DR BELAROUSSI TAYEB

Mécanique du point matériel (Physique I)

Cours avec Exercices corrigés

LPPMCA

2020

Faculté de Physique

Département de Physique Energétique

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE D'ORAN MOHAMED BOUDIAF

Sommaire

Chapitre I Outils Mathématiques

chapitre II cinématique

Chapitre III Dynamique

Le calcul vectoriel a pris naissance lors des travaux de William R. Hamilton (1805-1865) en 1843 et ceux d'Hermann G. Grassmann (1809-1877) en 1844. C'est l'influence de Hamilton qui a prédominé sur les premiers développements de la théorie. Son algèbre des quaternions est une extension du calcul des nombres complexes.

Les grandeurs physiques utilisées dans l'étude de la physique ont des propriétés scalaires (Numériques) et des propriétés vectorielles (directionnelles).

I-I Les vecteurs

I-I-1 Notion de scalaire

Une grandeur dite scalaire est entièrement déterminée par sa valeur numérique et une unité Un scalaire est un nombre positif, négatif ou nul, utilisé pour représenter des quantités diverses, en géométrie euclidienne, une longueur, une aire (surface), un volume sont représentés par des scalaires, la valeur numérique ne dépend ni du choix d'un système de coordonnées, ni de son orientation.

I-I-2 Notion de vecteur

Le vecteur est une grandeur qui comporte (en plus) de sa valeur numérique, une information sur la direction et le sens.

Exemple : $\vec{F} = 10\ \vec{u}\ N$

La position d'un point P par rapport à un référentiel est donnée par un vecteur $O\vec{P} = \vec{r}$, la vitesse $\vec{V}$ et l'accélération $\vec{\gamma}$ ou $\vec{a}$.

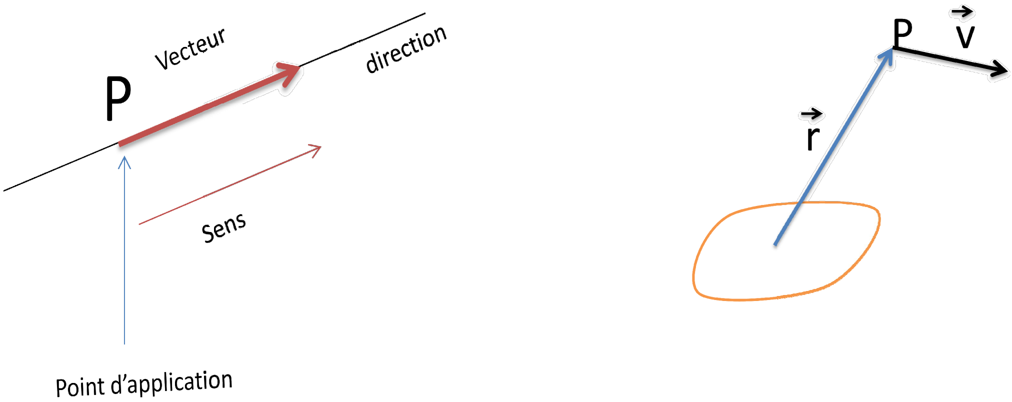


Figure I-1 Définition d'un vecteur

On note $|\vec{V}|$ = Norme = module.

I-I-2-1 Règle de calcul

I-I-2-1-1 Egalité de deux vecteurs

Deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont égaux s'ils ont la même grandeur, la même direction et le même sens. La figure ci-desous montre que $\vec{A} = \vec{B} = -\vec{C}$

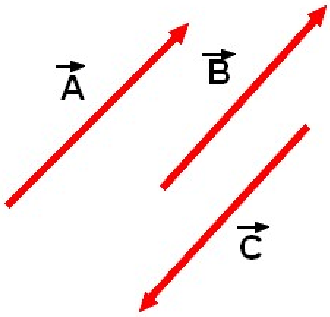


Figure I-2 égalité entre deux vecteurs

I-I-2-1-2 Addition et soustraction de deux vecteurs

Pour additionner le vecteurs $\vec{B}$ au vecteur $\vec{A}$, on trace le vecteur $\vec{A}$ puis on trace le vecteur $\vec{B}$ en plaçant son origine sur l'extrémité du vecteur $\vec{A}$. Le vecteur résultant $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$ est le vecteur qui va de l'origine du vecteur $\vec{A}$ à l'extrémité du vecteur $\vec{B}$ $(voir\ figure)$.

L'addition des vecteur est commutative: $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$.

L'addition des vecteur est associative : $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$.

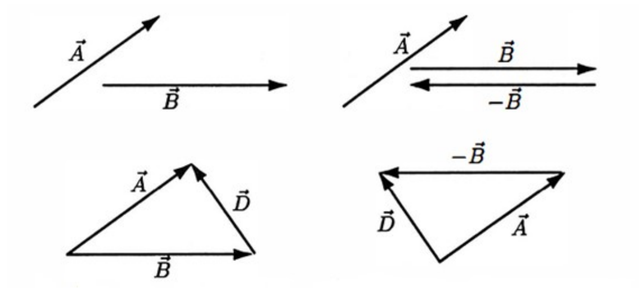


Figure I-3 Addition et soustraction de deux vecteurs

$\vec{A}-\vec{B}=\vec{D}$ et $\vec{B}+\vec{D}=\vec{A}$ $\qquad$ $\vec{A}-\vec{B}=\vec{D}$ et $\vec{A}+(\overrightarrow{-B})=\vec{D}$

I-I-2-1-3 Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Si un vecteur $\vec{A}$ est multiplié par un scalaire k, le produit $k\vec{A}$ est un vecteur qui a la même Direction que $\vec{A}$ si k est positif et de direction opposé à $\vec{A}$ si k est négatif.

Exemple: la quantité de mouvement, $\vec{P}=m\vec{v}$ où m est la masse et $\vec{v}$ la vitesse.

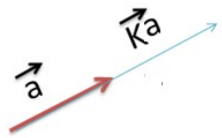
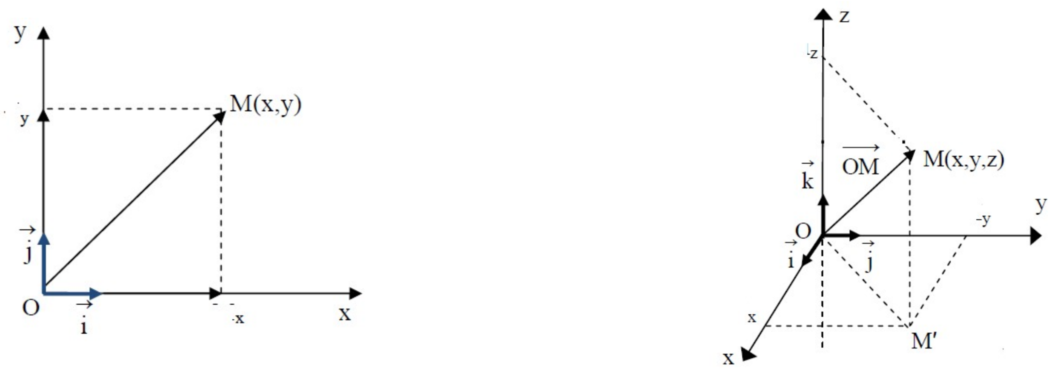


Figure I-4 Multiplication par un scalaire

I-I-2-2 Présentation d'un vecteur

Dans l'espace géométrique à deux ou trois dimension, on utilise généralement des bases orthonormées. $\vec{A}=A_x\vec{\imath}+A_y\vec{\jmath}+A_z\vec{k}$

La norme du vecteur $\vec{A}$ est donnée par : $|\vec{A}|=\sqrt{{A_x}^2+{A_y}^2+{A_z}^2}$



$\vec{A}=\overrightarrow{OM}=A_x\vec{\imath}+A_y\vec{\jmath}$ $\qquad$ $\vec{A}=\overrightarrow{OM}=A_x\vec{\imath}+A_y\vec{\jmath}+A_z\vec{k}$

Figure I-5 Présentation d'un vecteur

I-I-2-3 Produit scalaire

On définit généralement le produit scalaire de deux vecteurs dans l'espace, noté $\vec{A}\,.\,\vec{B}$ comme le Produit de leurs modules fois le cosinus de l'angle entre les deux vecteurs:

$$S = \vec{A}\,.\,\vec{B} = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\theta$$

Si $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$ et $\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$

$$S = \vec{A}\,.\,\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

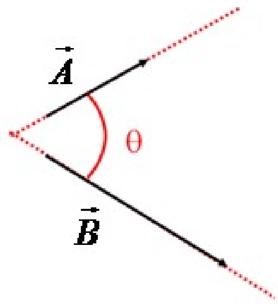


Figure I-5 Produit scalaire

I-I-2-3-1 Propriétés du Produit scalaire

Le produit scalaire possède les propriétés suivantes, qui se démontrent par la géométrie élémentaire :

1) $\vec{A}.(\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A}.\vec{B}) + (\vec{A}.\vec{C})$ Distributive

2) $(\alpha\,\vec{A}).\vec{B} = \vec{A}.(\alpha\vec{B})$

3) $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$ Commutative

4) $S = \vec{A}\,.\,\vec{A} = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{A}\right|\cos 0 = A^2$

5) $S = 0 \;\Rightarrow\; \vec{A} = 0$ ou $\vec{B} = 0$ ou $\cos\theta = 0 \Rightarrow \vec{A} \perp \vec{B}$

6) $\vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1$ et $\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0$

Pour projeter un vecteur sur une droite ou un axe on peut utiliser le produit scalaire.

I-I-2-4 Produit vectoriel

Le produit vectoriel $\vec{A} \wedge \vec{B}$ de deux vecteurs est défini comme un vecteur perpendiculaire a la fois à $\vec{A}$ et à $\vec{B}$

$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$

La norme $|\vec{C}| = |\vec{A}|.|\vec{B}|.\sin\theta$ qui représente l'aire du parallélogramme formé par $\vec{A}$ et $\vec{B}$

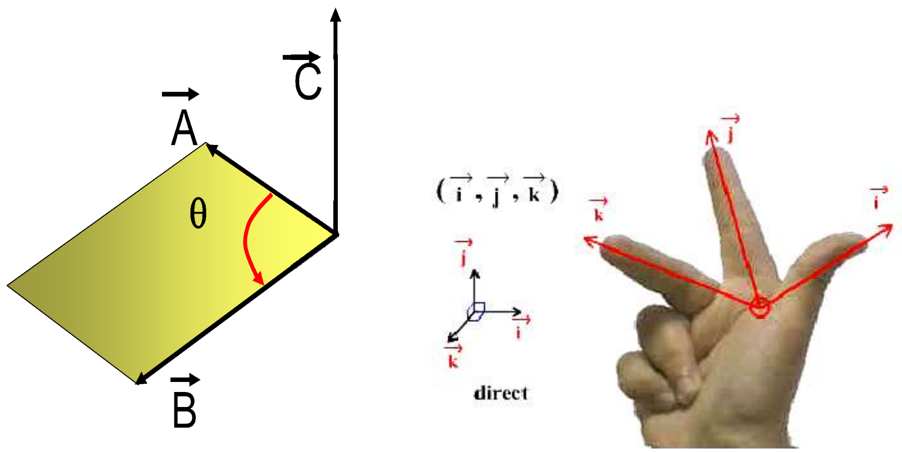


Figure I-7 Produit vectoriel

Le sens est donné par la règle des trois doigts de la main droite

I-I-2-4-1 Propriétés du Produit vectoriel

1) Antisymétrie : $\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$

2) Distributive : $\vec{A} \wedge (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \vec{C}$

3) $(\lambda\vec{A}) \wedge \vec{B} = \vec{A} \wedge (\lambda\vec{B}) = \lambda(\vec{A} \wedge \vec{B})$

4) $\vec{A} \wedge \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{A} = 0$ ou $\vec{B} = 0$ ou $\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0, \theta = k\pi \Rightarrow \vec{A} // \vec{B}$

5) $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = 0$

6) $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$ et $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$ et $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$ et $\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}$

Si $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$ et $\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$

Le produit vectoriel peut être calculé par la méthode directe en coordonnées cartésiennes dans un repère orthonormé direct :

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} = (A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}) \wedge (B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k})$$

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\vec{C} = (A_yB_z - A_zB_y)\vec{i} - (A_xB_z - A_zB_x)\vec{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\vec{k}$$

I-I-2-4-2 Produit mixte :

On peut vérifier que : $\vec{A}.(\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B}.(\vec{C} \wedge \vec{A}) = \vec{C}.(\vec{A} \wedge \vec{B})$

Il représente le volume formé par 3 vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$

$$\vec{A}\,.\,(\vec{B} \wedge \overrightarrow{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

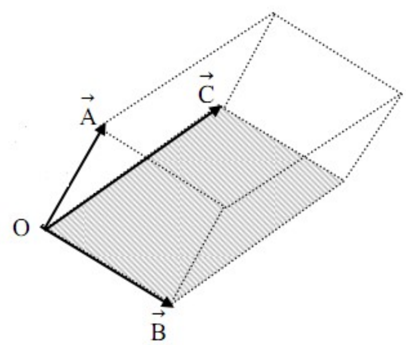


Figure I-8 Produit mixte

I-I-2-5 Champ Scalaire

Toute grandeur scalaire $\Phi(x.y.z)$ prend en tout point de l'espace M(x,y,z) une valeur scalaire.

Exemple : $F(x.y.z) = xz + y^2x + xyz$

I-I-2-6 Champ Vectoriel

Toute grandeur qui prend en tout point M(*x,y,z*) de l'espace une valeur vectorielle.

Exemple : $\vec{F}(x.y.z) = xz\vec{i} + y^2x\vec{j} + xyz\vec{k}$

I-I-2-7 Opérateur :

C'est des grandeurs mathématiques qui agissent sur des fonctions.

L opérateur nabla est un vecteur qui agit sur des fonctions $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$

Le Gradient

Lorsque Nabla est appliqué à un champ scalaire, il le transforme en fonctions vectorielles

$$\vec{\nabla} f(x,y,z) = \overrightarrow{grad} f(x,y,z)$$

$$\vec{\nabla} f(x,y,z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\vec{k}$$

La divergence

Lorsque Nabla est appliqué à une fonction vectorielle, il la transforme en champ scalaire

$$div\vec{V} = \vec{\nabla}.\vec{V} = (\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}).((f(x,y,z)\vec{i} + g(x,y,z)\vec{j} + h(x,y,z)\vec{k}))$$

$$\vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial g(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial h(x,y,z)}{\partial z} = div\vec{V}$$

Le rotationnel

Lorsque Nabla est appliqué à un champ de vecteur avec un produit vectoriel

$$\overrightarrow{Rot}\vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

Exercice (Avec solutions)

Exercice 1

Dans un repère orthonormé R(o,x,y,z), les trois points suivants : A(-1,-2,1) B(-3,1,4) C(-1,2,-3) .

1- donner l'expression des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$.
2- Déterminer les expressions de $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}$, $|\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}|$ et $\overrightarrow{OC}.(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB})$.

Solution

$\overrightarrow{OA}=-\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ $\overrightarrow{OB}=-3\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}$ $\overrightarrow{OC}=-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$

$\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=-9\vec{i}+1\vec{j}-7\vec{k}$ $\left|\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right|=\sqrt{131}$ $\overrightarrow{OC}.\left(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right)=32$

Exercice 2

On donne les vecteurs suivants :

$$\vec{r}_1=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}\ ,\ \vec{r}_2=3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}\ ,\ \vec{r}_3=4\vec{i}-3\vec{j}+3\vec{k}$$

1- Calculer leurs modules.
2- Calculer les composantes et les modules des vecteurs :

$\vec{A}=\vec{r}_1+\vec{r}_2+\vec{r}_3$ $\vec{B}=\vec{r}_1+\vec{r}_2-\vec{r}_3$

3- Déterminer le vecteur unitaire $\vec{U}$ porté par le vecteur $\vec{C}=\vec{r}_1+2\vec{r}_2$

4- Calculer les produit scalaire et vectoriel des vecteurs $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$

5-Calculer les produits $\vec{A}.\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)$ et $\overrightarrow{A}\wedge\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)$

Solution

1- $\left|\vec{r}_1\right| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$ $\left|\vec{r}_2\right| = \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17}$ $\left|\vec{r}_3\right| = \sqrt{16+9+9} = \sqrt{34}$

2- $\vec{A} = 9\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$, $\left|\vec{A}\right| = \sqrt{81+4+16} = \sqrt{101}$ $\vec{B} = \vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$

$\left|\vec{B}\right| = \sqrt{1+16+4} = \sqrt{21}$

3- $\vec{c} = 8\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ $\left|\vec{c}\right| = \sqrt{74}$ $\vec{U} = \dfrac{8\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}}{\sqrt{74}}$

4- $\vec{r}_1.\vec{r}_2 = 6 - 6 - 2 = -2$.

5- $$\vec{B} \wedge \vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & -2 \\ 8 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 10\vec{i} - 19\vec{j} - 33\vec{k}$$

$\vec{A}.\left(\vec{B} \wedge \vec{C}\right) = 90 + 38 - 132 = -4$

$$\vec{A} \wedge \left(\vec{B} \wedge \vec{C}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 9 & -2 & 4 \\ 10 & -19 & -33 \end{vmatrix} = 142\vec{i} + 337\vec{j} - 151\vec{k}$$

Exercice (Sans solutions)

Exercice 1 :

Soient les vecteurs $\vec{A}$ (2,3,4) et $\vec{B}$ (2,3,-1)

- Représenter le vecteur $\vec{A}$ dans un repère $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
- Calculer le module de $\vec{A}$ et de $\vec{B}$.
- Soit $\vec{C}$=2$\vec{A}$ -$\vec{B}$. calculer les composantes du vecteur unitaire $\vec{u}$ de $\vec{C}$.
- Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{A}.\vec{B}$ et le produit vectoriel $\overrightarrow{A}.\wedge\vec{B}$.
- Calculer l'angle formé par les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

Exercice 2 :

Soient les vecteurs $\vec{A}=\vec{\imath}+\vec{\jmath}-\vec{k}$, $\vec{B}=4\vec{\imath}+3\vec{\jmath}-\vec{k}$ et $\vec{C}=-\vec{\imath}-2\vec{\jmath}+\vec{k}$.

Calculer: $\vec{A}.(\vec{B}\wedge\vec{C})$ et $\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C})$.

I-II Unité et analyse dimensionnelle

Le but de la physique est d'expliquer les phénomènes observés. Il faut donc attacher le plus grand soin à la notion de mesure.

Une grandeur physique est une propriété observable directement ou bien à l'aide d'un instrument de mesure.

L'observable sera caractérisée par un scalaire (nombre).

Pour effectuer des mesures il faut les comparer à une grandeur de même nature, choisie comme unité.

Exemple : la mesure *x* d'une longueur *l* à l'aide d'une unité de longueur *Ul* est : $x=\dfrac{l}{Ul}$

L'unité *Ul* peut être le mètre, la longueur d'un pas, d'une corde…..etc.

Le résultat d'une mesure physique se représente sous forme d'un nombre réel auquel on associe l'unité choisie.

Il existe 7 grandeurs fondamentales et leurs unités dans le système international (MKSA)

Grandeur	Dimension	Symbole	Unité
Longueur	L	m	mètre
Masse	M	Kg	kilogramme
Temps	T	s	seconde
Courant électrique (intensité)	I	A	ampère
Température	θ	K	kelvin
Quantité de la matière	N	mol	mole
Intensité lumineuse	J	cd	candela

Tableau I Grandeurs et Dimensions

Les autres unités se déduisent des précédentes par des relations.

Certaines unités ont un nom spécial comme le hertz Hz (fréquence), le newton N (force), le Joule J (énergie)….etc.

I-II-1 Notion d'équations aux dimensions et d'homogénéité

Les équations aux dimensions permettent de vérifier la cohérence d'une formule ou de trouver l'unité d'une grandeur.

Exemple : le principe fondamental de la dynamique dit que le lien entre la force appliquée et l'accélération subie est $\vec{F} = m\vec{\gamma}$. On sait, par ailleurs que la force s'exprime en Newton et que l'accélération s'exprime en $m.s^{-2}$. On peut en déduire immédiatement la grandeur de la force: $[F]=[M][L][T]^{-2}$ et de là on peut trouver l'unité du Newton $1N = kg.m.s^{-2}$

L'équation aux dimensions de toute grandeur G peut se mettre sous la forme :

$[G]=L^a M^b T^c I^d J^e \theta^f N^g$

Pour déterminer la dimension d'une grandeur, il faut utiliser des formules connues.

Exemple : La dimension de la vitesse :

$$v = \frac{dl}{dt} \Rightarrow [v] = \frac{[longueur]}{[temps]} = \frac{L}{T} = LT^{-1}(m/s)$$

C'est une équation aux dimensions. On dit que la vitesse est homogène au rapport $\frac{L}{T}$

Remarque

Certaines grandeurs sont sans dimension bien qu'elles aient une unité, comme l'angle plan (radian « rad ») qui est une unité sans dimension.

$\alpha = \frac{[L]}{[R]}$ le rapport de deux longueurs donc $[\alpha] = \frac{[L]}{[R]} = 1$

Ou aussi l'angle solide (stéradian « Sr »)

En pratique les symboles rad et Sr sont utilisées comme dimension lorsque c'est utile.

Exemples : La dimension de

L'accélération : $\gamma = \frac{dv}{dt} \Rightarrow [\gamma] = \frac{[vitesse]}{[temps]} = \frac{L}{T^2} = LT^{-2}(m/s^2)$

La force : $F = m\gamma \Rightarrow [F] = [m].[\gamma] = MLT^{-2}(N, \quad mKg/s^2)$

La pression : $P = \frac{F}{S} \Rightarrow [P] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2}(Pa, \quad \frac{N}{m^2}, \quad m^{-1}Kg/s^2)$

La quantité de charge : $i = \frac{q}{\Delta t} \Rightarrow q = i.\Delta t \Rightarrow [q] = [i].[\Delta t] = IT$

Le champ électrique :

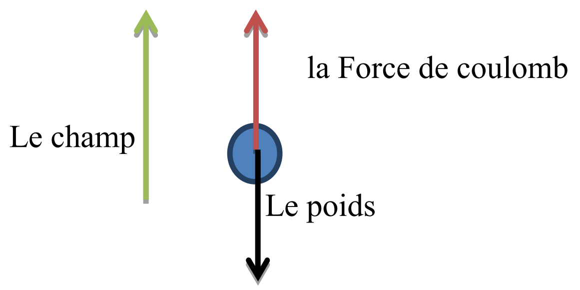
$$F = qE \Rightarrow E = \frac{F}{q} \Rightarrow [E] = \frac{[F]}{[q]} = \frac{MLT^{-2}}{IT} = MLT^{-3}I^{-1}(\frac{v}{m}, \quad \frac{N}{c}, \quad m\ Kg/s^3A)$$

I-II-2 Homogénéité d'une formule

Lors d'un calcul, si on trouve qu'une expression A est égale à une expression B. cette formule ne peut avoir un sens physique que si la dimension de A est la même que celle de B. on dit que l'équation est homogène.

Exemple :

Une bille métallique de masse m et de charge q se trouve immobile dans l'air sous l'effet d'un champ électrique $\vec{E}$



A l'équilibre $\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_c = \vec{P} \Rightarrow mg = qE$

$[mg] = MLT^{-2}$

$[qE] = ITMLT^{-3}I^{-1} = MLT^{-2}$

L'équation est homogène.

Exercice 1 :

Etablir les dimensions et les unités des grandeurs dérivées suivantes :
Vitesse, accélération, force, vitesse angulaire, accélération angulaire, pression, travail, puissance, pulsation. La constante de gravitation G, la constante de Coulomb k et la constante des gaz parfaits R.

Exercice 2:

La force de frottement exercée par un fluide sur une sphère de rayon r se déplaçant à faible vitesse v est donnée par la relation de Stokes f=6πηrv, où η est la viscosité du fluide.

- Exprimer à l'aide des unités fondamentales l'unité de η.
- Quelle est la relation qui lie l'unité de η dans le système SI (**Poiseuille**) et son unité dans le système CGS (**Poise**).

Exercice3 :

La période T d'un satellite terrestre circulaire peut s'écrire, à une constante près, en fonction
de la masse M de la terre, du rayon R du cercle décrit et de la constante de la gravitation universelle G.

- Déduire l'expression de la formule de la période T.

I-III calcul des incertitudes

Toute mesure d'une grandeur physique est affectée d'une erreur due à la précision limitée des appareils et à l'erreur humaine

La mesure d'une grandeur physique se fait d'une manière directe (distance, température' temps,…) ou bien d'une manière indirecte pour les grandeurs composées (surface, volume, travail, moment, accélération,..).

Quelle que soit la précision de la mesure d'une grandeur *X*, nous n'obtenons qu'une valeur approchée x.

La différence entre la valeur exacte (x_0 qui est inconnue !!!) et la valeur approchée s'appelle erreur absolue notée par $dx = |x - x_0|$ avec x valeur mesurée et x_0 valeur réelle.

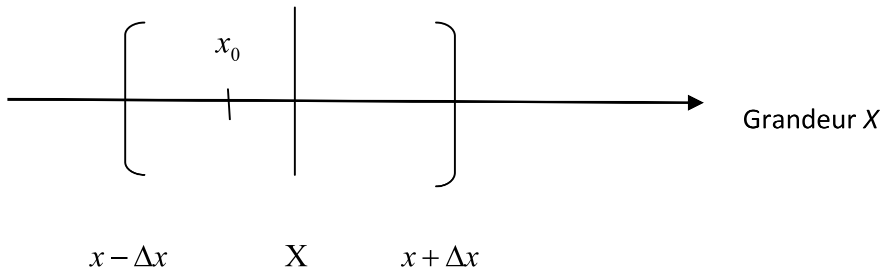
dx est inconnue puisque x_0 est inconnue.

Nous pouvons toujours nous assurer que l'erreur commise ne dépasse pas une valeur limite absolue connue Δx appelée incertitude absolue de la grandeur *X*, tel que $dx < \Delta x$

Avec dx erreur absolue et Δx incertitude absolue.

Nous déduisons que la valeur exacte x_0 de la grandeur *X* est comprise entre deux valeurs limites connues $x - \Delta x$ et $x + \Delta x$.

Le résultat de la mesure de la grandeur *X* est : $x_0 = x \pm \Delta x$



I-III-1 Le cas d'une grandeur composée

La mesure d'une grandeur composée est présentée sous la forme d'une fonction à plusieurs variables ; f(*X,Y,Z*....).

La mesure d'une fonction à trois variables f(*X,Y,Z*).

La mesure de la grandeur f est indirecte, La mesure est faite d'abord sur les grandeurs physique indépendantes *X,Y*, et *Z* avec leurs erreurs et incertitudes absolues $dx, dy, dz, \Delta x, \Delta y, \Delta z$, ensuite la grandeur f est déduite avec son erreur df et Δf

df peut être appelée la variation de la fonction f ; $df = f(x + dx, y + dy, z + dz) - f(x, y, z)$ *dx,dy*, et *dz* sont les variations des variables *x, y*, et *z*.

Par définition la différentielle de *f* est $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$ avec

$\frac{\partial f}{\partial x}$ Est la dérivée partielle de *f* par rapport à *x* en supposant *y* et *z* constantes.

$\frac{\partial f}{\partial y}$ Est la dérivée partielle de *f* par rapport à *y* en supposant *x* et *z* constantes.

$\frac{\partial f}{\partial z}$ Est la dérivée partielle de *f* par rapport à *z* en supposant *x* et *y* constantes.

Exercice

On donne la relation suivante $\boldsymbol{g = \frac{g_0}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2}}$

Où **g** et $\mathbf{g_0}$ des accélérations, **h** et **R** des distances.

Calculer l'incertitude relative sur g en fonction de $\mathbf{\Delta g_0}$, **Δh** et **ΔR.**

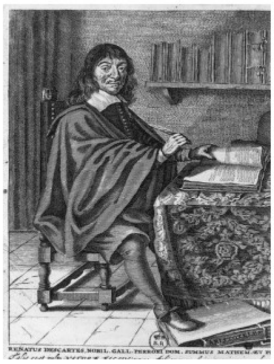
Solution

$$\boldsymbol{lng = ln\frac{g_0}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2} = lng_0 - 2ln\left(1+\frac{h}{R}\right) = lng_0 - 2ln(R+h) + 2lnR}$$

$$\frac{dg}{g} = \frac{dg_0}{g_0} - 2\frac{dR+dh}{R+h} + 2\frac{dR}{R} = \frac{dg_0}{g} - 2\frac{dh}{h+R} - 2\frac{dR}{h+R} + 2\frac{dR}{R} =$$

$$= \frac{dg_0}{g} - 2\frac{dh}{h+R} + 2\frac{hdR}{h+R}$$

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta g_0}{g} + 2\frac{\Delta h}{h+R} + 2\frac{\Delta dR}{h+R}$$



René Descartes : (1596-1650)

René Descartes a écrit les principes de la philosophie en 1644, dont l'objectif est de « donner des fondements rigoureux à la philosophie ». La physique cartésienne est fondée sur l'identification de la matière avec la quantité géométrique: la pesanteur et le mouvement sont ramenés à une explication mécaniste. Sa description du monde est essentiellement cinématique, le mouvement se transmettant de proche en proche par contact. Dans les Principes de la Philosophie, Descartes distingue la cause première de tous les mouvements (Dieu, auteur de la nature), des cause secondes appelées les lois De la nature, qui régissent le mouvement des parties de la matière.

II Introduction

La mécanique est une science qui étudie le mouvement des corps c.-à-d. l'étude de la variation de la position d'un corps dans l'espace. Un paramètre est donc introduit qui est le temps, qui relie la position par rapport à l'origine.

La mécanique est divisée en trois branches : la cinématique, la dynamique, et la statique

Remarque :

Pour faciliter l'étude des corps, on assimile le corps à un point matériel sans dimension géométrique dont on néglige le mouvement de rotation autour de soi-même.

La cinématique étudie les propriétés géométriques du mouvement du point matériel sans prendre en considération les forces appliquées.

II-I-1 Référentiel

Pour étudier un mouvement il faut d'abord imposer un référentiel. Le référentiel est le repère par rapport auquel le mouvement est décrit.

Un corps est en mouvement donc sa position dépend du temps. Cette phrase est-elle juste ???

La réponse dépond de qui observe le corps. Il faut donc introduire la notion d'observateur. L'observateur joue le rôle du témoin du temps. La base est lié à l'observateur (les vecteurs de la base sont fixe par rapport à l'observateur).

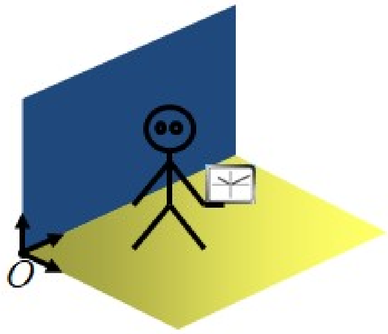


Figure I I-1 Référentiel

Donc pour décrire le mouvement du pont matériel M nous avons besoin d'un repère plus un observateur, c.-à-d. un référentiel.

Le mouvement de M est un phénomène qui met en jeu simultanément l'espace et le temps, il faut donc trouver des relations entre les distances parcourue et le temps.

L'étude du mouvement se fait selon l'une des deux formes

Algébrique : définir l'équation du mouvement suivant une trajectoire.

Vectorielle : en utilisant les vecteurs positions, vitesses, et accélérations.

II-I-2 Grandeurs utilisées en cinématique

II-I-2-1 Trajectoire d'un point matériel M

C'est l'ensemble des positions occupées par M au cours du temps. C'est la courbe C décrite par M dans l'espace.

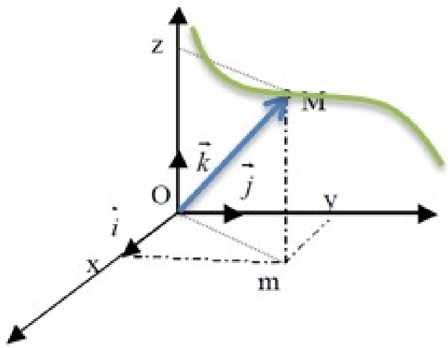


Figure I I-2 Trajectoire d'un point matériel

II-I-2-2Vecteur position

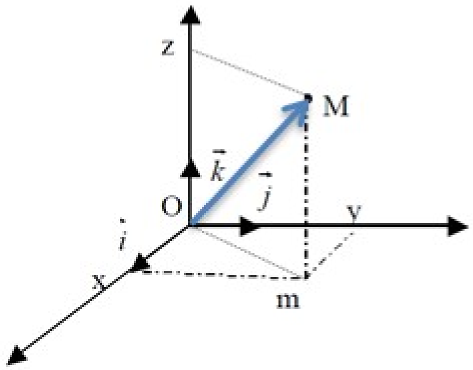


Figure I I-3 Vecteur vitesse

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

La position du point matériel M est repérée en coordonnées cartésiennes par un vecteur position $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Si M est en mouvement, ces coordonnées varient en fonction du temps. On aura $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

On appelle *x(t), y(t),* et *z(t)* les équations horaires du mouvement.

Remarque

On a choisi les coordonnées cartésiennes, on aurait pu choisir d'autre coordonnées (coordonnées polaires, cylindriques, ou sphériques).

Si le mouvement se trouve dans un plans avec un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, la position du point est définie par *x(t)* et *y(t)*, nous pouvons trouver une fonction *y=f(x)*, cette fonction s'appelle équation de la trajectoire.

y=f(x) est trouvée par élimination du temps des deux équations horaires.

Exemple 1 :

Soit l'équation horaire du mouvement : $x = 2t \quad y = -5t^2 + 4t \quad z = 0$

1) Trouver l'équation cartésienne de la trajectoire
2) Trouver le vecteur position au temps *t=2s*

Solution :

1) $x = 2t \Rightarrow t = \frac{x}{2}$

On remplace dans y on obtient

$y = \frac{-5}{4}x^2 + 2x = -1.25x^2 + 2x$ c'est l'équation d'une parabole.

2) $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\overrightarrow{OM} = 2t\vec{i} + (-5t^2 + 4t)\vec{j} + 0\vec{k}$ $\overrightarrow{OM}(t = 2s) = 4\vec{i} - 12\vec{j}$

Exemple 2

Le mouvement d'un point M est défini dans un repère cartésien par

$x = a\sin(\omega t + \varphi)$ $y = a\cos(\omega t + \varphi)$

Quelle est la trajectoire de M

Solution

$x^2 + y^2 = a^2\left[\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi)\right]$

$x^2 + y^2 = a^2$ c'est l'équation d'un cercle de rayon a et de centre O

II-I 2-3 Vecteurs déplacements

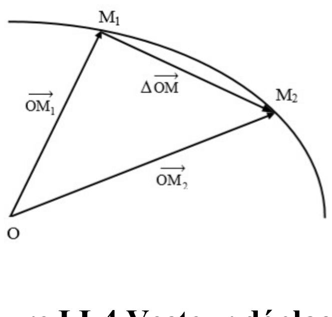


Figure I I-4 Vecteur déplacement

Si un point matériel se déplace du point M_1 à l'instant t au point M_2 à l'instant (t+dt), alors on représente le vecteur déplacement $\overrightarrow{M_1M_2}$ par une droite dirigée de M_1 vers M_2, La longueur de ce déplacement $\overrightarrow{M_1M_2}$ =la distance parcourue et s'appelle le module du vecteur.

Le vecteur déplacement représente aussi la variation du vecteur position

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \Delta\overrightarrow{OM}$$

II-I 2-4 Vecteurs vitesses

La vitesse représente la variation de la position par rapport au temps. C'est une grandeur vectorielle (une direction et un sens) qui caractérise le mouvement.
Dans le mouvement rectiligne Il existe deux types de vitesses, une vitesse moyenne et une vitesse instantanée.

II-I-2-4-1 Vitesse moyenne

Soit le point M_1 la position du mobile à l'instant t_1 et le point M_2 la position du mobile à l'instant t_2, la vitesse moyenne représente la variation de la distance totale par rapport au temps écoulé. Un étudiant qui se déplace de la maison vers l'université, il parcoure 4km pendant 1heure. On définit une vitesse moyenne de 4km/h en module. Cette vitesse moyenne ne prend en considération que le point de départ et d'arrivé.

$$\vec{V}_m = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t} = \frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{t_2 - t_1}$$

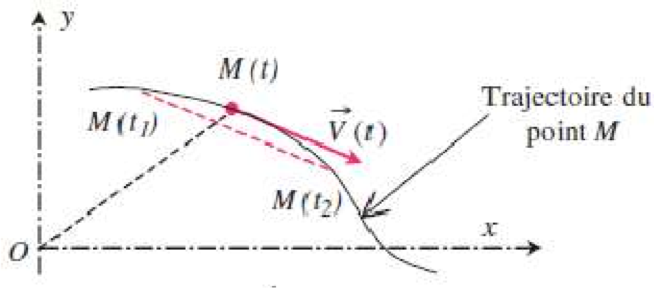
Avec Δt le temps écoulé entre les deux positions

II-I-2-4-2 Vitesse instantanée

Comme pour le mouvement rectiligne, la vitesse instantanée, dans son sens général, donne des renseignements plus précis que le vecteur vitesse moyenne : elle définit la vitesse du mobile à chaque instant.

$$\vec{V}_i = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{V}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_2}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

Le vecteur vitesse instantanée représente la dérivée du vecteur position par rapport au temps. Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire.



En coordonnées cartésiennes : $\vec{V}_i = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$

Sa norme : $\vec{V}_i = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$

II-I 2-5 Vecteurs accélérations

II-I-2-5-1 Accélération moyenne

La variation relative de la vitesse au cours de l'intervalle de temps $\Delta t = t_2 - t_1$ est donnée par le vecteur accélération moyenne :

$$\vec{\gamma}_m = \frac{\Delta\vec{V}_i}{\Delta t} = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1}$$

L'accélération moyenne a la même direction et le même sens que ΔV

II-I-2-5-2Accélération instantanée

Comme précédemment, nous allons passer à la limite $\Delta t \to 0$ pour obtenir l'accélération instantanée

$$\vec{\gamma}_i = \lim_{\Delta t\to 0}\vec{\gamma}_m = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{\Delta V}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{V}_2 - \vec{V}_1}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

La norme du vecteur accélération est notée γ.

II-II Etude du mouvement dans différents systèmes de coordonnées

II-II-1Etude du mouvement en coordonnées cartésiennes

Le point est repéré par trois coordonnées (x,y,z).ces coordonnées sont les projections de la position sur chaque axe doté d'un vecteur unitaire $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Imaginons le mouvement d'un point sur une droite (un axe), une coordonnée suffit, « l'abscisse» (x). Si il s'agit d'un repère plan deux coordonnées suffisent (x,y).

La position peut être exprimée par un vecteur position qui lie l'origine du repère choisi à la position. Le repère est orthonormé, c'est-à-dire que les vecteurs unitaires sont normés à l'unité et orthogonaux entre eux.

Cas à deux dimensions

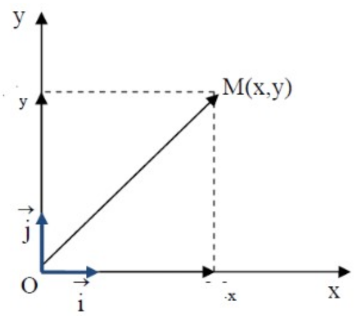


Figure I I-5-a Vecteur position a 2 dimensions

Dans ce repère orthonormé direct un point M est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x,y) . $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

Cas à trois dimensions :

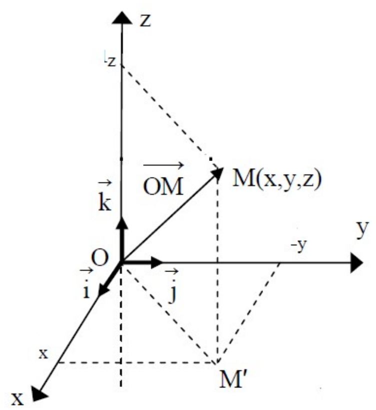


Figure I I-5-b Vecteur position à 3 dimensions

Le vecteur position s'écrit alors : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

II-II-1-1Vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes

En dérivant l'expression du vecteur position en coordonnées cartésiennes par rapport au temps, on obtient l'expression de la vitesse :

$$\vec{V} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Les vecteurs de la base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ étant fixe, leurs dérivées par rapport au temps sont nulles.

On utilise aussi la notation suivante $\vec{V} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$

Le point sur la variable signifie la dérivée par rapport au temps.

II-II-1-2Vecteur accélération en coordonnées cartésiennes

Les expressions des composantes du vecteur accélération sont obtenus à partir de la dérivée du vecteur accélération : $\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$

En utilisant l'expression du vecteur vitesse on a : $\vec{\gamma} = \frac{d(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k})}{dt}$

Puisque les vecteurs de la base sont fixes, on dérives seulement les composantes du vecteur vitesse $\vec{\gamma} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$ ou bien on peut utiliser la notation suivante $\vec{\gamma} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$

Les deux points sur la variable signifient la dérivée seconde de la variable par rapport au temps.

II-II-2 Etude du mouvement en coordonnées polaire

Le système de coordonnées polaire est spécifique à l'étude des mouvements plans à symétrie de rotation. On utilise un axe polaire (Ox), d'origine O appelée pôle. On peut alors repérer la position de tout point M du plan contenant (Ox) par le rayon polaire r(t) et l'angle polaire $\theta(t)$ qui peuvent varier avec le temps en utilisant les bases $\vec{u}_r$ qui à la direction de $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{u}_\theta$ obtenu par rotation de $\vec{u}_r$ d'un angle $\pi/2$ dans le sens trigonométrique

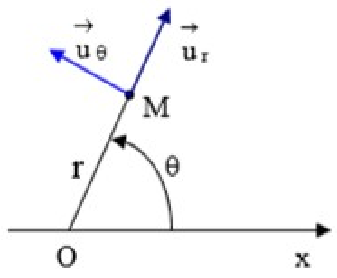


Figure I I-6-a vecteur position en coordonnées polaires

La base est liée au point M ce qui implique que les directions des vecteurs unitaires varie avec le temps ce qui donne

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta \text{ et } \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_r$$

II-II-2-1 Lien avec les coordonnées cartésiennes

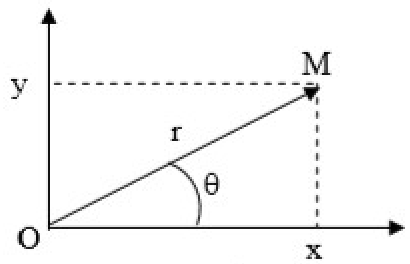


Figure I I-6-b relation entre les coordonnées polaires et cartésiennes

Les coordonnées polaires r et θ du point M sont liées aux coordonnées cartésiennes par les relations suivantes :

$$x = r\cos\theta \quad \text{et} \quad y = r\sin\theta$$

II-II-2-3 Vecteur position

Les définitions de $r(t)$ et de $\vec{u}_r$ nous permettent d'écrire : $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r$

II-II-2-4 Vecteur vitesse

Par définition : $\vec{V} = \frac{\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}[r(t)\ \vec{u}_r(t)]$

$$\vec{V} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta = V_r\,\vec{u}_r + V_\theta\,\vec{u}_\theta$$

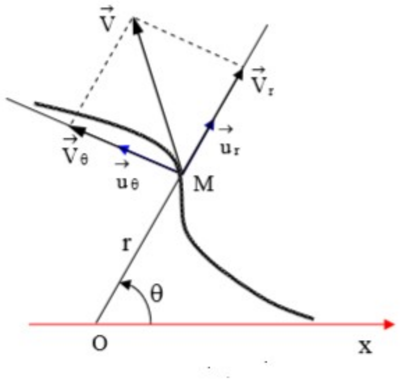


Figure I I-7 vecteur vitesse en coordonnées polaires

Avec : $\vec{V}_r$ composante radiale et $\vec{V}_\theta$ composante transversale

II-II-2-5 Vecteur accélération

On dérivant le vecteur vitesse on obtient l'expression du vecteur accélération

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta\right)$$

$$\vec{\gamma} = \frac{d^2r}{dt^2}\vec{u}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$$

$$\vec{\gamma} = \frac{d^2r}{dt^2}\vec{u}_r + \frac{dr}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta\right) + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\left(-\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}\vec{u}_r\right)$$

$$\vec{\gamma} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left[\frac{d\theta}{dt}\right]^2\right]\vec{u}_r + \left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]\vec{u}_\theta$$

$$\vec{\gamma} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$$

Ou bien $\vec{\gamma} = \gamma_r\vec{u}_r + \gamma_\theta\vec{u}_\theta$

Soi γ_r : composante radiale

γ_θ : composante transversale

II-II-3 Etude du mouvement en coordonnées cylindriques

Lorsqu'un mouvement a lieu sur une surface cylindrique ou en spirale, on utilise souvent les coordonnées cylindriques que l'on définit par rapport au système cartésien. Le mobile M est alors repéré par

• les coordonnées polaires r et θ de sa projection « m » sur le plan (O, x, y) ;

• sa coordonnée axiale z.

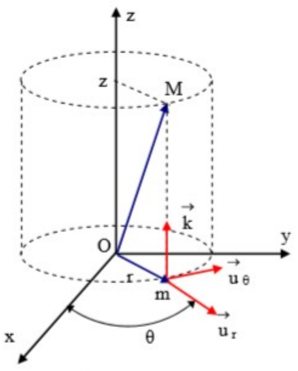


Figure I I-8 coordonnées cylindriques

Les coordonnées cylindriques représentent l'extension des coordonnées polaires à trois dimensions. Dans ce système, les grandeurs cinématiques vectorielles, $\overrightarrow{OM}$, $\vec{V}$ et $\vec{\gamma}$ sont définies par les composantes polaires de leurs projections sur le plan (O,x,y), complétées par leurs composantes axiales. $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{k}$

II-II-3-1 Vecteur vitesse :

$\vec{V} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + \frac{dz}{dt}\vec{k}$ ou bien $\vec{V} = V_r\vec{u}_r + V_\theta\vec{u}_\theta + V_z\vec{k}$

Soit : V_r composante radiale

V_θ composante transversale

V_z composante axiale

II-II-3-2 Vecteur accélération :

$$\vec{\gamma} = \ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\frac{d\vec{u}_r}{dt} + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} + \ddot{z}\vec{k}$$

$$\vec{\gamma} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{k}$$

Ou bien $\vec{\gamma} = \gamma_r\vec{u}_r + \gamma_\theta\vec{u}_\theta + \gamma_z\vec{k}$

Soi γ_r : composante radiale

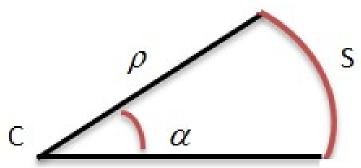
γ_θ : composante transversale

γ_z : composante axiale

II-II-4 Etude du mouvement en coordonnées intrinsèque (Base de Frenet)

On utilise la base de frenet en mouvement curviligne. La courbure de la trajectoire nécessite la connaissance du rayon de courbure et le centre de courbure.

La trajectoire est modélisée par un segment de cercle de rayon R qui varie dans le temps de centre *C* et un angle α.



La longueur de l'arc s est appelée Abscisse curviligne est donnée par : $s = \rho\alpha$

Dans certains cas, pour déterminer l'accélération en un point M, on utilise les composantes intrinsèques qui sont les projections algébriques de l'accélération.

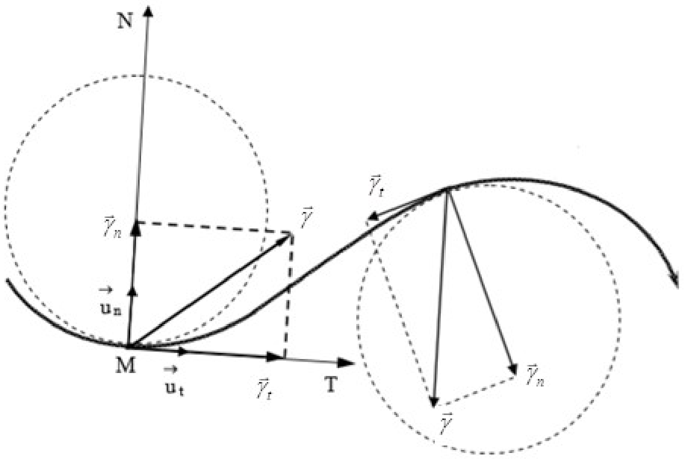


Figure I I-9 vecteurs accélérations en coordonnées intrinsèques

L'accélération $\vec{\gamma}_t$ est sur un axe tangentiel muni du vecteur unitaire $\vec{u}_t$, dirigé dans le sens du mouvement.

L'accélération $\vec{\gamma}_n$ est sur un axe normal muni du vecteur unitaire $\vec{u}_n$, orienté vers le côté concave de la trajectoire.

Qui donne l'expression : $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_t + \vec{\gamma}_n$ ou bien $\vec{\gamma} = \gamma_t\vec{u}_t + \gamma_n\vec{u}_n$

$\vec{\gamma}_t$ et $\vec{\gamma}_n$ sont les composante tangentiel et normale de l'accélération.

Les vecteurs unitaires forme une base orthonormée appelée base de Frenet.

Etant donné que le vecteur vitesse est tangentiel, dans le repère de Frenet il se présente sous la forme $\vec{V} = V\vec{u}_t$

Pour trouver l'accélération on doit dérivée cette expression : $\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt}\vec{u}_t + V\frac{d\vec{u}_t}{dt}$

Nous avons : $\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{d\vec{u}_t}{ds}\frac{ds}{dt}$ avec $\frac{ds}{dt} = V$

Les vecteurs de la base de Frenet forment une base orthonormée, on admettra $\frac{d\vec{u}_t}{ds} = \frac{1}{\rho}\vec{u}_n$

Avec ρ rayon de courbure de la trajectoire au point considéré

L'expression de l'accélération devient $\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt}\vec{u}_t + \frac{V^2}{\rho}\vec{u}_n$ donc $\vec{\gamma} = \gamma_t\vec{u}_t + \gamma_n\vec{u}_n$

$\gamma_t = \frac{dV}{dt}$ la composante tangentiel de l'accélération.

$\gamma_n = \frac{V^2}{\rho}$ la composante normale de l'accélération.

Remarque

Si le mouvement est rectiligne varié, le rayon de courbure $\rho \to \infty$ donc $\frac{V2}{\rho} = 0$ et $\vec{\gamma} = \gamma_t\vec{u}_t$

Si le mouvement est circulaire uniforme, $\frac{V2}{\rho} \neq 0$ et $\vec{\gamma} = \gamma_n\vec{u}_n$, uniforme veut dire $\gamma_t = 0$

II-II-4-1 Détermination du rayon de courbure

La relation du rayon de courbure est définie comme suite :

On calcule le produit vectoriel entre l'accélération et la vitesse

$$\vec{\gamma} \wedge \vec{V} = (\frac{dV}{dt}\vec{U}_t + \frac{V^2}{\rho}\vec{U}_N) \wedge V\vec{U}_t$$

$$\vec{\gamma} \wedge \vec{V} = \frac{V^3}{\rho}\left(\overrightarrow{U_N} \wedge \vec{U}_t\right)$$

Comme le produit vectoriel est un vecteur on prendra son module, ainsi on peut déduire le rayon de courbure

$$\left|\vec{\gamma}\wedge\vec{V}\right| = \frac{V^3}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{V^3}{\left|\vec{\gamma}\wedge\vec{V}\right|}$$

On remarque que le rayon de courbure est une grandeur algébrique, il peut être calculé dans n'importe quelle base.

II-II-5 Le mouvement harmonique simple

Un point matériel M se déplace sur un cercle de rayon A à la vitesse angulaire $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ constante. Lorsque M se déplace sur sa trajectoire, sa projection, M_x, sur l'axe O_x , effectue des oscillations sur le segment B′B .

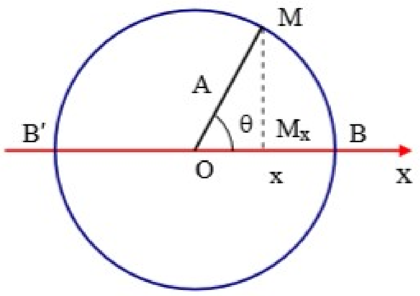


Figure I I-10 Mouvement harmonique simple

De la figure on peut voir que $x = A\cos\theta$

Ou $\theta(t)$ s'écrit comme suite $\theta(t) = \theta_0 + w\int_0^t dt = \theta_0 + wt$

soit : $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ avec $\varphi = \theta_0$

Le mouvement harmonique simple; ce caractérise par :

L'amplitude A

La pulsation ou la fréquence angulaire ω

La phase $wt + \varphi$

La phase initiale φ .

II-II-5-1 Propriétés du mouvement harmonique simple

Sachant que : $\cos(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t + \varphi + 2\pi) = \cos\left[w\left[t + \frac{2\pi}{\omega}\right] + \varphi\right]$

Ce qui implique : $x = A\cos(\omega t + \varphi) = A\cos\left[w\left[t + \frac{2\pi}{\omega}\right] + \varphi\right]$

Soit : $x(t) = x\left[t + \frac{2\pi}{\omega}\right]$

On conclut que ce mouvement harmonique est périodique.

La période $T = \frac{2\pi}{\omega}$

La fréquence $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

La vitesse et l'accélération s'écrivent comme suite

la vitesse: $V = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$

l'accélération: $\gamma = \frac{dV}{dt} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t)$

Représentations graphiques

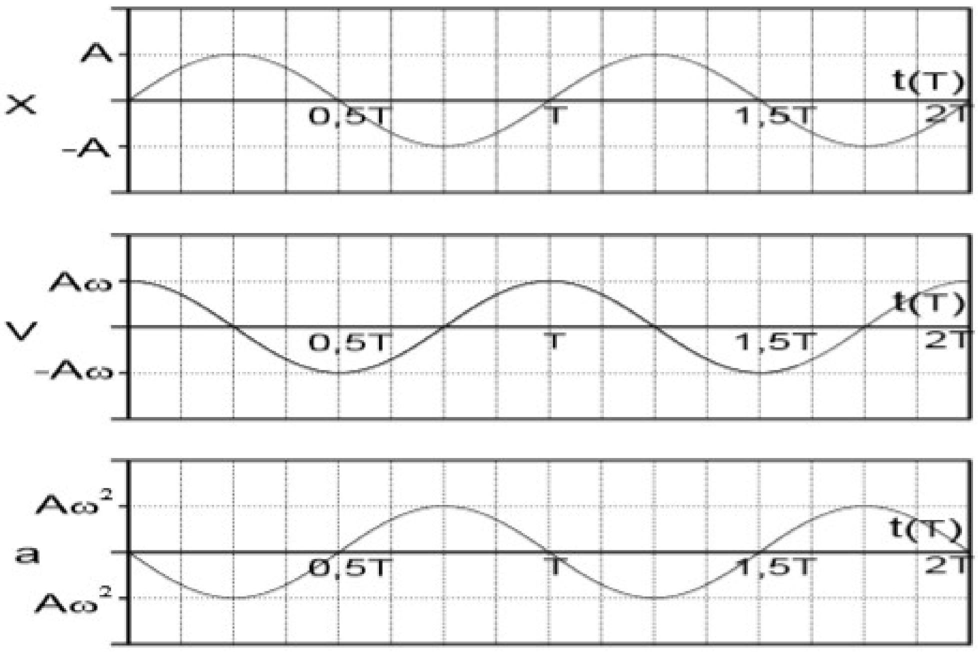


Figure I I-11 Représentation graphique

II-III Le mouvement relatif

Dans l'étude précédente nous avons considéré des référentiels fixes, avec des vecteurs de base qui ne varient pas avec le temps.

Or un référentiel peut être en mouvement dans le temps par rapport à un référentiel fixe, soit parce que son origine se déplace par rapport à l'autre, soit parce que l'orientation relative du référentiel change avec le temps, soit les deux.

Pour ce faire, nous considérerons un mobile M et les deux systèmes de coordonnées cartésiennes suivants :

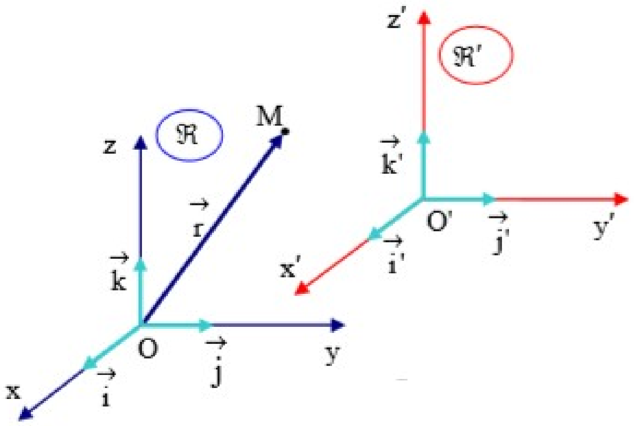


Figure I I-12 présentation des deux repères

R(O, x, y, z), supposé fixe, qui est appelé repère absolu.

R′ (O′, x′, y′, z′), en mouvement quelconque par rapport à R, qui est le repère relatif.

II-III-1 Le mouvement absolu

Le mouvement du point matériel est déterminé par rapport au repère absolu R(O,x,y,z) et les dérivations sont effectuées dans R dans lequel la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est invariable.

Son vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Son vecteur vitesse absolue $\vec{V}_a(t) = \left.\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = \dfrac{dx}{dt}\vec{i} + \dfrac{dy}{dt}\vec{j} + \dfrac{dz}{dt}\vec{k}$

Son vecteur accélération absolue $\vec{\gamma}_a(t) = \left.\dfrac{d\vec{V}_a}{dt}\right|_R = \dfrac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \dfrac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \dfrac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$

II-III-2 Le mouvement relatif

Le mouvement du point matériel est déterminé par rapport au repère relatif R'(O',x',y',z') et les dérivations sont effectuées dans R' dans lequel la base $(\vec{i}\,',\vec{j}\,',\vec{k}\,')$ est invariable.

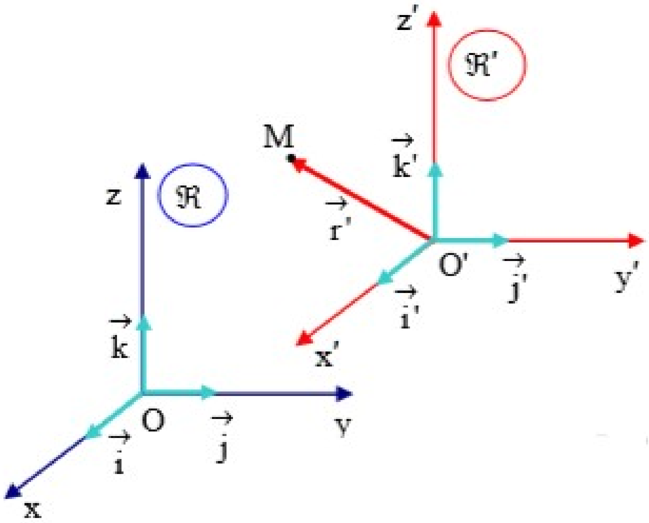


Figure I I-13 Mouvement relatif

Son vecteur position $\vec{r}\,'=\overrightarrow{O'M}=x'\vec{i}\,'+y'\vec{j}\,'+z'\vec{k}\,'$

Vecteur vitesse relative $\vec{V}_r(t)=\left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_R=\frac{dx'}{dt}\vec{i}\,'+\frac{dy'}{dt}\vec{j}\,'+\frac{dz'}{dt}\vec{k}\,'$

Vecteur accélération relative $\vec{\gamma}_r(t)=\left.\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right|_R=\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i}\,'+\frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j}\,'+\frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}\,'$

II-III-3 Composition des vecteurs vitesses

Comme défini précédemment, la vitesse absolue du point M est donnée par :

$$\vec{V}_a(t)=\left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}$$

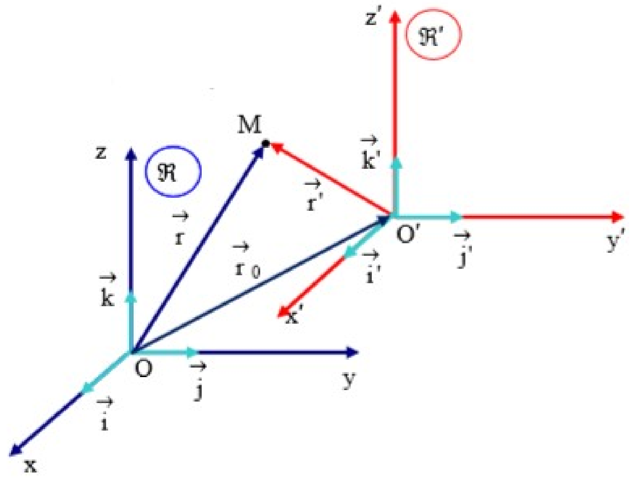


Figure I I-14 composition des vecteurs, relation de Chasles

En utilisant la relation de Chasles : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$

La dérivée de $\overrightarrow{OM}$ par rapport au temps, « sachant que la base $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ peut varier dans le temps par rapport à R », donne :

$$\vec{V}_a(t) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = d(\frac{\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}}{dt}) = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{dx'}{dt}\vec{i}' + x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\vec{k}' + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}$$

En réarrangeant les termes on obtient :

$$\vec{V}_a(t) = \left[\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}\right] + \left[\frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'\right]$$

On introduisant le vecteur de rotation instantanée $\vec{\omega}$ qui représente la rotation de R'/R on obtient $x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$

$$\vec{V}_a(t) = \left[\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M})\right] + \left[\frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'\right]$$

$$\vec{V}_a(t) = \vec{V}_e + \vec{V}_r$$

Le vecteur vitesse absolue est égal à la somme des vecteurs vitesses d'entraînement et relative

Avec la vitesse relative $\vec{V}_r = \frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'$

Et la vitesse d'entrainement $\vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M})$

Elle représente la vitesse du repère R' par rapport au repère R. Plus précisément il s'agit de la vitesse absolue d'un point A, fixe dans le référentiel R', coïncidant avec la position de M au temps t considéré. Son expression comprend deux termes:

$\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}$ Représente la vitesse de translation de l'origine O′ par rapport à R.

$x'\frac{d\vec{i}'}{dt}+y'\frac{d\vec{j}'}{dt}+z'\frac{d\vec{k}'}{dt}=(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M})$ Traduit le changement d'orientation du référentiel mobile R'.

II-III-4 Composition des vecteurs accélérations

La dérivée du vecteur vitesse absolue par rapport au temps, donne le vecteur accélération absolue défini dans le repère R:

$$\vec{\gamma}_a(t)=\left.\frac{d\vec{V}_a}{dt}\right|_R=\frac{d}{dt}\left[\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}+\frac{dx'}{dt}\vec{i}'+x'\frac{d\vec{i}'}{dt}+\frac{dy'}{dt}\vec{j}'+y'\frac{d\vec{j}'}{dt}+\frac{dz'}{dt}\vec{k}'+z'\frac{d\vec{k}'}{dt}\right]$$

$$\vec{\gamma}_a(t)=\left[\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}+x'\frac{d^2\vec{i}'}{dt^2}+y'\frac{d^2\vec{j}'}{dt^2}+z'\frac{d^2\vec{k}'}{dt^2}\right]+\left[\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i}'+\frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j}'+\frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}'\right]+2\left[\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i}'}{dt}+\frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j}'}{dt}+\frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k}'}{dt}\right]$$

On introduisant le vecteur de rotation instantanée $\vec{\omega}$ qui représente la rotation de R'/R on obtient $\vec{\gamma}_a(t)=\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}+(\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}))+(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M})+\vec{\gamma}_r+2(\vec{\omega}\wedge\vec{V}_r)$

$$\vec{\gamma}_a=\vec{\gamma}_e+\vec{\gamma}_r+\vec{\gamma}_c$$

Le vecteur accélération absolue est égal à la somme des vecteurs accélérations d'entraînement, relative et de Coriolis

L'accélération d'entraînement : $\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}+(\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}))+(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M})$

$\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}$ Représente le Mouvement de translation de R'/R

$(\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}))$ Représente le mouvement de rotation de R'/R

$(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M})$ N'intervient que si la rotation est non uniforme.

l'accélération relative : $\vec{\gamma}_r=\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i}'+\frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j}'+\frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}'$

L'accélération complémentaire, dite accélération de Coriolis : $\vec{\gamma}_c=2(\vec{\omega}\wedge\vec{V}_r)$

Exercice 1 :

un point matériel se déplace dans le plan (xOy) suivant les équations horaires suivantes :

$x(t)= t$ et $y(t)=t^2$

1) donner l'équation de mouvement du mobile

2) calculer la vitesse ainsi que l'accélération du point M.

Solution

$y=x^2$ équation de la trajectoire

$$\vec{v} = \vec{i} + 2t\vec{j} \qquad \vec{a} = 2\vec{j}$$

Exercice2

Un joueur de base bal frappe une balle qui atteint une vitesse de 14m/s et fait un angle α=30° avec l'horizontale. Un autre joueur distant de x=30.5m du premier et dans le même plan de la trajectoire, commence à courir quand le premier frappe la balle.

1- Calculer la vitesse maximale pour que le deuxième joueur puisse attraper la balle, quand elle est à une hauteur de 2.44m, sachant que cette balle était à 0.6m au moment de sa frappe.

2- Quelle est la distance que doit parcourir.

Solution

1- Les équations horaires de la balle sont :

$$x_1 = v_0 \cos(\alpha)t.$$
$$y_1 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha)t + 0.9$$

Celles du deuxième joueur sont :

$$x_2 = -vt + 30.5 \quad \text{et} \quad y_2 = 2.44$$

Pour que le deuxième joueur puisse attraper la balle il faut que $x_1=x_2$ et $y_1=y_2$

$$-vt + 30.5 = v_0 \cos(\alpha)t$$
$$2.44 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha)t + 0.9$$

De ces deux dernières équations on déduit que le temps a deux valeurs t=1.17s et t=0.25s donc on aura deux vitesses v=13.4m/s et v=109.36m/s. et la vitesse minimale est 13.4m/s.

2- la distance minimale parcourue est d=15.7m

Exercice3

L'accélération d'un point matériel M est donnée par la relation suivante :

$$\vec{\gamma} = e^t\vec{i} + \cos wt\,\vec{j} + t^2\vec{k}$$

A t=0s la position et la vitesse du mobile sont (1 ; (-1/w²) ;0) et (1 ;0 ;-1) respectivement. Donner les expressions des vecteurs vitesses et position du mobile à l'instant t.

Solution

Pour trouver la vitesse il suffit d'intégrer l'accélération même chose pour la position c'est d'intégrer la vitesse :

$$\frac{dv_x}{dt} = e^t \Rightarrow v_x = \int e^t dt = e^t + c_x$$

A t=0 $v_x=1$ donc $c_x=0$ d'où $v_x = e^t$

$$\frac{dv_y}{dt} = \cos wt \Rightarrow v_y = \int \cos wt dt = \frac{1}{w}\sin wt + c_y$$

A t=0 $v_y=0$ donc $c_y=0$ d'où $v_y = \frac{1}{w}\sin wt$

$$\frac{dv_z}{dt} = t^2 \Rightarrow v_z = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + c_z$$

A t=0 $v_y=-1$ donc $c_z=-1$ d'où $v_z = \frac{1}{3}t^3 - 1$ donc

La vitesse s'écrit $\vec{v} = e^t\vec{i} + \frac{1}{w}\sin wt\,\vec{j} + \left(\frac{1}{3}t^3 - 1\right)\vec{k}$

Pour trouver le vecteur position il suffit d'intégrer la vitesse.

$$\frac{dx}{dt} = e^t \Rightarrow x = \int e^t dt = e^t + c'_x$$

A t=0 x=1 donc $c'_x=0$ d'où $x = e^t$

$$\frac{dy}{dt} = \cos wt \Rightarrow y = \int \frac{1}{w}\sin wt dt = -\frac{1}{w^2}\cos wt + c'_y$$

A t=0 y=-1/w² donc c'$_y$=0 d'où $y=-\frac{1}{w^2}\cos wt$

$$\frac{dz}{dt}=\left(\frac{1}{3}t^3-1\right)\Rightarrow z=\int\left(\frac{1}{3}t^3-1\right)dt=\left(\frac{1}{12}t^4-t\right)+c'_z$$

A t=0 z=0 donc c'$_z$=0 d'où $z=\frac{1}{12}t^4-t$ donc

$$\overrightarrow{OM}=e^t\vec{i}-\frac{1}{w^2}\cos wt\,\vec{j}+\left(\frac{1}{12}t^4-t\right)\vec{k}$$

Exercice 4

Un point matériel se déplace sur une ligne droite suivant l'équation horaire suivante :

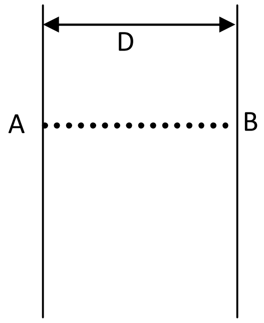
X(t)=-6t²+16t (t en seconde)

- Quelle est la position de ce corps à t=1s
- A quelle instant t, il passe par la position O(origine)
- Quelle est la vitesse moyenne dans l'intervalle de temps compris entre 0s et 2 s
- Quelle est l'expression de la vitesse moyenne dans l'intervalle de temps compris $t_0 < t < \Delta t + t_0$
- Donner l'expression de la vitesse instantanée, déduire sa valeur a t=0s
- Quelle est l'expression de l'accélération moyenne durant le temps $t_0 < t < \Delta t + t_0$
- Donner l'expression de l'accélération instantanée.

Solution

- X(1)=10
- X=0 $\Longrightarrow$ 6t²+16t=0 il passe par l'origine à t=0s et t=8/3=2.7s
- $v_{moy}=\frac{x(t=2)-x(t=0)}{2-0}=4\,m/s$
- $v_{moy}=\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}=16-12t_0-6\Delta t$
- $v(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0} v_{moy}=16-12t$ v(0)=16m/s
- $\gamma_{moy}=\frac{v(t=2)-v(t=0)}{2-0}=-12\,m/s^2$
- $\gamma=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\gamma_{moy}=-12$

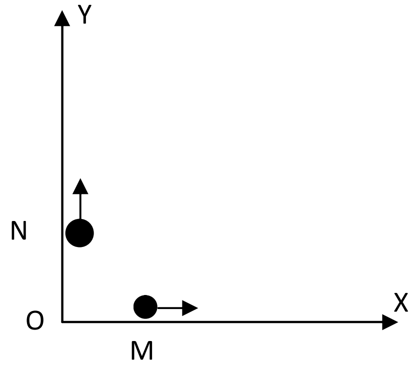
Exercice5 :



Un bateau part d'un point A d'une berge et veut atteindre le point B situé sur l'autre berge exactement en face de A avec une vitesse constante V= 8 m/s. On supposera les berges parallèles et distantes de D = 1Km. Si la vitesse de l'eau est constante et égale à v = 2 m/s, déterminer l'orientation du bateau pour qu'il arrive en A.

Quelle est la durée de la traversée.

Exercice6 :



Soit un repère OXY et un point M qui décrit l'axe OX d'un mouvement uniformément accéléré d'accélération constante $a = 4\,{}^{m}\!/_{s^2}$. un autre point N se déplace sur l'axe OY avec une vitesse constante $v = 10\,{}^{m}\!/_{s}$.

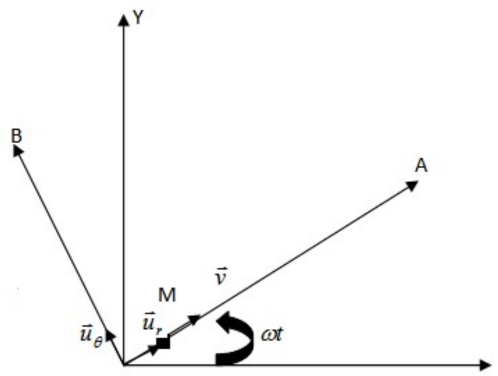
Quelle est la trajectoire du point M vue de N en supposant qu'à $t = 0s$ N et M étaient en O.

Exercice7 :

Un point matériel se déplace sur un tige OA avec une vitesse v constante. La tige Oa tourne autour du point O dans le plan xoy avec une vitesse angulaire ω.

a – Donner l'expression des vecteurs positions dans les deux repères.

b – Donner l'expression de la vitesse dans les deux repères.



Isaac Newton : (1642-1727)

Newton formule l'hypothèse audacieuse selon laquelle la Lune « tombe » sur la Terre de la même manière qu'un objet une pomme par exemple... tombe sur le sol. Mais en raison de sa vitesse initiale, la Lune décrit une trajectoire curviligne. Chute verticale et mouvement orbital sont donc des mouvements de même nature. Puis Newton étend cette hypothèse à tout corps céleste en orbite et aboutit à la loi suivante : « Deux corps quelconques s'attirent selon une force proportionnelle au produit de leur masse et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare ».

III Introduction

La dynamique est une science qui étudie les mouvements d'un corps en fonction des causes qui provoquent ce mouvement. C'est-à-dire les interactions entre particules (forces) mouvement d'un corps plus la cause du mouvement.

III-I Principe d'inertie :

Galilée est le premier à établir le principe d'inertie. Ce principe dit, « si un corps né soumis à aucune force alors, soit il continue son mouvement en ligne droite a la même vitesse, soit il reste au repos si il était déjà »

La loi d'inertie « tout corps libre ou isolé se déplace en ligne droite à une vitesse constante ».

C'est la loi d'inertie ou la première loi de Newton (1678).

Le principe d'inertie est valable pour un repère (système) galiléen dans lequel tout corps libre se déplace à une vitesse constante.

Le repère terrestre convient à l'étude d'un corps tant que les accélérations sont négligeables par rapport aux accélérations terrestres.

III-I-1 Quantité de mouvement

La quantité de mouvement est définie comme le produit de la masse d'un corps à sa vitesse $\vec{p} = m\vec{V}$, c'est une quantité vectorielle qu'a la même direction que la vitesse. C'est un concept physique important car sa réuni deux éléments décrivant le mouvement, la masse et la vitesse.

Remarque

Si la masse est constante alors le principe d'inertie dit : tout cors libre ce déplace à une quantité de mouvement constante.

III-I-1-1 Principe de conservation de la quantité de mouvement :

Pour vérifier ce principe, on fait une expérience simple. Un corps M1 interagit avec un autre corps M2 et on néglige toute interaction avec le milieu extérieur sur les deux corps (system isolé).

Expérience :

On pose sur une table à cousin d'air deux disques équipés d'un champ magnétique (pour qu'ils se repoussent sous l'action du champ magnétique). Ces deux disques sont reliés par un fil pour être fixés à la table au dessue d'une bougie allumée puis on jette le système.
Après un instant le fil est brulé, alors les deux fils se détachent, sur les trois périodes : avant pendant et après l'interaction on remarque que la quantité de mouvement du système est toujours constante $\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}'_1 + \vec{P}'_2$ de la $\vec{P}_1 - \vec{P}'_1 = +\vec{P}'_2 - \vec{P}_2 = -(\vec{P}_2 - \vec{P}'_2)$

Ce qui ramène à $\Delta\vec{P}_1 = -\Delta\vec{P}_2$

Ils représentent les variations des quantités de mouvements des deux corps.
La quantité de mouvement que perd un corps est gagnée par l'autre.
Remarque : ce principe de la conservation de la quantité de mouvement s'applique seulement à un système isolé.

III-II Dynamique d'un corps

III-II-1 La force

Schématiquement, une force est une cause de nature à modifier la vitesse d'un objet. Modifier la vitesse peut signifier lui communiquer une vitesse si cette dernière était initialement nulle, ou bien en faire varier soit la valeur, soit la direction, soit les deux à la fois. Quelle que soit leur nature, et quelle que soit la façon dont elles se manifestent (à distance ou au contact de deux corps), les forces (par exemple le poids d'un corps) sont des grandeurs vectorielle. Il faut donc, à chaque fois que l'on considère une force, rechercher
A partir de l'équation précédente $\Delta\vec{P}_1 = -\Delta\vec{P}_2$ en divisant les deux termes par un l'intervalle du temps écoulé Δt on trouve $\frac{\Delta\vec{P}_1}{\Delta t} = -\frac{\Delta\vec{P}_2}{\Delta t}$ les variations moyennes des vecteurs quantités de mouvements dans l'intervalle Δt sont égales et de sens opposés. La quantité $\frac{\Delta\vec{P}_1}{\Delta t}$ est

appelé force moyenne qui agit sur le corps dans l'intervalle de temps Δt, on écrit $\vec{f}_m = \dfrac{\Delta \vec{P}_1}{\Delta t}$ si l'intervalle du temps Δt est très petit $\Delta t \rightarrow 0$ on définit la force instantanée

$$\vec{f}_i = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{f}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta p}}{\Delta t} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

III-II-1-2 Lois de Newton

III-II-1-3 Relation fondamentale de la dynamique (2eme loi de Newton)

La force appliquée sur un corps

$$\vec{f}_i = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{V})}{dt}$$

Si la masse ne varie pas avec la vitesse alors

$$\vec{f}_i = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d(\vec{V})}{dt} = m\vec{\gamma}$$

La force appliquée sur un corps est la résultante des réactions dues à l'ensemble des forces *f1, f2,f3…fn*

$$\vec{F} = \sum \vec{f}_i = m\vec{\gamma}$$

Relation Fondamentale de la Dynamique (RFD ou PFD)

Remarque :

La loi de Newton définie les équations différentielles du mouvement.

$$\vec{F} = \sum \vec{f}_i = m\vec{\gamma} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$\vec{F} = \sum \vec{f}_i = m\vec{\gamma} = \begin{cases} \vec{F}_x \\ \vec{F}_y \\ \vec{F}_z \end{cases} = m\begin{cases} \dfrac{d\vec{V}_x}{dt} \\ \dfrac{d\vec{V}_y}{dt} \\ \dfrac{d\vec{V}_z}{dt} \end{cases} = m\begin{cases} \dfrac{d^2\vec{x}}{dt^2} \\ \dfrac{d^2\vec{y}}{dt^2} \\ \dfrac{d^2\vec{z}}{dt^2} \end{cases}$$

III-II-1-4 La première loi de Newton : loi d'inertie

Si un corps est libre ou isolé ou il se déplace à vitesse constante : $\vec{\gamma} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F} = m\vec{\gamma} = \vec{0}$

Si la force appliquée sur un corps est nulle $\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\gamma} = \vec{0}$ le corps à un mouvement uniforme (vitesse constante) c'est la loi d'inertie (1er loi de Newton).

III-II-1-5 La troisième loi de Newton (action et réaction) :

Quand deux corps s'interagissent, à partir du principe de la conservation de la quantité de mouvement $\frac{\Delta\vec{P}_1}{\Delta t} = -\frac{\Delta\vec{P}_2}{\Delta t} \Rightarrow \frac{d\vec{P}_1}{dt} = -\frac{d\vec{P}_2}{dt} \Rightarrow \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

$\vec{F}_{12}$ Force appliquée par le corps 1 sur le corps 2

$\vec{F}_{21}$ Force appliquée par le corps 2 sur le corps 1.

III-II-2 Interactions fondamentales

Diffèrent types de forces agissent sur les corps.

Les principales forces résultent des interactions fondamentales

III-II-2-1Interaction gravitationnelle :

C'est une force d'attraction entre toutes les particules. Comme les corps attirés par la Terre en son voisinage.

III-II-2-2 Interaction électromagnétique :

Force résultante d'un champ magnétique et une charge mobile « force de Laplace-Lorentz » $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{V} \wedge \vec{B}$

III-II-2-3 Interaction nucléaire forte :

Elle s'exerce entre les nucléons du noyau d'un atome. Elle contribue à la liaison des protons et des neutrons. Elle s'exerce à très courte distance et est responsable de la cohésion du noyau.

III-II-2-4 Interaction nucléaire faible :

L'interaction faible se manifeste dans certains types de réactions nucléaires telles que la radioactivité.

Il existe deux types de forces :

Forces d'interaction à distance sans contact, tel que les forces de gravitation, les forces électromagnétiques, et les forces nucléaires.

Forces de contact: les forces de frottement et de tension

III-II-2-5 Force d'interaction gravitationnelle « Newton en 1650 »

C'est une force d'interaction qui s'exerce entre deux masses.

Deux masses *m* et *M* s'attirent, elles sont séparées par une distance *r*

La force d'attraction est donnée par

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\vec{u}$$

Figure III-1 Force d'interaction gravitationnelle *

Avec G la constante de gravitation universelle =6.6710^{-11}(SI)

Nous avons $\vec{F} = -m\vec{g}(p)$ Avec $\vec{g} = G\frac{M}{r^2}\vec{u}$

On peut énoncer le champ de gravitation de la terre en un point P de l'espace situé à l'extérieur de la terre, ce champ a pour expression :

$$\vec{g} = G\frac{M}{(R_T + r)^2}\vec{u}$$

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{(R_T + r)^2}\vec{u}$$

M masse de la terre : M=5.98 10^{24} kg

R_T rayon de la Terre = 6.37 10^6m

r l'altitude de P par rapport à la surface de la terre.

La valeur de ce champ à la surface de la terre g_0=9.83 (SI)

III-II-3 Poids d'une masse

Le poids d'une masse représente l'interaction gravitationnelle de cette masse avec la terre. $\vec{p} = m\vec{g}$

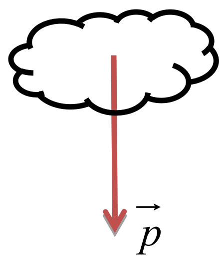


Figure III- le poids d'une masse

III-II-4 Interaction électrostatique :

La force appliquée entre deux charges Q_1 et Q_2 séparées par une distance r est $\vec{F}_c = K\frac{Q_1 Q_2}{r^2}\vec{u}$

K : la constante de Coulomb

III-II-5 Autre forces

Force de Contactes : $\vec{C}, \vec{N}, \vec{R}$

Forces de frottement : résistance de l'aire $\vec{f} = -k\vec{v}^n$ ou résistance d'un liquide visqueux $n \geq 1$

Forces élastique : $\vec{f}_e = -k\vec{x}$

Force de tension : $\vec{T}$

III-II-6 Force de contact

Ce sont les forces qui s'exercent entre deux corps en contact physique l'un avec l'autre. Cette définition fait intervenir trois éléments : deux objets que l'on met en contact par une surface.

Remarquons qu'à l'échelle atomique, même les surfaces très lisses ne sont pas véritablement planes. Dans la réalité elles ont des anfractuosités un peu partout comme l'indique la représentation de la figure dans laquelle les surfaces en contact sont toutes bosselées.

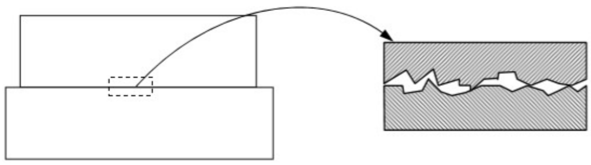


Figure III-3 Surface de contact

Ainsi, au lieu d'avoir un contact partout, on aura des microcontacts très localisés. Il faut donc distinguer la surface apparente et la surface qui est vraiment en contact. Cette dernière est beaucoup plus petite que la première. En conséquence, la force de contact ne s'applique pas de façon uniforme sur toute la surface, mais elle n'intervient que sur les aspérités. A ces endroits, les molécules étant très proches les unes des autres, ce sont les atomes des deux corps qui entrent mutuellement en interaction. Les forces agissant sur ceux-ci sont très compliquées à analyser: forces coulombiennes, force de Vander Waals, etc...

Plusieurs facteurs influencent ces forces: la nature des matériaux, le fini des surfaces, les corps interstitiels (contaminants, molécules adsorbées, débris d'usure, poussières, etc.…), la température et le degré de contamination des surfaces. Comme il est quasiment impossible de modéliser les forces de contact en prenant en compte toute les interactions microscopiques, elles sont déterminées de façon globale au moyen de méthodes expérimentales.

Exemple :

On utilise une boite en équilibre sur un plan horizontal (table)

La boite est en équilibre ce qui implique $\vec{\gamma} = \vec{0}$. Parmi les forces appliquées sur la table et qui la maintiennent en équilibre on a le poids

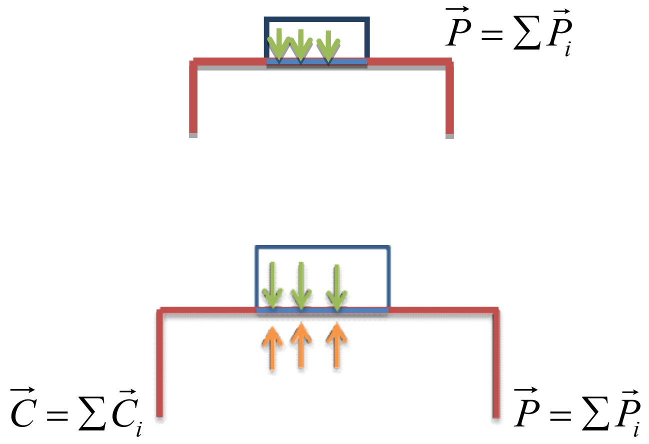


Figure III-4 Force de contact sur un plan

Les particules de la surface de contacte réagissent par une résultante des forces élémentaire $\vec{C}$

La loi de Newton (RFD) $\vec{P} + \vec{C} = m\vec{\gamma} = \vec{0} \Rightarrow \vec{C} = -\vec{P}$

Remarque

On ne dit pas que $\vec{C}$ est la réaction car le poids $\vec{P}$ n'est pas l'action. Le principe de l'action et de la réaction n'est appliqué que si les forces sont de même nature.

III-II-6-1 Expérience

On met une boite sur un plan incliné d'un angle α avec l'horizon

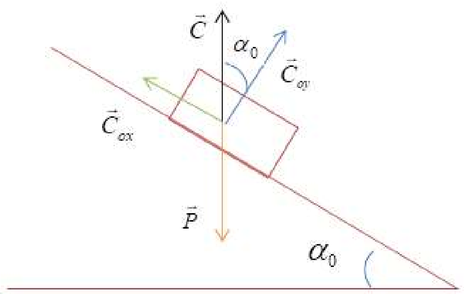


Figure III-5-a plan incliné cas statique

Les forces : on a le poids $\vec{P}$ et la force de contact $\vec{C}$

La boite reste immobile pour un ensemble de valeurs de l'angle α plus petit d'un angle critique α_0 de α pour le quelle la boite commence à glisser. $\vec{P} + \vec{C} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} = -\vec{C}$ Avec $\vec{P} = \vec{P}_x + \vec{P}_y$ $\vec{C} = \vec{C}_{0x} + \vec{C}_{0y}$ sachant que $\vec{C}_{0x}$ la projection de $\vec{C}$ selon l'axe x et $\vec{C}_{0y}$ selon l'axe y au repos.

Si on met plusieurs boites sur notre boite, on remarque que l'angle critique α_0 (début de glissement) ne varie pas ainsi que le rapport $\left|\frac{\vec{C}_{0x}}{\vec{C}_{0y}}\right|$

Si on varie la surface de contact, on trouve que l'angle α_0 varie.

Pour indiquer la quantité qui caractérise le frottement entre deux surfaces, on définit le coefficient de frottement statique.

$\vec{C}_{0x}$ la composante des forces de contact sur l'axe ox

$\vec{C}_{0y}$ la composante des forces de contact sur l'axe oy ($oy \perp ox$).

En mesurant ces deux composantes à l' instant du déséquilibre à l'angle α_0 on obtient.

$$tg\alpha_0 = \left|\frac{\vec{C}_{0x}}{\vec{C}_{oy}}\right| = \mu_s$$

Le coefficient de frottement statique représente la tangente de l'angle α_0 que fait avec *oy.*

α_0 L'angle de frottement.

III-II-6-2 Résultat de l'expérience

On fait augmenter l'angle α par des petites valeurs tel que $\alpha = \alpha_0 + \varepsilon$ la boite commence à glisser.

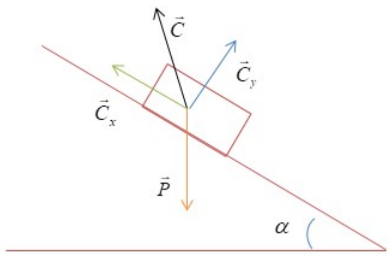


Figure III-5-b plan incliné cas dynamique

La RFD permet d'évaluer la force de contact $\vec{C}$

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma} \Rightarrow \vec{P} + \vec{C} = m\vec{\gamma} \Rightarrow \vec{C} = m\vec{\gamma} - \vec{P}$$

L'expérience montre que le rapport $\left|\frac{\vec{C}_x}{\vec{C}_y}\right|$ reste constant.

On définit le coefficient de frottement dynamique : $\mu_g = tg\alpha = \left|\frac{\vec{C}_x}{\vec{C}_y}\right| = \mu_d$

La composante $\vec{C}_x$ est plus petite que $\vec{C}_{0x}$ alors que $\vec{C}_{0y}$ reste la même.

En équilibre $\vec{P}+\vec{C}=\vec{0}$

En projetant sur *Ox :* $P_x - C_{0x} = 0 \Rightarrow P\sin\alpha_0 - C_{0x} = 0 \Rightarrow C_{0x} = P\sin\alpha_0$

Cas de mouvement : $\vec{P}+\vec{C}=m\vec{\gamma}$

En projetant sur *Ox* : $P_x - C_x = m\gamma \Rightarrow P\sin\alpha - C_x = m\gamma$

$m\gamma > 0 \Rightarrow C_x < P\sin\alpha$

On sait que $\alpha = \alpha_0 + \varepsilon$ et $\sin\alpha \approx \sin\alpha_0$

En remplaçant dans l'équation précédente on obtient $|C_x| < |C_{0x}|$ et l'expérience montre que :

$\mu_s > \mu_g$ avec μ_g Indépendant de la vitesse.

III-II-6-3 Calcul de la force minimale pour déplacer un corps

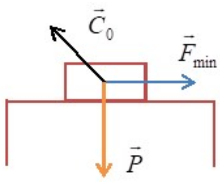
Exercice

Un bloc, de masse m=100kg se déplace sur un plan horizontal rugueux. Calculer l'accélération de ce corps si :

1) La force appliquée sur ce corps est F1=400N
2) La force appliquée sur ce corps est F2=750N

   En sachant que $\mu_s = 0.42$ et $\mu_d = 0.25$.

Solution :



Avant de déterminer la force appliquée on calcul la force minimal pour déplacer le bloc :

Dans le cas ou le corps est immobile

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{C}_0 + \vec{F}_{\min} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} F_{\min} - C_{0x} = 0 \\ C_{0y} - mg = 0 \end{cases}$$

$C_{0y} = mg = 1000N$ on à $\mu_s = \dfrac{C_{0x}}{C_{0y}} \Rightarrow C_{0x} = \mu_s C_{0y} = 420N$

$\Rightarrow F_{\min} = C_{0x} = 420N$

1) Quand la force $F_1 = 400N < F_{\min}$ $\Rightarrow$ le corps ne bouge pas (il reste immobile)
2) Quand la force $F_2 = 750N > F_{\min}$ $\Rightarrow$ le corps se déplace avec une accélération $\vec{\gamma}$

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma} \Rightarrow \vec{P} + \vec{C} + \vec{F}_2 = m\vec{\gamma} \Rightarrow \begin{cases} F_2 - C_x = m\gamma \\ C_y - mg = 0 \end{cases}$$

On a $C_{0y} = C_y = mg = 1000N$ et $\mu_g = \dfrac{C_x}{C_y} \Rightarrow C_x = \mu_g C_y = 250N$

$$F_2 - C_x = m\gamma \Rightarrow \gamma = \frac{F_2 - C_x}{m} = 5(m/s^2)$$

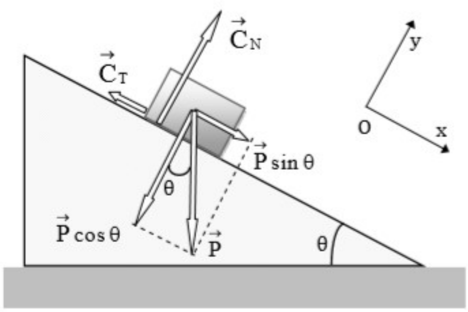
Exercice

Un bloc, de masse m=1kg, est posé sur une surface rugueuse inclinée d'un angle θ par rapport à l'horizontale. En augmentant graduellement la valeur de θ, on a effectué les observations suivantes :

- le bloc a commencé à glisser lorsque l'angle a atteint la valeur θ=20°;

- son accélération était de 3,2 m /s2 pour θ=30°.

En déduire les valeurs des coefficients de frottements statique et dynamique.



Solution :

L'application de la deuxième loi de Newton donne :

$$\vec{P} + \vec{C} = m\vec{\gamma}$$

Projetons cette équation sur les deux axes de coordonnées cartésiennes

$$\sum (F_{ext})_x = P\sin\theta - C_T = m\gamma$$

$$\sum(F_{ext})_y = -P\cos\theta - C_N = 0$$

La définition du coefficient de frottement nous permet d'écrire :

$$C_T = \mu C_N = \mu P\cos\theta \Rightarrow P\sin\theta - \mu P\cos\theta = m\gamma$$

$$\mu = \frac{P\sin\theta - m\gamma}{P\cos\theta}$$

1er cas : rupture d'équilibre $(\gamma = 0m/s^2; \mu = \mu_s; \theta = 20°) : \mu_s = tg\theta = 0.364$

2ième cas : mouvement uniformément accéléré

$$(\gamma = 3.2m/s^2; \mu = \mu_d; \theta = 30°) : \mu_d = \frac{g\sin\theta - \gamma}{g\cos\theta} = 0.2$$

III-II-7 Application des lois de Newton

III-II-7-1 poids d'un corps au voisinage de la terre

On définit la force qu'applique la terre sur un corps quelconque par son poids. Pour préciser cette force, il suffit de mesurer la masse du corps et l'accélération de son mouvement si on le laisse sous l'influence de l'attraction terrestre et on néglige toutes autre interactions ; on définit la force par $\vec{F} = \vec{P} = m\vec{\gamma}$

Pour calculer l'accélération, il suffit d'étudier la chute libre de plusieurs corps de masses m.

On remarque que l'accélération est constante et que dans chaque cas elle a la même valeur et est dirigé vers la terre.

Cette accélération est notée $\vec{g}$ appelée accélération de la pesanteur.

En Algérie $\vec{g} = 9.80m/s^2$ et on écrit $\vec{P} = m\vec{g}$, le poids du corps au voisinage de la terre.

III-II-8 Etude d'un projectile :

On jette un projectile avec une vitesse $\vec{V}_0$ faisons un angle α avec l'horizontal, on néglige le frottement et on étudie le mouvement en appliquant la RFD sur le projectile.

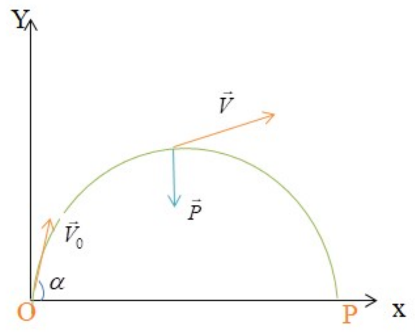


Figure III-6 Projectile

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma} \Rightarrow \vec{P} = m\vec{\gamma} \Rightarrow mg = m\vec{\gamma} \Rightarrow g = \gamma$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X \rightarrow \\ Y \rightarrow \\ Z \rightarrow \end{cases} \begin{cases} \gamma_x = 0 \\ \gamma_y = -g \\ \gamma_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_x(t) = V_0 \cos\alpha \\ V_y(t) = -gt + V_0 \sin\alpha \\ V_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = V_0 \cos(\alpha)t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 \sin(\alpha)t \\ z = 0 \end{cases}$$

Calcul de la trajectoire du projectile :

En éliminant le temps de l'équation horaire :

$$y = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{[V_0 \cos(\alpha)]^2} + \frac{V_0 \sin(\alpha)x}{V_0 \cos\alpha}$$

$y = -\frac{1}{2}\left[\frac{g}{V^2{}_0 \cos^2(\alpha)}\right]x^2 + xtg\alpha$ Équation d'une parabole

Le temps nécessaire au sommet :

Au sommet $V_y = 0 \Rightarrow -gt_s + V_0 \sin\alpha = 0 \Rightarrow t_s = \dfrac{V_0 \sin\alpha}{g}$

Et donc les composantes du sommet :

$$x_s = V_0 \cos\alpha \frac{V_0 \sin\alpha}{g} = \frac{V_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g} = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$$

$$y_s = -\frac{1}{2}g\frac{V_0^2 \sin^2\alpha}{g^2} + V_0 \sin\alpha \frac{V_0 \sin\alpha}{g} = \frac{1}{2}\frac{V_0^2 \sin^2\alpha}{g}$$

Remarque : On peut on déduire que la hauteur est maximale pour

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\alpha = 1 \Rightarrow h = \frac{V_0^2}{2g}$$

Calcul de la portée du projectile :

C'est la distance horizontale que parcoure le projectile. Elle est obtenue quand *y=0*

Soit *x=0*

Soit $x = x_{\max} = \dfrac{tg(\alpha)2V_0^2\cos^2\alpha}{g} = \dfrac{2V_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}$ on a $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$

$\Rightarrow x_{\max} = \dfrac{V_0^2\sin 2\alpha}{g}$ La portée dépend aussi de l'angle α si $\alpha = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow x_{\max} = \dfrac{V_0^2}{g}$

Le temps de vol : c'est le temps total du projectile :

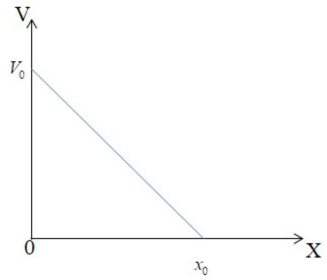
$$t_v = 2t_s = \frac{2V_0\sin\alpha}{g}$$

III-II-9 Résistance de l'air

Quand un corps est en chute libre dans l'air, on remarque qu'après un temps donné le corps tombe avec une vitesse constante (par exemple la chute d'un parachutiste) le corps n'est pas accéléré et la résultante des forces appliquée est nulle. Donc il est opposé au poids du corps une force. Cette force dépend de la forme du corps. La vitesse d'un parachutiste est beaucoup plus petite que celle d'une pierre de même masse.

Pour connaitre la forme de cette force on fait une petite expérience :

On jette doucement une balle sur un plan horizontal avec une vitesse initiale V_0 et les photos prise par flash nous permettent de mesurer la vitesse *V* en fonction de la distance *x* qui donne la courbe suivante.



$V = V_o - \dfrac{V_0}{x_0}x$ avec $-\dfrac{V_0}{x_0}$ la pente

$$\gamma = \frac{dV}{dt} = -\frac{V_0}{x_0}\frac{dx}{dt} = -\frac{V_0}{x_0}V$$

La force de frottement de l'aire est ; $\vec{f} = m\vec{\gamma} = -m\dfrac{V_0}{x_0}\vec{V} = -K\vec{V} \quad \Rightarrow \vec{f} = -K\vec{V}$

Remarque : Ce type de force s'appel force de Visconte et est toujours proportionnel à la vitesse et opposé à elle.

L'expérience montre que ce type de force apparait dans les liquides pour des faibles vitesses.

$\vec{f} = -K\vec{V} = -K\eta\vec{V}$

K dépend de la géométrie du corps et η est le coefficient de viscosité qui dépend du milieu pour les grandes vitesses.

III-II-10 Force élastique :

Un des mouvements les plus observés dans la nature est le mouvement oscillatoire (périodique) comme l'oscillation d'un pendule.

Le mouvement sinusoïdal est de la forme :

$x = A\cos\omega t$ avec $\vec{OM} = x\vec{i}$

$V_x = -A\omega\sin\omega t$ avec $\vec{V} = V_x\vec{i}$

$\gamma = -A\omega^2\cos\omega t = -\omega^2 x$ avec $\vec{\gamma} = \gamma_x\vec{i}$

$\gamma = -\omega^2 \vec{OM}$ nous avons $\vec{F} = m\vec{\gamma} = -m\omega^2\vec{OM} = -K\vec{OM}$

Par projection $\vec{F} = -K\vec{x} \Rightarrow F_x = -Kx$

Cette force est proportionnelle au déplacement $\vec{r}$ (opposée au déplacement), elle se dérige toujours vers l'origine ; c'est la force élastique. Ce type de force apparait quand un corps élastique (ressort) est déformé. Dans ce cas K est la constante de raideur.

La phase du mouvement $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$

III-II-10-1 Application :

Un corps est mis horizontalement avec un ressort fixé à son extrémité.

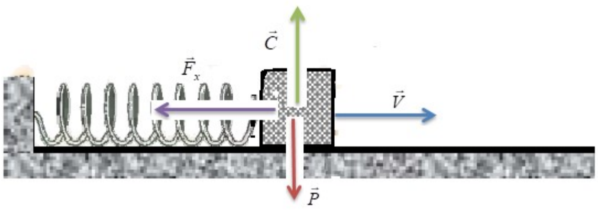


Figure III-7-a corps soumis à la force de raideur d'un ressort

Constante de raideur K et pas de frottement

$$\sum\vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma} \Rightarrow \vec{P} + \vec{C} + +\vec{F}_x = m\vec{\gamma}$$

$$Ox \rightarrow -F_x = m\gamma \Rightarrow -Kx = m\gamma$$

$$Oy \rightarrow C - P = 0 \Rightarrow C = mg$$

$$m\gamma + Kx = 0 \Rightarrow \gamma + \frac{K}{m}x = 0$$

$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{K}{m}x=0 \Rightarrow \ddot{x}+\omega^2 x=0$ Équation différentiel du premier ordre.

Sa solution est de la forme :

$x(t)=A\sin\omega t+B\cos\omega t$ ou bien $x(t)=A\cos\omega t+\varphi$

Avec ω la pulsation, A et φ sont calculés à partir des conditions initiales.

III-II-10-2 Corps dans un liquide visqueux plus ressort

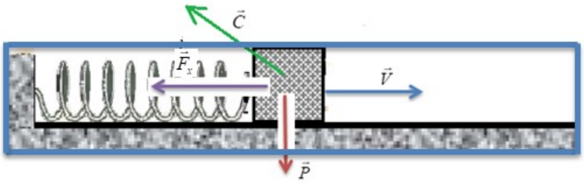


Figure III-7-b corps soumis à la force de raideur d'un ressort dans un liquide visqueux

Un corps se déplace dans un liquide visqueux $\vec{C}_x=-K_1\vec{v}$ et soumis à une force élastique $\vec{F}_x=-K_2\vec{x}$

$$\sum\vec{F}_{ext}=m\vec{\gamma}\Rightarrow\vec{P}+\vec{C}++\vec{F}_x=m\vec{\gamma}$$

En projetant sur :

$$Oy\rightarrow -C_y-P=0\Rightarrow C_y=mg$$

$$Ox\rightarrow -C_x-F_x=m\gamma\Rightarrow -K_1v-K_2x=m\gamma$$

$$\Rightarrow\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{K_1}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{K_2}{m}x=0\quad\Rightarrow\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0{}^2\;x=0$$

Equation différentiel du deuxième ordre

avec $2\lambda=\frac{K_1}{m}$ facteur d'amortissement, et $\omega_0=\frac{K_2}{m}$ la pulsation.

La solution de l'équation différentiel dépend des valeurs de $\Delta'=\lambda^2-\omega^2{}_0$

Il en résulte deux cas :

1) $\lambda^2>\omega^2{}_0$ Mouvement non périodique : $x(t)=e^{-\lambda t}(Ae^{\alpha t}+Be^{-\alpha t})$ avec $\alpha=\sqrt{\Delta'}$
2) $\lambda^2<\omega^2{}_0$ Mouvement critique $x(t)=e^{-\lambda t}(At+B)$

III-III Le Moment cinétique :

III-III-1 Définition :

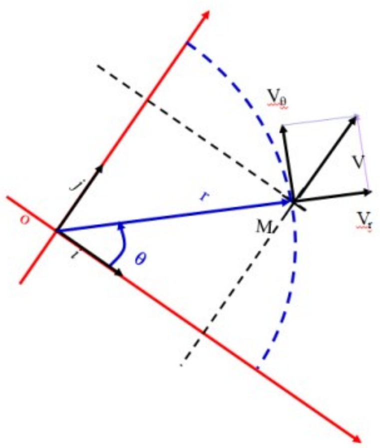
Si un corps de masse m tourne autour d'un point O avec une vitesse $\vec{V}$, on définit le Moment cinétique $\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{V} \Rightarrow \vec{L} = \vec{OM} \wedge m\vec{V} = \vec{r} \wedge \vec{P}$

$\vec{P}$ Quantité de mouvement

$\vec{r}$ Distance entre le point O et le corps

$\vec{L}$ Quantité vectorielle perpendiculaire formée par $\vec{r}$ et $\vec{V}$

$\left|\vec{L}\right| = mrV\sin(\vec{r},\vec{V})$



En général $\vec{r}$ varie et on peut décomposer $\vec{V}$

$\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_\theta$

$\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{V} = m\vec{r} \wedge (\vec{V}_r + \vec{V}_\theta) \qquad \Rightarrow \vec{L} = m\left[(\vec{r} \wedge \vec{V}_r) + (\vec{r} \wedge \vec{V}_\theta)\right]$ on a $\vec{r} \wedge \vec{V}_r = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{L} = m\vec{r} \wedge \vec{V}_\theta$

Nous savons que $V_\theta = r\dot{\theta} = r\dfrac{d\theta}{dt} = r\omega \Rightarrow \vec{L} = mr^2\omega$

avec ω vitesse angulaire.

III-III-2 Les lois de Kepler

1^{er} loi : toute planète décrit, une trajectoire elliptique ou le soleil représente une de ses axes.

$2^{ème}$ loi : la droite reliant le soleil et les planètes balaye des surfaces égales à des temps égaux.

$S = \frac{ds}{dt} = cst$ La surface balayé à partir d'un instant t par le vecteur $\vec{Sp}$

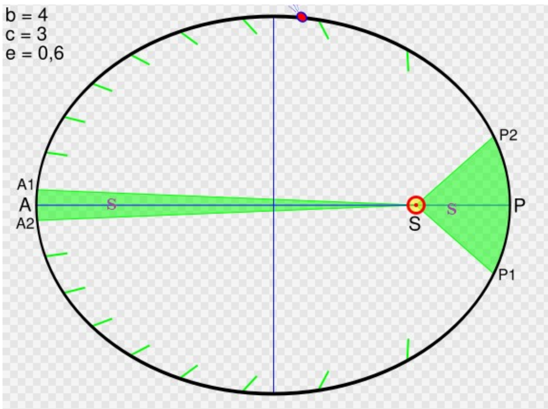
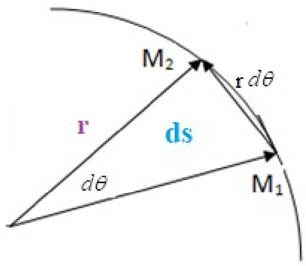


Figure III-9 Lois de Kepler

D'après la 2ème loi, on remarque que la planète se déplace à grande vitesse quand elle est près du soleil.



$\frac{ds}{dt} = cst$ Vitesse surfacique avec $ds = \frac{1}{2}r^2 d\theta \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = cst \Rightarrow r^2\omega = cst$

$L = mr^2\omega = cst$ Le moment cinétique d'une planète reste constant.

3) Loi : le carré des périodes est proportionnel aux distances au cube.

$$\left[\frac{T_1}{T_2}\right]^2 = \left[\frac{R_1}{R_2}\right]^3$$

T_1 Période de la planète

R_1 Distance (planète-soleil)

III-III-3 Le Moment d'une force :

Considérons une force $\vec{F}$ appliquée sur un corps C qui peut tourner autour d'un point O

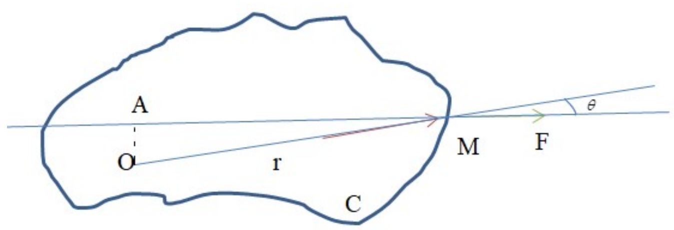


Figure III-10 Moment d'une force

Si la force ne passe pas par O, elle fera tourner le corps C autour de O.

Notre expérience quotidienne nous montre que l'efficacité de $\vec{F}$ à produire une rotation croît avec la distance b=OA (appelée bras de levier de O) a la droite d'action de la force AM

Quand nous ouvrons une porte, nous poussons toujours perpendiculairement le plus loin possible de l'axe de rotation.

Nous définissons donc une grandeur physique M appelée moment $M = F.b$ avec $b = r\sin\theta$ donc $M = Fr\sin\theta$ le moment est une grandeur vectorielle définit comme

$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$

III-III-4 Le Moment cinétique :

Le moment cinétique par rapport au point O d'un point matériel de masse m et de vitesse $\vec{V}$ et situé au point M est le produit vectoriel $\vec{L}_0 = O\vec{M} \wedge \vec{P} = m\vec{r} \wedge \vec{V}$

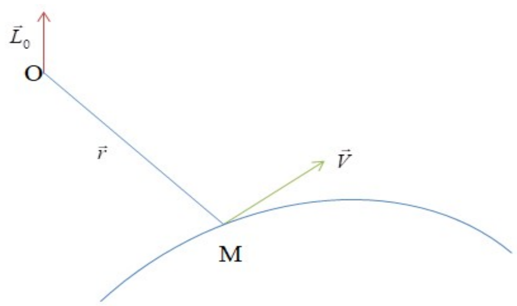


Figure III-11 Moment cinétique

III-III-4-1 Théorème du Moment cinétique TMC

En un point fixe O d'un référentiel galiléen

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \mu_{\vec{F}/O}$$

La dérivée du moment cinétique par rapport au temps permet d'obtenir le moment de la force $\vec{F}$ par rapport au point O.

Démonstration :

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{OM}\wedge\vec{P})=\frac{d}{dt}(m\vec{r}\wedge\vec{V})=m\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\wedge\vec{V}+\vec{r}\wedge\frac{d\vec{V}}{dt}\right]$$

nous avons $\frac{d\vec{r}}{dt}\wedge\vec{V}=0$ car $d\vec{r}\,//\,\vec{V}$

$$\Rightarrow\frac{d\vec{L}_0}{dt}=\vec{r}\wedge m\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{r}\wedge\vec{F}=\mu_{\vec{F}/0}$$

Le théorème du moment cinétique TMC est similaire a la relation fondamentale de la dynamique RFD :

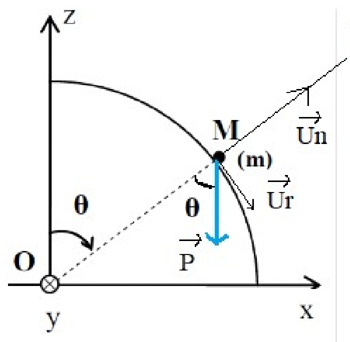
- La RFD relie la résultante des forces appliquées au point M et la variation de $\vec{P}$
- La TMC relie la somme des moment de ces forces par rapport à O et la variation de $\vec{L}_0$ par rapport à ce point.

Remarque : le moment cinétique joue pour la rotation $\frac{d\vec{L}_0}{dt}=\mu_{\vec{F}/O}$ un rôle similaire à celui que joue la force pour la translation $\frac{d\vec{P}}{dt}=\vec{F}$.

Exemple :

Un point matériel de masse m glisse sans frottement sur un cercle de rayon R. il était initialement au repos au point A

Donner la relation de la vitesse de M



On a

$$\vec{L}_0=\vec{OM}\wedge\vec{P}=R\vec{u}_n\wedge mV\vec{U}_r=-RmV\,\vec{k}\quad\text{car}\quad\vec{u}_n\wedge\vec{U}_r=-\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt}=-Rm\frac{dV}{dt}\vec{k}$$

Nous avons $\frac{d\vec{L}_0}{dt}=\mu_{\vec{P}/O}+\mu_{\vec{N}/O}=\vec{OM}\wedge\vec{P}+\vec{OM}\wedge\vec{N}$ on sait très bien que $\vec{OM}\wedge\vec{N}=0$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_0}{dt} = R\vec{U}_n \wedge (mg\sin\theta\ \vec{U}_r - mg\cos\theta\ \vec{U}_N) \quad \Rightarrow \frac{d\vec{L}_0}{dt} = -Rmg\sin\theta\,\vec{k}$$

De l'égalité des deux relations $\Rightarrow \frac{d\vec{L}_0}{dt} = -Rm\frac{dV}{dt}\vec{k} = -Rmg\sin\theta\,\vec{k}$

$$\frac{dV}{dt} = g\sin\theta\ = R\ddot{\theta}$$

En multipliant l'équation précédente par $d\theta$ on obtient

$\frac{dV}{dt}d\theta = g\sin\theta\, d\theta \Rightarrow \frac{d\theta}{dt}dV = g\sin\theta\, d\theta$ on multipliant par R nous obtenons :

$R\dot{\theta}dV = Rg\sin\theta\, d\theta$ sachant que $R\dot{\theta} = V$ nous obtenons $VdV = Rg\sin\theta\, d\theta$

En introduisant l'intégral des deux côtés : $\int_0^V VdV = \int_0^\theta Rg\sin\theta\, d\theta$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}V^2 = -Rg(\cos\theta - \cos 0)$$

$$\Rightarrow V = \sqrt{2RG(1-\cos\theta)}$$

IV-I Travail et énergies

IV-I-1 Introduction

La force appliquée à un corps peut être connue en fonction des coordonnées x, y, et z mais inconnue en fonction du temps. ce qui va nous amener à introduire deux nouvelles quantités, le Travail et l'énergie.

IV-I-2 Travail d'une force

Le travail d'une force F appliqué au point M dans le déplacement élémentaire $d\vec{M} = M\vec{M}'$ est défini par: $dw = \vec{F}.d\vec{M} = F\, dM \cos\alpha$

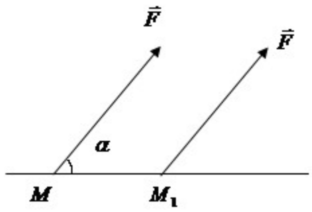


Figure VI-1 : Travail d'une force

Si $\alpha = 0 \Rightarrow dw = FdM$

si $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow dw > 0$ travail moteur

si $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow dw = 0$

si $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow dw < 0$ travail résistant

si $\alpha = \pi \Rightarrow dw = -FdM$

on peut décomposer la force en force tangentielle et force normale:

$\vec{F} = F_n\vec{U}_n + F_t\vec{U}_t$ le travail: $w = \int \vec{F}.d\vec{r} = \int (F_n\vec{U}_n + F_t\vec{U}_t)d\vec{r}$

$\Rightarrow w = \int \vec{F}.d\vec{r} = \int F_t\vec{U}_t.d\vec{r}$

la force tangentielle est la seule responsable du travail.

$dw = \vec{F}.d\vec{r} \Rightarrow w = \int \vec{F}.d\vec{r} = \int F_x.dx + \int F_y.dy + \int F_z.dz$

l'unité est le joule (SI) et le Erg (CGS).

IV-I-2-1 Etude d'un corps soumis à une force constante:

Soit un corps qui glisse sur un plan horizontal sous l'action d'une force $\vec{F}_x$ constante

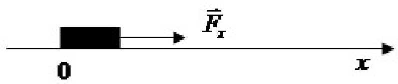


Figure VI-2Corps soumis à une force constante

$$dw = \vec{F}.d\vec{r} \Rightarrow w = \int \vec{F}.d\vec{r} = \int F_x.dx + \int F_y.dy + \int F_z.dz$$

$$dw = \vec{F}.d\vec{r} \Rightarrow w = \int \vec{F}.d\vec{r} = \int F_x.dx = \int_0^x F_x dx = F_x x$$

IV-I-2-2 Chute d'un corps:

Soit un corps de masse m qui tombe en chute libre de 0 vers A

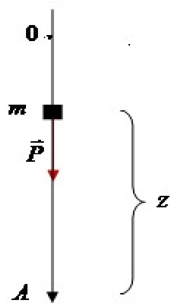


Figure VI-3 Chute libre

$$dw = \vec{F}.d\vec{r} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ dz \end{bmatrix} \Rightarrow dw = -mg\, dz$$

$$w_0{}^A = \int_0^A -mg\, dz = mg\, z$$

IV-I-2-3 Puissance:

On définit la puissance moyenne P_m par le travail effectué dans une unité de temps $P_m = \dfrac{\Delta w}{\Delta t}$

Puissance instantanée: $P_i = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta t} = \dfrac{dw}{dt} = \dfrac{\vec{F}.d\vec{r}}{dt} = \vec{F}.\vec{V}$ unité Watt

IV-I-3 Théorème de l'énergie cinétique:

IV-I-3-1 Energie Cinétique:

L'énergie cinétique d'un point matériel $E_c = \frac{1}{2} mV^2$ représente une quantité scalaire pour un travail élémentaire $dw = \vec{F}.d\vec{r} = m\frac{d\vec{V}}{dt}d\vec{r} = m\vec{V}\,d\vec{V}$ ce qui donne pour un déplacement AB

$$w = \int_{AB} m\vec{V}\,d\vec{V} = \frac{1}{2}mV^2\Big]_A^B = \frac{1}{2}mV_B^{\ 2} - \frac{1}{2}mV_A^{\ 2}$$

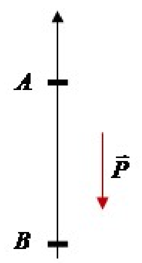
$w = E_c(B) - E_c(A)$ letravail de la force appliqué est égal a la variation d'énergie cinétique du point matériel.

Remarque:

- Quand $E_c(B) > E_c(A)$ travail moteur $V_B > V_A$

- Force perpendiculaire au déplacement $w = 0 \Rightarrow E_c(B) = E_c(A)$ vitesse du corps est constante.

Exemple:chute libre d'un corps de Z_A à Z_B



$$mg(Z_B - Z_A) = \frac{1}{2}mV_B^{\ 2} - \frac{1}{2}mV_A^{\ 2} \Rightarrow V_B^{\ 2} - V_A^{\ 2} = 2g(Z_B - Z_A)$$

IV-I-3-2 Energie Potentiel:

sila force est un gradient, on dit aussi que la force dérive d'une énergie potentiel

$\vec{F} = -\vec{grad}\,E_p$ cette relation est importante car elle permet de déterminer une force à partir de l'énergie potentiel dont elle dérive.

inversement de déterminer l'énergie à partir d'une force; si celle-ci est un gradient.

$$\begin{cases} dE_p = -\vec{F}.d\vec{r} \\ w = -\Delta E_p = E_p(A) - E_p(B) \end{cases}$$

Exemple1: cas d'attraction universelle:

la force d'attraction entre deux masse m et m' est donner par

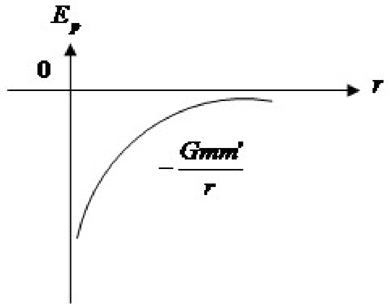


Figure VI-4 Attraction entre deux masses

$$\vec{F} = -\frac{Gmm'}{r^2}\vec{u}_r$$

$\vec{F} = -\vec{grad}\, E_p \Rightarrow dE_p = -\vec{F}.d\vec{r} = -\frac{Gmm'}{r^2}\vec{u}_r.d\vec{r} = \frac{Gmm'}{r^2}dr$ onen déduit $E_p = -\frac{Gmm'}{r} + cst$

L'origine de E_p étant pris à l'infinie (car lorsque r tend vers l'infini il n'ya plus d'interaction) la constante est nulle est $E_p = -\frac{Gmm'}{r}$

Exemple2: Interaction électron -électron ou proton-proton:

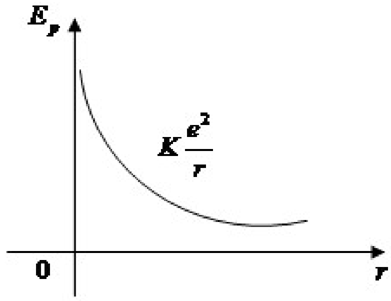


Figure VI-5 Interaction électron-électron

Dans ce cas la force d'interaction est donnée par: $\vec{F} = K\frac{e^2}{r^2}\vec{u}_r$ avec e la charge d'un proton

$$\Rightarrow E_p = K\frac{e^2}{r}$$

Exemple3: énergie potentiel d'un ressort:

La force de rappel est $\vec{F} = -Kx\vec{i}$ ou x est l'allongement du ressort. on en déduit

$$dE_p = -\vec{F}.d\vec{x} = Kxdx \Rightarrow E_p = \frac{1}{2}Kx^2$$

Remarque: pour qu'une force dérive d'un potentiel il faut que $Ro\vec{t}\vec{F} = \vec{0}$

Exercice:

On donne: $\vec{F} = 3x^2\vec{i} + (4y+z)\vec{j} + y\vec{k}$ est-ce un champ de gradient, et quel est le potentiel ?

E_p Dans cette force dérive ?

$$Ro\vec{t}\vec{F} = \vec{0} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2 & 4y+z & y \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow \left(\frac{\partial y}{\partial y} - \frac{\partial(4y+z)}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial 3x^2}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial(4y+z)}{\partial x} - \frac{\partial 3x^2}{\partial y}\right)\vec{k} = \vec{0}$ c'est bien un champ de gradient, on peut donc écrire $\vec{F} = -gra\vec{d}\, E_p$ on a:

$$\vec{F} = 3x^2\vec{i} + (4y+z)\vec{j} + y\vec{k} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = -3x^2 \Rightarrow E_p = -x^3 + g(y,z)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial E_p}{\partial y} = -4y - z \Rightarrow g(y,z) = -2y^2 - yz + l(z)$$

$$E_p = -x^3 - 2y^2 - yz + l(z)$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial z} = -y + \frac{\partial l}{\partial z} = -y \Rightarrow l(z) = cst$$

D'ou finalement: $E_p(x,y,z) = -x^3 - 2y^2 - yz + cst$

Ona $E_p(0,0,0) = 0 \Rightarrow cst = 0$ donc $E_p(x,y,z) = -x^3 - 2y^2 - yz$

IV-I-3-3 Energie mécanique: loi de conservation

Considérons un point matériel soumis a une seul force, celle ci dérivent d'une énergie potentielle (cette force $\vec{F}$ peut être la résultante de plusieurs forces appliquées).

Pour un déplacement AB du point matériel, on peut écrire a la fois $w_{A-B} = E_p(A) - E_p(B)$ et $w_{A-B} = E_c(B) - E_c(A)$

On en déduit $E_c(A) + E_p(A) = E_c(B) + E_p(B) = cst \Rightarrow (E_c + E_p)_A = (E_c + E_p)_B$

On définit l'énergie mécanique ou énergie total du point matériel comme étant: $E_m = E_c + E_p$

Enoncé:

si un point matériel n'est soumis qu'a une force dérivant d'une énergie potentielle; son énergie mécanique (total) se conserve

IV-I-3-4Force non conservatrice

si un corps est soumis a la foisà une force dérivant d'un potentiel et à une force qui ne dérive pas d'un potentiel, son énergie mécanique ne se conserve pas.

exemple:

particule tombant dans un fluide et soumise à la force de pesanteur (poids) qui dérive d'un potentiel, et une force de frottement qui n'en dérive pas.

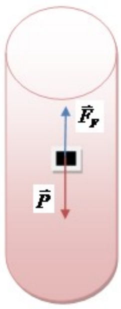


Figure VI-6 Particule dans un fluide

Soit w' le travail de la force de frottement (toujours négatif) car cette force s'oppose au mouvement, on aura bien conservation de l'énergie pour l'ensemble du système particule + fluide.

Application de la RFD $\vec{F}_c + \vec{F}_{nc} = m\vec{\gamma}$

Travail élémentaire $dw = \vec{F}.d\vec{r} = \vec{F}_c.d\vec{r} + \vec{F}_{nc}.d\vec{r} = m\vec{\gamma}.d\vec{r}$

$$dw = m\vec{\gamma}.d\vec{r} = m\frac{d\vec{V}}{dt}.d\vec{r} = m\vec{V}d\vec{V} = d(\frac{1}{2}mV^2)$$

$$\int_A^B \vec{F}_c.d\vec{r} + \int_A^B \vec{F}_{nc}.d\vec{r} = \int_A^B dE_c = \Delta E_c$$

$E_p(A) - E_p(B) + w_{\vec{F}nc} = E_c(B) - E_c(A)$

$w_{\vec{F}nc} = E_c(B) + E_p(B) - E_c(A) - E_p(A)$

$w_{\vec{F}nc} = (E_c + E_p)_B - (E_c + E_p)_A = E_T(B) - E_T(A) \Rightarrow w_{\vec{F}nc} = \Delta E_T$

Exercice

Soit un point matériel de masse $m = 2Kg$ qui peut de déplacer sur le trajet ABDF. la partie AB de longueur $L = 4m$ est un plan incliné rugueux de coefficient de frottement dynamique et faisant un angle $\alpha = 30°$ avec l'horizontale. la partie BDF est un plan horizontale lisse de longueur $d = 2{,}5m$ au bout duquel est attaché un ressort de raideur $K = 11250 N/m$ et de longueur à vide $L_0 = 50cm$. on le lâche de A avec une vitesse initiale de 4m/s

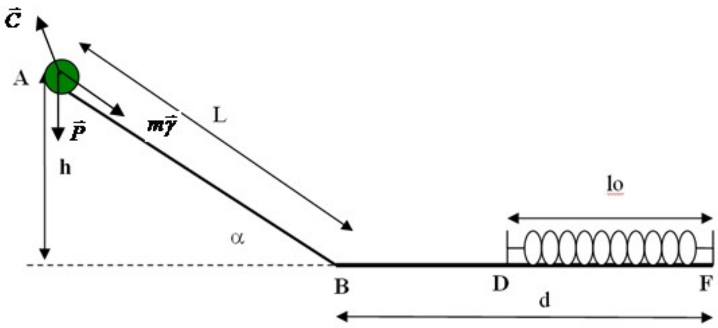
1) Déterminer l'accélération sur le trajet AB, en déduire la nature du mouvement

2) Déterminer le module de la force de contact C.

3) Déterminer la vitesse V_B

4) déterminer la vitesse V_D

5) calculer la déformation maximale $X_{\max}$ du ressort.



Repense:

1) détermination de l'accélération:

on applique la deuxième loi de Newton

$\vec{P} + \vec{C} = m\vec{\gamma}$

$$\begin{cases} -C_x + mg\sin\alpha = m\gamma \\ C_y - mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow C_y = mg\cos\alpha \end{cases}$$

Avec $C_x = \mu_g C_y = \mu_g mg\cos\alpha$ $\gamma = g\sin\alpha - \mu_g g\cos\alpha$ $\gamma = 2.5m/s^2$

2) la nature du mouvement: $\vec{\gamma}$ est un vecteur constant donc mouvement rectiligne uniformément varié ($\vec{\gamma}.\vec{V} > 0$ accéléré)

3) le module de la force de contact:

$$C_y = mg\cos\alpha = 10\sqrt{3}N \ \ C_x = \mu_g C_y = 5N \ \ C = \sqrt{C_x^{\ 2} + C_y^{\ 2}} = 18.03N$$

4) la vitesse V_B : il ya des frottements

$$\Delta E_T = w(\vec{c}) \Rightarrow \frac{1}{2}mV_B^{\ 2} + mgh_B - (\frac{1}{2}mV_A^{\ 2} + mgh_A) = \int \vec{C}_x.d\vec{l} = -\mu_g mg\cos\alpha\int_0^L dx$$

$$V_B^{\ 2} = V_A^{\ 2} + 2gh_A - 2\mu_g g\cos\alpha L \ \ V_B^{\ 2} = 6m/s$$

5) vitesse V_D

Entre B et D il n'ya p s de frottement $\Delta E_T = 0$

$$\Delta E_T = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mV_D^{\ 2} + 0 - (\frac{1}{2}mV_B^{\ 2} + 0) = 0 \ \ V_D = V_B = 6m/s$$

6) compression maximale $E_T = cst$

$$E_T = cst \Rightarrow \frac{1}{2}mV_D^{\ 2} = \frac{1}{2}Kx^2{}_{\max} \ \ x_{\max}\sqrt{\frac{K}{m}}V_D = 8cm$$

Exercice :

Soit un champ de force $\vec{F}$ défini par $\vec{F} = y\vec{i} + \lambda x\,\vec{j}$

1)Pour quelle valeur de $\boldsymbol{\lambda}$**,** la force$\vec{F}$est-elle conservatrice ?

2)Trouver le potentiel E_p dont le champ de force dérive sachant que $E_p(0,0) = 0$.

3)Si on considère $\boldsymbol{\lambda}$=1, calculer le travail de la force $\vec{F}$pour se déplacer du point

O(0,0) au point ***A***(1,1) suivant :

a)Le trajet ***OC*** puis ***CA*** avec ***C***(1,0)

b)La trajectoire ***OA*** d'équation $y=x^3$

Exercice :

I- Un point matériel de masse m est lancé sans vitesse initiale du point A à l'intérieur d'une cuve semi-circulaire ABC (sans frottement) de rayon R (voir Figure 3).

1- L'énergie mécanique du point matériel est-elle conservée durant son mouvement? Pourquoi ?

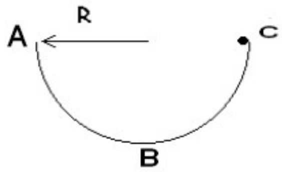
2- Calculer sa vitesse au point B

3- A quelle hauteur h remonte -t-il ?

II- Si la partie AB du demi-cercle est rugueuse et la partie BC est lisse (sans frottement) et le point matériel est lancé du point A sans vitesse initiale.

1. Quel est le travail de la force de frottement si la vitesse au point B est $\sqrt{gR}$?
2. Quelle hauteur le point matériel atteint-t-il ?

III- On considère toujours la partie AB rugueuse et la partie BC lisse et le point matériel est lancé du point A avec une vitesse V_0. On remarque qu'il atteint le point C avec une vitesse nulle. Quel est le travail de la force de frottement ?

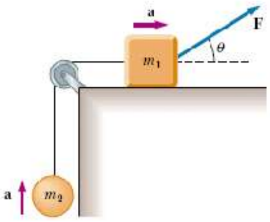


Exercice :

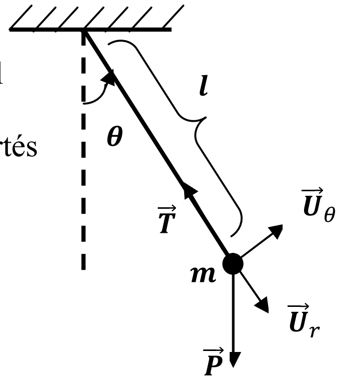
Un bloc de masse m_1 sur un plan horizontal rigoureux est attaché par un fil de masse négligeable à une balle de masse m_2 par une poulie de masse négligeable (Figure b). Une force F=10N faisant un angle θ=45° avec l'horizontal est appliquée au bloc. Le coefficient de frottement entre le bloc et la surface horizontale est μ_g=0.2 incliné faisant un angle θ.

1. Déterminer l'accélération des deux objets ainsi que la tension du fil.
2. Calculer le travail de la force quand l'objet se déplace d'une distance d=2m
   On donne :

m_1= 10 Kg m_2=5 Kg



Exercice 6 :



Soit un pendule simple constitué d'une masse ponctuelle $\boldsymbol{m}$suspendue à un fil inextensible de longueur $\boldsymbol{l}$et de masse négligeable. Le fil et la masse sont écartés par rapport à l'horizontal d'un angle $\boldsymbol{\theta}$ considéré faible.

Trouver l'équation du mouvement en utilisant deux différentes méthodes :

1)Le principe fondamental de la dynamique en utilisant le système des coordonnées polaires

2)Le théorème du moment cinétique.

Références Bibliographiques

1. Mécanique du point matériel. Cours et exercices Dr ZIANI Nossair et Pr BOUTAOUS Ahmed USTO-MB 2015-2016

2. Cours et Exercice Mécanique du point matériel Dr Torrichi Mohamed Dr Belfar Abbas 2017-2018

3. Mécanique générale –S.Pommier et Y.Berthaud- Dunod 2010.

4. Physique MPSI, PTSI- A.M. Clausset, F.Clausset- Dunod 2011.

5. Travaux dirigés de mécanique de point -A.Le Padellec et M. Mourgues- univ Toulouse 2011-2012.

6. Incertitude et analyse des erreurs dans les mesures physiques-J .Taylor-Dunod 2000.

7. Introduction à la mécanique du point- Travaux dirigés-Université de Cergy-Pontoise S1-MPI-2013

8. Mécanique I Notes de Cours David SENECHAL Université de Sherbrooke 2003

9. Mécanique Newtonienne du point .C.Grossetete et P.Olive- ellipse 1998.

10. Cours et exercices de mathématiques -M.Cuaz- 2009.

11. Physique I Mécanique du point matériel Lamria BENALLEGUE, Mohammed DEBIANE, Azzedine GOURARI, et Ammar MHAMDIA USTHB 2011

12. Mécanique du point matériel Cours et exercices Dr. Fatiha SAIDI école préparatoire en sciences et technique d'Oran 2016