

Université des Sciences et de la Technologie d'Oran –Mohamed Boudiaf



Faculté de Génie Electrique

Département d'Electronique

Said Karoui & Zoubir Mohand Arab

Polycopié de :
Méthodes Numériques

Cours destiné aux étudiants de Licence 2^{ème} Année

Filières : Electronique / Génie Biomédical / Télécommunication

Année universitaire : 2021-2022

Avant-propos

Le présent polycopié se trouve être un support pédagogique de cours, destiné aux étudiants de 2^{ème} Année des Licences LMD assurées au département d'électronique (filières Electronique, Télécommunication et Génie Biomédical). Il constitue une synthèse des méthodes étudiées dans les différents chapitres du cours de Méthodes Numériques. Il rejoint le programme officiel des Licences harmonisées par les comités pédagogiques nationaux de domaines CPND. Les matières requises pour pouvoir suivre les enseignements contenus dans ce polycopié sont : Mathématiques 1, Mathématiques 2, Informatique1, Informatique2 et Informatique 3.

Liste des Figures

| | |
|--|----|
| Figure I.1 : Représentation du théorème des valeurs intermédiaires | 5 |
| Figure I.2 : La méthode de Regula-Falsi | 9 |
| Figure I.3 : La convergence de la méthode des approximations successives | 12 |
| Figure IV.1 : Les méthodes du rectangle | 50 |
| Figure V.1 : Représentation géométrique de la méthode d'Euler | 60 |

Liste des Tableaux

| | |
|--|----|
| Tableau I.1 : Résultat de calcul des itérations (Dichotomie) | 8 |
| Tableau I.2 : Résultat de calcul des itérations (Regula-Falsi) | 10 |
| Tableau I.3 : Résultat de calcul des itérations (App. successives) | 13 |
| Tableau I.4 : Résultat de calcul des itérations (App. successives accélérée) | 15 |
| Tableau I.5 : Résultat de calcul des itérations (Newton-Raphson) | 16 |
| Tableau II.1 : Résultat de calcul de la pyramide des différences divisées | 23 |
| Tableau II.2 : Résultat de calcul de la pyramide des différences finies | 25 |
| Tableau II.3 : Les différences divisées pour le calcul de l'erreur | 27 |
| Tableau VIII.1 : Résultat de calcul des itérations (Jacobi) | 94 |
| Tableau VIII.2 : Résultat de calcul des itérations (Gauss-Seidel) | 97 |

Table des Matières

| | |
|--|----|
| Introduction générale | 1 |
| Chapitre I : Résolution des équations non linéaires | 3 |
| I.1 Introduction du chapitre I..... | 5 |
| I.2 La méthode de dichotomie (Bipartition)..... | 6 |
| I.3 La méthode de Regula-Falsi (Fausse position)..... | 9 |
| I.4 La méthode des approximations successives (Point fixe)..... | 11 |
| I.5 La méthode Newton-Raphson (La tangente)..... | 15 |
| I.6 Conclusion du chapitre I..... | 16 |
| Chapitre II : Interpolation polynômiale | 17 |
| II.1 Introduction du chapitre II..... | 19 |
| II.2 La méthode de Lagrange..... | 20 |
| II.3 La méthode de Newton..... | 22 |
| II.3.1 Méthode de Newton pour les différences divisées..... | 22 |
| II.3.2 Méthode de Newton pour les différences finies..... | 23 |
| II.4 Les erreurs d'interpolation..... | 25 |
| II.4 L'effet Runge..... | 27 |
| II.6 Les polynômes de Tchebychev..... | 28 |
| II.7 Conclusion du chapitre II..... | 30 |
| Chapitre III : Approximation de fonctions | 31 |
| III.1 Introduction du chapitre III..... | 33 |
| III.2 Les polynômes orthogonaux..... | 33 |
| III.3 L'erreur quadratique moyenne..... | 35 |
| III.4 Approximation de fonctions..... | 36 |
| III.4.1 Développement de Taylor..... | 36 |
| III.4.2 Interpolation polynomiale..... | 37 |
| III.4.3 Approximation quadratique..... | 37 |
| III.4.4 Approximation à l'aide de polynômes orthogonaux..... | 40 |
| III.4.5 Approximation trigonométrique..... | 44 |
| III.4 Conclusion du chapitre III..... | 46 |

| | |
|---|----|
| Chapitre IV : Intégration numérique | 47 |
| IV.1 Introduction du chapitre IV..... | 49 |
| IV.2 Les méthodes du rectangle..... | 49 |
| IV.2.1 Méthode du rectangle gauche..... | 49 |
| IV.2.2 Méthode du rectangle droit..... | 49 |
| IV.2.3 Méthode du rectangle central..... | 49 |
| IV.3 La méthode du trapèze..... | 50 |
| IV.4 La méthode de Simpson..... | 52 |
| IV.5 Les erreurs d'intégration..... | 54 |
| IV.6 Les méthodes de Newton-côtes..... | 56 |
| IV.7 Conclusion du chapitre IV..... | 56 |
| | |
| Chapitre V : Résolution des équations différentielles ordinaires | 57 |
| V.1 Introduction du chapitre V..... | 59 |
| V.2 La méthode d'Euler..... | 59 |
| V.3 La méthode d'Euler modifiée..... | 61 |
| V.4 La méthode du point milieu..... | 63 |
| V.5 La méthode de Taylor..... | 64 |
| V.5 La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4..... | 64 |
| V.6 Conclusion du chapitre V..... | 66 |
| | |
| Chapitre VI : Méthodes de résolution directes des systèmes d'équations linéaires | 67 |
| VI.1 Introduction du chapitre VI..... | 69 |
| VI.2 La méthode de Gauss..... | 71 |
| VI.3 La méthode de Gauss-Jordan..... | 75 |
| VI.4 Inversion de matrice avec la méthode de Gauss-Jordan..... | 81 |
| VI.5 La méthode de Cholesky..... | 81 |
| VI.6 Conclusion du chapitre VI..... | 86 |

| | |
|--|-----|
| Chapitre VII : Méthodes de résolution approximatives des systèmes d'équations linéaires | 87 |
| VII.1 Introduction du chapitre VII..... | 89 |
| VII.2 La méthode de Jacobi..... | 90 |
| VII.3 La méthode de Gauss-Seidel..... | 94 |
| VII.4 Conclusion du chapitre VII..... | 97 |
| | |
| Conclusion générale | 99 |
| | |
| Références | 101 |
| Programme officiel | 103 |

Introduction générale

L'analyse numérique permet de résoudre des problèmes de physique et de mathématiques au moyen du calcul arithmétique sous forme d'algorithmes.

On utilise les méthodes numériques quand la résolution analytique du problème est complexe ou impossible, par exemple si on veut résoudre une équation non linéaire du type $Ae^x + B\sin^2(x) + C\ln(x) = 0$. On a recourt aussi à ces méthodes quand la résolution d'un problème est trop complexe et demande beaucoup de calculs, par exemple le calcul par les méthodes classiques du déterminant d'une matrice d'ordre 50 demande $50!$ opérations c.-à-d. $3 \cdot 10^{64}$ opérations. Si on utilise un ordinateur capable d'exécuter 1000 millions d'opérations seconde, le temps de calcul serait 9×10^{47} années !

Aux 18^{ème} et 19^{ème} siècles, les chercheurs tels que Gauss, Fourier et Newton ont développé des algorithmes adaptés au calcul manuel. Après 1945 et avec l'apparition des ordinateurs, les chercheurs se sont intéressés à de nouveaux algorithmes pour une utilisation avec des ordinateurs.

Ce polycopié est composé de 100 pages, il comprend une introduction générale, sept chapitres, une conclusion générale ainsi que la bibliographie.

Chapitre I

Résolution des équations non linéaires

Sommaire du chapitre

| | |
|---|----|
| I.1 Introduction du chapitre I..... | 5 |
| I.2 La méthode de dichotomie (Bipartition)..... | 6 |
| I.3 La méthode de Regula-Falsi (Fausse position)..... | 9 |
| I.4 La méthode des approximations successives (Point fixe)..... | 11 |
| I.5 La méthode Newton-Raphson (La tangente)..... | 15 |
| I.6 Conclusion du chapitre I..... | 16 |

I.1 Introduction du chapitre I

Le but de ce chapitre est de décrire les algorithmes les plus fréquemment utilisés pour la résolution de toute équation $f(x) = 0$ où f est une fonction non linéaire de x . La solution recherchée n'est pas une solution exacte mais sera plutôt une approximation de la solution. Le processus d'approximation consiste à générer une suite $\{x_n\}$ tendant vers la solution x^* quand n tend vers l'infini.

Toutes les méthodes de calcul utilisent la conséquence du théorème des valeurs intermédiaires, parfois appelé théorème de Bolzano:

- Etant donnée une fonction définie, continue et monotone sur l'intervalle $[a, b]$,
- Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires c.à.d. que

$$f(a) \times f(b) < 0$$

Alors $f(x) = 0$ admet une solution unique x^* dans cet intervalle, soit

$$f(x^*) = 0$$

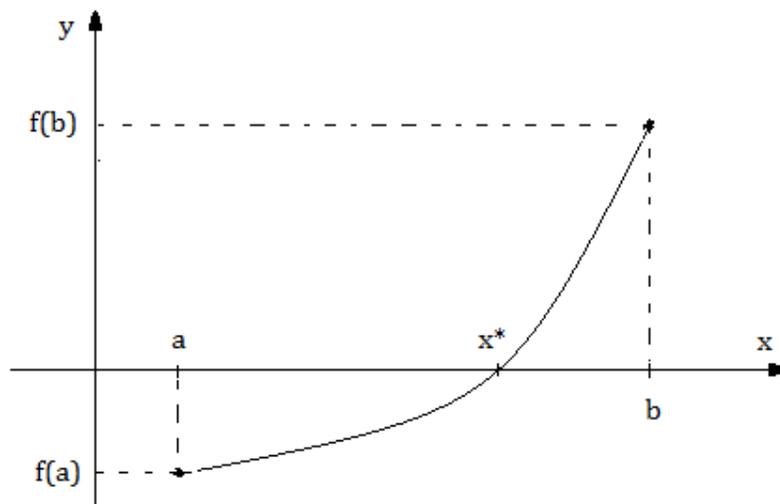


Figure I.1 : Représentation du théorème des valeurs intermédiaires

Exemple

Soit l'équation $f(x) = 0$ où $f(x) = x + 2\ln(x)$. Montrer que cette équation admet une solution unique dans l'intervalle $[0.5, 1]$,

La fonction est définie sur l'intervalle $]0, \infty[$. Elle est continue étant donné qu'elle est la somme de 2 fonctions continues sur le domaine de définition.

$$f(0,5) = -0.17563936$$

$$f(1) = 1.71828183$$

$$f(0,5) \times f(1) < 0$$

La dérivée $f'(x) = 1 + \frac{2}{x}$ est strictement positive sur l'intervalle $[0.5, 1]$ et donc la fonction est croissante sur cet intervalle.

L'équation admet donc une solution unique dans l'intervalle $[0.5, 1]$.

I.2 La méthode de dichotomie (Bipartition)

Le principe de cette méthode consiste à réduire le domaine de délimitation de la solution x^* . Les divisions successives par 2 de la largeur du domaine $[a, b]$ réduiront celle-ci jusqu'à satisfaction de la condition d'arrêt.

$$|b - a| \leq \varepsilon$$

L'algorithme de l'approximation de la solution est le suivant :

1) On calcule c par l'expression :

$$c = \frac{a + b}{2}$$

2) On calcule $f(c)$

3) On compare ensuite $f(c)$ avec $f(a)$

$$\begin{cases} \text{Si } f(c) \times f(a) < 0, & \text{alors } b = c \\ \text{Si } f(c) \times f(a) > 0, & \text{alors } a = c \end{cases}$$

On reprend les étapes précédentes jusqu'à ce que $|c - a| \leq \varepsilon$

Où ε serait la précision du calcul.

On remarque qu'après chaque itération, la largeur du domaine est divisée par 2.

Posant $L_0 = |b - a|$, le domaine de départ

Après l'itération 1 ,

$$L_1 = \frac{L_0}{2}$$

Après l'itération 2 ,

$$L_2 = \frac{L_1}{2} = \frac{L_0}{2^2}$$

Après l'itération 3 ,

$$L_3 = \frac{L_2}{2} = \frac{L_0}{2^3}$$

...

Après l'itération n ,

$$L_n = \frac{L_{n-1}}{2} = \frac{L_0}{2^n}$$

Si n est la dernière itération, on aura $L_n \leq \varepsilon$

Ou encore

$$\frac{|b - a|}{2^n} \leq \varepsilon$$

Cela montre qu'on peut déterminer au préalable le nombre n d'itérations nécessaires pour approximer la solution de l'équation avec une précision ε donnée.

$$n \geq \frac{\text{Log}\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\text{Log}(2)}$$

Exemple

Soit l'équation $f(x) = xe^x - 1 = 0$ qui satisfait au théorème des valeurs intermédiaires dans l'intervalle $[0, 1]$. Résoudre cette équation en utilisant la méthode de dichotomie avec une précision de 10^{-4} . Calculer le nombre d'itération nécessaires pour approximer de la solution de l'équation avec la précision donnée.

Le tableau I.1 résume les étapes pour les différentes itérations. On arrête le processus après 14 itérations, du moment que la largeur du domaine Δ devient inférieure à la précision donnée. La solution de l'équation est $x^* = 0.5671$.

| n | a_n | b_n | c_n | $f(c) \times f(a)$ | Δ |
|-----------|------------|------------|-------------------|--------------------|-------------------|
| 1 | 0,00000000 | 1,00000000 | 0,50000000 | > 0 | 0,50000000 |
| 2 | 0,50000000 | 1,00000000 | 0,75000000 | < 0 | 0,25000000 |
| 3 | 0,50000000 | 0,75000000 | 0,62500000 | < 0 | 0,12500000 |
| 4 | 0,50000000 | 0,62500000 | 0,56250000 | > 0 | 0,06250000 |
| 5 | 0,56250000 | 0,62500000 | 0,59375000 | < 0 | 0,03125000 |
| 6 | 0,56250000 | 0,59375000 | 0,57812500 | < 0 | 0,01562500 |
| 7 | 0,56250000 | 0,57812500 | 0,57031250 | < 0 | 0,00781250 |
| 8 | 0,56250000 | 0,57031250 | 0,56640625 | > 0 | 0,00390625 |
| 9 | 0,56640625 | 0,57031250 | 0,56835938 | < 0 | 0,00195313 |
| 10 | 0,56640625 | 0,56835938 | 0,56738281 | < 0 | 0,00097656 |
| 11 | 0,56640625 | 0,56738281 | 0,56689453 | > 0 | 0,00048828 |
| 12 | 0,56689453 | 0,56738281 | 0,56713867 | > 0 | 0,00024414 |
| 13 | 0,56713867 | 0,56738281 | 0,56726074 | > 0 | 0,00012207 |
| 14 | 0,56713867 | 0,56726074 | 0,56719971 | > 0 | 0,00006104 |

Tableau I.1 : Résultat de calcul des itérations (méthode de dichotomie)

On peut calculer au préalable le nombre n d'itérations nécessaires pour approximer de la solution de l'équation avec la précision donnée.

$$n \geq \frac{\text{Log}\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\text{Log}(2)} \geq 13.28771238$$

Alors $n = 14$.

I.3 La méthode de Regula-Falsi (Fausse position)

Cette méthode est similaire à la méthode précédente, sauf que le principe de subdivision du domaine est différent. La valeur de l'approximation C_i est l'intersection de la corde tirée entre le point A ($a, f(a)$) et le point B ($b, f(b)$) avec l'axe des abscisses.

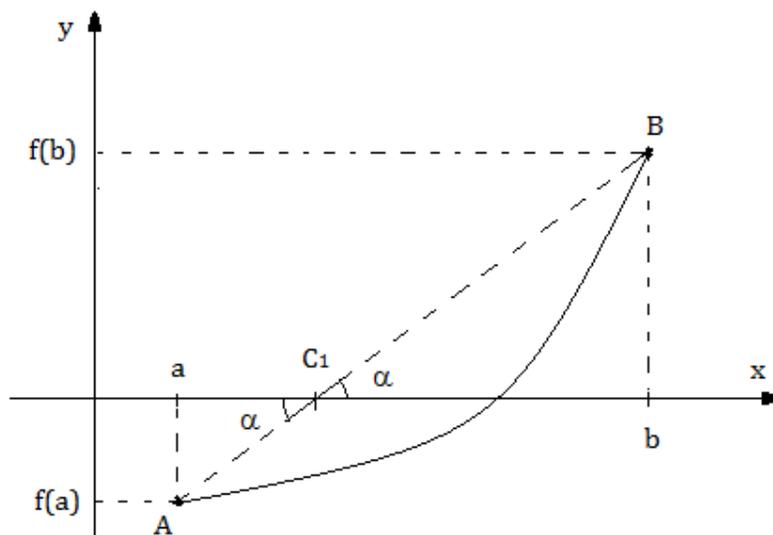


Figure I.2 : La méthode de Regula-Falsi

On remarque de suite sur la figure I.2 les deux angles opposés par le sommet α , formés par la corde tirée entre les points A et B et l'axe des abscisses.

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{f(b) - 0}{b - C_1} = \frac{0 - f(a)}{C_1 - a}$$

Ou encore

$$C_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

De la même manière que pour la méthode de dichotomie, l'algorithme de la méthode de Regula-Falsi se résume comme suit :

1) On calcule C_1 par l'expression :

$$C_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

2) On calcule $f(C_1)$

3) On compare ensuite $f(C_1)$ avec $f(a)$

$$\begin{cases} \text{Si } f(C_1) \times f(a) < 0, & \text{alors } b = C_1 \\ \text{Si } f(C_1) \times f(a) > 0, & \text{alors } a = C_1 \end{cases}$$

On reprend les étapes précédentes jusqu'à ce que $|C_n - C_{n-1}| \leq \varepsilon$

Où ε serait la précision du calcul.

Exemple

Soit l'équation $f(x) = xe^x - 1 = 0$ qui satisfait au théorème des valeurs intermédiaires dans l'intervalle $[0, 1]$. Résoudre cette équation en utilisant la méthode de Regula-Falsi avec une précision de 10^{-4} .

Le tableau I.2 résume les étapes pour les différentes itérations. On arrête le processus après 9 itérations, du moment que la largeur du domaine formé par l'écart entre deux solutions successives devient inférieure à la précision donnée. La solution de l'équation est $x^* = 0.5671$.

| n | a_n | b_n | c_n | $f(c) \times f(a)$ | Δ' |
|----------|------------|------------|-------------------|--------------------|-------------------|
| 1 | 0,00000000 | 1,00000000 | 0,36787944 | > 0 | |
| 2 | 0,36787944 | 1,00000000 | 0,50331433 | > 0 | 0,13543489 |
| 3 | 0,50331433 | 1,00000000 | 0,54741205 | > 0 | 0,04409772 |
| 4 | 0,54741205 | 1,00000000 | 0,56111504 | > 0 | 0,01370299 |
| 5 | 0,56111504 | 1,00000000 | 0,56530829 | > 0 | 0,00419325 |
| 6 | 0,56530829 | 1,00000000 | 0,56658534 | > 0 | 0,00127705 |
| 7 | 0,56658534 | 1,00000000 | 0,56697370 | > 0 | 0,00038836 |
| 8 | 0,56697370 | 1,00000000 | 0,56709175 | > 0 | 0,00011805 |
| 9 | 0,56709175 | 1,00000000 | 0,56712763 | > 0 | 0,00003588 |

Tableau I.2 : Résultat de calcul des itérations (méthode de Regula-Falsi)

I.4 Méthode des approximations successives (Point fixe)

Etant donnée une fonction $g(x)$, s'il existe un point d'abscisse x^* tel que $g(x^*) = x^*$ alors on dit que x^* est le point fixe de g . C'est cette définition qui est le principe de la présente méthode.

Partant de l'équation $f(x) = 0$, on réécrit cette équation sous la forme $x = g(x)$. En prenant le x du côté droit de l'égalité comme la valeur antérieure de x et le x du côté gauche de l'égalité comme la valeur actuelle, soit $x_n = g(x_{n-1})$. On génère une suite $\{x_i\}$ qui doit converger vers x^* .

L'algorithme de la méthode des approximations successives se résume comme suit :

- 1) On part de la valeur initiale x_0
- 2) On calcule itérativement les valeurs de x_n par :

$$x_n = g(x_{n-1})$$

Jusqu'à la satisfaction de la condition d'arrêt.

Les critères d'arrêts peuvent être

$$\begin{cases} |x_n - x_{n-1}| < \varepsilon \\ \frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n|} < \varepsilon \\ |f(x_n)| < \varepsilon \end{cases}$$

La convergence n'est pas toujours assurée. Par exemple, dans le cas de la fonction $g_1(x)$ représentée sur la figure I.3 (a) on voit bien que le processus converge vers la solution x^* . Par contre pour le cas de la fonction $g_2(x)$ représentée sur la figure I.3 (b), le processus diverge.

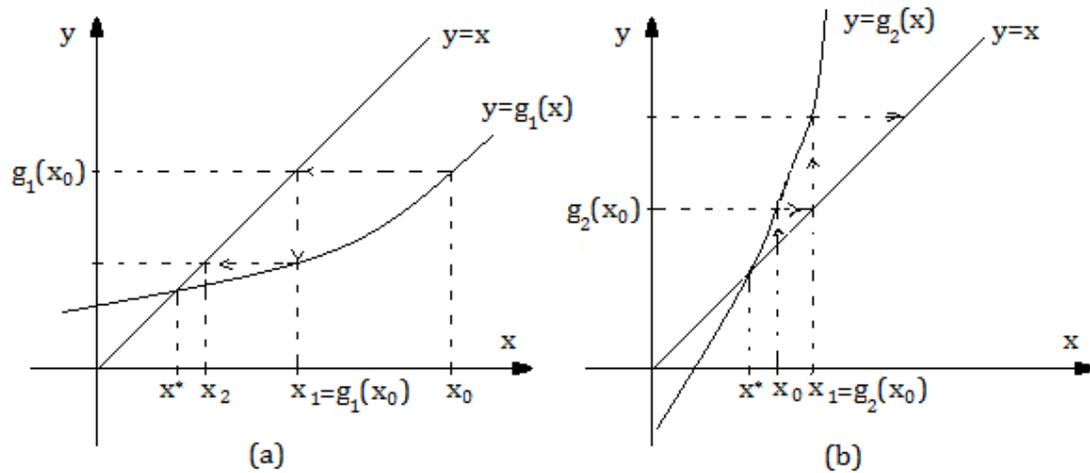


Figure I.3 : La convergence de la méthode des approximations successives

Si on observe bien les deux courbes des fonctions $g_1(x)$ et $g_2(x)$, on remarque que la fonction $g_1(x)$ présente des tangentes de pente inférieure à 1 et que la fonction $g_2(x)$ présente des tangentes de pente supérieure à 1. Ce qui laisse entendre que la pente inférieure à 1 assure la convergence. On retrouvera la même conclusion en partant de la définition des fonctions contractantes.

Une fonction $g(x)$ définie sur un intervalle $[a, b]$ est dite contractante s'il existe un réel L avec $0 < L < 1$ tel que pour tout $x, y \in [a, b]$, on ait

$$|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|$$

Il en découle que $\left| \frac{g(x) - g(y)}{x - y} \right| \leq L < 1$

Si on fait tendre y vers x , le terme à gauche de l'inéquation précédente tendra vers la dérivée $|g'(x)|$, on aura donc la condition de convergence de cette méthode :

$$|g'(x)| < 1$$

Exemple

Soit l'équation $f(x) = xe^x - 1 = 0$ qui satisfait au théorème des valeurs intermédiaires dans l'intervalle $[0, 1]$. Résoudre cette équation en utilisant la méthode des approximations successives avec une précision de 10^{-4} .

Nous allons commencer par vérifier la convergence :

On réécrit l'équation sous la forme $x = e^{-x} = g(x)$

La dérivée $g'(x) = -e^{-x}$

$|g'(x)| < 1$ sur l'intervalle $[0, 1]$, donc la méthode converge.

Le tableau I.3 résume les étapes pour les différentes itérations. On arrête le processus après 18 itérations, du moment que la largeur du domaine formé par l'écart entre deux solutions successives devient inférieure à la précision donnée. La solution de l'équation est $x^* = 0.5671$.

| n | x_n | Δ | n | x_n | Δ' |
|---|------------|------------|-----------|-------------------|-------------------|
| 0 | 0,00000000 | | 10 | 0,56487935 | 0,00626377 |
| 1 | 1,00000000 | 1,00000000 | 11 | 0,56842873 | 0,00354938 |
| 2 | 0,36787944 | 0,63212056 | 12 | 0,56641473 | 0,00201399 |
| 3 | 0,69220063 | 0,32432119 | 13 | 0,56755664 | 0,00114190 |
| 4 | 0,50047350 | 0,19172713 | 14 | 0,56690891 | 0,00064773 |
| 5 | 0,60624354 | 0,10577003 | 15 | 0,56727623 | 0,00036732 |
| 6 | 0,54539579 | 0,06084775 | 16 | 0,56706790 | 0,00020833 |
| 7 | 0,57961234 | 0,03421655 | 17 | 0,56718605 | 0,00011815 |
| 8 | 0,56011546 | 0,01949687 | 18 | 0,56711904 | 0,00006701 |
| 9 | 0,57114312 | 0,01102765 | | | |

Tableau I.3 : Résultat de calcul des itérations (méthode des approximations successives)

La vitesse de convergence de la méthode des approximations successives dépend de la forme de la courbe de $g(x)$. Plus le terme $|g'(x)|$ est proche de 0, plus l'algorithme converge rapidement. Il existe alors un accélérateur de convergence de cette méthode basé sur cette définition. L'algorithme de l'accélérateur est déduit comme suit :

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $\lambda \neq 1$

En partant de l'équation de récurrence $x = g(x)$

On rajoute le terme λx de chaque côté, On obtient $\lambda x + x = \lambda x + g(x)$

Ou encore $x = \frac{\lambda x + g(x)}{\lambda + 1} = G(x)$

Il est facile de montrer que les deux fonctions $g(x)$ et $G(x)$ ont le même point fixe dans la solution de $x = g(x)$ et en même temps celle de $x = G(x)$.

Mais quelle est la valeur de λ ?

On calcule la dérivée de $G(x)$, $G'(x) = \frac{\lambda + g'(x)}{\lambda + 1}$

Idéalement cette dérivée doit être égale à 0

On en déduit $\lambda = -g'(x)$

Cette valeur de λ permet la meilleur vitesse de convergence.

L'algorithme des approximations successives accéléré sera :

- 1) On part de la valeur initiale x_0
- 2) On calcule itérativement les valeurs de x_n par :

$$\lambda = -g'(x_i) \text{ et } x_{i+1} = \frac{\lambda + g(x_i)}{\lambda + 1}$$

Jusqu'à la satisfaction de la condition d'arrêt.

Exemple

Soit l'équation $f(x) = xe^x - 1 = 0$ qui satisfait au théorème des valeurs intermédiaires dans l'intervalle $[0, 1]$. Résoudre cette équation en utilisant la méthode des approximations successives accélérée avec une précision de 10^{-4} .

Le tableau I.4 résume les étapes pour les différentes itérations. On arrête le processus après 4 itérations, du moment que la largeur du domaine formé par l'écart entre deux solutions successives devient inférieure à la précision donnée. La solution de l'équation est $x^* = 0.5671$.

| n | x_n | Δ' |
|----------|-------------------|-------------------|
| 0 | 0,00000000 | |
| 1 | 0,50000000 | 0,50000000 |
| 2 | 0,56631100 | 0,06631100 |
| 3 | 0,56714317 | 0,00083216 |
| 4 | 0,56714329 | 0,00000013 |

Tableau I.4 : Résultat de calcul des itérations (approximations successives accélérée)

1.5 Méthode Newton-Raphson (La tangente)

En écrivant le développement limité d'ordre 1 d'une fonction $f(x)$ au voisinage de x_0 on aura : $f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)$

Si on suppose que x_1 est la solution de l'équation $f(x) = 0$

On pourra écrire : $f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0$

On en déduit : $x_1 = x_0 + \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

Pour la $(i+1)$ ^{ème} itération

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

De la même manière que pour la méthode des approximations successives, l'algorithme converge rapidement si

$$f'(x_i) \neq 0 \text{ et que } \left| \left(x - \frac{f(x)}{f'(x)} \right) \right| < 1$$

L'algorithme de la méthode de Newton-Raphson est :

- 1) On part de la valeur initiale x_0
- 2) On calcule itérativement les valeurs de x_n par :

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Jusqu'à la satisfaction de la condition d'arrêt.

Exemple

Soit l'équation $f(x) = xe^x - 1 = 0$ qui satisfait au théorème des valeurs intermédiaires dans l'intervalle $[0, 1]$. Résoudre cette équation en utilisant la méthode de Newton-Raphson avec une précision de 10^{-4} .

Le tableau suivant résume les étapes pour les différentes itérations. On arrête le processus après 5 itérations, du moment que la largeur du domaine formé par l'écart entre deux solutions successives devient inférieure à la précision donnée. La solution de l'équation est $x^* = 0.5671$.

| n | x_n | Δ' |
|----------|-------------------|-------------------|
| 0 | 0,00000000 | |
| 1 | 1,00000000 | 1,00000000 |
| 2 | 0,68393972 | 0,31606028 |
| 3 | 0,57745448 | 0,10648524 |
| 4 | 0,56722974 | 0,01022474 |
| 5 | 0,56714330 | 0,00008644 |

Tableau I.5 : Résultat de calcul des itérations (méthode de Newton-Raphson)

1.6 Conclusion du chapitre I

Il existe beaucoup d'autres méthodes pour des applications spécifiques. Dans ce chapitre nous avons étudié les méthodes les plus élémentaires. Ces dernières sont plus ou moins performantes. Pour les comparer nous devons estimer le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre la solution avec la précision donnée ainsi que le nombre d'opérations à effectuer pour chaque d'itérations.

Interpolation polynômiale

Sommaire du chapitre

| | |
|---|----|
| II.1 Introduction du chapitre II..... | 19 |
| II.2 La méthode de Lagrange..... | 20 |
| II.3 La méthode de Newton..... | 22 |
| II.3.1 Méthode de Newton pour les différences divisées..... | 22 |
| II.3.2 Méthode de Newton pour les différences finies..... | 23 |
| II.4 Les erreurs d'interpolation..... | 25 |
| II.4 L'effet Runge..... | 27 |
| II.6 Les polynômes de Tchebychev..... | 28 |
| II.7 Conclusion du chapitre II..... | 30 |

II.1 Introduction du chapitre II

Etant donnée une fonction $f(x)$ connue pour un certain nombre de points contenus dans un intervalle $[a, b]$ tel que $a \leq x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq b$.

L'expression analytique de la fonction $f(x)$ n'étant pas connue, on se propose d'approximer cette fonction avec un polynôme $P_n(x)$ de degré inférieur ou égal à n et passant par les points de coordonnées $(x_i, f(x_i))$.

C.-à-d. que $\forall x_i : P_n(x_i) = f(x_i)$

Si on arrive à retrouver ce polynôme, on aurait alors réalisé une interpolation polynomiale. On se pose alors la question de l'existence ainsi que de l'unicité de ce polynôme ?

Si le polynôme $P_n(x)$ existe, il peut s'écrire sous la forme suivante :

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

En remplaçant x par les différentes valeurs x_i , on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + \dots + a_{n-1} x_0 + a_n = P_n(x_0) = y_0 \\ a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} + \dots + a_{n-1} x_1 + a_n = P_n(x_1) = y_1 \\ \dots \\ a_0 x_n^n + a_1 x_n^{n-1} + \dots + a_{n-1} x_n + a_n = P_n(x_n) = y_n \end{cases}$$

Les inconnus sont les coefficients a_i et la matrice V de ce système est appelée matrice de Vander Monde.

$$V = \begin{bmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 \end{bmatrix}$$

On peut montrer que le déterminant de cette matrice est :

$$\det V = \prod_{i=0, j < i}^n (x_j - x_i)$$

Comme tous les points x_i sont différents, le déterminant est différent de zéro, et le système admet une solution unique. Le polynôme $P_n(x)$ donc existe et il est unique.

La détermination du polynôme $P_n(x)$ exige la recherche des coefficients a_i . L'utilisation du système précédent est une mauvaise solution parce que la matrice V est mal conditionnée : les puissances des x_i donnent des différences énormes entre les éléments de la matrice. On va donc présenter des méthodes alternatives simplifiant le calcul du polynôme $P_n(x)$. Ces méthodes ont toutes pour principe le changement de base. On n'utilisera plus la base canonique $(1, x, x^2, x^3, \dots, x^n)$, mais plutôt d'autres bases.

II.2 La méthode de Lagrange

La base de Lagrange dans l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n est définie comme suit :

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Pour toute valeur de x_j différente de x_i le polynôme $L_i(x_j) = 0$

Donc le polynôme $L_i(x)$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$L_i(x) = K(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)$$

Pour toute valeur de x_i le polynôme $L_i(x_i) = 1$

Soit $L_i(x_i) = K(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n) = 1$

$$K = \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

Alors

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

Ou encore

$$L_i(x) = \prod_{i=0, j \neq i}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

$i=0, 1, \dots, n.$

Ce sont les polynômes de Lagrange.

Ceci fait, quel est alors le polynôme d'interpolation de Lagrange $P_n(x)$

Du fait que $L_i(x_i) = 1$ et $L_i(x_j) = 0$

On peut écrire $P_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \dots + y_n L_n(x)$

Ou encore

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot L_i(x)$$

Exemple :

Construire le polynôme d'interpolation de Lagrange $P_2(x)$ qui interpole la fonction $f(x) = \sin(\pi x)$ pour les trois points $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{6}$, et $x_2 = \frac{1}{2}$.

Calculons les ordonnées pour les points $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{6}$, et $x_2 = \frac{1}{2}$

$$y_0 = \sin(0) = 0$$

$$y_1 = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$y_2 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

On calcule les polynômes de Lagrange :

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{\left(x - \frac{1}{6}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\left(0 - \frac{1}{6}\right)\left(0 - \frac{1}{2}\right)} = 12x^2 - 8x + 1$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 0)\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{6} - 0\right)\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right)} = -18x^2 + 9x$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 0)\left(x - \frac{1}{6}\right)}{\left(\frac{1}{2} - 0\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)} = 6x^2 - x$$

$$\text{Alors } P_2(x) = 0 L_0(x) + \frac{1}{2} L_1(x) + 1 L_2(x) = -3x^2 + \frac{7}{2} x$$

II.3 La méthode de Newton

On appelle ainsi cette méthode par rapport à la base de Newton

$$N = \begin{cases} 1 \\ (x - x_0) \\ (x - x_0)(x - x_1) \\ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ \dots \\ (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-2})(x - x_{n-1}) \end{cases}$$

Le polynôme d'interpolation de Newton s'écrirait alors sous la forme suivante :

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

Alors quelles sont les valeurs des coefficients a_i ? Il existe deux méthodes de Newton selon que les points de collocation sont équidistants (la différence entre les abscisses des points successives est constante) ou non.

II.3.1 Méthode de Newton pour les différences divisées

Avant de procéder au calcul des coefficients on va définir les différences divisées :

- La différence divisée d'ordre 0 de x_i : $D(x_i) = f(x_i) = y_i$
- La différence divisée d'ordre 1 de x_i : $D(x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{(x_{i+1} - x_i)} = \frac{D(x_{i+1}) - D(x_i)}{(x_{i+1} - x_i)}$
- La différence divisée d'ordre 2 de x_i : $D(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \frac{D(x_{i+1}, x_{i+2}) - D(x_i, x_{i+1})}{(x_{i+2} - x_i)}$
- ...
- La différence divisée d'ordre k de x_i : $D(x_i, \dots, x_{i+k}) = \frac{D(x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) - D(x_i, \dots, x_{i+k-1})}{(x_{i+k} - x_i)}$

$$\text{Alors } P_n(x_0) = a_0 = f(x_0)$$

$$P_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f(x_0) + a_1(x_1 - x_0) = f(x_1)$$

$$\text{Soit } a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)} = D(x_0, x_1)$$

Et ainsi de suite on démontre que $a_i = D(x_0, x_1, \dots, x_i)$

Exemple :

On va recalculer le polynôme d'interpolation de la fonction $f(x) = \sin(\pi x)$ de l'exemple précédent et pour les mêmes points $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{6}$, et $x_2 = \frac{1}{2}$, à l'aide de la méthode de Newton pour les différences divisées.

| x_0 | $f(x_n)$ | D_1 | D_2 |
|---------------|------------------|---|---|
| 0 | 0 ← a_0 | | |
| $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\frac{1}{2}-0}{\frac{1}{6}-0} = \mathbf{3}$ ← a_1 | |
| $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}} = \frac{3}{2}$ | $\frac{\frac{3}{2}-3}{\frac{1}{2}-0} = \mathbf{-3}$ ← a_2 |

Tableau II.1 : Résultat de calcul de la pyramide des différences divisées

Alors le polynôme d'interpolation de Newton pour les différences divisées est :

$$P_2(x) = 0 + 3(x - 0) - 3(x - 0)\left(x - \frac{1}{6}\right) = -3x^2 + \frac{7}{2}x$$

On a retrouvé exactement le même polynôme, c'est normal puisque on a déjà montré que le polynôme est unique.

II.3.2 Méthode de Newton pour les différences finies

Les points de collocation sont équidistants (la différence entre les abscisses des points successives est constante). On pourra définir le polynôme de Newton en introduisant une autre entité mathématique appelée "différences finie".

Les points sont équidistants donc $\forall x, x_i - x_{i-1} = h = \text{constante}$

On définit les différences finies par:

- La différence finie d'ordre 0 de y_i : $\Delta_{y_i}^0 = f(x_i) = y_i$
- La différence finie d'ordre 1 de y_i : $\Delta_{y_i}^1 = \Delta_{y_{i+1}}^0 - \Delta_{y_i}^0$
- La différence finie d'ordre 2 de y_i : $\Delta_{y_i}^2 = \Delta_{y_{i+1}}^1 - \Delta_{y_i}^1$
- ...
- La différence finie d'ordre k de y_i : $\Delta_{y_i}^k = \Delta_{y_{i+1}}^{k-1} - \Delta_{y_i}^{k-1}$

On peut établir aisément la relation entre les différences divisées et finies :

- $D(x_i) = f(x_i) = \Delta_{y_i}^0$
- $D(x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{(x_{i+1} - x_i)} = \frac{(\Delta_{y_{i+1}}^0 - \Delta_{y_i}^0)}{(x_{i+1} - x_i)} = \frac{\Delta_{y_i}^1}{h}$
- $D(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \frac{(D(x_{i+1}, x_{i+2}) - D(x_i, x_{i+1}))}{(x_{i+2} - x_i)} = \frac{(\Delta_{y_{i+1}}^1 - \Delta_{y_i}^1)}{2h^2} = \frac{\Delta_{y_i}^2}{2h^2}$
- ...
- On peut alors établir que : $D(x_i, \dots, x_{i+k}) = \frac{\Delta_{y_i}^k}{k! h^k}$

Dans ces conditions le polynôme de Newton devient :

$$P_n(x) = \Delta_{y_0}^0 + \frac{\Delta_{y_0}^1}{h} (x - x_0) + \frac{\Delta_{y_0}^2}{2h^2} (x - x_0)(x - x_1) + \dots$$

$$+ \frac{\Delta_{y_0}^n}{n! h^n} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

Exemple :

On va calculer le polynôme d'interpolation à l'aide de la méthode de Newton pour les différences finies de la fonction $f(x)$ définie pour les points $x_0 = 0, x_1 = 1$, et $x_2 = 2$, tels que $f(x_0) = 6, f(x_1) = 6$, et $f(x_2) = 10$.

On calcule la pyramide des différences finies.

| x_0 | $\Delta_{y_0}^0$ | $\Delta_{y_0}^1$ | $\Delta_{y_0}^2$ |
|-------|------------------|-------------------|-------------------|
| 0 | 6 ← a_0 | | |
| 1 | 6 | 6 - 6 = 0 ← a_1 | |
| 2 | 10 | 10 - 6 = 4 | 4 - 0 = 4 ← a_2 |

Tableau II.2 : Résultat de calcul de la pyramide des différences finies

$$P_2(x) = \Delta_{y_0}^0 + \frac{\Delta_{y_0}^1}{h} (x - x_0) + \frac{\Delta_{y_0}^2}{2h^2} (x - x_0)(x - x_1)$$

La valeur du pas d'interpolation $h = 1$

$$P_2(x) = 6 + \frac{0}{1} (x - 0) + \frac{4}{2} (x - 0)(x - 1)$$

$$P_2(x) = 2x^2 - 2x + 6$$

II.4 Les erreurs d'interpolation

Il est clair que le polynôme d'interpolation n'est qu'une approximation de la fonction $f(x)$, ce qui entraîne l'existence d'une erreur $e(x) = P_n(x) - f(x)$.

Théorème : On suppose que $f(x) \in C^{n+1}([a, b])$, c-a-d qu'elle est $(n+1)$ fois dérivable sur l'intervalle $[a, b]$.

Alors $\forall x \in [a, b], \exists \xi \in [a, b]$

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

Ce théorème ne fait finalement appel qu'à une interpolation sur $n+2$ points :

x_0, \dots, x_n, x_{n+1} et ξ annule l'erreur.

Si $M_{n+1} = \max |f^{(n+1)}(x)|$ sur $[a, b]$

Alors

$$e(x) = P_n(x) - f(x) = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right|$$

Donc l'erreur d'interpolation E_i sera

$$E_i(x) \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right|$$

Exemple :

Soit la fonction $f(x)$ définie pour les points $x_0 = 100$, $x_1 = 121$, et $x_2 = 144$, tels que $f(x_0) = 10$, $f(x_1) = 11$, et $f(x_2) = 12$. Si l'on sait qu'en réalité cette fonction n'est autre que la fonction racine de x , $f(x) = \sqrt{x}$. Quelle est alors l'erreur commise lors de l'interpolation de la fonction pour $x = 115$.

On calcule la dérivée d'ordre 3 de $f(x)$:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'''(x) = -\frac{3}{8} x^{-\frac{5}{2}}$$

$$M_3 = \frac{3}{8} (100)^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8} 10^{-5}$$

$$\text{Donc } E_i \leq \frac{3}{8 \cdot 3!} (10)^{-5} \cdot |(115 - 100)(115 - 121)(115 - 144)| \leq 1.63 \cdot 10^{-3}$$

Vérifiant maintenant que le calcul est juste !

On calcule $P_2(115)$ pour cela on dresse d'abord le tableau de la pyramide des différences divisées

| x_0 | $f(x_n)$ | D_1 | D_2 |
|-------|----------|--|--|
| 100 | 10 ← | | |
| 121 | 11 | $\frac{11-10}{121-100} = \frac{1}{21}$ ← | |
| 144 | 12 | $\frac{12-11}{144-121} = \frac{1}{23}$ | $\frac{\frac{1}{23} - \frac{1}{21}}{144-100} = \frac{-2}{21252}$ ← |

Tableau II.3 : La pyramide des différences divisées pour le calcul de l'erreur d'interpolation

$$P_2(115) = 10 + \frac{1}{21} (115 - 100) - \frac{2}{21252} (115 - 100)(115 - 121) = 10.7227555$$

$$f(115) = \sqrt{115} = 10.7238053$$

L'erreur d'interpolation est $|f(115) - P_2(115)| = 1.05 \cdot 10^{-3} \leq 1.63(10)^{-3}$

Donc l'erreur d'interpolation est inférieure à l'erreur maximale E_i .

II.5 L'effet Runge

Runge Carl David est un mathématicien qui s'est intéressé de près à l'erreur d'interpolation aux bords du domaine d'interpolation. On aurait tendance à croire que plus on augmente le nombre de points de collocation, plus l'interpolation est précise. Il s'avère que ce n'est pas toujours le cas. Un exemple traité par Runge est la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Il s'est aperçu que l'erreur aux bords du domaine est plus importante !

Plusieurs articles en parlent sur le Net, il suffit de chercher. On s'intéresse à la façon de minimiser l'erreur d'interpolation

$$E_i(x) \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

La seule entité sur laquelle on peut agir c'est le produit PDD défini comme suit :

$$PDD = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

La manière de minimiser ce produit sera traité dans le paragraphe suivant.

II.6 Les polynômes de Tchebychev

Dans le prolongement de ce qu'on vient de citer, il est clair que pour minimiser le terme PDD. On doit chercher une loi de distribution des x_i qui assure un produit minimum. Pour ce faire, nous allons voir une base formée par les polynômes de Tchebychev et en avoir par la suite son utilité.

Les polynômes de Tchebychev sont définis par la relation trigonométrique suivante :

$$T_n(x) = \cos(n \cdot \text{Arccos}(x))$$

On comprend que le domaine de définition est l'intervalle $[-1, 1]$

$$\forall x, -1 \leq T_n(x) \leq 1$$

$$\text{Si } n = 0, T_0(x) = \cos(0 \cdot \text{Arccos}(x)) = 1$$

$$\text{Si } n = 1, T_1(x) = \cos(1 \cdot \text{Arccos}(x)) = x$$

$$\text{Si } n = 2, T_2(x) = \cos(2 \cdot \text{Arccos}(x)) = \cos(\text{Arccos}(x) + \text{Arccos}(x))$$

$$T_2(x) = \cos(\text{Arccos}(x)) \cos(\text{Arccos}(x)) - \sin(\text{Arccos}(x)) \sin(\text{Arccos}(x))$$

$$T_2(x) = \cos^2(\text{Arccos}(x)) - \sin^2(\text{Arccos}(x))$$

$$T_2(x) = \cos^2(\text{Arccos}(x)) - (1 - \cos^2(\text{Arccos}(x)))$$

$$T_2(x) = 2\cos^2(\text{Arccos}(x)) - 1 = 2x^2 - 1$$

Donc pour $n+1$

$$T_{n+1}(x) = \cos((n+1)\text{Arccos}(x)) = \cos(n\text{Arccos}(x) + \text{Arccos}(x))$$

$$T_{n+1}(x) = \cos(n\text{Arccos}(x)) \cos(\text{Arccos}(x)) - \sin(n\text{Arccos}(x)) \sin(\text{Arccos}(x))$$

De même pour $n-1$

$$T_{n-1}(x) = \cos((n-1)\text{Arccos}(x)) = \cos(n\text{Arccos}(x) - \text{Arccos}(x))$$

$$T_{n-1}(x) = \cos(n\text{Arccos}(x)) \cos(\text{Arccos}(x)) + \sin(n\text{Arccos}(x)) \sin(\text{Arccos}(x))$$

Alors

$$T_{n-1}(x) + T_{n+1}(x) = 2\cos(n\text{Arccos}(x)) \cos(\text{Arccos}(x)) = 2T_n(x) \cdot x$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

C'est la relation de récurrence qui donne les différents polynômes de Tchebychev.

Il se trouve que les solutions des équations $T_n(x) = 0$ minimisent le produit PDD. Donc on recherche $(n+1)$ valeurs qui rendent l'erreur minimale, on va donc les calculer à partir des équations $T_{n+1}(x) = 0$.

$$T_{n+1}(x) = \cos((n+1)\text{Arccos}(x)) = 0$$

La fonction \cos s'annule pour un angle de $\frac{\pi}{2} + k\pi, k = 0 \dots n$

$$\text{Donc pour } (n+1)\text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{2k+1}{2}\pi$$

$$\text{Alors } x = \cos\left(\frac{2k+1}{2(n+1)}\pi\right), k = 0 \dots n$$

Une distribution selon cette expression minimise l'effet Runge. Beaucoup d'écris en parlent sur le Net, il suffit de chercher!

II.7 Conclusion du chapitre II

Nous avons vu dans ce chapitre quelques méthodes permettant d'interpoler une fonction $f(x)$ connue pour un certain nombre de points avec un polynôme $P_n(x)$ de degré inférieur ou égal à n et passant par ces points. Ceci permettra par exemple d'estimer la valeur de la fonction pour les autres points dans l'intervalle de définition. Ils existent d'autres méthodes qui permettent d'approximer une fonction avec des fonctions trigonométriques ou exponentielles.

Approximation de fonctions

Sommaire du chapitre

| | |
|--|----|
| III.1 Introduction du chapitre III..... | 33 |
| III.2 Les polynômes orthogonaux..... | 33 |
| III.3 L'erreur quadratique moyenne..... | 35 |
| III.4 Approximation de fonctions..... | 36 |
| III.4.1 Développement de Taylor..... | 36 |
| III.4.2 Interpolation polynomial..... | 37 |
| III.4.3 Approximation quadratique..... | 37 |
| III.4.4 Approximation à l'aide de polynômes orthogonaux..... | 40 |
| III.4.5 Approximation trigonométrique..... | 44 |
| III.4 Conclusion du chapitre III..... | 46 |

III.1 Introduction du chapitre III

On a déjà vu au chapitre précédent qu'une fonction $f(x)$ définie pour un certain nombre de points $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ et dont l'expression analytique n'est pas connue, peut être approximée par un polynôme $P_n(x)$ de degré n et passant par les points de coordonnées $(x_i, f(x_i))$. On aurait alors réalisé une interpolation polynomiale.

L'objectif de l'approximation est différent par rapport à celui de l'interpolation, la fonction $f(x)$ passant pour le nombre de points $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ peut être connue par son expression analytique ou représentée par son graphe. On peut alors vouloir chercher à remplacer la fonction $f(x)$ par une autre fonction plus simple et plus proche de $f(x)$ dans le but de simplifier les calculs et la représentation. La meilleure approximation est la fonction ayant le plus petit écart avec la fonction $f(x)$.

Il est possible de chercher des polynômes de degré k inférieur à n (le cas le plus simple est par exemple une droite) et qui permettent d'approcher la fonction considérée. Plus le degré k du polynôme est faible, plus les calculs seront simples et plus la précision serait faible. On doit donc étudier le compromis entre la complexité et la précision.

III.2 Les polynômes orthogonaux

Les polynômes orthogonaux permettent d'exprimer simplement le polynôme de meilleure approximation. Soit une fonction $\varphi(x)$ positive et intégrable sur un intervalle $[a, b]$. Les polynômes $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x), \dots$ de degré égal à l'indice n et qui vérifient les deux relations suivantes sont des polynômes orthogonaux.

$$\int_a^b \varphi(x) P_n(x) P_m(x) dx = 0, \quad n \neq m$$

$$\int_a^b \varphi(x) P_n(x) P_n(x) dx = I_n = \text{const.}$$

Le polynôme $P_i(x)$ peut s'écrire sous la forme

$$P_i(x) = C_i^i x^i + C_i^{i-1} x^{i-1} + \dots + C_i^1 x + C_i^0$$

Soit $m < n$, on peut déterminer les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ et faire une combinaison linéaire de ces coefficients et des polynômes $P_0(x), P_1(x), \dots, P_m(x)$. Le résultat de cette combinaison est un polynôme $\Pi_m(x)$ de degré m tels que :

$$\Pi_m(x) = \alpha_0 P_0(x) + \alpha_1 P_1(x) + \dots + \alpha_m P_m(x).$$

$$\Pi_m(x) = \sum_{i=0}^m \alpha_i P_i(x)$$

Si on multiplie cette relation avec le terme $\varphi(x)P_n(x)$ et on intègre on trouve :

$$\int_a^b \varphi(x)P_n(x)\Pi_m(x)dx = \int_a^b \varphi(x)P_n(x) \sum_{i=0}^m \alpha_i P_i(x) dx = 0 \text{ puisque } n < m$$

$$\sum_{i=0}^m \alpha_i \int_a^b \varphi(x)P_n(x)P_i(x)dx = 0$$

Supposons que $\Pi_i(x) = x^i$

$$\int_a^b \varphi(x)P_n(x)x^i dx = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$$

On va maintenant écrire cette relation pour chaque valeur de i

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_a^b \varphi(x)P_n(x)dx = 0, \quad i = 0 \\ \int_a^b \varphi(x)P_n(x)x dx = 0, \quad i = 1 \\ \dots \\ \int_a^b \varphi(x)P_n(x)x^{n-1} dx = 0, \quad i = n-1 \end{array} \right.$$

Et sachant que

$$P_n(x) = C_n^n x^n + C_n^{n-1} x^{n-1} + \dots + C_n^1 x + C_n^0$$

$$\begin{cases} \int_a^b \varphi(x)(C_n^n x^n + C_n^{n-1} x^{n-1} + \dots + C_n^1 x + C_n^0) dx = 0 \\ \int_a^b \varphi(x)(C_n^n x^n + C_n^{n-1} x^{n-1} + \dots + C_n^1 x + C_n^0) x dx = 0 \\ \dots \\ \int_a^b \varphi(x)(C_n^n x^n + C_n^{n-1} x^{n-1} + \dots + C_n^1 x + C_n^0) x^{n-1} dx = 0 \end{cases}$$

Si on pose

$$S_p = \int_a^b \varphi(x) x^p dx$$

$$\begin{cases} C_n^n S_n + C_n^{n-1} S_{n-1} + \dots + C_n^1 S_1 + C_n^0 S_0 = 0 \\ C_n^n S_{n+1} + C_n^{n-1} S_n + \dots + C_n^1 S_2 + C_n^0 S_1 = 0 \\ \dots \\ C_n^n S_{2n-1} + C_n^{n-1} S_n + \dots + C_n^1 S_2 + C_n^0 S_{n-1} = 0 \end{cases}$$

On peut donc calculer les valeurs des S_p et résoudre ce système pour déterminer les coefficients C_n^i et en déduire alors l'expression du polynôme $P_n(x)$. On pourra aussi montrer que ce polynôme est unique.

III.3 L'erreur quadratique moyenne

Soit la fonction $f(x)$ définie sur un intervalle $[a, b]$ et passant par les points de coordonnées $(x_i, f(x_i))$. On désire approximer cette fonction avec une autre fonction $g(x)$. On appelle e_i les écarts ou les résidus entre $f(x)$ et $g(x)$ au point i . Il se définit par la relation suivante $e_i = f(x_i) - g(x_i)$.

L'approximation est optimale quand les résidus sont les plus petits. On définit alors une fonctionnelle qui minimise ces résidus, par exemple l'erreur moyenne EM définie par

$$EM = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |e_i| = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |f(x_i) - g(x_i)|$$

Une autre fonctionnelle qui donne de meilleurs résultats, c'est l'erreur quadratique moyenne EQM définie par :

$$EQM = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e_i^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (f(x_i) - g(x_i))^2$$

III.4 Approximation de fonctions

On présente dans ce paragraphe quelques méthodes utilisées pour l'approximation de fonctions.

III.4.1 Développement de Taylor

L'exemple le plus classique d'approximation d'une fonction par un polynôme est le développement limité de Taylor au voisinage d'un point x_0 .

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \frac{f'(x_0)}{1} + \dots + (x - x_0)^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n)!} + R_n(x)$$

Le reste $R_n(x)$ est une fonction négligeable par rapport à $(x - x_0)^n$ au voisinage de x_0 . Donc on peut approximer la fonction $f(x)$ par le polynôme $P(x)$

$$P(x) = f(x_0) + (x - x_0) \frac{f'(x_0)}{1} + \dots + (x - x_0)^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n)!}$$

III.4.2 Interpolation polynomiale

On a vu au chapitre précédent les différentes méthodes pour approximer une fonction $f(x)$ définie pour un certain nombre de points $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ avec un polynôme $P_n(x)$ de degré n .

III.4.3 Approximation quadratique

L'approximation en moyenne quadratique, encore appelée dans le cas discret approximation des moindres carrés, a été développée par Tchebychev et Hermite au 19^{ème} siècle.

Soit une fonction $f(x)$ définie sur un intervalle $[a, b]$, on définit comme meilleure approximation quadratique de $f(x)$ un polynôme de degré inférieur ou égal à n si l'erreur quadratique moyenne est minimale donc $\sum_{i=1}^N (f(x_i) - P_n(x_i))^2$ serait minimale.

Sachant que $P_n(x)$ peut s'écrire sous la forme de $C_n^n x^n + C_n^{n-1} x^{n-1} + \dots + C_n^1 x + C_n^0$.

On pourrait réécrire les expressions des conditions assurant que l'erreur quadratique moyenne est minimale sous la forme de n équations donc sous la forme d'un système d'équations. La résolution de ce dernier déterminera les coefficients C_n^i et déduira l'expression du polynôme $P_n(x)$.

Pour simplifier les calculs on va supposer que le polynôme d'approximation est une droite, donc $P_n(x) = Ax + B$

On cherche alors à minimiser le terme

$$EQM = \sum_{i=1}^N (f(x_i) - P_n(x_i))^2$$

$$EQM = \sum_{i=1}^N (y_i - Ax_i - B)^2$$

Posons

$$Mx = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

$$Mx^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2$$

$$My = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$$

$$Mxy = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i y_i$$

Le terme EQM étant minimal, les dérivés partiels sont nulles

$$\frac{\partial(EQM)}{\partial A} = \frac{\partial(EQM)}{\partial B} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial(EQM)}{\partial A} = \frac{\partial \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - Ax_i - B)^2}{\partial A} = 2 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - Ax_i - B) (-x_i) = 0 \\ \frac{\partial(EQM)}{\partial B} = \frac{\partial \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - Ax_i - B)^2}{\partial B} = 2 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - Ax_i - B) (-1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - Ax_i - B) (x_i) = 0 \\ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - Ax_i - B) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i + A \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i x_i \\ B \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N 1 + A \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} (Mx)B + (Mx^2)A = (Mxy) \\ 1B + (Mx)A = (My) \end{cases}$$

La résolution de ce système fournira les coefficients A et B.

La droite $y = Ax + B$ s'appelle droite de régression de y par rapport à x .

Exemple

Soit la fonction $f(x)$ connue pour les trois points $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, et $x_2 = 2$. Les valeurs de la fonction pour ces points sont $y_0 = 0$, $y_1 = 1$, et $y_2 = 2$. On désire déterminer l'équation de la droite approximant cette fonction selon le critère des moindres carrés.

Calculons

$$Mx = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = 1$$

$$Mx^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 = \frac{5}{3}$$

$$My = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i = 1$$

$$Mxy = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i y_i = \frac{4}{3}$$

On remplaçant ces valeurs dans le dernier système, on obtient

$$\begin{cases} 1B + \frac{5}{3}A = \frac{4}{3} \\ 1B + 1A = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{3}B + \frac{5}{3}A = \frac{4}{3} \\ \frac{3}{3}B + \frac{3}{3}A = \frac{3}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3B + 5A = 4 \\ 3B + 3A = 3 \end{cases}$$

Soit $A = \frac{1}{2}$ et $B = \frac{1}{2}$ et l'équation de la droite de régression serait $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

III.4.4 Approximation à l'aide de polynômes orthogonaux

Les polynômes orthogonaux permettent d'exprimer simplement le polynôme de meilleure approximation. Il existe plusieurs familles de polynômes orthogonaux, parmi lesquels les polynômes de Legendre, les polynômes de Laguerre, les polynômes de Tchebychev, les polynômes de Hermite, les polynômes de Jacobi, et les autres... Dans ce chapitre on va étudier l'approximation par les polynômes de Tchebychev. Les polynômes de Tchebychev ont été déjà abordés précédemment.

Les polynômes de Tchebychev de première espèce sont définis par la relation

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Avec les conditions initiales

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

La fonction de pondération définie sur un intervalle $[-1, 1]$ est :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

On a déjà montré que :

$$T_n(x) = \cos(n \cdot \text{Arccos}(x)) = \cos(n\theta), \text{ avec } x = \cos(\theta)$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \varphi(x) T_n(x) T_m(x) dx &= \int_{-1}^1 \frac{\cos(n \cdot \text{Arccos}(x)) \cos(m \cdot \text{Arccos}(x))}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(n \cdot \theta) \cos(m \cdot \theta)}{\sqrt{1-\cos^2(\theta)}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(n \cdot \theta) \cos(m \cdot \theta)}{\sqrt{1-\cos^2(\theta)}} (-\sin(\theta)) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(n \cdot \theta) \cos(m \cdot \theta)}{\sqrt{\sin^2(\theta)}} (-\sin(\theta)) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(n \cdot \theta) \cos(m \cdot \theta) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos((n+m)\theta) + \cos((n-m)\theta)}{2} d\theta \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m \\ \pi, & \text{si } n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{si } n = m \neq 0 \end{cases}$$

Ce qui vérifie la condition d'orthogonalité des polynômes de Tchebychev.

Soit maintenant une fonction $f(x)$ définie sur un intervalle, pour un certain nombre de points $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$. Les valeurs de la fonction pour ces points sont $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$. Nous cherchons à approximer la fonction $f(x)$ par un polynôme $P_T(x)$ de degré inférieur ou égal à n dans un intervalle contenant les $n+1$ points. Ce polynôme ne doit pas obligatoirement passer par tous les $n+1$ points, c'est la différence entre l'approximation et l'interpolation.

On se propose maintenant de déterminer ce polynôme $P_T(x)$

$$P_T(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j T_j(v)$$

La fonction $f(x)$ est définie sur un intervalle allant de x_0 à x_n alors que les polynômes de Tchebychev sont définies sur l'intervalle $[-1, 1]$. Il faut faire un changement de variables.

Les polynômes de Tchebychev étant connus

$$T_0(v) = 1$$

$$T_1(v) = v$$

$$T_{n+1}(v) = 2vT_n(v) - T_{n-1}(v)$$

Donc

$$T_0(v) = 1$$

$$T_1(v) = v$$

$$T_2(v) = 2v^2 - 1$$

$$T_3(v) = 4v^3 - 3v$$

...

Il faudrait alors calculer les coefficients α_j , pour ce faire on utilise la relation de l'approximation de la fonction $f(x)$ par le polynôme $P_T(x)$.

$$f(x_i) = P_T(x_i) = \sum_{j=1}^n \alpha_j T_j(v_i) = y_i$$

$$T_j(v_i) = \cos\left(j\pi \frac{2(n-i)+1}{2(n+1)}\right)$$

Donc

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \cos\left(j\pi \frac{2(n-i)+1}{2(n+1)}\right) = y_i$$

On va maintenant écrire cette relation pour chaque valeur de i

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n \alpha_j \cos\left(j\pi \frac{2(n)+1}{2(n+1)}\right) = y_0 \\ \sum_{j=1}^n \alpha_j \cos\left(j\pi \frac{2(n-1)+1}{2(n+1)}\right) = y_1 \\ \dots \\ \sum_{j=1}^n \alpha_j \cos\left(j\pi \frac{2(n-n)+1}{2(n+1)}\right) = y_n \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 + \alpha_1 v_0 + \alpha_2 \cos\left(\pi \frac{2n+1}{n+1}\right) + \dots + \alpha_n \cos\left(j\pi \frac{n(2n+1)}{2(n+1)}\right) = y_0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 \cos\left(\pi \frac{2n-1}{n+1}\right) + \dots + \alpha_n \cos\left(j\pi \frac{n(2n-1)}{2(n+1)}\right) = y_1 \\ \dots \\ \alpha_0 + \alpha_1 v_n + \alpha_2 \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) + \dots + \alpha_n \cos\left(j \frac{n\pi}{2(n+1)}\right) = y_n \end{array} \right.$$

Il suffit maintenant de résoudre ce système pour définir complètement le polynôme recherché.

Exemple

Soit la même fonction $f(x)$ connue pour les trois points $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, et $x_2 = 2$. Les valeurs de la fonction pour ces points sont $y_0 = 0$, $y_1 = 1$, et $y_2 = 2$. On désire approximer la fonction $f(x)$ par un polynôme $P_T(x)$ de degré inférieur ou égal à 2 en utilisant les polynômes orthogonaux de Tchebychev.

Nous allons directement résoudre le système suivant

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + \alpha_2 \cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) = 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 \cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) + \alpha_2 \cos\left(\frac{3}{3}\pi\right) = 1 \\ \alpha_0 + \alpha_1 \cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) + \alpha_2 \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 = 0 \\ \alpha_0 + 0\alpha_1 - 1\alpha_2 = 1 \\ \alpha_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 = 2 \end{cases}$$

La résolution du système donne $\alpha_0 = \frac{2}{3}$, $\alpha_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\alpha_2 = \frac{2}{3}$

$$P_T(x) = \frac{2}{3}T_0(v) + \frac{2}{\sqrt{3}}T_1(v) + \frac{2}{3}T_2(v)$$

La fonction $f(x)$ est définie entre 0 et 2 et les polynômes de Tchebychev entre -1 et 1. Si on opère un petit changement de variable $v = x - 1$, on obtient

$$P_T(x) = \frac{2}{3}T_0(x-1) + \frac{2}{\sqrt{3}}T_1(x-1) + \frac{2}{3}T_2(x-1)$$

$$P_T(x) = \frac{2}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}(x-1) + \frac{2}{3}(2(x-1)^2 - 1)$$

$$P_T(x) = \frac{2}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}(x-1) + \frac{2}{3}(2x^2 + 4x + 1)$$

III.4.5 Approximation trigonométrique

Soit maintenant une fonction $f(x)$ définie sur un intervalle $[-\pi, \pi]$. Il existe $T(x)$ qui représente la meilleure approximation quadratique dans l'espace des polynômes trigonométriques. $T(x)$ s'exprime sous la forme suivante :

$$T(x) = a_0 + \sum_{j=1}^n a_j \cos(jx) + \sum_{j=1}^n b_j \sin(jx)$$

Il faudrait minimiser l'erreur quadratique moyenne

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (f(x_i) - T(x_i))^2$$

Les fonctions trigonométriques suivantes sont orthogonales

$$1, \cos(x), \cos(2x), \dots, \cos(nx), \sin(x), \sin(2x), \dots, \sin(nx)$$

La fonction de pondération définie sur un intervalle $[-\pi, \pi]$ est $\varphi(x) = 1$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) 1 dx = \int_{-\pi}^{\pi} T(x) 1 dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 2\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(jx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} T(x) \cos(jx) dx = a_j \int_{-\pi}^{\pi} \cos(jx) \cos(jx) dx = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(jx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} T(x) \sin(jx) dx = b_j \int_{-\pi}^{\pi} \sin(jx) \sin(jx) dx = \pi$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(jx) dx$$

$$b_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(jx) dx$$

Ces coefficients sont appelés coefficients de Fourier

Exemple

Soit maintenant une fonction périodique $f(x) = x^2$ définie sur un intervalle $[-\pi, \pi]$. Déterminer les coefficients de Fourier et le polynôme $T(x)$ de la meilleure approximation dans l'espace des polynômes trigonométriques.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(jx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(jx) dx = \frac{4(-1)^j}{j^2}$$

$$b_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin(jx) dx = 0$$

$$T(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{j=1}^n \frac{4(-1)^j}{j^2} \cos(jx)$$

$$T(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4 \cos(x) + \cos(2x) - \frac{4}{9} \cos(3x) + \dots + \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(jx)$$

III.5 Conclusion du chapitre III

L'objectif de l'approximation est différent par rapport à celui de l'interpolation. L'approximation permet de remplacer une fonction par une autre fonction plus simple et plus proche dans le but de simplifier les calculs et la représentation. Cette nouvelle fonction ne doit pas obligatoirement passer par tous les $n+1$ points. Dans ce chapitre nous avons étudié quelques méthodes pour l'approximation de fonctions. Il existe bien d'autres méthodes bien documentées sur le Net.

Intégration numérique

Sommaire du chapitre

| | |
|--|----|
| IV.1 Introduction du chapitre IV..... | 49 |
| IV.2 Les méthodes du rectangle..... | 49 |
| IV.2.1 Méthode du rectangle gauche..... | 49 |
| IV.2.2 Méthode du rectangle droit..... | 49 |
| IV.2.3 Méthode du rectangle central..... | 49 |
| IV.3 La méthode du trapèze..... | 50 |
| IV.4 La méthode de Simpson..... | 52 |
| IV.5 Les erreurs d'intégration..... | 54 |
| IV.6 Les méthodes de Newton-côtes..... | 56 |
| IV.7 Conclusion du chapitre IV..... | 56 |

IV.1 Introduction du chapitre IV

L'objectif de ce chapitre c'est l'approximation d'intégrales définies de fonctions. Il existe plusieurs approches, celle qu'on va étudier ici, c'est l'approche par approximation polynomiale. Ces méthodes sont dites "de quadrature". Le principe consiste à approximer l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ par $\int_a^b P_n(x)dx$ où $P_n(x)$ est le polynôme qui interpole la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$.

IV.2 Les méthodes du rectangle

Il existe trois méthodes du rectangle (voir figure IV.1).

IV.2.1 Méthode du rectangle gauche

L'intégrale $I = \int_a^b f(x)dx$ est calculée comme étant la surface d'un rectangle dont la hauteur est $f(a)$. La surface du rectangle est donc $(b - a) \times f(a)$.

IV.2.2 Méthode du rectangle droit

L'intégrale $I = \int_a^b f(x)dx$ est calculée comme étant la surface d'un rectangle dont la hauteur est $f(b)$. La surface du rectangle est donc $(b - a) \times f(b)$.

IV.2.3 Méthode du rectangle central

L'intégrale $I = \int_a^b f(x)dx$ est calculée comme étant la surface d'un rectangle dont la hauteur est $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. La surface du rectangle est donc $(b - a) \times f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

Ces méthodes ne sont pas très utilisées à cause de l'importance de l'erreur d'approximation qu'elles entraînent.

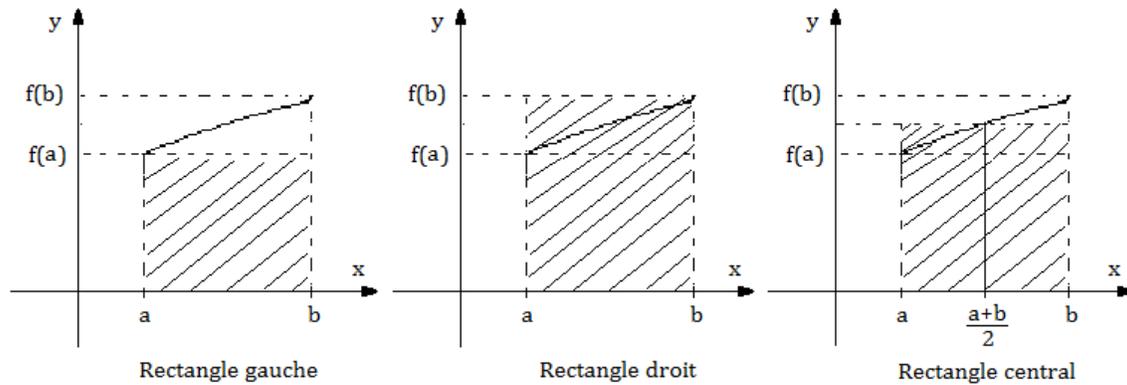


Figure IV.1 : Les méthodes du rectangle

IV.3 La méthode du trapèze

On approxime l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$ par $\int_{x_0}^{x_1} P_1(x)dx$ où $P_1(x)$ est le polynôme d'interpolation de $f(x)$ sur les points x_0 et x_1 .

En utilisant la méthode de Lagrange :

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

$$P_1(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x)$$

$$P_1(x) = y_0 \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} P_1(x)dx = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)} \int_{x_0}^{x_1} (x - x_1)dx + \frac{y_1}{(x_1 - x_0)} \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)dx$$

$$\int_{x_0}^{x_1} P_1(x)dx = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)} \frac{(x - x_1)^2}{2} \Big|_{x_0}^{x_1} + \frac{y_1}{(x_1 - x_0)} \frac{(x - x_0)^2}{2} \Big|_{x_0}^{x_1}$$

Si on note $h = x_1 - x_0$, appelé "pas d'intégration"

$$\int_{x_0}^{x_1} P_1(x) dx = -\frac{y_0(0-h^2)}{h \cdot 2} + \frac{y_1(h^2-0)}{h \cdot 2} = \frac{h}{2}(y_0 + y_1)$$

C'est l'intégrale du trapèze.

Si on subdivise l'intervalle d'intégration $[a, b]$ en n sous intervalles alors on aura $(n+1)$ points distants de h .

Donc $x_0 = a$, $x_1 = x_0 + h, \dots, x_n = b$ et $h = \frac{b-a}{n}$

$$I_1 = \int_{x_0}^{x_1} P_1(x) dx = \frac{h}{2}(y_0 + y_1)$$

$$I_2 = \int_{x_1}^{x_2} P_1(x) dx = \frac{h}{2}(y_1 + y_2)$$

...

$$I_n = \int_{x_{n-1}}^{x_n} P_1(x) dx = \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n)$$

L'intégrale du trapèze généralisée serait alors

$$I_T = \int_{x_0}^{x_n} P_1(x) dx = \frac{h}{2} \left[y_0 + y_n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right]$$

Exemple

Soit à calculer l'approximation par la méthode du trapèze de l'intégrale I_T en prenant un pas d'intégration $h = 0,15$.

$$I_T = \int_1^{1.6} \ln(x) dx$$

Comparer le résultat du calcul avec la valeur exacte de l'intégrale.

$$x_0 = 1, x_1 = x_0 + h = 1.15, x_2 = x_1 + h = 1.30, x_3 = x_2 + h = 1.45, x_4 = x_3 + h = 1.60$$

$$I_T = \frac{h}{2} [Ln(1) + Ln(1.6) + 2(Ln(1.15) + Ln(1.30) + Ln(1.45))]]$$

$$I_T = 0.151304$$

En utilisant une intégration par partie on pourrait facilement déterminer la fonction primitive de $Ln(x)$ c'est la fonction $xLn(x) - x + C$. La valeur exacte de l'intégrale serait :

$$I_E = xLn(x) - x + C \Big|_1^{1.6} = (1.6Ln(1.6) - 1.6) - (1Ln(1) - 1) = 0.152006$$

IV.4 La méthode de Simpson

Pour cette méthode, on approxime l'intégrale $\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx$ par $\int_{x_0}^{x_2} P_2(x)dx$ ou $P_2(x)$ est le polynome d'interpolation de $f(x)$ sur les 3 points x_0, x_1 et x_2

En utilisant la méthode de Lagrange :

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Les points x_0, x_1 et x_2 sont équidistants, donc $x_1 = x_0 + h$, et $x_2 = x_0 + 2h$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_1 - h)}{2h^2} = \frac{(x - x_1)^2 - h(x - x_1)}{2h^2}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_0 - 2h)}{-h^2} = \frac{(x - x_0)^2 - 2h(x - x_0)}{-h^2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_0 - h)}{2h^2} = \frac{(x - x_0)^2 - h(x - x_0)}{2h^2}$$

$$P_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$$

$$\int_{x_0}^{x_2} P_2(x) dx = \frac{y_0}{2h^2} \int_{x_0}^{x_1} ((x - x_1)^2 - h(x - x_1)) dx$$

$$- \frac{y_1}{h^2} \int_{x_0}^{x_1} ((x - x_0)^2 - 2h(x - x_0)) dx + \frac{y_2}{2h^2} \int_{x_0}^{x_1} ((x - x_0)^2 - h(x - x_0)) dx$$

$$\int_{x_0}^{x_2} P_2(x) dx = \frac{y_0}{2h^2} \left[\frac{(x - x_1)^3}{3} - h \frac{(x - x_1)^2}{2} \right] \Big|_{x_0}^{x_2} - \frac{y_1}{h^2} \left[\frac{(x - x_0)^3}{3} - h \frac{(x - x_0)^2}{1} \right] \Big|_{x_0}^{x_2}$$

$$+ \frac{y_2}{2h^2} \left[\frac{(x - x_0)^3}{3} - h \frac{(x - x_0)^2}{2} \right] \Big|_{x_0}^{x_2}$$

$$\int_{x_0}^{x_2} P_2(x) dx = \frac{y_0}{2h^2} \left[\frac{h^3}{3} - h \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + h \frac{h^2}{2} \right] - \frac{y_1}{h^2} \left[\frac{8h^3}{3} - h \frac{4h^2}{1} \right] + \frac{y_2}{2h^2} \left[\frac{8h^3}{3} - h \frac{4h^2}{2} \right]$$

$$\int_{x_0}^{x_2} P_2(x) dx = \frac{h}{3} [y_0 + 4y_1 + y_2]$$

C'est la formule de Simpson.

Si on subdivise l'intervalle d'intégration $[a, b]$ en $2n$ points distants de h donc on aura :

$$I_1 = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2)$$

$$I_2 = \frac{h}{3} (y_2 + 4y_3 + y_4)$$

...

$$I_{n-1} = \frac{h}{3} (y_{2n-4} + 4y_{2n-3} + y_{2n-2})$$

$$I_n = \frac{h}{3} (y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

L'intégrale de Simpson généralisée serait alors

$$I_S = \frac{h}{3} [y_0 + y_{2n} + 4 \sum_{i=0}^{n-1} y_{2i+1} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} y_{2i}]$$

Exemple

Soit à calculer l'approximation par la méthode de Simpson de l'intégrale I_S en prenant un pas d'intégration $h = 0,15$.

$$I_T = \int_1^{1.6} \ln(x) dx$$

Comparer le résultat du calcul avec la valeur exacte de l'intégrale.

$$x_0 = 1, x_1 = x_0 + h = 1.15, x_2 = x_1 + h = 1.30, x_3 = x_2 + h = 1.45, x_4 = x_3 + h = 1.60$$

$$I_S = \frac{h}{3} [\ln(1) + \ln(1.6) + 4(\ln(1.15) + \ln(1.45)) + 2(\ln(1.30))]$$

$$I_T = 0.152002$$

La valeur exacte de l'intégrale déjà calculée précédemment $I_E = 0.152006$.

On voit bien que la méthode de Simpson donne une meilleure précision que la méthode du trapèze.

IV.5 Les erreurs d'intégration

L'erreur d'interpolation comme vue précédemment est donnée par la formule suivante

$$E_i(x) \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right|$$

$$\text{Avec } M_{n+1} = \max |f^{(n+1)}(x)| \text{ sur } [a, b]$$

L'erreur d'intégration approchée serait

$$E_I(x) \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \int_a^b \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right|$$

On peut démontrer que l'erreur d'intégration pour la méthode du trapèze est

$$E_T \leq \frac{M_2}{12n^2} \cdot (b - a)^3$$

Où $M_2 = \max |f''(x)|$ sur $[a, b]$

De même l'erreur d'intégration pour la méthode de Simpson est

$$E_S \leq \frac{M_4}{180N^4} \cdot (b - a)^4$$

Où $M_4 = \max |f^{IV}(x)|$ sur $[a, b]$ et $N = 2n$

Exemple

Quel doit être le nombre de sous intervalles nécessaires pour que l'erreur d'intégration par la méthode du trapèze soit inférieure ou égale à $0.5 \cdot 10^{-4}$.

$$I_T = \int_1^{1.2} \ln(x) dx$$

$$f(x) = \ln(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$M_2 = \max |f''(x)| \text{ sur } [1, 1.2] = 1$$

$$\frac{M_2}{12n^2} \cdot (b - a)^3 \leq 0.00005$$

$$n^2 \geq \frac{M_2}{12 \times 0.00005} \cdot (b - a)^3$$

$$n \geq \sqrt{\frac{M_2}{12 \times 0.00005} \cdot (b - a)^3}$$

$$n \geq \sqrt{\frac{1}{12 \times 0.00005} \cdot (0.2)^3} \geq 3.65$$

Donc $n = 4$

IV.6 Les méthodes de Newton Côtes

Pour les polynômes d'interpolation de degré supérieur ou égal à 3, les formules de Newton-côtes donnent les approximations des intégrales :

$$\text{Pour } n = 3 \quad I_3 = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3)$$

$$\text{Pour } n = 4 \quad I_3 = \frac{4h}{90}(7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + y_4)$$

...

IV.7 Conclusion du chapitre IV

Il y a bien d'autres méthodes avec des approches quelques peu différentes très bien fournies sur le Net, entre autres vous pouvez chercher

- La méthode de Gauss
- La méthode de Romberg
- La méthode de Monté-Carlo

Et bien d'autres...

Chapitre V

Résolution des équations différentielles ordinaires

Sommaire du chapitre

| | |
|--|----|
| V.1 Introduction du chapitre V..... | 59 |
| V.2 La méthode d'Euler..... | 59 |
| V.3 La méthode d'Euler modifiée..... | 61 |
| V.4 La méthode du point milieu..... | 63 |
| V.5 La méthode de Taylor..... | 64 |
| V.5 La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4..... | 64 |
| V.6 Conclusion du chapitre V..... | 66 |

V.1 Introduction du chapitre V

Les équations différentielles ordinaires, appelées aussi problème de Cauchy, sont des équations différentielles du premier ordre avec une condition initiale :

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Les méthodes que l'on va discuter au cours de ce chapitre sont des méthodes dites à "1 pas", parce qu'elles ne font intervenir que la valeur de la fonction au pas précédent. Par opposition à ces méthodes, il existe des méthodes qui font intervenir plusieurs pas de calculs précédents afin d'évaluer la valeur actuelle de y_n . Ces méthodes sont dites "multi pas".

Les méthodes sujettes de ce chapitre sont aussi des méthodes à pas fixe, c.-à-d. que le pas d'intégration est constant, $h = cte$; et il est bon de s'avoir qu'il existe des méthodes à pas adaptatif.

V.2 La méthode d'Euler

Se basant sur le développement limité de y au voisinage de x_0

$$y(x) = y(x_0) + (x - x_0) \frac{y'(x_0)}{1} + (x - x_0)^2 \frac{y''(x_0)}{2!} + \dots + (x - x_0)^n \frac{y^{(n)}(x_0)}{(n)!}$$

La méthode d'Euler consiste à considérer le développement limité du premier ordre :

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$$

Pour $x = x_0$, $y(x_0) = y_0$

Pour $x = x_1$, $y(x_1) = y_1 = y(x_0) + y'(x_0)(x_1 - x_0)$

$$= y_0 + (x_1 - x_0)y'(x_0) = y_0 + h f(x_0, y_0)$$

Avec $h = x_1 - x_0$

Il en va de même pour y_2, y_3, \dots, y_n

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i) \quad i = 0, \dots, n$$

Géométriquement, cette méthode utilise la tangente au point x_0 .

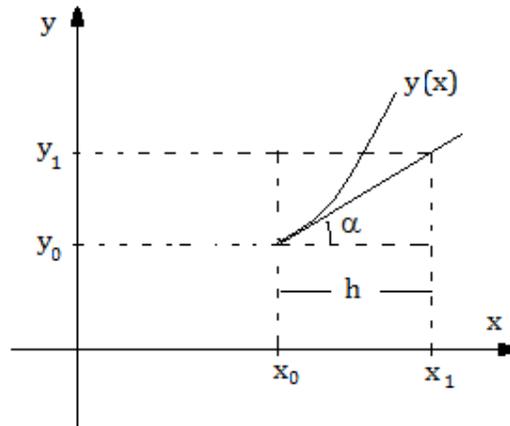


Figure V.1 : Représentation géométrique de la méthode d'Euler

$$y_1 - y_0 = h \operatorname{tg}(\alpha)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha) = y'(x_0) = f(x_0, y_0)$$

$$y_1 - y_0 = h f(x_0, y_0)$$

Donc

$$y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0)$$

On retrouve donc la même formule.

Exemple

Soit l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} y' = x^2 + \frac{y}{x} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Calculer avec la méthode d'Euler, l'approximation de $y(1.2)$ en prenant un pas d'intégration de 0.1, puis comparer avec la valeur exacte de l'intégrale.

$$x_0 = 1, y_0 = y(1) = 1, \text{ et } h = 0.1$$

$$x_1 = x_0 + h = 1.1, y_1 = y(1.1) = y_0 + h f(x_0, y_0) = 1 + 0.1(1^2 + \frac{1}{1}) = 1.2$$

$$x_2 = x_1 + h = 1.2, y_2 = y(1.2) = y_1 + h f(x_1, y_1) = 1.2 + 0.1(1.1^2 + \frac{1.2}{1.1}) = 1.43009$$

La solution exacte de cette équation est $y(x) = \frac{x^3}{2} + \frac{x}{2}$

$$y(1.2) = 1.464$$

L'erreur commise est alors de 0.3391, ce qui représente une erreur assez grande. Ceci est dû au fait que cette méthode cumule les erreurs des pas de calculs précédents.

V.3 La méthode d'Euler modifiée

Dans cette méthode on estime la dérivée au point x_m milieu des points x_i et x_{i+1} .

$$x_m = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$$

La dérivée au milieu est approximée par la moyenne des dérivées au début et à la fin de l'intervalle.

$$y'(x_m) = \frac{y'(x_i) + y'(x_{i+1})}{2}$$

On calcule alors

$$y_{i+1} = y_i + h y'(x_m)$$

$$y_{i+1} = y_i + h \left[\frac{y'(x_i) + y'(x_{i+1})}{2} \right]$$

$$y_{i+1} = y_i + h \left[\frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})}{2} \right]$$

On est maintenant confronté au problème du calcul de $f(x_{i+1}, y_{i+1})$ car l'objectif c'est bien sûr le calcul de y_{i+1} .

On contourne ceci en prenant l'expression de y_{i+1} selon la méthode d'Euler c.-à-d.

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)$$

Alors

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + h f(x_i, y_i))]]$$

C'est la formule d'Euler modifiée.

L'algorithme de la méthode

$$\begin{cases} \text{pour } x = x_i \\ k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + h, y_i + hk_1) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (k_1 + k_2) \end{cases}$$

Exemple

Refaire l'exemple du paragraphe précédent avec la méthode d'Euler modifiée.
Commenter les résultats obtenus.

$$\begin{cases} y' = x^2 + \frac{y}{x} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

$$x_0 = 1, y_0 = y(1) = 1, \text{ et } h = 0.1$$

$$x_1 = 1.1$$

$$k_1 = f(x_0, y_0) = f(1, 1) = 1^2 + \frac{1}{1} = 2$$

$$k_2 = f(x_0 + h, y_0 + hk_1) = f(1.1, 1 + 0.1 \times 2) = f(1.1, 1.2) = 1.1^2 + \frac{1.2}{1.1} = 2.3009$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} (k_1 + k_2) = 1 + \frac{0.1}{2} (2 + 2.3009) = 1.21504$$

$$x_2 = 1.2$$

$$k_1 = f(1.1, 1.21504) = 1.1^2 + \frac{1.21504}{1.1} = 2.31459$$

$$k_2 = f(1.2, 1.21504 + 0.1 \times 2.31459) = f(1.2, 1.44650) = 1.2^2 + \frac{1.44650}{1.2} = 2.64542$$

$$y_2 = 1.21504 + \frac{0.1}{2} (2.31459 + 2.64542) = 1.46304$$

Cette valeur est beaucoup plus proche de la valeur exacte, en effet l'erreur est inférieure à 0.001 et donc la méthode d'Euler modifiée donne une meilleure précision que la méthode d'Euler.

V.4 La méthode du point milieu

Il existe une méthode similaire à la méthode d'Euler modifiée, dite méthode du point milieu.

$$x_m = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} = x_i + \frac{h}{2} = x_{i+1} - \frac{h}{2}$$

$$\begin{cases} y_i = y(x_i) = y\left(x_m - \frac{h}{2}\right) = y(x_m) + (x_i - x_m)y'(x_m) \\ y_{i+1} = y(x_{i+1}) = y\left(x_m + \frac{h}{2}\right) = y(x_m) + (x_{i+1} - x_m)y'(x_m) \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} y_i = y_m - \frac{h}{2}y'(x_m) \\ y_{i+1} = y_m + \frac{h}{2}y'(x_m) \end{cases}$$

$$y_{i+1} - y_i = hy'(x_m)$$

Avec

$$y'(x_m) = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y\left(x_i + \frac{h}{2}\right)\right) = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}f(x_i, y_i)\right)$$

Alors

$$y_{i+1} = y_i + hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}f(x_i, y_i)\right)$$

Cette méthode a la même précision que la méthode d'Euler modifiée. Ces deux méthodes sont aussi appelées les méthodes de Runge-Kutta d'ordre 2.

V.5 La méthode de Taylor

C'est une méthode d'ordre 2 car elle met en œuvre le développement de Taylor d'ordre 2, soit

$$y_{i+1} = y(x_i + h) = y(x_i) + h \frac{y'(x_i)}{1} + h^2 \frac{y''(x_i)}{2!}$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2} \frac{df(x_i, y_i)}{dx}$$

La dérivée de $f(x, y)$ doit impliquer les dérivées partielles parce qu'on dispose de deux variables :

$$df(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy$$

$$\frac{df(x, y)}{dx} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} f(x, y)$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2} \left[\frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial x} + \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial y} f(x_i, y_i) \right]$$

C'est la formule de la méthode de Taylor.

V.6 La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est la méthode à "1 pas" la plus utilisée pour résoudre les équations différentielles ordinaires. L'erreur commise est proportionnelle à h^4 c.-à-d. d'ordre 4.

Cette méthode utilise en premier lieu l'approximation d'Euler au début de l'intervalle au point x_i , on corrige ensuite cette approximation une première fois au milieu de l'intervalle. On corrige ensuite une seconde fois la première correction toujours au milieu de l'intervalle. Enfin on approxime la valeur de l'intégrale à la fin de l'intervalle.

L'algorithme de la méthode

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour } x = x_i \\ k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right) \\ k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{array} \right.$$

Exemple

On reprend l'exemple traité aux paragraphes précédents.

$$x_0 = 1, y_0 = 1, \text{ et } h = 0.1$$

On calcule les 4 coefficients k_i selon les formules précédentes

$$k_1 = 2$$

$$k_2 = 2.150119$$

$$k_3 = 2.157268$$

$$k_4 = 2.315206$$

En fin on calcule y_1

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1.215499$$

$$x_1 = 1.1, y_1 = 1.215499$$

On recalcule les 4 coefficients k_i selon les formules précédentes

$$k_1 = 2.317999$$

$$k_2 = 2.480102$$

$$k_3 = 2.487287$$

$$k_4 = 2.660190$$

Et enfin on calcule y_2

$$y_2 = y_0 + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1.463999$$

On remarque que l'erreur commise en y_2 est de 0.000001

V.7 Conclusion du chapitre V

Nous avons abordé dans ce chapitre quelques méthodes simples pour la résolution des équations différentielles ordinaires. La méthode d'Euler est la plus rapide en termes de calculs mais sa précision est trop faible. La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 demande plus de calculs mais sa précision est très bonne. Il existe bien d'autres méthodes bien documentées sur le Net.

Chapitre VI

Méthodes de résolution directes des systèmes d'équations linéaires

Sommaire du chapitre

| | |
|--|----|
| VI.1 Introduction du chapitre VI..... | 69 |
| VI.2 La méthode de Gauss..... | 71 |
| VI.3 La méthode de Gauss-Jordan..... | 75 |
| VI.4 Inversion de matrice avec la méthode de Gauss-Jordan..... | 81 |
| VI.5 La méthode de Cholesky..... | 81 |
| VI.6 Conclusion du chapitre VI..... | 86 |

VI.1 Introduction du chapitre VI

D'ordinares on utilise la méthode de Cramer, encore appelée méthode des déterminants, pour résoudre des systèmes d'équations linéaires. Le problème majeur de cette méthode est qu'elle implique le calcul de déterminants. Pour calculer le déterminant d'une matrice d'ordre n , on calcule n déterminants d'ordre $n-1$.

$$\text{Det}(A_n) = n \text{Det}(A_{n-1}) = n(n-1) \text{Det}(A_{n-2}) = \dots = n(n-1)(n-2) \dots \text{Det}(A_2) = n!$$

Par exemple le calcul du déterminant d'une matrice d'ordre 50 demande $50!$ opérations c.-à-d. $3 \cdot 10^{64}$ opérations. Si on utilise un ordinateur capable d'exécuter 1000 millions d'opérations seconde, le temps de calcul serait $9 \cdot 10^{47}$ années !!

On va donc dans ce chapitre introduire des méthodes permettant de réaliser les calculs beaucoup plus rapidement, en faisant des combinaisons linéaires entre les lignes de la matrice afin de transformer la matrice considérée en matrice triangulaire ou diagonale. Ceci rendra le système facile à résoudre.

Si par exemple on a le système $AX = B$ avec A une matrice triangulaire inférieure

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Pour résoudre ce système on commence tout simplement avec la première ligne et on détermine directement x_1 :

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

On remplace x_1 dans la deuxième ligne et on détermine x_2 :

$$x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}x_1}{a_{22}}$$

De la i ème ligne on détermine x_i :

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right)x_j \quad i = 1, \dots, n$$

Si on a un système $AX = B$ avec A une matrice triangulaire supérieure

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Pour résoudre ce système on commence avec la dernière ligne (la n ième ligne) et on détermine directement x_n :

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

On remplace x_n dans l'avant dernière ligne (la $n-1$ ième ligne) et on détermine x_{n-1} :

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1}}{a_{(n-1)(n-1)}} - \frac{a_{(n-1)n}x_n}{a_{(n-1)(n-1)}}$$

De la i ème ligne on détermine x_i :

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=i+1}^n \left(\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right)x_j \quad i = n, \dots, 1$$

Si maintenant on a un système $AX = B$ avec A une matrice diagonale

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

De la i ème ligne on détermine x_i :

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}} \quad i = 1, \dots, n$$

VI.2 La méthode de Gauss

Cet algorithme transforme la matrice A en une matrice triangulaire supérieure.

Soit le système suivant :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Pour simplifier la programmation de cette méthode, on rajoute les éléments du vecteur de donnée B à droite des éléments de la matrice A. On construit ainsi une matrice augmentée A|B de n lignes et n+1 colonnes.

$$A|B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{31} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{1n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_{2n+1} \\ a_{31} & a_{31} & \dots & a_{3n} & a_{3n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & a_{nn+1} \end{bmatrix}$$

Pour triangulariser cette matrice on procédera par étapes (n-1 étapes exactement), chaque étape va transformer en éléments nuls, les éléments sous diagonaux de la colonne correspondant au numéro de l'étape en cours.

Etape 1

On va faire apparaître des éléments nuls, à l'endroit des éléments sous diagonaux de la colonne 1. Se basant sur la première ligne qui reste inchangée, on va procéder aux combinaisons suivantes :

$$\begin{bmatrix} \text{ligne 2} = \text{ligne 2} - \frac{a_{21}}{a_{11}} \text{ligne 1} \\ \text{ligne 3} = \text{ligne 3} - \frac{a_{31}}{a_{11}} \text{ligne 1} \\ \dots \\ \text{ligne n} = \text{ligne n} - \frac{a_{n1}}{a_{11}} \text{ligne 1} \end{bmatrix}$$

La matrice augmentée devient

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} & a'_{1n+1} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & a'_{2n+1} \\ 0 & a'_{31} & \dots & a'_{3n} & a'_{3n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} & a'_{nn+1} \end{bmatrix}$$

Etape 2

On va faire apparaître des éléments nuls, à l'endroit des éléments sous diagonaux de la colonne 2. Les deux premières lignes restent inchangées, en se basant sur la deuxième ligne on va procéder aux combinaisons suivantes :

$$\begin{bmatrix} \text{ligne 3} = \text{ligne 3} - \frac{a_{32}}{a_{22}} \text{ligne 2} \\ \text{ligne 4} = \text{ligne 4} - \frac{a_{42}}{a_{22}} \text{ligne 2} \\ \dots \\ \text{ligne n} = \text{ligne n} - \frac{a_{n2}}{a_{22}} \text{ligne 2} \end{bmatrix}$$

La matrice augmentée devient

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{1n+1} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_{2n+1} \\ 0 & 0 & \dots & a_{3n} & a_{3n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} & a_{nn+1} \end{bmatrix}$$

Etape p

On va faire apparaître des éléments nuls, à l'endroit des éléments sous diagonaux de la colonne p. Les p premières lignes restent inchangées, en se basant sur la p ième ligne on va procéder aux combinaisons suivantes :

$$\left[\begin{array}{l} \text{ligne } p + 1 = \text{ligne } p + 1 - \frac{a_{(p+1)p}}{a_{pp}} \text{ligne } p \\ \text{ligne } p + 2 = \text{ligne } p + 2 - \frac{a_{(p+2)p}}{a_{pp}} \text{ligne } p \\ \dots \\ \text{ligne } n = \text{ligne } n - \frac{a_{np}}{a_{pp}} \text{ligne } p \end{array} \right]$$

La matrice augmentée devient

$$\left[\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} & \dots & a_{1n} & a_{1n+1} \\ & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{pp} & \dots & a_{pn} & a_{pn+1} \\ & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{nn} & a_{nn+1} \end{array} \right]$$

Etape n-1

On va faire apparaître un élément nul, sous la diagonale de la colonne n-1. Les n-1 premières lignes restent inchangées, en se basant sur la n-1 ième ligne on va procéder à la combinaison suivante :

$$\text{ligne } n = \text{ligne } n - \frac{a_{n(n-1)}}{a_{(n-1)(n-1)}} \text{ligne } (n-1)$$

La matrice augmentée devient

$$\left[\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} & \dots & a_{1n} & a_{1n+1} \\ & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{pp} & \dots & a_{pn} & a_{pn+1} \\ & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & a_{nn} & a_{nn+1} \end{array} \right]$$

On aurait donc transformé la matrice en triangulaire supérieure. La résolution se fait à l'aide de l'algorithme décrit au paragraphe 1

L'algorithme de la méthode de Gauss

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{De } p = 1 \text{ à } n - 1 \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{De } i = p + 1 \text{ à } n \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{De } j = 1 \text{ à } n + 1 \\ a_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ip}a_{pj}}{a_{pp}} \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

N.B.

Un problème risque de se poser lorsqu'on rencontre un élément nul sur la diagonale ($a_{ii} = 0$). La division par cet élément n'est pas possible, alors on précède à une permutation de la ligne ayant un élément nul de la diagonale avec une autre ligne possédant dans la même colonne un élément non nul ($a_{ji} \neq 0$), et le problème est résolu.

Exemple

Résoudre avec la méthode de Gauss le système suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 11 \end{bmatrix}$$

La matrice augmentée est

$$A|B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 6 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{ligne 2} = \text{ligne 2} - \frac{2}{1} \text{ligne 1} \\ \text{ligne 3} = \text{ligne 3} - \frac{3}{1} \text{ligne 1} \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & 2 \\ 0 & -7 & -3 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\text{ligne 3} = \text{ligne 3} - \frac{7}{4} \text{ligne 2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 15/2 & 15/2 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = \frac{15/2}{15/2} = 1$$

$$x_2 = \frac{2}{-4} - \frac{-6x_3}{-4} = -2$$

$$x_1 = \frac{0}{1} - \frac{3x_2(-2)}{1} - \frac{3x_3}{1} = 3$$

La solution est $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

VI.3 La méthode de Gauss-Jordan

Cette méthode consiste à transformer la matrice A en une matrice diagonale unitaire donc en la matrice identité I. Cette transformation n'est en réalité que la multiplication par la matrice inverse.

$$AX = B$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$IX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

Donc la transformation de A en I entraîne celle de B en X. La méthode de Gauss-Jordan se réalise en n étapes, chacune va transformer la colonne correspondant au numéro de l'étape en la colonne de la matrice I. Chaque étape s'effectue en 2 sous étapes, la normalisation et la réduction.

Soit la matrice augmentée du système

$$A|B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{1n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_{2n+1} \\ a_{31} & a_{31} & \dots & a_{3n} & a_{3n+1} \\ \dots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & a_{nn+1} \end{bmatrix}$$

Etape 1

Normalisation 1

On normalise la ligne 1, c.-à-d. on divise tous les éléments de la ligne 1 par le premier élément. Les autres lignes restent inchangées.

$$\text{ligne 1} = \frac{\text{ligne 1}}{a_{11}}$$

La matrice augmentée devient

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12}/a_{11} & \dots & a_{1n}/a_{11} & a_{1n+1}/a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_{2n+1} \\ a_{31} & a_{31} & \dots & a_{3n} & a_{3n+1} \\ \dots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & a_{nn+1} \end{bmatrix}$$

Réduction 1

La ligne 1 reste inchangée, on réduit les lignes 2 à n selon les combinaisons suivantes :

$$\begin{bmatrix} \text{ligne 2} = \text{ligne 2} - a_{21} \text{ligne 1} \\ \text{ligne 3} = \text{ligne 3} - a_{31} \text{ligne 1} \\ \dots \\ \text{ligne n} = \text{ligne n} - a_{n1} \text{ligne 1} \end{bmatrix}$$

La matrice augmentée devient

$$\begin{bmatrix} 1 & a'_{12} & \dots & a'_{1n} & a'_{1n+1} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & a'_{2n+1} \\ 0 & a'_{31} & \dots & a'_{3n} & a'_{3n+1} \\ \dots & & & & \\ 0 & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} & a'_{nn+1} \end{bmatrix}$$

Etape 2Normalisation 2

On normalise la ligne 2, les autres lignes restent inchangées.

$$\text{ligne 2} = \frac{\text{ligne 2}}{a_{22}}$$

La matrice augmentée devient

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{1n+1} \\ 0 & 1 & \dots & a_{2n} & a_{2n+1} \\ 0 & a_{31} & \dots & a_{3n} & a_{3n+1} \\ & & \dots & & \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} & a_{nn+1} \end{bmatrix}$$

Réduction 2

La ligne 2 reste inchangée, on réduit la ligne 1 et les lignes 3 à n selon les combinaisons suivantes :

$$\begin{bmatrix} \text{ligne 1} = \text{ligne 1} - a_{12}\text{ligne 2} \\ \text{ligne 3} = \text{ligne 3} - a_{32}\text{ligne 2} \\ \dots \\ \text{ligne n} = \text{ligne n} - a_{n2}\text{ligne 2} \end{bmatrix}$$

La matrice augmentée devient

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & a_{1n} & a_{1n+1} \\ 0 & 1 & \dots & a_{2n} & a_{2n+1} \\ 0 & 0 & \dots & a_{3n} & a_{3n+1} \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} & a_{nn+1} \end{bmatrix}$$

Etape pNormalisation p

On normalise la ligne p, les autres lignes restent inchangées.

$$\text{ligne p} = \frac{\text{ligne p}}{a_{pp}}$$

Réduction p

La ligne p reste inchangée, on réduit les lignes 1 à n sauf la ligne p selon :

$$\text{ligne } i = \text{ligne } i - a_{ip} \text{ ligne } p$$

$$i = 1 \text{ à } n \quad i \neq p$$

Etape nNormalisation n

On normalise la ligne n, les autres lignes restent inchangées.

$$\text{ligne } n = \frac{\text{ligne } n}{a_{nn}}$$

Réduction n

La ligne n reste inchangée, on réduit les lignes 1 à n-1 selon :

$$\text{ligne } i = \text{ligne } i - a_{in} \text{ ligne } n$$

$$i = 1 \text{ à } n - 1$$

La matrice augmentée devient

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{1n+1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{2n+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{3n+1} \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{nn+1} \end{bmatrix}$$

La solution du système est directement la dernière colonne

$$X = \begin{bmatrix} a_{1n+1} \\ a_{2n+1} \\ a_{3n+1} \\ \dots \\ a_{nn+1} \end{bmatrix}$$

L'algorithme de la méthode de Gauss-Jordan

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{De } p = 1 \text{ à } n \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{De } j = p \text{ à } n + 1 \\ a_{pj} = \frac{a_{pj}}{a_{pp}} \end{array} \right. \\ \text{De } i = 1 \text{ à } n \quad i \neq p \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{De } j = p \text{ à } n + 1 \\ a_{ij} = a_{ij} - a_{ip}a_{pj} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Exemple

Résoudre avec la méthode de Gauss-Jordan le système suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 11 \end{bmatrix}$$

La matrice augmentée est

$$A|B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 6 & 11 \end{bmatrix}$$

Normalisation 1

$$\text{ligne 1} = \frac{\text{ligne 1}}{a_{11}} = \text{ligne 1}$$

Réduction 1

$$\text{ligne 2} = \text{ligne 2} - a_{21}\text{ligne 1} = \text{ligne 2} - 2\text{ligne 1}$$

$$\text{ligne 3} = \text{ligne 3} - a_{31}\text{ligne 1} = \text{ligne 3} - 3\text{ligne 1}$$

La matrice augmentée devient

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & 2 \\ 0 & -7 & -3 & 11 \end{bmatrix}$$

Normalisation 2

$$\text{ligne 2} = \frac{\text{ligne 2}}{a_{22}} = \frac{\text{ligne 2}}{-4}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1/2 \\ 0 & -7 & -3 & 11 \end{bmatrix}$$

Réduction 2

$$\text{ligne 1} = \text{ligne 1} - a_{12}\text{ligne 2} = \text{ligne 1} - 3\text{ligne 2}$$

$$\text{ligne 3} = \text{ligne 3} - a_{32}\text{ligne 2} = \text{ligne 3} + 7\text{ligne 2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1/2 \\ 0 & 0 & \frac{15}{2} & \frac{15}{2} \end{bmatrix}$$

Normalisation 3

$$\text{ligne 3} = \frac{\text{ligne 3}}{a_{33}} = \frac{\text{ligne 3}}{15/2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Réduction 3

$$\text{ligne 1} = \text{ligne 1} - a_{13}\text{ligne 3} = \text{ligne 1} + \frac{3}{2}\text{ligne 3}$$

$$\text{ligne 2} = \text{ligne 2} - a_{23}\text{ligne 3} = \text{ligne 2} - \frac{3}{2}\text{ligne 3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La solution est $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

VI.4 Inversion de matrices avec la méthode de Gauss-Jordan

Il est possible d'inverser une matrice avec l'algorithme de Gauss-Jordan, le principe est le suivant : On construit une matrice à partir de la concaténation de A et de I. On obtient une matrice A|I de n lignes et de 2n colonnes.

Soit un système $AX = B$ la solution du système est $X = A^{-1}B$.

L'application de l'algorithme de Gauss-Jordan à la matrice A|B produit la matrice $IX = IA^{-1}B$.

L'application de l'algorithme de Gauss-Jordan à la matrice A|I produira la matrice $IA^{-1}I = IA^{-1}$.

Donc à la fin de l'application de l'algorithme de Gauss-Jordan à la matrice A|I on obtient une matrice par la matrice identité à gauche et la matrice A^{-1} à droite.

L'algorithme reste le même, il n'ya que les valeurs finales des boucles qui changent.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{De } p = 1 \text{ à } n \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{De } j = p \text{ à } 2n \\ a_{pj} = \frac{a_{pj}}{a_{pp}} \\ \text{De } i = 1 \text{ à } n \quad i \neq p \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{De } j = p \text{ à } 2n \\ a_{ij} = a_{ij} - a_{ip}a_{pj} \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

VI.5 La méthode de Cholesky

Définition : Une matrice est définie positive si :

- La matrice est symétrique $A = A^t$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^t \cdot A \cdot x \geq 0$

La méthode de Cholesky ne s'applique que si la matrice du système est définie positive. Dans ce cas, \exists une matrice triangulaire inférieure L, tel que $LL^t = A$

L est une matrice triangulaire inférieure

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

L^t est une matrice triangulaire supérieure

$$\begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & \dots & l_{n1} \\ 0 & l_{22} & \dots & l_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & \dots & l_{n1} \\ 0 & l_{22} & \dots & l_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Le but c'est de calculer les éléments de L , pour ce faire nous avons besoin de n étapes.

Etape 1 : Détermination des éléments de la colonne 1 de la matrice L

- ligne 1 x colonne 1

$$l_{11} \times l_{11} = a_{11}, \quad l_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

- ligne i x colonne 1 $i = 2, \dots, n$

$$l_{i1} \times l_{11} = a_{i1}, \quad l_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$$

Etape 2: Détermination des éléments de la colonne 2 de la matrice L

- ligne 2 x colonne 2

$$l_{21} \times l_{21} + l_{22} \times l_{22} = a_{22}, \quad l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2}$$

- ligne i x colonne 2 $i = 3, \dots, n$

$$l_{i1} \times l_{21} + l_{i2} \times l_{22} = a_{i2}, \quad l_{i2} = \frac{a_{i2} - l_{i1} \times l_{21}}{l_{22}}$$

Etape p: Détermination des éléments de la colonne p de la matrice L

- ligne p x colonne p

$$l_{p1} \times l_{p1} + l_{p2} \times l_{p2} + \dots + l_{pp} \times l_{pp} = a_{pp}, \quad l_{pp} = \sqrt{a_{pp} - \sum_{j=1}^{p-1} l_{pj}^2}$$

- ligne i x colonne p $i = p + 1, \dots, n$

$$l_{i1} \times l_{p1} + l_{i2} \times l_{p2} + \dots + l_{ip} \times l_{pp} = a_{ip}, \quad l_{ip} = \frac{a_{ip} - \sum_{j=1}^{p-1} l_{ij} \times l_{pj}}{l_{pp}}$$

L'algorithme d'extraction des éléments de L est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{De } p = 1 \text{ à } n \\ \left\{ \begin{array}{l} l_{pp} = \sqrt{a_{pp} - \sum_{j=1}^{p-1} l_{pj}^2} \\ \text{De } i = p + 1 \text{ à } n \\ \left\{ \begin{array}{l} l_{ip} = \frac{a_{ip} - \sum_{j=1}^{p-1} l_{ij} \times l_{pj}}{l_{pp}} \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Pour résoudre le système

$$AX = B$$

On remplace la matrice A, tel que $L L^t = A$

$$L L^t X = B$$

On opère un changement de variable $L^t X = Y$

$$\text{On aura donc } LY = B$$

La résolution demande une double résolution :

- On commence par résoudre ce dernier système avec l'algorithme décrit au paragraphe 1 (L étant une matrice triangulaire inférieure) et on détermine Y.

- Une fois Y déterminée, on résout en suite le système $L^t X = Y$ toujours avec l'algorithme décrit au paragraphe 1 (L^t étant une matrice triangulaire supérieure) et on détermine ainsi X .

Exemple

Soit le système suivant :

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 23 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Montrer que la matrice du système est définie positive.

Résoudre ce système avec la méthode de Cholesky.

- La matrice est symétrique donc $A = A^t$

$$x^t \cdot A \cdot x = [x_1 \ x_2 \ x_3] \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$x^t \cdot A \cdot x = 6x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 + 2x_1x_3 + 7x_3^2$$

$$x^t \cdot A \cdot x = (4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2) + (x_1^2 + 4x_1x_3 + 4x_3^2) + (x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2)$$

$$x^t \cdot A \cdot x = (x_1 - x_2)^2 + (x_1 + 2x_3)^2 + x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2$$

$$x^t \cdot A \cdot x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Donc la matrice du système est définie positive.

Calculons maintenant les éléments de la matrice L

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Etape 1

$$-l_{11} \times c_1 \Rightarrow l_{11} \times l_{11} = 6 \Rightarrow l_{11} = \sqrt{6}$$

$$-l_{12} \times c_1 \Rightarrow l_{11} \times l_{21} = -2 \Rightarrow l_{21} = \frac{-2}{\sqrt{6}}$$

$$-l_{13} \times c_1 \Rightarrow l_{31} \times l_{11} = 2 \Rightarrow l_{31} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

Etape 2

$$-l_{22} \times c_2 \Rightarrow l_{21} \times l_{21} + l_{22} \times l_{22} = 5 \Rightarrow l_{22} = \sqrt{\frac{13}{3}}$$

$$-l_{32} \times c_2 \Rightarrow l_{31} \times l_{21} + l_{32} \times l_{22} = 0 \Rightarrow l_{32} = \frac{2}{\sqrt{39}}$$

Etape 3

$$-l_{33} \times c_3 \Rightarrow l_{31} \times l_{31} + l_{32} \times l_{32} + l_{33} \times l_{33} = 7 \Rightarrow l_{33} = \frac{9}{\sqrt{13}}$$

$$L = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{13}{3}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{39}} & \frac{9}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}$$

On résout en premier le système $LY = B$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{13}{3}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{39}} & \frac{9}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 23 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = 0, y_2 = 23 \sqrt{\frac{3}{13}}, y_3 = \frac{18}{\sqrt{13}}$$

On résout en suite le système $L^t X = Y$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{6} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \sqrt{\frac{13}{3}} & \frac{2}{\sqrt{39}} \\ 0 & 0 & \frac{9}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 23\sqrt{\frac{3}{13}} \\ \frac{18}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}$$

$$x_3 = 2, x_2 = 5, x_1 = 1$$

VI.6 Conclusion du chapitre VI

Il existe bien d'autres méthodes qu'il serait bon d'étudier, entre autres la factorisation LU pour des matrices quelconques. Aussi la méthode de Thomas pour les systèmes à matrice tridiagonale. Il existe aussi des méthodes dites indirectes qui seront traitées dans le chapitre suivant.

Chapitre VII

Méthodes de résolution approximatives des systèmes d'équations linéaires

Sommaire du chapitre

| | |
|---|----|
| VII.1 Introduction du chapitre VII..... | 89 |
| VII.2 Méthodes de Jacobi..... | 90 |
| VII.3 Méthodes de Gauss-Seidel..... | 94 |
| VII.4 Conclusion du chapitre VII..... | 97 |

VII.1 Introduction du chapitre VII

Les méthodes directes de résolution de systèmes d'équations de type $AX = B$ sont efficaces quand le degré des systèmes est inférieur à 100 et quand la matrice A est pleine (c.-à-d. ne contenant pas beaucoup de zéros). Pour les systèmes de degré supérieur à 100 ou quand la matrice A est creuse (c.-à-d. contenant beaucoup de zéros), les méthodes directes nécessitent beaucoup de temps de calcul et sont peu précises à cause des erreurs d'arrondi cumulées. Dans ce cas on utilise plutôt les méthodes indirectes ou itératives.

Les méthodes itératives se présentent comme des généralisations des méthodes des approximations successives utilisées pour la résolution des équations non linéaires traitées dans le premier chapitre. Le principe consiste à considérer un vecteur de départ $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ et à calculer les valeurs successives d'une suite de vecteurs $X^k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$ convergeant vers le vecteur solution $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$.

Pour cela on doit exprimer X^{k+1} en fonction de X^k .

On commence par décomposer la matrice A sous la forme de :

$$A = M - N$$

Avec M une matrice facile à inverser, par exemple la matrice diagonale de A .

$$AX = B$$

$$(M - N)X = B$$

$$MX - NX = B$$

$$MX = NX + B$$

$$X = M^{-1}NX + M^{-1}B$$

Donc le formule itérative serait :

$$X^{k+1} = M^{-1}NX^k + M^{-1}B = G(X)$$

On pose X^0
 On calcule $X^1 = M^{-1}NX^0 + M^{-1}B$
 $X^2 = M^{-1}NX^1 + M^{-1}B$
 ...
 $X^{n+1} = M^{-1}NX^n + M^{-1}B$

X^n converge vers X^* .

VII.2 La méthode de Jacobi

On suppose que les éléments de la diagonale de la matrice A sont tous différents de zéro.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Soit D la matrice formée par les éléments de la diagonale de la matrice A .

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Soit L la matrice formée par les opposés des éléments du triangle inférieur de A .

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Soit U la matrice formée par les opposés des éléments du triangle supérieur de A .

$$U = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

On pourra décomposer A sous la forme $A = D - L - U$.

$$AX = B$$

$$(D - L - U)X = B$$

$$DX - (L + U)X = B$$

$$DX = (L + U)X + B$$

$$X = D^{-1}(L + U)X + D^{-1}B$$

Le terme $D^{-1}(L + U)$ c'est la matrice de Jacobi J .

$$\text{Donc } X = JX + D^{-1}B$$

$$\text{Avec } J = D^{-1}(L + U)$$

La formule itérative serait :

$$X^{k+1} = JX^k + D^{-1}B = G(X)$$

On peut déterminer facilement les termes J et $D^{-1}B$

$$J = D^{-1}(L + U) = D^{-1}(D - A) = I - D^{-1}A, \text{ ou } I \text{ est la matrice identité}$$

D^{-1} est la matrice inverse de D , elle est donc formée par les inverses des éléments de la diagonale de D .

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$D^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

$$D^{-1}A = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

L'algorithme de Jacobi est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{On choisit } X^0 \\ \text{De } k = 1 \text{ à } \dots \text{ condition d'arrêt} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{De } i = 1 \text{ à } n \\ x_i^{k+1} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left(\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right) x_j^k \end{array} \right. \end{array} \right.$$

conditions d'arrêt

$$|x_i^{p+1} - x_i^p| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{x_i^{p+1} - x_i^p}{x_i^{p+1}} \right| < \varepsilon$$

Une condition de convergence suffisante et très utilisée est que la diagonale de A soit strictement dominante, soit pour toute valeur de i :

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$

La méthode de Jacobi requiert $3n^2$ opérations par itération et nécessite $n^2 + 3n$ emplacements mémoires pour stocker A, B, X^p et X^{p+1} .

Exemple

Soit à résoudre le système suivant avec la méthode de Jacobi et une précision de 0.05:

$$\begin{cases} 5x_1 - 1x_2 - 1x_3 - 1x_4 = -4 \\ -1x_1 + 10x_2 - 1x_3 - 1x_4 = 12 \\ -1x_1 - 1x_2 + 5x_3 - 1x_4 = 8 \\ -1x_1 - 1x_2 - 1x_3 + 10x_4 = 34 \end{cases}$$

On voit bien que la diagonale de la matrice A est strictement dominante, donc la condition de convergence est vérifiée.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 10 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 10 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/10 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad L + U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J = D^{-1}(L + U) = \begin{bmatrix} 0 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/10 & 0 & 1/10 & 1/10 \\ 1/5 & 1/5 & 0 & 1/5 \\ 1/10 & 1/10 & 1/10 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D^{-1}B = \begin{bmatrix} -4/5 \\ 12/10 \\ 8/5 \\ 34/10 \end{bmatrix}$$

$$X^{k+1} = JX^k + D^{-1}B$$

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \frac{-4 + (1x_2^k + 1x_3^k + 1x_4^k)}{5} \\ x_2^{k+1} = \frac{12 + (1x_1^k + 1x_3^k + 1x_4^k)}{10} \\ x_3^{k+1} = \frac{8 + (1x_1^k + 1x_2^k + 1x_4^k)}{5} \\ x_4^{k+1} = \frac{34 + (1x_1^k + 1x_2^k + 1x_3^k)}{10} \end{cases}$$

N.B. on peut utiliser directement les formules de l'algorithme de Jacobi sans calculer les matrices J et $D^{-1}B$.

On choisit $X^0 = (0, 0, 0, 0)$ et on dresse maintenant un tableau qui récapitule les calculs des différentes itérations. On arrête à l'itération 6 qui vérifie la condition d'arrêt $|x_i^{p+1} - x_i^p| < 0.05$ et on voit bien que la suite tend vers $X^* = (1, 2, 3, 4)$.

| p | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---------|---|-----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| x_1^p | 0 | -0.800000 | 0.440000 | 0.716000 | 0.882800 | 0.947480 | 0.977276 |
| x_2^p | 0 | 1.200000 | 1.620000 | 1.840000 | 1.929000 | 1.969120 | 1.986474 |
| x_3^p | 0 | 1.600000 | 2.360000 | 2.732000 | 2.879600 | 2.948120 | 2.977148 |
| x_4^p | 0 | 3.400000 | 3.600000 | 3.842000 | 3.928800 | 3.969140 | 3.986472 |

Tableau VIII.1 : Résultat de calcul des itérations (méthode de Jacobi)

VII.3 La méthode de Gauss-Seidel

Pour la méthode de Gauss-Seidel on pourra décomposer A sous la forme $A = D - L - U$.

$$AX = B$$

$$(D - L - U)X = B$$

$$(D - L)X - UX = B$$

$$(D - L)X = UX + B$$

$$X = (D - L)^{-1}UX + (D - L)^{-1}B$$

La formule itérative serait :

$$X^{k+1} = (D - L)^{-1}UX^k + (D - L)^{-1}B$$

Le problème c'est la complexité du calcul de $(D - L)^{-1}$.

On propose donc une autre formule itérative.

$$(D - L)X^{k+1} = UX^k + B$$

$$DX^{k+1} - LX^{k+1} = UX^k + B$$

$$DX^{k+1} = LX^{k+1} + UX^k + B$$

La nouvelle formule itérative serait :

$$X^{k+1} = D^{-1}LX^{k+1} + D^{-1}UX^k + D^{-1}B$$

$$D^{-1}L = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ a_{11} & & & \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21}/a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}/a_{nn} & a_{n2}/a_{nn} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$D^{-1}U = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ a_{11} & & & \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & a_{12}/a_{11} & \dots & a_{1n}/a_{11} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2n}/a_{22} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

L'algorithme de Gauss-Seidel est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{On choisit } X^0 \\ \text{De } k = 1 \text{ à } \dots \text{ condition d'arrêt} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{De } i = 1 \text{ à } n \\ x_i^{k+1} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right) x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n \left(\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right) x_j^k \end{array} \right. \end{array} \right.$$

conditions d'arrêt

$$|x_i^{p+1} - x_i^p| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{x_i^{p+1} - x_i^p}{x_i^{p+1}} \right| < \varepsilon$$

La méthode de Gauss-Seidel requiert $3n^2$ opérations par itération et nécessite $n^2 + 2n$ emplacements mémoires pour stocker A, B, X^p et X^{p+1} .

Exemple

Soit à résoudre le même système traité dans le paragraphe précédent avec la méthode Gauss-Seidel et une précision encore de 0.05:

$$\begin{cases} 5x_1 - 1x_2 - 1x_3 - 1x_4 = -4 \\ -1x_1 + 10x_2 - 1x_3 - 1x_4 = 12 \\ -1x_1 - 1x_2 + 5x_3 - 1x_4 = 8 \\ -1x_1 - 1x_2 - 1x_3 + 10x_4 = 34 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \frac{-4 + (1x_2^k + 1x_3^k + 1x_4^k)}{5} \\ x_2^{k+1} = \frac{12 + (1x_1^{k+1} + 1x_3^k + 1x_4^k)}{10} \\ x_3^{k+1} = \frac{8 + (1x_1^{k+1} + 1x_2^{k+1} + 1x_4^k)}{5} \\ x_4^{k+1} = \frac{34 + (1x_1^{k+1} + 1x_2^{k+1} + 1x_3^{k+1})}{10} \end{cases}$$

On choisit $X^0 = (0, 0, 0, 0)$ et on dresse un tableau qui récapitule les calculs des différentes itérations. On arrête à l'itération 5 qui vérifie la condition d'arrêt $|x_i^{p+1} - x_i^p| < 0.05$ et on voit bien que la suite tend vers la même solution c.-à-d. $X^* = (1, 2, 3, 4)$.

| p | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---------|---|-------------|------------|------------|------------|------------|
| x_1^p | 0 | -0.80000000 | 0.47648000 | 0.88913075 | 0.9900057 | 0.99514069 |
| x_2^p | 0 | 1.12000000 | 1.77388800 | 1.95608965 | 1.99059138 | 1.99802528 |
| x_3^p | 0 | 1.66400000 | 2.76975360 | 2.94944651 | 2.98941173 | 2.99777327 |
| x_4^p | 0 | 3.59840000 | 3.90201216 | 3.97946669 | 3.99570037 | 3.99909392 |

Tableau VIII.2 : Résultat de calcul des itérations (méthode de Gauss-Seidel)

VII.4 Conclusion du chapitre VII

Dans ce chapitre nous avons étudié quelques méthodes indirectes de résolution de systèmes d'équations. Il existe bien d'autres méthodes entre autres vous pouvez chercher

- La méthode de Relaxation
- La méthode du Gradient conjugué
- La méthode de Krylov

Ces méthodes sont parfois appliquées sous certaines conditions sur la morphologie de la matrice A.

Conclusion générale

Dans ce polycopié nous avons fait une synthèse des méthodes étudiées dans les sept chapitres couvrant le cours de Méthodes Numériques. Dans le premier chapitre nous avons vu les méthodes de résolution des équations non linéaires. Les méthodes permettant d'interpoler une fonction ont fait l'objet du deuxième chapitre. Le troisième chapitre a été consacré à l'étude de quelques méthodes pour l'approximation de fonctions. Dans le quatrième chapitre nous avons abordé les méthodes de calculs des intégrales définies de fonctions. Dans le cinquième chapitre nous avons étudié quelques méthodes simples pour la résolution des équations différentielles ordinaires. Dans le sixième chapitre nous avons traité les méthodes de résolution directe des systèmes d'équations linéaires. Enfin dans le septième chapitre nous avons abordé quelques méthodes indirectes de résolution de systèmes d'équations.

Une fois toutes ces méthodes maîtrisées et effectuées manuellement, il serait bon d'automatiser les étapes des opérations pour chaque méthode avec Excel. Il serait aussi très recommandé de programmer les différents algorithmes sous MATLAB ou à défaut à l'aide d'un autre langage de programmation haut niveau tel que le C ou le Pascal.

Références

- [1] C. Brezinski, Introduction à la pratique du calcul numérique, Dunod, Paris 1988.
- [2] G. Allaire et S.M. Kaber, Algèbre linéaire numérique, Ellipses, 2002.
- [3] G. Allaire et S.M. Kaber, Introduction à Scilab. Exercices pratiques corrigés d'algèbre linéaire, Ellipses, 2002.
- [4] G. Christol, A. Cot et C.-M. Marle, Calcul différentiel, Ellipses, 1996.
- [5] M. Crouzeix et A.-L. Mignot, Analyse numérique des équations différentielles, Masson, 1983.
- [6] S. Delabrière et M. Postel, Méthodes d'approximation. Équations différentielles. Applications Scilab, Ellipses, 2004.
- [7] J.-P. Demailly, Analyse numérique et équations différentielles. Presses Universitaires de Grenoble, 1996.
- [8] E. Hairer, S. P. Norsett et G. Wanner, Solving Ordinary Differential Equations, Springer, 1993.
- [9] P. G. Ciarlet, Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation, Masson, Paris, 1982.
- [10] M. Lakrib, Cours d'analyse numérique, OPU Alger 2008.
- [11] B. Demidovitch, I. Maron, Elément de calcul numérique, Ed. MIR, Moscou, 1979.
- [12] N. Abramesco, Les polynômes orthogonaux, Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 24 (1932).
- [13] Franck Jedrzejewski, Introduction aux méthodes numériques Deuxième édition Springer-Verlag France, Paris 2005.

Semestre: 4

Unité d'enseignement: UEF 2.2.2

Matière 1: Méthodes numériques

VHS: 45h00 (Cours: 1h30, TD: 1h30)

Crédits: 4

Coefficient: 2

Objectifs de l'enseignement :

Familiarisation avec les méthodes numériques et leurs applications dans le domaine des calculs mathématiques.

Connaissances préalables recommandées :

Mathématiques 1, Mathématiques 2, Informatique 1 et informatique 2.

Contenu de la matière :

Chapitre 1. Résolution des équations non linéaires $f(x)=0$ (3 Semaines)

1. Introduction sur les erreurs de calcul et les approximations, 2. Introduction sur les méthodes de résolution des équations non linéaires, 3. Méthode de bisection, 4. Méthode des approximations successives (point fixe), 5. Méthode de Newton-Raphson.

Chapitre 2. Interpolation polynomiale (2 Semaines)

1. Introduction générale, 2. Polynôme de Lagrange, 3. Polynômes de Newton.

Chapitre 3. Approximation de fonction : (2 Semaines)

1. Méthode d'approximation et moyenne quadratique. 2. Systèmes orthogonaux ou pseudo-Orthogonaux. Approximation par des polynômes orthogonaux, 3. Approximation trigonométrique.

Chapitre 4. Intégration numérique (2 Semaines)

1. Introduction générale, 2. Méthode du trapèze, 3. Méthode de Simpson, 4. Formules de quadrature.

**Chapitre 5. Résolution des équations différentielles ordinaires
(Problème de la condition initiale ou de Cauchy) (2 Semaines)**

1. Introduction générale, 2. Méthode d'Euler, 3. Méthode d'Euler améliorée, 4. Méthode de Runge-Kutta.

Chapitre 6. Méthode de résolution directe des systèmes d'équations linéaires (2 Semaines)

1. Introduction et définitions, 2. Méthode de Gauss et pivotation, 3. Méthode de factorisation LU, 4. Méthode de factorisation de Choleski MM^t , 5. Algorithme de Thomas (TDMA) pour les systèmes tri diagonales.

Chapitre 7. Méthode de résolution approximative des systèmes d'équations linéaires (2 Semaines)

1. Introduction et définitions, 2. Méthode de Jacobi, 3. Méthode de Gauss-Seidel, 4. Utilisation de la relaxation.

Mode d'évaluation :

Contrôle continu : 40 % ; Examen final : 60 %.

Références bibliographiques :

1. C. Brezinski, Introduction à la pratique du calcul numérique, Dunod, Paris 1988.
2. G. Allaire et S.M. Kaber, Algèbre linéaire numérique, Ellipses, 2002.
3. G. Allaire et S.M. Kaber, Introduction à Scilab. Exercices pratiques corrigés d'algèbre linéaire, Ellipses, 2002.
4. G. Christol, A. Cot et C.-M. Marle, Calcul différentiel, Ellipses, 1996.
5. M. Crouzeix et A.-L. Mignot, Analyse numérique des équations différentielles, Masson, 1983.
6. S. Delabrière et M. Postel, Méthodes d'approximation. Équations différentielles. Applications Scilab, Ellipses, 2004.
7. J.-P. Demailly, Analyse numérique et équations différentielles. Presses Universitaires de Grenoble, 1996.
8. E. Hairer, S. P. Norsett et G. Wanner, Solving Ordinary Differential Equations, Springer, 1993.
9. P. G. Ciarlet, Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation, Masson, Paris, 1982.

Le présent polycopié se trouve être un support pédagogique de cours, destiné aux étudiants de 2^{ème} Année des Licences LMD assurées au département d'électronique (filères Electronique, Télécommunication et Génie Biomédical). Il forme une synthèse des méthodes étudiées dans les différents chapitres du cours de Méthodes Numériques. Il rejoint le programme officiel des Licences harmonisées par les comités pédagogiques nationaux de domaines CPND. Les matières requises pour pouvoir suivre les enseignements contenus dans ce polycopié sont : Mathématiques 1, Mathématiques 2, Informatique1, Informatique2 et Informatique 3.

S. Karoui & Z Mohand Arab