableau I. Cette formule donne $C_v(T)$ en Joule/mole °C. Pour obtenir $C_v(T)$ en Joule /kg, il faut diviser $C_v(T)$ en Joule/mole°C par la masse atomique exprimée en kg. L'équation différentielle non linéaire à résoudre est:

$$\rho C_v(T) \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (-k \vec{\nabla} T) = 0 \quad (5.12)$$

Les résultats sont résumés dans les figures 9 et 10.

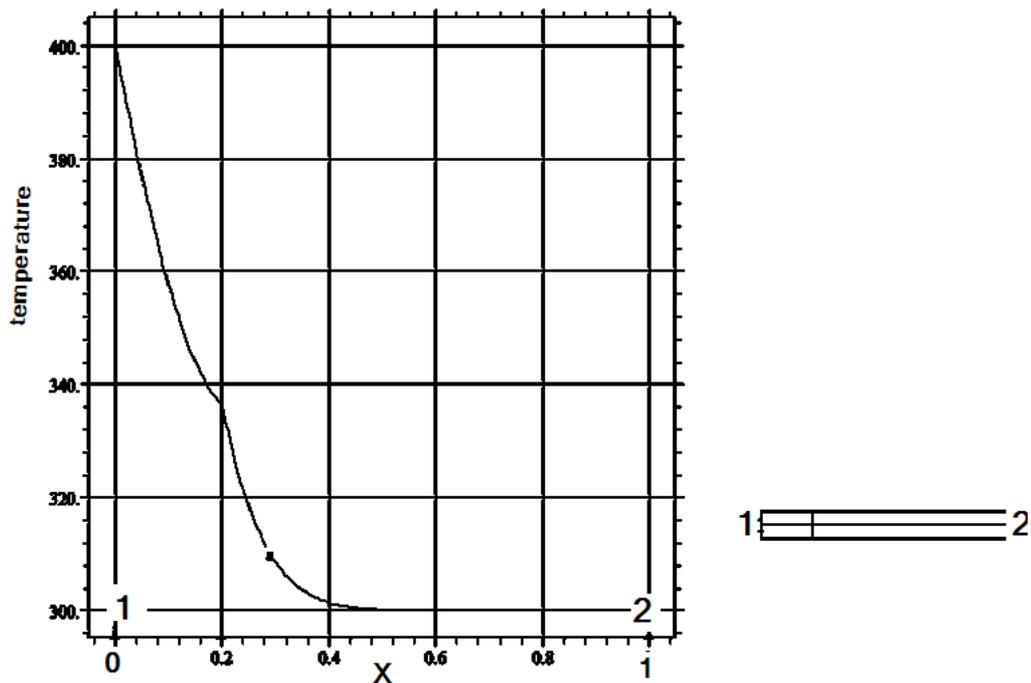


Figure 9. Temperature = f(x) dans l'axe de la tige de 1 à 2

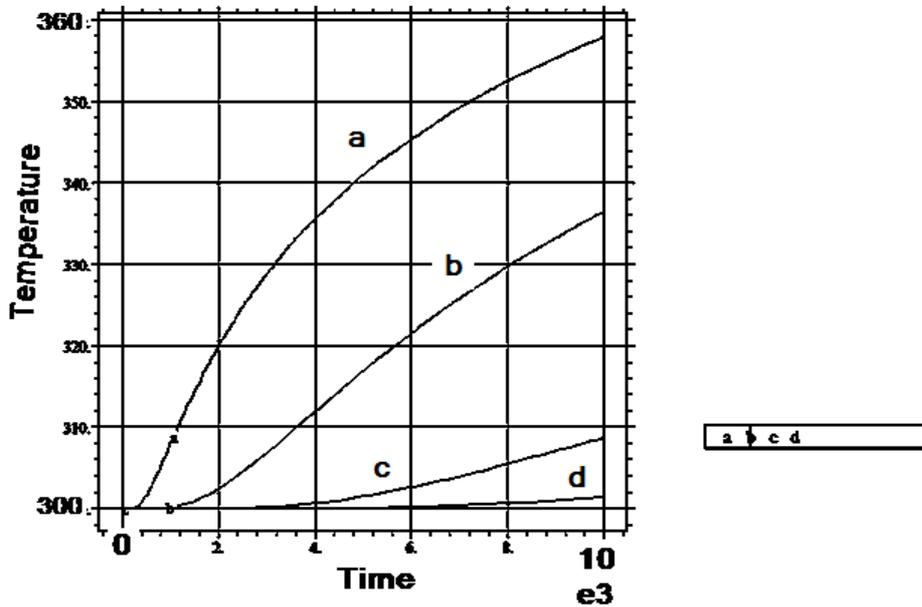


Figure 10: Temperature=f(temps) en a (0.1, 0.05), b (0.2, 0.05), c (0.3, 0.05), d (0.4, 0.05)

Conclusion

Dans le cas linéaire, (figure 8, courbe a), la température croît de 300 K à 400 K en $8 \cdot 10^3$ secondes.

Dans le cas non linéaire, (figure 10, courbe a), la température croît de 300 K à seulement 350 K dans la même durée.

5.2. Modélisation de la conductivité thermique $k(T)$ des métaux :

5.2.1. Conductivité thermique k de l'Aluminium :

La conductivité thermique k en $W/(m \cdot ^\circ C)$ de l'Aluminium en fonction de la température T en $^\circ C$ est donnée par le tableau 2 suivant [8]:

T $^\circ C$	0	20	100	200	300	400	500	600
k $W/(m \cdot ^\circ C)$	202	204	206	229	272	319	371	422

Tableau 2. conductivité thermique de l'Aluminium.

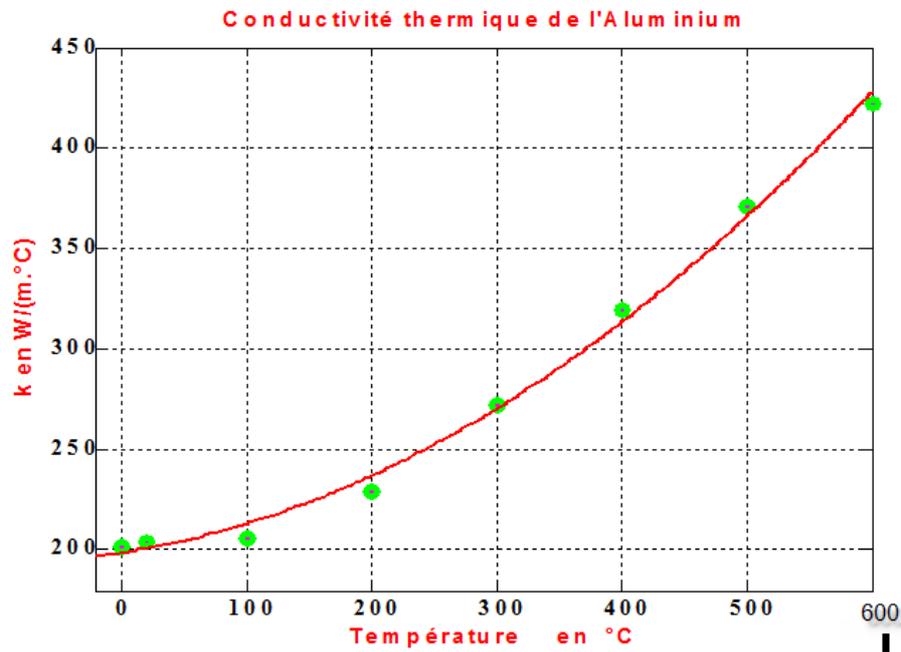


figure 11. Conductivité thermique de l'Aluminium en fonction de la température.

Cette courbe est bien approximée par la parabole :

$$k=0,00048.T^2+0,096.T+200 \quad (5.13)$$

5.2.2. Conductivité thermique k du Cuivre :

La conductivité thermique k en W/(m.°C) du Cuivre en fonction de la température T en °C est donnée par le tableau suivant [7], [8]:

T °C	0	100	200	300	400	500	600
k W/(m.°C)	393	385	378	371	365	359	354

Tableau 3. Conductivité thermique du Cuivre.

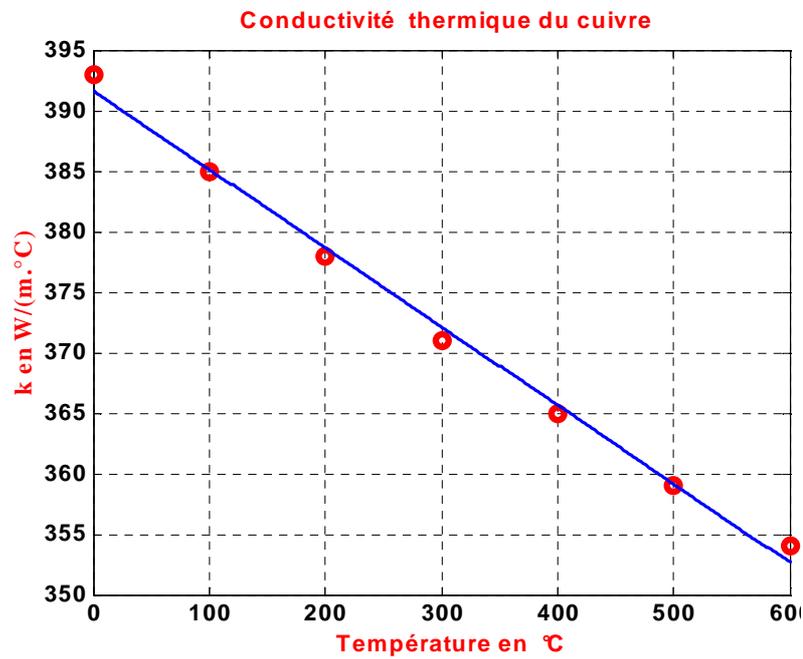


figure 12. Conductivité thermique du Cuivre en fonction de la température.

Cette courbe est bien approximée par la droite :

$$k = -0,065.T + 390 \quad (5.14)$$

5.2.3. Conductivité thermique k du fer pur :

La conductivité thermique k en W/(m.°C) du fer pur en fonction de la température T en °C est donnée par le tableau suivant [38]:

T °C	20	100	200	300	400	600	800	1000
k W/(m.°C)	73	67	62	55	48	40	36	35

Tableau 4

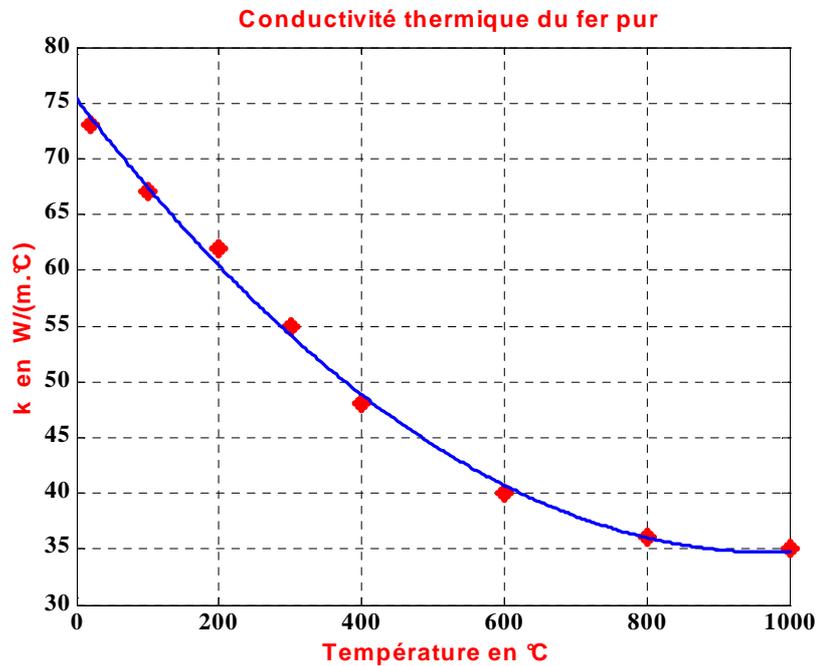


figure 13. Conductivité thermique du fer pur en fonction de la température.

Cette courbe est bien approximée par la parabole :

$$k=4,2726.10^{-5}.T^2-0,08334.T+75,34 \quad (5.15)$$

Le logiciel MATLAB contient énormément de possibilités pour approximer une fonction quelconque connue seulement par des valeurs discrètes. En particulier, à travers l'instruction cftool (Curve Fitting Tool). Voici un exemple pour le fer pur.

$$k(T)=a_1 e^{-\left(\frac{T-b_1}{c_1}\right)^2} + a_2 e^{-\left(\frac{T-b_2}{c_2}\right)^2} \quad (5.16)$$

Avec les coefficients (with 95% confidence bounds):

a1 = 51.04	b1 = -216.3	c1 = 598.7
a2 = 3.107e+13	b2 = 3.251e+5	c2 = 6.177e+4
R-square: 0.9987		

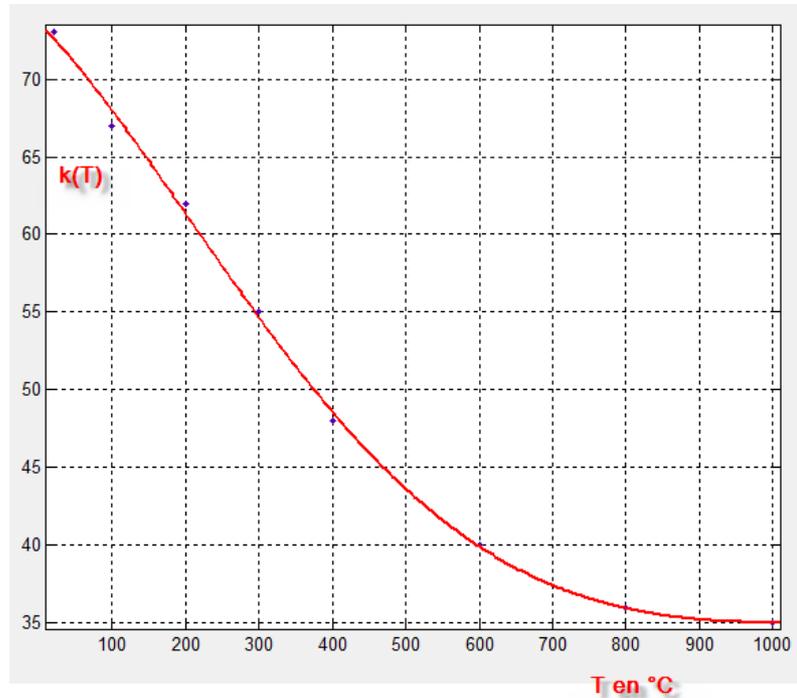


Figure 14 : fer pur : en trait plein: $k(T) = a_1 e^{-\left(\frac{T-b_1}{c_1}\right)^2} + a_2 e^{-\left(\frac{T-b_2}{c_2}\right)^2}$

.... Valeurs selon tableau

5.3. Propriétés physiques de l'air:

Le milieu qui entoure le dispositif étudié est constitué par l'air. Aussi, le tableau 5 résume les propriétés physiques de celui-ci.

Tableau 9

Propriétés physiques de l'air sec ($B = 760 \text{ mm Hg} \approx 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$) [13]

$t, ^\circ\text{C}$	$\rho, \text{kg/m}^3$	$c_p, \text{kJ}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$	$\lambda \cdot 10^2, \text{W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$	$\alpha \cdot 10^6, \text{m}^2/\text{s}$	$\mu \cdot 10^6, \text{Pa} \cdot \text{s}$	$\nu \cdot 10^6, \text{m}^2/\text{s}$	Pr
-50	1,584	1,013	2,04	12,7	14,6	9,23	0,728
-40	1,515	1,013	2,12	13,8	15,2	10,04	0,728
-30	1,453	1,013	2,20	14,9	15,7	10,80	0,723
-20	1,395	1,009	2,28	16,2	16,2	12,79	0,716
-10	1,342	1,009	2,36	17,4	16,7	12,43	0,712
0	1,293	1,005	2,44	18,8	17,2	13,28	0,707
10	1,247	1,005	2,51	20,0	17,6	14,16	0,705
20	1,205	1,005	2,59	21,4	18,1	15,06	0,703
30	1,165	1,005	2,67	22,9	18,6	16,00	0,701
40	1,128	1,005	2,76	24,3	19,1	16,96	0,699
50	1,093	1,005	2,83	25,7	19,6	17,95	0,698
60	1,060	1,005	2,90	26,2	20,1	18,97	0,696
70	1,029	1,009	2,96	28,6	20,6	20,02	0,694
80	1,000	1,009	3,05	30,2	21,1	21,09	0,692
90	0,972	1,009	3,13	31,9	21,5	22,10	0,690
100	0,946	1,009	3,21	33,6	21,9	23,13	0,688
120	0,898	1,009	3,34	36,8	22,8	25,45	0,686
140	0,854	1,013	3,49	40,3	23,7	27,80	0,684
160	0,815	1,017	3,64	43,9	24,5	30,09	0,682
180	0,779	1,022	3,78	47,5	25,3	32,49	0,681
200	0,746	1,026	3,93	51,4	26,0	34,85	0,680
250	0,674	1,038	4,27	61,0	27,4	40,61	0,677
300	0,615	1,047	4,60	71,6	29,7	48,33	0,674
350	0,566	1,059	4,91	81,9	31,4	55,46	0,676
400	0,524	1,068	5,21	93,1	33,0	63,09	0,678

[8]

Tableau 5 : propriétés physiques de l'air [8]

Ce tableau montre:

1. que la densité de l'air (2^{ème} colonne) chute de $1,293 \text{ kg/m}^3$ pour 0°C à $0,524 \text{ kg/m}^3$ pour 400°C .
2. que la capacité calorifique à pression constante C_p en $\text{kJ}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$ augmente de $1,005$ pour 0°C à $1,068$ pour 400°C .

3. que la conductivité thermique (3^{ème} colonne) augmente de $2,44.10^{-2}$ W/(m.°C) pour 0°C à $5,21.10^{-2}$ pour 400°C.

Le dispositif à étudier est constitué de la billette à chauffer, de l'inducteur et de l'air compris dans le domaine d'étude. Le champ thermique ne sera pas calculé dans l'air car cela nécessite la résolution simultanée de l'équation de la chaleur et de l'équation de transfert de la matière (air).

Chapitre VI

APPLICATIONS A UN MATERIAU AMAGNETIQUE

6.1. Introduction	VI-2
6.2. Etude d'un dispositif constitué d'une seule spire filiforme	VI-3
6.2.1. Solution numérique	VI-3
6.2.2. Solution analytique	VI-15
6.2.2.1. Etude de l'effet pelliculaire dans l'inducteur	VI-15
6.2.2.2. Potentiel vecteur créé par une spire inductrice	VI-19
6.2.2.2.1. Aperçu sur les intégrales elliptiques	VI-21
6.2.2.2.2. Calcul du vecteur de Poynting le long de l'arête de la billette	VI-23
6.3. Etude électromagnétique et thermique d'un dispositif constitué de 11 spires	VI-29
6.3.1. Etude électromagnétique	VI-29
6.3.2. Etude thermique	VI-32

6.1. Introduction:

Dans ce chapitre on se propose de calculer le champ électromagnétique et le champ thermique dans deux configurations du dispositif à étudier.

Le premier dispositif consiste en l'étude numérique puis analytique du dispositif représenté par la figure 6.1. Cette étude a déjà été menée par une méthode nouvelle due aux auteurs [52] et validée expérimentalement par eux même au laboratoire. L'étude sera menée exactement dans les mêmes conditions géométriques et physiques que celles dans [52]. Elle permettra de valider nos calculs, en particulier, la vérification de la courbe donnant la densité surfacique de puissance (W/m^2) le long de l'arête de la billette comme le montre la figure 6.1.

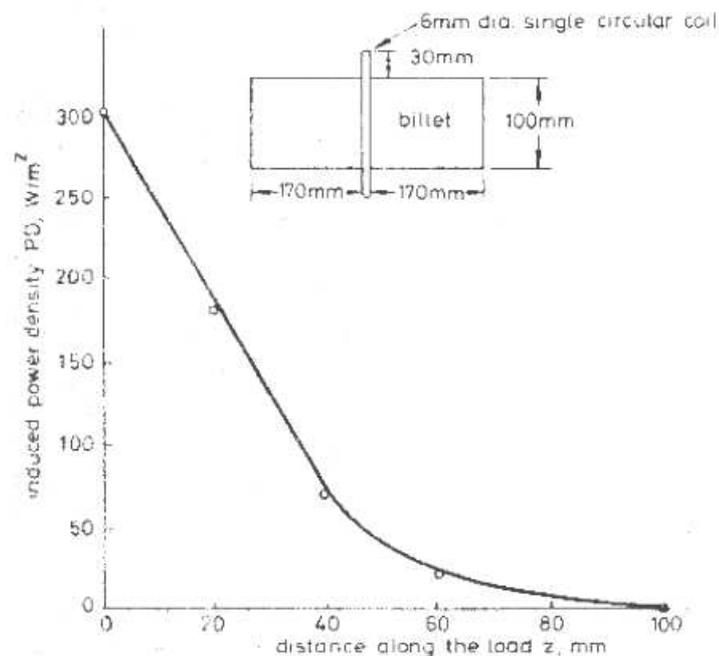


Fig. 13 Power-density distribution along the aluminum cylinder due to 600A flowing in a single conductor mounted at middle of cylinder with an airgap of 30 mm

Figure 6.1. Dispositif et densité de puissance surfacique étudiés par [52].

Le deuxième dispositif consiste en l'étude numérique seulement du dispositif représenté par la figure 6.2. Cette étude a déjà été faite dans les mêmes conditions théoriques et expérimentales et par les mêmes auteurs [52]. Elle a été reprise dans [38] dans le but de valider les travaux réalisés

par l'auteur. Notre étude sera menée exactement dans les mêmes conditions géométriques et physiques que celles dans [52] et [38]. Elle permettra de valider nos calculs, en particulier, la vérification de la courbe donnant la densité surfacique de puissance (W/m^2) le long de l'arête de la billette comme le montre la figure 6.2.

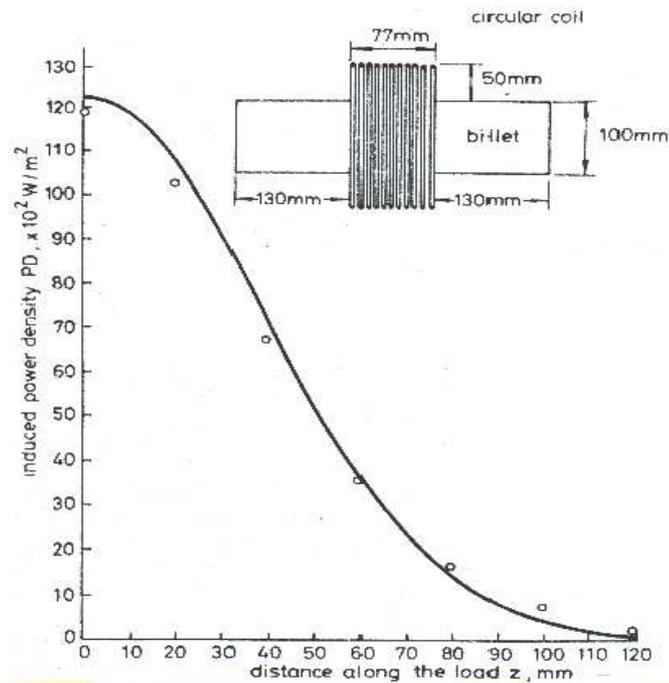


Fig. 12 Power-density distribution along the aluminium cylinder due to 11 turns coil at airgap of 50 mm, coil pitch 7.1 mm and current of 600 A
 Centre of coil mounted at centre of cylinder
 — prediction by superposition
 ○ practical readings

Figure 6.2. Dispositif et densité de puissance surfacique étudiés par [52].

6.2. Etude d'un dispositif constitué d'une seule spire filiforme

Le dispositif étudié est celui de la figure 6.1.

6.2.1. Solution numérique

- **Logiciel utilisé:**

Le logiciel utilisé pour l'analyse numérique par la méthode des éléments finis est le logiciel flexPDE de la société PDESolutions. Il est souple et convivial. Il détecte et prend en charge les non-linéarités des grandeurs physiques qui figurent dans les équations différentielles aux dérivées par-

tielles du champ électromagnétique et du champ thermique. Il prend en charge également ces mêmes équations couplées.

- **Analyse numérique:**

Nous considérons une billette en Aluminium dont les dimensions sont (figure 6.1):

- hauteur : $h_b = 170 + 6 + 170 = 346$ en mm $h_b = 340 \text{ mm}$
- diamètre : $d_b = 50,8 \times 2 \text{ mm}$
- conductivité : $\sigma = \frac{3,3 \cdot 10^7}{1 + 0,01 \cdot T}$
- $\sigma = 2,75 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$ à 20°C

Elle est chauffée par une spire inductrice en cuivre (figure 6.1):

- $d_i =$ diamètre du conducteur : $d_i = 6 \text{ mm}$
- rayon de la spire : $\rho = (50,8 \cdot 2 + 30 + 30 + 6) / 2 = 83,8$ en mm
- courant dans la spire: 600 A, 60 Hz
- $\sigma = 5 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$

Le dispositif à étudier présente une symétrie axisymétrique, et de ce fait, les coordonnées cylindriques s'imposent. Il présente également un axe de symétrie à mi-hauteur de la billette et alors, seul un quart du dispositif sera étudié. Les frontières (arc de cercle) "à l'infini" du domaine d'étude ont été prises égales à 5 fois la hauteur de la billette.

Un script a été réalisé avec FlexPDE. Il résout dans le domaine d'étude les équations de la figure 6.3. Les grandeurs \mathbf{A}_{re} et \mathbf{A}_{im} sont les parties réelle et imaginaire du potentiel vecteur \mathbf{A} . \mathbf{J}_{s_re} et \mathbf{J}_{s_im} sont les parties réelle et imaginaire de la densité de courant dans l'inducteur. \mathbf{J}_{b_re} et \mathbf{J}_{b_im} sont les mêmes grandeurs dans la billette.

Equations

$$A_{re}: \operatorname{div}(1/\mu_0 \operatorname{grad}(A_{re})) + w \cdot \sigma \cdot A_{im} + n \cdot J_{s_re} = 0$$

$$A_{im}: \operatorname{div}(1/\mu_0 \operatorname{grad}(A_{im})) - w \cdot \sigma \cdot A_{re} + n \cdot J_{s_im} = 0$$

$$J_{s_re}: J_{s_re} = (I_{cu} - \operatorname{AREA_INTEGRAL}(w \cdot \sigma_{cu} \cdot A_{im}, 'Inducteur')) / \operatorname{Area}_{cu}$$

$$J_{s_im}: J_{s_im} = (0 - \operatorname{AREA_INTEGRAL}(-w \cdot \sigma_{cu} \cdot A_{re}, 'Inducteur')) / \operatorname{Area}_{cu}$$

$$J_{b_re}: J_{b_re} = (0 - \operatorname{AREA_INTEGRAL}(w \cdot \sigma_{alu} \cdot A_{im}, 'charge')) / \operatorname{Area}_{alu}$$

$$J_{b_im}: J_{b_im} = (0 - \operatorname{AREA_INTEGRAL}(-w \cdot \sigma_{alu} \cdot A_{re}, 'charge')) / \operatorname{Area}_{alu}$$

Figure 6.3. Les équations différentielles et intégrales à résoudre (capture du programme).

La figure 6.4 montre le quart du domaine étudié et le maillage et la figure 6.5 montre le quart du domaine étudié avec les conditions aux limites "air".

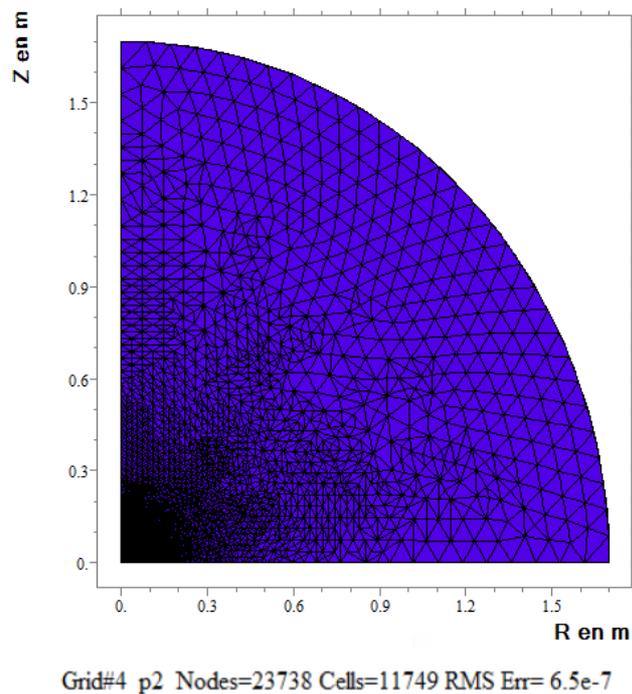


Figure 6.4 : Le quart du dispositif étudié et maillage; 23 738 nœuds et 11 749 triangles

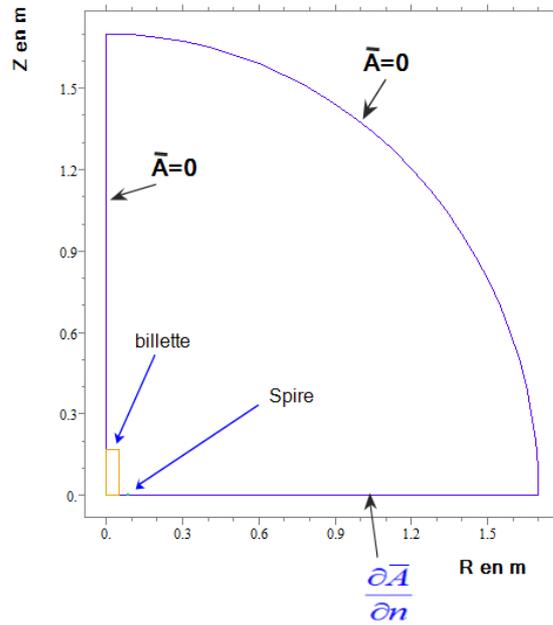


Figure 6.5 : Le quart du dispositif étudié sans maillage et conditions aux limites électromagnétiques "air"

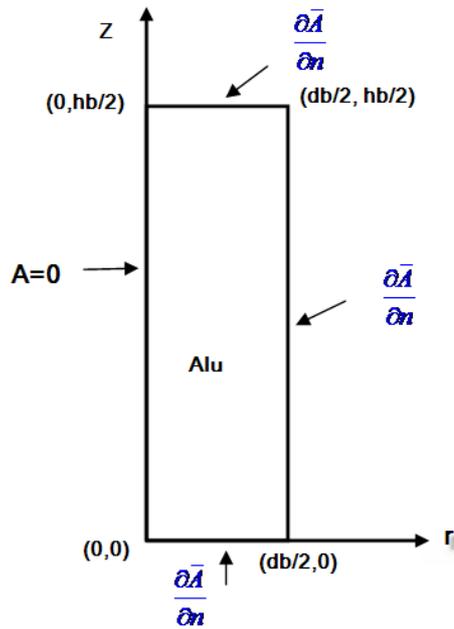


Figure 6. 6: Détails sur la billette et conditions aux limites électromagnétiques

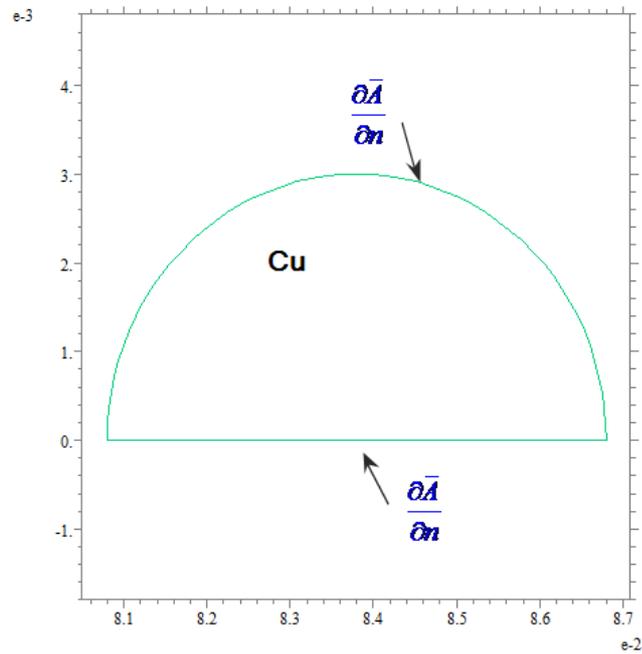


Figure 6. 7: Détails sur la spire inductrice et conditions aux limites électromagnétiques

Les résultats obtenus sont consignés dans les figures 6.8 à 6.21.

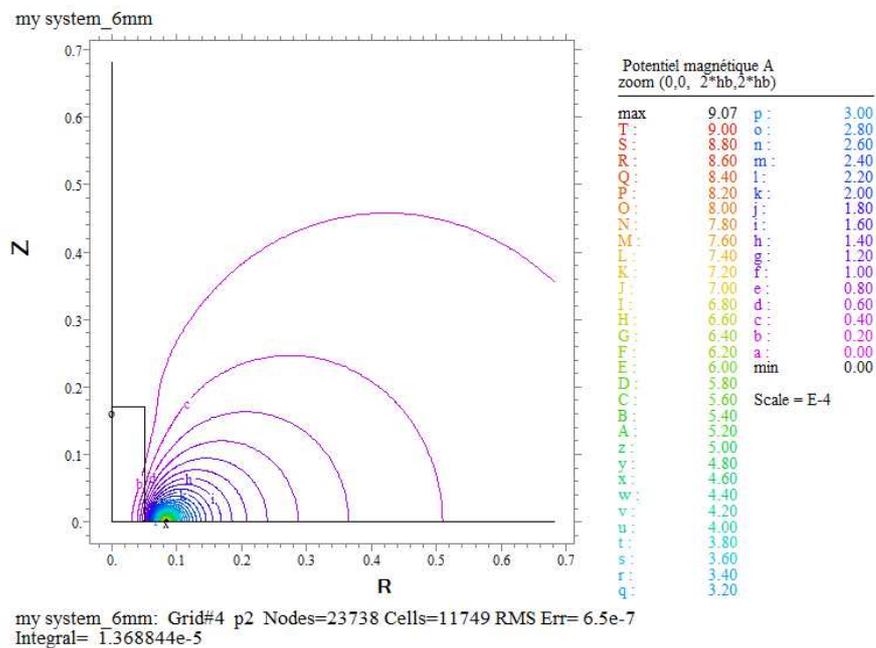


Figure 6.8. Isovaleurs du potentiel vecteur magnétique zoomées
autour de l'inducteur et la billette

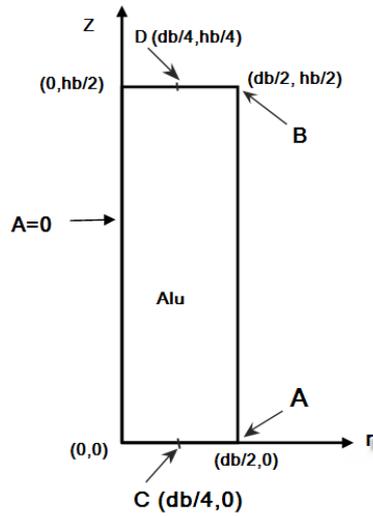


Figure 6.9. Localisation des points A,B,C,D importants pour l'étude.

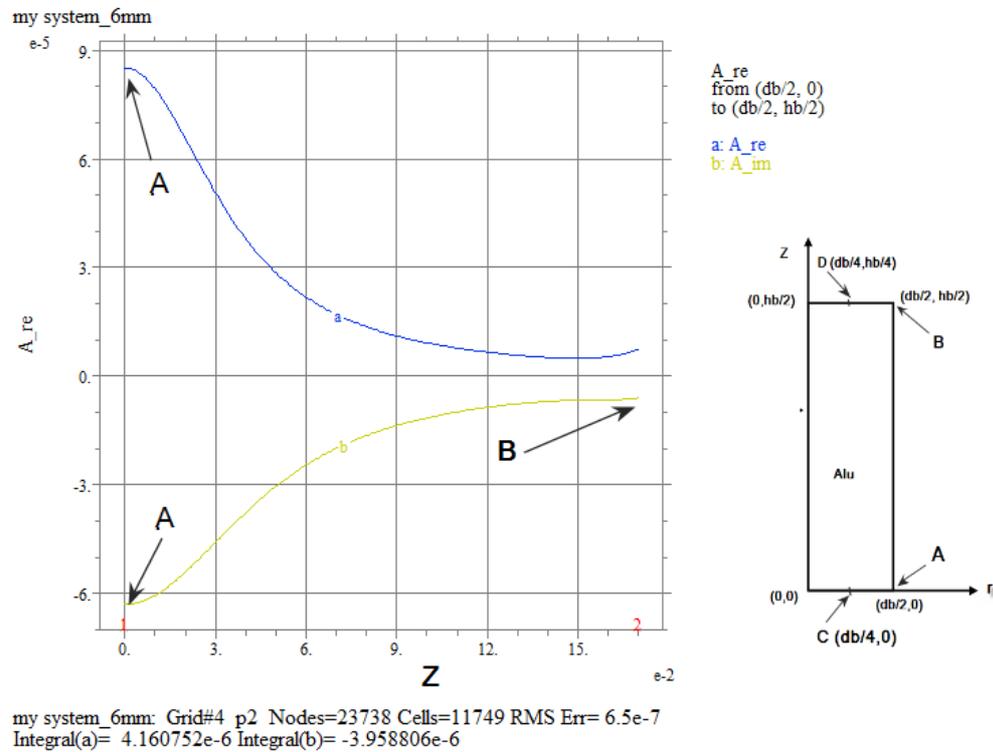
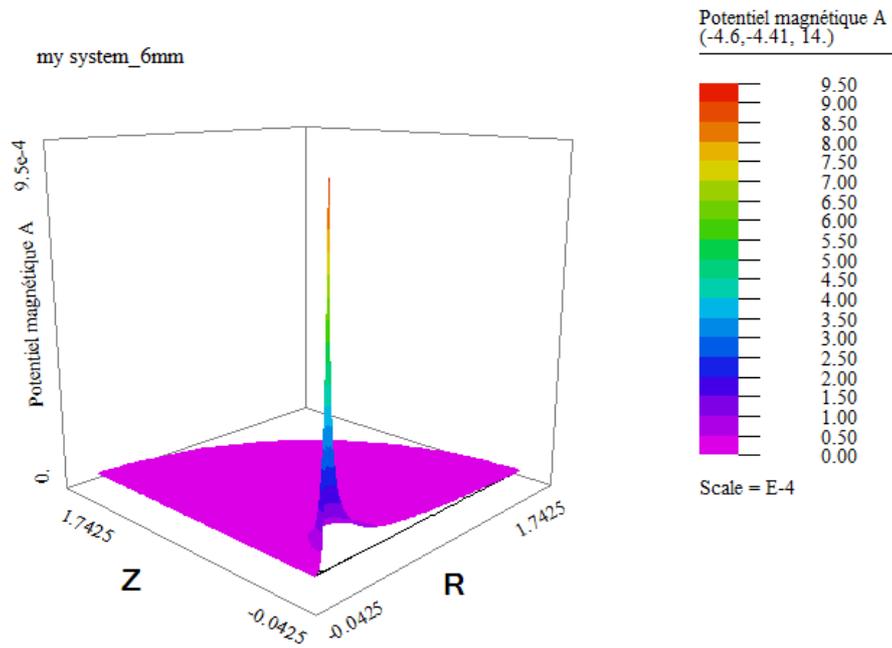


Figure 6.10. Variation des potentiels vecteurs réel A_{re} (bleu) et imaginaire A_{im} (jaune) entre les points A et B



my system_6mm: Grid#4 p2 Nodes=23738 Cells=11749 RMS Err= 6.5e-7
Integral= 2.274449e-5

Figure 6.11. Potentiel vecteur magnétique en fonction de r et z.

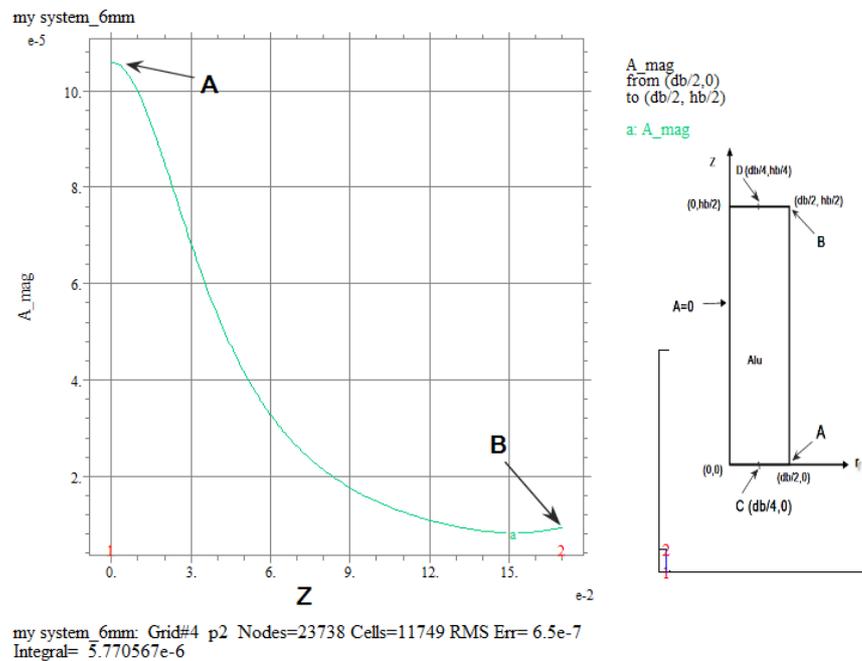


Figure 6.12. Variation du module du potentiel vecteur entre A (1) et B (2).

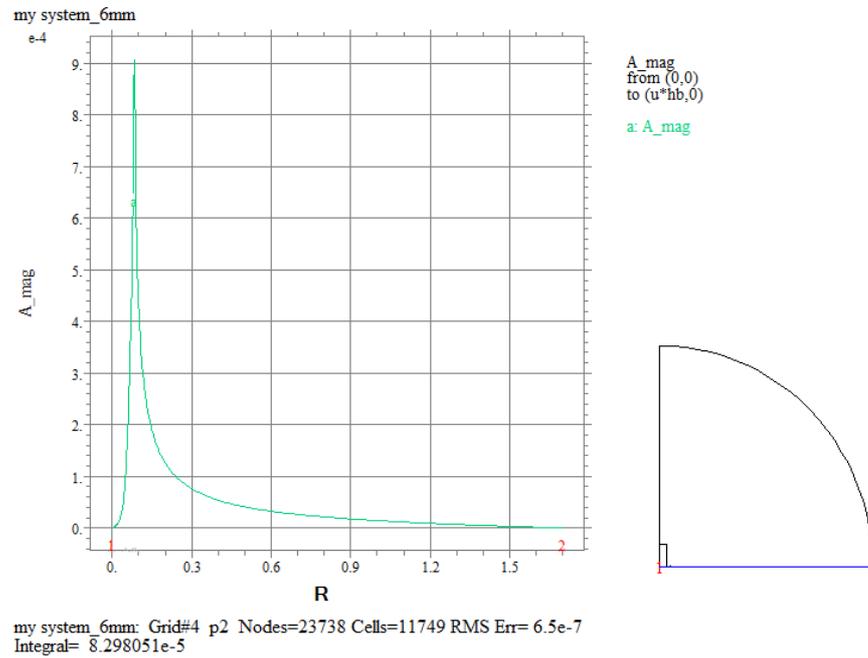


Figure 6.13. Variation de l'amplitude du potentiel vecteur entre les points 1 et 2.

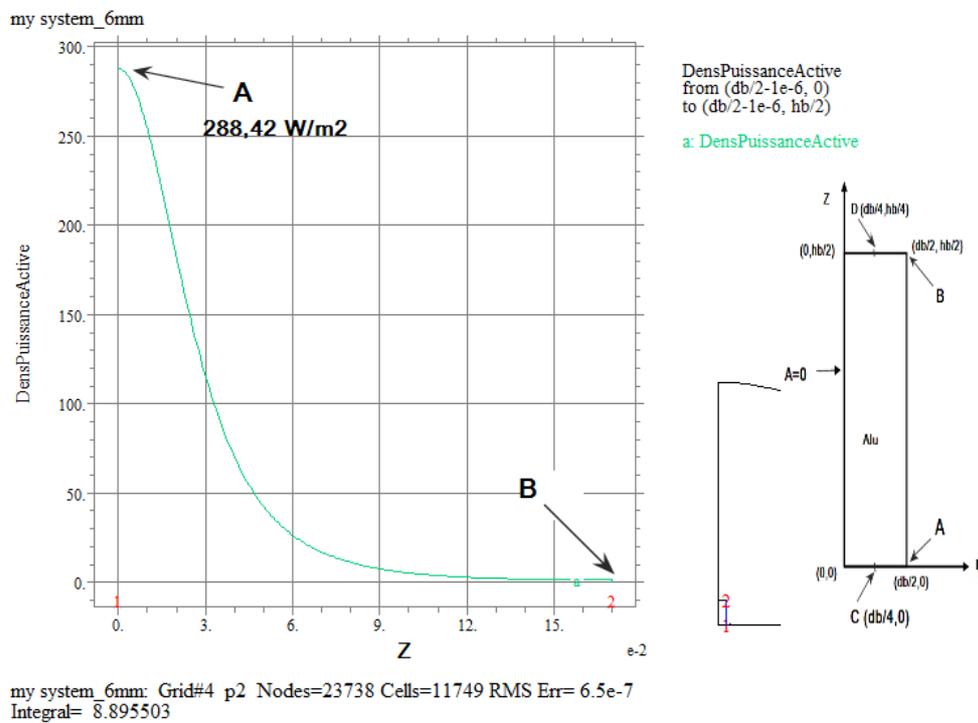


Figure 6.14. Variation de la densité de puissance spécifique entre les points A (288,42 W/m²) et le point B.

La puissance spécifique en A de valeur $288,42 \text{ W/m}^2$ est en totale conformité avec les résultats obtenus par [52] qui trouve une valeur égale à 300 W/m^2 (figure 6.1).

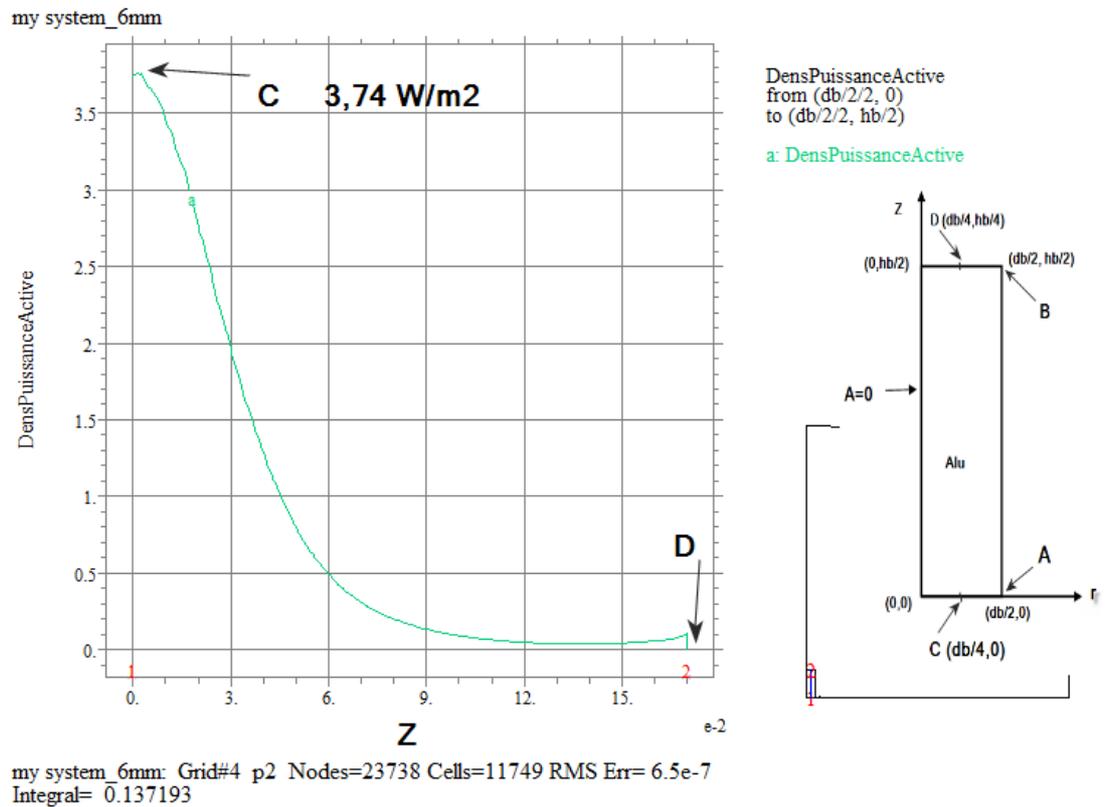


Figure 6.15. Variation de la densité de puissance spécifique entre les points C ($3,74 \text{ W/m}^2$) et le point D.

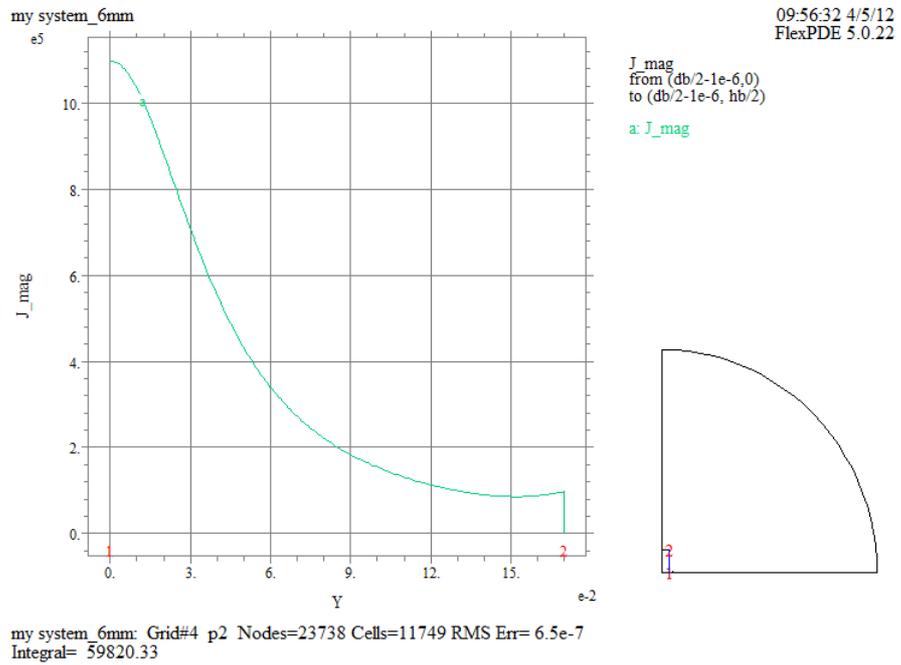


Figure 6.16. Variation de l'amplitude de la densité de courant dans la billette entre les points A et B

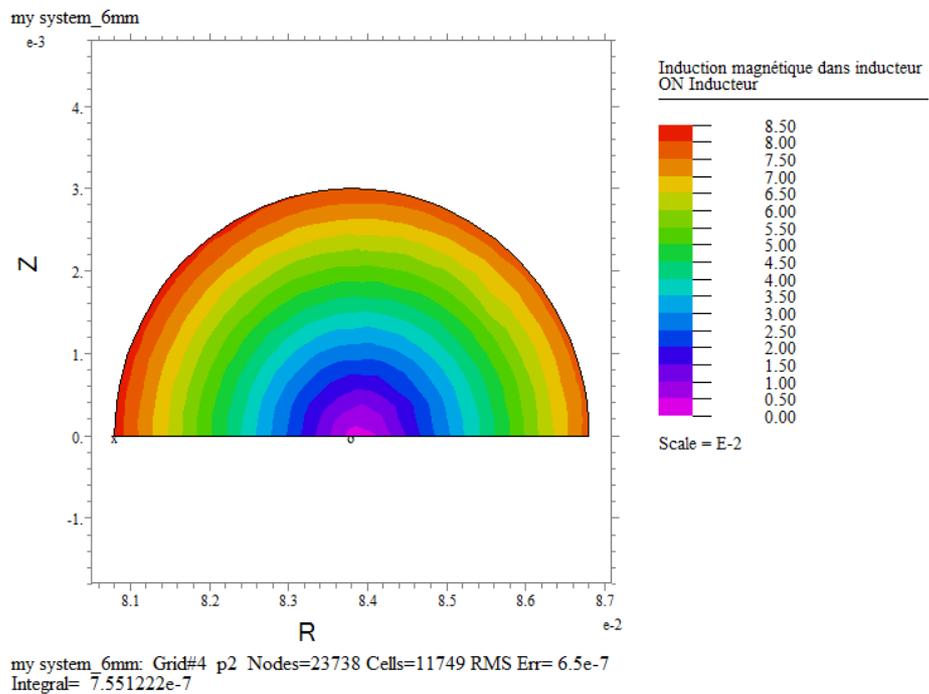


Figure 6.17. Induction magnétique dans l'inducteur

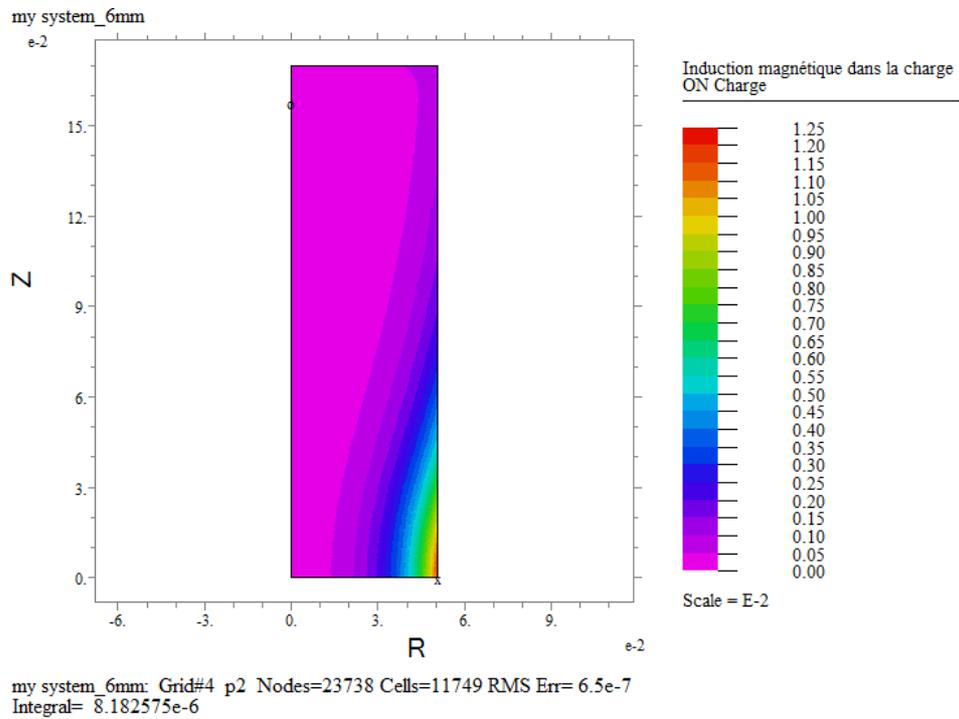


Figure 6.18. Induction magnétique dans la charge.

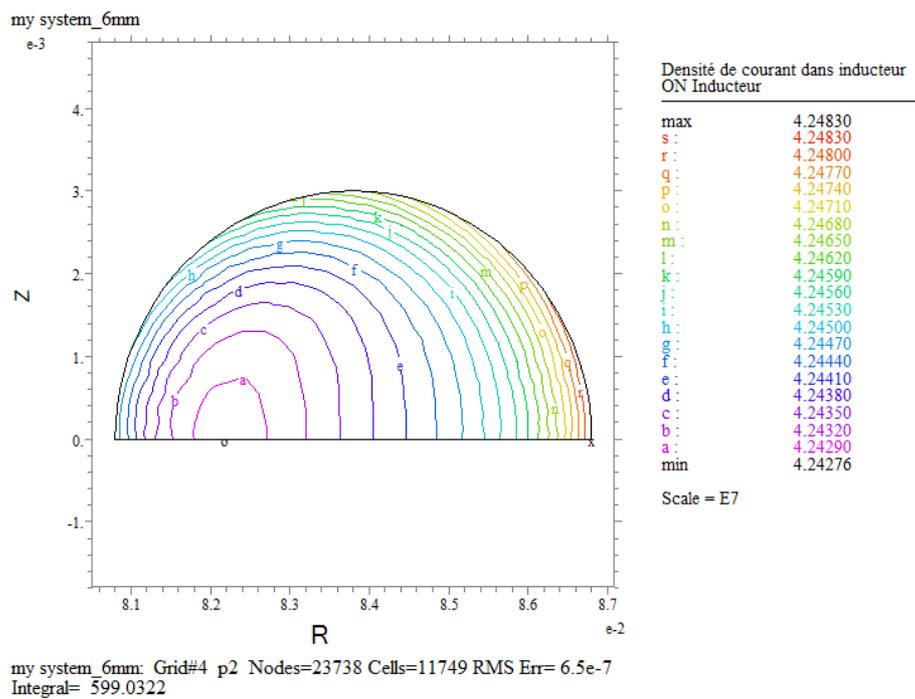
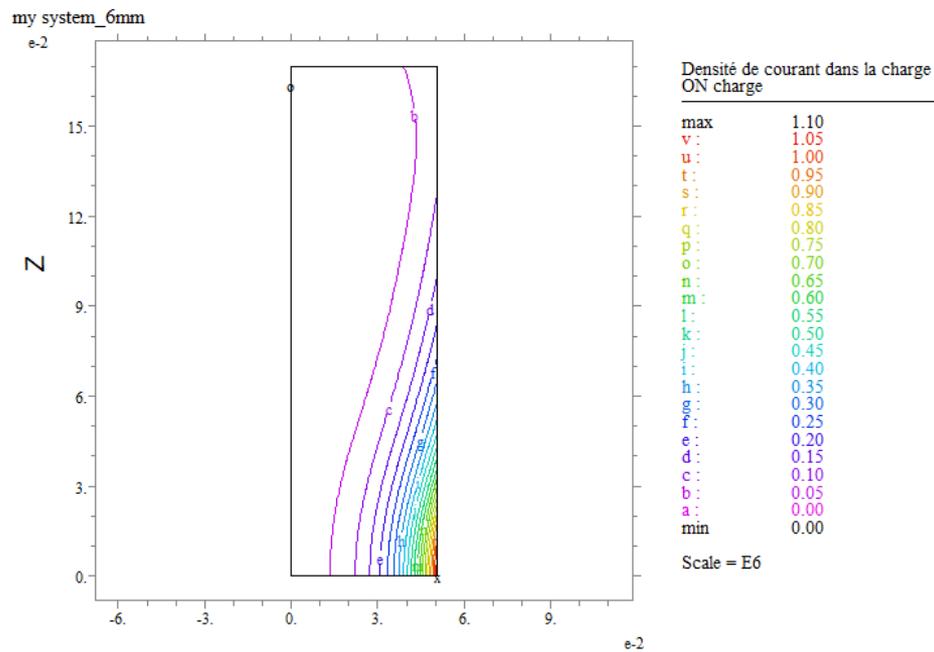


Figure 6.19. Isovaleurs de la densité de courant dans l'inducteur.



my system_6mm: Grid#4 p2 Nodes=23738 Cells=11749 RMS Err= 6.5e-7
Integral= 733.7114

Figure 6.20. Isovaleurs de la densité de courant dans la billette (charge)

SUMMARY

Itot_re= 599.9052
 Itot_im= -0.035031
 Itot= 599.9052
 Jb_re= 31191.18
 Jb_im= 62.07615
 gap= 0.030000
 Itotb_re= 269.3670
 Itotb_im= 0.536090
 Itotb= 269.3676
 DensPuissanceActiveMax= 288.4197
 A_magMax= 1.059428e-4

Figure 6.21. Valeurs des courants dans l'inducteur (Itot_re, Itot_im et Itot) et valeurs des densités de courants (Jb_re, Jb_im) et des courants (Itotb_re, Itotb_im, Itotb) dans la billette.

La figure 6.21 montre la valeur de la puissance spécifique (288,4197W/m²) en conformité avec la figure 6.1.

6.2.2. Solution analytique

Cette étude analytique a été entreprise pour valider l'analyse numérique précédente, mais surtout à cause de sa portée générale. En effet, la connaissance du potentiel vecteur magnétique créé par une spire inductrice peut être étendue, grâce au théorème de superposition, à un nombre quelconque de spires constituant une bobine inductrice de forme étudiée pour épouser la forme géométrique de la charge à chauffer. Ceci a une grande importance car cela permet de diminuer le gap (entrefer) entre l'inducteur et l'induit (charge), le rendement s'en trouvant augmenté. Cela permet également d'envoyer le maximum de l'énergie électromagnétique sur les parties de la charge à traiter thermiquement qui sont sélectionnées par le concepteur.

6.2.2.1. Etude de l'effet pelliculaire dans l'inducteur

L'inducteur est constitué par une seule spire cylindrique de diamètre $d_i = 6\text{mm}$ parcourue par un courant sinusoïdal de fréquence $f = 60\text{Hz}$ et d'intensité imposée $I_0 = 600\text{A}$.

Considérons un conducteur cylindrique en cuivre, figure 6.22, ayant les caractéristiques suivantes :

- $a = d_i / 2 = 3\text{mm}$, rayon, très petit devant la longueur du cylindre,
- $\mu = \mu_0$, perméabilité magnétique du cuivre
- $\sigma = 5.10^7\ \Omega^{-1}.m^{-1}$ conductivité électrique du cuivre
- ω : pulsation du courant I parcourant ce conducteur dans le sens longitudinal

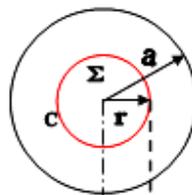


Figure 6. 22. Coupe transversale de la spire inductrice.

Dans ce paragraphe, nous étudions la répartition de la densité de courant J et partant celle du courant électrique I .

On se placera dans l'hypothèse des courants quasi-stationnaires. A partir des équations de Maxwell, l'équation différentielle aux dérivées partielles qui régit la distribution de la densité de courant dans un conducteur cylindrique de perméabilité magnétique μ et de conductivité électrique σ est:

$$\frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{J}}{\partial r} - \mu \sigma \frac{\partial \bar{J}}{\partial t} = 0 \quad (6.1)$$

Si, de plus, le courant $\bar{I} = \bar{I}_m \cdot e^{j\omega t}$ parcourant le conducteur est sinusoïdal, de pulsation ω , la densité de courant J est également sinusoïdale et s'écrira :

$$J(r) = \bar{J}(r) \cdot e^{j\omega t} \quad (6.2)$$

où $\bar{J}(r)$ est la densité de courant complexe et: $\frac{\partial \bar{J}(r)}{\partial t} = j \omega \bar{J}(r)$. L'équation différentielle

ci-dessus devient :

$$\frac{\partial^2 \bar{J}(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{J}(r)}{\partial r} - j \mu \omega \sigma \bar{J}(r) = 0 \quad (6.3)$$

$$\text{où } j = \sqrt{-1} = e^{j\frac{\pi}{2}} \quad (6.4).$$

$$\text{Posons : } \begin{cases} \delta^2 = \frac{2}{\mu \sigma \omega} \\ k^2 = \mu \sigma \omega = \frac{2}{\delta^2} \end{cases} \quad (6.5)$$

$$\text{Deux solutions sont possibles pour } k : \quad k = \pm \frac{\sqrt{2}}{\delta} \quad (6.6)$$

Nous rejetons la valeur négative de k car nous n'avons pas d'ondes réfléchies. Nous retenons seulement la valeur positive. L'équation différentielle (6.3) devient :

$$\frac{\partial^2 \bar{J}(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{J}(r)}{\partial r} - j \cdot k^2 \bar{J}(r) = 0 \quad (6.7)$$

L'équation ci-dessus est une équation différentielle de Bessel d'ordre zéro. La forme générale de l'équation différentielle de Bessel d'ordre ν est :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial y}{\partial z} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) y = 0 \quad (6.8)$$

Si on fait $\nu = 0$ et le changement de variable $z = k \cdot r$, on retrouve l'équation (6.7). La solution générale de cette équation est la somme des deux fonctions de Bessel d'ordre zéro de première espèce $J_0(kr)$ et de seconde espèce $Y_0(kr)$. Soit en notation complexe :

$$\bar{J}(r) = \bar{A} J_0(kr) + \bar{B} Y_0(kr) \quad (6.9)$$

$$\text{avec} \quad : \quad k = + \frac{\sqrt{2}}{\delta} \quad (6.10)$$

La détermination des constantes d'intégration \bar{A} et \bar{B} se fait à travers les conditions aux limites :

- Les fonctions de Bessel de seconde espèce $Y_0(kr)$ tendent vers moins l'infini quand leur argument tend vers zéro. De ce fait $\bar{B}=0$ pour conserver la nature finie des phénomènes physiques au voisinage de $r=0$.
- La constante \bar{A} est égale à la densité du courant \bar{J}_{axe} sur l'axe du cylindre. Mais, en général, c'est le courant total \bar{I}_0 à travers la section du conducteur qui est imposé. Cela nous permettra de calculer la valeur complexe \bar{J}_{axe} par rapport à \bar{I}_0 .

La densité de courant s'écrit finalement :

$$\bar{J}(r) = \bar{J}_{axe} \cdot J_0(kr\sqrt{-j}) \quad (6.11)$$

Faisons le changement de variable :

$$k \cdot r = \sqrt{2} \frac{r}{\delta} = r_0 \quad (6.12)$$

La densité de courant s'écrit :

$$\bar{J}(r_0) = \bar{J}_{axe} \cdot J_0(r_0 \sqrt{-j}) \quad (6.13)$$

Avec les données numériques déjà indiquées, nous traçons, figure 6.22, le module de la densité de courant réduite donné par la formule:

$$\left| \frac{\bar{J}(r_0)}{\bar{J}_{axe}} \right| = \left| J_0(r_0 \sqrt{-j}) \right| \quad (6.14)$$

Cette figure montre le refoulement du courant vers la périphérie de la spire.

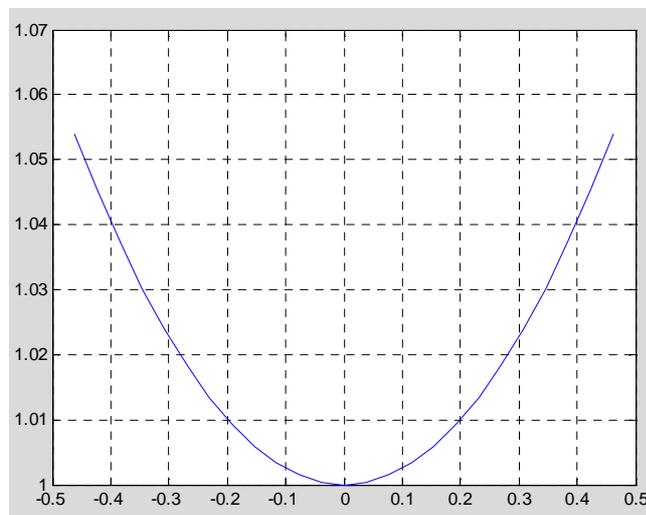


Figure 6.23. Densité de courant dans la spire inductrice selon formule $\left| \frac{\bar{J}(r_0)}{\bar{J}_{axe}} \right| = \left| J_0(r_0 \sqrt{-j}) \right|$

Calcul du courant I:

Le courant complexe \bar{I}_0 est donnée par l'intégrale:

$$\bar{I}_0 = \int_0^a \bar{J}(r) \cdot 2\pi r dr = \frac{2\pi}{k^2} \int_0^{ka} \bar{J}(r_0) \cdot r_0 dr_0 = \frac{2\pi \bar{J}_{axe}}{k^2} \int_0^{ka} J_0(r_0 \sqrt{-j}) \cdot r_0 dr_0 \quad (6.15)$$

Tout calcul fait:
$$\bar{I}_0 = \bar{J}_{axe} \cdot (28,2676 - j0,753423) \cdot 10^{-6} \quad (6.16)$$

Ce qui permet de calculer le module de \bar{J}_{axe} , sachant que le module de \bar{I}_0 est imposé et vaut

$$I_0 = 600 \text{ A}. \quad J_{axe} = 21,2181 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2$$

Le déphasage de \bar{J}_{axe} par rapport à \bar{I}_0 est : $26.6469 \cdot 10^{-3}$.

Ce qui donne pour \bar{J}_{axe} :

$$\bar{J}_{axe} = (21.2106 + j0,565.3307) \cdot 10^6 \quad (6.17)$$

et pour \bar{I}_0 :

$$\bar{I}_0 = 599.1481 + j31.9611 \quad (6.18)$$

Ainsi, le calcul analytique donne:

$$\begin{cases} I_{0_re} = 599,1481 \\ I_{0_im} = 31,9611 \\ I_0 = 600 \text{ A} \end{cases} \quad (6.19),$$

alors que le calcul numérique a donné:

$$\begin{cases} I_{0_re} = 599,9052 \\ I_{0_im} = -0.035031 \\ I_0 = 599,905201 \text{ A} \end{cases} \quad (6.20).$$

Les deux résultats sont très concordants, bien que les valeurs imaginaires ne soient pas égales.

- Calcul de la valeur moyenne de $\bar{J}(r_0)$:

La valeur moyenne de $\bar{J}(r_0)$ est donnée par:

$$\bar{J}_{moy} = 2 \frac{\bar{J}_{axe}}{ka} \cdot \int_0^{ka} J_0(r_0 \sqrt{-j}) \cdot dr_0 \quad (6.21),$$

dont le module est:

$$\bar{J}_{moy} = (42.3946 + j1.8841) \cdot 10^6 \quad (6.22)$$

Cette valeur est en accord avec celle donnée par flexPDE, figure 6.

6.2.2.2. Potentiel vecteur créé par une spire inductrice

Considérons la figure suivante:

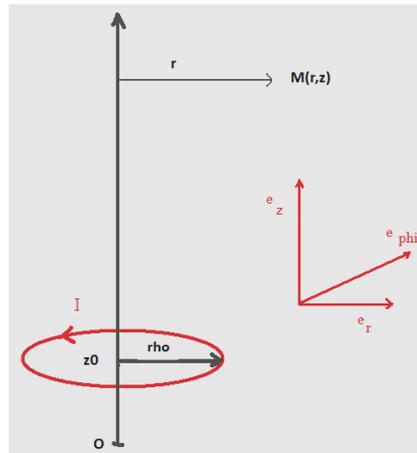


Figure 6.24: spire filiforme

La spire filiforme est parcourue par un courant sinusoidal $\bar{I} = \bar{I}_0 e^{j\omega t}$ de pulsation ω . Le potentiel vecteur produit par cette spire au point $M(r, z)$ ne dépend que de r et z et est donné par la formule [50], [70]:

$$\bar{A}_\varphi = \bar{A}_0 e^{j\omega t} g(r, z, \rho, z_0)$$

avec:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{A}_0 = A_{0_re} + jA_{0_im} = \frac{\mu_0}{2\pi} (I_{0_re} + jI_{0_im}) \\ I_{0_re} = 599,7872306 \\ I_{0_im} = -15,9774168 \\ g(r, z, \rho, z_0) = \sqrt{\frac{\rho}{mr}} [(2-m)K(m) - 2E(m)] \\ m = \frac{4\rho r}{(r+\rho)^2 + (z-z_0)^2} \end{array} \right. \quad (6.23),$$

où $K(m)$ et $E(m)$ sont les intégrales elliptiques complètes de première et de seconde espèce respectivement.

6.2.2.2.1. Aperçu sur les intégrales elliptiques:

L'intégrale elliptique complète de première espèce est définie [12], [16], [70], par:

$$m \in [0,1] , \quad K(m) = F\left(\frac{\pi}{2}, m\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-m \sin^2 \varphi}} d\varphi \quad (6.24)$$

Mais aussi par:

$$K(m) = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, m\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \text{hypergeom}\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], [1], m\right) \quad (6.25),$$

où $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ est une fonction hypergéométrique.

L'intégrale elliptique complète de seconde espèce est définie par:

$$E(m) = E\left(\frac{\pi}{2}, m\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-m \sin^2 \varphi} d\varphi \quad (6.26).$$

Mais aussi par:

$$E(m) = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, m\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \text{hypergeom}\left(\left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right], [1], m\right) \quad (6.27).$$

Les dérivées de $K(m)$ et $E(m)$ par rapport à m sont respectivement:

$$\frac{dK(m)}{dm} = \frac{\pi}{8} \cdot \text{hypergeom}([3/2, 3/2], [2], m) \quad (6.28),$$

$$\frac{dE(m)}{dm} = -\frac{\pi}{8} \cdot \text{hypergeom}([1/2, 3/2], [2], m) \quad (6.29).$$

- Représentation graphique de $K(m)$ et de $E(m)$:

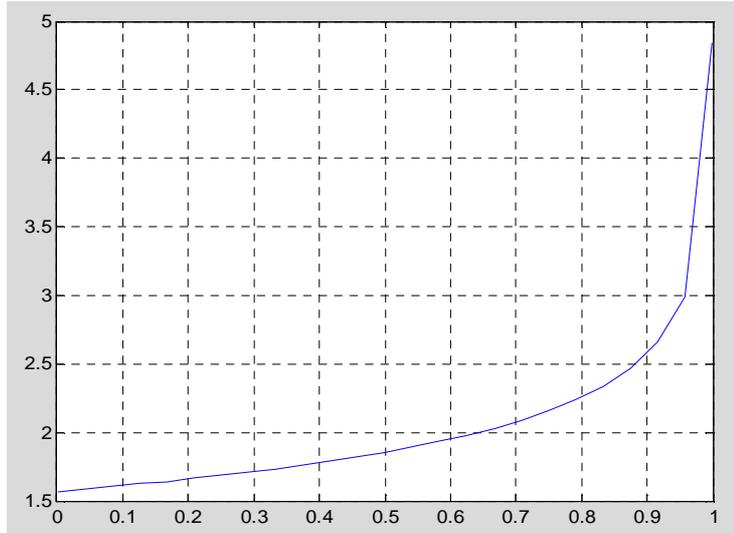


Figure 6.25 : $K(m) = f(m)$

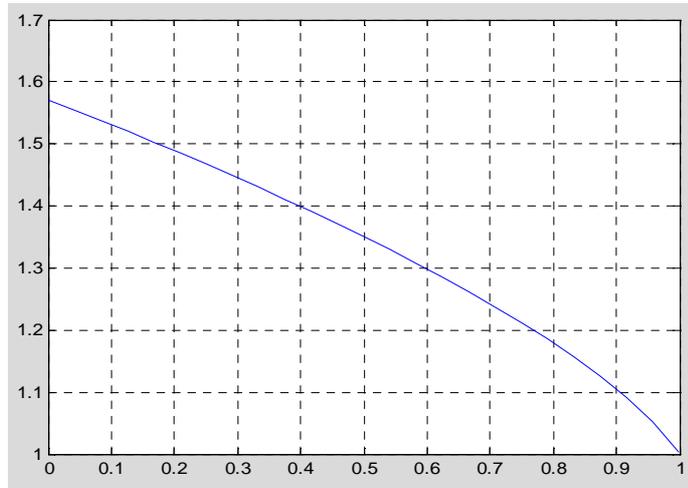
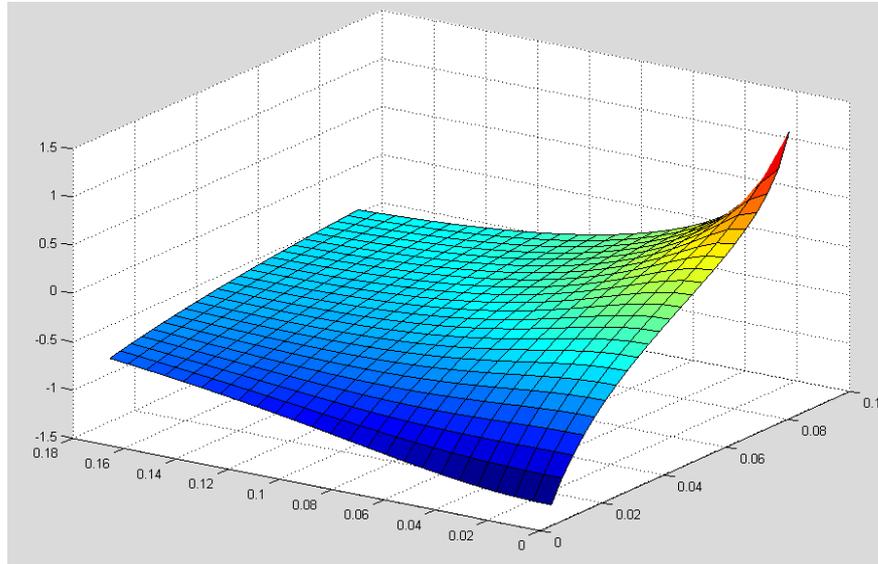


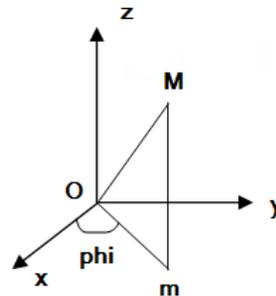
Figure 6.26 : $E(m) = f(m)$

Variation de g avec r et z :Figure 6.27. Variation de g avec r et z .

6.2.2.2.2. Calcul du vecteur de Poynting le long de l'arête AB de la billette

Les données géométriques et physiques sont les mêmes que dans l'étude numérique du paragraphe 6.2.1

La configuration géométrique du dispositif à étudier incite à l'utilisation des coordonnées cylindriques: $r = Om$, $\varphi = (Ox, Om)$, $z = mM$



L'induction magnétique étant calculée à partir de la relation $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$, il est nécessaire de préciser les composantes de \vec{A} :

$$\begin{cases} A_r = (\text{rot} \vec{A})_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \\ A_\varphi = (\text{rot} \vec{A})_\varphi = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ A_z = (\text{rot} \vec{A})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \end{cases} \quad (6.30)$$

Le potentiel vecteur a pour composantes :

$$\vec{A} = (A_r \ A_\varphi \ A_z) = (0 \ A_\varphi \ 0) = (0 \ A \ 0) \quad (6.31).$$

On en déduit les composantes de \vec{B} :

$$\begin{cases} B_r = -\frac{\partial A}{\partial z} \\ B_\varphi = 0 \\ B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A) = \left(\frac{A}{r} + \frac{\partial A}{\partial r} \right) \end{cases} \quad (6.32).$$

Les composantes du vecteur champ électrique \vec{E} et partant, celles du vecteur densité de courant \vec{J} sont alors:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \wedge \vec{B} \Rightarrow \begin{cases} J_r = \sigma E_r = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \right) \\ J_\varphi = \sigma E_\varphi = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) \\ J_z = \sigma E_z = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} \right) \end{cases} \quad (6.33).$$

Finalement, les composantes de \vec{J} et partant de \vec{E} sont :

$$\vec{J} = \begin{cases} J_r = \sigma E_r = 0 \\ J_\varphi = \sigma E_\varphi = -\frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} - \frac{A}{r^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right) \\ J_z = \sigma E_z = 0 \end{cases} \quad (6.34).$$

Calcul du vecteur de Poynting:

La densité surfacique de puissance ou puissance spécifique en W / m^2 se calcule à travers le vecteur de Poynting qui est défini par la relation:

$$\vec{P} = \vec{E} \wedge \vec{H} = \frac{\vec{J}}{\sigma} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad (6.35).$$

Le champ électrique \vec{E} est défini aussi par la jauge de Lorentz :

$$\vec{E} = -\underbrace{\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}_{\text{Courant induit dans la billette}} - \underbrace{\vec{\nabla} V}_{\text{Courant source du à l'inducteur}} \quad (6.36).$$

Dans la charge (billette), seul le courant induit existe:

$$\vec{E} = -\underbrace{\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}_{\text{Courant induit dans la billette}} = -j\omega \vec{A} = \frac{\vec{J}}{\sigma} \quad (6.37).$$

D'où on déduit:

$$\begin{cases} \vec{J} = -j\sigma\omega \vec{A} = -j\sigma\omega(0, \vec{A}, 0) = (0, -j\sigma\omega \cdot \vec{A}, 0) \\ \vec{A} = A_{re} + jA_{im} \end{cases} \quad (6.38).$$

Par ailleurs, l'induction magnétique \vec{B} est donnée par:

$$\vec{B} = \left(-\frac{\partial A}{\partial z}, 0, \frac{A}{r} + \frac{\partial A}{\partial r} \right) \quad (6.39).$$

Finalement le vecteur de poynting est calculé avec MATLAB à partir de la formule:

$$\vec{P} = \vec{E} \wedge \vec{H} = \frac{\vec{J}}{\sigma} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad (6.40)$$

• **Calcul des dérivées:**

Le calcul de \vec{P} nécessite le calcul des dérivées suivantes: $\frac{\partial \bar{A}}{\partial r}$ et $\frac{\partial \bar{A}}{\partial z}$ et donc des dérivées

$\frac{\partial g(r, z, \rho, z_0)}{\partial r}$ et $\frac{\partial g(r, z, \rho, z_0)}{\partial z}$. Ce calcul passe par le calcul des dérivées qui vont suivre.

Dans le but de simplifier les écritures, nous réécrivons $g(r, z, \rho, z_0)$ sous la forme:

$$g(r, z, \rho, z_0) = \underbrace{\sqrt{\frac{\rho}{m \cdot r}}}_{MR} \cdot \left(\underbrace{2(K(m) - E(m)) - m \cdot K(m)}_U \right) \quad (6.41).$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{A}}{\partial z} = \bar{A}_0 \cdot \frac{\partial g(r, z, \rho, z_0)}{\partial z} \\ \frac{\partial \bar{A}}{\partial r} = \bar{A}_0 \cdot \frac{\partial g(r, z, \rho, z_0)}{\partial r} \\ \bar{A}_0 = \frac{\mu_0 \bar{I}_0}{2\pi} \end{array} \right. \quad (6.42).$$

Les dérivées à calculer sont alors:

$$\left\{ \begin{array}{l} U = 2(K(m) - E(m)) - m \cdot K(m) \\ \frac{\partial U}{\partial m} = (2 - m) \cdot \frac{\partial K(m)}{\partial m} - K(m) - 2 \frac{\partial E(m)}{\partial m} \\ \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial m}{\partial r} \left((2 - m) \cdot \frac{\partial K(m)}{\partial m} - K(m) - 2 \frac{\partial E(m)}{\partial m} \right) \end{array} \right. \quad (6.43)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial m}{\partial z} \left((2 - m) \cdot \frac{\partial K(m)}{\partial m} - K(m) - 2 \frac{\partial E(m)}{\partial m} \right) \quad (6.44).$$

$$\frac{\partial m}{\partial r}, \quad \frac{\partial m}{\partial z} \quad (6.45)$$

$$\frac{\partial K(m)}{\partial m}, \quad \frac{\partial E(m)}{\partial m} \quad (6.46)$$

$$\frac{\partial(MR)}{\partial z} = \frac{\partial MR}{\partial m} \cdot \frac{\partial m}{\partial z} \quad (6.47).$$

$$\frac{\partial MR}{\partial m} = - \frac{MR}{2m} \quad (6.48).$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial(MR)}{\partial z} \cdot U + MR \cdot \frac{\partial U}{\partial z} \quad (6.49).$$

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial m}{\partial r} \cdot \left(\frac{\partial(MR)}{\partial m} \cdot U + MR \cdot \frac{\partial U}{\partial m} \right) \quad (6.50).$$

Toutes ces dérivées ont été calculées symboliquement (Symbolic Math Toolbox) puis numériquement avec MATLAB et avec les mêmes données géométriques et physiques que celles uti-

lisées dans l'étude numérique du paragraphe 6.2.2. La puissance spécifique obtenue au point A vaut 310 W/m^2 et est en parfaite accord avec celle obtenue dans l'étude numérique (point A de la figure 6.14).

Conclusion:

L'étude numérique puis analytique du dispositif constitué d'une billette et d'un inducteur formé d'une seule spire a été entreprise et validée par les deux méthodes. Ce cas de portée générale peut être appliquée à des configurations géométriques compliquées à la seule condition qu'elles soient de symétrie axisymétrique.

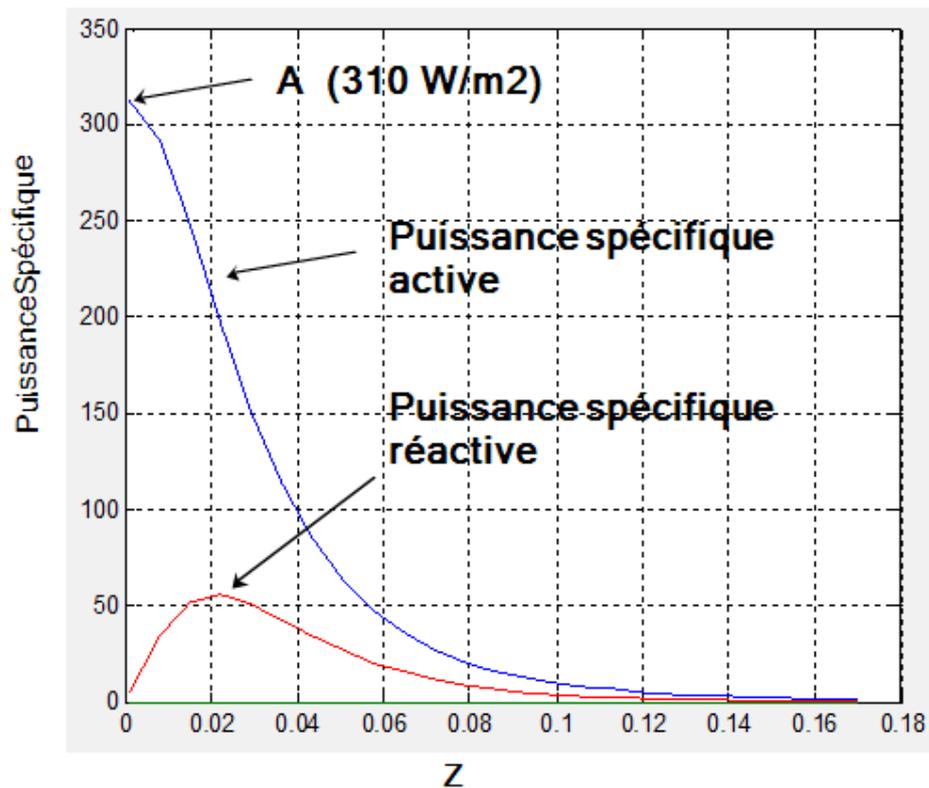


Figure 6.28. Puissance spécifique active et réactive le long du segment AB de la billette.

6.3. Etude électromagnétique et thermique d'un dispositif constitué de 11 spires

Nous considérons le même dispositif que dans le paragraphe 6.2.1. Mais l'inducteur est constitué maintenant par 11 spires identiques à la spire de ce même paragraphe. Il est parcouru par un courant de $11 \times 600 = 6600 \text{ A}$. Ces onze spires sont assimilées à une seule spire de largeur 6 mm et de hauteur 77 mm [38]. Le but de ce paragraphe est de retrouver la même puissance spécifique au point A comme indiquées sur la figure 6.30 selon [52] et la figure 6.31 selon [38].

6.3.1. Etude électromagnétique:

Les conditions aux limites électromagnétiques sur la billette sont les mêmes que dans le paragraphe 6.2.1. Celles relatives à l'inducteur sont indiquées dans la figure 6.29.

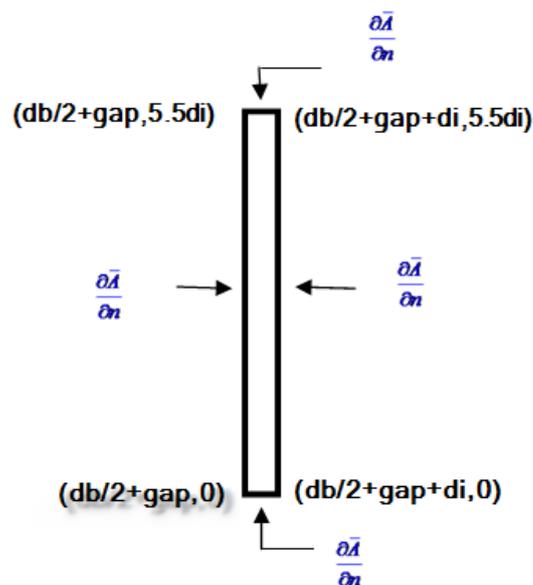


Figure 6.29. Détails de l'inducteur et conditions aux limites électromagnétiques.

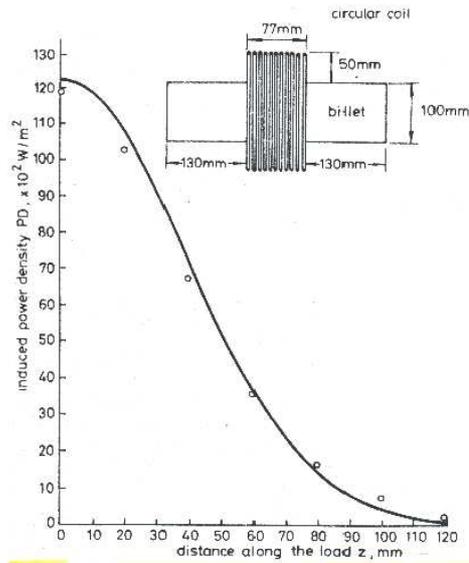


Fig. 12 Power-density distribution along the aluminium cylinder due to 11 turns coil at airgap of 50 mm, coil pitch 7.1 mm and current of 600A
 Centre of coil mounted at centre of cylinder
 — prediction by superposition
 ○ practical readings

Figure 6.30. Puissance spécifique selon [52].

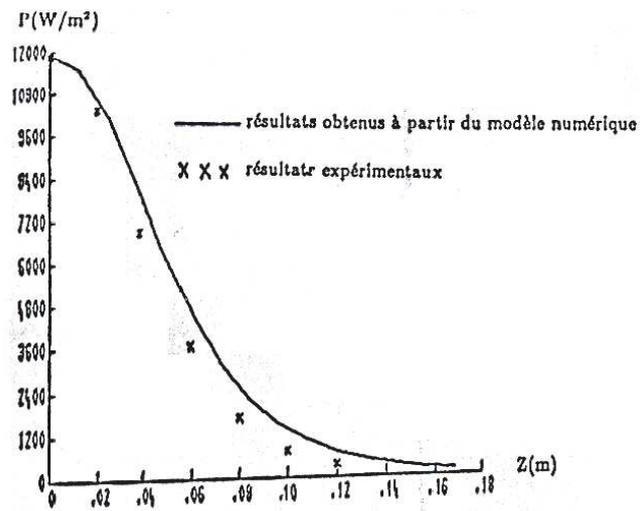


Figure 4.5 Distribution de la densité de puissance dissipée sur la surface de la billette en aluminium

Figure 6.31. Puissance spécifique selon [38] pour le même dispositif que [52].

SUMMARY

Itot_re= 5070.407
 Itot_im= 4403.801
 Itot= 6715.839
 Jb_re= 250379.1
 Jb_im= 220620.2
 Itotb_re= 2109.444
 Itotb_im= 1858.725
 Itotb= 2811.514
 PuissanceSpecifiqueMax= 12800.21
 PuissanceSpecifiqueMin= 399.3321
 PuissanceVolumiqueMax= 2031394.
 PuissanceVolumiqueMin= 94856.91

Figure 6 .32. Courants dans l'inducteur et courants, densités de courants, puissances dans la billette

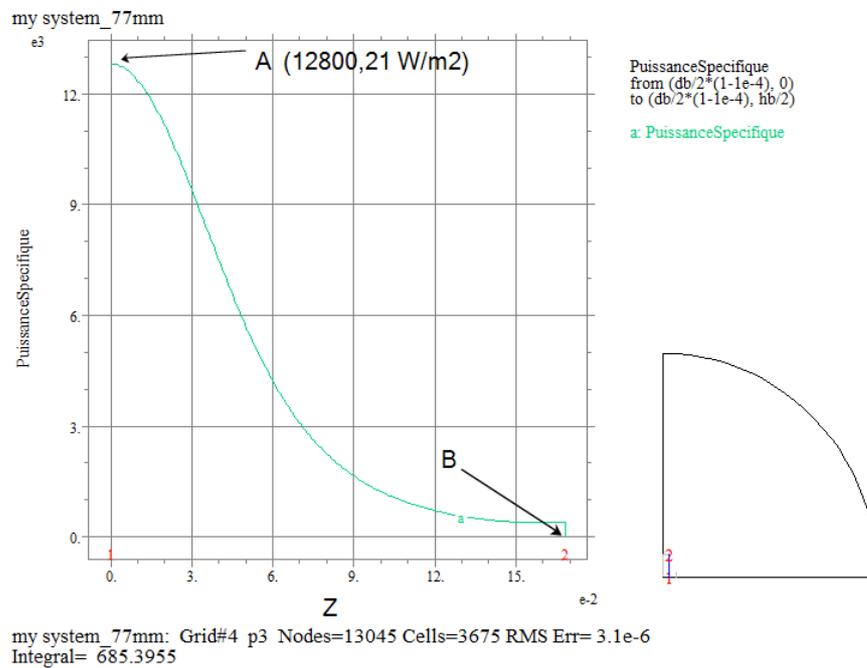


Figure 6.33. Variation de la densité de puissance spécifique entre le point A (12800,21 W/m²) et le point B.

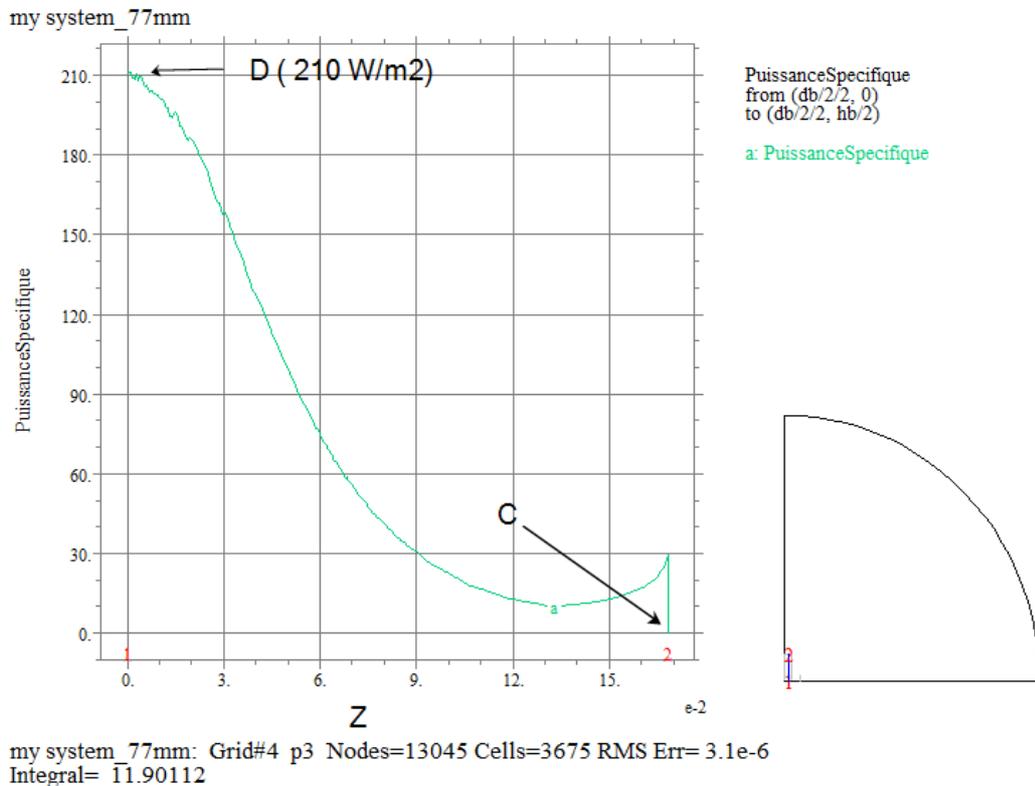


Figure 6.34. Variation de la densité de puissance spécifique entre le point D (210 W/m²) et le point C qui se trouvent sur l'axe vertical de la billette.

Conclusion

Les résultats concernant la détermination de la puissance spécifique dans notre dispositif concordent avec les résultats trouvés par [52] et [38].

6.3.2. Etude thermique:

Cette étude se propose de trouver la distribution du champ thermique dans la billette d'Aluminium quand le courant dans l'inducteur vaut 600A. Les conditions aux limites thermiques sont celles introduites dans le chapitre III, avec les paramètres suivants [38]:

$$\left\{ \begin{array}{l} h_c = 30 \text{ W / m}^2 \cdot \text{°C} \\ \sigma = 5.76 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4} \\ \varepsilon = 0.3 \\ h_r = \varepsilon \cdot \sigma = 1.7 \cdot 10^{-8} \end{array} \right. \quad (6.51)$$

où ε est l'émissivité, σ est la constante de Stefan-Boltzmann, h_c le coefficient convectif et h_r le coefficient radiatif.

Avec un courant total dans la billette de 254,9011 A (figure 6.35), il s'établit un champ de température en régime permanent presque uniforme dans la billette (figure 6.36). Les températures sont données en °C et varient entre un maximum de 188,626 °C et un minimum de 188,411 °C.

my system_77mm_temp

SUMMARY

```

Itot_re= 461.3021
Itot_im= 400.2439
Itot= 610.7330
Jb_re= 22706.93
Jb_im= 19994.49
gap= 0.050000
Itotb_re= 191.3059
Itotb_im= 168.4536
Itotb= 254.9011

```

Figure 6.35. Courants dans l'inducteur, courants et densités de courants dans la billette.

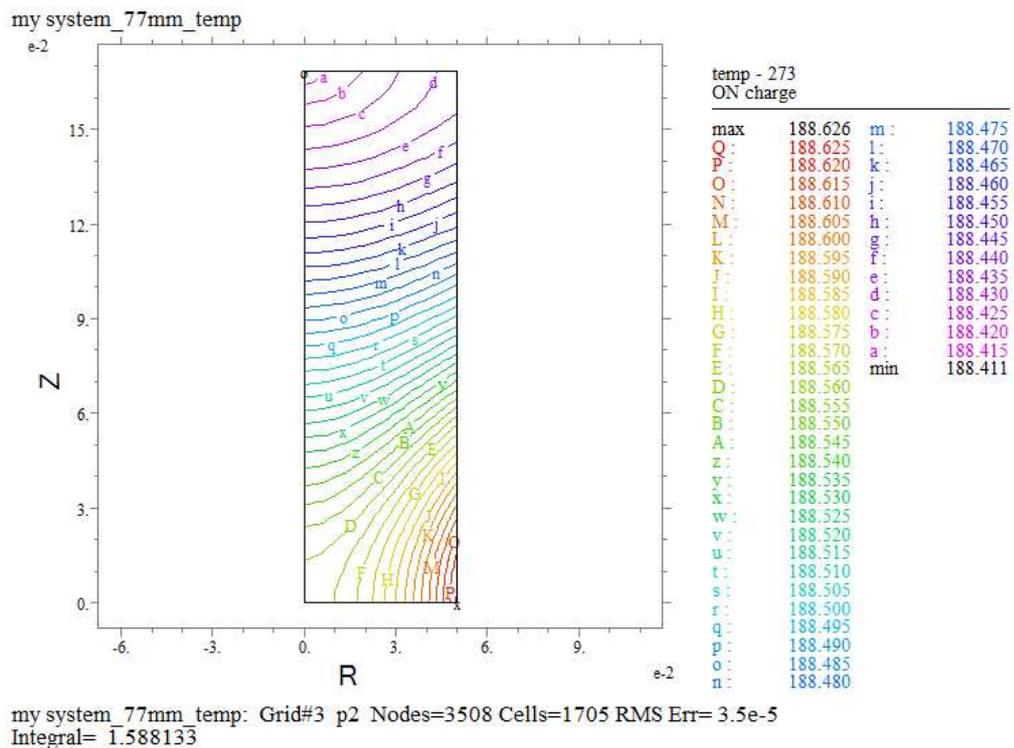


Figure 6.36. Isothermes dans la billette.

Conclusion

Dans ce chapitre, une première étude numérique puis analytique concernant un premier dispositif constitué d'une billette et d'une spire unique a été entreprise. Elle a permis de vérifier la validité des résultats obtenus. L'étude analytique a une grande importance car elle est généralisable au cas de plusieurs spires et à une forme géométrique de charge pourvu que le système présente une configuration axisymétrique.

Une deuxième étude numérique a concerné la même billette et un inducteur constitué de 11 spires. Les résultats obtenus corroborent ceux obtenus par ailleurs [52], [38].

CHAPITRE VII

APPLICATIONS A UN MATERIAU

MAGNETIQUE

7.1.	Introduction	VII-2
7.2.	Étude de la billette à $T=298K$,	VII-4
7.3.	Étude de la billette à $T= 573K$,	VII-10
7.4.	Étude de la billette à $T= 933K$,	VII-15
7.5.	Étude de la billette à $T =1042,95K$	VII-21
7.6.	Étude de la billette à $T>TC$	VII-27
7.7.	Récapitulatif	VII-33
7.8.	Conclusion	VII-36

7.1. Introduction

Dans ce chapitre nous allons étudier l'influence de la température sur la perméabilité relative du fer pur en nous basant sur les modélisations introduites au chapitre IV. Cette influence se traduit par des variations importantes sur les performances du dispositif étudié, en particulier la puissance spécifique en W/m^2 et la densité de puissance volumique en W/m^3 . Pour cela, nous avons choisi 4 températures d'étude comme le montre la figure 7.1. Mais, à ces 4 températures s'ajoute une étude comparative faite à une température supérieure à la température de Curie du fer pour laquelle la perméabilité relative vaut 1.

- La première température vaut 298 K et correspond à la température ambiante de 25°C. A cette température correspond une aimantation de saturation réduite $m_s = 2,206165410$.
- La deuxième température est de 573 K (300°C) et se trouve au milieu de la courbe (figure 7.1) donnant l'aimantation de saturation réduite en fonction de la température. Il lui correspond une aimantation de saturation réduite $m_s = 2.011442321$.
- La troisième température est de 933 K (660°C) et se trouve aussi au milieu de la courbe (figure 7.1). Il lui correspond une aimantation de saturation réduite $m_s = 1,122290936$.
- La quatrième température d'étude vaut 1042,95 K (769,95 °C) et est très voisine de la température de Curie du fer pur qui vaut 1043 K (770°C). Il lui correspond une aimantation de saturation réduite $m_s = 2.399170308 \cdot 10^{-2}$.

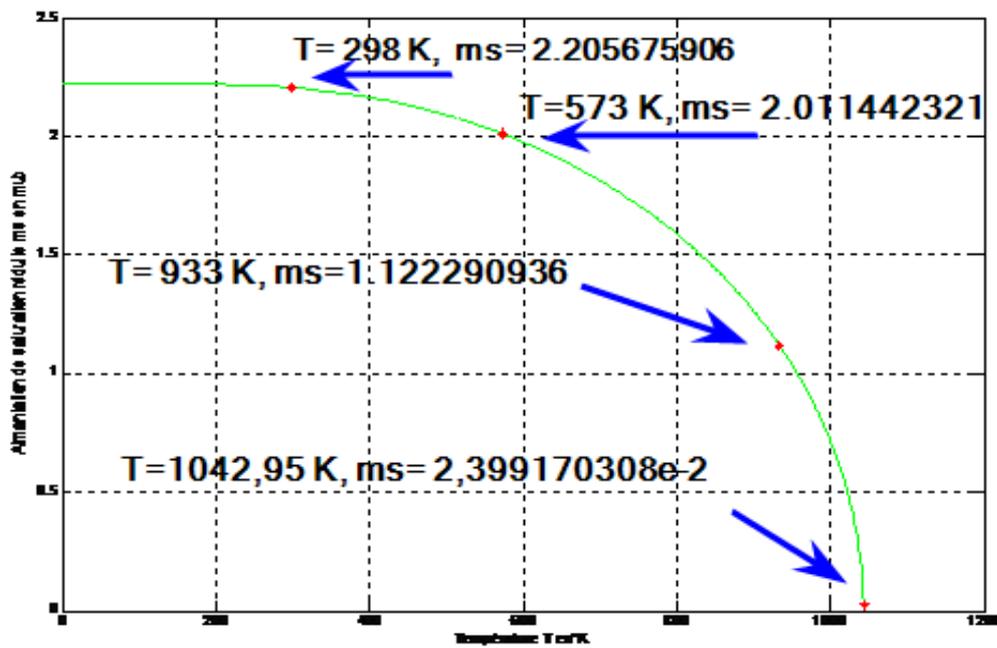


Figure 7.1. Les quatre températures d'étude sur la courbe $m_s = f(T)$.

Le dispositif a la même géométrie qu'au chapitre VI. Le courant dans l'inducteur vaut 6600 Ampères et sa fréquence est 60 Hz. La billette est maintenant constituée de fer et la figure 7.2 montre les points A, B, C, D importants pour l'analyse numérique à effectuer.

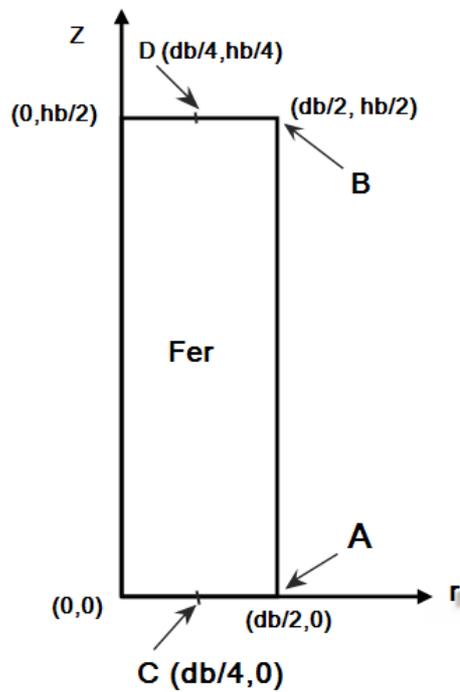


Figure 7.2. Billette en fer

Tous les calculs sont menés avec le potentiel vecteur magnétique, les autres grandeurs physiques en découlent par les équations de passage établies aux chapitres II et VI.

Les équations différentielles couplées régissant les parties réel A_{re} et imaginaire A_{im} du potentiel vecteur sont:

$$\begin{cases} A_{re} : \operatorname{div} \left[\frac{1}{\mu_0 \cdot \mu_r} \cdot \operatorname{grad} (A_{re}) \right] + \omega \sigma \cdot A_{im} + n \cdot Js_{re} = 0 \\ A_{im} : \operatorname{div} \left[\frac{1}{\mu_0 \cdot \mu_r} \cdot \operatorname{grad} (A_{im}) \right] + \omega \sigma \cdot A_{re} + n \cdot Js_{im} = 0 \end{cases} \quad (7.1)$$

n est un paramètre qui vaut 1 dans l'inducteur et 0 dans la billette. Il dénote la présence ($n=1$) du courant source ou son absence ($n=0$).

Js_{re} et Js_{im} sont respectivement les parties réelle et imaginaire de la densité de courant source dans l'inducteur.

μ_r est la perméabilité relative qui prendra successivement les valeurs μ_{r298} , μ_{r573} , μ_{r933} , $\mu_{r104295}$ calculées pour les températures 298K (25°C), 573K (300°C), 933K (660°C), 1042,95K (769,95°C)

7.2. Étude de la billette à $T=298K$, $m_s = 2,206165410$

La perméabilité relative est approximée en fonction de l'induction magnétique B à l'aide de MATLAB (Curve Fitting Tool, cftool) par une somme de fonctions sinus avec un coefficient de corrélation $R^2 = 1$ (Goodness of fit: R-square: 1).

$$\begin{aligned} \mu_{r298} &= a_1 \sin(b_1 \cdot B + c_1) + a_2 \sin(b_2 \cdot B + c_2) + a_3 \sin(b_3 \cdot B + c_3) \\ a_1 &= 1,965 \cdot 10^5 & b_1 &= 22,7 & c_1 &= 0,5779 \\ a_2 &= 1,145 \cdot 10^5 & b_2 &= 43,98 & c_2 &= 2,058 \\ a_3 &= 2,66 \cdot 10^4 & b_3 &= 62,64 & c_3 &= 3,835 \end{aligned} \quad (7.2)$$

Cette perméabilité est représentée figure 7.3.

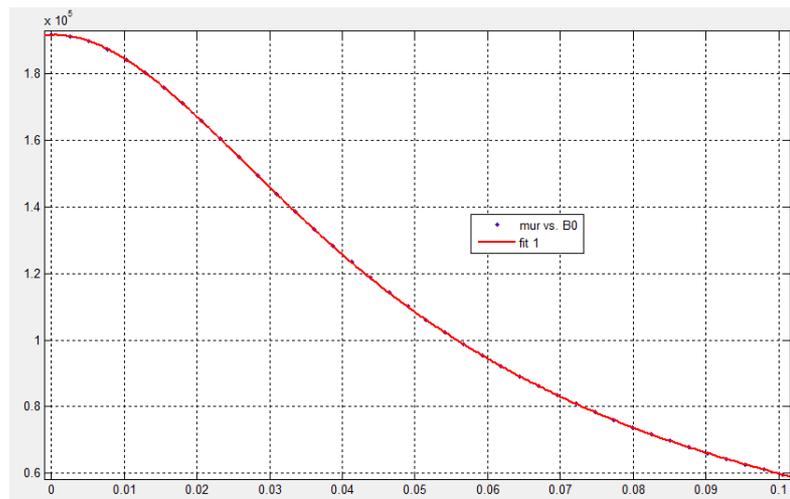


Figure 7.3. $\mu_{r298} = f(B)$. En continu: formule (7.2).

Les calculs ont été faits sur un microordinateur personnel Intel Core 2 Duo CPU T5450 @1.66 Ghz, 2 GB RAM. Les résultats sont donnés pour chaque température d'étude à travers 3 tableaux qui indiquent les paramètres du maillage, certaines données physiques de l'inducteur et de la billette qui constitue la charge.

SUMMARY

```

Itot_re= 1844.997
Itot_im= 3642.495
Itot= 4083.110
Jb_re= -4001.266
Jb_im= 14572.19
gap= 0.050000
Itotb_re= -33.71067
Itotb_im= 122.7707
Itotb= 127.3148
PuissanceSpécifiqueMax = 3598.883
PuissanceSpécifiqueMin = 90.69106

```

Figure 7.4. Résumé des grandeurs physiques de l'inducteur et de la charge.

Maillage				
CPU Time	Grid	Nodes	Cells	Unknowns
1h 48 mn 31s	11	154600	77245	309204

Inducteur		
Courant total réel Itot_re	Courant total imaginaire Itot_im	Courant total Itot
1844,997 A	3642,495 A	4083,11 A

Billette							
Courant réel Itotb_re A	Courant imaginaire Itotb_im A	Courant total Itotb A	Densité de courant réelle Jb_re A/m ²	Densité de courant imaginaire Jb_im A/m ²	Puissance spécifique En A W/m ²	Puissance spécifique En B W/m ²	Puissance volumique en A W/m ³
-33,71	122,77A	127,3148	-4001,27	14572,19	3598,883	90,69	21,5.40 ⁷

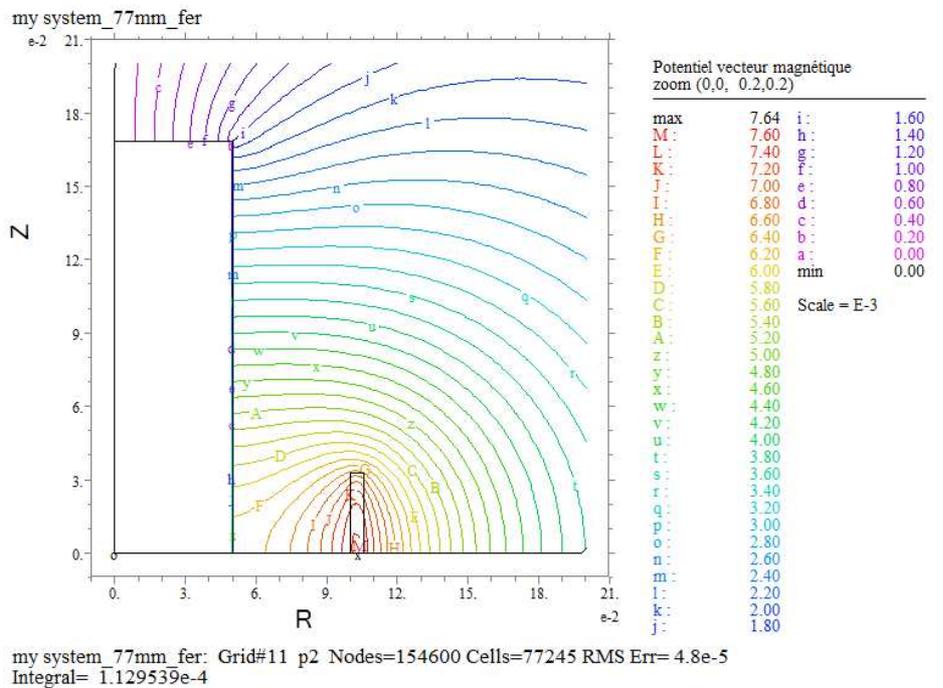


Figure 7.5. Distribution du potentiel vecteur dans l'inducteur et la billette (Zoom)

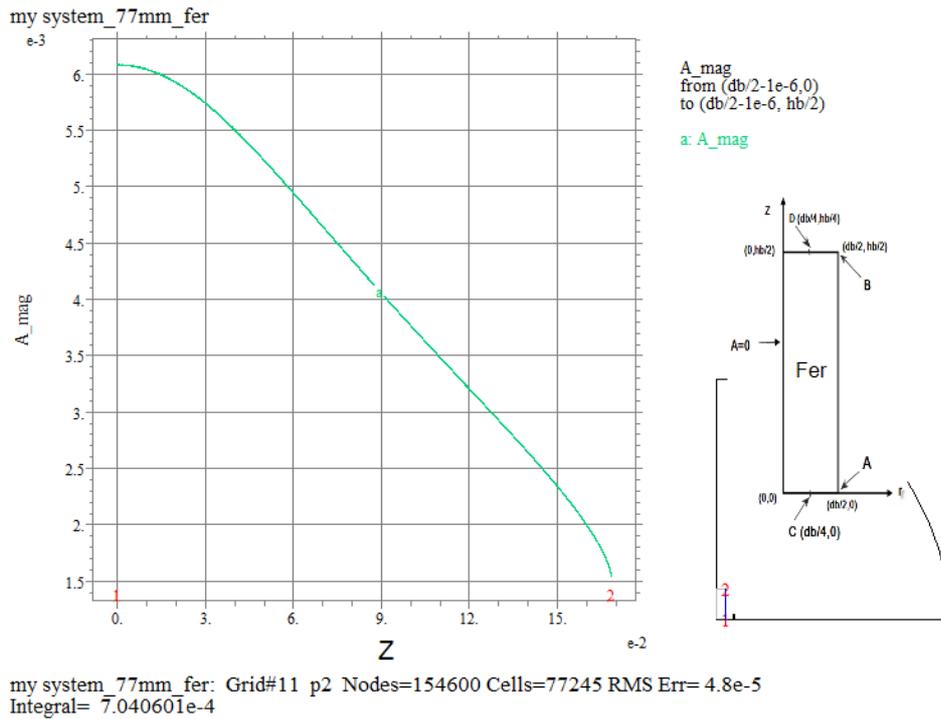


Figure 7.6. Amplitude du potentiel vecteur le long du segment AB de la billette (1→2).

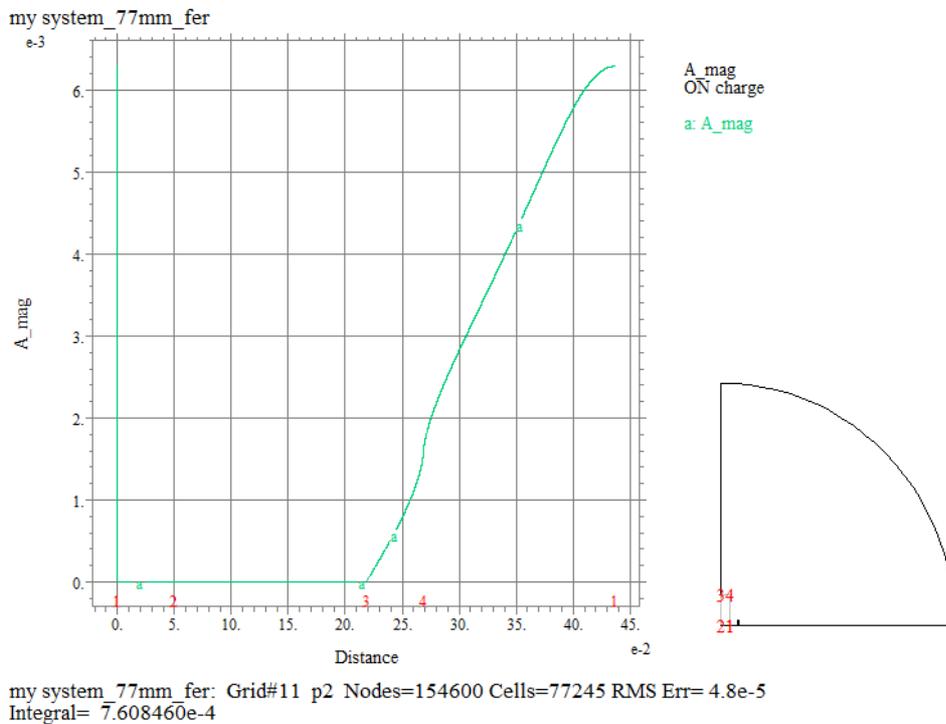


Figure 7.7. Amplitude du potentiel vecteur le long de la périphérie de la billette (1→2→3→4→1).

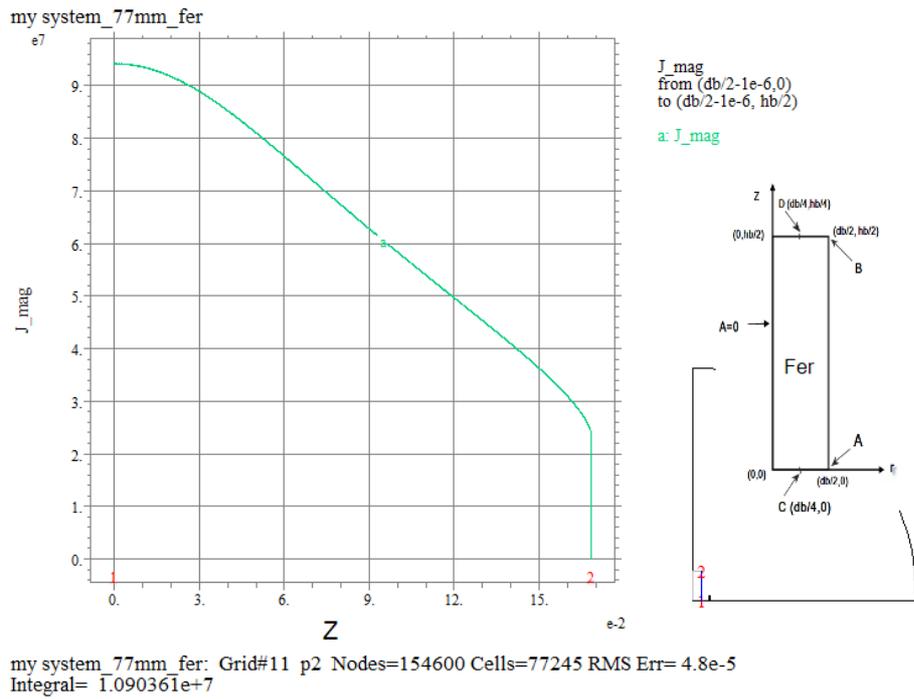


Figure 7.8. Amplitude de la densité de courant le long du segment AB de la billette (1→2).

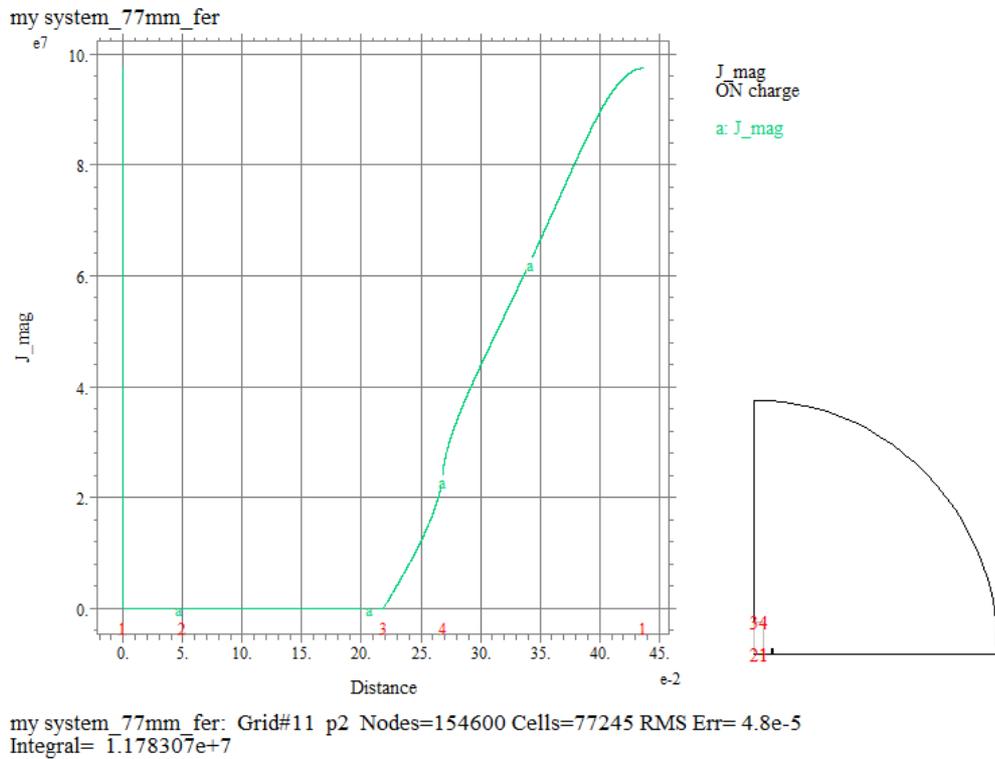


Figure 7.9. Amplitude de la densité de courant le long de la périphérie de la billette (1→2→3→4→1).

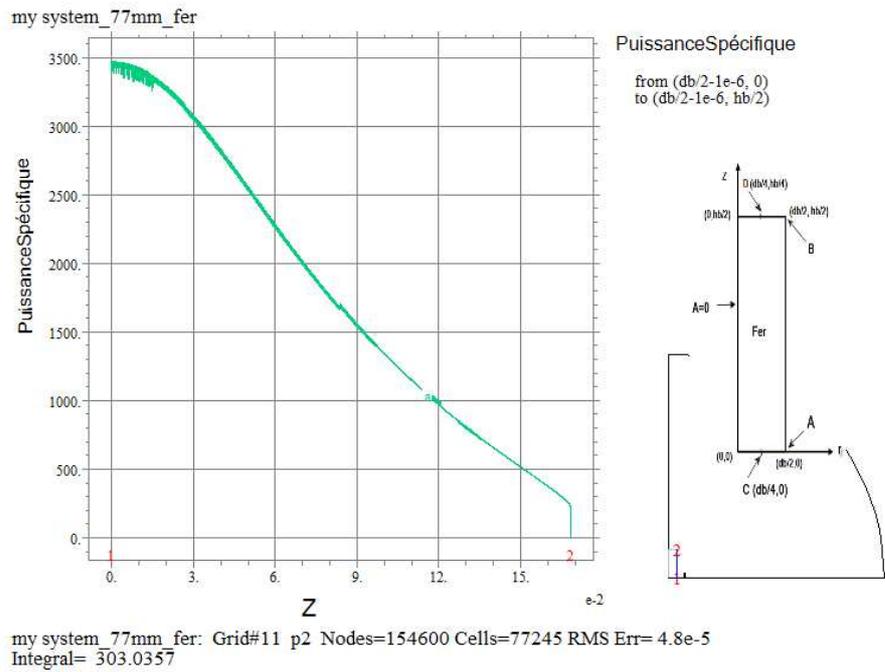


Figure 7. 10. Puissance spécifique le long du segment AB de la billette (1→2).

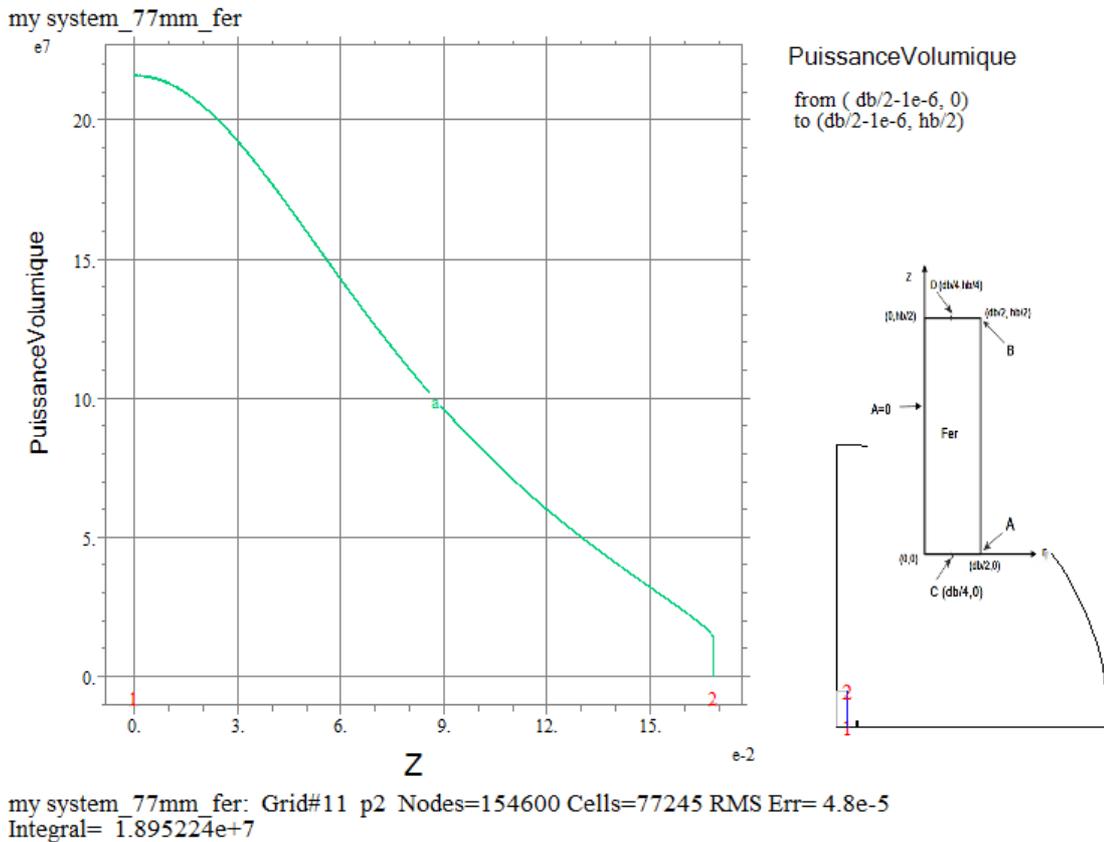


Figure 7. 11. Puissance volumique le long du segment AB de la billette (1→2).

7.3. Étude de la billette à T= 573 K, $m_s = 2.011442321$

La perméabilité relative est approximée en fonction de l'induction magnétique B à l'aide de MATLAB (Curve Fitting Tool, cftool) par une représentation Fourier (General model Fourier2) avec un coefficient de corrélation $R^2 = 1$ (Goodness of fit: R-square: 1).

$$\mu_{r573} = a_0 + a_1 \cdot \cos(\omega B) + b_1 \cdot \sin(\omega B) + a_2 \cdot \cos(2\omega B) + b_2 \cdot \sin(2\omega B) \tag{7.3}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= 6,155 \cdot 10^4 & a_1 &= 2,313 \cdot 10^4 & b_1 &= 3660 \\ a_2 &= 1958 & b_2 &= -1722 & \omega &= 23,54 \end{aligned}$$

Elle est représentée figure 7.12.

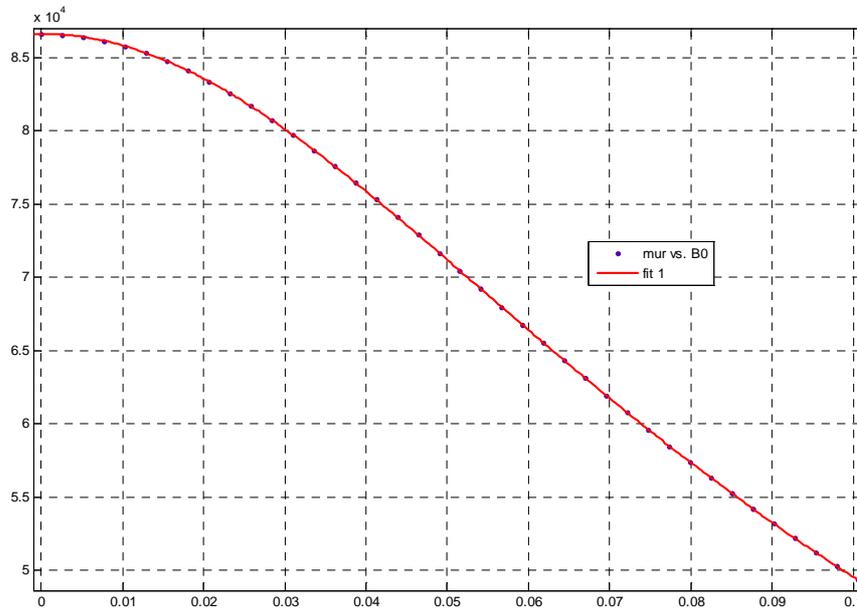


Figure 7.12. $\mu_{r573} = f(B)$. En continu: formule (7.3).

CPU Time	Grid	Nodes	Cells	Unknowns
1h 48 mn 31s	11	154600	77245	309204

Inducteur		
Courant total réel Itot_re	Courant total imaginaire Itot_im	Courant total Itot
1853,858 A	3674,966 A	4116,086 A

Billette						
Courant réel I _{totb_re} A	Courant imaginaire I _{totb_im} A	Courant total I _{totb} A	Densité de courant réelle J _{b_re} A/m ²	Densité de courant imaginaire J _{b_im} A/m ²	Puissance spécifique En A W/m ²	Densité d'énergie en A W/m ³
-40,348	151,5748	156,8531	-4789,11	17991,08	4477,045	21,75.10 ⁷

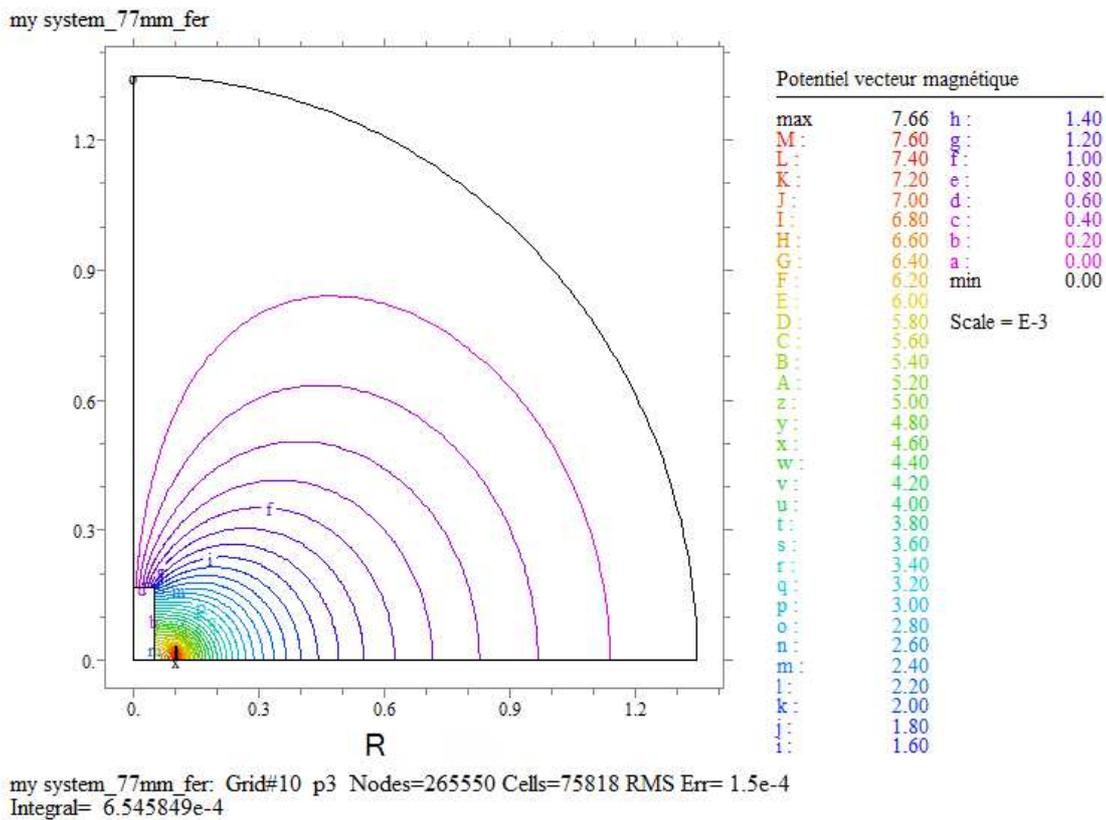


Figure 7.13. Valeurs et distribution du potentiel vecteur dans le dispositif entier.

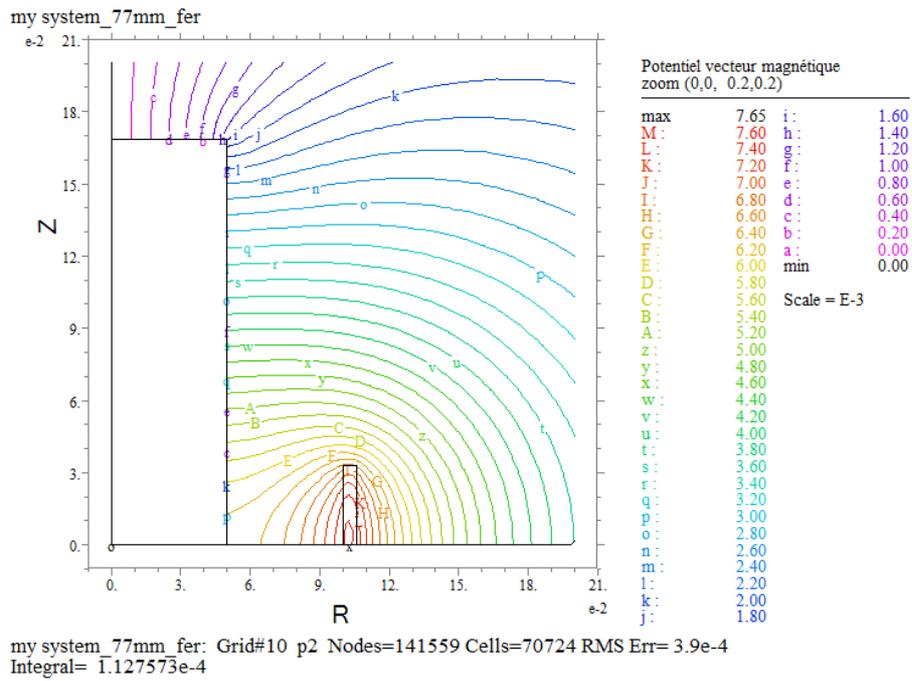


Figure 7.14. Zoom de la précédente figure

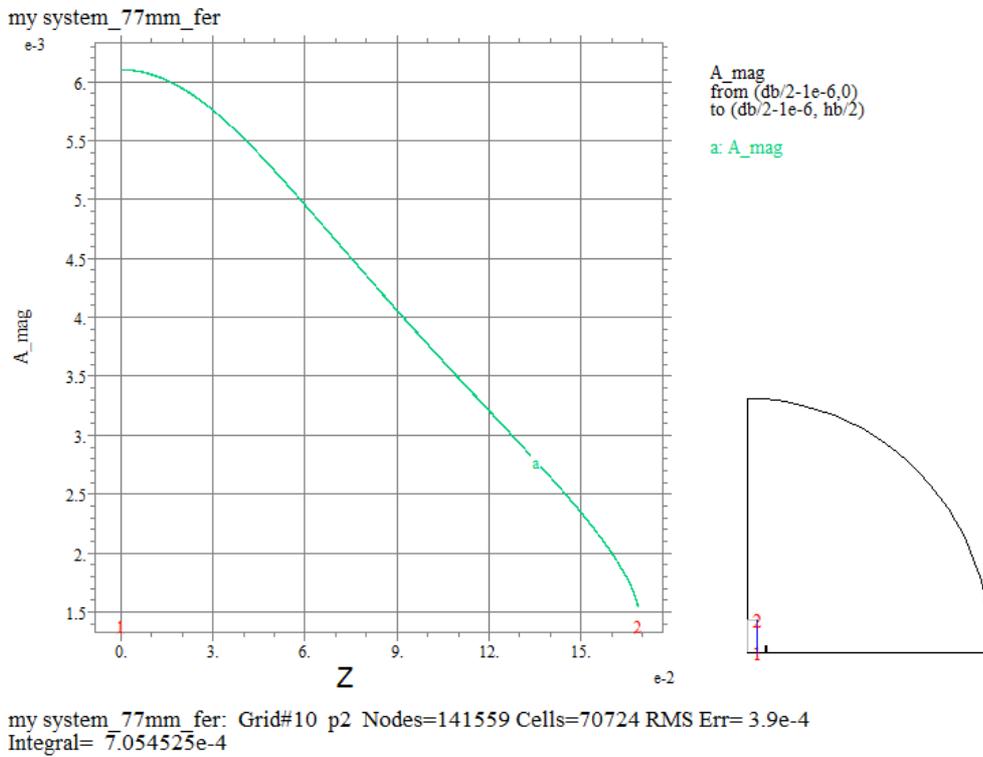


Figure 7.15. Amplitude du potentiel vecteur le long du segment AB de la billette (1→2).

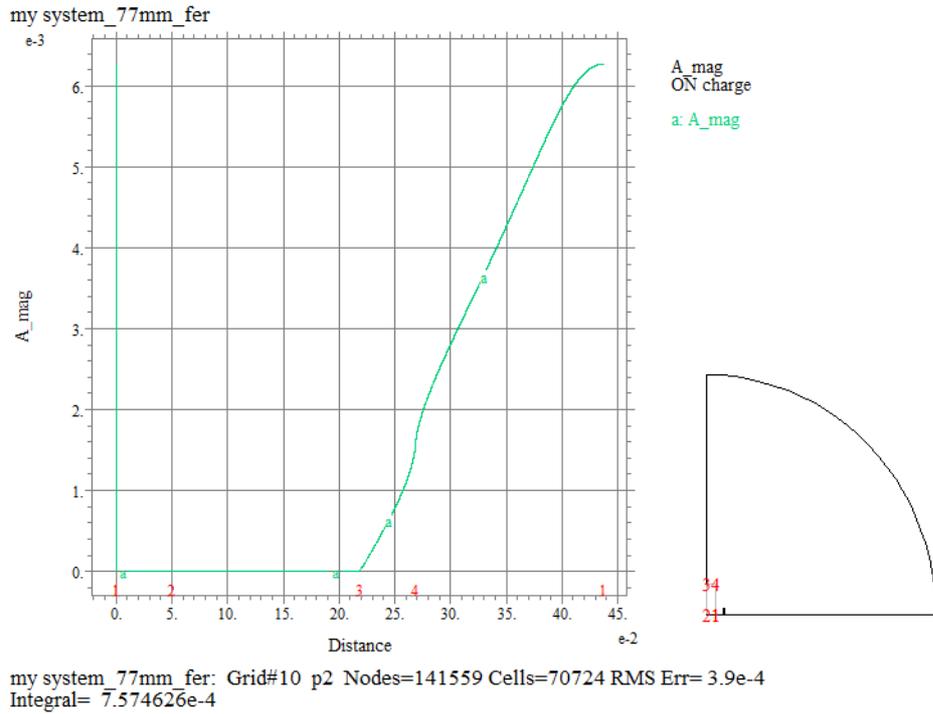


Figure 7.16. Amplitude du potentiel vecteur le long de la périphérie de la billette (1→2→3→4→1).

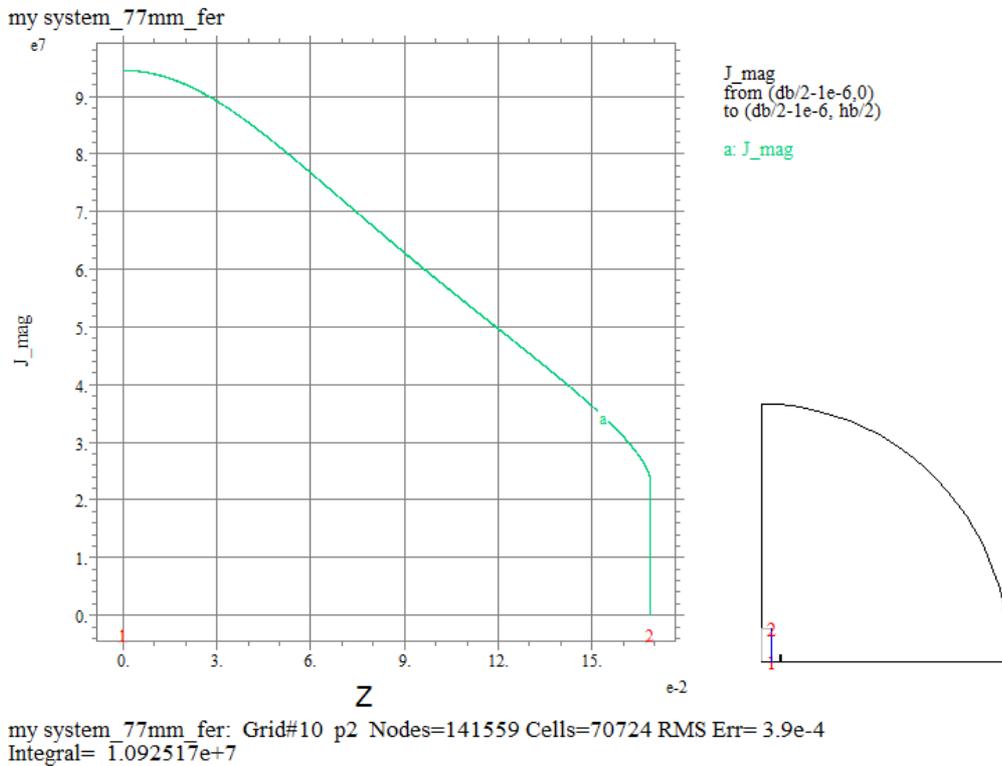


Figure 7.17. Amplitude de la densité de courant le long du segment AB de la billette (1→2).

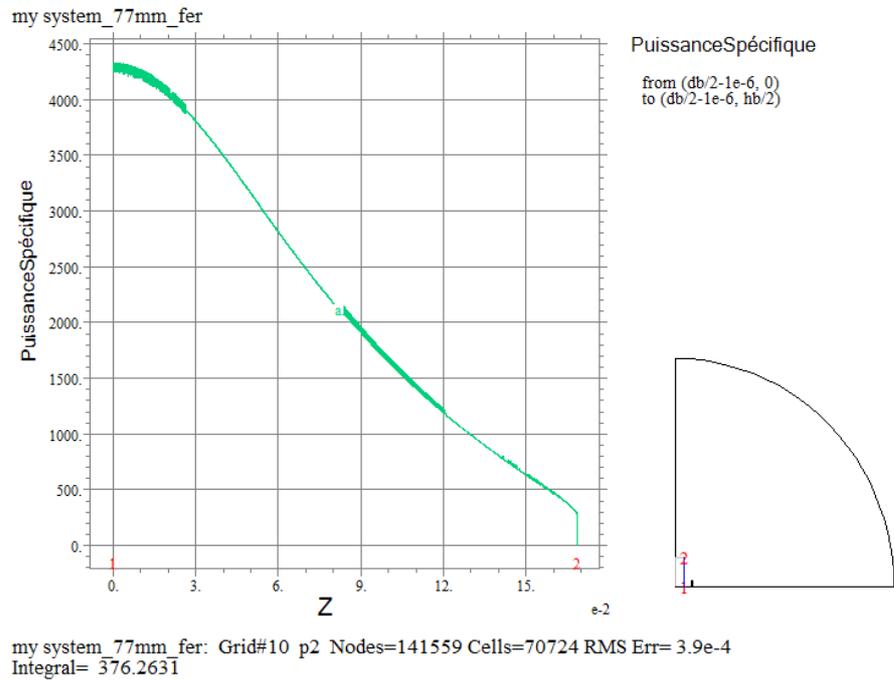


Figure 7. 18. Puissance spécifique le long du segment AB de la billette (1→2).

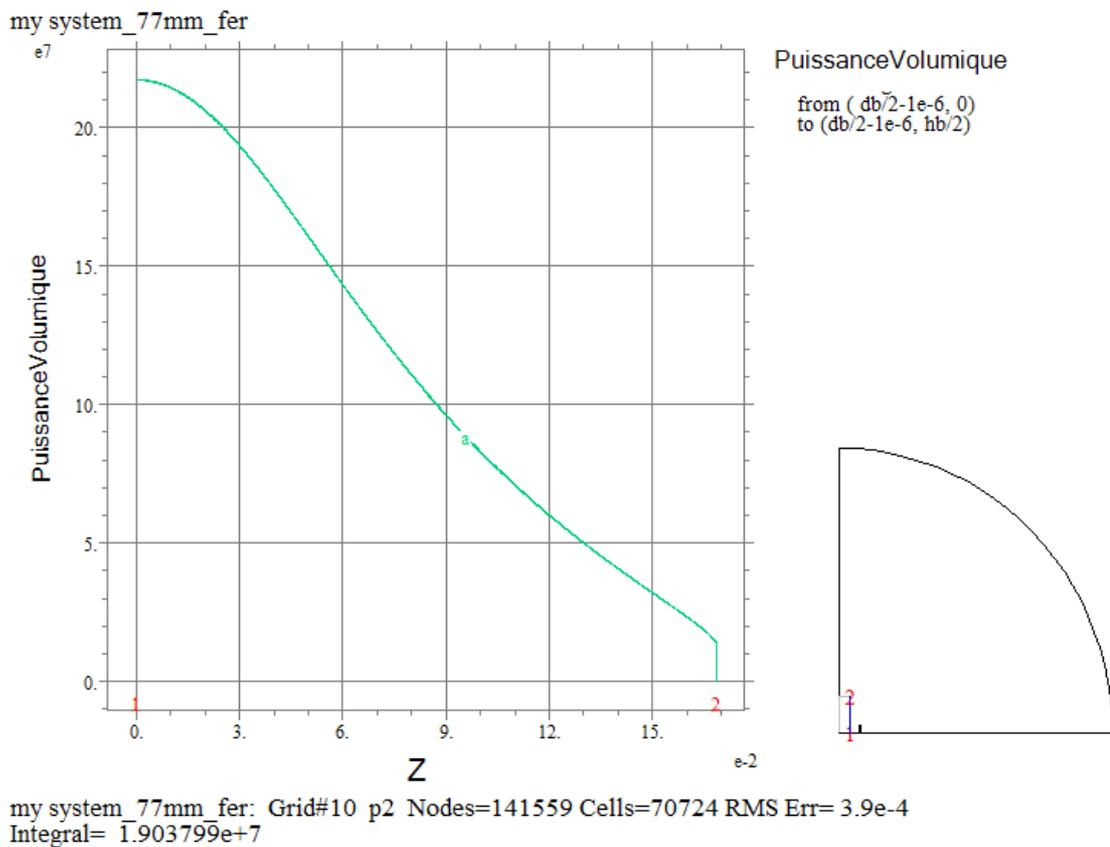


Figure 7.19. Puissance volumique le long du segment AB de la billette (1→2).

7.4. Étude de la billette à $T=933\text{ K}$, $m_s = 1,122290936$

La perméabilité relative est approximée en fonction de l'induction magnétique B à l'aide de MATLAB (Curve Fitting Tool, cftool) par une représentation Fourier (General model Fourier1) avec un coefficient de corrélation $R^2 = 1$ (Goodness of fit: R-square: 1).

$$\begin{aligned}\mu_{r933} &= a_0 + a_1 \cdot \cos(\omega \cdot B) + b_1 \cdot \sin(\omega \cdot B) \\ a_0 &= 1,925 \cdot 10^4 & a_1 &= 3870 \\ b_1 &= -28,87 & \omega &= 14,89\end{aligned}\quad (7.4)$$

Elle est représentée figure 7.20.

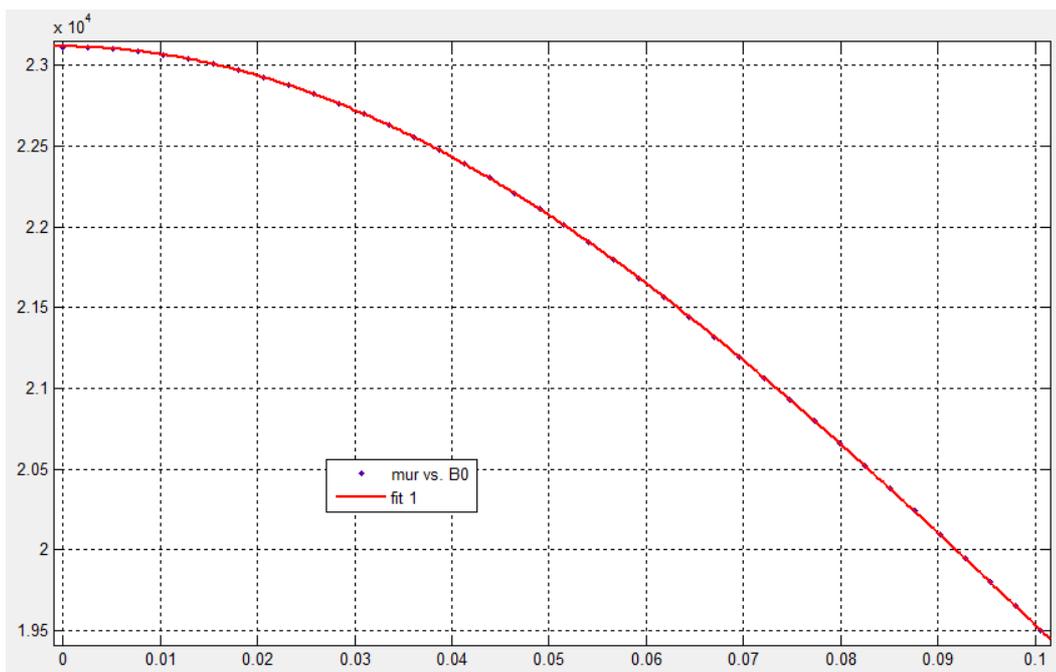


Figure 7.20. $\mu_{r933} = f(B)$. En continu: formule (7.4).

SUMMARY

Itot_re= 1888.404
 Itot_im= 3807.069
 Itot= 4249.688
 Jb_re= -7190.375
 Jb_im= 32420.05
 Itotb_re= -60.57891
 Itotb_im= 273.1389
 Itotb= 279.7761
 PuissanceSpécifiqueMax = 8168.706
 PuissanceSpécifiqueMin = 19.15099

Figure 7.21. Courants et densité de courant dans l'inducteur et la billette

Maillage				
CPU Time	Grid	Nodes	Cells	Unknowns
2h 49mn 34s	8	236554	118195	473112

Inducteur		
Courant total réel Itot_re	Courant total imaginaire Itot_im	Courant total Itot
1888,404 A	3807,069 A	4249,688 A

Billette						
Courant réel Itotb_re A	Courant imaginaire Itotb_im A	Courant total Itotb A	Densité de courant réelle Jb_re A/m ²	Densité de courant imaginaire Jb_im A/m ²	Puissance spécifique En A W/m ²	Densité d'énergie en A W/m ³
-60,58	273,1389	279,7761	-7190,375	32420,05	8168,706	21,8.10 ⁷

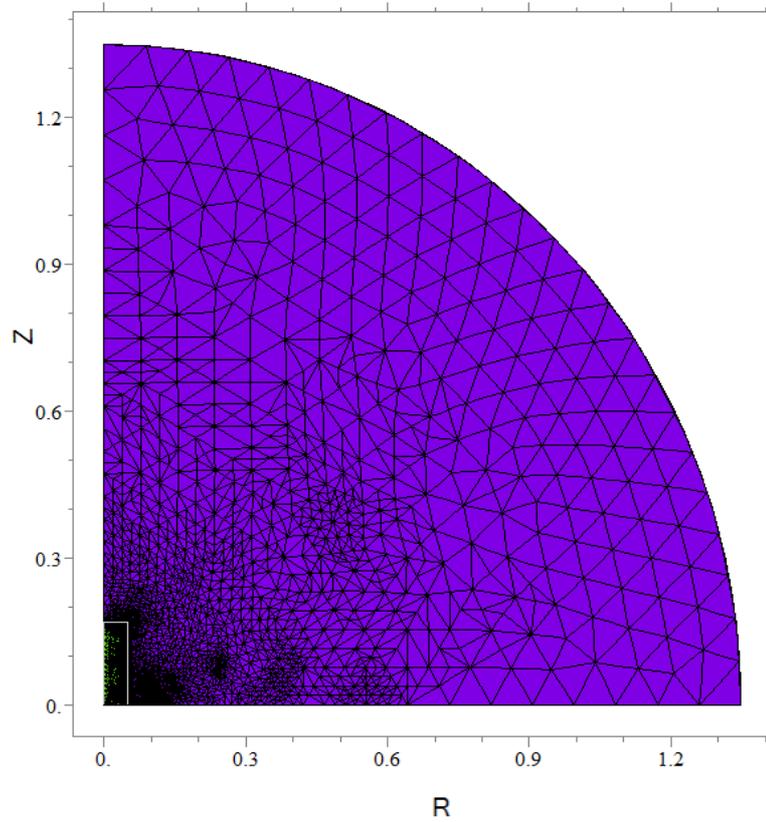


Figure 7.22. Maillage pour T=933 K, 236554 nœuds, 118195 triangles.

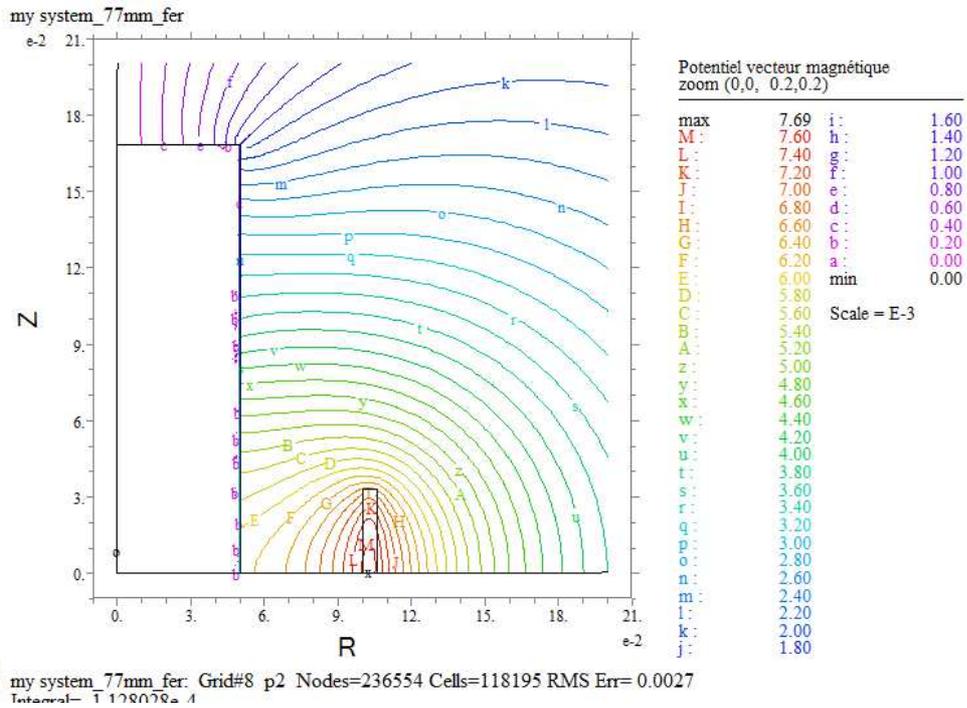


Figure 7.23. Isovaleurs et valeurs du potentiel vecteur dans le dispositif (zoom).

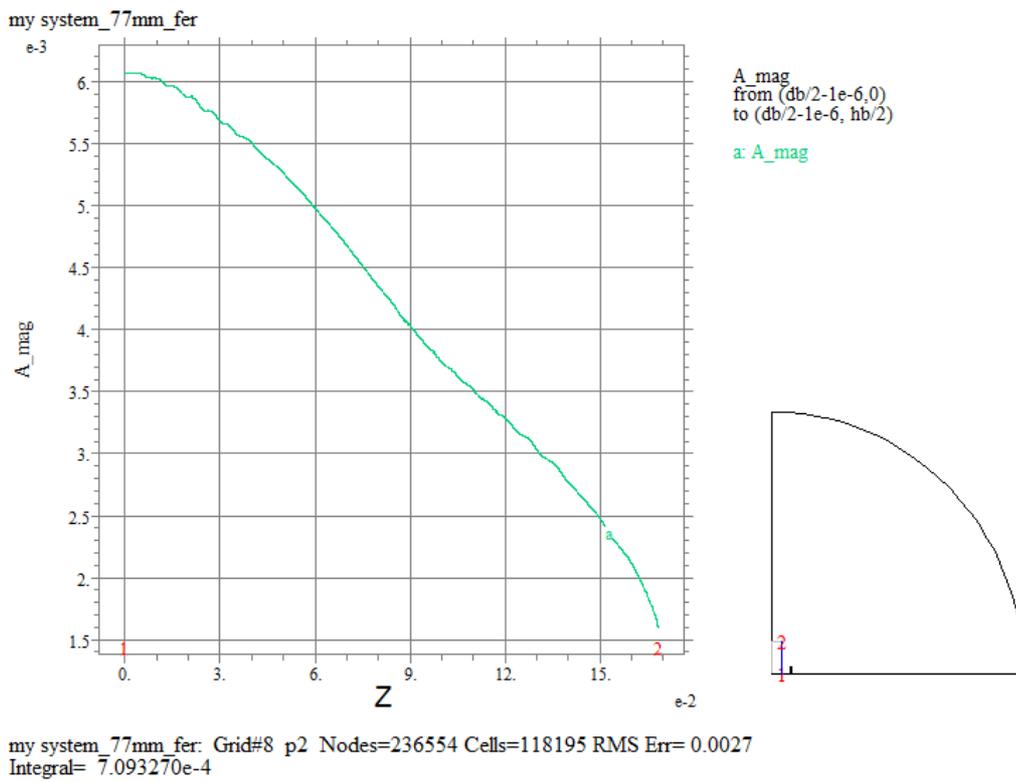


Figure 7.24. Amplitude du potentiel vecteur le long du segment AB de la billette (1→2).

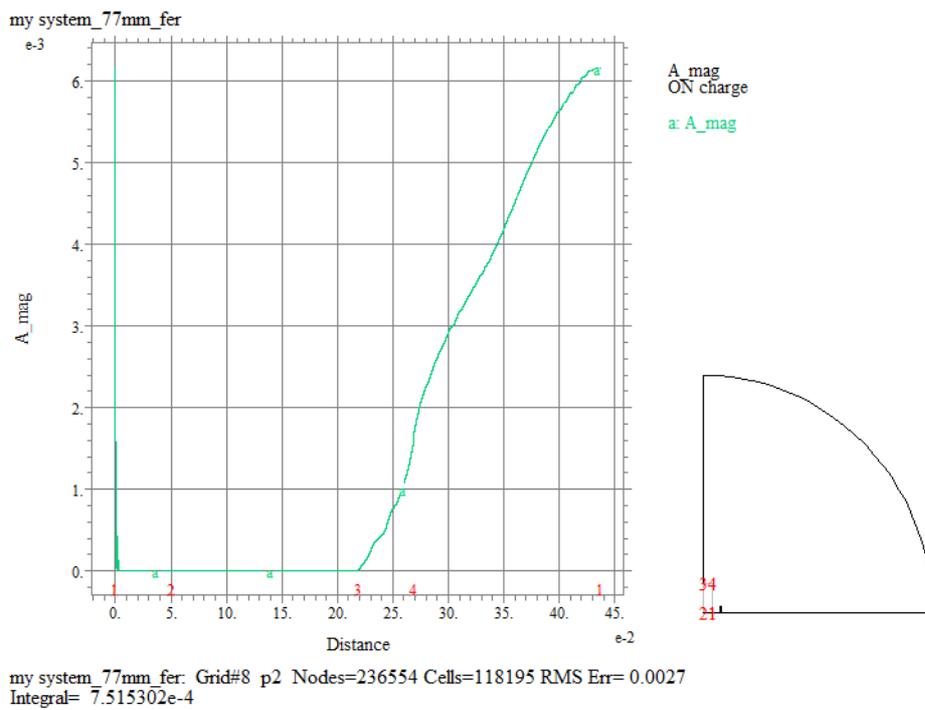


Figure 7.25. Amplitude du potentiel vecteur le long de la périphérie de la billette (1→2→3→4→1).

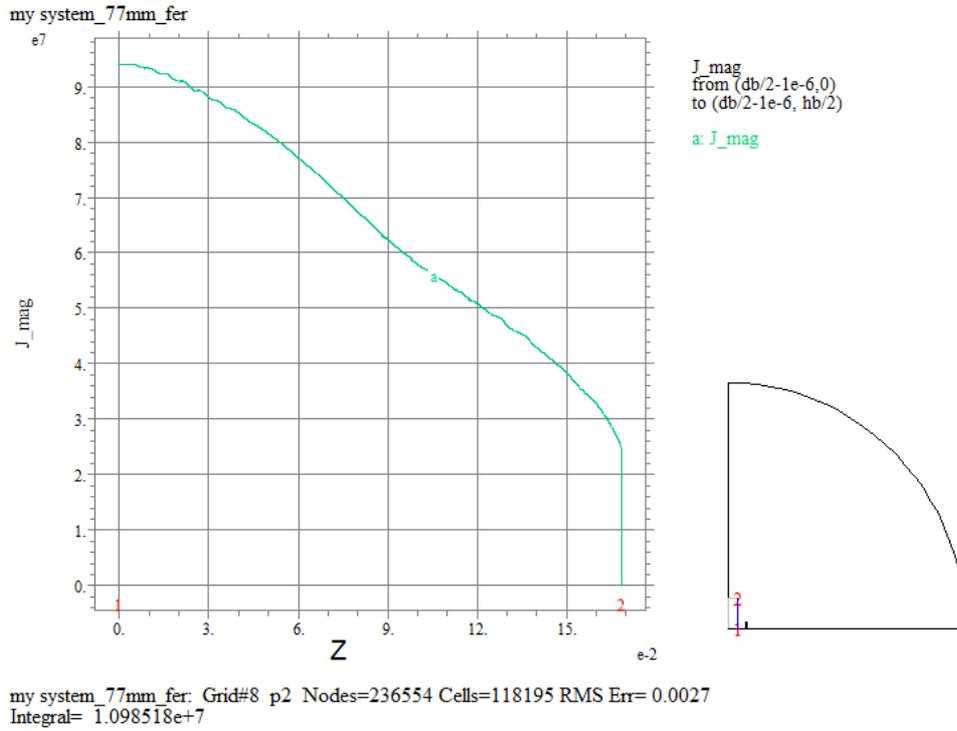


Figure 7. 26. Amplitude de la densité de courant le long du segment AB de la billette (1→2).

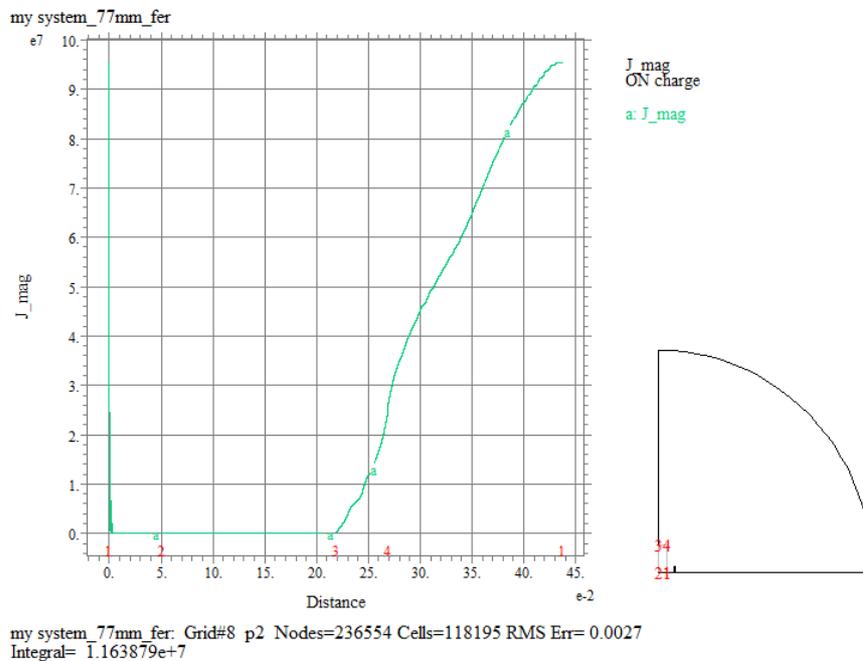


Figure 7. 27. Amplitude de la densité de courant le long de la périphérie de la billette (1→2→3→4→1).

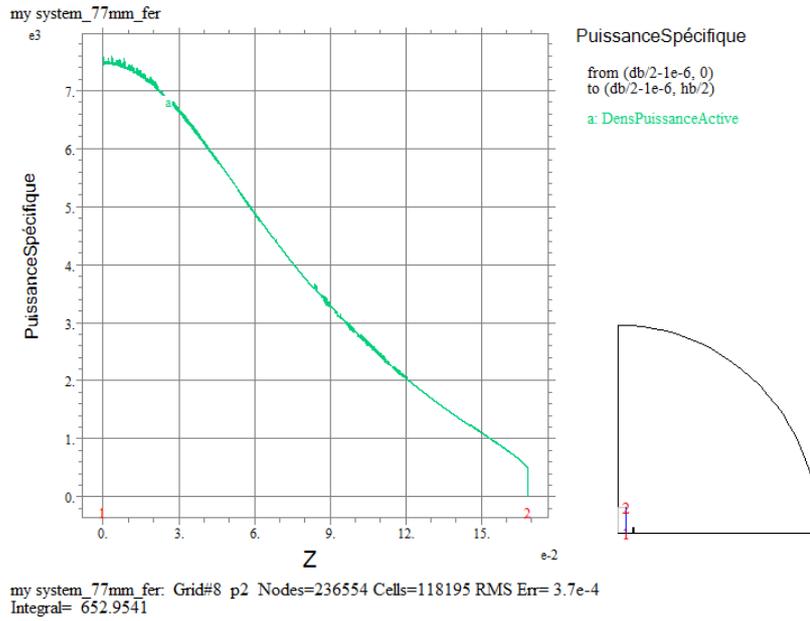


Figure 7. 28. Puissance spécifique le long du segment AB de la billette (1→2).

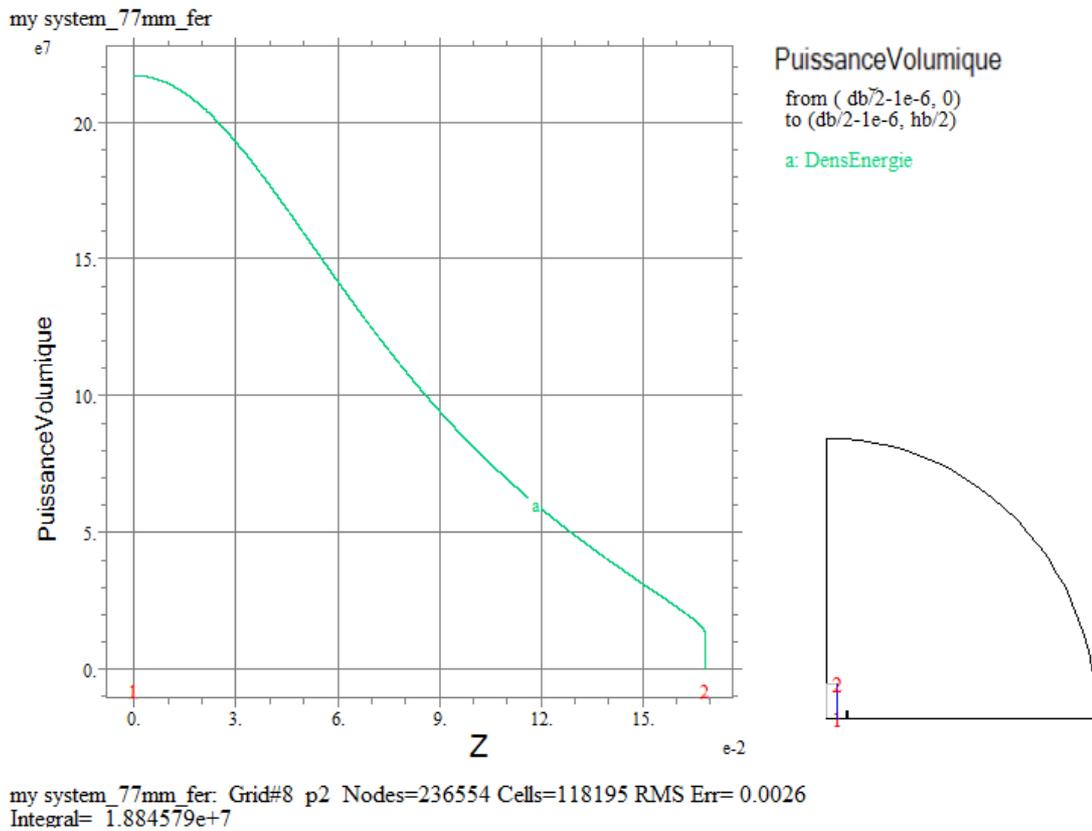


Figure 7. 29. Puissance volumique le long du segment AB de la billette (1→2).

7.5. Étude de la billette à $T = 1042,95 \text{ K}$, $m_s = 2.399170308 \cdot 10^{-2}$

La perméabilité relative est approximée en fonction de l'induction magnétique B à l'aide de MATLAB (Curve Fitting Tool, cftool) par une représentation polynomiale (Linear model Poly3) avec un coefficient de corrélation $R^2 = 1$ (Goodness of fit: R-square: 1).

$$\begin{aligned} \mu_{r104295} &= p_1 \cdot B^3 + p_2 \cdot B^2 + p_3 \cdot B + p_4 \\ p_1 &= 1915 & p_2 &= -1759 \\ p_3 &= 3,191 & p_4 &= 287,6 \end{aligned} \tag{7.5}$$

Elle est représentée figure 7.30.

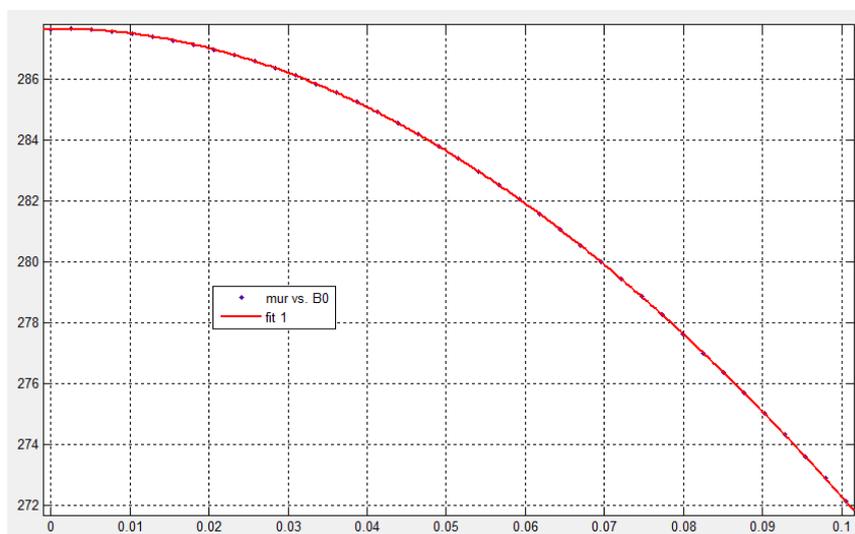


Figure 7. 30 $\mu_{r104295} = f(B)$. En continu: formule (7. 5).

Maillage				
CPU Time	Grid	Nodes	Cells	Unknowns
12mn51s	6	33906	16885	67816

Inducteur		
Courant total réel Itot_re	Courant total imaginaire Itot_im	Courant total Itot
3054,608 A	4931,171	5800,61

Billette						
Courant réel I _{totb_re} A	Courant imaginaire I _{totb_im} A	Courant total I _{totb} A	Densité de courant réelle J _{b_re} A/m ²	Densité de courant imaginaire J _{b_im} A/m ²	Puissance spécifique En A W/m ²	Densité de puissance en A W/m ³
399,4337	1578,356	1628,114	47410,53	187342	37461,06	11,80.10 ⁷

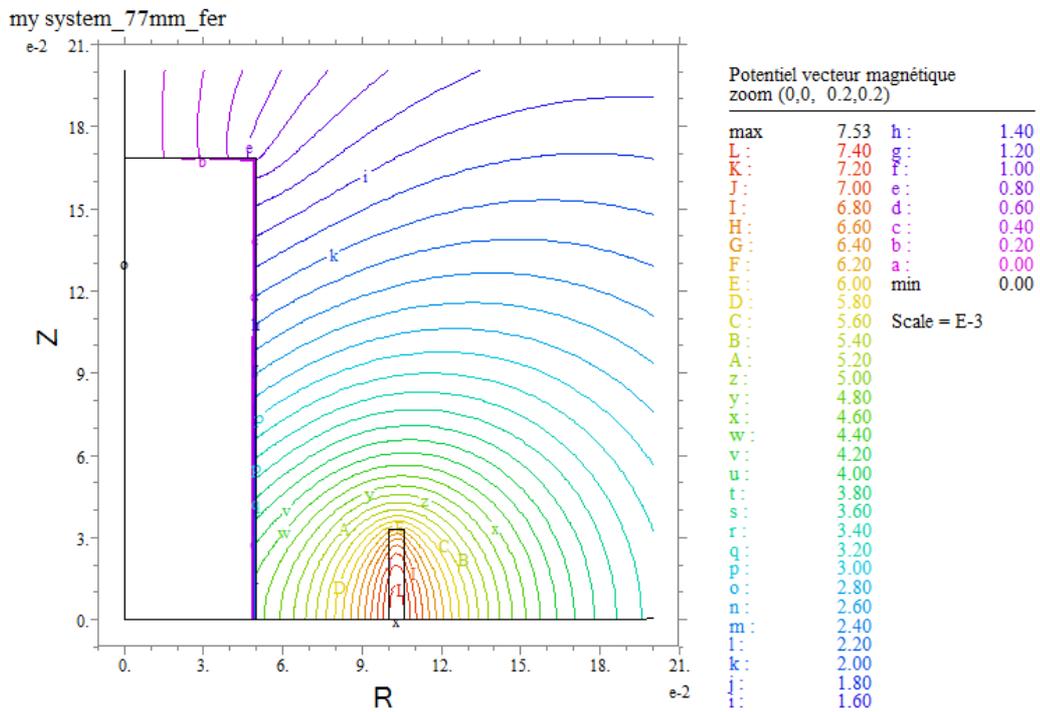


Figure 7.31. Valeurs et distribution du potentiel vecteur (zoom).

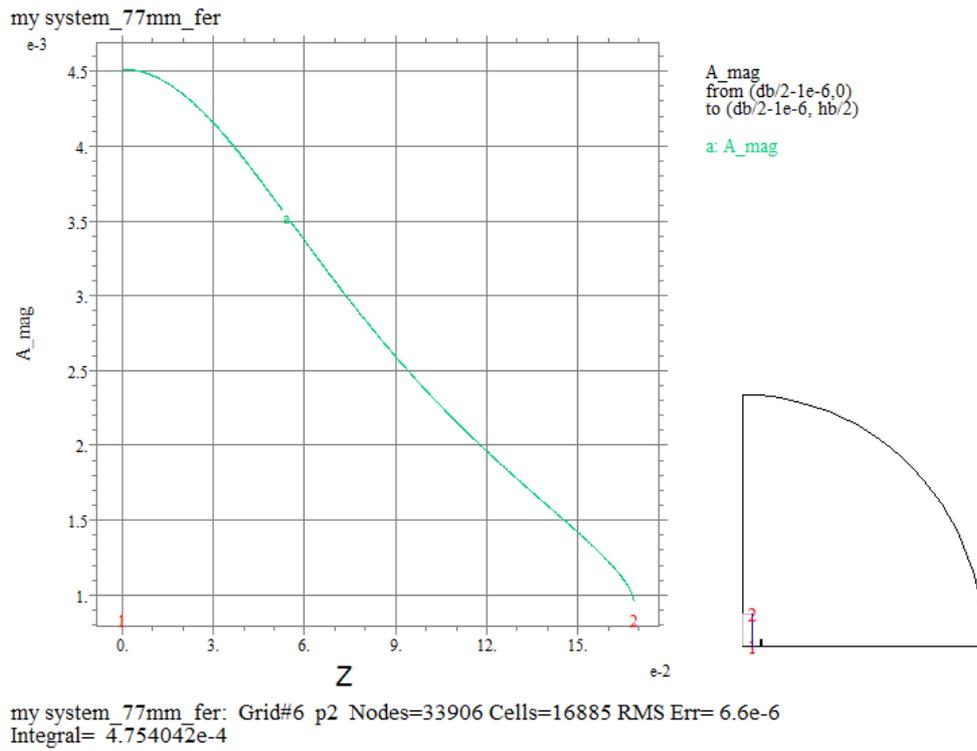


Figure 7. 32. Amplitude du potentiel vecteur le long du segment AB de la billette (1→2).

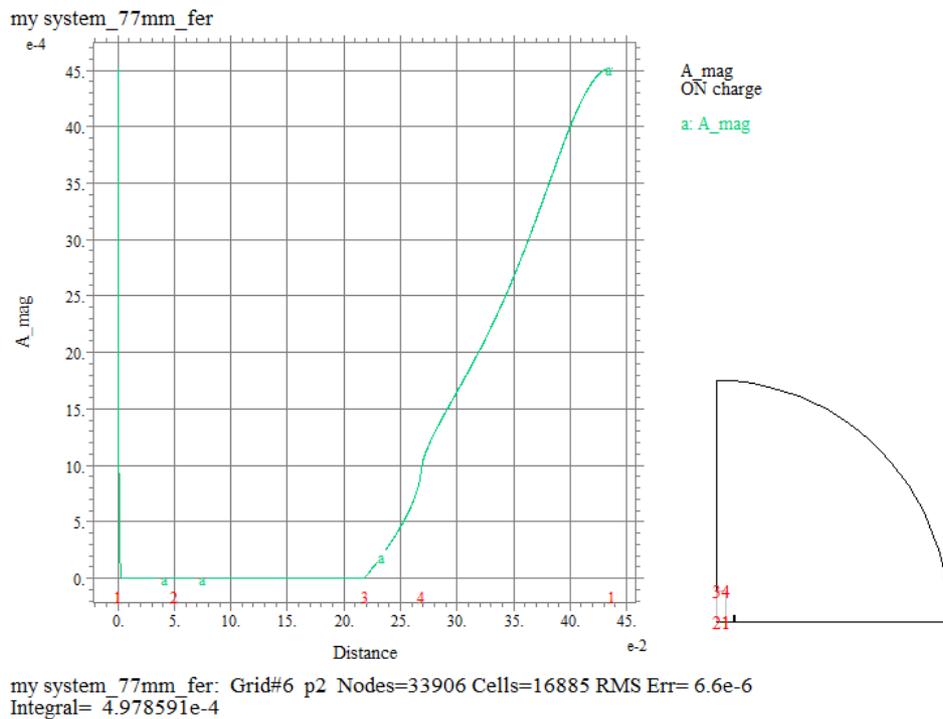


Figure 7. 33. Amplitude du potentiel vecteur le long de la

périphérie de la billette (1→2→3→4→1).

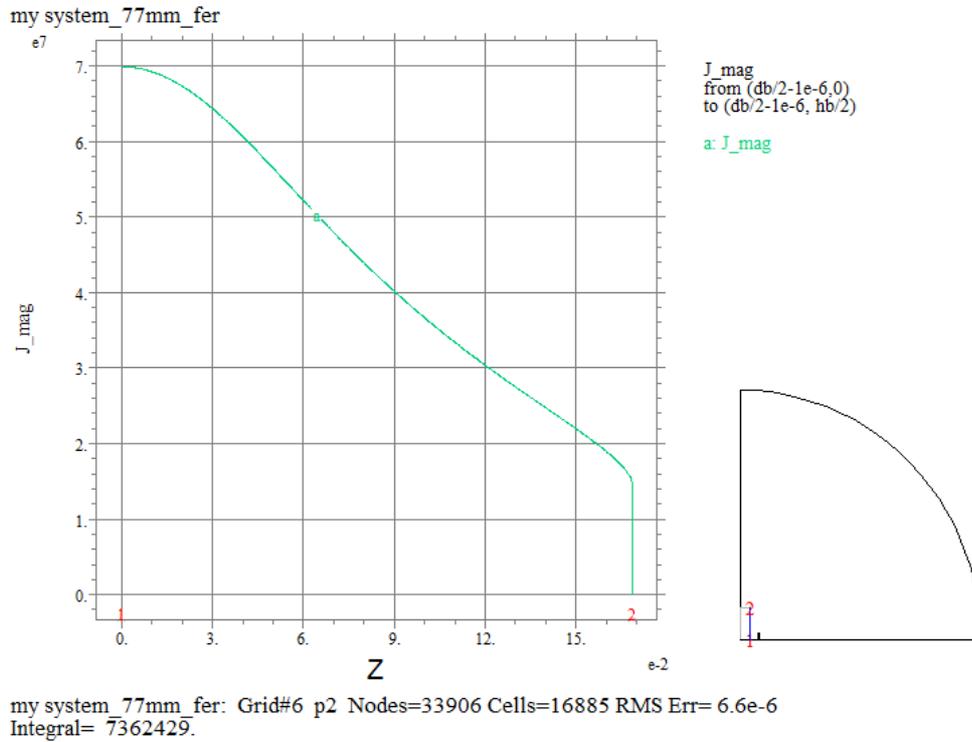


Figure 7. 34. Amplitude de la densité de courant le long du segment AB de la billette (1→2).

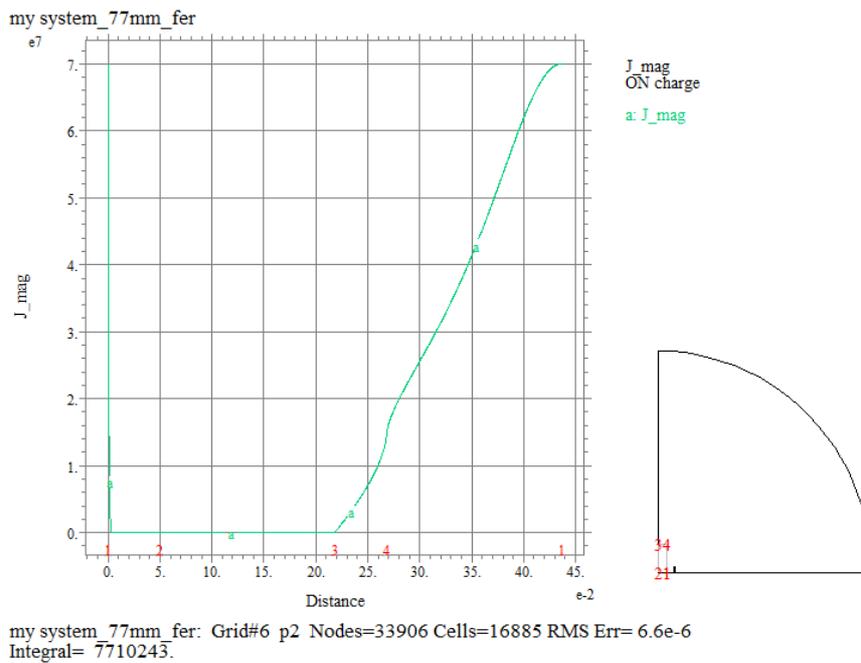


Figure 7.35. Amplitude de la densité de courant le long de la périphérie de la billette (1→2→3→4→1).

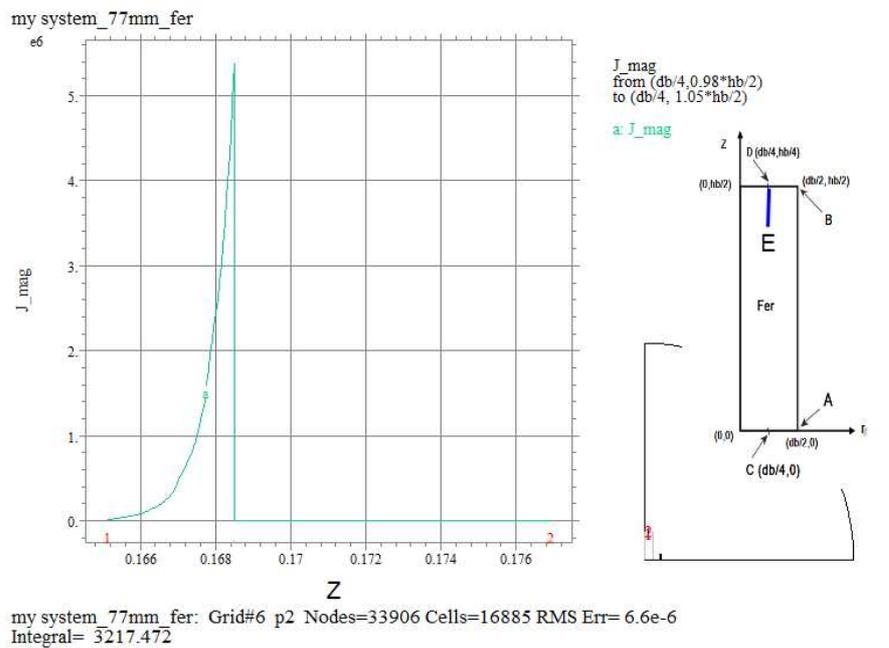


Figure 7. 36. Variation de la densité de courant J_mag le long du segment ED entre les points E(db/4; 0,98*hb/2) et D (db/4,hb/2).

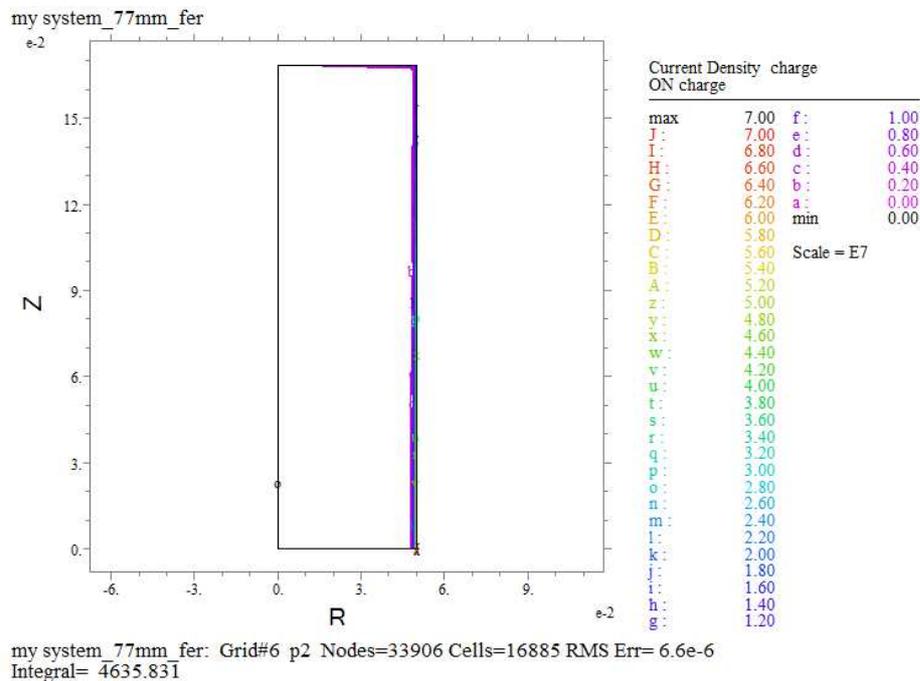
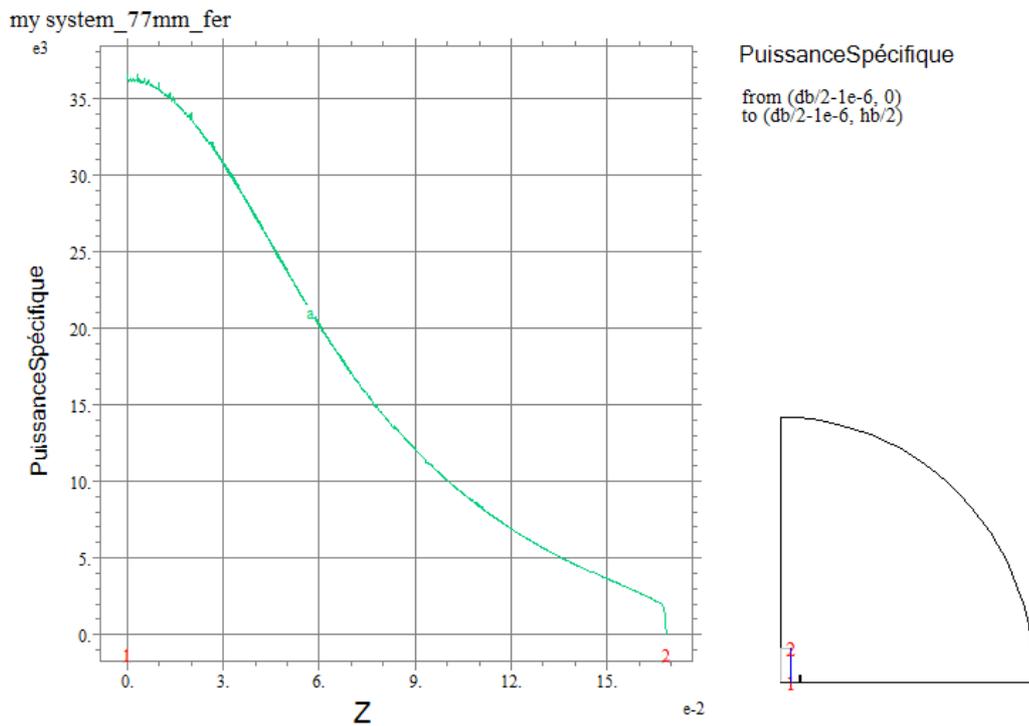


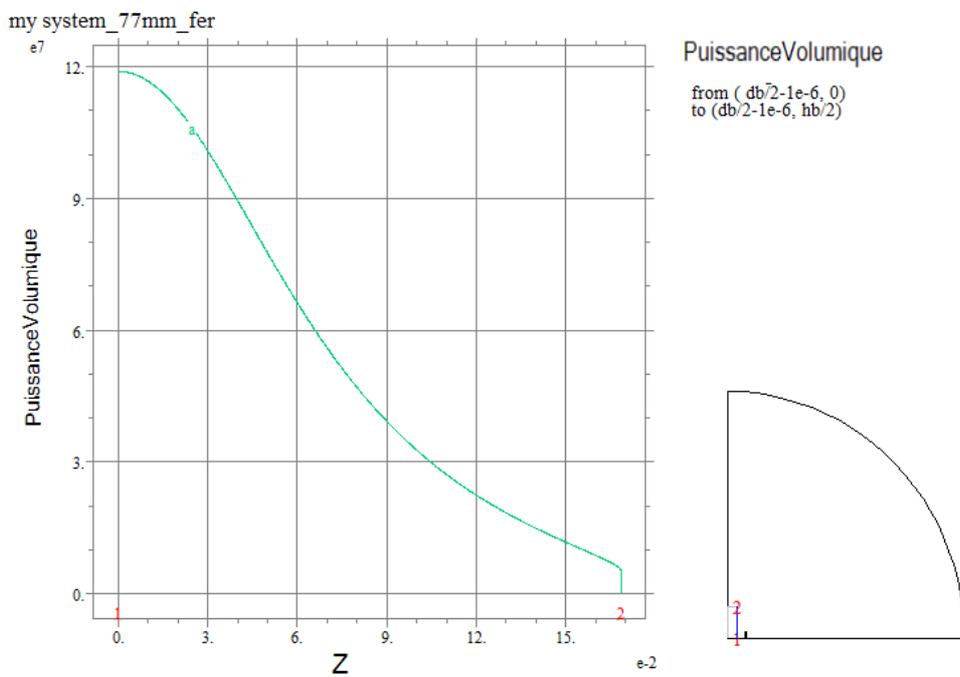
Figure 7. 37. le courant tend à être refoulé vers la périphérie de la billette.

Les deux figures précédentes montrent le refoulement du courant vers la périphérie de la billette.



my system_77mm_fer: Grid#6 p2 Nodes=33906 Cells=16885 RMS Err= 6.6e-6
Integral= 2752.741

Figure 7. 38. Puissance spécifique le long du segment AB de la billette (1→2).



my system_77mm_fer: Grid#6 p2 Nodes=33906 Cells=16885 RMS Err= 6.6e-6
Integral= 9011514.

Figure 7. 39. Puissance volumique le long du segment AB de la billette (1→2).

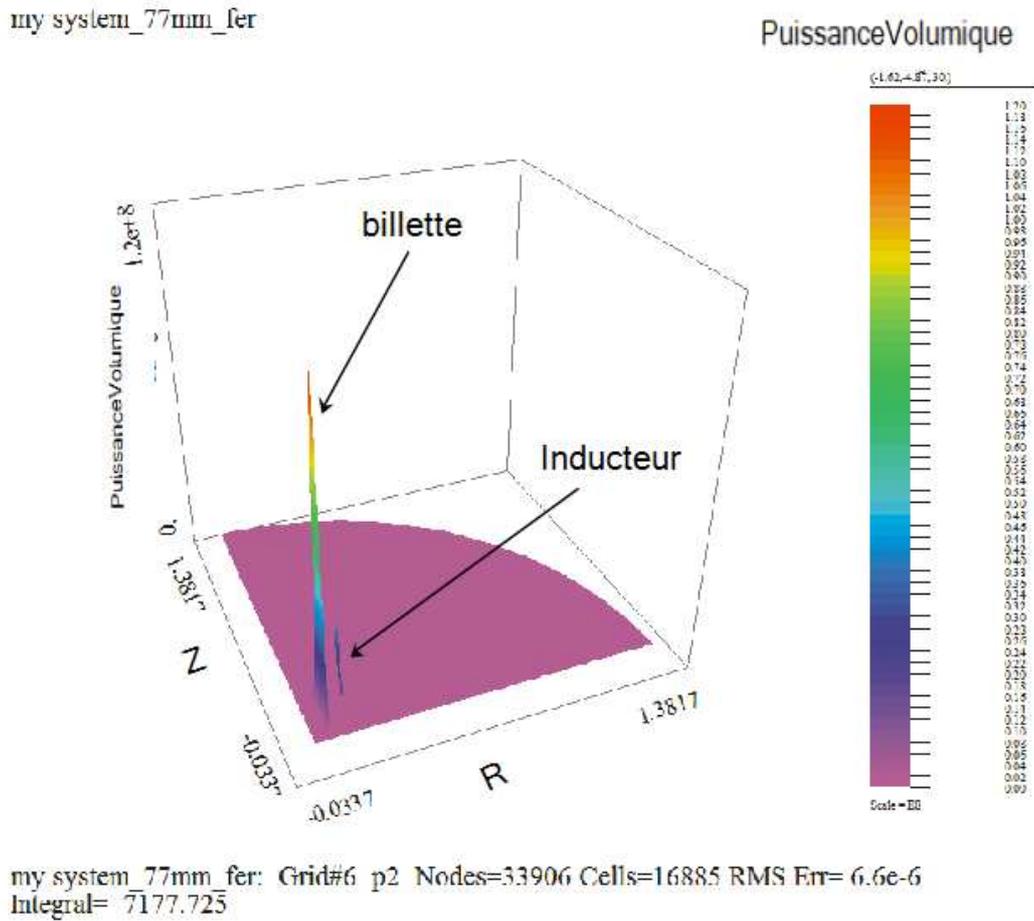


Figure 7. 40. Puissance volumique en fonction de R et de Z

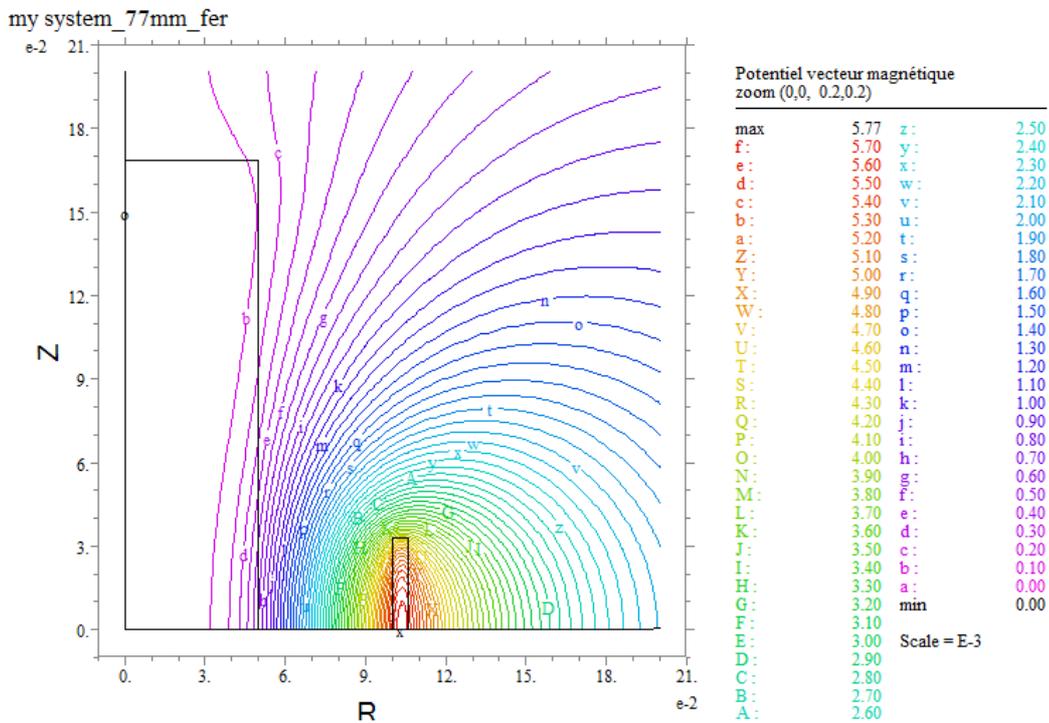
7.6. Etude de la billette pour $T > T_c = 1043 K$, $\mu_r = 1$

Pour $T > T_c = 1043 K$, la billette devient amagnétique.

Maillage				
CPU Time	Grid	Nodes	Cells	Unknowns
14 s	3	6048	2969	12100

Inducteur		
Courant total réel Itot_re	Courant total imaginaire Itot_im	Courant total Itot
5111,653 A	4360,170 A	6718,637 A

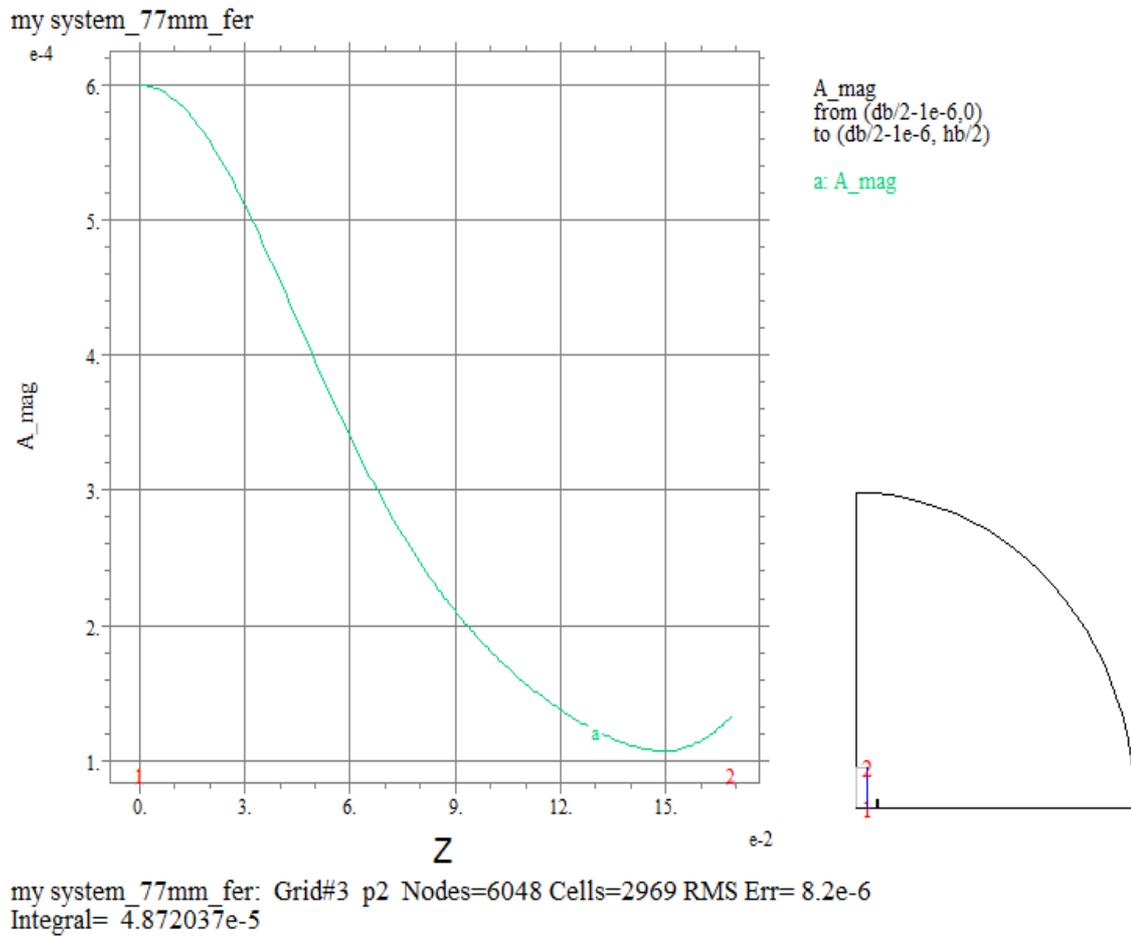
Billette						
Courant réel Itotb_re A	Courant imaginaire Itotb_im A	Courant total Itotb A	Densité de courant réelle Jb_re A/m ²	Densité de courant imaginaire Jb_im A/m ²	Puissance spécifique En A W/m ²	Densité de puissance en A W/m ³
2070,463	1811,828	2751,279	245752,2	215053,7	11227,16	21.10 ⁵



my system_77mm_fer: Grid#3 p2 Nodes=6048 Cells=2969 RMS Err= 8.2e-6
Integral= 4.636809e-5

Figure 7. 41. Valeurs et distribution du potentiel vecteur (zoom).

Cette figure montre une plus grande pénétration des lignes de champ dans la billette contrairement aux cas où la température était inférieure à TC et donc la billette magnétique.



**Figure 7. 42. Amplitude du potentiel vecteur le long
du segment AB de la billette (1→2).**

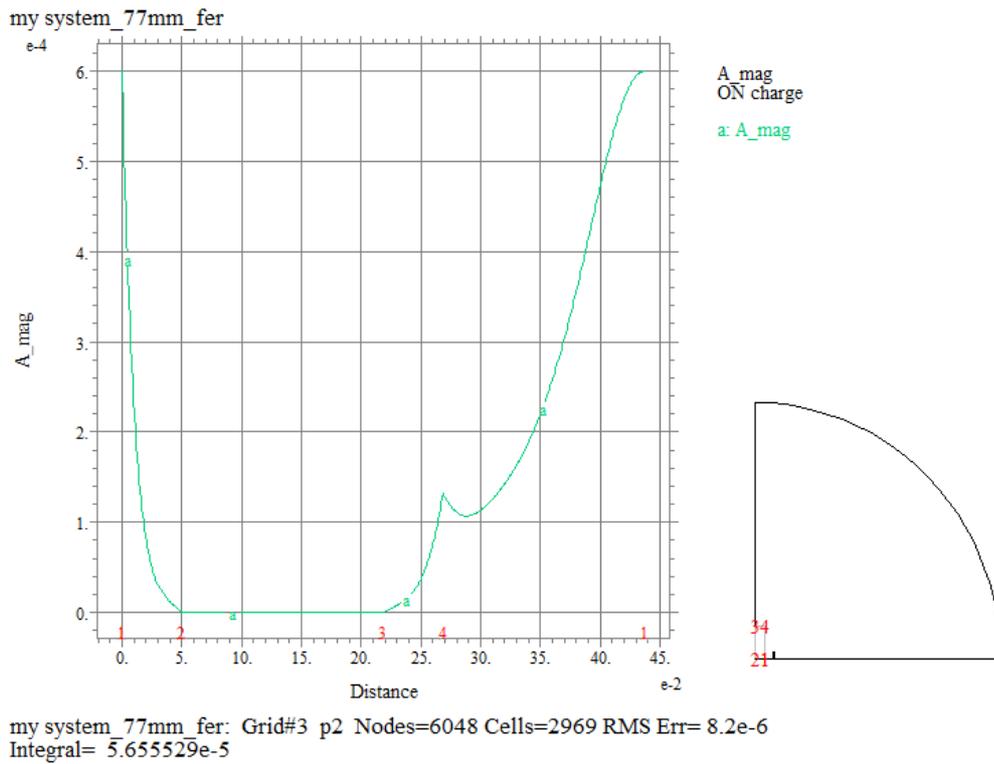


Figure 7.43. Amplitude du potentiel vecteur le long de la périphérie de la billette (1→2→3→4→1).

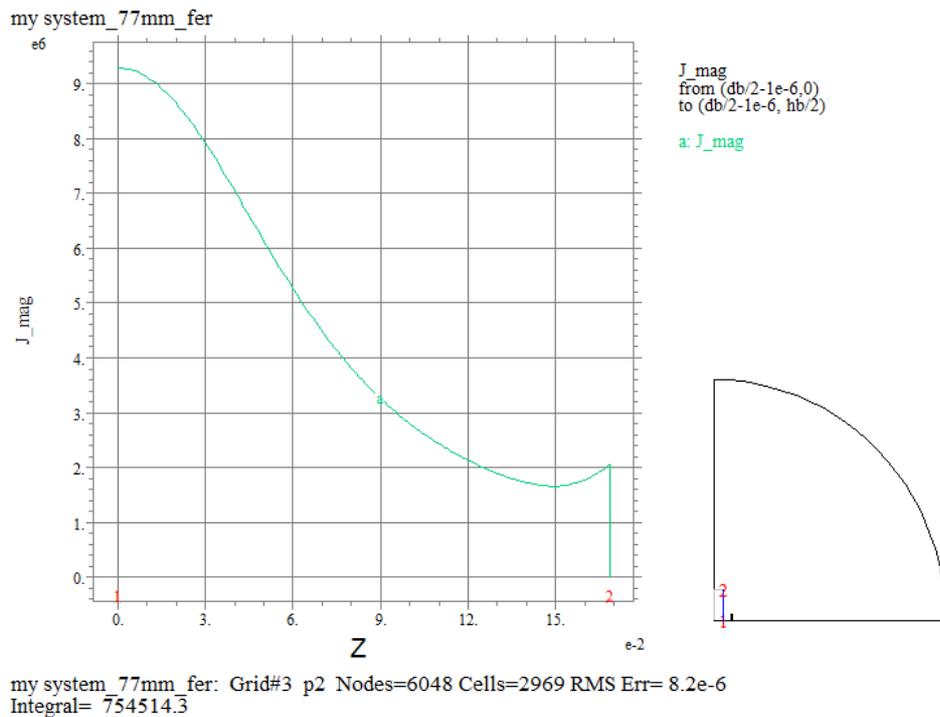


Figure 7.44. Amplitude de la densité de courant le long du segment AB de la billette (1→2).

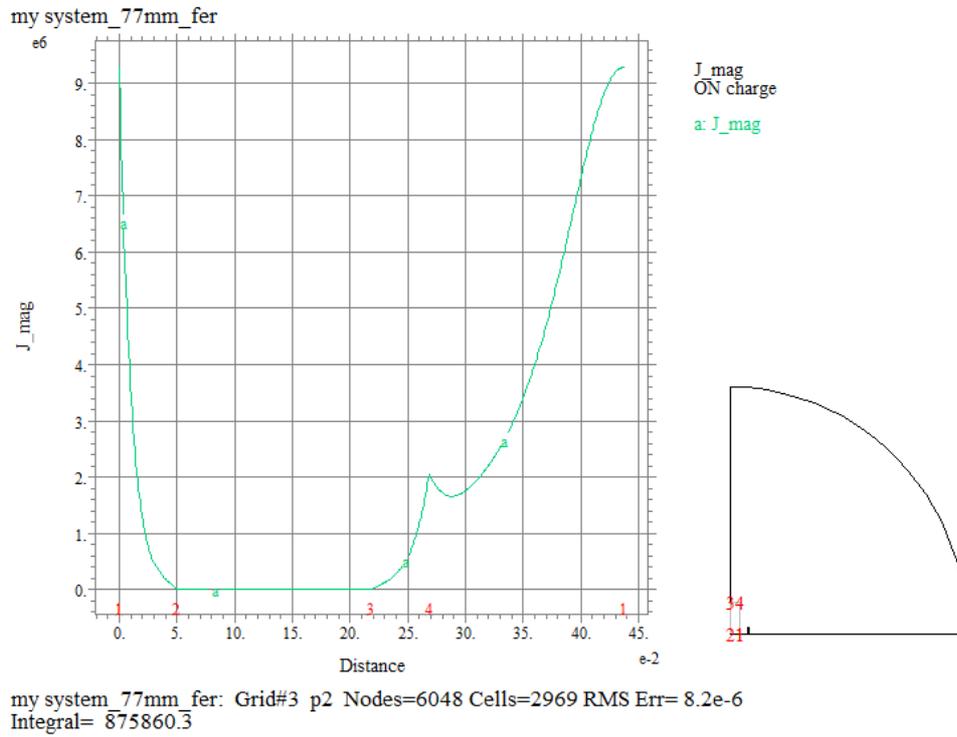


Figure 7. 45. Amplitude de la densité de courant le long de la périphérie de la billette (1→2→3→4→1).

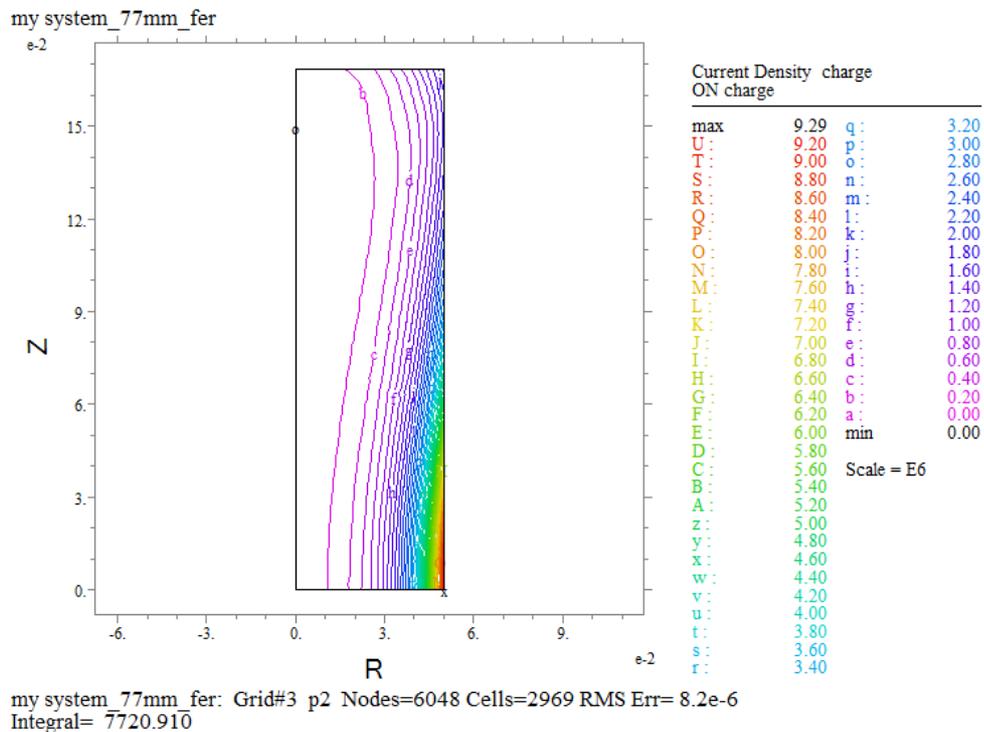


Figure 7. 46. Valeurs et lignes de champ de la densité de courant dans la billette amagnétique.

On remarque sur cette figure une plus grande occupation du courant de l'espace dans la billette amagnétique que dans la billette magnétique.

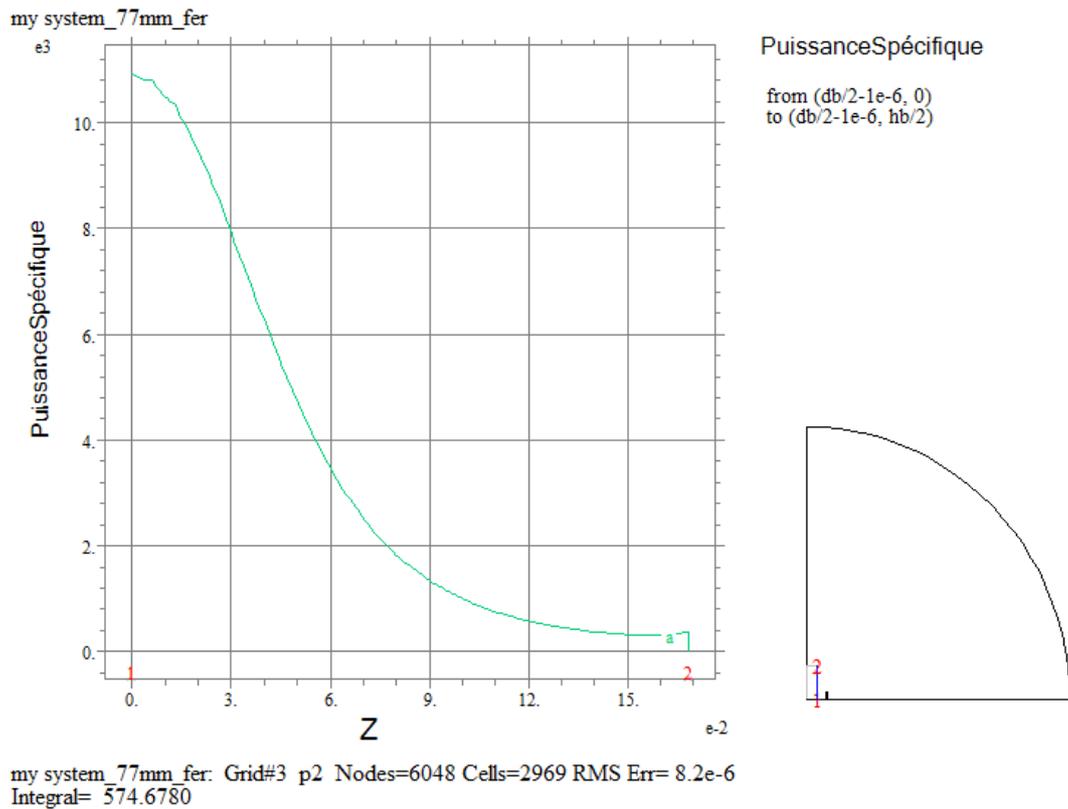


Figure 7. 47. Puissance spécifique le long du segment AB de la billette (1→2).

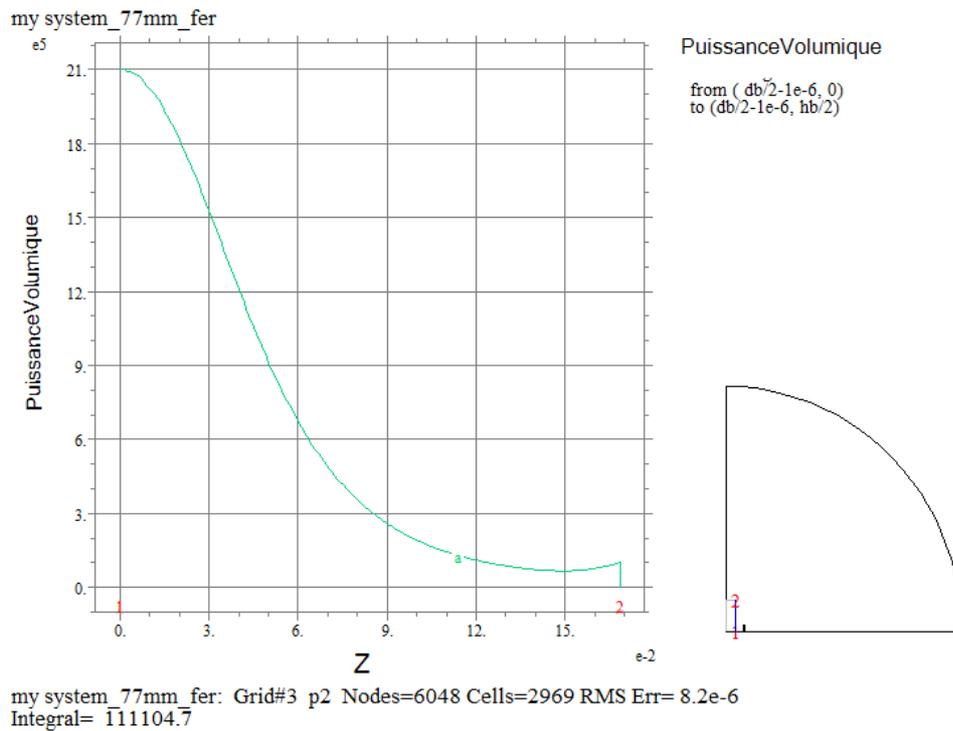


Figure 7. 48. Puissance volumique le long du segment AB de la billette (1→2).

7.7. Récapitulatif

Les tableaux et les courbes ci-après récapitulent les variations en fonction de la température

- des courants réel, imaginaire et total dans l'inducteur
- des courants réel, imaginaire, total dans la billette
- des puissances spécifique et volumique dans la billette.

Pour les courbes concernant la billette, la température supérieure à $T_c = 1042 \text{ K}$ a été prise égale à 1070 K .

Inducteur					
T en K	298	573	933	1042,95	$T > T_c = 1043$
ltot_re	1844,997	1853,858	1888,404	3054,608	5111,653
ltot_im	3642,495	3674,966	3807,069	4931,171	4360,170
ltot	4083,11	4116,086	4249,688	5800,61	6718,637

Billette					
T en K	298	573	933	1042,95	$T > T_c = 1043$
Itotb_re	-33,71	-40,348	- 60,58	399,4337	2070,463
Itotb_im	122,77	151,5748	273,1389	1578,356	1811,828
Itotb	127,3148	156,8531	279,7761	1628,114	2751,279
Jb_re	-4001,27	-4789,11	-7190,375	47410,53	24575,2
Jb_im	14572,19	17991,08	32420,05	187342	215053,7
Puissance spécifique W/m^2	3598,883	4477,045	8168,706	37461,06	11227,16
Puissance volumique W/m^3	$21,5 \cdot 10^7$	$21,75 \cdot 10^7$	$21,80 \cdot 10^7$	$11,80 \cdot 10^7$	$21 \cdot 10^5$

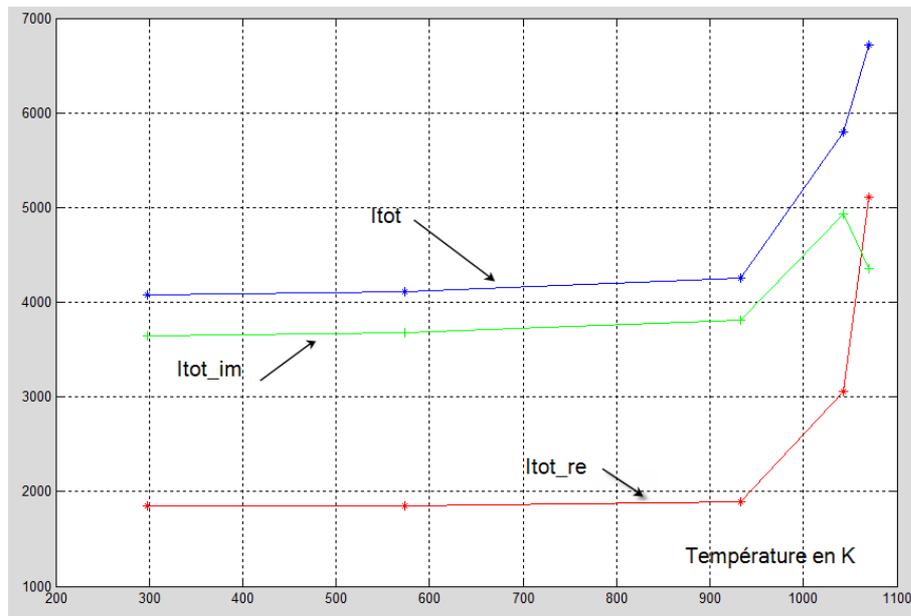


Figure 7.49. Inducteur: Variation des courants réel, imaginaire et total dans l'inducteur en fonction de la température

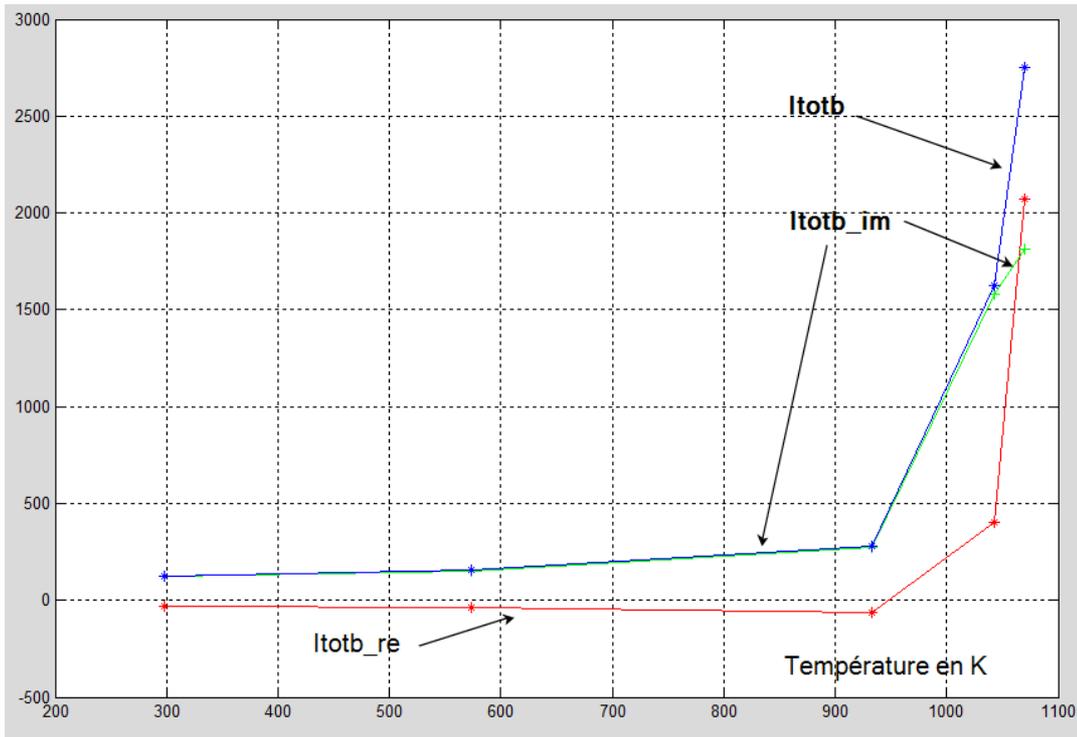


Figure 7.50. Billette: Variation des courants réel, imaginaire et total dans la billette en fonction de la température

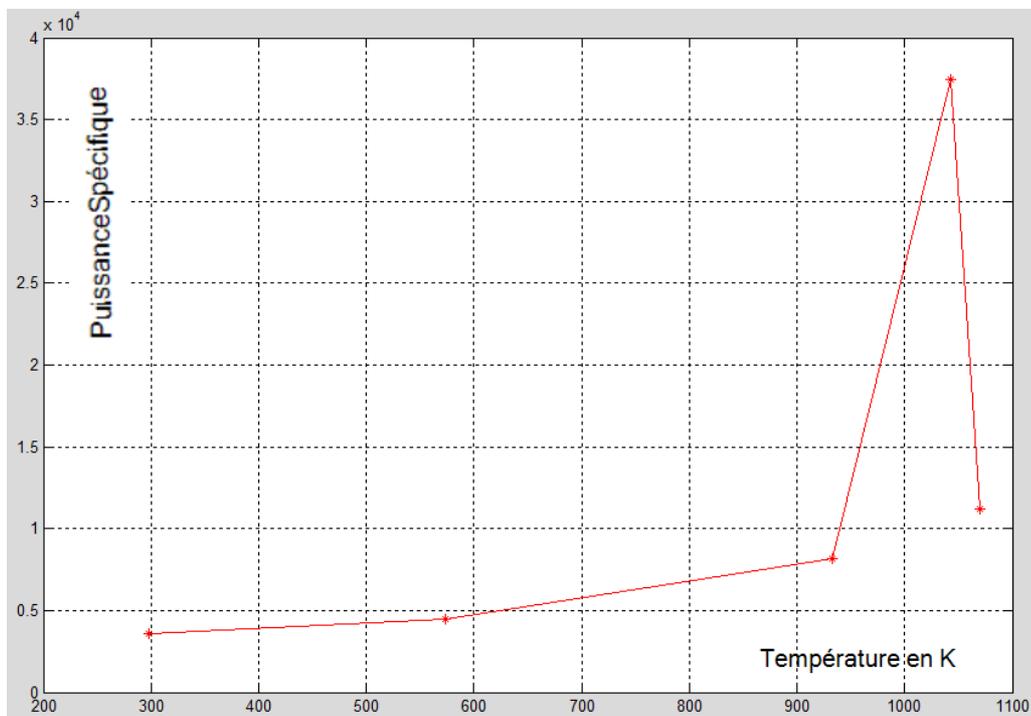


Figure 7. 51. Billette: variation de la puissance spécifique en fonction de la température

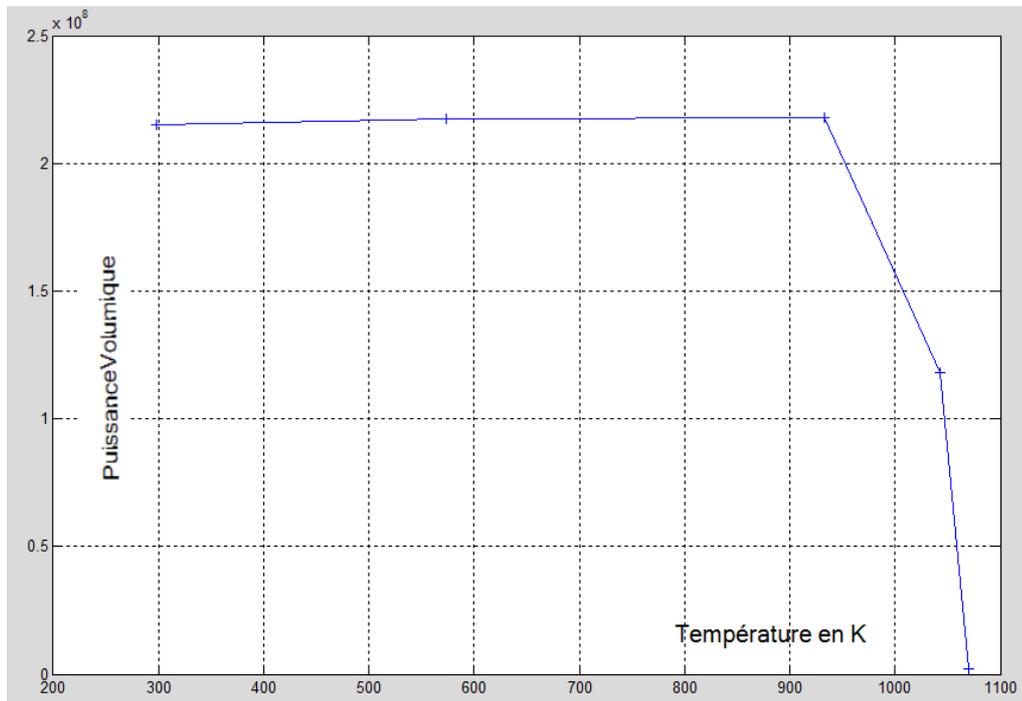


Figure 7.52. Billette: variation de la puissance volumique en fonction de la température

7.8. Conclusion

Les courants et les densités de courant dans l'inducteur et la billette augmentent lentement entre 298K et 933K puis rapidement au-delà.

La puissance spécifique dans la billette augmente lentement entre 298K et 933K, puis très vite entre 933K et la température de Curie 1043K. Pour les températures supérieures à 1043K, elle chute brusquement.

La puissance volumique croît lentement entre 298K et 933K puis décroît jusqu'à la température de Curie pour décroître encore plus rapidement au-delà.

CONCLUSION

La conception et l'optimisation des dispositifs électrotechniques en général, et des dispositifs de chauffage par induction en particulier, nécessitent une analyse d'abord thermique et ensuite électromagnétique.

Nous avons pu modéliser les paramètres physiques qui figurent dans les équations de Maxwell et l'équation de la chaleur qui sont par nature couplées.

La modélisation a porté essentiellement sur la perméabilité relative en fonction du champ magnétique appliqué et de la température avec comme exemple d'application le Fer pur et le Nickel. La modélisation de la capacité calorifique à volume constant des métaux purs a été établie.

Malgré le couplage naturel entre le problème thermique et le problème électromagnétique, il est possible de les traiter séparément. Cela est dû à la particularité des constantes de temps des deux phénomènes. Les constantes de temps thermiques sont nettement supérieures aux constantes de temps électriques.

Nous avons testé, avec succès, les méthodes d'analyse analytique et numérique sur un premier dispositif constitué d'une seule spire inductrice et d'une billette dont la solution numérique était disponible et dont la solution analytique a été établie par nous-mêmes.

Un deuxième dispositif a été étudié. Il consiste en une spire inductrice de grande hauteur et de la même billette. La solution numérique déjà disponible chez deux auteurs a été retrouvée et validée par nous-mêmes.

Les grandeurs les plus significatives calculées dans les applications de chauffage par induction sont le potentiel vecteur magnétique et la densité de courant aussi bien dans l'inducteur que dans la charge elle-même. Mais, c'est la puissance spécifique entrante (W/m^2), calculée par le vecteur de Poynting qui est la plus utile. Elle conditionne, avec la fréquence, l'action à entreprendre: fusion à cœur ou seulement traitement de surface.

La suite logique de ce travail pourrait être la modélisation numérique de l'ensemble inducteur-charge vu entre les bornes d'entrée du courant dans l'inducteur par un dipôle R-L auquel s'ajoute en série la capacité de résonance. Ce circuit RLC série parcouru par un courant sinusoïdal imposé par la puissance à transmettre à la charge et de fréquence imposée par la nature physique de la charge et le rendement prévu, permet le dimensionnement de l'onduleur à résonance série requis.

BIBLIOGRAPHIE

- [BM1] B. MEROUANE chauffage par induction par onduleur à résonance série, étude phénoménologique et modélisation électrique. Thèse de Magister, Juin 1988, USTO
- [BM2] B. MEROUANE Modélisation de la capacité calorifique des métaux. 6ème Séminaire National de Mécanique M'SILA (16, 17, 18 Février 97)
- [BM3] B. MEROUANE Traitement de surface par le procédé du chauffage par induction. Applications. 2èmes Journées Scientifiques et Techniques de L'INH-BOUMERDES, 5 et 6 Mai 97, proceedings pages 335-340.
- [BM4] B. MEROUANE Modélisation de la capacité calorifique par les fonctions de BRILLOUIN et de DEBYE. 8èmes Journées Internationales de Thermique : JITH'97, Institut Universitaire des Systèmes Thermiques Industriels, , Marseille 7-10 Juillet 97, Volume 2, pages 79-86.
- [BM5] B. MEROUANE et M. SEBBANI: Modélisation de la capacité calorifique par les fonctions de BRILLOUIN et de DEBYE. Publication, Revue C.O.S.T (ENSET Oran) N°2 de Décembre 2003.
- [BM6] B. MEROUANE :Modélisation de la capacité calorifique à volume constant C_v par la fonction de DEBYE. 3ème Séminaire International sur la Physique Énergétique (S.I.P.E.3): Centre Universitaire de Béchar 12,13,14 Nov. 96, proceedings , pages 221-224.
- [BM7] B. MEROUANE et H. BAUDRAND Modélisation de la caractéristique magnétique $B=f(H,T)$ en vue de la formalisation du problème magnétothermique .International Conference on Electrotechnics (ICEL'98) :USTO , Oran , Algérie , Octobre 5-7- 1998 Proceedings , pages 428-433.
- [BM8] N.Houari , B.Merouane , D.Hamza Zeriat , K.Naïmi Application de la méthode des Éléments de Frontière à un problème de transfert de chaleur .JNVER'99 (Les Journées Nationales sur la Valorisation des Energies Nouvelles); Tlemcen ,23 et 24 Nov. 1999
- [BM9] B.Merouane , M. Kamli ; M.K.Zemalache ; M.Namoune , et H. Omori : Onduleur à IGBT fonctionnant à Puissance Variable et Fréquence Constante pour Tables à Induction. JNVER'99 (Les Journées Nationales sur la Valorisation des Energies Nouvelles); Tlemcen ,23 et 24 Nov. 1999.

[BM10] B. MEROUANE , M. Kamli ; M.K.Zemalache« Contribution au dessalement d'eau de mer par le procédé du chauffage par induction électrostatique. Application » .SIPE5 : International Meeting on Energetic Physics, C.U.Béchar du 7 au 9 Nov. 2000.

[BM11] M.K.Zemalache ,B.Merouane , M. Kamli ; M.Namoune , et H. Omori « Onduleur PVCF(Puissance Variable et Fréquence Constante) à IGBT destiné aux tables chauffantes par induction électromagnétique ».ICEL'2000 : International Conference on Electrotechnics.13-15 Nov. 2000

[BM12] N. HAOUARI , B. MEROUANE « Applications de la méthode des équations de frontière à un problème de transfert thermique ». CIMASI'2000 : 23-25 Oct.2000, Casablanca, Maroc.

[BM13] B.MEROUANE, M.KAMLI, M.K.ZEMALACHE. " Dessalement de l'eau de mer par le procédé du chauffage par induction électrostatique: calcul du champ thermique." 1^{er} Séminaire sur l'implication de l'Énergie Solaire et Éolienne dans le Développement durable (ENERSOLE 2001), ADRAR ,30-31 Octobre 2001

[BM14] B.MEROUANE, M.KAMLI, M.K.ZEMALACHE « Dessalement de l'eau de mer par le procédé du chauffage par induction électrostatique. Partie I : Modélisation des grandeurs physiques de l'eau de mer ».ICEL'2000 : International Conference on Electrotechnics.13-15 Nov. 2000

[BM15] B.MEROUANE, M.SEBBANI « Modelisation of calorific capacity by the Debye and Brillouin functions for the formalization of the magnetothermal problem ». Advanced materials Research. Vols 941.944(2014). pp2449-2456 ©(2014) Trans Tech Publications, Switzerland.

OUVRAGES DE BASE:

[1]: Charles KITTEL : Introduction à la Physique de l'État Solide. DUNOD, 1972.

[2]: R.L. SPROULL : Éléments de Physique Moderne. Masson, 1967.

[3] : H. BARBER: ELECTROHEAT. Granada Publishing Limited, 1983.

[4] : F. BRICHANT: L'ONDISTOR. DUNOD, 1972.

[5] : G. FOURNET: Électromagnétisme à partir des équations locales. Masson, 1979.

[6] : M. ORFEUIL: Électrothermie industrielle. DUNOD, 1981.

[7]:A. VASSILIEV: Introduction à la Physique Statistique. Ed. MIR, Moscou.

[8]:E.KRASNOCHTCHEKOV, A.SOUKOMEL : Problèmes de transfert de Chaleur. Ed. MIR, Moscou.

[9]:V.DITKINE, A.PROUDNIKOV. Calcul Opérationnel. Ed.MIR, Moscou.

-
- [10]: V.DITKINE, A.PROUDNIKOV. Transformations intégrales et Calcul Opérationnel.
Ed. MIR, Moscou.
- [11]:A.BAKHVALOV: Méthodes Numériques. Ed. MIR, Moscou.
- [12]:A. NIKIFOROV, V.OUVAROV: Fonctions Spéciales de la Physique Mathématique.
Ed. MIR, Moscou.
- [13] :S.GODOUNOV, V.RIABENKI : Schémas aux différences. Ed.MIR, Moscou.
- [14]:A.SAMARSKI, V.ANDREEV: Méthodes aux différences pour équations elliptiques.
Ed. MIR, Moscou.
- [15]: V.VLADIMIROV et COLL: Recueil de problèmes d'équations de Physique
Mathématique. O.P.U.
- [16]:A.N.TIKHONOV, A.A.SAMARSKII: Basic Equations and Special Functions of
Mathematical Physics. Editeur non précisé.
- [17]:Gouri DHATT, Gilbert TOUZOT: Une présentation de la Méthode des Éléments Finis.
MALOINE S.A. Éditeur, Paris.
- [18]:O.C.ZIENKIEWICZ et R.L. TAYLOR: La méthode des éléments finis. Formulation de base
et problèmes linéaires. Traduit par: J.H.Saiac, J.Jaffré, M.Kern, B.Mammeri et A.Marrocco.
- [19]:Brigitte LUCQUIN et Olivier PIRONNEAU: Introduction au calcul scientifique.
Masson Éditeur.
- [20]:G.MARCHOUK, V.AGOCHKOV : Introduction aux Méthodes des Éléments Finis.
Ed. MIR, Moscou.
- [21] : P.A.RAVIART, J.M. THOMAS: Introduction à l'analyse numérique des équations
aux dérivées partielles. MASSON Éditeur.
- [22] : C.CUVELIER, et Col. : Éléments d'équations aux dérivées partielles pour Ingénieurs.
Presses Polytechniques Romandes.
- [23] : P. ARMINJON : Analyse Numérique Matricielle. S.M.S.
- [24]:G.A.M.N.I.2. : Méthodes Numériques dans les Sciences de l'Ingénieur. DUNOD.
- [25]: J.W. CABLE : Induction and Dielectric Heating. Reinhold P.C, New York.
- [26] : LEVASSEUR: Electrochimie et Electrometallurgie. DUNOD, Paris.
- [27] : V. PASCHKIS : Les fours électriques industriels. DUNOD.
- [28] :RIBAUD: Conduction de la chaleur en régime variable. Gauthier Villars.
- [29]: P.G. SIMPSON: Induction Heating, Coil and System Design.

Mc Graw-Hill Book and Co, New-York.

[30]: John F.Cochran and Bretislav Heinrich: Applications of Maxwell's Equations.

Simon Fraser University, Burnaby, B.C.Canada. 01 December 2004

[31]: Miklos KUCZMANN: Potentials Formulations in Magnetics Applying the Finite element Method . University of GYOR, Hungary

[32]:Stanley Humphries Jr : Finite Element Method for Electromagnetics. Téléchargé

[33]: Michael F. MODEST: Radiative Heat Transfer.

Academic Press. The Pennsylvania State University

THESES ET ARTICLES

[34]: R.M. BAKER: Classical Heat Flow Problems Applied to Induction Billet Heating.

Trans. AIEE 1958

[35] :M.KANT: Équations régissant le chauffage par induction

Note de la division électromécanique N°4/78, Université de Compiègne.

[3 6] : D. DELAGE: Aspects électriques et thermiques de la fusion par induction en creuset froid. **Thèse** de Docteur-Ingénieur, INPG, 1982.

[37]:Ange CARUSO: Application de la méthode des éléments de frontière à la modélisation des transferts de chaleur par diffusion thermique.

Thèse du 21/06/1988, Université de Provence

[38]:Qiugen PAN: Contribution à la modélisation des phénomènes magnétothermiques par la méthode des éléments finis. **Thèse** du 28/06/1990. Université Paris VI.

[39]:Abdelkrim SEKKAK: modélisation tridimensionnelle de structures en hyperfréquences par la méthode des éléments finis d'arêtes .Application au chauffage micro-ondes.

Thèse du 29/09/1993. Université de Paris Sud, Centre d'Orsay.

[40]:Jean-Marie BIEDINGER: Contribution à l'étude de la diffusion du champ électromagnétique dans le fer massif (M.A.R.M).

Thèse .Université de technologie de Compiègne (INV.87-40960).

[41]:Jean-Marie BIEDINGER: Contribution à la modélisation numérique des machines électriques mobiles. Note Scientifique n°2/81 de la Division Électromécanique.

Université de technologie de Compiègne.

- [42]: Ahmad EL RAFHI: Étude de l'évolution des propriétés diélectriques et magnétiques des matériaux sous champ micro-onde.
Thèse du 27/05/1997. Institut National Polytechnique de Toulouse.
- [43]: Larbi SETTI: Modélisation de fours micro-ondes à répartition de puissance imposée.
Thèse du 01/06/1995. Institut National Polytechnique de Toulouse.
- [44] : Technique de l'Ingénieur: Applications de l'Électrotechnique, D5.
- [45]: G.DEVELEY: Chauffage par induction électromagnétique: principes.
Technique de l'Ingénieur, D 5-935-3 à 22.
- [46] : P. BONIS: Fours de Fusion à arc et à induction; domaines d'utilisation, description et possibilités actuelles des fours à arc et à induction.
RGE, Tome 84, N°7/8, Juillet-Aout 1975.
- [47]: P.N.MURGATROYD: The Brooks inductor: a study of optimal solenoid cross-sections.
IEE Proceedings, vol.133, Pt.B, N°5, September 1986.
- [48] : ASEA-REVUE: N°5,1976: Four à arc.
- [49] : B.ANCILLE: Cahier des charges pour une interface entre logiciels de calcul de champ.
EDF, Bulletin de la D.E.R., Série B, N°1,1986.
- [50] : A.GAGNOUD et O.SERO-GUILLAUME: le creuset froid de lévitation: modélisation électromagnétique et application. EDF, Bulletin de la DER, N°1,1986.
- [51]: K.R.DAVEY, and W.J.BARNES:T- Ω technique applied to three dimensional eddy current problems using the boundary integral equation.
IEE Proceedings, Vol. 133,Pt.B, N°6, November 1986.
- [52]: A.K.M.AL-SHAIKHLI and L. HOBSON: Novel Technique for the design of induction billet heaters .IEE Proceedings,Vol.133,Pt.B,N°5,September 1986.
- [53] : H.MANSIR, N.BURAI, A.NICOLAS: modélisation et simulation du comportement des capteurs de contrôle non destructif par courants de Foucault.
EDF, Bulletin de la DER, Série B, N°1,1986.
- [54] : R. BONNEFILLE: Le Club Chauffage par induction,
Journal Français de l'Électrothermie N°9, Aout-Septembre 1985.
- [55] : R.WOLF: Impact économique de l'induction.
Journal français de l'Électrothermie, N°9, Aout-Septembre 1985.

-
- [56] : D.DELAGE et R.ERNEST: modélisation électrique d'un système de fusion par induction en creuset froid. RGE, 4/83, Avril 1983.
- [57] : D. DELAGE et R.ERNEST: Prédiction de la répartition du courant dans un inducteur à symétrie de révolution destiné au chauffage par induction MF et HF. RGE, 4/84, Avril 1984.
- [58] : O.NEBI, V. Fireteanu: Finite Element Analysis of an Eddy Current heater for Wind or Water Kinetic Energy conversion into Heat. EPM_NM Laboratory, <http://amotion.pub.ro>
- [59] : Antonio Carlos M. de Queiroz: Mutual Inductance Calculations by Maxwell's Method. Téléchargé
- [60] : Rafael Velasquez Hernandez: Contributions to the Mathematical Study of some Problems in Magnetodynamics and Induction Heating. Universidad de Santiago de Compostella, PHD Dissertation.
- [61]:W.Kasprzak, W.T.Kierkus and J.H.Sokolowski: Applications of High Frequency induction Heating for the metallurgical Simulation and Thermal analysis of Industrial Light Metals Casting Processes. University of Windsor, Ontario, Canada
- [62]:Virgilin Fireteanu, Tiberiu Tudorache: Finite Element Analysis of Aluminium Billet Heating by Rotation in DC Magnetic Fields. EPM_NM Laboratory, Politehnica University of Bucarest.
- [63]:Microondes et hautes fréquences, Volume 1, Congrès international, Nice, 8-10 Oct.1991
- [64]:J.C.SABONNADIÈRE, R.POIROUX: Le chauffage par induction. Journées Nationales sur les APPLICATIONS INDUSTRIELLES DE L'INDUCTION. Grenoble, 21-22-23 Mai 1985
- [65]:CHAUFFAGE PAR INDUCTION. Publication des Ateliers de Construction Électrique de Charleroi (ACEC). Belgique.
- [66] M.IVANES et J.C.SABONNADIÈRE: Calcul du champ magnétique compte tenu de la saturation. RGE, volume 76, 1967, p206-212
- [67] M.V.K. CHARI: Finite Element Solution of the eddy current problem in magnetic

-
- structure. IEEE Trans. PAS, volume 93, 1974, p62-72.
- [68] P. SILVESTER, M.V.K. CHARI: Finite Element Solution of saturable magnetic field problem. IEEE Trans. PAS, volume 89, 1970, p1642-1651.
- [69] DECRETON : Calcul des champs électromagnétiques par la méthode des éléments finis. Bulletin ASE, N°19, 15 Septembre 1973, Volume 53, p84-94.
- [70] Ammar TIBOUCHE et Col: Solution of the Transient Magneto-Thermal Problems Fed by Voltage in Induction Heating Applications.
International Journal of Electrical and Power Engineering 3(5):249-254, ISSN: 1990-7958.
- [71] Renato cardoso Mesquita, Joao Pedro Assumpçao Bastos: 3D Finite Element Solution of Induction Heating Problems with Efficient Time-stepping.
IEEE transactions on Magnetics Vol.27, N°5, September 1991.
- [72] Mouloud FELIACHI, Gérard DEVELEY: Modélisation par éléments finis des phénomènes électromagnétiques et thermiques.
Groupe ELECTROTHERMIE-INDUCTION, IUT BP 420, 44606 St-Nazaire cedex, France
- [73] S. ZERGUINI, A. MERICHED, M. FELIACHI: Résolution du problème de chauffage par induction axisymétrique 2D par la méthode des éléments finis.
L.R.T.I, I.U.T de St Nazaire, BP 420, 44606 St-Nazaire cedex, France
- [74] M. Enokizono: Numerical Analysis of High Frequency Induction Heating Temperature Dependence of Material Characteristics;
IEEE Transactions on Magnetics. Vol.31, N°4, July 1995.
- [75] Liu Zhihui: Analysis of Temperature dependent Magnetisation in Sm-Fe-C Compounds Using a Two-Sublattice Model.
IEEE Transactions on Magnetics. Vol.27, N°3, May 1991
- [76] K.R.Davey, W.J.Barnes: T- Ω technique applied to three-dimensional eddy current problems using the boundary integral equation.
IEE Proceedings, Vol.133, PT.B, N°6, Nov.86

-
- [77] A.Gagnoud, O. Sero Guillaume: Le creuset froid de lévitation: modélisation électromagnétique et application.
EDF, Bulletin de la Direction des Études et Recherches, série B, N°1, 1986, pp41651.
- [78] Daniel Delage, Roland ERNST: Prédiction de la répartition du courant dans un inducteur à symétrie de révolution destiné au chauffage par induction MF et HF.
RGE-4/84-Avril 1984.
- [79] Alain BOSSAVIT: le chauffage par induction des pièces d'acier: aperçus théoriques.
RGE-1/86-Janvier 1986.
- [80] A.KOSTARIDIS, C.SORAS, V.MAKIOS: Magnetostatic Analysis of a Brushless DC Motor Using a Two Dimensional Partial Differential Equation Solver.
University of Patras. Greece
- [81] Valérie LABBE: Modélisation numérique du chauffage par induction. Approche éléments finis et calcul parallèle.
Thèse, 22/04/2002, École Nationale Supérieure des Mines, Paris
- [82] J.E.PARTON, J.T.OWEN, M.S.RAVEN: Applied Electromagnetics