

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des sciences et de la technologie
Mohamed Boudiaf (Oran)
Faculté : Génie Mécanique
Département : Génie Maritime



SUPPORT DE COURS EN

Méthode numérique

Cours destiné aux étudiants de
2^{ème} année LMD

Cours
Travaux dirigés
Travaux pratiques

Par Dr. Nateche tahar

Année Universitaire 2024-2025

Avant-propos

Ce document constitue un support pédagogique destiné au cours de "**Méthodes numériques et programmation**", conçu pour les étudiants de deuxième année de licence (LMD) en génie maritime. L'objectif principal de ce cours est d'initier les étudiants à divers outils numériques permettant de résoudre des problèmes mathématiques rencontrés dans les sciences physiques et l'ingénierie.

Les leçons présentées dans ce document sont accompagnées d'exercices corrigés de manière détaillée, offrant aux étudiants une occasion de mettre en pratique les concepts étudiés. De plus, des applications sous forme de travaux pratiques sont proposées à la fin de chaque section, permettant à ceux qui souhaitent approfondir leur compréhension de renforcer leurs compétences. Les étudiants sont vivement encouragés à résoudre des exercices supplémentaires afin de consolider leur maîtrise des méthodes numériques.

Chaque chapitre de ce document correspond à une séance de cours et est structuré comme suit :

- **Cours** : Chaque chapitre contient un cours enrichi d'exemples pratiques, suivi d'une liste d'exercices d'application.
- **Travaux Dirigés (TD)** : Chaque chapitre comprend un énoncé de TD accompagné de solutions détaillées pour illustrer et approfondir les concepts abordés.
- **Travaux Pratiques (TP)** : Les travaux pratiques sont conçus pour être réalisés en salle machine. Ils permettent aux étudiants de mettre en œuvre les méthodes numériques étudiées, en utilisant le langage de programmation Fortran.
- **Exercices supplémentaires** : Une série d'exercices avec corrigés types est proposée pour aider les étudiants à se préparer efficacement et à consolider leurs connaissances.

Ce document vise à fournir aux étudiants les outils nécessaires pour comprendre et appliquer les méthodes numériques dans un cadre académique et professionnel.

Table des Matières

Leçon 1 : Résolution des équations non linéaires

1.1	Position du problème	1
1.2	Localisation des racines d'une équation $f(x)=0$	1
1.3	Méthode de dichotomie (ou de la bisection).....	2
1.4	Méthode de Newton-Raphson	3
1.5	Exercices avec corrections	4
	Travaux Dirigés 1- Résolution des équations non linéaires	8
	Travaux Pratiques 1- Résolution des équations non linéaires	13

Leçon 2 : Dérivation numérique

2.1	Dérivation numérique	18
2.2	Calcul des dérivées d'ordre supérieur	19
2.3	Exercices avec correction	20
	Travaux Dirigés 2- Dérivation numérique	23
	Travaux Pratiques 2- Dérivation numérique	27

Leçon 3 : Intégration Numérique

3.1	Position du problème	31
3.2	Principe	31
3.3	Méthodes des rectangles	31
3.4	Méthode des trapèzes	33
3.5	Méthode de Simpson	34
3.6	Exercices avec correction.....	35
	Travaux Dirigés 3- Intégration Numérique	38
	Travaux Pratiques 3- Intégration Numérique	41

Leçon 4 : Interpolation et approximation de fonctions

4.1	Position du problème d'interpolation	45
4.2	Interpolation linéaire	45
4.3	Interpolation quadratique	46
4.4	Polynôme d'interpolation de Lagrange	47
4.5	Exercices avec correction.....	48
	Travaux Dirigés 4- Interpolation et approximation de fonctions.....	51
	Travaux Pratiques 4- Interpolation et approximation de fonctions.....	55

Leçon 5 : Résolution des équations différentielles ordinaires

5.1	Position du problème	58
5.2	Développement de Taylor	58
5.3	Théorème de Cauchy	59
5.4	Méthode d'Euler	59
5.5	Méthode de Taylor	61
5.6	Méthode de Runge-Kutta	62

5.7 Algorithme de Runge-Kutta d'ordre 2 : RK2.....	62
5.8 Algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4 : RK4.....	63
5.9 Exercices avec corrections.....	64
Travaux Dirigés 5- Résolution des équations différentielles ordinaires.....	69
Travaux Pratiques 5- Résolution des équations différentielles ordinaires.....	75
6 Recueil d'exercices avec corrigés.....	79

Leçon 1 : Résolution des équations non linéaires

Leçon 1 : Résolution des équations non linéaires

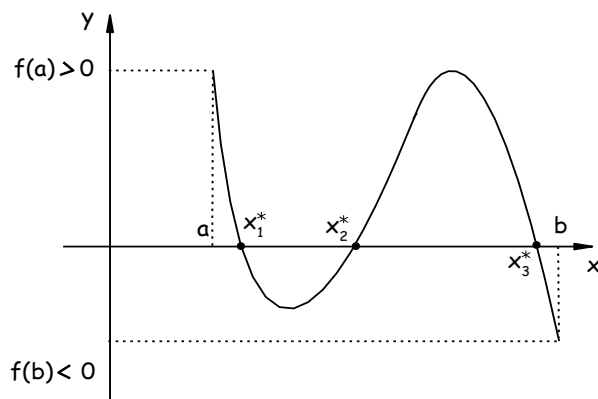
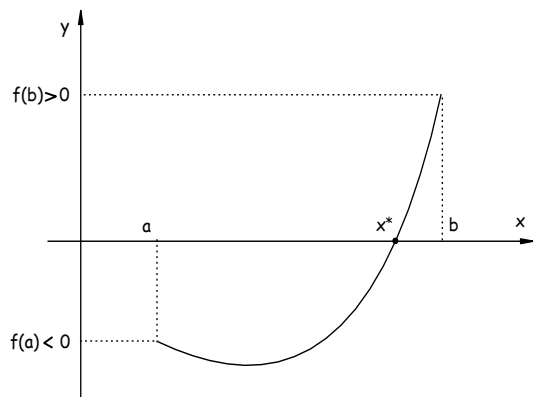
Objectifs

- Recherche de racines d'une fonction d'une seule variable
- Proposer des méthodes numériques qui conduisent à des solutions approchées.

1.1 Position du problème

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction au moins continue sur $[a, b]$. On cherche les racines de f c'est à dire les points $x \in [a, b]$ tels que $f(x) = 0$.

Si $f(a) \cdot f(b) < 0$, alors il existe donc au moins une racine de f dans $[a, b]$ tel que $f(x^*) = 0$.



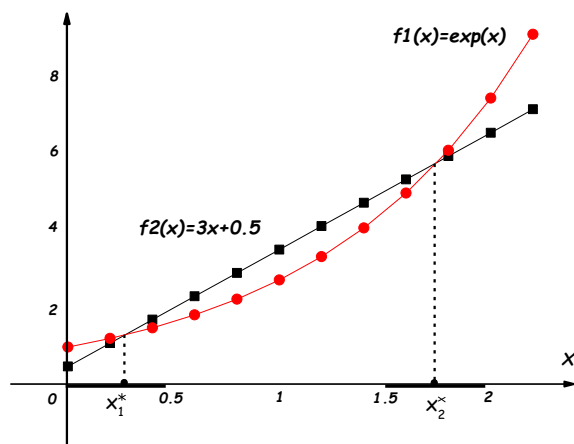
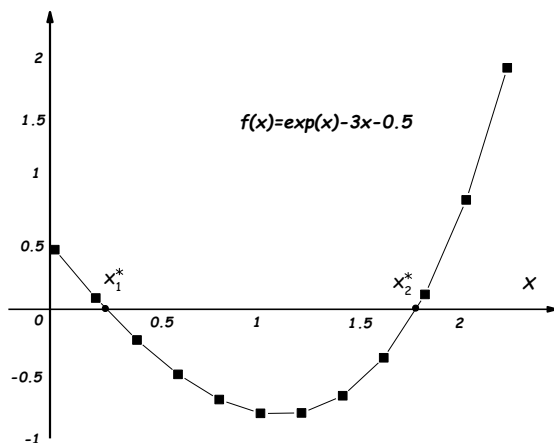
Nous supposons que x^* est la racine de f dans l'intervalle $[a, b]$.

En général, les méthodes de résolution numérique de $f(x) = 0$ sont des méthodes itératives. Elles consistent à construire une suite $(x_n)_n$ convergente vers x^* .

1.2 Localisation des racines d'une équation $f(x)=0$.

La séparation des racines s'effectue, en général, en utilisant deux types de méthodes :

a- Méthode graphique :



Soit on trace le graphe de la fonction f et on cherche son intersection avec l'axe (Ox).
 Soit on décompose f en deux fonctions f_1 et f_2 simples à étudier, telles que $f = f_1 - f_2$, et on cherche les points d'intersection des graphes de f_1 et f_2 , dont les abscisses sont exactement les racines de f . On choisit souvent f_1 et f_2 de façon que leurs courbes soient des courbes connues.

b- Méthode de balayage : On considère une suite croissante $\{x_i, i = 0, 1, \dots, n\}$ de valeurs de x réparties sur l'intervalle $[a, b]$. Si f est continue et $f(x_i) \cdot f(x_{i+1}) < 0$, alors il existe entre x_i et x_{i+1} au moins une racine de f (c'est le théorème des valeurs intermédiaires).

1.3 Méthode de dichotomie (ou de la bisection)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Si $f(a) \cdot f(b) \leq 0$, alors il existe au moins un $x^* \in [a, b]$ tel que $f(x^*) = 0$.

En général, on construit une suite $x_0, x_1, \dots, x_k$, (x_0 donnée) telle que $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = x^*$

- ALGORITHME

- 1- $i=0$, lecture a_i, b_i et ϵ
- 2- Calculer $x_i = (a_i + b_i) / 2$.
- 3- Si $f(x_i) = 0$, alors x_i est la racine de $f(x_i)$ et la méthode est terminée.
- 4- Si $f(x_i) \neq 0$
 - Si $f(a) \cdot f(x_i) \leq 0$, $x^* \in [a, x_i]$ et on pose $b = x_i$.
 - Si $f(x_i) \cdot f(b) < 0$, $x^* \in [x_i, b]$ et on pose $a = x_i$.
- 5- Si $(|a-b|/2) < \epsilon$, la solution $x^* = x$, sinon $i=i+1$ et recalculer x_i
- 6- Fin

- Convergence

On recommence le processus de calcul jusqu'à obtenir $b - a < \epsilon$, ϵ donné. La condition de convergence est $(b-a) < \epsilon$, tel que la solution $x^* = (a+b) / 2$. Ainsi, pour la n ème itération, $(b_0 - a_0) / 2^{n+1} < \epsilon \rightarrow n \geq (\ln(b_0 - a_0) - \ln(\epsilon)) / \ln(2)$

Exemple 1 :

Soit f une fonction continue définie par : $f(x) = x^2 - 3 = 0$

Déterminer par la méthode de dichotomie sur l'intervalle $[1, 2]$, un encadrement de la solution x^* de l'équation $f(x) = 0$, avec une précision $\epsilon = 0.02$.

- Solution :

Analytiquement la solution exacte est $x^* = \sqrt{3} \approx 1.73205$.

Puisque la condition $f(1) \cdot f(2) < 0$ est vérifiée, on peut donc utiliser la méthode de Dichotomie :

On calcule le milieu x de l'intervalle $[a, b] \rightarrow x = 1.5 \neq 0$.

Puis on calcule chacun de $f(a) \cdot f(x)$ et $f(x) \cdot f(b)$ pour voir le signe.

Puisque le changement de signe se situe dans l'intervalle $[1.5, 2]$, on conclut que la racine recherchée x^* est dans cet intervalle. On prend comme nouvel encadrement l'intervalle $[1.5, 2]$ et on répète le processus. Les résultats obtenus sont condensés dans le tableau suivant :

Itérations (i)	a_i	b_i	c_i	$f(c_i)$	$(b_i - a_i)/2$
0	1	2	1.5	- 0.7500	0.500
1	1.5	2	1.75	+0.0625	0.250
2	1.5	1.75	1.625	-0.3593	0.125
3	1.625	1.75	1.688	-0.1523	0.062
4	1.688	1.75	1.719	-0.0459	0.031
5	1.719	1.75	1.734	0.0081	0.015

La solution de l'équation $f(x)=x^2-3$ par la méthode de dichotomie sur l'intervalle $[1,2]$, est $x^*=1.734$

1.4 Méthode de Newton-Raphson

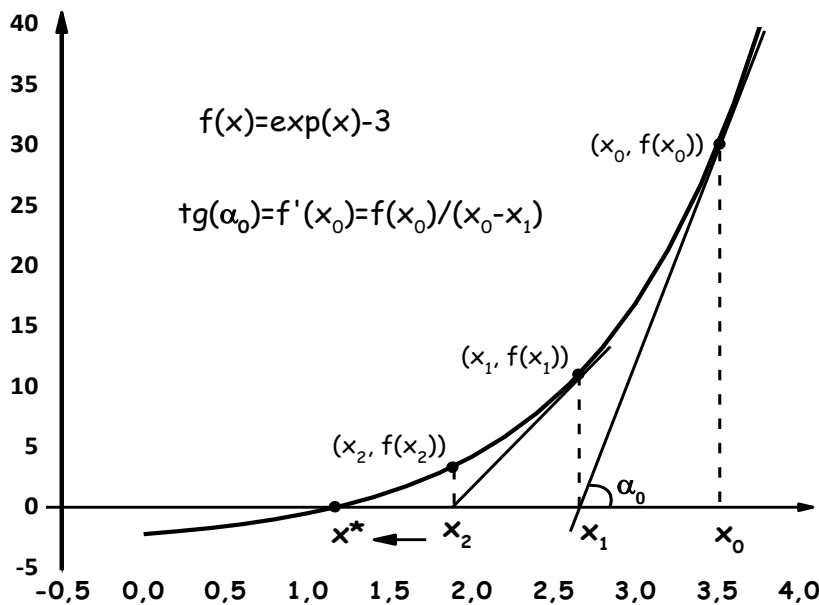
Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et que f' existe.

En approchant f par une droite calculée en x_i , par le développement de Taylor on obtient,

$$f(x) = f(x_i) + (x - x_i) * f'(x_i) + o(x - x_i)$$

$$f(x)=0 \rightarrow x = x_i - f(x_i)/f'(x_i)$$

$$x^*=1.09861$$



- Condition de convergence:

- i- $f(a) * f(b) \leq 0$
- ii- $\forall x_0 \in [a, b], f'(x_0) \neq 0$
- iii- $\forall x_0 \in [a, b], f''(x_0) \neq 0$
- iv- $f(x_0) * f''(x_0) > 0$

- ALGORITHME

- 1- Lecture $x_0 \in [a, b]$ et eps (eps), $i=0$.
- 2- Calculer $x_{i+1} = x_i - f(x_i)/f'(x_i)$

- 3- Si $(|x_{i+1}-x_i|) > \text{eps}$, $i=i+1$, goto 2
Sinon écrire x_{i+1}
- 4- Fin

Exemple 2 :

On considère la même fonction donnée dans l'exemple 1. Déterminer par la méthode de Newton la solution x^* de l'équation $f(x)=0$. On donne $x_0=2$, $\text{eps}=10^{-3}$.

- Comparer les résultats des deux méthodes.

Solution :

- Pour $f(x)=x^2-3$, $f'(x)=2x$ existe, $f''(x)=2$ existe.

Condition de convergence :

- i- $f'(x_0)=2$ $x_0=2 \Rightarrow 2 \neq 0$
- ii- $f''(x_0)=2 \neq 0$
- iii- $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$, $f(x_0) \cdot f''(x_0)=4 \cdot 2=8 > 0$

Condition vérifiée

Nous essayons une valeur de départ de $x_0=2$

$i=0$, $x_0=2$

$i=1$, $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0) = 2 - (x_0^2-3)/(2 \cdot x_0) = 2 - (2^2-3)/(2 \cdot 2) = 1.75000$, erreur = $|2-1.75|=0.25$

$i=2$, $x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1) = 1.75 - (x_1^2-3)/(2 \cdot x_1) = 1.75 - (1.75^2-3)/(2 \cdot 1.75) = 1.7321$,

erreur = $|1.75-1.7321|=0.01789$

$i=3$, $x_3 = x_2 - f(x_2)/f'(x_2) = 1.7321 - (x_2^2-3)/(2 \cdot x_2) = 1.7321 - (1.7321^2-3)/(2 \cdot 1.7321) = 1.73205$

erreur = $|1.7321-1.73205|=0.00005 < \text{eps}$.

Après 3 itérations la solution approchée est : $x^*=1.7320508$ calculée avec une précision 0.00005.

Comparaison : la méthode de Newton est plus rapide et aussi plus précise que celle de la dichotomie.

Exercices avec corrections :

Exercice 1 :

Soit la fonction $f(x) = x^3 - 4x - 2$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f admet trois racines réelles x_1, x_2, x_3 dans les intervalles $[a, b] = [-2, -1], [-1, 0], [2, 3]$.
2. Rechercher par Dichotomie la solution de $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[2, 3]$, effectuer trois itérations pour l'approximation du zéro de la fonction $f(x)$ en indiquant la précision à chaque itération.
3. Reprendre la deuxième question en utilisant la méthode de Newton avec $x_0 = 4$, on donne $x_{i+1} = x_i - (f(x_i)/f'(x_i))$

Solution :

1- Vérification sur $[-2, -1]$:

$$f(a)=f(-2)=-2, f(b)=f(-1)=1,$$

$$f(a)*f(b) = (-2)*(1) = -2 < 0, \exists \text{ au moins une racine.}$$

Vérification sur $[-1, 0]$:

$$f(a) = f(-1) = 1, f(b) = f(0) = -2,$$

$$f(a)*f(b) = (1)*(-2) = -2 < 0, \exists \text{ au moins une racine.}$$

Vérification sur $[2, 3]$:

$$f(a)=f(2)=-2, f(b)=f(3)=13,$$

$$f(a)*f(b) = (-2)*(13) = -26 < 0, \exists \text{ au moins une racine.}$$

2- Méthodes de dichotomie :

La méthode de dichotomie consiste à diviser l'intervalle en deux en calculant :

$$x_i = (a_i + b_i)/2$$

Calcul numérique de la racine à partir de $a_0=2$ et $b_0=3$

i	a_i	b_i	x_i	$f(x_i)$	eps_i
0	2	3	2.5	3.625	0.5
1	2	2.5	2.25	0.3906	0.25
2	2	2.25	2.125	-0.9043	0.125
3	2.125	2.25	2.188	-0.2825	0.0625

Donc l'intervalle final est $[2.125; 2.25]$ et pour la solution du problème on peut choisir le milieu de cet intervalle comme solution, donc : $x = (a+b)/2 = (2.125+2.25)/2 = 2.188$.

3. Méthode de Newton :

La méthode de Newton s'écrit $x_{i+1} = x_i - (f(x_i)/f'(x_i))$ où :

$$f(x) = x^3 - 4x - 2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4$$

$$x_{i+1} = x_i - ((x^3 - 4x - 2)/(3x^2 - 4))$$

Donc on a le tableau suivant :

i	x_i	x_{i+1}	$ x_{i+1} - x_i = \text{eps}_i$
0	4	2,95455	1,04545
1	2,95455	2,41493	0,53962
2	2,41493	2,23533	0,1796
3	2,23533	2,21459	0,02074

Exercice 2 :

Un objet est lâché depuis une hauteur h_0 à partir du repos (vitesse initiale $v_0=0$) sous l'influence de la gravité. On néglige la résistance de l'air. L'équation du mouvement est :

$$h(t)=h_0-(1/2)*g*t^2$$

Où :

- h_0 est la hauteur initiale (en m),
- g est l'accélération due à la gravité ($g=9.81 \text{ m/s}^2$)
- $h(t)$ est la hauteur à l'instant t .

On veut déterminer le temps t nécessaire pour que l'objet atteigne le sol, c'est-à-dire quand $h(t)=0$.

- 1- Vérifier s'il existe une racine de $f(t)=0$ dans l'intervalle $[0, 10]$ secondes.
- 2- Combien d'itérations sont nécessaires pour obtenir une précision de 10^{-3} ?
- 3- Appliquez la méthode de dichotomie pour $h_0=100 \text{ m}$ et $g=9.81 \text{ m/s}^2$ et donner une solution avec une tolérance 0.05.

Solution :

1- Nous devons résoudre l'équation $h(t)=0$, soit : $h_0-(1/2)*g*t^2=0$

Ce qui peut être réécrit comme une fonction $f(t)=h_0-(1/2)*g*t^2$.

L'objectif est de vérifier s'il existe une racine de cette fonction dans l'intervalle $[0,10]$.

Prenons un exemple avec $h_0=100 \text{ m}$.

À $t=0$: $f(0)=100-(1/2)*9.81*0^2=100$

À $t=10$ secondes : $f(10)=100-(1/2)*9.81*10^2=100-490.5=-390.5$

Comme $f(0)=100$ et $f(10)=-390.5$, la fonction change de signe entre $t=0$ et $t=10$. Cela montre qu'il existe une racine dans cet intervalle, ce qui confirme qu'il y a bien une solution pour le temps t lorsque l'objet atteint le sol.

2- La méthode de dichotomie permet de réduire l'intervalle à chaque itération, en divisant l'intervalle en deux et en choisissant le sous-intervalle contenant la racine, en fonction du signe de la fonction $f(t)$.

Le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre une précision $\text{eps} = 10^{-3}$ peut être calculé à l'aide de la formule suivante :

$$n=(\log(t_b-t_a)-\log(\text{eps}))/\log(2)$$

Ici, nous avons :

- $t_a=0$ et $t_b=10$ (intervalle initial),
- $\text{eps} = 10^{-3}$ (précision souhaitée).

Le calcul devient :

$$n=(\log(10-0)-\log(10^{-3}))/\log(2)=(\log(10)-\log(10^{-3}))/\log(2)=(1+3)/0.3010\approx 13.29$$

Il faut donc environ 14 itérations pour atteindre une précision de 10^{-3} .

- 3- Nous appliquons la méthode de dichotomie pour résoudre $f(t)=h_0-(1/2)*g*t^2=0$, avec $h_0=100$ m et $g=9.81$ m/s². Nous voulons trouver t lorsque $f(t)=0$.

Le tableau ci-dessous montre les résultats du calcul.

i	a _i	t _i	b _i	f(t _i)	err
1	0.0000	5.0000	10.000	-22.625	5.0000
2	0.0000	2.5000	5.0000	69.3437	2.5000
3	2.5000	3.7500	5.0000	31.0234	1.2500
4	3.7500	4.3750	5.0000	6.1152	0.6250
5	4.3750	4.6875	5.0000	-7.7759	0.3125
6	4.3750	4.5312	4.6875	-0.7106	0.1562
7	4.3750	4.4531	4.5312	2.7323	0.0781
8	4.4531	4.4922	4.5312	1.0183	0.0391

Après environ 8 itérations, l'intervalle devient suffisamment petit et le temps de chute trouvé est : $t \approx 4.4922$ seconde.

Travaux Dirigés 1 - Résolution des équations non linéaires

Exercice 1 :

Soit la fonction $f(x) = \ln(x) - x + 2$

1. Séparer graphiquement les racines de $f(x)$ et déduire leurs nombres.
2. Existe-t-il de racine sur l'intervalle $I = [3, 4]$
3. Déterminer le nombre minimal d'itérations nécessaires pour approcher $f(x)$ par la méthode de dichotomie, avec une précision $\epsilon = 10^{-2}$ sur l'intervalle I .
4. Approcher la racine par la méthode de dichotomie dans l'intervalle I .
5. Pour $x = 2$, vérifier les conditions d'application de la méthode de Newton.
6. Calculer les quatre premières itérations, avec cinq chiffres significatifs.

Exercice 2 :

Soit la fonction $f(x) = x^3 - 4x - 2$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f admet trois racines réelles x_1, x_2, x_3 dans les intervalles $[a, b] = [-2, -1], [-1, 0], [2, 3]$.
2. Rechercher par Dichotomie la solution de $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[2, 3]$, effectuer trois itérations pour l'approximation du zéro de la fonction $f(x)$ en indiquant la précision à chaque itération.
3. Reprendre la deuxième question en utilisant la méthode de Newton avec $x_0 = 4$, on donne $x_{i+1} = x_i - (f(x_i) / f'(x_i))$
4. Comparer le résultat des deux méthodes.

Exercice 3 :

Un mobile décrit un mouvement rectiligne selon l'équation : $A(t) = 3t^2 + t - 6$ où $A(m)$ est le déplacement et $t(s)$ le temps.

À l'instant $t_0 = 0$ second, $A_0 = -6$ mètre.

Evaluer le temps t ($t > 0$) nécessaire au mobile pour passer par le point origine.

Solutions Travaux Dirigés 1- Résolution des équations non linéaires

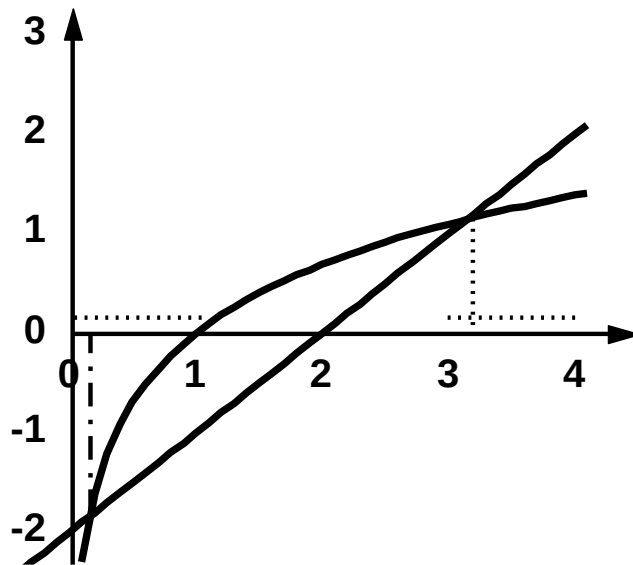
Exercice 1 :

1- Soit $f(x) = \ln(x) - x + 2$ qui peut s'écrire :

$$f(x) = \ln(x) - (x - 2) = 0 \text{ ou } g(x) = \ln(x) \text{ et } h(x) = x - 2$$

Donc : $f(x) = g(x) - h(x) = 0$ d'où $g(x) = h(x)$ les racines de f sont tous les points x d'intersection de la courbe de $g(x)$ avec celle de $h(x)$.

f possède deux racines réelles qui existent respectivement dans les intervalles $[0, 1]$ et $[3, 4]$.



2- Vérification sur $[3, 4]$:

$$f(a) = f(3) = 0,09861, f(b) = f(4) = -0,61371.$$

$$f(a) \cdot f(b) = (0,09861) \cdot (-0,61371) = -0,0605 < 0, \exists \text{ au moins une racine.}$$

3- Pour atteindre une précision $\text{eps} = 10^{-2}$, une solution x_n à l'itération n est supposée racine approchée si $(b_0 - a_0)/2^{(n+1)} \leq \text{eps}$ d'où $n \geq (\ln((b_0 - a_0)/2\text{eps})/\ln(2)) + 1$ $n_{\max} = (\ln((b_0 - a_0)/2\text{eps})/\ln(2)) + 1 = (\ln((4 - 3)/(2 \cdot 10^{-2}))/\ln(2)) + 1 = (\ln(5 \cdot 10^1)/\ln(2)) + 1 = 6.6438 \sim 7$

4- Méthodes de dichotomie :

La méthode de dichotomie consiste à diviser l'intervalle en deux en calculant :

$c_i = (a_i + b_i)/2$, le calcul numérique de la racine à partir de $a_0 = 3$ et $b_0 = 4$ donne :

Algorithme dichotomie :

1. $i = 0$
2. $a_i = 3, b_i = 4$
3. Calculer $x_i = (a_i + b_i)/2$, calculer $f(x_i)$
4. Si $f(a_i) \cdot f(b_i) < 0$ alors
 $b_i = c_i$ et a_i reste la même
Sinon

$a_i = x_i$, et b_i reste la même

Fin si

5. Si $\text{abs}(b_i - a_i) \geq \text{eps}$ alors $i = i + 1$ et aller à 3

6. Fin

i	a_i	b_i	x_i	$f(x_i)$	eps_i
0	3.000	4.000	3.500	-0.2472	0.5000
1	3.000	3.500	3.250	-0.0713	0.2500
2	3.000	3.250	3.125	0.0144	0.1250
3	3.125	3.250	3.188	-0.0283	0.0625
4	3.125	3.188	3.156	-0.0069	0.0313
5	3.125	3.156	3.141	0.0038	0.0156
6	3.141	3.156	3.148	-0.0015	0.0078

La solution est $x^* = 3.148$

5-

- Pour $f(x) = \ln(x) - x + 2$, $f'(x) = (1/x) - 1$ existe, $f''(x) = -1/x^2$ existe.

Condition de convergence :

i- $f'(x_0) = (1/2) - 1 = -0.5 \neq 0$

ii- $f''(x_0) = -0.25 \neq 0$

iii- $f(x_0) * f''(x_0) = 0.69 * (-0.25) = -0.17 < 0$, on ne peut rien dire sur la convergence de la méthode de Newton.

6-

Méthode de Newton :

Pour $f(x_i) = \ln(x_i) - x_i + 2 = 0$, $f'(x_i) = (1/x_i) - 1$

La méthode de Newton s'écrit $x_{i+1} = x_i - (f(x_i) / f'(x_i))$

$x_{i+1} = x_i - (\ln(x_i) - x_i + 2) / ((1/x_i) - 1)$

Donc on a le tableau suivant :

i	x_i	x_{i+1}	$ x_{i+1} - x_i = \text{eps}_i$
1	2.00000	3.38629	1.38629
2	3.38629	3.14994	0.23636
3	3.14994	3.14619	0.00374
4	3.14619	3.14619	0.000001

La solution est $x^* = 3.14619$

Donc 4 itérations sont nécessaires pour obtenir la précision de cinq décimales.

Algorithme Newton Raphson :

1. $x_0 = 2$

2. $i = 1$

3. $x_{i+1} = x_i - (\ln(x_i) - x_i + 2) / ((1/x_i) - 1)$

4. si $|x_{i+1} - x_i| \geq \text{eps}$ alors, $i = i + 1$, aller à 3

5. sinon fin

Exercice 2 :

1- Vérification sur $[-2, -1]$, $[-1, 0]$ et $[2, 3]$.

Vérification sur $[-2, -1]$:

$$f(a)=f(-2)=-2, f(b)=f(-1)=1,$$

$$f(a)*f(b) = (-2)*(1) = -2 < 0, \exists \text{ au moins une racine.}$$

Vérification sur $[-1, 0]$:

$$f(a) = f(-1) = 1, f(b) = f(0) = -2,$$

$$f(a)*f(b) = (1)*(-2) = -2 < 0, \exists \text{ au moins une racine.}$$

Vérification sur $[2, 3]$:

$$f(a)=f(2)=-2, f(b)=f(3)=13.$$

$$f(a)*f(b) = (-2)*(13) = -26 < 0, \exists \text{ au moins une racine.}$$

2- Méthodes de dichotomie :

Recherche par dichotomie la solution de $f(x)$ dans $[2, 3]$:

Calcul numérique de la racine à partir de $a_0=2$ et $b_0=3$

i	a_i	b_i	x_i	$f(x_i)$	epsi_i
0	2	3	2.5	3.625	0.5
1	2	2.5	2.25	0.39063	0.25
2	2	2.25	2.125	-0.9042	0.125
3	2.125	2.25	2.1875	-0.2824	0.0625

Donc l'intervalle final est $[2.25; 2, 125]$ et pour la solution du problème on peut choisir le milieu de cet intervalle comme solution, donc :

$$x = (a+b)/2 = (2.25+2,125)/2 = 2,1875.$$

3- Méthode de Newton :

La méthode de Newton s'écrit $x_{i+1} = x_i - (f(x_i) / f'(x_i))$ où :

$$f(x) = x^3 - 4x - 2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4$$

$$x_{i+1} = x_i - ((x^3 - 4x - 2) / (3x^2 - 4))$$

Donc on a le tableau suivant :

i	x_i	x_{i+1}	$ x_{i+1}-x_i = \text{epsi}_i$
0	4	2,95455	1,04545
1	2,95455	2,41493	0,53962
2	2,41493	2,23533	0,1796
3	2,23533	2,21459	0,02074

La solution donnée par l'algorithme de newton est $x^*=2,21459$

4- La méthode de newton est plus précise.

Exercice 3 :

$$A(t) = 3t^2 + t - 6$$

Le domaine de définition de $A(t)$ est $]-\infty, +\infty[$

On calcul la dérivée de $A(t) = 3t^2 + t - 6$,

$$A'(t) = 6t + 1$$

$A'(t)$ s'annule pour : $t = -1/6$

Pour cette valeur de t on a :

$$A(-1/6) = 3(-1/6)^2 - (1/6) - 6 = -6.08$$

Les limites : $\lim_{t \rightarrow +\infty} A(t) = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} A(t) = +\infty$

On déduit le tableau des variations $A(t)$ et $A'(t)$

t	$-\infty$	$-1/6$	$+\infty$
$A'(t)$	-	0	+
$A(t)$	$+\infty$	-6.08	$+\infty$

D'après ce tableau l'équation $A(t)=0$ admet des solutions sur les intervalles

$]-\infty, (-1/6)[$ et $]-1/6, +\infty[$

En résumé, la fonction sur $]-1/6, +\infty[$: est continue, change de signe et monotone, donc $A(t)$ a une solution unique.

La deuxième dérivée est $A''(t)=6$ donc la dérivée seconde est positive $\forall t$. de même on a pour une valeur $t_0=5$, $A(5) = 74 > 0$ donc $A''(5) * A(5) > 0$ et la méthode de Newton Raphson converge pour $t=5$. ($t_0=5$, valeur de départ choisi on hasard dans $]-1/6, +\infty[$)

Le calcul nous donne les termes suivants de la suite de newton :

i	x_i	x_{i+1}	$ x_{i+1}-x_i = \text{eps}_i$
0	5	2.6129	2.3871
1	2.6129	1.5879	1.0250
2	1.5879	1.2885	0.2994
3	1.2885	1.2577	0.0308
4	1.2577	1.2573	0.0003

On peut donc arrêter le calcul pour $t=1.2573$ avec cinq chiffres significatifs.

Travaux Pratiques 1 - Résolution des équations non linéaires

Exercice 1 :

Soit la fonction $f(x) = x^2 + (\cos(x))/4$

- 1- Ecrire le programme fortran qui résoudre la fonction $f(x)$ dans l'intervalle $[0, 3.14]$ en utilisant la méthode de dichotomie. On donne une tolérance $\varepsilon = 0.05$.

Étapes de calcul :

- Ajouter un test de l'applicabilité de la Dichotomie avant le calcul.
 - Initialiser les limites du domaine de calcul (choisir les valeurs de départ a_0 et b_0).
 - Initialiser un compteur d'itération I à 0.
 - Utiliser un sous-programme du type fonction qui définit $f(x)$.
 - Calculer l'erreur absolue dans chaque itération.
 - Arrêter le calcul quand la largeur du domaine devient $ABS(b-a) < 0.05$.
 - Afficher la solution calculée ainsi que le nombre d'itérations.
- 2- Exécuter le programme en donnant $a_0=0$ et $b_0=3.14$; représentée l'état d'écran de l'exécution.

Exercice 2 :

Soit la fonction $f(x) = \exp(x/2) + (x/10) - 5$

1. Écrire un programme en Fortran pour résoudre l'équation $f(x)$ en utilisant la méthode de Newton-Raphson.

Étapes à suivre :

- La valeur initiale est $x_0=5$ et la tolérance $\varepsilon=0.05$.
 - Implémenter un test pour vérifier l'applicabilité de la méthode de Newton avant de commencer les itérations.
 - Initialiser un compteur d'itérations $I=0$.
 - Utiliser un sous-programme de type fonction pour définir la fonction $f(x)$ et une autre fonction pour sa dérivée $f'(x)$.
 - Utiliser les formats d'affichage dans le programme fortran.
 - À chaque itération, calculer l'erreur absolue entre deux itérations successives et afficher cette erreur avec la solution.
 - Arrêter l'itération dès que la différence entre deux itérations successives est inférieure à la tolérance ε .
 - Afficher la solution approchée x_n et le nombre d'itérations effectuées.
- 2- Exécuter le programme en utilisant $x_0=5$ et $\varepsilon=0.05$, puis afficher l'état d'exécution à l'écran (valeur approximative de la racine et nombre d'itérations).

Solutions Travaux Pratiques 1 - Résolution des équations non linéaires

Exercice 1 :

1- Programme fortran

```

                                PROGRAM DICHOTOMIE
c *****
c      calcul par la methode dichotomie (bissection)
c *****
      real n
c Initialisation des variables
      eps=0.05
      l=1
      write(*,*) ' donner le domaine de la racine'
      read(*,*) a,b
      fa=f(a)
      fb=f(b)
      if(fa*fb.lt.0.0) then
        write(*,*) ' '
        write(*,*) ' *****'
        write(*,*) ' Bonne valeur initiales'
        write(*,*) ' *****'
        write(*,*) ' '
      else
        write(*,*) ' changer les valeurs'
        goto 20
      endif
      d=2
      p=log(d)
      n=log((b-a)/eps)/(p)
      write(*,*) ' le nombre iteration est l :'
      write(*,16)'l= ', n
16 format(A,F2.0)
      write(*,*) ' '
      write(*,*) 'Le tableau ci-dessous montre les etapes du calcul.'
      write(*,*) 'l   a       x       b       f(x)   err'
10 c=(a+b)/2.
      fc=f(c)
      err=abs(b-a)/2
      write(*,15) l,a,c,b,fc,err
15 format('i',l2,2X,F8.5,2X,F8.5,2X,F8.5,2X,F8.5,2X,F8.5)
      if(fa*fc.lt.0.0) then
        b=c
      else
        a=c
      endif
      l=l+1
c *****
c      calcul d erreur
c *****
      if(err.le.eps) then
        write(*,*) ' '
```

```

write(*,17) ' LA RACINE X=', c
17 FORMAT (A,F8.5)
else
goto 10
endif
write(*,18) ' ERREUR DE CALCUL EST ERR=', ERR
18 FORMAT (A,F8.5)
write(*,*) ' '
write(*,*) 'program terminated'
20 END
c Fonction f(x) :  $f(x) = x - 2 + (\cos(x)/4)$ 
function f(x)
f=x-2+(cos(x)/4)
return
end

```

2- Exécution du programme :

```

donner le domaine de la racine :
0 ↵
3.14 ↵
*****

Bonnes valeurs initiales
*****

Le nombre iteration est I :
I=6.

Le tableau ci-dessous montre les étapes du calcul.

      I      ai      xi      bi      f(xi)      err
1  0.00000  1.57000  3.14000  -.42980  1.57000
2  1.57000  2.35500  3.14000  .17843  0.78500
3  1.57000  1.96250  2.35500  -.13294  0.39250
4  1.96250  2.15875  2.35500  .02009  0.19625
5  1.96250  2.06063  2.15875  -.05699  0.09812
6  2.06063  2.10969  2.15875  -.01861  0.04906

LA RACINE X= 2.10969
ERREUR DE CALCUL EST ERR= .04906
program terminated.
Press any key to continue ↵

```

Etat d'écran

Exercice 2 :

1- Programme fortran

```
program newton_raphson
real(8) :: x0, xn, xn1, fx, dfx, epsilon
integer :: iter, max_iter

c Initialisation des variables
x0 = 5          ! Valeur initiale de x
epsilon = 0.005 ! Tolérance de convergence
max_iter = 100  ! Nombre maximal d'itérations
iter = 0        ! Compteur d'itérations

c Initialisation de xn
xn = x0
print *, "Resolution de f(x) = exp(x/2) + x/10 - 5 par la methode
+de Newton-Raphson"
print *, ' '
print "(' x0=',F8.6,' Erreur absolue = ', F8.6)",x0,epsilon

c Boucle de la methode de Newton-Raphson
do while (iter < max_iter)
  fx = f(xn)
  dfx = df(xn)

c Vérification que la dérivée n'est pas nulle
  if (dfx == 0.0d0) then
    print *, "Erreur la derivee est nulle. Methode non applicable."
    stop
  end if

c Calcul de la nouvelle approximation de la racine
  xn1 = xn - fx / dfx
  iter = iter + 1
  print "(I3, ' xn= ', F10.6, ' Erreur absolue= ', F10.6)"
  +, iter, xn1, abs(xn1-xn)

c Critère d'arrêt : si la différence entre deux itérations successives est inférieure à la tolérance
  if (abs(xn1 - xn) < epsilon) then
    print *, ' '
    print *, "Solution approchee trouvee ", xn1
    print *, "Nombre d'iterations ", iter
    stop
  end if

c Mise à jour de xn pour la prochaine itération
  xn = xn1
end do

c Si l'itération dépasse le nombre maximal
print *, "La méthode n'a pas converge apres ", max_iter,
```

```

+ " itérations."
contains
c Fonction f(x) :  $f(x) = \exp(x/2) + x/10 - 5$ 
  function f(x)
  real(8) :: f, x
  f = exp(x/2.0d0) + x/10.0d0 - 5.0d0
  end function f
c Dérivée de f(x) :  $f'(x) = 1/2 * \exp(x/2) + 1/10$ 
  function df(x)
  real(8) :: df, x
  df = 0.5d0 * exp(x/2.0d0) + 1.0d0 / 10.0d0
  end function df

end

```

2- Exécution du programme :

Résolution de $f(x)=\exp(x/2)+(x/10)-5$ par la méthode de Newton_Raphson			
X0=5.000000 Erreur absolue=0.005000			
i	x_{i-1}	x_i	$ x_i - x_{i-1} = \epsilon_i$
1	5	3.759136	1.240864
2	3.759136	3.188352	0.570784
3	3.188352	3.093468	0.094884
4	3.093468	3.091240	0.002228
Solution approchée trouvée 3.091239935			
Nombre d'itérations 4			
Stop - program terminated			
Press any key to continue ↵			

Etat d'écran

Leçon 2 : Dérivation et intégration numérique

Leçon 2 : Dérivation numérique

Objectif :

On voudrait être en mesure d'évaluer numériquement la dérivée d'une fonction qui n'est connue que par ses valeurs en un certain nombre de points. Ce problème de dérivation numérique est très commun en ingénierie et en analyse numérique. C'est la base des méthodes de différences finies pour résoudre le problème suivant

2.1 Dérivation numérique

Soit une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et f' sa dérivée. Si le calcul de $f'(x)$ est trop complexe à déterminer, la dérivation numérique consiste à donner (de façon approchée) $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire calculer la pente de la courbe représentant la fonction, à partir d'un calcul ou d'une mesure en un nombre fini de points. La dérivée de f est définie par la relation

$$\text{suivante : } f'(x) = \frac{df(x)}{d(x)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

La transposition de la relation ci-dessus pour la dérivation numérique donne :

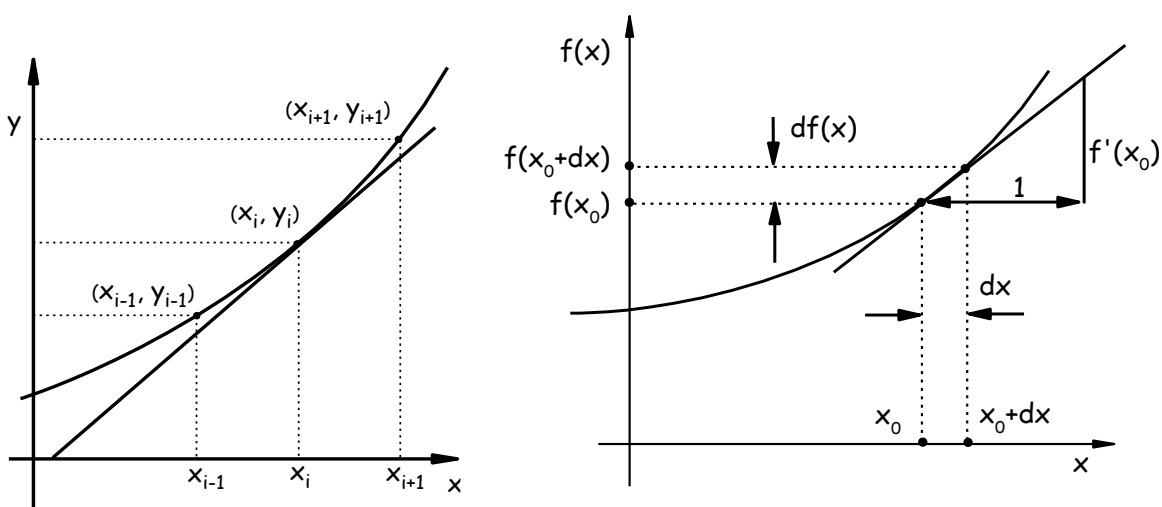
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

L'estimation de la dérivée au point x_i peut alors se calculer par :

$$\text{Formule décentrée à droite } f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

$$\text{Formule décentrée à gauche } f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

$$\text{Formule centrée } f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$



Pour calculer le terme d'erreur dans ces approximations, on utilise le développement de Taylor de f en x :

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)*h + (h^2/2!)*f''(\xi), x \leq \xi \leq x+h,$$

$$\text{qui conduit à } f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} - \frac{h}{2} f''(\zeta) \text{ avec } \zeta \in [x, x+h]$$

le terme d'erreur $\frac{h}{2} f''(\zeta) \approx 0$, est proportionnel à h et la formule est exacte pour une fonction linéaire.

Exemple :

On cherche à estimer numériquement la dérivée en $x=3$ de la fonction $f(x) = x^3$

La solution mathématique est $f'(x) = 3*x^2 \rightarrow f'(3) = 3*3^2 = 27$

Avec $h=0.1$ la solution numérique est :

Formule décentrée à droite $f'(3) = (f(3.1)-f(3))/0.1 = 27.91 \rightarrow \epsilon = \text{abs}(27.91-27) = 0.91$

Formule décentrée à gauche $f'(3) = (f(3)-f(2.9))/0.1 = 26.11 \rightarrow \epsilon = \text{abs}(26.11-27) = 0.89$

Formule centrée $f'(3) = (f(3.1)-f(2.9))/(2*0.1) = 27.01 \rightarrow \epsilon = \text{abs}(27.01-27) = 0.01$

Avec $h=0.01$ la solution numérique est :

Formule décentrée à droite $f'(3) = (f(3.01)-f(3))/0.01 = 27.0901 \rightarrow \epsilon = \text{abs}(27.0901-27) = 0.0901$

Formule décentrée à gauche $f'(3) = (f(3)-f(2.99))/0.01 = 26.9100 \rightarrow \epsilon = \text{abs}(26.9100-27) = 0.0899$

Formule centrée $f'(3) = (f(3.01)-f(2.99))/(2*0.01) = 27.0001 \rightarrow \epsilon = \text{abs}(27.0001-27) = 0.0001$

2.2 Calcul des dérivées d'ordre supérieur

Pour évaluer la dérivée seconde on utilise les mêmes équations précédentes

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)*h + (h^2/2!)*f''(x) + (h^3/3!)*f'''(x) + (h^4/4!)*f''''(\xi), x \leq \xi \leq x+h,$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)*h + (h^2/2!)*f''(x) - (h^3/3!)*f'''(x) + (h^4/4!)*f''''(\xi), x \leq \xi \leq x+h,$$

En additionnant ces deux développements, on trouve :

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - \frac{h^4}{12} f''''(\zeta)$$

Après la simplification le terme d'erreur, on a l'approximation suivante d'ordre 2 :

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

Exemple :

On cherche à estimer numériquement la dérivée seconde en $x=3$ de la fonction $f(x) = x^3$

La solution mathématique est $f''(x) = 6*x \rightarrow f''(3) = 6*3 = 18$

Avec $h=0.1$ la solution numérique est :

$$f''(3) = (f(3.1)-2*f(3)+f(2.9))/(0.1)^2 = 18 \rightarrow \epsilon = \text{abs}(18-18) = 0$$

Exercice avec correction :**Exercice 1 :**

Soit la fonction f définie par l'ensemble de points (x_i, y_i) :

x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	0	0.1	0.8	2.7	6.4	12.5	21.6

- 1- Calculer les valeurs de la dérivée de f aux points $x_i=1, 3$ et 5 en utilisant la méthode des différences centrées.
- 2- Calculer les valeurs de la dérivée de f aux points $x_i=1, 3$ et 5 analytiquement, en considérant la fonction $f(x)=x^3/10$.
- 3- Calculer l'erreur d'approximation entre les valeurs dérivées calculées numériquement et analytiquement. Commenter les résultats obtenus.

Solution :

- 1- La formule des différences centrées pour la dérivée est donnée par :

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

Avec un pas $h=1$ (car les x_i sont espacés de 1).

$$f'(1) = (f(2) - f(0))/2 = (0.8 - 0)/2 = 0.4$$

$$f'(3) = (f(4) - f(2))/2 = (6.4 - 0.8)/2 = 2.8$$

$$f'(5) = (f(6) - f(4))/2 = (21.6 - 6.4)/2 = 7.6$$

- 2- La fonction analytique donnée est :

$$f(x) = x^3/10.$$

$$f'(x) = 3x^2/10.$$

$$\text{Pour } x = 1 : f'(x) = 3 \cdot 1^2/10 = 0.3$$

$$\text{Pour } x = 3 : f'(x) = 3 \cdot 3^2/10 = 2.7$$

$$\text{Pour } x = 5 : f'(x) = 3 \cdot 5^2/10 = 7.5$$

- 3- Calculons l'erreur d'approximation pour chaque point :

$$\text{Pour } x = 1 : \text{Erreur absolue} = |f(1)_{\text{exacte}} - f(1)_{\text{numérique}}| = |0.4 - 0.3| = 0.1$$

$$\text{Pour } x = 3 : \text{Erreur absolue} = |f(3)_{\text{exacte}} - f(3)_{\text{numérique}}| = |2.8 - 2.7| = 0.1$$

$$\text{Pour } x = 5 : \text{Erreur absolue} = |f(5)_{\text{exacte}} - f(5)_{\text{numérique}}| = |7.6 - 7.5| = 0.1$$

- 4- Les erreurs d'approximation pour les trois points sont identiques (0.1). Cela indique que la méthode des différences centrées fournit des estimations raisonnables de la dérivée, bien que les résultats numériques soient légèrement supérieurs aux valeurs analytiques. En général, la méthode des différences centrées est souvent plus précise que les méthodes d'avant ou d'arrière, mais elle peut encore introduire des erreurs, surtout pour des fonctions non linéaires ou lorsque les points sont éloignés.

Exercice 2 :

Considérons la distribution de température $T(x)=100-5x$ dans une barre métallique où x est la position en mètres le long de la barre.

1. Calculer la valeur de la dérivée de T aux points $x_i=1, 2, 3$ avec $h=1$ en utilisant :
 - a) La méthode des différences excentrées en avant.
 - b) La méthode des différences excentrées en arrière.
 - c) La méthode des différences centrées.
2. Comparer les résultats avec les valeurs obtenues par la formule analytique.
3. Calculer la valeur de la dérivée de T au point $x=3$ par les différences centrées pour les différentes valeurs de $h=1, 0.5, 0.1, 0.01$. Comparer les résultats avec la valeur $T'(3)$ obtenue par la formule analytique.
4. Calculer $T''(x=4)$ avec $h=0.01$, comparer ce résultat avec celui obtenu analytiquement.

Solution :

1. Calcul des dérivées

La fonction donnée est $T(x)=100-5x$.

Formule analytique :

$$T'(x)=-5$$

$$T''(x)=0$$

a) Différences excentrées en avant :

$$T'(x) \approx (T(x+h)-T(x))/h$$

- Pour $x=1$: $T'(1) \approx (T(2)-T(1))/1 = ((100-5 \times 2)-(100-5 \times 1))/1 = -5$
- Pour $x=2$: $T'(2) \approx (T(3)-T(2))/1 = ((100-5 \times 3)-(100-5 \times 2))/1 = -5$
- Pour $x=3$: $T'(3) \approx (T(4)-T(3))/1 = ((100-5 \times 4)-(100-5 \times 3))/1 = -5$

b) Différences excentrées en arrière :

$$T'(x) \approx (T(x)-T(x-h))/h$$

- Pour $x=1$: $T'(1) \approx (T(1)-T(0))/1 = ((100-5 \times 1)-100)/1 = -5$
- Pour $x=2$: $T'(2) \approx (T(2)-T(1))/1 = ((100-5 \times 2)-(100-5 \times 1))/1 = -5$
- Pour $x=3$: $T'(3) \approx (T(3)-T(2))/1 = ((100-5 \times 3)-(100-5 \times 2))/1 = -5$

c) Différences centrées :

$$T'(x) \approx (T(x+h)-T(x-h))/(2 \times h)$$

- Pour $x=1$: $T'(1) \approx (T(2)-T(0))/(2 \times 1) = ((100-5 \times 2)-100)/2 = -5$
- Pour $x=2$: $T'(2) \approx (T(3)-T(1))/(2 \times 1) = ((100-5 \times 3)-(100-5 \times 1))/2 = -5$
- Pour $x=3$: $T'(3) \approx (T(4)-T(2))/(2 \times 1) = ((100-5 \times 4)-(100-5 \times 2))/2 = -5$

2. Comparaison avec la formule analytique

Dans tous les cas, les dérivées numériques correspondent exactement à la dérivée analytique -5 .

3. Calcul de la dérivée au point $x=3$ pour différentes valeurs de h

Pour chaque h , on utilise la méthode des différences centrées :

$$T'(3) \approx (T(3+h) - T(3-h)) / (2 \cdot h)$$

- $h=1$: $T'(3) \approx (T(4) - T(2)) / (2 \cdot 1) = -5$
- $h=0.5$: $T'(3) \approx (T(3.5) - T(2.5)) / (2 \cdot 0.5) = ((100 - 5 \times 3.5) - (100 - 5 \times 2.5)) / 1 = -5$
- $h=0.1$: $T'(3) \approx (T(3.1) - T(2.9)) / (2 \cdot 0.1) = ((100 - 5 \times 3.1) - (100 - 5 \times 2.9)) / 0.2 = -5$
- $h=0.01$: $T'(3) \approx (T(3.01) - T(2.99)) / (2 \cdot 0.01) = ((100 - 5 \times 3.01) - (100 - 5 \times 2.99)) / 0.02 = -5$

Comparaison : Les résultats sont constants et égaux à -5 , correspondant à la dérivée analytique.

4. Calcul de $T''(x=4)$ avec $h=0.01$

$$T''(x) \approx (T(x+h) - 2 \cdot T(x) + T(x-h)) / h^2$$

$$T''(4) \approx (T(4.01) - 2 \cdot T(4) + T(3.99)) / 0.01^2$$

Calculons :

$$T(4.01) = 100 - 5 \times 4.01 = 79.95$$

$$T(4) = 100 - 5 \times 4 = 80$$

$$T(3.99) = 100 - 5 \times 3.99 = 80.05$$

$$T''(4) \approx (79.95 - 2 \cdot 80 + 80.05) / 0.0001 = 0$$

Comparaison : La dérivée seconde est nulle, ce qui est cohérent avec la dérivée analytique $T''(x)=0$.

Travaux Dirigés 2- Dérivation numérique

Exercice 1 :

Soit une fonction $f(x) = 2^x$:

- 1- Calculer les valeurs de la dérivée de f aux points $x_i=1, 2$ et 3 , $h=x_{i+1}-x_i=1$ avec $i=0, 1, 2$, en utilisant :
 - a- La méthode des différences excentrées en avant.
 - b- La méthode des différences excentrées en arrière.
 - c- La méthode des différences centrées.
- 2- Comparer les résultats avec les valeurs obtenues par la formule analytique.
- 3- Calculer la valeur de la dérivée de f au point 3 par les différences centrées pour les différentes valeurs de $h = 1, 0.5, 0.1, 0.01$. comparer les résultats avec la valeur $f'(3)$ obtenue par la formule analytique de la fonction dérivée f' .
- 4- Calculer $f''(x=4)$ avec $h=0.01$, comparer ce résultat avec celui obtenu analytiquement.

Exercice 2 :

La vitesse $v(r)$ d'un fluide dans un tuyau est donnée par la formule suivante :

$$v(r)=v_0/(1+(r/R)^2), r \geq 0$$

Où $v_0=4$ m/s et $R=0.25$ m.

1. Calculer la vitesse du fluide à $r=0.1$ m.
2. Trouvez le taux de variation de la vitesse (accélération) par rapport au rayon r en utilisant la méthode de la différence centrée à $r=0.1$ m on prenant un pas $\Delta r=0.001$ m.
3. Comparer le résultat numérique avec la solution analytique de la dérivée, et calculez l'erreur de la méthode numérique.
4. Supposez que la vitesse suit une relation linéaire $v(r)=v_0(1-r/R)$. Calculez la dérivée première dans ce cas (analytiquement) et comparez-la avec celle obtenue dans le cas précédent.

Donnée : $\Delta r=0.001$ m

Solution travaux Dirigés 2- Dérivation numérique

Exercice 1 :

1- Pour $x=1, 2$ et 3 on a :

$$(x_0, y_0) = (1, 2)$$

$$(x_1, y_1) = (2, 4)$$

$$(x_2, y_2) = (3, 8)$$

La valeur exacte est $f'(x) = \ln(2) * 2^x \rightarrow f'(2) = \ln(2) * 2^2 = 2.773$

Alors : $h = 1, x_i = 1, 2$, et $3, i = 0, 1, 2$

Méthode des différences excentrées en avant :

$$f'(x_1) = (f(x_1+h) - f(x_1))/h = (2^3 - 2^2)/1 = 4$$

Méthode des différences excentrées en arrière :

$$f'(x_1) = (f(x_1) - f(x_2-h))/h = (2^2 - 2^1)/1 = 2$$

Méthode des différences centrées :

$$f'(x_2) = (f(x_2+h) - f(x_1-h))/2*h = (2^3 - 2^1)/2*1 = 3$$

le calcul de la dérivée dans les points x donne :

X	$x_0=1$	$x_1=2$	$x_2=3$
différence-excentrée-avant	2.000	4.000	8
Erreur absolue	0.614	1.227	2.455
différence-excentrée-arrière	1.000	2.000	4
Erreur absolue	0.386	0.773	1.545
différence-centrée	1.500	3.000	6
Erreur absolue	0.114	0.227	0.455
Dérivée analytique	1.386	2.773	5.545

Erreur absolue moyenne pour les trois schémas :

$$\text{schéma-avant} = (0.614 + 1.227 + 2.455)/3 = 1.432$$

$$\text{schéma-arrière} = (0.386 + 0.773 + 1.545)/3 = 0.903$$

$$\text{schéma-centré} = (0.114 + 0.227 + 0.455)/3 = 0.265$$

2- Comparaison : on remarque que le schéma centré est celui qui donne une meilleure approximation de la dérivée, quantité d'erreur absolue minimale par rapport aux deux autres schémas.

3- $h = 1, 0.5, 0.1, 0.01, x=3$

Méthode des différences centrées :

$$f'(x) = (f(x+h) - f(x-h))/2*h$$

$$h=1, f'(3) = (2^4 - 2^2)/(2*1) = 6$$

$$h=0.5, f'(3) = (2^{3.5} - 2^{2.5})/(2*0.5) = 5.657$$

$$h=0.1, f'(3) = (2^{3.1} - 2^{2.9})/(2*0.1) = 5.550$$

$$h=0.01, f'(3) = (2^{3.01} - 2^{2.99})/(2*0.01) = 5.545$$

h	1	0.5	0.1	0.01
différence-centrée	6	5.657	5.550	5.545
Erreur absolue	0.455	0.112	0.005	0

4- calcul de $f''(x=4)$:

$$f''(x_3) = (f(x_3+h) - 2*f(x_3) + f(x_3-h))/h^2 = (2^{4.01} - 2*2^4 + 2^{3.99})/(0.01)^2 \\ = (16.111 - 2*16 + 15.889)/(0.01)^2 = 7.6872$$

La valeur exacte est $f''(x) = (2^x) * \ln(2)^2 \rightarrow f''(4) = (2^4) * \ln(2)^2 = 7.687$

Erreur absolue = $\text{abs}(7.715 - 7.687) = 0.028$

Exercice 2 :

1- Vitesse du fluide à $r=0.1$ m

La vitesse $v(r)$ à $r=0.1$ m est donnée par la formule :

$$v(0.1) = v_0 / (1 + (0.1/0.25)^2)$$

Calculons cette valeur :

$$v(0.1) = 4 / (1 + (0.1/0.25)^2) \approx 3.448276 \text{ m/s}$$

2- Le taux de variation de la vitesse par rapport au rayon r , en utilisant la méthode de la différence centrée, est calculé par :

$$v'(r) \approx (v(r+\Delta r) - v(r-\Delta r)) / (2 * \Delta r)$$

Où $r=0.1$ m et $\Delta r=0.001$ m.

$$v(r+\Delta r) = v(0.1+0.001) = v(0.101) = 4 / (1 + (0.101/0.25)^2) \approx 3.438742 \text{ m/s}$$

$$v(r-\Delta r) = v(0.1-0.001) = v(0.099) = 4 / (1 + (0.099/0.25)^2) \approx 3.457767 \text{ m/s}$$

Ainsi,

$$v'(0.1) \approx dv/dr = (3.438742 - 3.457767) / (2 * 0.001) = -9.51231 \text{ m/s}^2$$

3- Comparaison avec la solution analytique

La solution analytique de la dérivée de $v(r)$ est donnée par :

$$dv/dr = -(2 * v_0 * r / R^2) / (1 + (r/R)^2)^2$$

En substituant les valeurs numériques pour $v_0=4$ m/s, $R=0.25$ m et $r=0.1$, on obtient :

$$dv/dr = -(2 * 4 * 0.1 / 0.25^2) * (1 + (0.1/0.25)^2)^{-2} \approx -9.51249 \text{ m/s}^2$$

L'erreur entre la solution numérique et la solution analytique est :

$$\text{Erreur} = |v'_{\text{num}} - v'_{\text{analytique}}| = |-9.51231 - (-9.51249)| = 0.00018 \text{ m/s}^2$$

$$\text{Erreur \%} = |(\text{Erreur} / v'_{\text{analytique}})| * 100\% = 0.0019 \%$$

La dérivée analytique donne une expression exacte pour le taux de variation de la vitesse. La méthode de la différence centrée est utile pour des calculs pratiques lorsque l'expression analytique est complexe ou inconnue. L'erreur entre les méthodes numérique et analytique est de l'ordre de 0.0019 % indiquant que la méthode numérique est fiable pour estimer le changement de vitesse.

4. Cas de la relation linéaire $v(r) = v_0(1 - r/R)$

Dérivée première :

$$v'(r) = -v_0/R$$

À $r=0.1$: $v'(0.1)=-4/R0.25=-16 \text{ m/s}^2$

Comparaison :

Pour $v(r)= v_0/(1+(r/R)^2)$, la dérivée première est plus complexe et pour $v(r)=v_0*(1-r/R)$, la dérivée est constante, indiquant une relation linéaire sans courbure. Ces analyses montrent que la relation quadratique initiale a une variation plus complexe de la vitesse par rapport au rayon, reflétant mieux le comportement des fluides dans les tuyaux, où la vitesse est maximale au centre et diminue vers les bords.

Travaux Pratiques 2- Dérivation numérique

Exercice 1 :

On considère la fonction $f(x) = \exp(x/2) - 5$.

1. Écrire un programme Fortran qui :

a) Calcule la première dérivée numérique de la fonction $f(x)$ aux points $x = -3, -1, 2, 8$ et 15 , avec un pas $h = 0.01$, en utilisant les trois méthodes suivantes :

- Méthode des différences excentrées en avant : $f'(x) \approx (f(x+h) - f(x))/h$
- Méthode des différences excentrées en arrière : $f'(x) \approx (f(x) - f(x-h))/h$
- Méthode des différences centrées : $f'(x) \approx (f(x+h) - f(x-h))/(2 \cdot h)$

b) Calcule la dérivée centrée de $f(x)$ au point $x = 5$ pour différents pas $h = 0.001, 0.01, 0.1, 0.5$ et 1 .

c) Calcule la dérivée analytique de $f(x)$ et évalue l'erreur absolue entre les dérivées numériques et la dérivée analytique aux points précédents $x = -3, -1, 2, 8$ et 15 .

d) Calcule les dérivées numérique et analytique de la seconde dérivée $f''(x)$ au point $x = 4$, ainsi que l'erreur absolue entre les deux.

Étapes à suivre dans le programme :

- Lire les valeurs de $x = -3, -1, 2, 8$ et 15 et $h = 0.01$.
- Définir la fonction $f(x)$, sa première dérivée $f'(x)$, et sa seconde dérivée $f''(x)$.
- Implémenter les formules des différences en avant, en arrière et centrées pour $f'(x)$.
- Implémenter la formule des différences centrées pour $f''(x)$.
- Afficher dans le programme les résultats suivants :
 - Les valeurs approximatives des dérivées numériques ($f'(x)$ et $f''(x)$) selon les différentes méthodes.
 - Les valeurs analytiques ($f'(x)$ et $f''(x)$) aux mêmes points.
 - Les erreurs absolues commises entre les dérivées numériques et analytiques.

2. Exécuter le programme :

a- Lancer le programme pour afficher les résultats suivants :

- Les valeurs des dérivées numériques ($f'(x)$ et $f''(x)$) calculées aux points spécifiés.
- Les valeurs des dérivées analytiques.
- Les erreurs absolues pour chaque point.

b- Vérifier la convergence en étudiant l'impact du choix du pas h sur la précision au point $x = 5$.

Remarques pour la mise en œuvre :

- a- Utilisez des formats d'affichage adaptés dans le programme Fortran (par exemple, avec une précision de 6 chiffres après la virgule) pour l'affichage des résultats.
- b- Le programme devra afficher clairement les résultats pour chaque méthode et chaque point.
- c- Assurez-vous d'implémenter les formules analytiques exactes

Solution Travaux Pratiques 2- Dérivation numérique

Exercice 1 :

1. Programme Fortran

```
PROGRAM Derivee
IMPLICIT NONE
REAL(8) :: x,h,f,D1_AN,D_AV,D_AR,D_CE
REAL(8) :: D2_AN, D_SEC, E_CE, E_SEC,E_AV,E_AR
REAL(8), PARAMETER :: h_values(5)=(/0.001, 0.01, 0.1, 0.5, 1.0/)
REAL(8),PARAMETER::x_points(5)=(/-3.0D0,-1.0D0,
+2.0D0,8.0D0,15.0D0 /)
INTEGER :: i
c *****
c calcul DERIVEE
c dérivée Schéma excentré en avant (D_AV)
c dérivée Schéma excentré en arrière (D_AR)
c dérivée Schéma centré (D_CE)
c dérivée analytique(D1_AN)
c dérivée Schéma centré (D_SEC)
c dérivée SECONDE analytique(D2_AN)
c calcul ERREUR
c erreur avant (E_AV)
c erreur arrière (E_AR)
c erreur centré (E_CE)
c erreur SECONDE (E_SEC)
c *****
! Loop over points
DO i = 1, 5
  x = x_points(i)
  h = 0.001
! Function values
  f = exp(x / 2.0D0) - 5.0D0
  D1_AN = 0.5D0 * exp(x / 2.0D0)
  D2_AN = 0.25D0 * exp(x / 2.0D0)
! Numerical derivatives
  D_AV = (exp((x + h)/2.0D0) - 5.0D0 - f) / h
  D_AR = (f - (exp((x - h)/2.0D0) - 5.0D0)) / h
  D_CE=(exp((x+h)/2.0D0)-5.0D0-(exp((x-h)/2.0D0)-5.0D0))/(2.0D0 * h)
  D_SEC = ((exp((x + h)/2.0D0) - 5.0D0) - 2.0D0*f +
+(exp((x - h)/2.0D0) - 5.0D0)) / (h*h)
! Errors
  E_AV = ABS(D1_AN - D_AV)
  E_AR = ABS(D1_AN - D_AR)
  E_CE = ABS(D1_AN - D_CE)
  E_SEC = ABS(D2_AN - D_SEC)
```

```

! Print results
write(*,20)
20 format(4x,'x',7x,'D1_AN',5x,'D_AV',5x,'E_AV',5x,'D_AR',
+5x,'E_AR',5x,'D_CE',5x,'E_CE')
write(*,10) x,D1_AN,D_AV,E_AV,D_AR,E_AR,D_CE,E_CE
10 FORMAT(1x,F6.3,1x,F9.5,1x,F9.5,1x,F8.5,1x,F9.5,1x,F8.5
+,1x,F9.5,1x,F8.5)
write(*,*)' '
END DO
END PROGRAM Derivatives

```

2. Exécution du programme :

Première dérivée aux points $x=-3, -1, 2, 8$ et 15 avec $h=0.01$:

x	-3	-1	2	8	15
$f'(x)_{\text{avant}}$	0.11182	0.30303	1.36256	27.36816	906.31100
Err absolue	0.00025	0.00077	0.00342	0.06909	2.289856
$f'(x)_{\text{arrière}}$	0.11129	0.30251	1.35574	27.23122	901.78220
Err absolue	0.00027	0.00076	0.00340	0.06786	2.23895
$f'(x)_{\text{centrée}}$	0.11156	0.30327	1.35915	27.29969	904.04660
Err absolue	0.00001	0	0.00001	0.00062	0.025451
$f'(x)_{\text{analytique}}$	0.11157	0.30327	1.35914	27.29907	904.02120

Dérivée centrée au point $x=5$ pour différents pas h :

h	$f'(5)_{\text{centrée}}$	$f'(5)_{\text{analytique}}$	Erreur absolue
1.0	6.34824	6.09125	0.06398
0.5	6.15490	6.09125	0.06365
0.1	6.09378	6.09125	0.00253
0.01	6.09140	6.09125	0.00016
0.001	6.09088	6.09125	0.00037

Seconde dérivée au point $x=4$ avec $h=0.1$:

$f''(4)_{\text{analytique}}$	$f''(4)_{\text{numérique}}$	Erreur absolue
1.84726	1.84762	0.00036

Press any key to continue ↵

Conclusion

- Les méthodes numériques donnent des résultats très précis pour la dérivée lorsque le pas h est petit.
- L'écart entre la valeur exacte et la valeur approchée de la dérivée en un point donné a tendance à augmenter lorsque h est trop grand ou, au contraire, très petit. Il est donc essentiel de choisir une valeur de h bien ajustée, car elle impacte directement la précision du résultat.
- La méthode des différences centrées est plus précise que les méthodes excentrées.
- Une augmentation du pas h diminue la précision des dérivées numériques.
- Les erreurs absolues entre les dérivées analytiques et numériques sont très faibles, confirmant la fiabilité des calculs.

Leçon 3 : Intégration Numérique

Leçon 3 : Intégration Numérique

Objectif

L'objet de ce chapitre est de d'écrire quelques méthodes numériques classiques permettant d'évaluer des intégrales de fonctions dont les valeurs sont connues en un nombre fini de points. On s'attachera à expliciter le plus complètement possible les formules d'intégrations dans chacun des cas.

3.1 Position du problème

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$. On cherche à approcher numériquement

l'intégrale $I = \int_a^b f(x) dx$.

Dont la valeur exacte est :

$$I = F(b) - F(a)$$

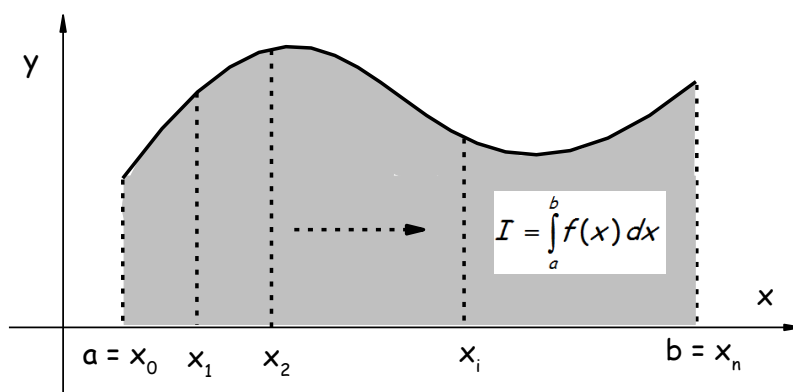
Où F est une primitive de f , c'est-à-dire que $F'(x) = f(x)$.

3.2 Principe

L'intégration numérique d'une fonction consiste à calculer l'air sous la courbe représentant cette fonction. Considérons une subdivision uniforme de l'intervalle $[a, b]$ en n sous intervalles de même longueur $h = x_{i+1} - x_i = (b - a) / n$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. On pose $x_i = a + i \cdot h$. (figure 1). On se donne une subdivision marquée $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$; La somme de Riemann (les sommes de Riemann sont des sommes finies approchant des intégrales) de f

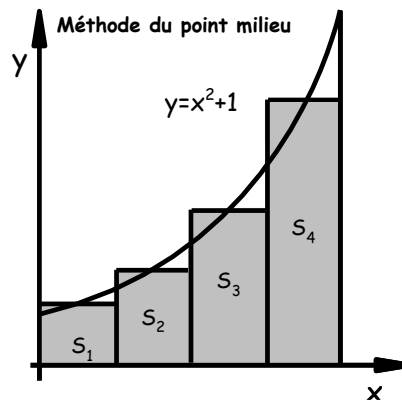
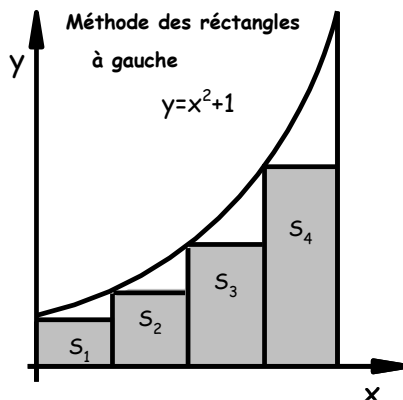
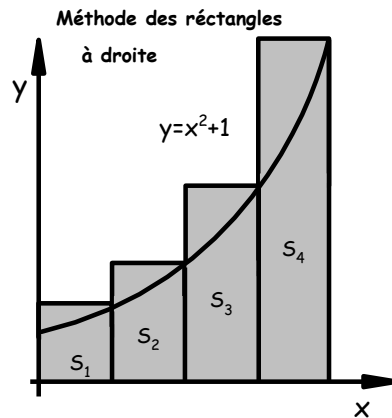
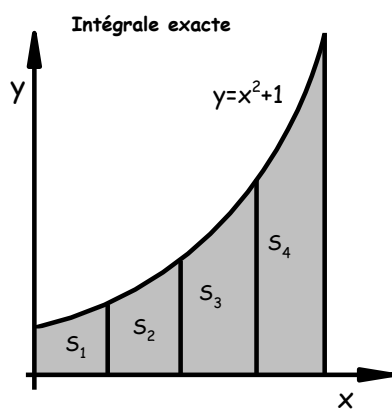
sur $[a, b]$ est définie par : $I = \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) * \Delta x_i = \sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i) * f(x_i)$

$$\Rightarrow I = \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) * h = h * \sum_{i=0}^n f(x_i)$$



3.3 Méthodes des rectangles

Dans cette méthode, on calcule l'intégrale numérique en réalisant une somme de surfaces de rectangles. Le domaine d'intégration est découpé en intervalles et on fait comme si la fonction restait constante sur chaque intervalle. Pour chaque calcul, on réalise l'intégrale de l'une des méthodes suivantes :



- Méthodes des rectangles à gauche

$$I = \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) * f(x_i)$$

- Méthode des rectangles à droite

$$I = \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) * f(x_{i+1})$$

- Méthode du point milieu

$$I = \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) * f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

Exemple 1 :

Estimer $\int_0^5 (2^x/2) dx$ En utilisant :

- Méthodes des rectangles à gauche
- Méthode des rectangles à droite
- Méthode du point milieu

On donne $h=1, n=5$

Solution :

La solution exacte est : $\int (2^x/2) = 2^x/2 * \ln(2)$

$$\int_0^5 (2^x/2) dx = \left[2^x / (2 * \ln(2)) \right]_0^5 = (1/2) * ((2^5/\ln(2)) - (2^0/\ln(2))) = (1/2) * (46.166 - 1.443) = 22.361$$

- Méthodes des rectangles à gauche

$$I = (1-0) * 0.5 + (2-1) * 1 + (3-2) * 2 + (4-3) * 4 + (5-4) * 8 = 0.5 + 1 + 2 + 4 + 8 = 15.5$$

Erreur absolue = 6,8615

- Méthode des rectangles à droite

$$I = (1-0) * 1 + (2-1) * 2 + (3-2) * 4 + (4-3) * 8 + (5-4) * 16 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$$

Erreur absolue = 8,6385

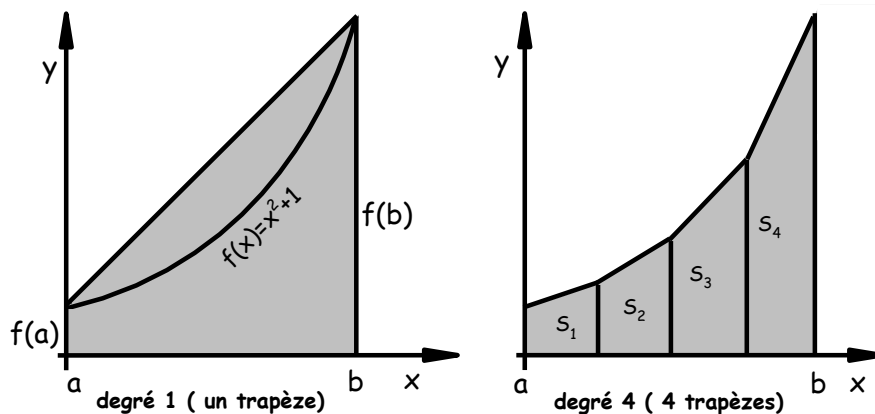
- Méthode du point milieu

$$I = (1-0) * 0,70711 + (2-1) * 1,41421 + (3-2) * 2,82843 + (4-3) * 5,65685 + (5-4) * 11,31371 = 0,70711 + 1,41421 + 2,82843 + 5,65685 + 11,31371 = 21,92031$$

Erreur absolue = 0,44119

3.4 Méthode des trapèzes

La méthode des trapèzes consiste à approcher l'intégrale $I = \int_a^b f(x) dx$ par une interpolation polynômiale de degré 1, les points d'interpolation $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ sont suffisants pour tracer un segment dont l'intégrale correspond à l'aire d'un trapèze. Quand on augmente le nombre de trapèzes dans le segment $[a, b]$, la valeur de l'intégrale approchée converge vers la solution analytique de l'intégrale (figure 2).



Le schéma numérique de la méthode du trapèze est donné par :

$$I = \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) * (f(x_i) + f(x_{i+1})) / 2 \text{ Où } n \text{ est le nombre de trapèzes et.}$$

Pour $n = 4$: $I = (x_1 - x_0) * (f(x_0) + f(x_1)) / 2 + (x_2 - x_1) * (f(x_1) + f(x_2)) / 2 + (x_3 - x_2) * (f(x_2) + f(x_3)) / 2 + (x_4 - x_3) * (f(x_3) + f(x_4)) / 2$ ou $x_0 = a, x_n = b, h = (b - a) / n$

$$I = (h/2) * (f(a) + f(b)) + h * \sum_{i=1}^{n-1} f(a + i * h)$$

Exemple 2 :

Calculer la valeur exacte de $I = \int_a^b f(x) dx = \int_0^4 e^x/10 dx$ et donner une approximation de I en utilisant la Méthode de Trapèze (avec n=1 puis n=4 points d'appuis).

Solution :

La solution exacte est $\int_0^4 e^x/10 dx = (e^4/10) - (e^0/10) = 5.460 - 0.1 = 5.360$

a- $n=1, h = (4 - 0) / 1 = 4$

X	$X_0 = 0$	$X_1 = 4$
f(x)	0.1	5.460

$$I = \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) * (f(x_i) + f(x_{i+1}))/2 = \sum_{i=0}^1 (x_{i+1} - x_i) * (f(x_i) + f(x_{i+1}))/2$$

$$= (4-0) * (0.1+5.460)/2 = 11.12$$

$$\text{Erreur absolue} = \text{abs}(5.360 - 11.12) = 5.75$$

b- $n=4, h = (4 - 0) / 4 = 1$

X	$X_0 = 0$	$X_1 = 1$	$X_2 = 2$	$X_3 = 3$	$X_4 = 4$
f(x)	0.1	0.272	0.739	2.009	5.460

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) * (f(x_i) + f(x_{i+1}))/2 = \sum_{i=0}^3 (x_{i+1} - x_i) * (f(x_i) + f(x_{i+1}))/2$$

$$= 1 * (0.1+0.272)/2 + 1 * (0.272+0.739)/2 + 1 * (0.739+2.009)/2 + 1 * (2.009+5.46)/2 = 6.25$$

$$\text{Erreur absolue} = \text{abs}(5.360 - 6.25) = 0.89$$

3.5 Méthode de Simpson

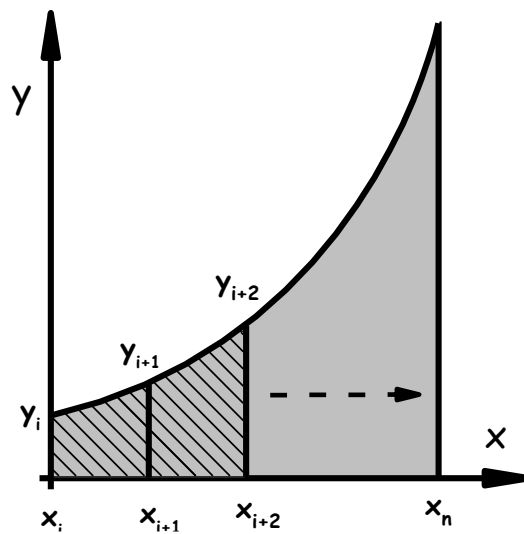
La méthode de Simpson consiste à diviser l'intervalle $[a, b]$ en n segments égaux avec n un nombre pair. L'intégrale est remplacée par l'aire du polynôme d'interpolation de degré deux passant par $(x_i, f(x_i))$, $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$, $(x_{i+2}, f(x_{i+2}))$.

Le schéma numérique de cette méthode est donné par :

$$I = \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0,2}^{n-2} (x_{i+2} - x_i) * (f(x_i) + 4 * f(x_{i+1}) + f(x_{i+2}))/6$$

On pose $h = x_{i+1} - x_i$, on obtient

$$I = \sum_{i=0,2}^{n-2} (2 * h) * (f(x_i) + 4 * f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})) / 6 = (h/3) * \sum_{i=0,2}^{n-2} (f(x_i) + 4 * f(x_{i+1}) + f(x_{i+2}))$$



Exemple 3 :

Résoudre l'exemple précédent en utilisant la méthode de Simpson.

Donnée : $n=4$

Solution : $h = (4 - 0) / 4 = 1$

X	$X_0 = 0$	$X_1 = 1$	$X_2 = 2$	$X_3 = 3$	$X_4 = 4$
f(x)	0.1	0.272	0.739	2.009	5.460

En utilisant la méthode des Simpson

$$I = (h/3) * \sum_{i=0,2}^{n-2} (f(x_i) + 4 * f(x_{i+1}) + f(x_{i+2}))$$

$$I = (1/3) * (0.1 + 4 * 0.272 + 0.739 + 0.739 + 4 * 2.009 + 5.460) = 5.387$$

$$\text{La solution exacte est } \int_0^4 e^x / 10 \, dx = (e^4 / 10) - (e^0 / 10) = 5.460 - 0.1 = 5.360$$

$$\text{Erreur absolue} = \text{abs}(5.360 - 5.387) = 0.027$$

3.6 Exercices avec corrections

Exercice 1 :

Déterminer l'intégrale de la dérivée $f'(x)$ en utilisant la méthode des trapèzes à partir du tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5
$f'(x_i)$	0	0.69315	1.09861	1.38629	1.60944

1- Utiliser la méthode des trapèzes pour approximer l'intégrale de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1, 5]$.

2- Ces points d'appui sont ceux donnant $f'(x) = \ln(x)$, comparer alors les résultats obtenus avec la valeur analytique de $f(x)$.

Solution :

La méthode des trapèzes pour approximer l'intégrale est formulée comme suit :

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) * (f(x_i) + f(x_{i+1}))/2 = \sum_{i=0}^4 (x_{i+1} - x_i) * (f(x_i) + f(x_{i+1}))/2$$

Où $h = (x_{i+1} - x_i) = 1$ est la largeur des sous-intervalles, $n-1=4$ est le nombre de sous-intervalles.

Maintenant, appliquons la formule précédente :

$$\int_0^5 f'(x) dx = (0 + 0.69315)/2 + (0.69315 + 1.09861)/2 + (1.09861 + 1.38629)/2 + (1.38629 + 1.60944)/2 = 3.98277$$

2- Calculons la valeur analytique de $f'(x)=\ln(x)$ sur l'intervalle $[1, 5]$:

$$\int_0^5 f'(x) dx = \int_0^5 \ln(x) dx = [x(\ln(x) - 1)]_0^5 = 5*(\ln(5) - 1) - 1*(\ln(1) - 1) = 4.04719$$

$$\text{Erreur absolue} = \text{abs}(4.04719 - 3.98277) = 0.06442$$

L'approche par la méthode des trapèzes a donné une valeur d'environ 3.98277, qui est assez proche de la valeur analytique 4.0472. Cette différence peut être attribuée à l'erreur d'approximation inhérente à la méthode des trapèzes, qui peut ne pas capturer parfaitement la courbure de la fonction $f'(x)$ sur l'intervalle $[1, 5]$. Toutefois, les résultats sont suffisamment proches pour indiquer que la méthode est raisonnablement efficace dans ce cas.

Exercice 2 : Calcul de la distance parcourue par un objet

Un objet se déplace le long d'une ligne droite, et sa vitesse $v(t)$ en fonction du temps t est donnée par la fonction $v(t)=3t^2+2$ sur l'intervalle $[0,4]$.

1. Calculez la distance totale parcourue par l'objet en utilisant la formule

$$I = \int_0^4 v(t) dt.$$

2. Appliquez la méthode des trapèzes avec $n=4$ pour estimer la distance parcourue par l'objet. Montrez les étapes de votre calcul.
3. Utilisez la méthode de Simpson avec $n=4$ pour estimer la distance parcourue par l'objet.
4. Comparez les résultats obtenus par les deux méthodes (trapèzes et Simpson). Quelle estimation est la plus proche de la valeur exacte trouvée à la question 1 ?

Solution :

1- Calcul de la distance parcourue par un objet

La valeur exacte de l'intégrale est: $I = \int_0^4 v(t) dt = \int_0^4 (3t^2 + 2) dt = [t^3 + 2t]_0^4 = 72 - 0 = 72 \text{ m}$

2- Pour appliquer la méthode des trapèzes avec $n=4$, nous devons diviser l'intervalle $[0,4]$ en 4 sous-intervalles de largeur h . $h = (t_{i+1} - t_i) = (4 - 0) / 4 = 1$

L'intégral I devient : $(h/2) * (f(a) + 2 * \sum_{i=1}^3 (f(a + i * h) + f(b)))$

$$\int_0^4 v(t) dt = (h/2) * (f(a) + 2 * \sum_{i=1}^3 (f(a + i * h) + f(b))) = (h/2) * (v(t_0) + 2 * v(t_1) + 2 * v(t_2) + 2 * v(t_3) + v(t_4)) = 0.5 * (2 + 2 * 5 + 2 * 14 + 2 * 29 + 50) = 74 \text{ m}$$

La distance estimée par la méthode des trapèzes est 74 m.

3- Méthode de Simpson avec $n=4$.

Pour la méthode de Simpson, l'intégrale est donné par :

$$\int_0^4 v(t) dt = (h/3) * \sum_{i=0,2}^{n-2} (v(t_i) + 4 * v(t_{i+1}) + v(t_{i+2})) = (h/3) * (v(t_0) + 4 * v(t_1) + 2 * v(t_2) + 4 * v(t_3) + v(t_4)) = (2 + 4 * 5 + 2 * 14 + 4 * 29 + 50) / 3 = 72 \text{ m}$$

La distance estimée par la méthode de Simpson est 72 m

4- Comparaison des résultats

- Valeur exacte : 72 m.
- Trapèzes : 74 m
- Simpson : 72 m

La méthode de Simpson donne une estimation exacte en raison de son utilisation de points intermédiaires, tandis que la méthode des trapèzes surestime légèrement la distance. La méthode de Simpson est donc plus précise dans ce cas.

Travaux Dirigés 3- Intégration Numérique

Exercice 1 :

1- Estimer $\int_0^3 f(x) dx$ à partir des données

X	$X_0 = 0$	$X_1 = 1/2$	$X_2 = 2/2$	$X_3 = 3/2$	$X_4 = 4/2$	$X_5 = 5/2$	$X_6 = 6/2$
f(x)	6	4	3	2.4	2	12/7	3/2

En utilisant

- la méthode des rectangles à gauche
- la méthode des rectangles à droite
- la méthode des trapèzes.
- la méthode de Simpson

2- Calculer l'erreur d'approximation, on donne la fonction mathématique : $f(x) = 6/(x+1)$

Exercice 2 :

On mesure la distance parcourue par une voiture sur les 5 premières seconde on obtient le tableau suivants :

t(s)	0	1	2	3	4	5
x(m)	10	40	90	160	250	360

1) calculer à partir des dérivées centrales, la vitesse v (m/s) de la voiture aux temps t=1s ; 2s, 3s et 4s.

2) calculer, à partir des dérivées à gauche ou à droite, la vitesse de la voiture aux temps t= 0 s et 5 s.

3) sur la base du tableau résultant calculer par la méthode des trapèzes, les intégrales suivants : $\int_0^1 v(t) dt$, $\int_1^2 v(t) dt$, $\int_1^4 v(t) dt$, $\int_3^5 v(t) dt$

4) comparer les résultats obtenus en 3 par les valeurs exactes de différentes intégrales sachant que l'intégrale exacte $\int_a^b v(t) dt = [x(t)]_a^b = x(b) - x(a)$, utiliser comme critère l'erreur absolue entre la valeur exacte et la valeur approchée.

Solution Travaux Dirigés 3- Intégration Numérique

Solution 1 :

1- Donnée : $n=6$, $a=0$, $b=3$

- Méthodes des rectangles à gauche

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) * f(x_i) = 0.5 * 6 + 0.5 * 4 + 0.5 * 3 + 0.5 * 2.4 + 0.5 * 2 + 0.5 * (12/7)$$

$$I = 3 + 2 + 1.5 + 1.2 + 1 + 6/7 = 9.5571$$

- Méthode des rectangles à droite

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) * f(x_{i+1}) = 0.5 * 4 + 0.5 * 3 + 0.5 * 2.4 + 0.5 * 2 + 0.5 * (12/7) + 0.5 * 1.5$$

$$I = 2 + 1.5 + 1.2 + 1 + 6/7 + 0.75 = 7.3071$$

- Méthode des trapèzes

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) * (f(x_i) + f(x_{i+1}))/2$$

$$I = 0.5 * (6 + 4) / 2 + 0.5 * (4 + 3) / 2 + 0.5 * (3 + 2.4) / 2 + 0.5 * (2.4 + 2) / 2 + 0.5 * (2 + (12/7)) / 2 + 0.5 * ((12/7) + 1.5) / 2$$

$$I = 2.5 + 1.75 + 1.35 + 1.1 + 0.9286 + 0.8036 = 8.4322$$

- Méthode de Simpson

$$I = \sum_{i=0,2}^{n-2} (2 * h) * (f(x_i) + 4 * f(x_{i+1}) + f(x_{i+2}))/6 = (h/3) * \sum_{i=0,2}^{n-2} (f(x_i) + 4 * f(x_{i+1}) + f(x_{i+2}))$$

$$I = (0.5/3) * (6+4*4+3 + 3+4*2.4+2 + 2+4*(12/7) + (3/2)) = 8.3262$$

1- L'intégral exact est : $I = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b (6/(x+1)) dx = [6 * \ln(x+1)]_a^b$

$$I = 6 * [\ln(x+1)]_0^3 = 6 * (\ln(4) - \ln(1)) = 8.3178$$

Erreur d'approximation :

$$\text{Méthodes des rectangles à gauche} = \text{abs}(8.3178 - 9.557) = 1.2393$$

$$\text{Méthode des rectangles à droite} = \text{abs}(8.3178 - 7.3071) = 1.0107$$

$$\text{Méthode des trapèzes} = \text{abs}(8.3178 - 8.4322) = 0.1144$$

$$\text{Méthode de Simpson} = \text{abs}(8.3178 - 8.3262) = 0.0084$$

Solution 2:

Donnée : $h = \Delta t = t_{i+1} - t_i = 1$ s (dans chaque trapèze), $i=0, 1, 2, 3, 4$

Dérivées centrales $v = dx/dt = (x(t_{i+1}) - x(t_{i-1}))/2h$.

Dérivées à gauche $v = dx/dt = (x(t_i) - x(t_{i-1}))/h$.

Dérivées à droite $v = dx/dt = (x(t_{i+1}) - x(t_i))/h$.

1)

$$t = 1\text{s}, v = (90 - 10) / (2 - 0) = 40 \text{ ms}^{-1}.$$

$$t=2s, v= (160-40)/ (3-1) =60 \text{ ms}^{-1}.$$

$$t=3s, v= (250-90)/ (4-2) =80 \text{ ms}^{-1}.$$

$$t=4s, v= (360-160)/ (5-3) =100 \text{ ms}^{-1}.$$

2)

$$t=0s; v= (40-10)/ (1-0) = 30 \text{ ms}^{-1}.$$

$$t=5s; v= (360-250)/ (5-4) = 110 \text{ ms}^{-1}.$$

t(s)	0	1	2	3	4	5
x(m)	10	40	90	160	250	360
v(m/s)	30	40	60	80	100	110

3) Calcul par la méthode des trapèzes les intégrales : $\int_0^1 v(t) dt$, $\int_1^2 v(t) dt$, $\int_1^4 v(t) dt$,

$$\int_3^5 v(t) dt$$

On a : $\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i) * (f(x_i) + f(x_{i+1}))/2$

Donc :

$$\int_0^1 v(t) dt \text{ (Exacte)} = x(1) - x(0) = 40 - 10 = 30 \text{ m}, \int_0^1 v(t) dt \text{ (Approché)} = 1 * (30 + 40) / 2 = 35 \text{ m}$$

$$\text{Erreur absolue} = \text{abs}(35 - 30) = 5 \text{ m}$$

$$\int_1^2 v(t) dt \text{ (Exacte)} = x(2) - x(1) = 90 - 40 = 50 \text{ m}, \int_1^2 v(t) dt \text{ (Approché)} = 1 * (60 + 40) / 2 = 50 \text{ m}$$

$$\text{Erreur absolue} = \text{abs}(50 - 50) = 0 \text{ m}$$

$$\int_1^4 v(t) dt \text{ (Exacte)} = x(4) - x(1) = 250 - 40 = 210 \text{ m},$$

$$\int_1^4 v(t) dt \text{ (Approché)} = 1 * (40 + 60) / 2 + 1 * (60 + 80) / 2 + 1 * (80 + 100) / 2 = 210 \text{ m}$$

$$\text{Erreur absolue} = \text{abs}(210 - 210) = 0 \text{ m}$$

$$\int_3^5 v(t) dt \text{ (Exacte)} = x(5) - x(3) = 360 - 160 = 200 \text{ m},$$

$$\int_3^5 v(t) dt \text{ (Approché)} = 1 * (80 + 100) / 2 + 1 * (100 + 110) / 2 = 195 \text{ m}$$

$$\text{Erreur absolue} = \text{abs}(200 - 195) = 5 \text{ m}$$

4) On remarque que l'erreur d'approximation dans le premier et le dernier integrale est 5 m et nul dans les autres intégrales. Cela est du a l'erreur dans le calcul initial de la vitesse calculé par les schémas de difference excentré en avant et en arriere et pas le schema centré.

Travaux Pratiques 3- Intégration Numérique

Exercice 1 :

On considère la fonction $f(x)=\ln(x^2)+x-1$.

1- Écrire un programme Fortran pour calculer l'intégrale de $f(x)$ sur l'intervalle $[a,b]$ (avec $a=1$ et $b=4$) en utilisant :

- La méthode des trapèzes
- La méthode de Simpson (avec n pair)

Le programme doit calculer :

- L'intégrale analytique
- Les erreurs absolues pour les méthodes numériques, définies comme :
$$\text{Erreur} = |A_{\text{analytique}} - I_{\text{numérique}}|$$

Étapes à suivre dans le programme :

- Lecture des bornes de l'intégrale a et b , ainsi que du nombre de segments n ($n=4, 8, 16$ et 32). Calculer la largeur des segments $h=(b-a)/n$.
- Définir la fonction $f(x)=\ln(x^2)+x-1$ à l'aide d'un sous-programme de type fonction.
- Implémenter la méthode des trapèzes pour calculer $I_{\text{trapèze}}$.
- Implémenter la méthode de Simpson pour calculer I_{Simpson} .
- Calculer l'intégrale analytique de $f(x)$ sur $[a,b]$.
- Calculer les erreurs absolues entre les solutions numériques (trapèze et Simpson) et la solution analytique.
- Tester la précision des méthodes numériques en faisant varier le nombre de segments n ($n=4, 8, 16, 32$).
- Afficher les résultats :
 - a- Les valeurs approximatives des intégrales par les méthodes du trapèze et de Simpson.
 - b- La valeur exacte de l'intégrale.
 - c- Les erreurs absolues pour chaque méthode.

2- Exécuter le programme Fortran et afficher les résultats suivants :

- a- Les valeurs approximatives de l'intégrale obtenues par les méthodes du trapèze et de Simpson.
- b- La valeur analytique exacte de l'intégrale.
- c- Les erreurs associées.
- d- Tester l'impact de n sur la précision des méthodes numériques.

Solution Travaux Pratiques 3- Intégration Numérique

Solution exercice 1 :

- 1- Le programme demande à l'utilisateur d'entrer les valeurs de n jusqu'à ce que l'utilisateur entre pour terminer l'entrée. Cela permet une flexibilité pour tester différentes valeurs de n sans modifier le programme.

Program integration

Calcul de l'intégrale de la fonction $f(x)=\ln(x*x)+x-1$ par les méthodes de Trapèze et Simpson

! Déclaration des variables

REAL :: a, b, h

INTEGER :: n, i, k

! Définition des bornes et du nombre de segments

write(*,*) ' donner les bornes de l integrale'

read(*,*) a,b

k=0

do

write(*,*) ' '

write(*,*) ' donner le nombre de segments'

read(*,*) n

write(*,*) ' '

if(n == -1) exit

h=(b-a)/n

! Calcul des intégrales

c *****

c calcul par la methode des trapèzes

c *****

TRA=h*(f(a)+f(b))/2

do i=1,n-1

TRA=TRA+(h*f(a+i*h))

enddo

c *****

c calcul par la methode de Simpson

c *****

S0=f(a)+f(b)

S1=0.

do i=1,n-1,2

S1=S1+f(a+i*h)

enddo

S2=0.

do i=2,n-2,2

S2=S2+f(a+i*h)

enddo

SIM=(h/3.)*(S0+4*S1+2*S2)

c *****

c calcul par la methode analytique

c *****

ANA=ff(b)- ff(a)

c *****

c calcul d erreur

```

C *****
err1=abs(ana-TRA)
err2=abs(ana-SIM)
k=k+1
C Affichage des résultats
write(*,*) 'CAS',k
write(*,*) '-----'
write(*,*) 'Resultats pour n=',n
write(*,45)
45 format(25x,' INTEGRALE ',2x,'ERREUR')
write(*,*) 'solution Trapeze ', TRA, err1
write(*,*) 'solution Simpson ', SIM, err2
write(*,*) 'solution numerique', ANA
write(*,*) '-----'
enddo
END
function f(x)
f=log(x**2)+x-1
return
end
function ff(x)
ff=2*x*log(x)+x*x/2-3*x
return
end

```

2- Exécution du Programme

Lors de l'exécution du programme, les résultats suivants seront affichés :

Donner les bornes de l'intégrale

1

4

Donner le nombre de segments

4

CAS 1

```

-----
Résultats pour n=      4
                     INTEGRALE      ERREUR
Solution Trapèze      9.521563      6.879234E-02
Solution Simpson      9.585979      4.375458E-02
Solution numérique    9.590355
-----

```

Donner le nombre de segments

8

CAS 2

```

-----
Résultats pour n=      8
                     INTEGRALE      ERREUR
Solution Trapèze      9.572881      1.747417E-02
Solution Simpson      9.589987      3.681183E-02
Solution numérique    9.590355
-----

```

Donner le nombre de segments

16

CAS 3

Résultats pour n=	16	
	INTEGRALE	ERREUR
Solution Trapèze	9.585967	4.387856E-03
Solution Simpson	9.590329	2.574921E-05
Solution numérique	9.590355	

Donner le nombre de segments

32

CAS 4

Résultats pour n=	32	
	INTEGRALE	ERREUR
Solution Trapèze	9.589257	1.097679E-03
Solution Simpson	9.590353	1.907349E-06
Solution numérique	9.590355	

Donner le nombre de segments

-1

Press any key to continue

Analyse des résultats :

En augmentant n (par exemple, $n=4, 8, 16, 32$), on observe que :

- La méthode des trapèzes converge lentement vers la valeur exacte.
- La méthode de Simpson converge plus rapidement et donne une erreur quasi nulle pour des n faibles.
- La méthode de Simpson est plus précise que celle des trapèzes pour un même n .
- Les résultats numériques se rapprochent de la solution analytique lorsque n augmente.
- Ce programme permet de tester efficacement la convergence des méthodes numériques.

Leçon 4 : Interpolation et approximation de fonctions

Leçon 4 : Interpolation et approximation de fonctions

1- Position du problème d'interpolation

Soient (x_i, y_i) , $i = 0, \dots, n$, $(n + 1)$ couples de valeurs réelles. Des telles valeurs peuvent être le résultat de mesures effectuées expérimentalement. Le but du problème d'interpolation est de déterminer une fonction P appartenant à une certaine classe qui passe par les points (x_i, y_i) donnés, c'est-à-dire $P(x_i) = y_i$, $i = 0, \dots, n$.

Les points (x_i, y_i) sont appelés les points d'interpolation.

Exemple 2.1. On mesure expérimentalement la température d'un objet qui refroidit au cours du temps. On obtient une suite de valeurs à différents temps t_i . On cherche alors à tracer la courbe de refroidissement la plus proche possible des points mesurés, et ainsi à estimer des valeurs de la fonction en des points non mesurés.

2- Interpolation linéaire

Etant donnée une fonction numérique $f(x)$ définie en deux points $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$, on peut approcher $f(x)$ par le polynôme $P(x)$ de degré 1 qui coïncide avec $f(x)$ en x_0 et x_1 . Le polynôme $P(x)$ est tel que $P(x) = Ax + B$ avec :

$$P(x_0) = f(x_0) \text{ et } P(x_1) = f(x_1)$$

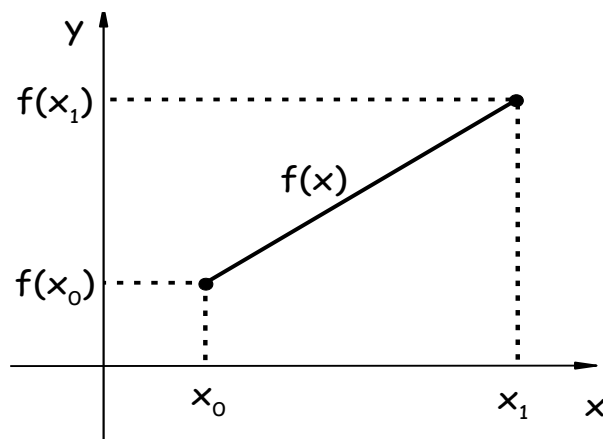
On obtient donc un système de 2 équations à 2 inconnues à résoudre :

$$\begin{cases} Ax_0 + B = f(x_0) \\ Ax_1 + B = f(x_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = (f(x_0) - f(x_1)) / (x_0 - x_1) \\ B = (x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)) / (x_0 - x_1) \end{cases}$$

Le polynôme $P(x)$ sera donc :

$$P(x) = ((f(x_0) - f(x_1)) / (x_0 - x_1)) * x + ((x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)) / (x_0 - x_1))$$

$$\text{Ou encore : } P(x) = f(x_0) * (x - x_1) / (x_0 - x_1) + f(x_1) * (x - x_0) / (x_0 - x_1)$$



Exemple :

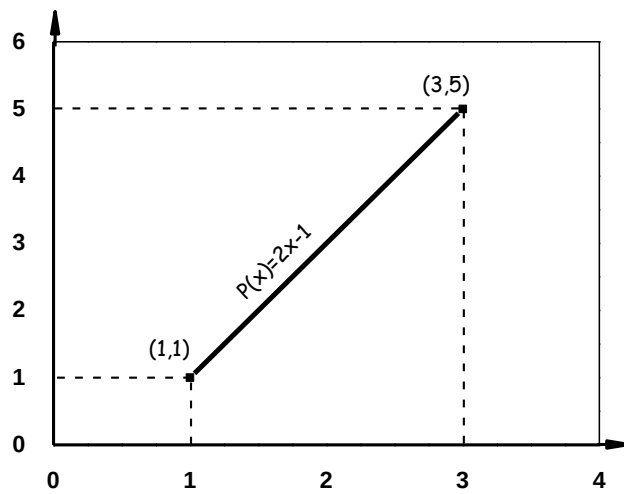
- Etant donné deux points $P_1(1 ; 1)$ et $P_2(3 ; 5)$, déterminer le polynôme de degré 1 qui passant par ces points.

Solution :

Le polynôme $P(x)$ est tel que $P(x) = Ax + B$

$$\begin{cases} Ax_0 + B = f(x_0) \\ Ax_1 + B = f(x_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A * 1 + B = 1 \\ A * 3 + B = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 1 - A \\ A * 3 + 1 - A = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = -1 \end{cases}$$

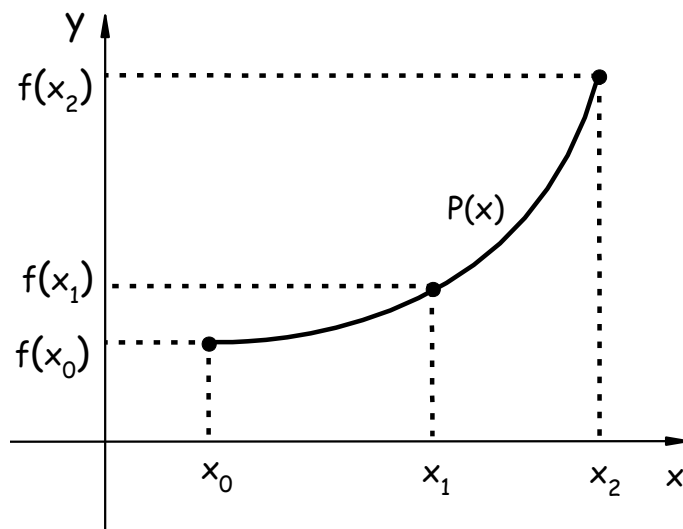
$$\Rightarrow P(x) = 2x - 1$$



3- Interpolation quadratique

Entres trois points distincts (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) d'une fonction $f(x)$, il passe un polynôme unique $P(x)$ coïncidant avec $f(x)$. $P(x)$ est de degré 2 et est de la forme :

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$



On obtient donc le système de 3 équations à 3 inconnues ci-dessous qu'on peut résoudre par les méthodes déjà connues.

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 = f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 = f(x_1) \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 = f(x_2) \end{cases}$$

Exemple : Soit la fonction $f(x) = \cos(x - \pi/2)$.

1- Déterminer le polynôme d'interpolation qui interpole f par les trois points d'appui d'abscisses : $0, \pi/2, \pi$.

$$P(0) = f(0) = \cos(0 - \pi/2) = 0$$

$$P(\pi/2) = f(\pi/2) = \cos(\pi/2 - \pi/2) = 1$$

$$P(\pi) = f(\pi) = \cos(\pi - \pi/2) = 0$$

On obtient :

$$a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 = f(0) = \cos(0 - \pi/2) = 0$$

$$a_0 + a_1 \cdot \pi/2 + a_2 \cdot (\pi/2)^2 = f(\pi/2) = \cos(\pi/2 - \pi/2) = 1$$

$$a_0 + a_1 \cdot \pi + a_2 \cdot (\pi)^2 = f(\pi) = \cos(\pi - \pi/2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 4/\pi \\ a_2 = -4/\pi^2 \end{cases}$$

Donc :

$$P(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 = 0 + x \cdot \pi/2 + x^2 \cdot (-4/\pi^2)$$

$$P(x) = (4/\pi^2) \cdot x \cdot (\pi - x)$$

2- Calculer $P(0)$, $P(\pi)$, $P(\pi/3)$ et $P(\pi/2)$

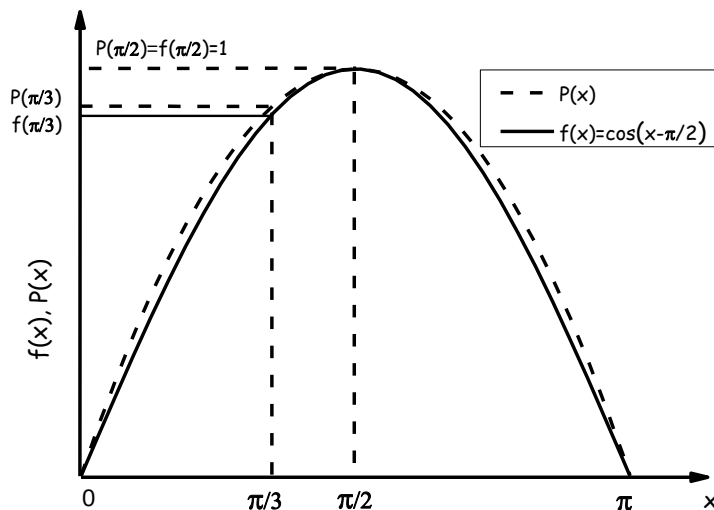
Donc :

$$P(0) = (4/\pi^2) \cdot 0 \cdot (\pi - 0) = 0$$

$$P(\pi/2) = (4/\pi^2) \cdot (\pi/2) \cdot (\pi - (\pi/2)) = 1$$

$$P(\pi) = (4/\pi^2) \cdot \pi \cdot (\pi - \pi) = 0$$

$$P(\pi/3) = (4/\pi^2) \cdot (\pi/3) \cdot (\pi - (\pi/3)) = 0.88889 \text{ et } \cos(\pi/3 - \pi/2) = 0.866$$



4- Polynôme d'interpolation de Lagrange :

En analyse numérique, les polynômes de Lagrange (du nom de Joseph Louis Lagrange) permettent d'interpoler une série de points par un polynôme qui passe exactement par ces points appelés aussi nœuds.

Étant donné $(n+1)$ points $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, le problème est alors de déterminer l'unique polynôme de degré n qui satisfait : $P_n(x_i) = f(x_i)$ pour $i = 0, 1, \dots, n$.

Le polynôme qui satisfait cette égalité est le polynôme d'interpolation de Lagrange :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i) \text{ Ou les } L_i(x) \text{ sont les polynômes de Lagrange associés aux points}$$

définis par :

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n (x - x_j) / (x_i - x_j)$$

$$\text{Donc } P(x) = L_0(x) * f(x_0) + L_1(x) * f(x_1) + L_2(x) * f(x_2) + \dots + L_n(x) * f(x_n)$$

Exemple :

En relevant la vitesse de l'écoulement de l'eau dans une conduite cylindrique on obtient :

x (secondes)	1	10	20
f(x) = v (m/s)	0	1	1.30103

- 1) Calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange P associé aux points $x=1, 10$ et 20 et par la suite calculer $P(1), P(10), P(20)$.
- 2) Calculer $P(1), P(10), P(20)$.
- 3) Estimer la vitesse à l'instant 15 secondes. Comparer le résultat obtenu avec la valeur exacte de la vitesse.

On donne la fonction exacte de l'écoulement de l'eau $f(x)=\log(x)$.

$$1) \text{ On a: } P_2(x) = L_0(x) * f(x_0) + L_1(x) * f(x_1) + L_2(x) * f(x_2)$$

$$P_2(x) = L_1(x) + 1.30103 * L_2(x)$$

$$L_0(x) = \prod_{j=0, j \neq 0}^2 (x - x_j) / (x_0 - x_j) = (x-10) * (x-20) / (1-10) * (1-20)$$

$$L_1(x) = \prod_{j=0, j \neq 1}^2 (x - x_j) / (x_1 - x_j) = (x-1) * (x-20) / (10-1) * (10-20)$$

$$L_2(x) = \prod_{j=0, j \neq 2}^2 (x - x_j) / (x_2 - x_j) = (x-1) * (x-10) / (20-1) * (20-10)$$

$$P_2(x) = -0.00426 * x^2 + 0.15801 * x - 0.15375$$

$$2) P_2(1) = f(1) = -0.00426 * 1^2 + 0.15801 * 1 - 0.15375 = 0$$

$$P_2(10) = f(10) = -0.00426 * 10^2 + 0.15801 * 10 - 0.15375 = 1.00035$$

$$P_2(20) = f(20) = -0.00426 * 20^2 + 0.15801 * 20 - 0.15375 = 1.30245$$

$$3) P_2(15) = f(15) = -0.00426 * 15^2 + 0.15801 * 15 - 0.15375 = 1.2579 \text{ m/s}$$

$$f(15)_{\text{exacte}} = \log(15) = 1.1761 \text{ m/s}$$

$$\text{Erreur absolue} = \text{abs}(1.2579 - 1.1761) = 0.08181$$

Travaux Dirigés 4- Interpolation et approximation de fonctions

Exercice 1 :

- 1- Calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange $p(x)$ de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ aux points suivants : $x_0 = 36$; $x_1 = 49$. Quelle est l'ordre de cette interpolation.
- 2- Déduire une valeur approchée de $\sqrt{42}$ et calculer l'erreur d'interpolation au point $x = 42$.
- 3- peut-on utiliser ce polynôme pour calculer $P(55)$, pourquoi.
- 4- Calculer le polynôme d'interpolation $P(x)$ passant par les points d'appuis d'abscisses $x_0 = 36$; $x_1 = 49$; $x_2 = 64$. Quelle est l'ordre de cette interpolation.
- 5- Tracer les courbes représentatives de $\sqrt{x}$ et de $P(x)$ dans le même repère.
- 6- Calculer $P_2(42)$. Comparer le résultat obtenu à la valeur exact $\sqrt{42}$ puis au résultat obtenu par l'interpolation précédente

Exercice 2 :

Le tableau de valeurs expérimentales a été obtenu en mesurant la température T en ($^{\circ}\text{C}$) d'un objet toutes les 2 minutes.

Temps t (min)	0	2	4
Température T ($^{\circ}\text{C}$)	2	4	10

1. Trouver l'équation de la température en utilisant le polynôme d'interpolation de Lagrange basé sur les trois points suscités.
2. Déterminer une valeur approximative de la température à l'instant $t=2$ min et 3min par la méthode de Lagrange.

Exercice 3 :

Soit un projectile lancé, dont la hauteur à différents instants est donnée par les points suivants :

- À $t = 0$ s, $h(0) = 0$ m
- À $t = 1$ s, $h(1) = 2$ m
- À $t = 2$ s, $h(2) = 8$ m

Questions :

1. Obtenez le polynôme de Lagrange $p(t)$ qui passe par ces points.
2. Calculez une approximation de la hauteur du projectile à $t = 1.5$ s.
3. Supposons que la hauteur réelle est donnée par la fonction $h(t)=t^2$. Calculez l'erreur maximale commise en approximant $h(t)$ par $p(t)$, puis comparez-la avec l'erreur exacte.

Solution Travaux Dirigés 4- Interpolation et approximation de fonctions

Exercice 1 :

1- Rappelons que le polynôme de Lagrange basé sur les points d'appui d'abscisses $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ est d'ordre n et il s'écrit :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i) \text{ Ou les } L_i(x) \text{ sont les polynômes de Lagrange associés aux points}$$

$$x_i \text{ définis par : } L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n (x - x_j) / (x_i - x_j)$$

$f(x) = \sqrt{x}$; on cherche le polynôme d'interpolation de f avec 2 points d'appui :
 $(x_0, y_0) = (36 ; 6) ; (x_1, y_1) = (49, 7)$

$$L_0(x) = (x - x_1) / (x_0 - x_1) = (x - 49) / (36 - 49) = -0,0769x + 3,769$$

$$L_1(x) = (x - x_0) / (x_1 - x_0) = (x - 36) / (49 - 36) = 0,0769x - 2,769$$

$$P_1(x) = L_0(x) * f(x_0) + L_1(x) * f(x_1) = L_0(x) * 6 + L_1(x) * 7 = 3,23077 + 0,07692 * x$$

L'ordre de cette interpolation est 1.

$$2. \sqrt{42} \text{ (approché)} = P_1(42) = 3,23077 + 0,07692 * 42 = 6,46141$$

$$\sqrt{42} \text{ (exacte)} = \sqrt{42} = 6,4807$$

L'erreur effectivement commise lors de l'approximation de $\sqrt{42}$ par $P_1(42)$ est donc :
Erreur absolue = $|6,46141 - 6,4807| = 0,0190$

3. On ne peut pas utiliser ce polynôme pour calculer $P(55)$ car le contexte de l'interpolation exige que l'approximation de la fonction $f(x)$ dans tout point d'abscisse x par un polynôme est valide si et seulement si $x \in [x_0, x_n]$ et dans ce cas $55 \notin [42, 49]$

4. On cherche le polynôme d'interpolation de $f(x)$ avec 3 points d'appui :

$$(x_0, y_0) = (36 ; 6) ; (x_1, y_1) = (49, 7) ; (x_2, y_2) = (64, 8)$$

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} * \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \frac{x - 49}{36 - 49} * \frac{x - 64}{36 - 64} = \frac{1}{364} (x - 49)(x - 64)$$

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} * \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x - 36}{49 - 36} * \frac{x - 64}{49 - 64} = \frac{-1}{195} (x - 36)(x - 64)$$

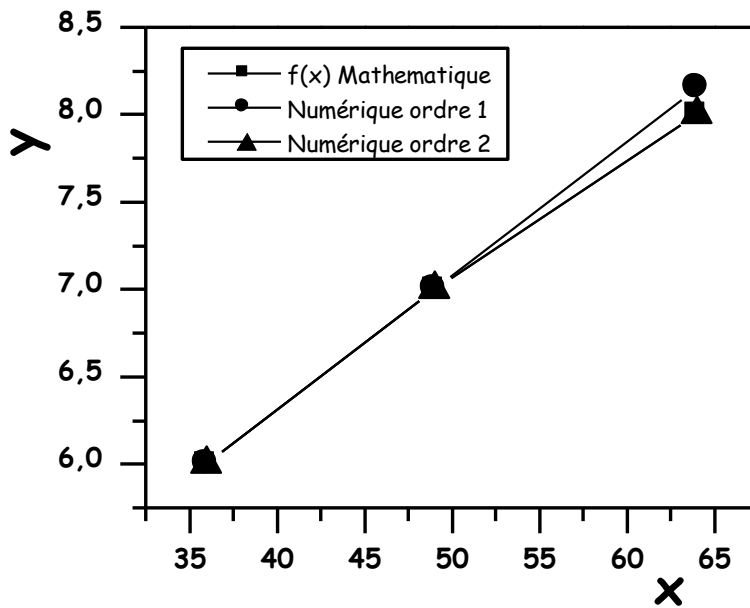
$$L_2(x) = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} * \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x - 36}{64 - 36} * \frac{x - 49}{64 - 49} = \frac{1}{420} (x - 36)(x - 49)$$

Finalement :

$$P_2(x) = L_0(x) * f(x_0) + L_1(x) * f(x_1) + L_2(x) * f(x_2) = 2,58462 + 0,10806 * x - 3,663E-4 * x^2$$

Le polynôme de Lagrange est donc d'ordre 2.

5. Courbes représentatives de $\sqrt{x}$ et de $P(x)$



6. $P_2(42) = 2,58462 + 0,10806 \cdot 42 - 3,663E-4 \cdot 42^2 = 6,47699$

L'erreur d'approximation de $\sqrt{42}$ par $P_2(42)$ est : $|6,47699 - 6,4807| = 0.00371$

L'erreur d'approximation de $\sqrt{42}$ par $P_1(42)$ est : 0.0190

Donc, dans ce cas, l'interpolation de Lagrange $P_2(42)$ donne un bon résultat.

Exercice 2 :

1- Le polynôme de Lagrange basé sur les points d'appui d'abscisses 0, 2, et 4 s'écrit :

On a : $P_2(t) = f(t_0) \cdot L_0(t) + f(t_1) \cdot L_1(t) + f(t_2) \cdot L_2(t) + f(t_3) \cdot L_3(t)$

$$P_2(t) = 0 \cdot L_0(t) + 2 \cdot L_1(t) + 4 \cdot L_2(t) \dots \dots \dots (1)$$

$$L_0(t) = \prod_{j=0, j \neq 0}^2 (t - t_j) / (t_0 - t_j) = (t - 2) \cdot (t - 4) / (0 - 2) \cdot (0 - 4) = (t^2 - 6t + 8) / 8$$

$$L_1(t) = \prod_{j=0, j \neq 1}^2 (t - t_j) / (t_1 - t_j) = (t - 0) \cdot (t - 4) / (2 - 0) \cdot (2 - 4) = -2t^2 / 8 + t$$

$$L_2(t) = \prod_{j=0, j \neq 2}^2 (t - t_j) / (t_2 - t_j) = (t - 0) \cdot (t - 2) / (4 - 0) \cdot (4 - 2) = t^2 / 8 - 2t / 8$$

L'équation (1) donne :

$$P_2(t) = 0.5 \cdot t^2 + 2$$

2- $P_2(t=2) = 0.5 \cdot 2^2 + 2 = 4 \text{ C}^\circ$

$P_2(t=3) = 0.5 \cdot 3^2 + 2 = 6.5 \text{ C}^\circ$

Exercice 3 :

1. Le polynôme de Lagrange est donné par :

$P_n(t) = \sum_{i=0}^n L_i(t) f(t_i)$ Ou les $L_i(t)$ sont les polynômes de Lagrange associés aux points

définis par :

$$L_i(t) = \prod_{j=0, j \neq i}^n (t - t_j) / (t_i - t_j)$$

Pour $n=2$ (trois points) :

- $t_0=0, y_0=0$
- $t_1=1, y_1=8$
- $t_2=2, y_2=20$

Calcul des termes :

$$P_2(t) = \sum_{i=0}^2 L_i(t) f(t_i) = P_2(t) = 0 \cdot \frac{t-1}{0-1} \cdot \frac{t-2}{0-2} + 2 \cdot \frac{t-0}{1-0} \cdot \frac{t-2}{1-2} + 8 \cdot \frac{t-0}{2-0} \cdot \frac{t-1}{2-1} = -$$

$$2t^2 + 4t + 4t^2 - 4t = 2t^2$$

2. Approximation à $t=1.5$ s

$$p(1.5) = 2 \cdot 1.5^2 = 4.5 \text{ m}$$

3. Erreur maximale

La fonction réelle est $h(t) = -t \cdot 2^t$

Calculons $h(1.5)$:

$$h(1.5) = -1.5 \cdot 2^{1.5} = -4.2426 \text{ m}$$

Calculons l'erreur :

$$\text{Erreur} = |h(1.5) - p(1.5)| = |-4.2426 - 4.5| = 0.2573 \text{ m.}$$

Travaux Pratiques 4- Interpolation et approximation de fonctions

Exercice 1 :

On considère la fonction $f(x)=\ln(x+1)+2$. L'objectif est d'approcher cette fonction à une valeur donnée $x_0 = 4$ en utilisant la méthode d'interpolation de Lagrange pour différents ensembles de points et de comparer les solutions numériques obtenues avec la solution analytique.

1. - Écrire un programme en Fortran qui implémente la méthode d'interpolation de Lagrange pour un ensemble de points (x_i, y_i) , avec $y_i=f(x_i)$. Le programme devra permettre de calculer le polynôme d'interpolation $P(x)$ pour une valeur x donnée.
 - Utiliser le programme pour évaluer $P(x_0)$ à $x_0=4$ pour les deux ensembles de points suivants :
 - Cas (a) : $x_1=1, x_2=5, x_3=7$.
 - Cas (b) : $x_1=1, x_2=3, x_3=5, x_4=7$.
 - Ajouter une fonction analytique $f(x)=\ln(x+1)+2$ dans le programme pour calculer directement la solution exacte à $x_0=4$. Comparer cette solution analytique avec les résultats obtenus par interpolation dans les deux cas précédents.
 - Calculer l'erreur absolue pour chaque solution numérique (cas (a) et cas (b)) par rapport à la solution analytique en utilisant la formule :
$$\text{Erreur}=|f(x_0) - P(x_0)|.$$
 - Exécuter le programme fortran et afficher l'état d'écran.
2. Comparer les différentes solutions numériques (cas (a) et cas (b)) en fonction de leur précision vis-à-vis de la solution analytique. Discuter l'impact du choix des points d'interpolation sur la précision de la méthode de Lagrange.

Solution Travaux Pratiques 4- Interpolation et approximation de fonctions

Exercice 1 :

```
1- Programme Fortran
PROGRAM INTERPOLATION
C Lagrange's Method of interpolation
dimension x(20),y(20)
C Déclaration des variables
write(*,*)'To find the function value for a particular value of
+ x using Lagrange interpolation formula.'
write(*,*)
write(*,*)'Enter the number of known function values:'
read(*,*)n ! Nombre de points (xi, yi)
write(*,*)'Enter value of x and corresponding function values:'
DO 10 i=1,n
read(*,*)x(i)
y(i)=f(x(i)) ! Calcul des valeurs de y
10 continue
write(*,*)' donner la valeur de x ou on evalue les solutions'
read(*,*)x0
C Calcul des solutions numériques (Lagrange)
s=0
DO 20 i=1,n
p=1
DO 30 j=1,n
IF(i.NE.j) p=p*(x0-x(j))/(x(i)-x(j))
30 continue
s=s+p*y(i)
20 continue
C Calcul de la solution exacte
result_exact =f(x0)
C Calcul de l'erreur absolue
error=abs(result_exact-s)
C Affichage des résultats
write(*,*)
write(*,*)"Resultats pour x0=",x0
write(*,*)
write(*,*)"-----"
write(*,*)" Solution numerique P(x) :", s
write(*,*)" Solution analytique f(x):", result_exact
write(*,*)" Erreur absolue : ", error
write(*,*)"-----"
STOP
END
function f(x)
f=LOG(x + 1) + 2
return
```

```

end
2- Exécution du programme :
Cas (a) :
Enter the number of known function values
3
Enter value of x and corresponding function values
1
3
7
Donner la valeur de x ou on évalue les solutions
4
Résultats pour x0=", 4.000000
-----
Solution numérique P(x) :, 3.582512
Solution analytique f(x):", 3.609438
Erreur absolue : ", 2.692556E-02
-----
Stop – program terminated.
Press any key to continue
Cas(b) :
Enter the number of known function values
4
Enter value of x and corresponding function values
1
3
5
7
Donner la valeur de x ou on évalue les solutions
4
Résultats pour x0=", 4.000000
-----
Solution numérique P(x) :, 3.614369
Solution analytique f(x):", 3.609438
Erreur absolue : ", 4.930735E-03
-----
Stop – program terminated.
Press any key to continue

```

Analyse des résultats

1. Cas (a) : Avec seulement 3 points d'appuis ($x_1=1$, $x_2=5$, $x_3=7$), l'interpolation reste proche de la solution analytique, mais une petite erreur est présente. Cela est dû à la faible couverture locale des points autour de $x_0=4$.
2. Cas (b) : Avec 4 points plus rapprochés ($x_1=1$, $x_2=3$, $x_3=5$, $x_4=7$), l'interpolation est beaucoup plus précise, car les points couvrent mieux l'intervalle autour de $x_0=4$.
3. Impact des points d'interpolation : Un plus grand nombre de points (et une meilleure répartition autour de x_0 améliore considérablement la précision de l'interpolation.