REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE D'ORAN MOHAMMED BOUDIAF USTO-MB

FACULTE DU GENIE-ELECTRIQUE
DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE

# Mécanique du Point

---

## COURS DE PHYSIQUE

POUR LES ETUDIANTS DE PREMIERE ANNEE LICENCE DE GENIE-ELECTRIQUE

**Dr. Habib Zahmani Abdeldjelil**

**2021**

# Introduction

Ce polycopié représente un support de cours de mécanique du point matériel. Il est destiné aux étudiants du premier semestre de toutes les filières du Génie-Electrique de l'Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed Boudiaf.

La mécanique du point est l'étude cinématique ou dynamique du mouvement des points matériels. La cinématique permet d'étudier les relations entre les paramètres du mouvement (position, vitesse, accélération, etc.), alors que la dynamique permet de prédire l'évolution de ces paramètres en connaissant les causes du mouvement.

Cet ouvrage est composé de trois grandes parties. La première partie est consacrée à des rappels sur l'algèbre vectorielle et l'analyse dimensionnelle et d'autres notions mathématiques. Elles traitent des grandeurs physiques de base qui sont utilisées pour l'expression des lois physiques. La deuxième partie traite la cinématique d'un point détaillé. L'objectif est l'étude du mouvement d'un point sans se préoccuper des causes (les forces) qui lui donnent naissance, connaître le système de coordonnées cartésiennes et polaires ou cylindriques, connaître l'expression des vecteurs position, vitesse et accélération dans les systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques, connaître la définition de quelques mouvements particuliers. Dans la dernière partie, Il est proposé d'étudier Le principe d'inertie et les référentiels galiléens, Le principe de conservation de la quantité de mouvement, de donner la définition Newtonienne de la force. Le travail d'une force, La puissance, Energie et collision de particules sont aussi des notions traitées par ce présent ouvrage.

Je souhaite que les étudiants trouveront dans ce support un bon outil de travail qui leur permettra de combler les éventuelles lacunes qui peuvent avoir lieu lors de la prise des notes pendant l'explication du cours ou des travaux dirigés par leurs enseignants. Le lecteur trouvera tout au long de l'ouvrage des points méthodiques et de nombreux exemples d'application, ainsi que des exercices résolus permettant un entrainement efficace afin de faciliter la compréhension de cours et de consolider les connaissances de base.

# Sommaire:

## Chapitre 1 :



## Chapitre 2 :

*CHAPITRE 1*

# *ERREURS ET INCERTITUDES*

# Erreurs et Incertitudes

Le monde de la physique travaille continuellement avec des approximations. Une des raisons en est que toute mesure d'une grandeur physique quelconque est forcément entachée d'erreurs. Il est presque impossible d'effectuer des mesures rigoureusement exactes. Pour prendre conscience du degré d'approximation avec lequel on travaille, on fait une estimation des erreurs qui peuvent avoir été commises dans les diverses mesures et on calcule leurs conséquences dans les résultats obtenus. Ceci constitue le calcul d'erreurs, ou calcul d'incertitudes.

## 1. L'incertitude absolue :

Le résultat G d'une mesure s'écrit :

$$G = x \pm \Delta x$$

$$\mathrm{x} - \Delta x \leq \mathrm{x}_0 \leq \mathrm{x} + \Delta x$$

$$\mathrm{x}_0 : la\ vaie\ valeur ; \quad \Delta x : l'incertitude\ Absolue.$$

**Exemple** :

La température d'un local est de $22 \pm 1(°\mathrm{C})$.

$\mathrm{L'incertitude\ absolue}\ \Delta\theta = 1(°\mathrm{C})$.

Cela veut dire : la température n'est pas inférieure à $21°\mathrm{C}$ ni supérieur à $23(°\mathrm{C})$ .

**Remarque** : lorsqu'on mesure une grandeur, l'incertitude absolue correspond à la plus petite graduation de l'instrument de mesure utilisé.

- L'incertitude relative: $\frac{\Delta x}{x}$: le rapport de l'incertitude absolue sur la valeur mesurée.
- Elle n'a pas d'unité, elle est toujours plus petite que 1.
- On l'exprime en%.

- Elle donne l'exactitude de la mesure.

## 2. Calcul d'incertitudes :

a) **Addition** : R=A+B

$$\Delta R = \Delta A + \Delta B.$$

b) **Soustraction** : R=A−B

$$\Delta R = \Delta A + \Delta B.$$

**Exemple** : Un récipient a une masse $m = 50 \pm 1(g)$. Rempli d'eau, sa masse vaut $M = 200 \pm 1(g)$.

$\text{La masse d'eau qu'il contient: } m_{eau} = M - m$

$m_{eau} = 200 - 50 = 150(g);\ \Delta m_{eau} = \Delta M + \Delta m = 2(g)$

$m_{eau} = 150 \pm 2(g)$

c) **Multiplication** : $R = A \times B$

$$\frac{\Delta R}{\mathrm{R}} = \frac{\Delta A}{\mathrm{A}} + \frac{\Delta B}{\mathrm{B}}$$

d) **Division** : $R = \frac{A}{B}$

$$\frac{\Delta R}{\mathrm{R}} = \frac{\Delta A}{\mathrm{A}} + \frac{\Delta B}{\mathrm{B}}$$

e) **Multiplication et division** : $R = \frac{A \times B}{C}$

$$\frac{\Delta R}{\mathrm{R}} = \frac{\Delta A}{\mathrm{A}} + \frac{\Delta B}{\mathrm{B}} + \frac{\Delta C}{\mathrm{C}}$$

$$\textit{Démonstration}\text{:}\quad R = \frac{A \times B}{C} \Rightarrow \ln R = \ln \frac{A \times B}{C} = \ln A + \ln B - \ln C$$

$$\frac{dR}{R} = \frac{dA}{A} + \frac{dB}{B} - \frac{dC}{C} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta R}{\mathrm{R}} = \frac{\Delta A}{\mathrm{A}} + \frac{\Delta B}{\mathrm{B}} + \frac{\Delta C}{\mathrm{C}}$$

**Exercice :** On mesure le diamètre d et la masse m d'une bille en or :

$$d = 10{,}00 \pm 0{,}01(mm)$$

$$m = 9{,}9 \pm 0{,}1(g)$$

a) Calculer la valeur du volume V de la bille avec son incertitude relative et son incertitude absolue.

b) Calculer la masse volumique de la bille avec son incertitude relative et son incertitude absolue.

**Solution :** On pose r : le rayon de la bille

a) $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 = 523.6(mm^3)$

$$\frac{\Delta V}{\mathrm{V}} = 3\frac{\Delta r}{\mathrm{r}}; \quad d = 2r \Rightarrow \frac{\Delta d}{\mathrm{d}} = \frac{\Delta r}{\mathrm{r}}$$

$$\frac{\Delta V}{\mathrm{V}} = 3\frac{\Delta d}{\mathrm{d}} = 3 \times \frac{0.01}{10} = 0.003 = 0.3\%$$

$$\Delta V = \left(\frac{\Delta V}{\mathrm{V}}\right) \cdot V = 0.003 \times 523.6 = 1.571(mm^3) \simeq 1.6(mm^3)$$

$$\mathrm{V} = 523.6 \pm 1.6(mm^3)$$

b) $\rho = \frac{m}{V}(g/\,cm^3)$

$$V = 523.6\,mm^3 = 0.5236\,cm^3$$

$$\rho = \frac{9.9}{0.5236} = 18.91(g/\,cm^3)$$

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta V}{\mathrm{V}} = \frac{0.1}{9.9} + 0.003 = 0.01 + 0.003 = 0.013 = 1.3\%$$

$$\Delta\rho = \left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right) \cdot \rho = 0.013 \times 18.91 = 0.25(g/\,cm^3)$$

$\rho = 18.9 \pm 0.3(g/\,cm^3)$

Où $\rho = 18.91 \pm 0.25(g/\,cm^3)$: plus précis.

**Exercice :** Soit la relation : $y = y_0 e^{-\omega t}$

Calculer l'incertitude absolue sur y en fonction des incertitudes absolues $\Delta\omega, \Delta t, \Delta y_0$.

**Solution :** $y = y_0 e^{-\omega t} \Rightarrow \ln y = \ln(y_0 e^{-\omega t})$

$\ln y = \ln y_0 + \ln e^{-\omega t} = \ln y_0 - \omega t.$

$d(\ln y) = d(\ln y_0) - d(\omega t).$

$Posons: x = \omega t \Rightarrow \frac{dx}{x} = \omega dt + t d\omega.$

$\frac{dx}{x} = \frac{\omega dt}{\omega t} + \frac{\cancel{t} d\omega}{\omega \cancel{t}} = \frac{dt}{t} + \frac{d\omega}{\omega}$

$\Rightarrow d(\omega t) = dx = x\left(\frac{dt}{t} + \frac{d\omega}{\omega}\right)$

$\frac{dy}{y} = \frac{dy_0}{y_0} - \ \omega t\left(\frac{dt}{t} + \frac{d\omega}{\omega}\right)$

$\frac{\Delta y}{\mathrm{y}} = \frac{\Delta y_0}{y_0} + t\Delta\omega + \omega\Delta \mathrm{t}$

$$\Delta y = y\left(\frac{\Delta y_0}{y_0} + t\Delta\omega + \omega\Delta \mathrm{t}\right)$$

*CHAPITRE 1*

# *GRANDEURS PHYSIQUES*

# Grandeurs Physiques

## 1. Généralités:

### a. Grandeur physique:

On appelle grandeur physique toute propriété de la nature qui peut être quantifiée par la mesure ou par le calcul, et dont les différentes valeurs possibles s'expriment à l'aide d'un nombre accompagné d'une unité de mesure.

**Exemple:** Un temps, une longueur, une masse.

### b. Système International d'unités (SI):

**Le SI est fondé sur un choix de 7 unités de base bien définies et considérées comme indépendantes du point de vue dimensionnel.**

| **Grandeurs de base** | **Unités** | **Symboles** |
|---|---|---|
| Masse | Kilogramme | Kg |
| Longueur | Mètre | m |
| Temps | Seconde | s |
| Intensité du courant électrique | Ampère | A |
| Température | Kelvin | K |
| Quantité de matière | Mole | Mol |
| Intensité lumineuse | Candela | Cd |

## C. Préfixes:

| Facteurs | Noms | Symboles |
|---|---|---|
| $10^3$ | Kilo | k |
| $10^6$ | Méga | M |
| $10^9$ | Giga | G |
| $10^{12}$ | Téra | T |

| Facteurs | Noms | Symboles |
|---|---|---|
| $10^{-3}$ | Milli | m |
| $10^{-6}$ | Micro | $\mu$ |
| $10^{-9}$ | Nano | n |
| $10^{-12}$ | Pico | p |

### d. Constantes fondamentales:

Les constantes fondamentales régissent les théories de la physique les plus générales, comme :

- C la vitesse de la lumière ;
- G la constante gravitationnelle.

Certaines de ces constantes sont fixées comme la vitesse de la lumière et donc de valeur exacte, d'autres sont mesurées comme la constante gravitationnelle et donc de valeur approchée.

## 2. Analyse dimensionnelle :

### a. Dimension d'une grandeur:

Les grandeurs fondamentales du SI vont être désignées par des lettres majuscules :

masse **M** ;longueur **L** ;temps **T** ;intensité du courant électrique **I** ;température **Θ** ;quantité de matière **N** ;intensité lumineuse **J**.

On attribue à toutes les grandeurs dérivées, une dimension qui s'exprime par un produit (avec des puissances entières positives, négatives ou nulles) des dimensions des grandeurs fondamentales.

### b. Équation aux dimensions :

L'équation aux dimensions permet:

- De déterminer, la dimension et l'unité, d'une grandeur dérivée en fonction des dimensions et unités des grandeurs fondamentales.
- D'effectuer des changements d'unités.
- De vérifier l'homogénéité des formules physiques :

  L'équation **A=B** est dite homogène si la dimension de A est égale à la dimension de B.
- De prévoir par une analyse dimensionnelle une formule traduisant une loi physique.

  **Remarque:** l'équation aux dimensions ne nous renseigne pas sur la nature exacte d'une grandeur.

  **Remarque:** la dimension d'une grandeur R est notée: **[R]**

**Exemples:** Prenons par exemple l'expression d'une surface au regard de l'unité de longueur. Nous dirons qu'une surface est *homogène* au carré d'une longueur, ce que l'on traduira par la formule symbolique (dite équation aux dimensions) :

$[S] = [L]^2$

De même, une vitesse v est définie comme le quotient d'une longueur (distance parcourue) par un temps t.

$V=x/t$

On notera que cette écriture symbolique s'applique aussi bien au cas des variables exprimées par des différences finies (discrètes) ou des différentielles (continues).

$v(t)=dx/dt \Rightarrow$ **$[V]= L/T= LT^{-1}$**

Ainsi, on établirait:

**Accélération**: $a(t)= d^2x/dt^2 \Rightarrow$ **$[a]= LT^{-2}$**

**Force**: $F=ma \Rightarrow$ **$[F]= MLT^{-2}$**

**Énergie**: $E=mgh \Rightarrow$ **$[E]= ML^2T^{-2}$**

**Puissance**: $P=dE/dt \Rightarrow$ **$[E]=ML^2T^{-3}$**

**Pression**: $p=F/S \Rightarrow$ **$[p]=ML^{-1}T^{-2}$**

**Exercice 1:** La force de gravitation exprime l'interaction entre deux corps de masse m et m' séparés par une distance r. Son expression est donnée par la relation $F_G=Gmm'/r^2$ ou` la constante $G=6{,}67\ 10^{-11}$SI représente l'intensité de la force gravitationnelle. Déterminer la dimension de G et son unité.

Réponse:

On a $[G] = [F_G\ r^2/\ (mm')] = [F_G\ r^2/m^2] = MLT^{-2}L^2/M^2 = M^{-1}L^3T^{-2}$, d'où $G = 6{,}\ 67\ 10^{-11}\ m^3.s^{-2}.kg^{-1}$.

**Exercice 2:** La surface d'une étoile est animée d'un mouvement de vibration qui renseigne sur sa composition. La fréquence de vibration d'une étoile dépend de plusieurs paramètres. La cohésion d'une étoile étant assurée par les forces de gravitation, on s'attend à devoir faire intervenir :

— Le rayon R de l'étoile

— La masse $M_e$ de l'étoile

— La constante G de gravitation universelle.

Déterminer a, b, c dans l'expression de la fréquence de vibration f en fonction de R, $M_e$ et G :

$f = kR^a M_e^b G^c$

k est une constante sans dimension.

$[f] = T^{-1}$

$[R] = L$

$[M_e] = M$

La dimension d'une force : $[F] = M.L.T^{-2}$ et d'après ce qui précède en exercice 1 : $[G] = M^{-1}L^3\,T^{-2}$

$f = kR^a M_e^b G^c \Rightarrow T^{-1} = 1.L^a M^b (M^{-1}L^3T^{-2})^c$ d'où le système d'équation :

$$\begin{cases} 0 = b - c \quad pour\ M \\ 0 = a + 3c \quad pour\ L \\ -1 = -2c \quad pour\ T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = c \\ a = -3c \\ c = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{3}{2} \\ b = \dfrac{1}{2} \\ c = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

*CHAPITRE 1*

# *CALCUL VECTORIEL*

# Calcul Vectoriel

Dans le cadre de ce chapitre, nous allons rapporter quelques notions de bases liées au calcul vectoriel. La maitrise de ces techniques est nécessaire pour l'assimilation de la mécanique.

## 1) Grandeur Scalaire :

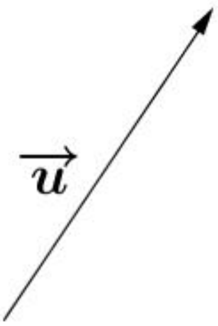
Une grandeur Scalaire est toujours exprimée par une valeur numérique (nombre) suivie de l'unité.

**Exemple** : volume, masse, temps, énergie, …

## 2) Grandeur Vectorielle :

Une Grandeur vectorielle ( ou vecteur ) est caractérisée par trois éléments :

- Sa direction.
- Son sens.
- Sa longueur appelé norme ou module.




Le module ou l'intensité du vecteur :$\|\vec{u}\| = |\vec{u}| = u$

3) **Vecteur unitaire :** c'est un vecteur dont la norme ou le module vaut l'unité.

- Pour tout vecteur $\vec{u}$, on peut définir un vecteur unitaire donnant sa direction et son sens qu'on notera $\vec{e}_u$.

$$\vec{e}_u = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \text{ Ou } \vec{u} = \|\vec{u}\|\vec{e}_u$$

## 4) Vecteurs dans un repère :

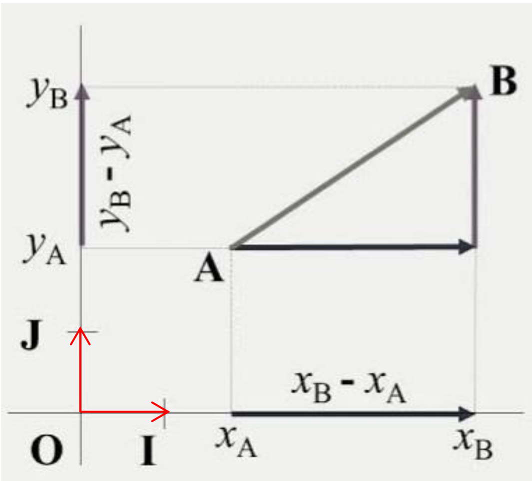
On choisit un repère plan, orthonormé (c.à.d. les deux axes forment un angle de $90°$et les axes sont gradués par unité).

### a) Coordonnées d'un vecteur :

Deux points A et B quelconques

$A(x_A, y_A)$

$B(x_B, y_B)$




$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} : coordonnées\ du\ vecteur\ \overrightarrow{AB}$$

### b) Norme (module) d'un vecteur :

La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$est la longueur AB

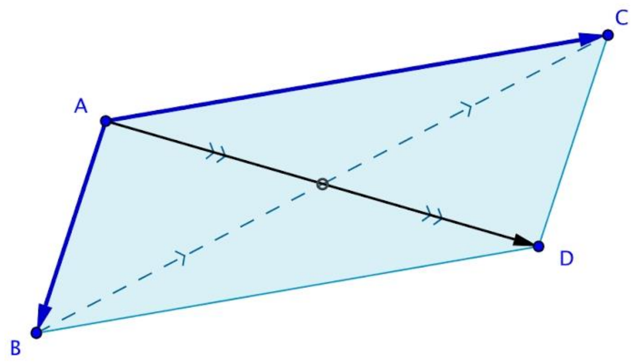
$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

## 5) Opération sur les vecteurs :

### a) Somme de deux vecteurs :

Le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est la somme des deux vecteurs $\overrightarrow{AB}\ et\ \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$




$C'est\ la\ configuration\ du\ parallélogramme$

**Remarque :**

On peut décomposer un vecteur en deux vecteurs en faisant intervenir un point de l'espace :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$$

C'est la loi de Chasles.

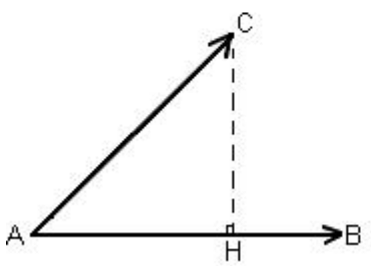
b) **Produit Scalaire de deux vecteurs :**

Le produit scalaire est une opération, permet à partir de deux vecteurs d'obtenir un scalaire, c'est-à-dire un nombre.

Soit deux vecteurs $\overrightarrow{AB}\ et\ \overrightarrow{AC}$qui forment un angle $\theta = \left(\overrightarrow{AB}\ ,\overrightarrow{AC}\right)$

Le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ est :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \cdot \cos\theta$$




$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH}$$

Le produit scalaire est la projection de $\overrightarrow{AC}\ sur\ \overrightarrow{AB}$.

**Remarques** :

- $\vec{u}\cdot\vec{u}=u^2$(car $\theta=(\vec{u},\vec{u})=0$)
- $\vec{u}\perp\vec{v}\Rightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ (car $\theta=(\vec{u},v)=90°$).
- Si $\vec{u}=\begin{pmatrix}u_x\\u_y\\u_z\end{pmatrix}$ ; $\vec{v}=\begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix}\Rightarrow\quad\vec{u}\cdot\vec{v}=u_xv_x+u_yv_y+u_zv_z$ :
- C'est l'expression analytique du produit scalaire (sachant que les vecteurs unitaires sont perpendiculaires entre eux).
- Le produit scalaire est commutatif : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
- $\vec{x}=\vec{u}+\vec{v}\ \Rightarrow\|\vec{x}\|=\sqrt{\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos\theta}$ (avec θ=$(\vec{u},\vec{v})$)
- $\vec{x}=\vec{u}-\vec{v}\ \Rightarrow\|\vec{x}\|=\sqrt{\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos\theta}$

**Exercice** : Dans un repère orthonormé d'origine O et de base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on définit les trois vecteurs suivants :

$$\vec{v_1}=3\vec{\imath}-4\vec{\jmath}+4\vec{k}$$
$$\vec{v_2}=2\vec{\imath}+3\vec{\jmath}-4\vec{k}$$
$$\vec{v_3}=5\vec{\imath}-\vec{\jmath}+3\vec{k}$$

1. Calculer les modules de $\vec{v_1},\vec{v_2}\ et\ \vec{v_3}$?
2. Calculer les composantes ainsi que les modules des vecteurs :
   $\vec{A}=\vec{v_1}+\vec{v_2}+\vec{v_3}$; $\vec{B}=2\vec{v_1}-\vec{v_2}+\vec{v_3}$
3. Déterminer le vecteur unitaire porté par $\vec{C}=\vec{v_1}+\vec{v_3}$
4. Calculer le produit scalaire $\vec{v_1}\cdot\vec{v_3}$, en déduire l'angle entre les deux vecteurs?

   **Solution :**

1. $\|\vec{v_1}\|=6.40$ ; $\|\vec{v_2}\|=5.38$ ; $\|\vec{v_3}\|=5.91$
2. $\vec{A}=10\vec{\imath}-2\vec{\jmath}+3\vec{k}$ ; $\vec{B}=9\vec{\imath}-12\vec{\jmath}+15\vec{k}$

3. $\vec{C} = 8\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} + 7\vec{k} \;\Rightarrow \|\vec{C}\| = \sqrt{64+25+49} = \sqrt{138}$

$$\overrightarrow{u_C} = \frac{8}{\sqrt{138}}\vec{\imath} - \frac{5}{\sqrt{138}}\vec{\jmath} + \frac{7}{\sqrt{138}}\vec{k}$$

4. $\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_3} = x_1.x_3 + y_1.y_3 + z_1.z_3 = 31$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_3}}{v_1 \cdot v_3} = \frac{31}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{35}} = 0.176 \Rightarrow \alpha \simeq 79.86°$$

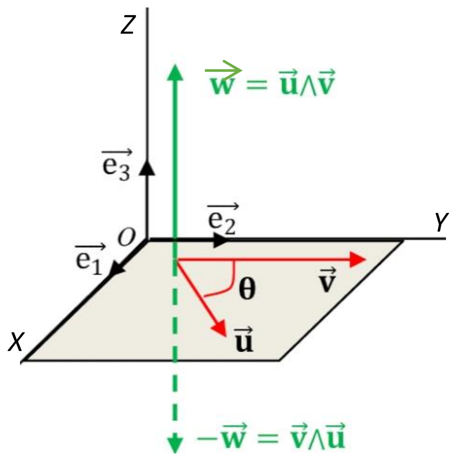
c) **<u>Le produit Vectoriel de deux vecteurs :</u>**

c'est un produit qui, partant de deux vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$, nous donne un troisième vecteur orthogonal aux deux premiers.

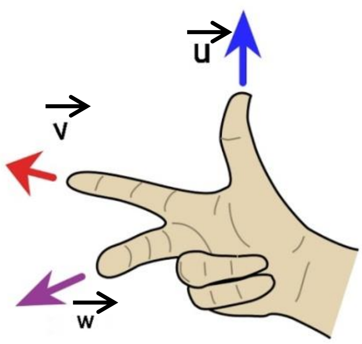
$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$$

**Caractéristiques du vecteur $\vec{w}$ :**

**Direction:** $\vec{w}$ est perpendiculaire au plan formé par les deux vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$

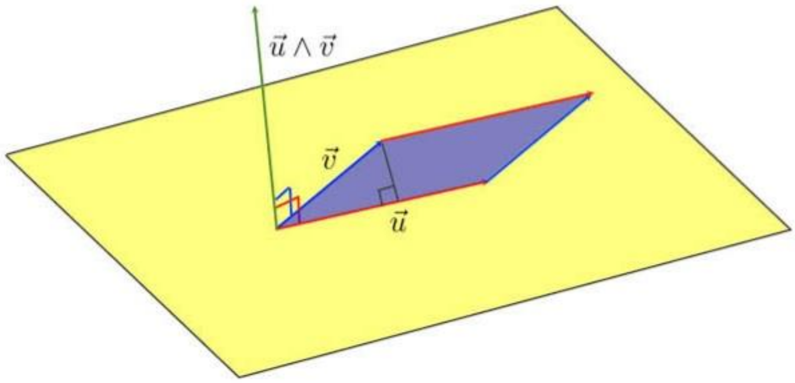



**Sens:** le sens de $\vec{w}$ est déterminé par la règle de la main droite figure en bas, ou régle du bonhomme d'ampère, du tirebouchon).



**Module:** $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$

**Remarque** : la grandeur $\|\vec{w}\|$ représente l'aire du parallélogramme formé par les deux vecteurs.




**Propriétés :**

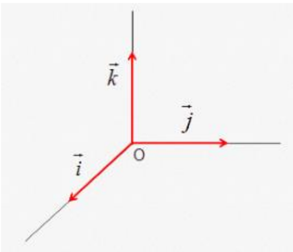
- Si $\vec{u} \parallel \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$
- Si $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- $\vec{v}_1 \wedge (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3) \neq (\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2) \wedge \vec{v}_3$ : Non associatif
- $\vec{v}_1 \wedge (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = (\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2) + (\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_3)$: Distributif

Dans un repère orthonormé :$\left(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$

$$\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k} \quad ; \quad \vec{\jmath} \wedge \vec{\imath} = -\vec{k} \quad ; \quad \vec{\imath} \wedge \vec{\imath} = \vec{0}$$

$$\vec{\jmath} \wedge \vec{k} = \vec{\imath} \quad ; \quad \vec{k} \wedge \vec{\jmath} = -\vec{\imath} \quad ; \quad \vec{\jmath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{0}$$

$$\vec{k} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath}\,; \quad \vec{\imath} \wedge \vec{k} = -\vec{\jmath} \quad ; \quad \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$$




**Comment calculer le produit vectoriel de deux vecteurs :**

$$\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

$$\vec{v} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k}$$

**Méthode directe :**

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \left(x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}\right)\wedge\left(x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}+z'\vec{k}\right)$$

$$= x\vec{\imath}\wedge\left(x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}+z'\vec{k}\right)+y\vec{\jmath}\wedge\left(x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}+z'\vec{k}\right)+$$

$$z\vec{k}\wedge\left(x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}+z'\vec{k}\right)$$

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = xx'\cancelto{0}{\vec{\imath}\wedge\vec{\imath}}+xy'\vec{\imath}\wedge\vec{\jmath}+xz'\vec{\imath}\wedge\vec{k}+yx'\vec{\jmath}\wedge\vec{\imath}+yy'\cancelto{0}{\vec{\jmath}\wedge\vec{\jmath}}+yz'\vec{\jmath}\wedge\vec{k}$$

$$+zx'\vec{k}\wedge\vec{\imath}+zy'\vec{k}\wedge\vec{\jmath}+zz'\cancelto{0}{\vec{k}\wedge\vec{k}}$$

$$= xy'\vec{k}+xz'(-\vec{\jmath})+yx'\left(-\vec{k}\right)+yz'\vec{\imath}+zx'\vec{\jmath}+zy'(-\vec{\imath})$$

$$\boxed{\vec{u}\wedge\vec{v} = (yz'-zy')\vec{\imath}+(zx'-xz')\vec{\jmath}+(xy'-yx')\vec{k}}$$

**Méthode des déterminants :**

$$\vec{u} = x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}$$

$$\vec{v} = x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}+z'\vec{k}$$

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & -\vec{\jmath} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= (yz'-zy')\vec{\imath}-(xz'-zx')\,\vec{\jmath}+(xy'-yx')\,\vec{k}$$

**Exercice**

$\vec{u} = 2\vec{\imath}+\vec{\jmath}-\vec{k}$ et $\vec{v} = \vec{\imath}-2\vec{k}$

Calculer $\vec{u}\wedge\vec{v}$ et déduire l'angle$(\vec{u},\vec{v}) = \theta$?

**Solution :**

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = -2\vec{\imath}+3\vec{\jmath}-\vec{k}$$

$$\sin\theta = \frac{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|} = \frac{\sqrt{(-2)^2+(3)^2+(-1)^2}}{\sqrt{6}\times\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{30}} = \sqrt{\frac{7}{15}} = 0.683 \Rightarrow$$

$$\theta \simeq 43.06^\circ$$

**Exercice :**

Soient $A(1,0); B(2,3); C(6,3)\ et\ D(5,0)$quatre points du plan.

1) Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.
2) Calculer son aire.

*CHAPITRE 1*

# *REPERES*

# *ET SYSTEMES DE CORDONNEES*

# Repères et Systèmes de Coordonnées

Un système de coordonnées est une paramétrisation, à un certain temps t, des points du référentiel $\mathbf{R}$ au moyen de trois nombres réels. Pour un référentiel donné il existe une infinité de systèmes de coordonnées. Souvent un problème physique est plus facile à traiter dans un système de coordonnées particulier que dans un autre, il est donc très important de bien choisir le système de coordonnées dans lequel nous allons décrire et traiter notre problème.

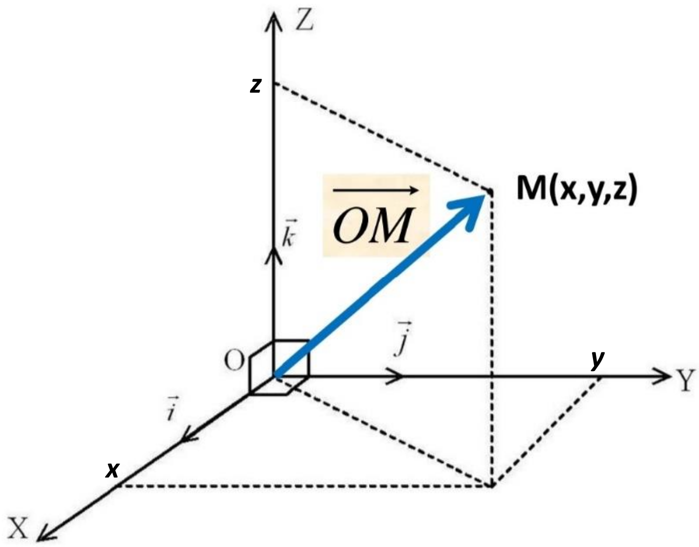
## 1) Coordonnées cartésiennes :

Pour décrire la position d'un point M, on utilise classiquement le système de coordonnées cartésiennes formé par le repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

On écrit le **vecteur position** :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

$x$: Abscisse ; $y$: ordonnée ; $z$:altitude

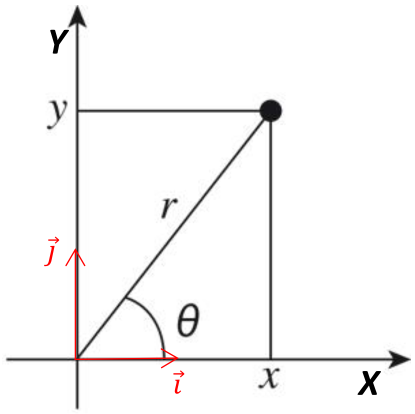



La module de $\overrightarrow{OM}$: $\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$

**Remarque :**

a. Si le mouvement s'effectue dans le plan (*XOY*) :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$




$$\overrightarrow{OM} = r\cos\theta\vec{\imath} + \mathrm{r}\sin\theta\,\vec{\jmath}$$

b. Si le mouvement est rectiligne : $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} = r$ (Repère rectiligne).

## Le gradient :

**Définitions :**

Fonction scalaire :

Exemple : $f(x, y, z) = x^2 + y - 2z$

$f$ est un champ scalaire si $\forall x, y, z :$ $f(x, y, z)$ est un scalaire

Fonction vectorielle :

**Exemple :** $\vec{f}(x, y, z) = x\vec{\imath} - y^2\vec{\jmath} + \vec{k}$

$\forall(x, y, z\,)\vec{f}$est un vecteur.

$\vec{f}$est un champ vectoriel si $\forall x, y, z :$ $f$ est un vecteur.

Operateur différentiel vectoriel nabla $\vec{\nabla}$ :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ : *les* dérivées partielles par rapport à $x, y$ *et* $z$.

**Le gradient :** si $f$ est une fonction scalaire, on dit que le gradient de $f$ est un vecteur défini comme suit :

$$\overrightarrow{grad}f = \vec{\nabla}(f) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

**Exemple** : $f(x, y, z) = 2xy^2z^3$

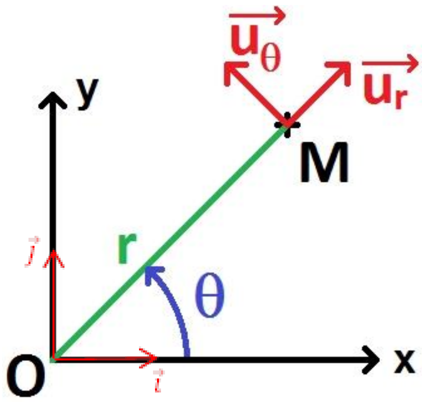
Calculer $\overrightarrow{grad}f$?

$$\overrightarrow{grad}f = \vec{\nabla}(f) = \frac{\partial(2xy^2z^3)}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial(2xy^2z^3)}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial(2xy^2z^3)}{\partial z}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{grad}f = 2y^2z^3\vec{\imath} + 4xyz^3\vec{\jmath} + 6xy^2z^2\vec{k}$$

## 2) Les coordonnées polaires : (repère mobile)

Quand le mouvement est plan, on peut repérer le point M par ses coordonnées$(r, \theta)$.




Coordonnées polaires $\begin{cases} r : rayon \\ \theta : Angle\ polaire \end{cases}$

Le vecteur position s'écrit : $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$

On choisit une base :$(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.

$$\vec{u}_r \parallel \vec{r} \text{ et } \vec{u}_\theta \perp \vec{r} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$$

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath} \\ \vec{u}_\theta = -\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \Rightarrow \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

**Exercice :**

Convertir le vecteur $\overrightarrow{OM}$ du système de coordonnées cartésiennes vers celui des coordonnées polaires.

$$\overrightarrow{OM} = X\vec{\imath} + Y\vec{\jmath}$$

$$\vec{u}_r = \cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath} \quad \Rightarrow \quad \sin\theta\,\vec{u}_r = \sin\theta\cos\theta\vec{\imath} + \sin^2\theta\,\vec{\jmath}$$

$$\vec{u}_\theta = -\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta\,\vec{u}_\theta = -\sin\theta\cos\theta\,\vec{\imath} + \cos^2\theta\vec{\jmath}$$

La somme des deux équations donne :

$$\sin\theta\,\vec{u}_r + \cos\theta\,\vec{u}_\theta = \vec{\jmath}$$

On refait la même chose :

$$\cos\theta\,\vec{u}_r = \cos^2\theta\vec{\imath} + \sin\theta\cos\theta\,\vec{\jmath}$$

$$\sin\theta\,\vec{u}_\theta = -\sin^2\theta\vec{\imath} + \sin\theta\cos\theta\vec{\jmath}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\imath} = \cos\theta\,\vec{u}_r - \sin\theta\,\vec{u}_\theta$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = X\vec{\imath} + Y\vec{\jmath} = X(\cos\theta\,\vec{u}_r - \sin\theta\,\vec{u}_\theta) + Y(\sin\theta\,\vec{u}_r + \cos\theta\,\vec{u}_\theta)$$

$$\overrightarrow{OM} = (X\cos\theta + Y\sin\theta)\vec{u}_r + (-X\sin\theta + \mathrm{Y}\cos\theta)\vec{u}_\theta$$

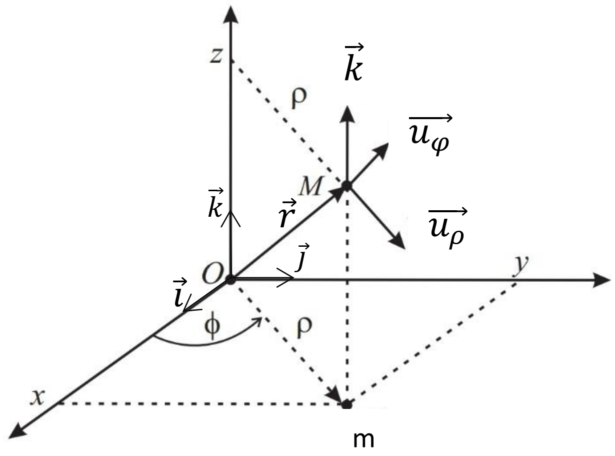
## 3) Coordonnées cylindriques :

Quand le mouvement est spatial, on repère le mobile M par trois coordonnées$(\rho, \varphi, z)$.

$$\rho : rayon\ polaire.$$

$$\varphi : angle\ polaire.$$

$$z : altitude.$$




$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM}$$

La base des Coordonnées cylindriques :$(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{k})$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = \rho\, \vec{u}_\rho + z\, \vec{k}$$

$$\vec{u}_\rho = \cos\varphi \vec{\imath} + \sin\varphi\, \vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{OM} = \rho \cos\varphi \vec{\imath} + \rho \sin\varphi\, \vec{\jmath} + z\, \vec{k}$$

$$\overrightarrow{OM} = \quad x\vec{\imath} \quad + \quad y\vec{\jmath} \quad + z\, \vec{k}$$

$$\begin{cases} x = \rho \cos\varphi \\ y = \rho \sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

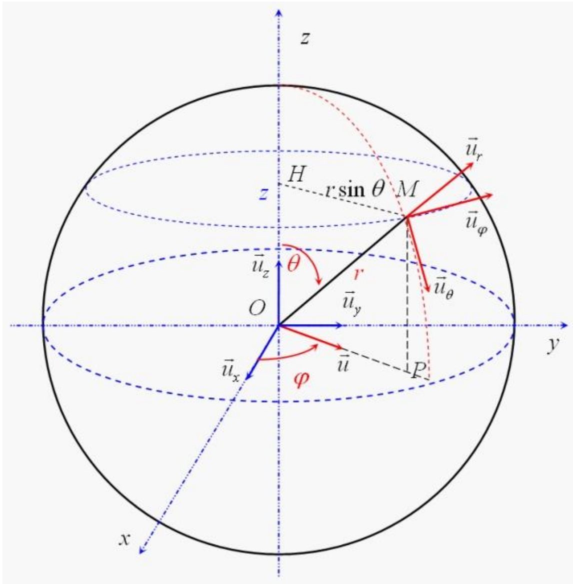
**Remarque :**

Si $z = 0 \Rightarrow$ on retrouve ainsi les coordonnées polaires qui ne sont qu'un cas particulier des coordonnées cylindriques.

## 4) Coordonnées sphériques :

On repère le mobile par ses trois coordonnées : $(r, \theta, \varphi)$

$r$: Rayon polaire; $\theta$: Azimut; $\varphi$: Co-altitude.




La base est $(r, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_\theta)$

$$\begin{cases} x = \rho \cos\varphi \\ y = \rho \sin\varphi \\ z = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$$

$\overrightarrow{u_x} = \vec{\imath}$ *et* $\overrightarrow{u_y} = \vec{\jmath}$ *et* $\overrightarrow{u_z} = \vec{k}$ (Dans le dessin)

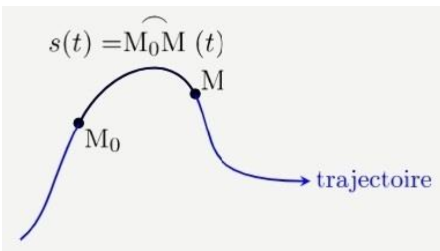
$$\overrightarrow{OM} = r\cos\theta\sin\varphi\,\vec{\imath} + r\sin\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} + r\cos\theta\,\vec{k}$$

## 5) Coordonnées curvilignes :

On repère un mobile M à l'aide de sous abscisse curviligne.

$$\widehat{OM} = S$$

L'abscisse curviligne est S : longueur de l'arc S (distance séparant O à M).



CHAPITRE 2

# CINEMATIQUE

## CARACTERISTIQUES DU MOUVEMENT

# Cinématique

## Caractéristiques du mouvement

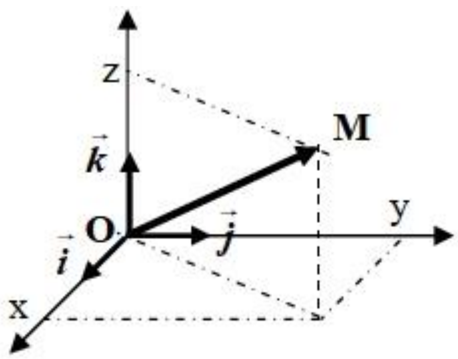
La cinématique est l'étude des mouvements sans se soucier des causes responsables de ces mouvements.

Le point matériel est tous corps matériel dont les dimensions sont nuls par rapport à la distance parcourue.

### 1) Position du mobile :

La position d'un point matériel M à un temps t dans un repère $R\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ est donnée par le vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$$




### 2) Les équations horaires :

Si les coordonnées d'un point matériel sont indépendantes du temps, on dit que le point M est au : **REPOS**

Si M est en mouvement, ces coordonnées dépendent du temps

$$\Rightarrow x(t);\ y(t);\ z(t)$$

Les équations $x = f(t); y = g(t);\ z = h(t)$s'appellent **les équations horaires**.

**Exemple :**

$$\overrightarrow{OM} = (t^3 - 3t)\vec{\imath} - 3t^2\vec{\jmath} + (t^3 + 3t)\vec{k}$$

- Ecrire les équations horaires ?
- Donner la position de M à l'instant $t = 0s$ ?

**Solution** : les équations horaires :

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$$

$$\begin{cases} x(t) = t^3 - 3t \\ y(t) = -3t^2 \\ z(t) = t^3 + 3t \end{cases}$$

$$t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = 0\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 0\vec{k}\ M(0,0,0)\ l'origine$$

**Trajectoire :**

C'est l'ensemble des positions de M au cours de son mouvement. La trajectoire est une équation qui dépend seulement des coordonnées. Elle ne dépend pas du temps. (Pour trouver l'équation de la trajectoire, on commence par éliminer le temps)

**Exemple :** les équations horaires d'un point mobile M sont :

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = 3t^2 + 2t \end{cases}$$

- Trouver l'équation de la trajectoire ?

**Solution** : $x = t \Rightarrow z = 3x^2 + 2x$ c'est l'équation d'une parabole.

**Exemple** : le mouvement d'un point matériel est défini par ses deux équations horaires : $\begin{cases} x = a\sin(\omega t + \varphi) \\ y = a\cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$

- Ecrire l'équation de la trajectoire et déterminer sa nature ?

**Solution** : $x^2 = a^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$

$$y^2 = a^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$x^2 + y^2 = a^2(\sin^2(\omega t + \varphi) + a^2 \cos^2(\omega t + \varphi))$$

$$x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow (x-0)^2 + (y-0)^2 = a^2$$

On trouve une équation d'un cercle de centre (0,0) et de rayon $R = a$

**<u>Déplacement:</u>** Dans l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$, le mobile passe de $\overrightarrow{OM}$ vers $\overrightarrow{OM}'$.

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OM'} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\,\vec{k}$$

Le Déplacement : $\overrightarrow{\Delta r} = \Delta\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}' - \overrightarrow{OM} = \begin{cases} x' - x \\ y' - y \\ z' - z \end{cases}$

## 3) <u>Vecteur vitesse :</u>

La vitesse est le rapport de la distance sur le temps.

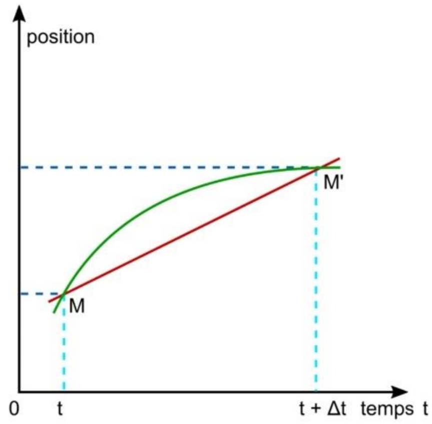
$$v = \frac{d}{t}$$

### a) <u>Vecteur vitesse moyenne :</u>

A l'instant $t$ →le mobile est au point M.

A l'instant $t'$ →le mobile est au point$M'$.

$\overrightarrow{MM'}$: S'appelle le vecteur déplacement.




La vitesse moyenne de M entre l'instant t et $t'$ est :

$$\vec{v}_{moy} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{t'-t} = \frac{\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}}{t'-t}$$

Son module : $\boldsymbol{v_{moy}} = \frac{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{MM'}}\right|}{\boldsymbol{\Delta t}}$

**b) Vecteur vitesse instantanée :**

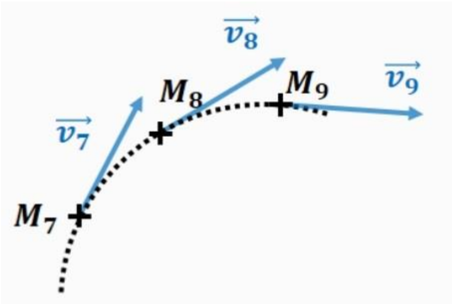
$$\vec{v}_t = \lim_{t\to t'} \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}' - \overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\boldsymbol{t'-t}} = \lim_{t\to t'} \frac{\boldsymbol{\Delta}\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\boldsymbol{\Delta t}} = \frac{\boldsymbol{d}\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\boldsymbol{dt}}$$

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \frac{\boldsymbol{d}\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\boldsymbol{dt}}$$

Le vecteur vitesse instantanée $\vec{\boldsymbol{v}}$ est la dérivée du vecteur position par rapport au temps.

**Remarque :**

Le vecteur vitesse instantanée $\vec{v}_t$ est porté par la tangente à la trajectoire au point M, il est toujours orienté dans le sens du mouvement.




**Remarque :**

**Notation de Newton** : la dérivée de $x$ par rapport au temps s'écrit: $\dot{\boldsymbol{x}}$.

**Notation de Leibnitz**: la dérivée de $x$ par rapport au temps s'écrit: $\boldsymbol{\frac{dx}{dt}}$.

Si $\overrightarrow{OM} = \vec{\boldsymbol{r}} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\,\vec{k} \Rightarrow \qquad \vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dx}{dt}\vec{k}$

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k}$$

**c) Module du vecteur vitesse instantanée :**

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

Dans le système international (SI) : la vitesse est calculée en $m/s$ où $ms^{-1}$

**Exemple :**

Un mobile M se déplace suivant ces coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{2}\cos\frac{t}{2} \\ y(t) = 2\sqrt{2}\sin\frac{t}{2} \end{cases}$$

- Ecrire le vecteur vitesse de M.

**Solution :**

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{t}{2} \\ \dot{y} = \sqrt{2}\cos\frac{t}{2} \end{cases}$$

$$\vec{v}_{(t)} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{t}{2}\right)\vec{\imath} + \left(\sqrt{2}\cos\frac{t}{2}\right)\vec{\jmath}$$

### 4) Le vecteur accélération :

L'accélération est la variation de la vitesse par rapport au temps.

$$a = \frac{v}{t}$$

#### a) Vecteur accélération moyenne :

$$\vec{a}_{moy} = \frac{\vec{v}' - \vec{v}}{t' - t} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{a}_{moy} = \frac{\|\Delta\vec{v}\|}{\Delta t}$$

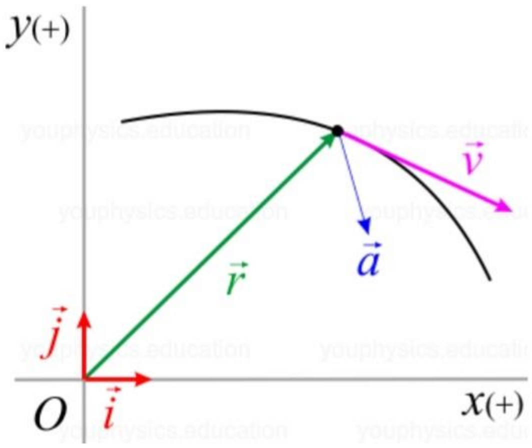
#### b) Vecteur accélération instantanée :

Vecteur accélération instantanée est définie comme étant la dérivée du vecteur vitesse instantanée par rapport au temps.

$$\vec{a}_{moy} = \lim_{t \to t'} \frac{\vec{v}' - \vec{v}}{t' - t} = \lim_{t \to t'} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\vec{a}_{moy} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}$$

**Remarque** : Le vecteur accélération est toujours dirigé vers la partie concave de la trajectoire.




Le module du vecteur accélération: $a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$

$$a = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

# Résumé :

Dans le repère cartésien :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

**Vitesse**

$$\vec{v} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_z\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k}$$

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} \\ v_z = \dfrac{dz}{dt} \end{cases}$$

**Accélération :**

$$\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\vec{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

$$\vec{a} = \dot{v}_x\vec{\imath} + \dot{v}_y\vec{\jmath} + \dot{v}_z\vec{k}$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k}$$

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{d^2y}{dt^2} \\ a_z = \dfrac{dv_z}{dt} = \dfrac{d^2z}{dt^2} \end{cases}$$

**Remarques :**

- Le sens du mouvement est bien le sens du vecteur vitesse $\vec{v}$.
- Le mouvement est accéléré $\Leftrightarrow \vec{a}.\vec{v} > 0$
- Le mouvement est décéléré (retardé) $\Leftrightarrow \vec{a}.\vec{v} < 0$

**Exemple** :

Le vecteur position du point M s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = 2t^2\vec{\imath} + (4t-5)\vec{\jmath} + t^3\vec{k}$$

- En déduire le vecteur vitesse, l'accélération et calculer leurs modules.

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OM} = 2t^2\vec{\imath} + (4t-5)\vec{\jmath} + t^3\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = 4t\,\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 3t^2\vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = 4\,\vec{\imath} + 6t\,\vec{k}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{16t^2 + 16 + 9t^4}_{(m/s)}\ ;\ \|\vec{a}\| = \sqrt{36t^2 + 16}_{(m/s^2)}$$

**Exercice :**

Les équations horaires d'un mobile m sont :

$$\begin{cases} x(t) = \ln t \\ y(t) = t + \dfrac{1}{t} \end{cases}$$

- Ecrire l'équation de la trajectoire.
- Calculer les valeurs algébriques de la vitesse et de l'accélération.

Solution:

$x(t) = \ln t \Rightarrow t = e^x \Rightarrow y = e^x + e^{-x}$ Équation de la trajectoire.

$$\vec{v}\begin{pmatrix} 1/t \\ 1 - \dfrac{1}{t^2} \end{pmatrix};\ \vec{a}\begin{pmatrix} -1/t^2 \\ +\dfrac{2}{t^3} \end{pmatrix} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{1}{t^2} + \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)^2}\ ; a = \sqrt{\frac{1}{t^4} + \frac{4}{t^6}}$$

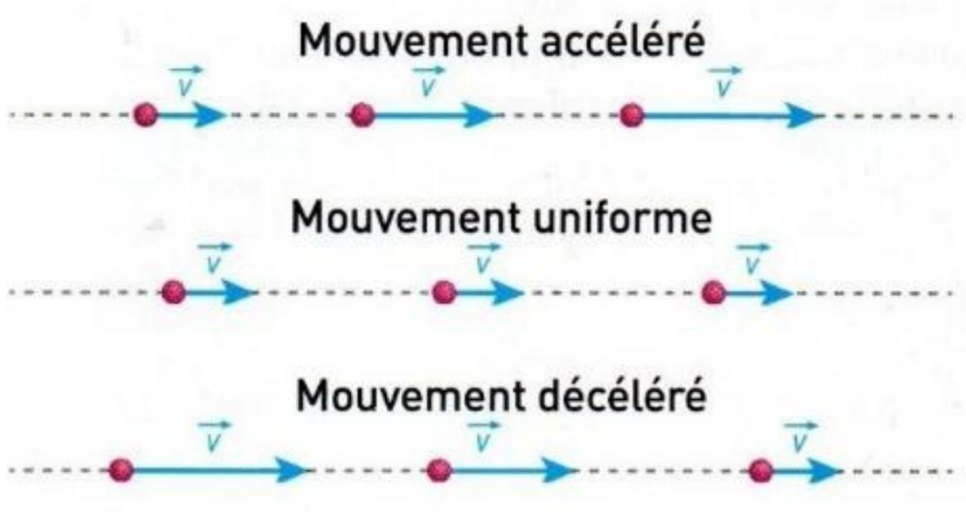
*CHAPITRE 2*

# *MOUVEMENT RECTILIGNE*

# Mouvement Rectiligne

Un mouvement est rectiligne si sa trajectoire est une droite. On choisit un repère$(O, \vec{\imath})$.

Le vecteur position s'écrit : $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath}$




Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire : $\vec{v} = v_x\vec{\imath}$

L'accélération est aussi portée sur l'axe du repéré $\vec{a} = a_x\vec{\imath}$

Le vecteur vitesse se dirige toujours vers le sens du mouvement. Si le mouvement est accéléré ; le module du vecteur vitesse croit. Si le mouvement est uniforme ; le module de la vitesse reste constant. Dans le cas d'un mouvement décéléré, le module de la vitesse décroit en fonction du temps.

## 1) Mouvement rectiligne uniforme :

Un point matériel est en mouvement rectiligne uniforme si la trajectoire est une droite et le vecteur vitesse est constant **v=c^te^**. (Cela veut dire que l'accélération est nulle).

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{\imath} = \vec{0}$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} = v_x\vec{\imath}$$

$$\Rightarrow \ \frac{dx}{dt} = v_x$$

$$\Rightarrow dx = v_x dt$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v_x dt; \ v_x = cte$$

$$\Rightarrow x - x_0 = v_x(t - t_0)$$

L'instant initial : $t_0 = 0 \Rightarrow x = v_x t + x_0$

Les équations horaires du mouvement rectiligne uniforme sont:

$$\begin{cases} x = v_x t + x_0 \\ v_x = cte \\ a_x = 0 \end{cases}$$

## 2) **Mouvement rectiligne uniformément varié :**

C'est un mouvement dont la trajectoire est une droite et le vecteur accélération est constant, porté par la trajectoire.

L'accélération est constante : $\vec{a} = \overrightarrow{cte}$

$$\vec{a} = a_x \vec{\imath} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{\imath}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \Rightarrow \ dv_x = a_x dt$$

$$\Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv_x = a_x \int_{0}^{t} dt \Rightarrow v_x = a_x t + v_0$$

$$\vec{v} = v_x \vec{\imath} = \frac{dv_x}{dt}\vec{\imath} \Rightarrow dx = v_x dt$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{0}^{t} v_x dt \Rightarrow x - x_0 = \int_{0}^{t} (a_x t + v_0) dt = a_x \int_{0}^{t} t\, dt + v_0 \int_{0}^{t} dt$$

$$x = \frac{a_x}{2} t^2 + v_0 t + x_0$$

Les équations horaires du mouvement rectiligne uniformément varié sont :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} a_x t^2 + v_0 t + x_0 \\ v_x = a_x t + v_0 \\ a_x = cte \end{cases}$$

On peut aussi calculer la relation directe entre la position et la vitesse :

$$t = \frac{v_x - v_0}{a_x}$$

$$x = \frac{a_x}{2}\left(\frac{v_x - v_0}{a_x}\right)^2 + v_0\left(\frac{v_x - v_0}{a_x}\right) + x_0$$

$$x = \frac{1}{2}\frac{\cancel{a_x}}{\cancel{a_x^2}}({v_x}^2 + {v_0}^2 - 2v_0v_x) + \frac{1}{a_x}v_0v_x - \frac{{v_0}^2}{a_x} + x_0$$

$$x - x_0 = \frac{1}{2a_x}{v_x}^2 + \frac{1}{2a_x}{v_0}^2 - \cancel{\frac{2v_0v_x}{2a_x}} + \cancel{\frac{1}{a_x}v_0v_x} - \frac{{v_0}^2}{a_x}$$

$$x - x_0 = \frac{1}{2a_x}{v_x}^2 - \frac{1}{2a_x}{v_0}^2$$

$$\boxed{2a_x(x - x_0) = {v_x}^2 - {v_0}^2}$$

**3)**

## 4) Mouvement rectiligne sinusoïdal :

Un mouvement rectiligne sinusoïdal est un mouvement dont la trajectoire est portée par une droite et l'équation horaire est de la forme :

$$\boldsymbol{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

A : amplitude ou l'élongation maximale.

$x$: L'élongation.

$\omega$: Pulsation.

$\varphi$: Phase initiale.

Vitesse : $\boldsymbol{v = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)}$

Accélération : $\boldsymbol{a = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x}$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \Rightarrow$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad \text{(Équation différentielle)}$$

Cette équation différentielle décrit le mouvement rectiligne sinusoïdal d'un corps M.

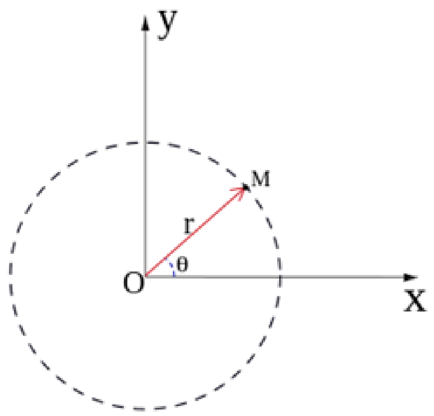
*CHAPITRE 2*

# *MOUVEMENT DANS LE PLAN*

# Mouvement Dans le Plan

Si la trajectoire appartient à un plan → Coordonnées cartésiennes
→ Coordonnées polaires

## 1) Etude du mouvement en coordonnées polaires :




### a) Position du mobile :

$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ (En coordonnées cartésiennes)

Le vecteur position en coordonnées polaires s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\,\overrightarrow{u_r}$$

$\overrightarrow{u_r} = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath} \Rightarrow$

$$\overrightarrow{OM} = r\cos\theta\,\vec{\imath} + r\sin\theta\,\vec{\jmath}$$

$\theta = f(t)\,, et\; r = g(t)$

### b) Vitesse :

$$\dot{\overrightarrow{OM}} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath}$$

$\overrightarrow{u_r} = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}\,;\ \overrightarrow{u_\theta} = -\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}$

$$\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\sin\theta\vec{\imath} + \frac{d\theta}{dt}\cos\theta\,\vec{\jmath} = (-\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}).\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_\theta} = \dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$

$$\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\cos\theta\,\vec{\imath} - \frac{d\theta}{dt}\sin\theta\,\vec{\jmath} = -\frac{d\theta}{dt}(\cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath})$$

$$\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_r} = -\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_r}$$

$$\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r} \Rightarrow \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{u_r} + r\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$$

La vitesse a deux composantes :

- Vitesse radiale : $\overrightarrow{v_r} = \dot{r}\overrightarrow{u_r}$
- Vitesse transversale $\vec{v}_\theta = r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$

Notons que les vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_r}\ et\ \overrightarrow{u_\theta}$ sont perpendiculaires entre eux donc :

Le module de la vitesse : $|\vec{v}| = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta}\,)^2}$

### c) L'accélération :

En coordonnées cartésiennes : $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k}$

En coordonnées polaires :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{r}\overrightarrow{u_r} + \dot{r}\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} + r\,\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + r\dot{\theta}\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt}$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\overrightarrow{u_r} + \dot{r}\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} + r\,\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} - r\dot{\theta}^{\,2}\overrightarrow{u_r}$$

$$\vec{a} = \underbrace{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^{\,2})\overrightarrow{u_r}}_{\overrightarrow{a_r}} + \underbrace{(2\dot{r}\dot{\theta}\, + r\,\ddot{\theta})\overrightarrow{u_\theta}}_{\overrightarrow{a_\theta}}$$

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_\theta}$$

L'accélération a deux composantes :

- Accélération radiale : $\overrightarrow{a_r} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^{\,2})\overrightarrow{u_r}$
- Accélération transversale : $\overrightarrow{a_\theta} = (2\dot{r}\dot{\theta}\, + r\,\ddot{\theta})\overrightarrow{u_\theta}$

Le module de l'accélération : $\vec{a} = \sqrt{\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^{\,2}\right)^2 + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta}\right)^2}$

## Cas particulier : le mouvement circulaire

Si le mouvement est circulaire cela veut dire que la trajectoire est un Cercle

$$\Rightarrow \ \mathrm{r = R = Cte}$$

$$\Rightarrow \dot{r} = 0\ ;\ \ddot{r} = 0$$

$$le\ vitesse\ devient : \vec{v} = R\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$$

L'accélération à deux composantes : $\vec{a} = \underbrace{-R\dot{\theta}^{\,2}\overrightarrow{u_r}}_{\overrightarrow{a_N}} + \underbrace{R\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}}_{\overrightarrow{a_T}}$

L'accélération normale : $\overrightarrow{a_N} = -R\dot{\theta}^{\,2}\overrightarrow{u_r} = -\overrightarrow{a_r}$

$$a_N = a_r = R\dot{\theta}^2$$

L'accélération tangentielle : $\overrightarrow{a_T} = \overrightarrow{a_\theta} = R\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$

$$a_T = a_\theta = R\ddot{\theta}$$

Remarques :

- $\overrightarrow{a_N}$ est portée par la normale à la trajectoire de M, dirigée vers le centre. Elle indique la variation de la direction de la vitesse.
- $\overrightarrow{a_T}$ est portée la tangente à la trajectoire de M, elle indique la variation du module de la vitesse.

**Le cas d'un mouvement circulaire uniforme :**

La vitesse est constante ⇒ $\dot{\theta} = \omega = cte$ vitesse angulaire($rad/s$).

$$v = R\omega$$

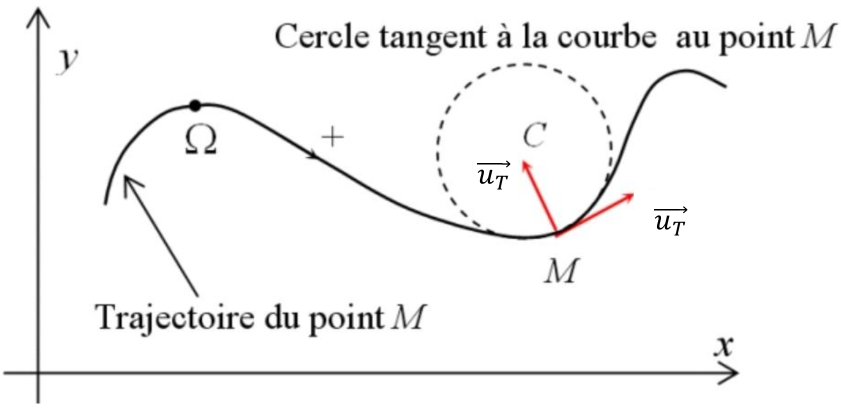
$$a = R\omega^2 = a_r = a_N$$

$$v = R\omega \Rightarrow \omega = {}^{v}/_{R} \Rightarrow a = \frac{R\,v^2}{R^2} = \frac{v^2}{R}$$

$$v = R\omega\ ;\quad a = R\omega^2 = \frac{v^2}{R}$$

## 2) Base de Frenet :

Si la trajectoire est plane, on peut lui attacher un repère $(M, \overrightarrow{u_T}, \overrightarrow{u_N})$ appelé : Repère de Frenet.




C'est un repère mobile qui se déplace avec le mobile M.

Les caractéristiques du repère de Frenet sont :

- Son origine est le point mobile M.
- Le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_T}$ est tangent à la trajectoire en M et orienté vers le sens positif.
- Le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_N}$ est normal à la trajectoire en M$(\overrightarrow{u_T} \perp \overrightarrow{u_N})$ et orienté vers l'intérieur de la courbure de la trajectoire.

**a) Vitesse dans la base de Frenet :**

$$\vec{v} = v\,\overrightarrow{u_T}$$

**b) L'accélération dans la base de Frenet :**

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_T} + \overrightarrow{a_N}$$

$$\vec{a} = a_T\overrightarrow{u_T} + a_N\overrightarrow{u_N}$$

$$\begin{cases} a_T = \dfrac{dv}{dt} \\ a_N = \dfrac{v^2}{\rho} \end{cases}$$

$\rho$ est le rayon de courbure.

$$\vec{a} = \dot{v}\overrightarrow{u_T} + \frac{v^2}{\rho}\overrightarrow{u_N} \Rightarrow \|\vec{a}\| = \sqrt{\dot{v}^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}$$

Pour déterminer l'expression du rayon de courbure, on calcule le produit vectoriel : $\vec{v} \wedge \vec{a}$

$$\vec{v} \wedge \vec{a} = v\,\overrightarrow{u_T} \wedge \left(\frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_T} + \frac{v^2}{\rho}\overrightarrow{u_N}\right)$$

$$\vec{v} \wedge \vec{a} = \frac{v^3}{\rho}\left(\overrightarrow{u_T} \wedge \overrightarrow{u_N}\right)$$

Calculons le module de ce vecteur, ça donnera : $|\vec{v} \wedge \vec{a}| = \frac{v^3}{\rho}$

D'où l'expression : $\rho = \frac{v^3}{|\vec{v} \wedge \vec{a}|}$

# Exercices

**Exercice 1 :**

La grandeur physique G s'écrit ;

$$G = \frac{t^2 lg}{4\pi} - l^2 \qquad \begin{array}{c} t : temps \\ l : longueur \\ g : accélération\ de\ la\ pesanteur \end{array}$$

1) Trouver la dimension de G. En déduire son unité.

**Solution :**

1) $[G] = L^2$, unité :$(m^2)$

**Exercice 2 :**

La valeur de la force de frottement d'un Fluide sur une sphère de rayon $R$, se déplaçant à faible vitesse $v$ par rapport au fluide est donnée par la relation de stokes.

$$F = 6\pi\eta R v \qquad ou\ \eta\text{: est la viscosité de Fluide}$$

- Etablir l'équation aux dimensions de la viscosité$\eta$.

**Solution :**

$$[F] = MLT^{-2}; [R] = L\ ;\ [v] = LT^{-1}$$

$$\eta = \frac{F}{6\pi R v} \Rightarrow [\eta] = \frac{[F]}{[R][v]} = \frac{MLT^{-2}}{L^2T^{-1}}$$

$$[\eta] = ML^{-1}T^{-1}$$

**Exercice 3 :**

Déterminer la dimension des deux paramètres $\alpha$ et $\beta$ données par la loi :

$$F = \alpha\, m\, v + \beta\, v^2$$

Où $F$ est une force ; $m$: la masse ; $v$: vitesse.

**Solution :**

$$[F] = [\alpha\, m\, v] + [\beta\, v^2]$$

$$[F] = [\alpha\, m\, v] = [\beta\, v^2]$$

$[F] = MLT^{-2}$ : $[F] = [\alpha][v][m]$

$$[\alpha] = \frac{[F]}{[m][v]} = \frac{\cancel{M}LT^{-2}}{\cancel{M}LT^{-1}} = \frac{1}{T} = T^{-1}$$

$$[F] = [\beta][v]^2 \Rightarrow [\beta] = \frac{[F]}{[v]^2} = \frac{MLT^{-2}}{L^2T^{-2}} = ML^{-1}$$

**Exercice 4 :**

La fréquence $f$ de vibration d'une soulte d'eau peut s'écrire sous la forme :

$$f = k\, R^{\alpha} \rho^{\beta} \tau^{\delta}$$

Ou k est une constante sans dimension.

$R$ : Rayon de la soulte.

$\rho$: Masse volumique de la soulte.

$\tau$: Tension superficielle définie par une force par unité de longueur.

- Déterminer les valeurs de $\alpha, \beta, \delta$.

Solution :

$$[k] = 1;\ [R] = L\ ;\ [\rho] = ML^{-3};\ [\tau] = \frac{MLT^{-2}}{L} = MT^{-2}$$

Equation homogène $\Rightarrow [f] = [R]^{\alpha}.[\rho]^{\beta}.[\tau]^{\delta}$

$$[f] = T^{-1} = L^{\alpha} M^{\beta} L^{-3\beta} M^{\delta} T^{-2\delta}$$

$$T^{-1} = M^{\beta+\delta} L^{\alpha-3\beta} T^{-2\delta}$$

$$\begin{cases} \beta + \delta = 0 \Rightarrow \beta = -\delta = {}^{-1}/_{2} \\ \alpha - 3\beta = 0 \Longrightarrow \alpha = 3\beta = -\,{}^{3}/_{2} \\ -2\delta = -1 \Longrightarrow \delta = {}^{1}/_{2} \end{cases}$$

Exercice 5 : les équations horaires d'un mobile M sont :

$$\begin{cases} x(t) = \cos 3t \\ y(t) = \sin 3t \\ z(t) = 3t \end{cases}$$

1) Décrire la trajectoire de M.
2) Trouve sa vitesse et son accélération.
3) Trouve les modules de la vitesse et de l'accélération à l'instant initial.

Solution :

$x^2 + y^2 = 1$ cercle $(0,0)$ $et\ R = 1$ avec $z(t) = 3t$

1) Mouvement hélicoïdal.
2) $\vec{v}\begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \\ dz/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\sin 3t \\ 3\cos 3t \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\vec{a}\begin{pmatrix} dv_x/dt \\ dv_y/dt \\ dv_z/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9\cos 3t \\ -9\sin 3t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{9(\cos^2 3t + \sin^2 3t) + 9} = 3\sqrt{2}\, m/s = cte$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{81} = 9\, m/s^2 = cte$$

**Exercice 6 :** les coordonnées d'un point sont données en fonction du temps :

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 1 - 2t^2 \\ z(t) = 4t^2 3t \end{cases}$$

1) Ecrire les composantes de la vitesse du point et en déduire son module
2) Ecrire les composantes de l'accélération et en déduire son module ?

**Exercice 7 :**

Une voiture initialement en mouvement avec la vitesse de$120\, km/h$, freine avec accélération constante de sorte qu'elle arrivé au repos au bout de $5s$.

a) Quelle est l'accélération du mouvement ?
b) Quelle est le chemin parcouru pendant le freinage ?

c) Quelle est la vitesse après $3s$ de freinage ?

d) Quelle est le chemin parcouru jusqu'à l'instant où la vitesse ne vaut plus que $20\,km/h$ ?

e) Quelle est le chemin parcouru après $2s$ ?

**Exercice 8 :**

Une voiture $(A\,)$ a démarré à l'instant initial auprès un feu rouge avec une accélération de$1\,m/s^2$. Une deuxième voiture $(B)$ se trouve à cet instant à 100 m de la voiture$A$, en train de rouler à la vitesse constante de $60\,km/h$ à l'encontre de $A$.

- Déterminer l'endroit où les deux voitures se croisent route ?

  (Solution :$x_A = x_B = 13{,}5\,m$)

CHAPITRE 2

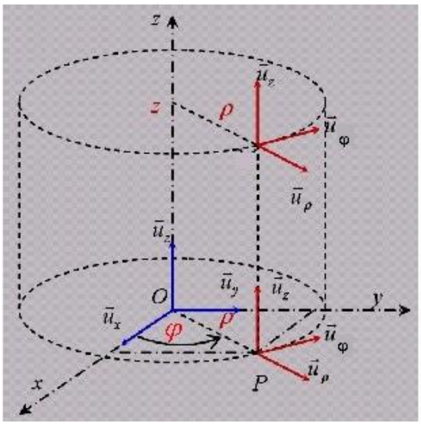
# MOUVEMENT DANS L'ESPACE

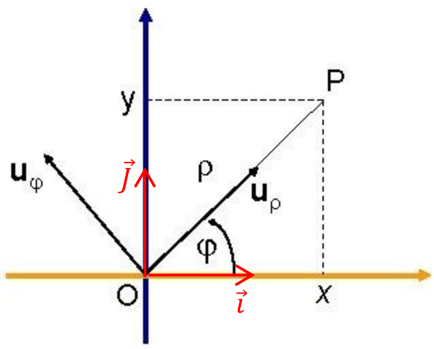
# Mouvement Dans l'Espace

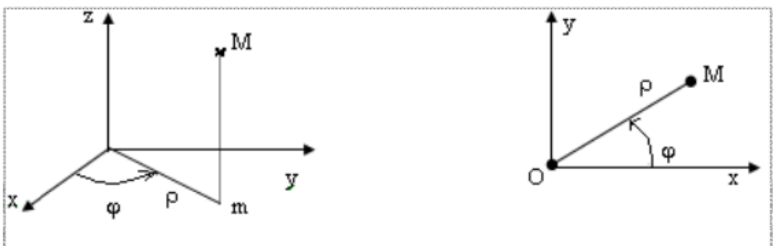
La description du mouvement d'un point matériel exige de connaître sa position dans l'espace à tout instant. Nous nous limitons ici à l'espace euclidien à trois dimensions qui constitue le cadre de notre environnement macroscopique habituel. Largeur, hauteur et profondeur en sont les mesures les plus usuelles.

## 1) Etude du mouvement en coordonnées cylindriques :

Un point est identifié par les trois grandeurs ρ, φ et z. Les deux premiers sont des coordonnées polaires dans le plan xOy alors que z mesure l'élévation au-dessus de ce plan. La coordonnée ρ mesure la longueur de la projection de OM dans le plan xOy et la coordonnée φ mesure l'angle par rapport à l'axe Ox que fait cette projection. La coordonnée z est la même qu'en cartésien.




Coordonnées cylindriques (ρ , φ ,z)

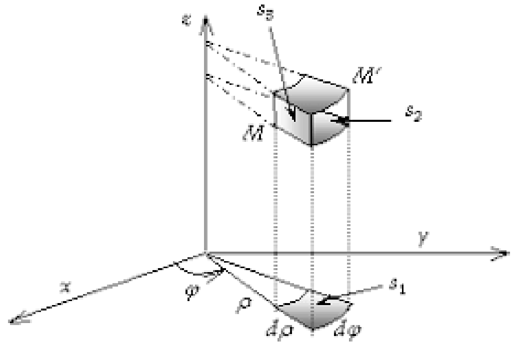
Coordonnées polaires (ρ,φ)

$$\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec{u}_\rho + z\,\vec{k}$$

$$\vec{u}_\rho = \cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath}$$

$$\vec{u}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath}$$

Le déplacement élémentaire :




$$d\overrightarrow{OM} = d\rho\,\vec{u}_\rho + \rho d\vec{u}_\rho + dz\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{du_\rho} = -\mathrm{d}\varphi\sin\varphi\,\vec{\imath} + \mathrm{d}\varphi\cos\varphi\,\vec{\jmath}$$

$$= \mathrm{d}\varphi\,\vec{u}_\varphi$$

$$d\overrightarrow{OM} = d\rho\,\vec{u}_\rho + \rho\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{u}_\varphi + dz\,\vec{k}$$

$$\boxed{\mathrm{dS} = \left\|d\overrightarrow{OM}\right\| = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2\mathrm{d}\varphi^2 + dz^2}}$$

Déplacement élémentaire

**Vitesse** : $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\,\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi + \dot{z}\vec{k}}$

$\vec{v}_r$: vitesse radiale $\vec{v}_\varphi$: vitesse transversale $\vec{v}_z$: vitesse azimutale

Le module de la vitesse : $\|\vec{v}\| = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}\,(m/s)$

**L'accélération** : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

$$\vec{a} = \ddot{\rho}\vec{u}_\rho + \dot{\rho}\frac{\mathrm{d}\vec{u}_\rho}{dt} + \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi + \rho\ddot{\varphi}\vec{u}_\varphi + \rho\dot{\varphi}\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt} + \ddot{z}\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\vec{u}_\varphi + \ddot{z}\vec{k}}$$

$\vec{a}_r$: Radiale $\vec{a}_\varphi$: Transversale $\vec{v}_z$: Azimutale

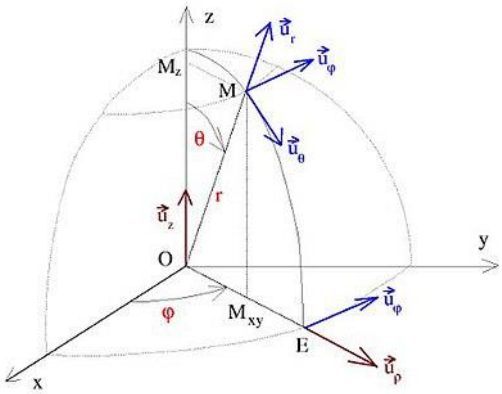
## 2) Etude du mouvement en coordonnées sphériques:

les trois coordonnées du point M sont r, θ et φ, où r mesure la longueur du rayon vecteur qui va de O à M. L'angle θ mesure l'inclinaison de ce rayon vecteur par rapport à l'axe Oz et φ a la même définition qu'en coordonnées cylindriques, mesurant l'angle à partir de l'axe Ox de la projection du rayon vecteur sur le plan xOy.

Position : $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\,\overrightarrow{u_r}$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM}$$

$$\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec{u}_\rho + z\,\vec{k}$$




$\overrightarrow{OM} = (\rho\cos\varphi\,\vec{\imath} + \rho\ \sin\varphi\,\vec{\jmath}) + z\,\vec{k}$

$\rho = r\sin\theta \quad ; z = r\cos\theta$

$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = r\cos\varphi\sin\theta\,\vec{\imath} + r\sin\varphi\sin\theta\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = r\cos\varphi\sin\theta\,\vec{\imath} + r\sin\varphi\sin\theta\,\vec{\jmath} + r\cos\theta\,\vec{k}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = r\left[\cos\varphi\sin\theta\,\vec{\imath} + \sin\varphi\sin\theta\,\vec{\jmath} + \cos\theta\,\vec{k}\right]$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r$$

$$\Rightarrow \vec{u}_r = \cos\varphi\sin\theta\vec{\imath} + \sin\varphi\sin\theta\,\vec{\jmath} + \cos\theta\,\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{u}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath}$$

$(\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_\theta)$ : forment une base orthogonale.

$$\vec{u}_\theta = \vec{u}_\varphi \wedge \vec{u}_r$$

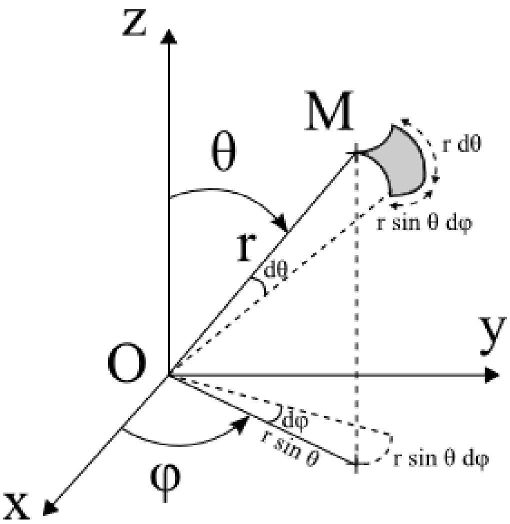
$$\vec{u}_\theta = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & -\vec{\jmath} & \vec{k} \\ \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\cos\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} + (\cos\varphi^2\sin\theta + \sin^2\varphi\sin\theta)\,\vec{k}$$

$$\vec{u}_\theta = (-\cos\varphi\cos\theta)\vec{\imath} + \sin\varphi\cos\theta\,\vec{\jmath} - \sin\theta\,\vec{k}$$

**<u>Le déplacement élémentaire :</u>**

$$d\overrightarrow{OM} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\vec{u}_r$$




On calcule $d\vec{u}_r$ :

$$d\vec{u}_r = -d\varphi\ \sin\varphi\sin\theta\,\vec{\imath} + d\theta\cos\varphi\cos\theta\,\vec{\imath} + d\varphi\cos\varphi\sin\theta\vec{\jmath}$$

$$+d\theta\cos\theta\sin\varphi\vec{\jmath} - d\theta\sin\theta\vec{k}$$

$$d\vec{u}_r = d\varphi\ \sin\theta\,\overbrace{(-\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath})}^{\vec{u}_\varphi}$$

$$+\,d\theta\,\underbrace{\left(\cos\varphi\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\cos\theta\,\vec{\jmath} - \sin\theta\vec{k}\right)}_{\vec{u}_\theta}$$

$$d\vec{u}_r = d\varphi\sin\theta\,\vec{u}_\varphi + d\theta\,\vec{u}_\theta$$

$$\Rightarrow d\overrightarrow{OM} = dr\,\vec{u}_r + rd\varphi\sin\theta\,\vec{u}_\varphi + rd\theta\,\vec{u}_\theta$$

$$\mathrm{dS}^2 = dr^2\ + r^2\sin^2\theta\,d\varphi^{\,2} + r^2d\theta^2$$

$$\boxed{\mathrm{dS} = \left\|d\overrightarrow{OM}\right\| = \sqrt{dr^2\ + (r\sin\theta\,d\varphi)^2 + (rd\theta)^2}}$$

Déplacement élémentaire en coordonnées sphériques.

**Vitesse** : $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Rightarrow$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{u}_\varphi + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta}$$

**Accélération** : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

Après calcul:

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\vec{u}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\vec{u}_\theta \\ + \left(r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\right)\vec{u}_\varphi\end{gathered}}$$

**<u>Exercice :</u>** $\overrightarrow{OM} = 2\,\vec{u}_\rho + 3t\,\vec{k}$

$$\left(\vec{\imath},\vec{u}_\rho\right) = \omega t = \varphi \;\; avec\; \omega = 2\,rd/s$$

Donner l'expression du vecteur vitesse et l'accélération en coordonnées cylindriques et calculer l'angle entres ces deux derniers vecteurs.

Solution :

- **Vitesse :** $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = 2\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \;3\vec{k}$

  $$\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \dot{\varphi}\,\vec{u}_\varphi \Rightarrow \vec{v} = 2\dot{\varphi}\,\vec{u}_\varphi + 3\vec{k}$$

  $$\vec{v} = 2\omega\vec{u}_\varphi + 3\vec{k}$$

  $$\vec{v} = 4\vec{u}_\varphi + 3\vec{k} = \begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}$$

- Le module : $v = \sqrt{16+9} = 5\,m/s$
- Accélération : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 4\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt} = -4\dot{\varphi}\,\vec{u}_\rho$

  $$\vec{a} = -4\omega\vec{u}_\rho \Rightarrow a = 8\;\,m/s^2$$

  L'angle $(\vec{v},\vec{a})$ : $\quad \vec{v}\cdot\vec{a} = \begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8\\0\\0\end{pmatrix} = 0$

$$\Rightarrow \cos(\vec{v},\vec{a}) = 0 \Rightarrow (\vec{v},\vec{a}) = \frac{\pi}{2} rad$$

**Exercice :** On donne l'expression du vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = t^2\vec{u}_r \;;\; \theta = 2t\,; \varphi = 3t$$

Calculer le vecteur vitesse en coordonnées sphériques.

Solution :

Vitesse : en coordonnées sphériques

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{u}_\varphi$$

$$\vec{v} = 2t\,\vec{u}_r + t^2\cdot 2\,\vec{u}_\theta + t^2\sin 2t\;\times 3\,\vec{u}_\varphi$$

$$\vec{v} = 2t\,\vec{u}_r + 2t^2\vec{u}_\theta + 3t^2\sin 2t\,\vec{u}_\varphi$$

*CHAPITRE 2*

# *MOUVEMENT RELATIF ET MOUVEMENT ABSOLU*

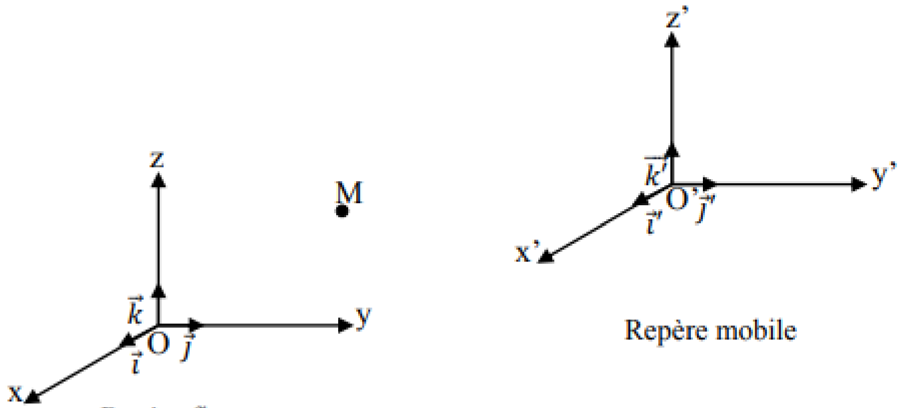
# Mouvement Relatif et Mouvement Absolu

La pratique nous montre que les mouvements usuels sont loin d'être des mouvements simples, rectilignes ou circulaires. Ils sont, dans la plupart des cas, la résultante de plusieurs mouvements simultanés. Par exemple, le mouvement décrit par un voyageur dans un avion en mouvement, résulte de la "combinaison" d'un mouvement du voyageur par rapport à l'avion et le mouvement de l'avion par rapport à la terre. Ainsi, on peut envisager de "décomposer" le mouvement d'un point en deux mouvements plus simples et d'étude plus facile, grâce à l'introduction d'un trièdre de référence supplémentaire, mobile, qui se déplace de façon déterminée par rapport au trièdre initial, considéré conventionnellement comme fixe.

Soit M un mobile.

Soit $R(O, x, y, z)$ : un repère fixe.

Soit $R'(O', x', y', z')$ : un repère mobile.




Repère fixe

Repère mobile

- Le mouvement de M dans le repère fixe $R(O, x, y, z)$ est défini comme le mouvement **Absolu**.
- Le mouvement de M dans le repère mobile $R'(O', x', y', z')$ est défini comme le mouvement **Relatif**.

1) **Position :** la position de M dans $R$ : position Absolue.

La position de M dans $R'$ : position Relatif.

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

$$\overrightarrow{O'M} = \vec{r}' = x'\vec{\imath}' + y'\vec{\jmath}' + z'\vec{k}'$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

2) **Vitesse :** $\vec{v}_a = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \Rightarrow \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}$$

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{dx'}{dt}\vec{\imath}' + x'\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\vec{\jmath}' + y'\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\vec{k}' + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}$$

$$\overrightarrow{O'M} = x'\vec{\imath}' + y'\vec{\jmath}' + z'\vec{k}' \Rightarrow \vec{v}_r = \frac{dx'}{dt}\vec{\imath}' + \frac{dy'}{dt}\vec{\jmath}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'$$

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + y'\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt} + \underbrace{\frac{dx'}{dt}\vec{\imath}' + \frac{dy'}{dt}\vec{\jmath}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'}_{\vec{v}_r}$$

On pose : $\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + y'\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r}$$

$\vec{v}_e$ vitesse d'entrainement : c'est la vitesse de $R'$ par rapport à R.

Quel que soit le mouvement de $R'$: translation ou Rotation $\vec{v}_r$ et $\vec{v}_a$ ne changent pas.

$\vec{v}_e$ Change suivant le type de mouvement.

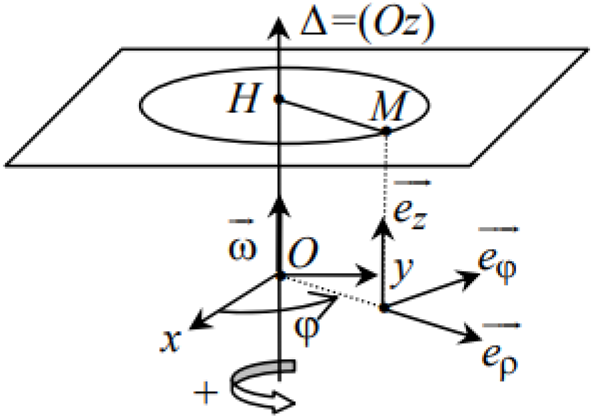
a) Translation : $R'$en translation par rapport à R:

$$\frac{d\vec{\imath}}{dt} + \frac{d\vec{\jmath}}{dt} + \frac{d\vec{k}}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}}$$

Les vecteurs unitaires du repère $R'$ :$\left(\vec{\imath}', \vec{\jmath}', \vec{k}'\right)$ ne changent pas de direction ⇒leurs dérivées sont nulles. Seulement l'origine varie dans le temps.

$$\Rightarrow \vec{\imath} = \vec{\imath}'; \vec{y} = \vec{y}';\ \vec{k} = \vec{k}'$$

b) **Rotation :** $R'$est en rotation par rapport à $R$ suivent l'axe $(oz)$




Dans ce cas, on définit la vecteur rotation : $\vec{\Omega} = \omega\vec{k}$ ou $\omega$: la vitesse angulaire constante.

Dans les coordonnées cylindriques : la base $(\vec{u}_\rho\,, \vec{u}_\varphi, \vec{\mathrm{k}})$

On a : $\vec{u}_\varphi = \vec{\mathrm{k}} \wedge \vec{u}_\rho$

$$\vec{u}_\rho = \vec{u}_\varphi \wedge \vec{\mathrm{k}}$$

On a aussi : $\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \dot{\varphi}\vec{u}_\varphi = \omega\vec{\mathrm{k}} \wedge \vec{u}_\rho = \vec{\Omega} \wedge \vec{u}_\rho$

$$\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\vec{u}_\rho = -\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi \wedge \vec{\mathrm{k}} = \omega\vec{\mathrm{k}} \wedge \vec{u}_\varphi = \vec{\Omega} \wedge \vec{u}_\varphi$$

On peut généraliser pour un vecteur $\vec{X}$

$$\frac{\partial\vec{X}}{\partial t} = \vec{\Omega} \wedge \vec{X}$$

Donc ;

$$\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial t} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} \qquad et \qquad \frac{d\vec{\imath}'}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{\imath}'$$

$$\Rightarrow \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} = x'\left(\vec{\Omega} \wedge \vec{\imath}'\right) + y'\left(\vec{\Omega} \wedge \vec{\jmath}'\right) + z'\left(\vec{\Omega} \wedge \vec{k}'\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} = \left(\vec{\Omega} \wedge x'\vec{\imath}'\right) + \left(\vec{\Omega} \wedge y'\vec{\jmath}'\right) + \left(\vec{\Omega} \wedge z'\vec{k}'\right)$$

$$\boxed{\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}}$$

## 3) L'accélération :

L'accélération absolue : $\boxed{\vec{a}_a = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right|_R = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}}$

L'accélération relative : $\boxed{\vec{a}_r = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right|_{R'} = \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{\imath}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{\jmath}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}'}$

On a déjà : $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + y'\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt} + \frac{\partial x'}{\partial t}\vec{\imath} + \frac{\partial y'}{\partial t}\vec{\jmath} + \frac{\partial z'}{\partial t}\vec{k}$

On dérive une autre fois :

$$\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{dx'}{dt}\frac{\partial\vec{\imath}'}{\partial t} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k}'}{dt} + x'\frac{d^2\vec{\imath}'}{dt^2}$$
$$+ y'\frac{d^2\vec{\jmath}'}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k}'}{dt^2} + \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k} + \frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{\vec{\jmath}'}{dt}$$
$$+ \frac{\partial d}{dt}\frac{d\vec{k}'}{dt}$$

$$\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} = x'\frac{d^2\vec{\imath}'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{\jmath}'}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k}'}{dt^2} +$$

$$2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k}'}{dt}\right) + \vec{a}_r$$

$$\Rightarrow \vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$$

$$\boxed{\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{\imath}'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{\jmath}'}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k}'}{dt^2}}$$

Accélération d'entrainement

- L'accélération de Coriolis :

$$\boxed{\vec{a}_c = 2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)}$$

**a) Translation :**

$$\begin{cases} \vec{\imath} = \vec{\imath}' \\ \vec{\jmath} = \vec{\jmath}' \\ \vec{k} = \vec{k}' \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \dfrac{d\vec{\imath}'}{dt} = \dfrac{d\vec{\jmath}'}{dt} = \dfrac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{0} \\ \dfrac{d^2\vec{\imath}'}{dt^2} = \dfrac{d^2\vec{\jmath}'}{dt^2} = \dfrac{d^2\vec{k}'}{dt^2} = \vec{0} \end{array}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_c = \vec{0}\,;\ \ \vec{a}_e = \frac{\partial^2\overrightarrow{OO'}}{\partial t^2}$$

b) **Rotation :** $\frac{d\vec{\imath}'}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{\imath}'$

$$\frac{d^2\vec{\imath}'}{dt^2} = \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{\imath}' + \vec{\Omega} \wedge \frac{d\vec{\imath}'}{dt}$$

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{\imath}' + \vec{\Omega} \wedge \frac{d\vec{\imath}'}{dt}\right) +$$

$$y'\left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{\jmath}' + \vec{\Omega} \wedge \frac{d\vec{\jmath}'}{dt}\right) + z'\left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{k}' + \vec{\Omega} \wedge \frac{d\vec{k}'}{dt}\right)$$

$$= \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge x'\vec{\imath}' + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge y'\vec{\jmath}' + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge z'\vec{k}'\right)$$

$$+ \left(\vec{\Omega} \wedge\ x'\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + \vec{\Omega} \wedge\ y'\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + \vec{\Omega} \wedge\ z'\frac{\partial d'}{dt}\right)$$

$$= \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \left[\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \left(x'\vec{\imath}' + y'\vec{\jmath}' + z'\vec{k}'\right)\right] + \left[\vec{\Omega} \wedge \left(x'\vec{\Omega} \wedge \vec{\imath}' + y'\vec{\Omega} \wedge \vec{\jmath}' + z'\vec{\Omega} \wedge \vec{k}'\right)\right]$$

$$\boxed{\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)}$$

$$\vec{a}_c = 2\left(\frac{dx'}{dt}\vec{\Omega}\wedge\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{\Omega}\wedge\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{\Omega}\wedge\vec{k}'\right)$$

$$\vec{a}_c = 2\,\vec{\Omega}\wedge\left(\frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'\right)$$

$$\boxed{\vec{a}_c = 2\,\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_r}$$

# Résumé

$R(O,x,y,z)$ : Repère fixe.

$R'(O',x',y',z')$ : Mobile.

**Vecteur position :**

$$\overrightarrow{OM}\Big|_R = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

$$\overrightarrow{O'M}\Big|_{R'} = x'\vec{\imath}' + y'\vec{\jmath}' + z'\vec{k}'$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

**Vecteur vitesse :**

- **Vitesse absolue :** $\vec{v}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\Big|_R = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$
- **Vitesse relative :** $\vec{v}_r = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = \frac{dx'}{dt}\vec{\imath}' + \frac{dy'}{dt}\vec{\jmath}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'$
- **Vitesse d'entrainement :** $\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + y'\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}$

  **a) Translation :** $\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}$

  **b) Rotation et translation :**

$$\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

**Vecteur Accélération :**

L'accélération absolue : $\vec{a}_a = \vec{a}_a|_R = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$

L'accélération relative : $\vec{a}_r = \vec{a}_r|_{R'} = \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{\imath}' + \frac{\partial^2y'}{dt^2}\vec{\jmath}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}'$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$$

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{\imath}'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{\jmath}'}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k}'}{dt^2}$$

$$\vec{a}_c = 2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{\partial\vec{\imath}'}{\partial t} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)$$

a) Translation : $\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}$ ; $\vec{a}_c = \vec{0}$

b) Rotation :

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)$$

$$\vec{a}_c = 2\left(\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r\right)$$

**Exercice :**

Un avion se dirige vers le nord-ouest avec une vitesse de $125\,km/h$ par rapport à un observateur lié à la terre. Si le vent souffle vers l'ouest avec une vitesse de $50\,km/h$ par rapport au même observateur.

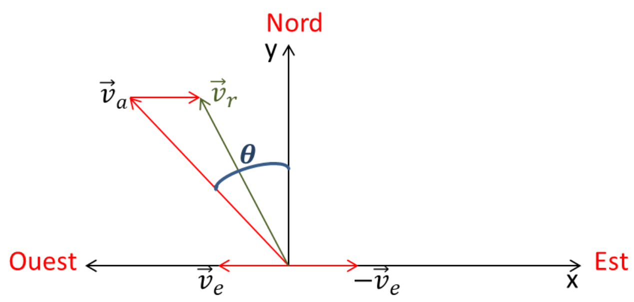
Trouver la vitesse de l'avion et sa direction ?

**Solution :**

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

$\vec{v}_a$ : vitesse de l'avion**/**terre**,** $\vec{v}_e$: vitesse de l'air**/**terre**,** $\vec{v}_r$ : vitesse de l'avion**/**air**.**

L'avion se dirige vers le nord-ouest de la terre : θ=45°




$$\vec{v}_r = \vec{v}_a - \vec{v}_e$$

$$\vec{v}_a = \begin{pmatrix} -v_a \sin\theta \\ +v_a \cos\theta \end{pmatrix} \; ; \; \vec{v}_e = \begin{pmatrix} -v_e \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -\vec{v}_e = \begin{pmatrix} v_e \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_r = \begin{pmatrix} v_a \sin\theta + v_e \\ v_a \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 125 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 50 \\ 125 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 227 \\ 177 \end{pmatrix} km/h$$

$$\|\vec{v}_r\| = \sqrt{227^2 + 177^2} = \sqrt{51529 + 31329}$$

$$\|\vec{v}_r\| = 288\,km/h$$

Pour trouver la direction de l'avion par rapport à un observateur ; on cherche l'angle $(\vec{v}_r, \vec{v}_e)$ :

$$\cos(\vec{v}_r, \vec{v}_e) = \frac{-227}{288} = -0{,}79$$

$$\Rightarrow (\vec{v}_r, \vec{v}_e) = 142°$$

**Exercice :**

Soit un repère mobile$R'(O', x', y', z')$ en mouvement par rapport à un repère fixe $R(O, x, y, z)$ avec une vitesse $\vec{v}_e(1{,}0{,}0)$.

On suppose que $x', y', z'$ sont les coordonnées du mobile $M$ dans le repère mobile, tel que : $\begin{cases} x' = 6t^2 + 3t \\ y' = -3t^2 \\ z' = 3 \end{cases}$

À $t = 0$, M se trouve à l'origine $O(0{,}0{,}0)$

a) Donner la vitesse relative de ce point ainsi que sa vitesse absolue ?
b) En déduire les coordonnées de $M$ dans le repère fixe $R$ ?
c) Déterminer l'expression de l'accélération relative et absolue ?

**Solution :**

1)

$$\overrightarrow{O'M} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}' == (6t^2 + 3t)\vec{i}' + (-3t^2)\vec{j}' + 3\vec{k}'$$

$$\vec{v}_r = \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{R'} = (12t + 3)\vec{i}' - 6t\,\vec{j}' + 0\,\vec{k}'$$

**Translation :** $\vec{i} = \vec{i}'; \vec{j} = \vec{j}'; \vec{k} = \vec{k}'$

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r = (12t + 3)\vec{i} - 6t\vec{j} + 0\vec{k} + \vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{K}$$

$$\vec{v}_a = (12t + 4)\vec{i} - 6t\vec{j}$$

2) $\vec{v}_a = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = (12t + 4)\vec{i} - 6t\vec{j} + 0\vec{k}$

$$\frac{dx}{dt} = 12t + 4 \Rightarrow \partial x = (12t + 4)dt$$

$$\int dx = \int (12t + 4)dt + cte$$

$$x = 6t^2 + 4t + cte$$

$$\frac{dy}{dt} = -6t \Rightarrow dy = -6t\,dt$$

$$\int dy = -6\int t\,dt + cte$$

$$y = -3t^2 + cte'$$

$$\frac{dz}{dt} = 0 \Rightarrow dz = 0\,dt \Rightarrow z = cte''$$

$$t = 0 \quad \Rightarrow \begin{array}{l} x = cte = 0 \\ y = cte' = 0 \\ z = cte'' = 0 \end{array}$$

$$\overrightarrow{OM} = (6t^2 + 4t)\vec{\imath} - 3t^2\vec{\jmath}$$

3) $a_r = \frac{\partial \vec{v}_r}{\partial t} = 12\vec{\imath}' - 6\vec{\jmath}'$

$\vec{a}_a = 12\vec{\imath} - 6\,\vec{\jmath}$

$\vec{a}_r = \vec{a}_a \Rightarrow \vec{a}_e = \vec{0} \Rightarrow mvt\ de\ R'\ est\ rectiligne\ uniforme$

**Exercice :**

Un repère $R'(O', x', y', z')$ en rotation par rapport à $R(O, x, y, z)$ fixe suivant l'axe $(oz)$ avec une vitesse angulaire $\omega$ constante. On considère l'angle $\theta$ entre l'axe $(ox)$ et $(ox')$ tel que : θ=ωt.

Soit M un mobile suivant l'axe dont le mouvement est définie par :

$$\overrightarrow{O'M} = ae^{-t}\,\vec{\imath}'\ (a = cte)$$

a) Déterminer la vitesse relative, d'entrainement et absolue ?

b) Déterminer l'accélération relative, d'entrainement, de Coriolis et absolue ?

**Solution :**

1) $\overrightarrow{O'M} = ae^{-t}\vec{\imath}'$

$\Rightarrow \vec{v}_r = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = -ae^{-t}\vec{\imath}'$

$$\vec{v}_e = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M} = \omega \vec{k}' \wedge \ a e^{-t} \vec{\imath}' = a\omega e^{-t} \vec{k}' \wedge \vec{\imath}'$$

$$\Rightarrow \vec{v}_e = a\omega e^{-t} \vec{\jmath}'$$

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r = a\omega e^{-t} \vec{\jmath}' - a e^{-t} \vec{\imath}'$$

2) $\vec{a}_r = \left.\frac{\partial \vec{v}_r}{\partial t}\right|_{R'} = a e^{-t} \vec{\imath}'$

$$\vec{a}_e = \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) = \omega \vec{k}' \wedge \ a\omega e^{-t} \vec{\jmath}'$$

$$\vec{a}_e = \ a\omega^2 e^{-t} \vec{k}' \wedge \vec{\jmath}' = -a\omega^2 e^{-t} \vec{\imath}'$$

$$\vec{a}_c = 2\left(\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r\right) = 2\left(\omega \vec{k}' \wedge -a e^{-t} \vec{\imath}'\right)$$

$$\vec{a}_c = -2a\omega e^{-t} \vec{k}' \wedge \vec{\imath}'$$

$$\vec{a}_c = -2a\omega e^{-t} \vec{\jmath}'$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_c + \vec{a}_r = \ a e^{-t} \vec{\imath}' + (-a\omega^2 e^{-t} \vec{\imath}' - 2a\omega e^{-t} \vec{\jmath}')$$

$$\vec{a}_a = (a e^{-t} - a\omega^2 e^{-t}) \vec{\imath}' - 2a\omega e^{-t} \vec{\jmath}'$$

**Exercice n°3:**

Les coordonnées d'un point M dans un repère fixe $R(O, x, y, z)$ sont données en fonction de temps par :

$$x(t) = t^2 + 4t + 1$$
$$y(t) = -2t^4$$
$$z(t) = 3t^2$$

Dans un deuxième repère mobile $R'(O, x, y, z)$, elles sont données en fonction de temps par :

$$x'(t) = t^2 + t + 2$$
$$y'(t) = -2t^4$$
$$z'(t) = 3t^2 - 7$$

- Quel est le mouvement de R par rapport à R ?
- Calculer et identifier les accélérations $\vec{a}$ et $\vec{a}'$ ? Expliquer le résultat ?

**Solution :**

$$\vec{v}_a = (2t - 4)\vec{\imath} - 8t^3 \vec{\jmath} + 3t\, \vec{k}$$

$$\vec{v}_r = (2t+1)\vec{\imath}' - 8t^3\vec{\jmath}' + 3t\,\vec{k}'$$

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \Rightarrow \vec{v}_e = \vec{v}_a - \vec{v}_r$$

Si $\vec{\imath} = \vec{\imath}'; \vec{\jmath} = \vec{\jmath}'\ et\ \vec{k} = \vec{k}'$

$\Rightarrow \vec{v}_e = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ : mouvement de translation

Mouvement rectiligne $\vec{a}_a = \frac{d\vec{v}_a}{dt} = 2t\vec{\imath} - 24t^2\vec{\jmath} + 3\vec{k}$

$$\vec{a}_r = \frac{d\vec{v}_r}{dt} = 2\vec{\imath}' - 24t^2\vec{\jmath} + 3\,\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_a = \vec{a}_r \ \Rightarrow \vec{a}_e = \vec{0}\ et\ \vec{a}_c = \vec{0}$$

$$\vec{a}_e = \vec{0} \ : mvt\ uniforme$$

*CHAPITRE 3*

# *DYNAMIQUE DU POINT MATERIEL*

# Dynamique du Point Matériel

La dynamique est une science de la mécanique classique qui étudie les corps en mouvement sous l'influence sur les causes du mouvement (forces).

## 1) Les lois de Newton : les 3 principes

### a) La première loi de Newton : le principe d'inertie

Soit $M$ un point matériel de masse $m$

**Définition :** on dit qu'un système est isolé si ce système ne subit aucune action (aucune force) de l'extérieur.

**Définition du référentiel galiléen :** (référentiel d'inertie)

Dans un repère$R$, on place un point isolé de masse m, et on observe son mouvement dans $R$.

Si son mouvement est rectiligne uniforme, le référentiel $R$ est dit « Galiléen ».

- **Première loi de Newton ou principe d'inertie :**

  Dans un référentiel Galiléen $R$, le mouvement d'un point isolé est rectiligne uniforme(ou au repos).

### b) La deuxieme loi de Newton : le principe fondamental de la dynamique :

Une force appliquée sur le point $M$ est représentée par un vecteur$\vec{F}$.

Cette force a une : $\vec{F}\begin{cases} direction \\ sens \\ intensité \end{cases}$

On remarque si on applique une force$\vec{F}$ sur le point $M$. Le point $M$ accélère. Cette accélération a le même sens que la force $\vec{F}$.

Le principe fondamental de la dynamique s'énonce comme suit :

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$$

**<u>Définition</u>** : la quantité de mouvement $\vec{p}$ d'un point matériel M de masse m se déplaçant à une vitesse $\vec{v}$ est par définition :

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$$

Le principe fondamental devient :

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Le théorème de la quantité de mouvement :

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

**Remarque:** si plusieurs forces agissent sur le point $M$, le principe fondamental devient :

$$\sum_{ext \to M} \vec{F} = m\vec{a}$$

Et le théorème de la quantité de mouvement de vient :

$$\boxed{\sum_{ext \to M} \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

## c) <u>La troisième loi de Newton : le principe d'Action-réaction</u>

Soit $\vec{F}$ une force crée par un point$P$, sur le point $M$.

On écrit :$\vec{F}_{P \to M}$ force appliquée par $P$sur $M$.

On a : $\vec{F}_{P \to M} = m\vec{a}$

En fait, on constate que si $P$ agit sur $M$, alors aussi $M$ agit également sur $P$ de manière réciproque, selon la même direction, la même intensité, mais dans des sens différents. C'est le principe d'action-réaction.

$$\boxed{\vec{F}_{P \to M} = -\vec{F}_{M \to P}}$$

## 2) Les forces :

a) **La force de gravitation :** elle a été décrite pour la première fois par Newton en 1650. Elle décrit l'attraction entre deux masses.

$$\boxed{\vec{F}_{P\to M} = -G.\frac{m_P m_M}{r^2}\vec{e}_{P\to M}}$$

$\vec{F}_{P\to M}$ : Force crée par $P$ sur $M$.

$\vec{e}_{P\to M}$ : Vecteur unitaire dirigé de $P$ vers $M$.

$G = 6{,}67 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ : Constante universelle de gravitation.

- Cas particulier :

  Quand un corps de masse m est attiré par la terre de masse $M_T$ .

$$\vec{F}_{P\to M} = -G.\frac{mM_T}{R^2}\vec{N}$$

$R$ : Distance entre le corps et le centre de la terre.

$\vec{N}$ : Vecteur unitaire vertical dirigé du centre vers le corps.

On peut écrire : $\vec{F}_{P\to M} = m.\vec{g} \quad avec \quad \vec{g} = -G.\frac{M_T}{R^2}\vec{N}$

$\vec{g}$ : Représente le champ de la pesanteur de la terre à la sur face de la terre :$\vec{g}_0 = -G.\frac{M_T}{{R_T}^2}\vec{N} \quad , R_T : rayon\ de\ la\ terre$

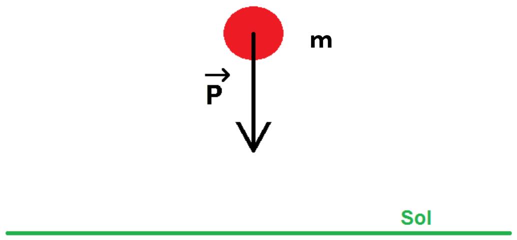
$$M_T = 5{,}98 \times 10^{24} kg\ ;\ R_T = 6{,}37 \times 10^6 m \Rightarrow \vec{g}_0 = 9{,}83\, m/s^2$$

A une altitude h de la terre :$\vec{g} = -G.\frac{M_T}{(R_T+h)^2}\vec{N}$

$$\vec{g} = -G.\frac{M_T}{{R_T}^2} \times \frac{{R_T}^2}{(R_T+h)^2}\vec{N} = \vec{g}_0.\left(\frac{R_T}{R_T+h}\right)^2$$

b) **Poids d'une masse :**

Si une masse m et en interaction gravitationnelle avec la terre. La terre agit sur m avec une force qu'on appelle poids de la masse avec :

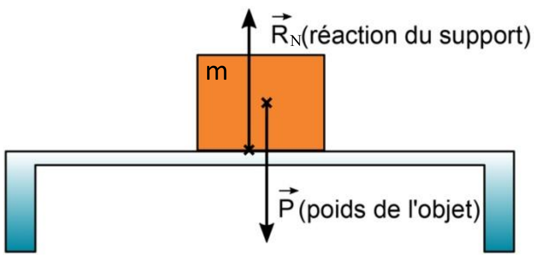



$$\vec{P} = m.\vec{g} \qquad \begin{cases} vertical \text{ à } la\ surface\ de\ la\ terre \\ se\ dirige\ vers\ le\ centre\ de\ la\ terre \\ son\ module: \boldsymbol{mg} \end{cases}$$

c) **La force de contact :** la force de contact a lieu une fois le contact établi.

## 1) Réaction d'un support :

La masse m est placée sur un support solide $S$.

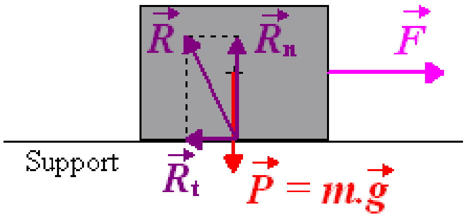



L'objet ne peut pas pénétrer dans le support : il y a une force appelée : Réaction du support$\vec{R}_n$.

$\vec{R}_n$ S'oppose au poids de $m$ $(\vec{P})$; sa direction est orthogonale $(\perp)$ à la surface du support.

## 2) Force de frottement :

$m$ est placée sur un support.




Poussons m avec une force $\vec{F}$ afin de le faire glisser sur le support.

Si cette force n'est pas suffisante $\Rightarrow m$ ne bouge pas, il y a une certaine résistance au déplacement, appelée force de frottement: $\vec{f} = \vec{R}_t$

$\vec{f} = \vec{R}_t$ s'oppose à $\vec{F}$.

Si on pousse suffisamment, le corps commence à bouger $\vec{R}_t$ dépend de $\vec{R}_N$ :

$$\boxed{\begin{array}{c} R_t = \mu\, R_n \\ f = \mu\, R_n \end{array}}$$

$\mu$ : est le coefficient de frottement.

L'angle de frottement : $\phi$ tel que : $tan\, \phi = \mu$

## a) Force de frottement statique :

C'est la force qui maintient le corps en état de repos même en présence d'une force extérieure.

Il existe une valeur maximale de $f_s$ :

$f_s(max) = \mu_s R_n$ ($\mu_s$ : Coefficient de frottement statique).

$\mu_s < 1$ (Presque toujours).

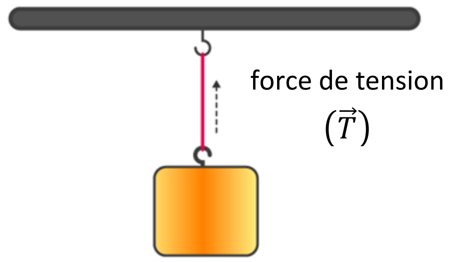
## b) Force de frottement cinétique :

C'est la force qui s'oppose au mouvement du corps sur une surface rugueuse.

$f_c = \mu_c R_n$ ($\mu_c$ : Coefficient de frottement cinétique).

## 3) Les forces de tensions :

Si $m$ est accroché au bout d'un fil. Quand le fil s'allonge, une force de rappel appelée tension s'exerce sur la masse $m$: $(\vec{T})$




## 4) Les forces élastiques : ce sont les forces de forme :

$$\vec{F} = -k\ \overrightarrow{0M}$$

ou **k** représente le coefficient de rigidité du ressort.

Si on a un mouvement rectiligne suivant $(ox)$:

$$F = -kx$$

- **Les frottements dans les fluides :**

Un corps se déplace dans un fluide (gaz ou liquide) avec une vitesse$\vec{v}$, une force de frottement apparait cette force : $\vec{f_f} = -k\eta\vec{v}$

$k$ : Coefficient qui dépend de la forme du corps.

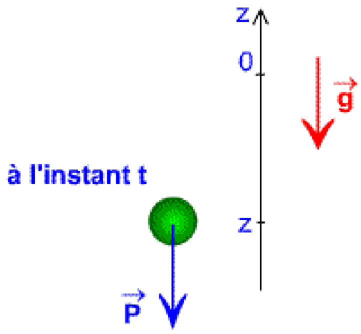
$\eta$ : Coefficient qui dépend des frottements internes dans le fluide.

Si le corps a une forme d'une sphère : $k = 6\pi R$ avec R rayon de la sphére :

$$\boxed{\vec{f_f} = -6\pi R\eta\ \vec{v}}$$ **Loi de Stokes**

## Applications :

### a) Chute libre :



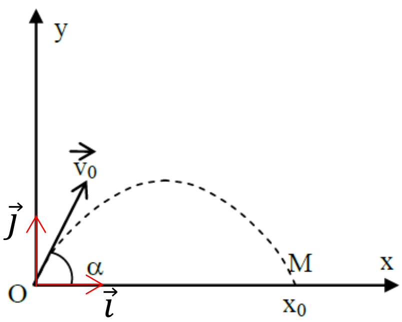

le corps est soumis seulement à son poids, si on applique le principe fondamental de la dynamique (PFD):

$$\sum \vec{F} = m\,\vec{a}$$

$$\vec{P} = m\,\vec{a}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{a} = \vec{g}}$$

### b) Mouvement de projectile :




$$\vec{v}_0 = v_0 \cos\alpha\,\vec{i} + v_0 \sin\alpha\,\vec{j}$$

Sur l'axe des $x$: mouvement rectiligne uniforme.

$$x = v_0 \cos\alpha\; t$$

Sur l'axe des $y$ : mouvement rectiligne uniformément varié.

$$\vec{a} = -\vec{g}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha\, t$$

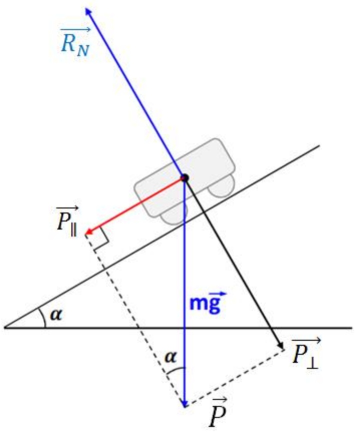
Trajectoire : $t = \frac{x}{v_0.\cos\alpha}$

$$\Rightarrow y = \frac{-g}{2{v_0}^2\cos^2\alpha}x^2 + \tan\alpha\, x$$

$y = Ax^2 + Bx$ : Équation d'une parabole.

## c) Plan incliné :

- Sans frottement :




Appliquons le principe fondamental de la dynamique:

$$\sum \vec{F} = m\,\vec{a}$$

$$\overrightarrow{R_N} + \vec{P} = m\,\vec{a}$$

après projections sur l'axe parallèle et perpendiculaire au mouvement:

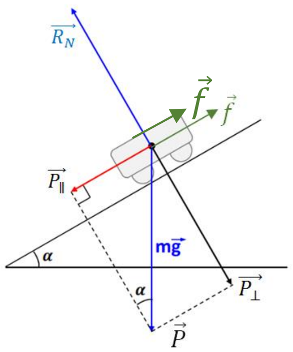
$$P_\perp = R_N = mg\cos\alpha$$

$$P_\parallel = mg\sin\alpha$$

à partir de ces équations on peut déduire la valeur de l'accélération:

$$a = g\ sin\ \alpha$$

- <u>avec frottement:</u>




$$\sum \vec{F} = m\,\vec{a}$$

$$\overrightarrow{R_N} + \vec{P} + \vec{f} = m\,\vec{a}$$

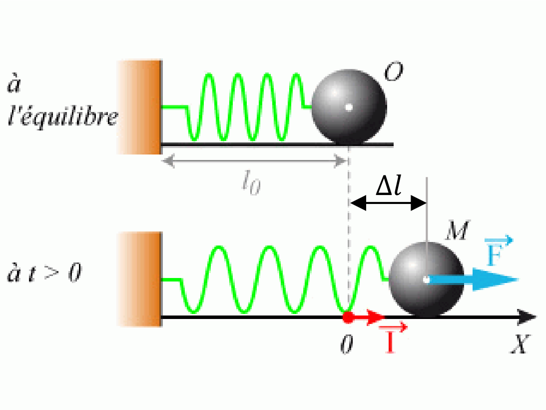
après projection:

$$P_{\perp} = R_N = mg\cos\alpha$$

$$P_{\parallel} - f = mg\sin\alpha - f = ma$$

sachant que: $\mu = f/R_N \Longrightarrow \quad a = g(\sin\alpha - \mu cos\alpha)$

**<u>Exemple:</u>** Oscillateur harmonique (Ressort).




L'élongation du ressort:

$$\Delta l = longueur\ Finale\ -\ longueur\ Initiale\ (équilibre)$$

Force de rappel : $\vec{F_r} = -k\ \Delta l\ \vec{\imath}$

$$\vec{F_r} = -k\ \Delta l\ \vec{\imath} = -k(l - l_0)\vec{\imath}$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a} \Rightarrow -k(l-l_0)\vec{\imath} = m\,\vec{a}$$

$$x = l - l_0 \Longrightarrow\ -k(l-l_0) = -kx$$

$$-kx = m\ddot{x}$$

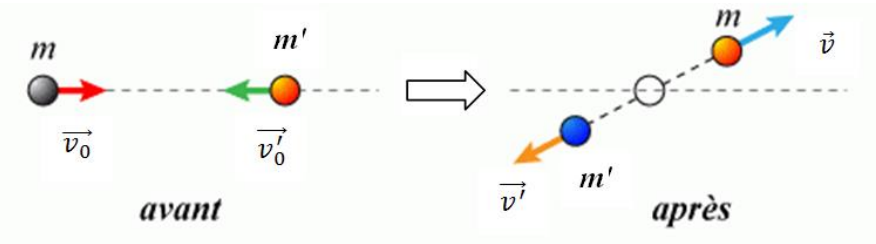
$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

C'est une équation différentielle de $2^{eme}$ordre; sa solution est sous la forme:

$x = A\sin(\omega t + \varphi)$   avec $\boldsymbol{\omega} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{m}}}$ **(**la pulsation du mouvement**)**

## 3) Conservation de la quantité de mouvement :

Deux particules de masses m et m' entrent en collision . On écrit les expressions de leurs quantité de mouvement.




A l'instant $t_1(avant)$ :   $\vec{P}_{t_1} = \vec{P}_0 + \vec{P}_0{}' = m\vec{v}_0 + m'\vec{v}_0{}'$

A l'instant $t_2(après)$ :   $\vec{P}_{t_2} = \vec{P} + \vec{P}' = m\vec{v} + m'\vec{v}'$

La quantité de mouvement d'un système isolé est conservée (est constante, ne varie pas).

$$\vec{P}_{t_1} = \vec{P}_{t_2}$$

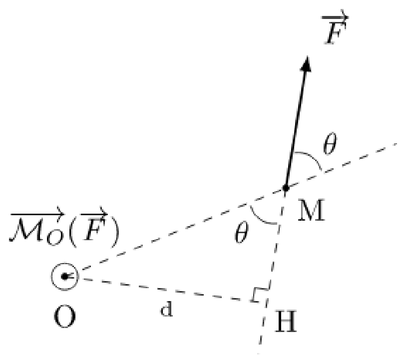
$$m\vec{v}_0 + m'\vec{v}_0{}' = m\vec{v} + m'\vec{v}'$$

## 4) Moment cinétique d'un point matériel :

### 1) Moment d'une force : par rapport à un point :

Soit $(M)$ soumis à une force$\vec{F}$

$O$ : Un point de l'espace.




Le moment de la force en $O$ est : $\vec{M}_0(\vec{F})$

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

$$\|\vec{M}_0(\vec{F})\| = OM \times F \times \sin(\overrightarrow{OM}, \vec{F}) = \frac{OM \times F \times OH}{OM} = F \times OH$$

Si $(M, \vec{F})$passe par O, $\vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{0}$

### 2) Moment d'une force par rapport à un axe $\Delta$ orienté :

Soit $(\Delta)$, un axe passant par $O$, orienter suivant la direction de son vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$.

On appelle moment de la force $\vec{F}$ par rapport à l'axe $\Delta$, la projection scalaire $\vec{M}_0(\vec{F})$ selon $\vec{u}_\Delta$.

$$\overrightarrow{M_\Delta}(\vec{F}) = \vec{M}_0(\vec{F}) \cdot \vec{u}_\Delta$$

Cette définition est indépendante de O

**Remarque** : si $\vec{F} \parallel \Delta \Rightarrow M_\Delta(\vec{F}) = 0$

### 3) Moment cinétique d'un point matériel :

**a) Moment cinétique par rapport à un point :**

Le moment cinétique en un point $O$, dans le référentiel $R$, du point matériel $M$ de masse $(m)$ est :

$$\vec{\mathcal{L}}_{O/_R}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}_{M/_R} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}_{M/_R}$$

**Unités :** $\overrightarrow{OM}$ : $m$

$\vec{P}_{M/R}$: $kg.m.s^{-1}$

$\vec{\mathcal{L}}_{O/R}(M)$ : $kg.m^2.s^{-1}$

**b) Moment cinétique par rapport à un axe :**

Soit($\Delta$), un axe passant par $O$ et orienté selon la direction de son vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$.

On appelle moment cinétique de $M$ par rapport à l'axe $\Delta$, la projection de $\vec{\mathcal{L}}_{O/R}(M)$ selon $\vec{u}_\Delta$.

$$\mathcal{L}_\Delta = \vec{\mathcal{L}}_{O/R}(M).\vec{u}_\Delta$$

**4) <u>Théorème du moment cinétique dans un référentiel galiléen :</u>**

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\mathcal{L}}_{O/R}(M)\right) = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}_{M/R}\right) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge m\vec{v}_{M/R} + \overrightarrow{OM} \wedge m\frac{d\vec{v}_{M/R}}{dt}$$

$$= \underbrace{\vec{v}_{M/R} \wedge m\vec{v}_{M/R}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{OM} \wedge \underbrace{m\,\vec{a}_{M/R}}_{PFD:\sum\vec{F}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\mathcal{L}}_{O/R}(M)\right) = \overrightarrow{OM} \wedge \sum\vec{F} = \sum\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

<u>**Théorème :**</u> pour un point matériel $M$ soumis à la résultante des forces$\vec{F}_{ext}$dans un référentiel galiléen R, observé depuis un point $O$ fixe dans R.

$$\boxed{\frac{d\left(\vec{\mathcal{L}}_{O/R}(M)\right)}{dt} = \vec{M}_0\left(\vec{F}_{ext}\right)}$$

**Par analogie :**

Principe fondamental de la Dynamique : $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext}$

$$\rightarrow Theoreme\ du\ Moment\ Cinétique : \frac{d\left(\vec{\mathcal{L}}_{O/_R}(M)\right)}{dt} = \vec{M}_0\left(\vec{F}_{ext}\right)$$

Quantité de mouvement $\vec{P} \rightarrow moment\ cinétique : \vec{\mathcal{L}}_{O/_R}(M)$

Force $\vec{F}_{ext} \rightarrow moment\ d'une\ force : \overrightarrow{\mathcal{M}}_0\left(\vec{F}_{ext}\right)$

**<u>Théorème du moment cinétique selon un axe Δ :</u>**

Pour un point matériel $M$ soumis à la résultante des forces$\vec{F}_{ext}$ dans un référentiel galiléen $R$ :

$$\frac{d\mathcal{L}_\Delta}{dt} = \mathcal{M}_\Delta$$

### 5) Conservation du moment cinétique :

Si le moment cinétique est conservé $\Leftrightarrow \frac{\partial \vec{\mathcal{L}}_{O/_R}(M)}{\partial t} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{\mathcal{L}}_{O/_R}(M) = cte \Rightarrow \overrightarrow{\mathcal{M}}_0\left(\vec{F}_{ext}\right) = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_0\left(\vec{F}_{ext}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{F}_{ext} = \vec{0} \quad : M\ est\ isolé \\ \qquad ou\ bien \\ \vec{F} \parallel \overrightarrow{OM}\left(\vec{F}\ est\ centrale\right) \end{cases}$$

**<u>Définition d'une force centrale :</u>**

Une force est dite centrale si à chaque instant la direction de cette force passe par le point fixe 0.

Interaction gravitationnelle : $\vec{F} = -G.\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{e}_r$ force de rappel

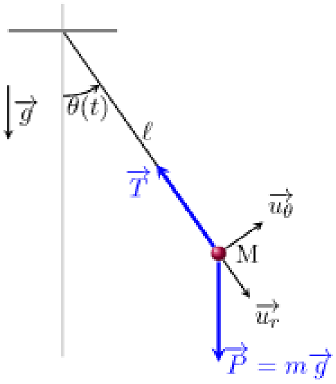
$$\vec{F} = -kx\,\vec{\imath}$$

**<u>Conclusion :</u>** on dit que le moment cinétique au point $M$ est conservé(ne varie pas) si $M$ n'est soumis à aucune force extérieur (isolé) ou si $M$ est soumis à une force centrale.

**Applications :**

a) **Pendule simple :**

Le pendule simple consiste en une masse ponctuelle m à l'extrémité d'une tige sans masse de longueur $\ell$ pouvant pivoter librement autour de son extrémité supérieure. La question est de déterminer la fréquence propre d'oscillation de ce pendule.




$$\overrightarrow{OM} = \ell\,\vec{u}_r$$

$$\vec{v}_M = \ell\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$$

Pour résoudre le problème ; on va utiliser les coordonnées cylindriques.

Théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}_{O/_R}(M)}{dt} = \sum \vec{M}(\vec{F}_{ext}) = \vec{\mathcal{M}}_0(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_0(\vec{T})$$

$$\vec{L}_{O/_R}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\,\vec{v}_{M/_R} = m\begin{pmatrix}\ell\\0\\0\end{pmatrix}_m \wedge \begin{pmatrix}0\\ \ell\dot{\theta}\\0\end{pmatrix}_m$$

$$= m\begin{vmatrix}\vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z\\ \ell & 0 & 0\\ 0 & \ell\dot{\theta} & 0\end{vmatrix}$$

$$\vec{L}_{O/_R}(M) = m\ell^2\dot{\theta}\,\vec{u}_z$$

$$\frac{\partial\vec{L}_{O/_R}(M)}{\partial t} = m\ell^2\ddot{\theta}\vec{u}_z$$

$$\vec{\mathcal{M}}_0(\vec{T}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} \quad et\ on\ a \quad \vec{T} \parallel \overrightarrow{OM}$$

Donc $\quad \vec{\mathcal{M}}_0(\vec{T}) = \vec{O}$

$\vec{\mathcal{M}}_0(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}$

$\vec{P} = mg\cos\theta\,\vec{u}_r - mg\sin\theta\,\vec{u}_\theta$

$$\vec{\mathcal{M}}_0(\vec{P}) = \begin{pmatrix} \ell \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} mg\cos\theta \\ -mg\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ \ell & 0 & 0 \\ mg\cos\theta & -mg\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$= -\ell\, mg\sin\theta\,\vec{u}_z$

$$\frac{\partial \vec{L}_o(M)}{\partial t} = \vec{\mathcal{M}}_0(\vec{P}) \Rightarrow m\ell^2\ddot{\theta}\vec{u}_z = -\ell\, mg\sin\theta\,\vec{u}_z$$

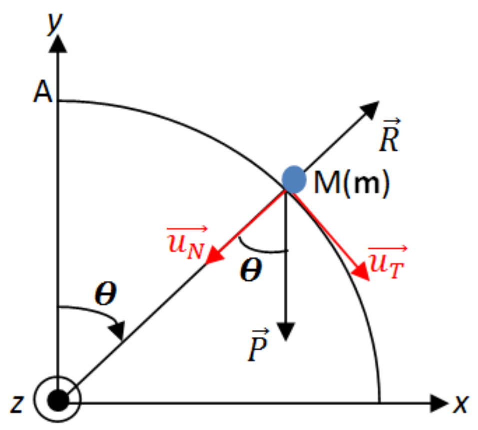
$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

Pour les $\theta$ très petits $\Rightarrow \sin\theta \simeq \theta$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \ \text{ : } \textit{équation différentielle de } 2^{\text{ème}} \textit{ordre}.$$

Sa solution est de forme $\theta = A\sin(\omega t + \varphi)$ avec l'expression de la pulsation qui vaut $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

**Exercice :**




Une masse $m$ glisse à partir d'un point $A$ et sans vitesse initiale sur une surface formée par une sphère de rayon a et de centre O. on négligera les frottements.

- En utilisant le théorème du moment cinétique et les coordonnées intrinsèques (base de Frenet), trouver l'expression de la vitesse de M.

**Solution :**

$$\vec{L}_{O/_R}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}_M$$

$$\overrightarrow{OM} = -a\,\vec{u}_N ; \vec{v}_M = v_M\vec{u}_T$$

$$\vec{L}_{O/_R}(M) = m\begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ v_M \\ 0 \end{pmatrix} = m\begin{vmatrix} \vec{u}_N & -\vec{u}_T & \vec{k} \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & v_M & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{L}_{O/_R}(M) = -ma\,v_M\vec{k} \quad \Rightarrow \frac{\partial\vec{L}_o(M)}{\partial t} = -ma\,\frac{dv_M}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_0(\vec{R}) = \vec{0} \qquad car\ \vec{R} \parallel \overrightarrow{OM}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_0(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} mg\cos\theta \\ mg\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{u}_N & -\vec{u}_T & \vec{k} \\ -a & 0 & 0 \\ mg\cos\theta & mg\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_0(\vec{P}) = -amg\sin\theta\,\vec{k}$$

$$\Rightarrow -ma\,\frac{dv}{dt}\vec{k} = -amg\sin\theta\,\vec{k}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = g\sin\theta$$

*CHAPITRE 4*

# *TRAVAIL, PUISSANCE ET ENERGIE*

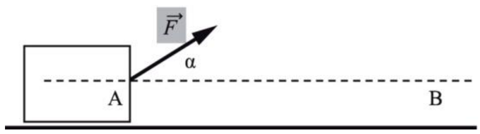
# Travail, Puissance et Energie

En principe, les lois de Newton nous permettent de résoudre tous les problèmes de la mécanique classique. Si on connaît la position et la vitesse initiale d'un point M ainsi que toutes les forces agissant sur lui, on peut prévoir l'évolution de ce point au cours du temps. Mais dans la pratique, on ne connaît pas toujours toutes les forces qui entrent en jeu et même si c'est le cas, les équations à résoudre sont trop nombreuses ou trop complexes. Dans bien des cas des informations intéressantes, concernant le système, peuvent être obtenues plus simplement en faisant appel à des notions telles que le travail et l'énergie.

## 1) Travail d'une force :

### a) Travail d'une force constante sur un déplacement rectiligne :

Soit $M$ un point matériel se déplaçant sur une droite, d'un point $A$ vers un point $B$, et soumis à une force $\vec{F}$ constante.




Le travail d'une force $\vec{F}$ constante sur un déplacement rectiligne $AB$ est :

$$W_{A\to B}\vec{F} = \vec{F}.\overrightarrow{AB} = F.AB.\cos\alpha$$

Avec $\alpha = \left(\vec{F},\overrightarrow{AB}\right)$

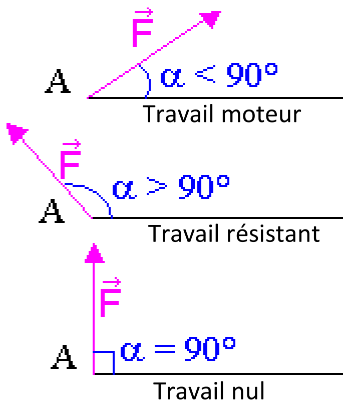
$W : Travail \ (en\ anglais: work)$

Le travail W s'exprime en N.m c'est-à-dire en Joule$(J)$.

$\alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha > 0 \ W_{AB}\left(\vec{F}\right) > 0$ Le travail est moteur.

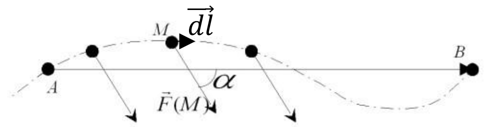
$\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha = 0 \ W_{AB}\left(\vec{F}\right) = 0$Le travail est nul.

$\alpha > \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha < 0 \ W_{AB}\left(\vec{F}\right) < 0$ Le travail est résistant.



## b) Travail Elémentaire :

Si le déplacement de $M$ n'est plus une droite mais un parcours quelconque. La force $\vec{F}$ change aussi au cours de ce déplacement, il n'est plus possible d'utiliser l'expression précédente du travail.




Pour le calcul du travail, on va décomposer le trajet $AB$ en déplacements élémentaires $\overrightarrow{d\ell} = \overrightarrow{MM'}$ infiniment petite qu'on peut les supposer comme rectilignes et $\vec{F}$ peut être considérée constante.

On définit le travail élémentaire :

$$dW_{M \to M'} = \vec{F}.\overrightarrow{d\ell}$$

$dW_{M \to M'}$ $s'appelle$ → $travail$ élémentaire du vecteur force.
→ $Circulation$ élémentaire du vecteur force.

## c) Travail d'une force variable sur un déplacement quelconque :

Pour obtenir le travail total de la force sur le déplacement total $AB$, il suffit d'additionner les travaux élémentaires de $A$à $B$.

$$W_{AB}(\vec{F}) = \sum_{A \to B} \vec{F}(M).\overrightarrow{d\ell}$$

C'est une sommation continue :

$$W_{A \to B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}(M).\overrightarrow{d\ell}$$

$$W_{A \to B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{d\ell} = C_{\vec{F}_{A \to B}}$$

$C$ : Circulation du vecteur force sur$AB$.

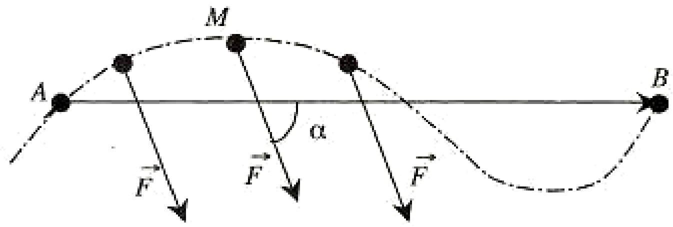
**Théorème :** le travail d'une force au cours d'un déplacement $AB$ est égal à la circulation de vecteur force sur ce déplacement.

## 2) Exemples de calcul du travail :

### a) Travail d'une force constante (Poids d'un corps) :

Si $\overrightarrow{F}$ reste constante (en norme, direction et sens) :

$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{d\ell} = \vec{F}.\int_A^B \overrightarrow{d\ell} = \vec{F}.\overrightarrow{AB}$$

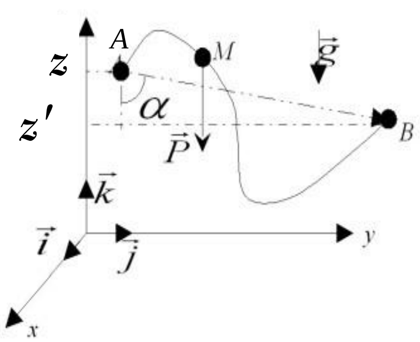



On remarque que le travail de cette force ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de la position initiale$(A)$ et la position finale$(B)$.

$$\vec{F} = \overrightarrow{cte} \Rightarrow W_{A\to B}(\vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{AB}$$

**Exemple :** travail du poids d'un corps

Considérons une masse $(m)$ qui se déplace d'un point $A$ d'altitude $z$ vers un point $B$ d'altitude $z'$.




Calculons le travail du poids de$(M)$ :

$$W_{A\to B}(\vec{P}) = \int_A^B \vec{P}.\overrightarrow{d\ell} = \vec{P}\int_A^B \overrightarrow{d\ell} = \vec{P}.\overrightarrow{AB}$$

$$\vec{P} = m\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix};\ \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \\ z'-z \end{pmatrix}$$

$$\vec{P}\cdot\overrightarrow{AB} = -mg(z'-z) = mg(z-z')$$

$$W_{A\to B}(\vec{P}) = mg(z-z')$$

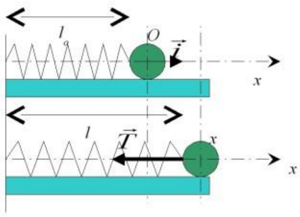
Le travail de $\vec{P}$ ne dépend pas du chemin suivi mais seulement de différence d'altitude.

Il est moteur si $z > z'$(chute)

Il est résistant si $z < z'$ (montée)

**b) <u>Travail d'une force élastique :</u>**

Considérons un ressort de raideur $k$ , de longueur $\ell_0$ au repos au bout on accroche une masse$(m)$, le tout sur un plan horizontal.




Tension$\vec{T} = -kx\,\vec{\imath} = -k\Delta\ell\,\vec{\imath}$

$$d\vec{W}(\vec{T}) = \vec{T}.\overrightarrow{d\ell} = -kx\,\vec{\imath}.dx\,\vec{\imath}$$

$$dW(\vec{T}) = -kx\,dx$$

$$W(\vec{T}) = \int_{x_1}^{x_2} -kx\,dx = -\,k\int_{x_1}^{x_2} x\,dx = -\,k\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2}$$

$$W(\vec{T}) = \frac{k}{2}(x_1^2 - x_2^2)$$

Le travail de la tension ne dépend pas du chemin suivi mais seulement de la position initiale et finale du ressort.

### 3) Puissance d'une force :

La puissance est définie par : $P(t) = \frac{dW}{dt}$

$$P(t) = \vec{F}.\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{F}.\vec{v}$$

Elle est exprimée en Watts$(W)$

Et $dW = P(t).dt = \vec{F}.\vec{v}\,dt$

$$W_{1\to 2}(\vec{F}) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}.\vec{v}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} P(t)\,dt$$

### 4) Energie :

Le concept d'énergie est très important en sciences. Il existe différents types d'énergie : mécanique, électrique, chimique, thermique, etc. Dans un système isolé, la somme de ces différentes formes d'énergie, appelée énergie totale du système, reste constante du début à la fin de n'importe quelle transformation. On dit que l'énergie totale d'un système isolé, est conservée. Dans cette partie nous nous intéressons à l'énergie cinétique et l'énergie potentielle d'un objet ponctuel. L'énergie cinétique qui est l'énergie que celui-ci acquiert de par sa vitesse, dans ce cas-ci on peut définir l'énergie comme la capacité à exécuter un certain travail. Il y a donc un lien étroit entre les concepts de travail et d'énergie. Travail et énergie se mesurent avec les mêmes unités. Alors que l'énergie cinétique d'une particule est associée à son mouvement (sa vitesse), une autre forme d'énergie est associée à sa position. C'est pourquoi on l'appelle énergie potentielle.

#### a) Energie cinétique :

Soit un point matériel $(M)$ se déplaçant dans un repère galiléen, sous l'action d'un ensemble de forces extérieures on lui applique la principe fondamental de la dynamique.

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} = m.\frac{d\vec{v}}{dt}$$

La somme des travaux élémentaires.

$$dW = \vec{F}.d\vec{\ell} \Rightarrow \sum dW = \sum \vec{F}_{ext}.d\vec{\ell}$$

$$\sum \vec{F}_{ext}.d\vec{\ell} = m.\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{v}\,d\vec{v}$$

Car : $\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{v}$

On intègre cette expression :

$$m\int_{v_A}^{v_B} \vec{v}\,.d\vec{v} = \sum \int_A^B \vec{F}_{ext}.\overrightarrow{d\ell} = \sum W_{A\to B}(\vec{F}_{ext})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m({v_B}^2 - {v_A}^2) = \sum W_{A\to B}(\vec{F}_{ext})$$

**Définition :**

Pour un point matériel de masse$(m)$ se déplaçant à la vitesse $v$ dans un référentiel $R$ galiléen, on définit l'énergie cinétique $E_c$ de $m$ par :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

**Théorème de l'énergie cinétique :**

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un point matériel soumis à un ensemble de forces extérieures entre une position A et une position B est égale à la somme des travaux de ces forces entre deux points.

$$E_c(B) - E_c(A) = \sum W_{A\to B}(\vec{F}_{ext})$$

**b) Energie potentielle :**

- **Forces conservatives :** sont les forces dont le travail ne dépend pas du chemin suivi mais que du point de départ et du point d'arrivée.

**Exemples :**

Travail du poids. Travail de la tension du ressort, travail d'une force constante.

- **Les forces non conservatives :** sont les forces dont le travail dépend du chemin suivi.

  **Exemple :** Forces de frottements

$$\vec{F} = -k\,\frac{d\vec{\ell}}{d\ell} \quad ; k = cte$$

$$dW = \vec{F}.d\vec{\ell} == -k\,\frac{d\vec{\ell}}{d\ell}\cdot\, d\vec{\ell} = -k\, d\ell$$

$$\Rightarrow W_{A\rightarrow B}(\vec{F}) == -k\int_A^B d\ell = -k\, AB$$

Le travail dépend du chemin suivi.

**Energie potentielle :**

Le travail $W_{AB}(\vec{F}_{ext})$d'une force conservative $\vec{F}_{ext}$ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de l'état initial $(A)$ et l'état final$(B)$.

Ce travail peut être exprimer à partir d'une fonction d'état $E_p$appété Energie potentielle.

La variation de l'énergie potentielle est représentée par l'opposé du travail des forces conservatives sont :

$$E_p(B) - E_p(A) = -W_{A\rightarrow B}(\vec{F}^{C}_{ext})$$

$$\Delta E_p = -W_{AB}(\vec{F}^{C}_{ext})$$

$$E_p(B) - E_p(A) = \int_A^B \vec{F}^{C}_{ext}\,.\,d\vec{\ell}$$

Où la définition différentielle.

$$dE_p = -\vec{F}^{C}_{ext}.\,d\vec{\ell}$$

**Exemples d'énergie potentielle :**

- Energie potentielle de pesanteur :

$$W_{A\to B}(\vec{P}) = mg(z - z') = E_{p_p}(A) - E_{p_p}(B)$$

⇒L'énergie potentielle de pesanteur.

$$E_{p_p} = mgz$$

L'énergie potentielle élastique.

$$W_{x_1\to x_2}(\vec{T}) = \frac{1}{2}k(x_1^2 - x_2^2)$$

$$\Rightarrow E_{p_e} = \frac{1}{2}kx^2$$

c) **Energie mécanique :**

$$E_c(B) - E_c(A) = \sum W(\vec{F}_{ext})$$

$$= \underbrace{\sum W(\vec{F}_{ext}^{C})}_{E_p(A)-E_p(B)} + \sum W(\vec{F}_{ext}^{NC})$$

$$\big(E_c(B) - E_c(A)\big) + \big(E_p(B) - E_p(A)\big) = \sum W(\vec{F}_{ext})^{NC}$$

On introduit une nouvelle fonction d'état appelée énergie mécanique $E_m$ du système avec :

$$E_m = E_c + E_p$$

$$\Rightarrow E_{m_B} - E_{m_A} = \sum W(\vec{F}_{ext})^{NC}$$

**Théorème de l'énergie mécanique :**

La variation de l'énergie mécanique d'un système entre deux points $A$ et $B$ est égale à la somme des travaux des forces extérieures non-conservatives appliquées à ce système.

**Exercice:**

Nous considérons une piste contenue dans un plan verticale. Elle est constituée d'une partie **AD** en quart de cercle et d'une partie horizontale linéaire **DEF**. Au point **E** se trouve un ressort linéaire de constante de raideur **k**, dont une extrémité est fixée au mur (voir figure ci-dessous).

1°)- Les frottements étant négligeables, on lâche sans vitesse initiale, du point **A**, une boule de masse m et de dimensions négligeables.

Au point **B** situé au milieu de la partie circulaire, on demande de :

a)- Calculer la vitesse $\mathbf{V_b}$ de la boule et la force de contact **C** qu'exerce le sol sur la boule.

b)- Représenter à l'échelle : 1N 2cm, les forces exercées sur la boule.

c)- Calculer son accélération.

2°)- Calculer la compression maximale du ressort lorsque la boule vient le percuter.

On donne: R=2m; m=100g et k=100N/m.

# *Références*

## Références:


I. Loïc Villain; Outlis mathématiques pour la physique; De boek Supérieur s.a; 2018.

II. Pierette; Benoist-Gueutal et Maurice Courbage, Mathématique pour la physique; Eyrolles; 1992.

III. BOUKLI-HACENE Nassima; Cinématique et dynamique du point matériel; Polycopié École Normale Supérieure d'Oran, 2019.

IV. Loïc Villain; Mécanique du point; De boek Supérieur s.a; 2017

V. Samir Khène; Mécanique du point matériel; Connaissances et Savoirs; 2015.

VI. Alain Gibeaud, Michel Henry; Mécanique du point 2eme Edition; Dunod 2019.

VII. Ahmed Fizazi; Mécanique du point matériel; Office des Publications Universitaires; 2016.

VIII. Jean-Marie Brébec; Tania Chaboud; Thierry Desmarais; Alain Favier; Marc Ménétrier; Régine Noel; Physique; Hachette; 2010.

IX. José-Philippe Pérez; Mécanique Fondements et applications; Dunod; 2014.

X. Laurent Gautron; PHYSIQUE TOUT-EN-UN POUR LA LICENCE; Dunod; 2009.