الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
المدرسة العليا للاقتصاد وهران
École Supérieure d'Économie- Oran

POLYCOPIÉ D'ALGÈBRE

COURS

DESTINÉ AUX ÉTUDIANTS DE PREMIÈRE ANNÉE, PREMIER CYCLE

Dr. Chellali Cherifa

2017-2018

Table des matières

0.1 Avant Propos

Ce polycopié est un document de base dans le module d'algèbre destiné aux étudiants de premières années école supèrieur d'économie. Il peut aussi être utilement utilisé par les étudiants d'autres paliers aussi bien en sciences et sciences et techniques que ceux de Biologie ou autre.

Cette polycopie est un peu les mathématiques générales .Il sera composé de 7 chapitres : Les éléments de logiques ;les ensembles et les relations binaires ;les applications linéaires ;les structures algèbriques ;les nombres complexes ;les polynomes et les fractions rationnelles et Le dernier chapitre est le calcul matriciel. Toutes les remarques et commentaires sont les bienvenus de la part des étudiants ainsi que de la part d'enseignants ou spécialistes en mathématiques ou utilisateurs de mathématiques. Ces remarques et commentaires nous permettront certainement d'améliorer le contenu ainsi que la présentation de la version finale.

Pr. Ch chellali

Chapitre 1

Les éléments de logique

1.1 Logique

1.1.1 Assertions

Une assertion est une phrase soit vraie, soit fausse, pas les deux en même temps.

Exemple 1.
- *la somme de deux nombres positifs quelconques est un nombre positif*
- *le carré de n'importe quel nombre réel est un nombre positif.*
- $2 + 2 = 4$
- $2 \times 3 = 7$
- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}; x^2 \geq 0$.

Si la proposition est vraie on lui affecte la valeur 1 ou "V",si elle est fausse on lui affecte la valeur 0 ou "F". ces deux valeurs sont appellées valeurs de vérité de la proposition.On les places dans un tableau qui s'appelle la table de vérité .On note généralement la proposition logique par P ou Q.

1.1.2 la négation d'une proposition

On appelle la négation de la proposition logique P la proposition notée $\overline{P}$ qui est fausse si P est vraie ;et vraie si P est fausse.Sa table de vérité est présentée comme suit

p	$\overline{p}$
1	0
0	1

ou bien

P	V	F
non P	F	V

FIGURE 1.1 – Table de vérité de $\overline{P}$

1.1.3 Les quantificateurs

On cherche une manière systématique de décrire des propositions utilisant le moins de mots possible On introduit donc les notations suivantes (ou quantificateurs) :

Definition 1.1.1. Un quantificateur permet de préciser le domaine de validité d'une proposition le symbole $\forall$ qui signifie quelque soit ou pourtout représente le quantificateur universel "All" (A renversée) Le symbole $\exists$ qui signifie "il existe" représente le quantificateur existentiel (exit E renversée)

Exemple 2. *Avec ces notations on peut traduire de la manière suivante :*

1. *"Etant donné un nombre entier quelconque, en lui ajoutant* 2*, on obtient encore un nombre entier" se traduit par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, n+2 \in \mathbb{N}.$$

2. *"la somme de deux nombres positifs quelconques est un nombre positif"se traduit par*

$$\forall a \geq 0, \forall b \geq 0, a+b \geq 0$$

3. *"le carré de n'importe quel nombre réel est un nombre positif" se traduit par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$$

4. *"tout nombre réel positif est le carré d'un nombre réel" se traduit par*

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists y \in \mathbb{R}; x^2 = y$$

La négation des quantificateurs

La négation de $\forall x \in E \quad P(x)$ est $\exists x \in E$ non $P(x)$.

Par exemple la négation de $\forall x \in [1, +\infty[\quad (x^2 \geq 1)$ est l'assertion

$$\exists x \in [1, +\infty[\quad (x^2 < 1)$$

En effet la négation de $x^2 \geq 1$ est non$(x^2 \geq 1)$ mais s'écrit plus simplement $x^2 < 1$.

L'ordre des quantificateurs est très important. Par exemple les deux phrases logiques

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad (x + y > 0) \qquad \text{et} \qquad \exists y \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (x + y > 0).$$

sont différentes. La première est vraie, la seconde est fausse.

L'équivalence $\Longleftrightarrow$

L'équivalence notée par : $P \iff Q$

On dira P est équivalent à Q ou P équivaut à Q ou P si et seulement si Q. Cette assertion est vraie lorsque P et Q sont vraies ou lorsque P et Q sont fausses i-e : si elles ont les même valeurs de vérité.

La table de vérité est :

$P \setminus Q$	V	F
V	V	F
F	F	V

FIGURE 1.2 – Table de vérité de $P \iff Q$

Exemples :

- Pour $x, x' \in \mathbb{R}$, l'équivalence $x \cdot x' = 0 \iff (x = 0 \text{ ou } x' = 0)$ est vraie.
- Voici une équivalence toujours fausse (quelque soit l'assertion P) : $P \iff \overline{P}$.

1.1.4 Opérations logiques

La conjonction

Soient P et Q deux propositions logiques; on appelle conjonction de P et Q la propositions logiques notée $P \wedge Q$

la propositions $P \wedge Q$ est vraie si P et Q sont vraies à la fois

Sa table de vérité est donnée par :

p	q	p et q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

$P \setminus Q$	V	F
V	V	F
F	F	F

FIGURE 1.3 – Table de vérité de P et Q

La proposition $P \wedge \overline{P}$ est une proposition fausse.

Exemple 3. *1.* $3 + 2 = 5 \wedge 2 \times 6 = 12$ *proposition vraie.*

2. $3 \times 2 = 9 \wedge 2 \times 6 = 12$ *proposition fausse.*

La disjonction

La disjonction de deux propositions P et Q est la proposition notée $P \vee Q$

$P \vee Q$ qui est vraie dès que l'une au moins des deux propositions est vraie.
Sa table de vérité est donnée par :

p	q	p ou q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$P \setminus Q$	V	F
V	V	V
F	V	F

FIGURE 1.4 – Table de vérité de P ou Q

Remarque. *La proposition $P \vee \overline{P}$ est une proposition vraie.*

Exemple 4. *1.* $3 + 2 = 5 \vee 2 \times 6 = 12$ *proposition vraie.*

2. $3 \times 2 = 9 \vee 2 \times 6 = 12$ *proposition vraie.*

Proposition 1.1.1. *Lois de Morgan Soient P et Q deux propositions logiques ; alors :*

$$\overline{P \wedge Q} \Longleftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$$

$$\overline{P \vee Q} \Longleftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$$

preuve.

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p \vee q}$	$\overline{p} \wedge \overline{q}$
1	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*
0	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*
1	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*
0	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*

Definition 1.1.2. Si p et q sont deux propositions, alors l'implication "si p alors q" est une proposition qui est vraie si p est fausse, ou bien si p et q sont simultanément vraies. Cette implication est fausse uniquement si l'antécédant p est vrai et le conséquent q faux.On note $p \Longrightarrow q$ sa table de vérité :

Proposition 1.1.2.

$$P \Longrightarrow Q \Longleftrightarrow \overline{P} \vee Q$$

$P \setminus Q$	1	0
1	1	0
0	1	1

FIGURE 1.5 – Table de vérité de $P \Longrightarrow Q$

preuve.

Proposition 1.1.3. *Etant donnée deux propositions logiques P et Q,alors ;*

$$P \Longrightarrow Q \Longleftrightarrow Q \vee \overline{P}$$

preuve.

p	q	$\overline{p}$	$p \Longrightarrow q$	$\overline{p} \vee q$
1	*1*	*0*	*1*	*1*
0	*0*	*1*	*1*	*1*
1	*0*	*0*	*0*	*0*
0	*1*	*1*	*1*	*1*

Definition 1.1.3. Soient P et Q deux propositions logiques ,alors

1. la négation de l'implication $P \Longrightarrow Q$ est la proposition $P \wedge \overline{Q}$
2. La contraposée de l'implication est la proposition $\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$
3. La réciproque de l'implication est la proposition $Q \Longrightarrow P$

propriétés 1. *Soient$P$,Q, et O trois propositions logiques on a :*

1. $(O \vee P) \vee Q = O \vee (P \vee Q)$
2. $(O \wedge P) \vee Q = O \wedge (P \wedge Q)$

1.2 Types de raisonnement

Dans notre programme on s'intresse de 5 types de raisonnement

1.2.1 raisonnement direct

on veut montrer que l'assertion $P \Longrightarrow Q$ est vraie, on suppose que P est vraie et on montre qu'alors Q est vraie

Exemple 5. *Montrer que si* $a, b \in \mathbb{Q}$ *alors ;* $a + b \in \mathbb{Q}$

Solution 1.2.1. *Prenons* $a \in \mathbb{Q}$ *et* $b \in \mathbb{Q}$ *,rappelons que les rationnels sont les nombres s'écrivant* $\frac{p}{q}$ *avec* $p \in \mathbb{Z}$ *et* $q \in \mathbb{N}^*$*, alors :*$a = \frac{p}{q}$ *pour certain* p *et* q*,de même* $b = \frac{p'}{q'}$ *donc* $a + b = \frac{pq'+qp'}{qq'} = \frac{p"}{q"}$ *avec* $p" \in \mathbb{Z}$ *et* $q" \in \mathbb{N}^*$*.Ainsi* $a + b \in \mathbb{Q}$

1.2.2 raisonnement par disjonction des cas

Si l'on souhaite vérifier une assertion $P(x)$ pour tous les x dans un ensemble$E$ on montre l'assertion pour les x dans une partie A de E ,puis pour les x n'appartenant pas à A ,c'est la méthode des disjonction des cas ou du cas par cas.

Exemple 6. *Montrer que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x - 1| \leq x^2 - x + 1$$

Solution 1.2.2. *Nous distinguons deux cas :*

1. *pour* $x \geq 1$ *on a : ,*$|x-1| = x-1$ *Calculons* $x^2 - x + 1 - |x-1| = x^2 - x + 1 - x + 1 = (x-1)^2 + 1 \geq 0$ *Ainsi* $x^2 - x + 1 - |x - 1| \geq 0$
2. *Pour* $x \leq 1$ *,*$|x-1| = -x+1$ *Calculons* $x^2 - x + 1 - |x-1| = x^2 - x + 1 + x - 1 = (x)^2 \geq 0$ *Ainsi* $x^2 - x + 1 - |x - 1| \geq 0$ *Donc* $\forall x \in \mathbb{R}, |x - 1| \leq x^2 - x + 1$

1.2.3 raisonnement par contraposée

Le raisonnement par contraposée est basé sur l'équivalence suivante :

$$P \Longrightarrow Q \Longleftrightarrow \overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$$

Donc si l'on souhaite montrer l'assertion $P \Longrightarrow Q$,on montre son contraposée

Exemple 7. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *montrer que si* n^2 *est pair,alors* n *est pair.*

Solution 1.2.3. *Nous supposons que n est impair et on montre que n^2 est impair ,donc*

$$\exists k \in \mathbb{N}, n = 2k + 1$$

Alors :

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2l + 1$$

1.2.4 raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde pour montrer $P \Longrightarrow Q$ repose sur le principe suivant : on suppose à la fois que P est vraie et Q est fausse et on cherche une contraduction, ainsi si P est vraie alors Q doit ètre vraie et donc $P \Longrightarrow Q$ est vraie.

Exemple 8. *Soit*

$$a, b \geq 0; \textit{montrer que si} \frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$$

Solution 1.2.4. *Nous raisonnons par l'absurde : supposons que*

$$\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} et a \neq b$$

Comme $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors :$a(1+a) = b(1+b)$ donc $a + a^2 = b + b^2$ d'ou $a^2 - b^2 = b - a$ cela conduit à $(a-b)(a+b) = -(a-b)$ comme $a \neq b$ alors :on peut diviser par $a - b$ on obtient $a + b = -1$ la somme des deux nombres positifs ne peut pas ètre négative.Nous obtenons une contraduction.

raisonnement par contre-exemple

Si l'on veut montrer qu'une assertion du type $\forall x \in E, P(x)$ est vraie pour chaque x de E il faut montrer que $P(x)$ est vraie .Par contre pour montrer que cette assertion est fausse alors il suffit de trouver $x \in E$ telque $P(x)$ soit fausse.trouver x c'est trouver un contre exemple.

Exemple 9. *Tout entier positif est somme de trois carrées non nuls.*

Solution 1.2.5. *L'assertion est fausse contre exemple :7 on ne peut pas l'écrire comme somme de trois carées.*

raisonnement par récurrence

Le principe permet de montrer qu'une assertion $P(n)$ dépendant de n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ la démonstration par récurrence se déroule en trois étapes : Lors de l'initialisation on prouve$P(0)$,pour l'étape de l'hérédité ;on suppose $n \geq 0$ donné avec $P(n)$ vraie et on démontre alors que l'assertion $P(n+1)$,finallement dans la conclusion on rappelle que par le principe de récurrence que $P(n)$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$

Exemple 10. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n > n$

Solution 1.2.6. *Pour* $n = 0; 2^0 = 1 > 0$ *supposons que* $P(n)$ *est vraie et montrons que* $P(n+1)$ *est vraie . On a :*$2^{n+1} = 2^n + 2^n > n + 2^n > n+1 > n$ *Donc* $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n > n$

1.3 Exercices

Soient les quatre assertions suivantes :

$$(a)\ \exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x+y>0 \quad ; \quad (b)\ \forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad x+y>0\ ;$$

$$(c)\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x+y>0 \quad ; \quad (d)\ \exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2>x.$$

1. Les assertions a, b, c, d sont-elles vraies ou fausses ?
2. Donner leur négation.

Correction. *1. (a) est fausse. Car sa négation qui est* $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad x+y \leq 0$ *est vraie. Étant donné* $x \in \mathbb{R}$ *il existe toujours un* $y \in \mathbb{R}$ *tel que* $x+y \leq 0$*, par exemple on peut prendre* $y = -(x+1)$ *et alors* $x+y = x-x-1 = -1 \leq 0$.

2. (b) est vraie, pour un x *donné, on peut prendre (par exemple)* $y = -x+1$ *et alors* $x+y = 1 > 0$*. La négation de (b) est* $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x+y \leq 0$.

3. (c) : $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x+y>0$ *est fausse, par exemple* $x=-1$, $y=0$*. La négation est* $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ x+y \leq 0$.

4. (d) est vraie, on peut prendre $x=-1$*. La négation est :* $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad y^2 \leq x$.

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Nier, de la manière la plus précise possible, les énoncés qui suivent :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \leq 1$.
2. L'application f est croissante.
3. L'application f est croissante et positive.
4. Il existe $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(x) \leq 0$.
5. Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que quel que soit $y \in \mathbb{R}$, si $x < y$ alors $f(x) > f(y)$.

Correction. *1. Cette assertion se décompose de la manière suivante : (Pour tout $x \in \mathbb{R}$) ($f(x) \leq 1$). La négation de "(Pour tout $x \in \mathbb{R}$)" est "Il existe $x \in \mathbb{R}$" et la négation de "($f(x) \leq 1$)" est $f(x) > 1$. Donc la négation de l'assertion complète est : "Il existe $x \in \mathbb{R}, f(x) > 1$.*

2. *Rappelons comment se traduit l'assertion "L'application f est croissante" : "pour tout couple de réels (x_1, x_2), si $x_1 \leq x_2$ alors $f(x_1) \leq f(x_2)$. Cela se décompose en : "(pour tout couple de réels x_1 et x_2) ($x_1 \leq x_2$ implique $f(x_1) \leq f(x_2)$)". La négation de la première partie est : "(il existe un couple de réels (x_1, x_2))" et la négation de la deuxième partie est : "($x_1 \leq x_2$ et $f(x_1) > f(x_2)$)". Donc la négation de l'assertion complète est : "Il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 \leq x_2$ et $f(x_1) > f(x_2)$".*

3. *La négation est : l'application f n'est pas croissante ou n'est pas positive. On a déjà traduit "l'application f n'est pas croissante", traduisons "l'application f n'est pas positive" : "il existe $x \in \mathbb{R}, f(x) < 0$". Donc la négation de l'assertion complète est : " Il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 < x_2$ et $f(x_1) \geq f(x_2)$, ou il existe $x \in \mathbb{R}, f(x) < 0$".*

4. *Cette assertion se décompose de la manière suivante : "(Il existe $x \in \mathbb{R}^+$) ($f(x) \leq 0$)". La négation de la première partie est : "(pour tout $x \in \mathbb{R}^+$), et celle de la seconde est :"($f(x) > 0$)". Donc la négation de l'assertion complète est : " Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) > 0$".*

5. *Cette assertion se décompose de la manière suivante : "($\exists x \in \mathbb{R}$)($\forall y \in \mathbb{R}$)($x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$)". La négation de la première partie est "($\forall x \in \mathbb{R}$), celle de la seconde est ($\exists y \in \mathbb{R}$), et celle de la troisième est ($x < y$ et $f(x) \leq f(y)$). Donc la négation de l'assertion complète est : " $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y$ et $f(x) \leq f(y)$".*

1.4 Exercices avec solutions

Soit f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

1. f est majorée ;
2. f est bornée ;
3. f est paire ;
4. f est impaire ;
5. f ne s'annule jamais ;
6. f est périodique ;

7. f est croissante ;
8. f est strictement décroissante ;
9. f n'est pas la fonction nulle ;
10. f n'a jamais les mêmes valeurs en deux points distcincts ;
11. f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$;
12. f est inférieure à g ;
13. f n'est pas inférieure à g.

Correction. *1.* $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq M$ *;*

2. $\exists M \in \mathbb{R}\ , \exists m \in \mathbb{R}\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}\ m \leq f(x) \leq M$ *;*

3. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(-x)$ *;*

4. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -f(-x)$ *;*

5. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$ *;*

6. $\exists a \in \mathbb{R}^*\ \forall x \in \mathbb{R} f(x+a) = f(x)$ *;*

7. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ , (x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$ *;*

8. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x \leq y \Rightarrow f(x) > f(y))$ *;*

9. $\exists x \in \mathbb{R}\ , f(x) \neq 0$ *;*

10. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ , (x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$ *;*

11. $\forall n \in \mathbb{N}\ , \exists x \in \mathbb{R}\, f(x) = n$ *;*

12. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq g(x)$ *;*

13. $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) > g(x)$*.*

Montrer par disjonction des cas que pour tout n ,$n(n+1)$ est un entier pair

Tous les entiers peuvent se séparer en deux parties : les pairs et les impairs . On va donc d'abord étudier le cas n pair : $n = 2k$ et donc $n(n+1) = 2k(2k+1) = 2(2k^2+k)$ pair Si n impair : $n = 2k+1$ donc $n(n+1) = (2k+1)(2k+2) = 2(2k+1)(k+1)$ pair Montrer par contraposée puis par l'absurde que si $a^2 + 9 = 2^n$ alors a est impair .

1. Par contraposée : la contraposée est si a pair alors $a^2 + 9 \neq 2^n$ Si a est pair alors a^2 est pair donc $a^2 + 9$ est impair ; or 2^n est pair . Donc $a^2 + 9 \neq 2^n$
2. Par l'absurde : supposons $a^2 + 9 = 2^n$ et a pair . Alors 9 est pair contradiction

Montrer :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* .$$

Correction. *Rédigeons la deuxième égalité. Soit $\mathcal{A}_n$, $n \in \mathbb{N}^*$ l'assertion suivante :*

$$(\mathcal{A}_n) \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

– *$\mathcal{A}_0$ est vraie ($1 = 1$).*
– *Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$ supposons que $\mathcal{A}_n$ soit vraie. Alors*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}
\end{aligned}$$

Ce qui prouve $\mathcal{A}_{n+1}$.
– *Par le principe de récurrence nous venons de montrer que $\mathcal{A}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 4$ et $x_{n+1} = \dfrac{2x_n^2 - 3}{x_n + 2}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n > 3$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(x_n - 3)$.

Correction. *1. Montrons par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n > 3$. Soit l'hypothèse de récurrence :*

$$(\mathcal{H}_n) : \quad x_n > 3.$$

- *La proposition $\mathcal{H}_0$ est vraie car $x_0 = 4 > 3$.*
- *Soit $n \geq 0$, supposons $\mathcal{H}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{H}_{n+1}$ est alors vraie.*

$$x_{n+1} - 3 = \frac{2{x_n}^2 - 3}{x_n + 2} - 3 = \frac{2{x_n}^2 - 3x_n - 9}{x_n + 2}.$$

Par hypothèse de récurrence $x_n > 3$, donc $x_n + 2 > 0$ et $2{x_n}^2 - 3x_n - 9 > 0$ (ceci par étude de la fonction $x \mapsto 2x^2 - 3x - 9$ pour $x > 3$). Donc $x_{n+1} - 3$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- *Nous avons montrer*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{H}_n \Rightarrow \mathcal{H}_{n+1}$$

et comme $\mathcal{H}_0$ est vraie alors $\mathcal{H}_n$ est vraie quelque soit n. Ce qui termine la démonstration.

2. *Montrons que $x_{n+1} - 3 - \frac{3}{2}(x_n - 3)$ est positif.*

$$x_{n+1} - 3 - \frac{3}{2}(x_n - 3) = \frac{2{x_n}^2 - 3}{x_n + 2} - \frac{3}{2}(x_n - 3) = \frac{1}{2}\frac{{x_n}^2 + 3x_n + 12}{x_n + 2}$$

Ce dernier terme est positif car $x_n > 3$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, donner la négation des propositions suivantes :

1. $(x = 1) \vee (x = -1)$
2. $(x \geq -2) \wedge (x < 1)$
3. $0 \leq x \leq 1$
4. $(x = 0) \vee (x^2 = 1 \wedge x \geq 0)$
5. $(3 \leq x \leq 7) \Longrightarrow (10 \leq x \leq 17)$

Solution 1.4.1. *1.* $(x = 1) \vee (x = -1)$ *la négation* $(x \neq 1) \wedge (x \neq -1)$

2. $(x \geq -2) \wedge (x < 1)$ *la négation* $(x < -2) \vee (x \geq 1)$

3. $0 \leq x \leq 1$ *la négation* $0 \geq x \geq 1$

4. $(x = 0) \vee (x^2 = 1 \wedge x \geq 0)$ *la négation* $(x \neq 0) \wedge (x^2 \neq 1 \vee x < 0)$

5. $(3 \leq x \leq 7) \Longrightarrow (10 \leq x \leq 17)$ *la négation* $(3 \leq x \leq 7) \wedge (10 > x > 17)$

Chapitre 2

Ensembles et relations binaires

2.1 Ensemble

Definition 2.1.1. On appelle ensemble E toute colletion d'objets appelés éléments de l'ensemble E ,si le nombre de ces objets est fini on l'appelle cardinal de E et on le note $CardE$

Exemple 11.
1. *L'ensemble des entiers naturels* $E = \mathbb{N}$
2. $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, CardE = 8.$
3. *l'ensemble vide est noté* $\emptyset$*,c'est l'ensemble qui ne contient aucun élément. On a alors* $Card(\emptyset) = 0.$
4. *Un ensemble contenant un seul élément est appelé "Singleton", donc de cardinal égal à* 1.

Definition 2.1.2. Si x est un élément de l'ensemble E ; on note $x \in E$ et on dit que x appartient à E
si x n'appartient pas à E on note $x \notin E$. Le symbole $\in$ est une relation entre un élément et un ensemble.

2.1.1 Détermination d'un ensemble

Pour définir un ensemble, – ou bien on connait la liste de tous ses éléments, on dit alors que l'ensemble est donné "par Extension", – ou bien on connait seulement les relations qui lient les éléments et qui nous permettent de les retrouver tous, on dit alors que l'ensemble est donné par "Compréhension".

2.1.2 Opérations sur les ensembles

Inclusion, union, intersection, complémentaire

1. L'inclusion On dit qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble B, ou que A est une partie de l'ensemble B, ou que A est un sous ensemble de B si tout élément de A est un élément de B. On note $A \subset B$ et on a formellement :

$$\boxed{\text{A}\subset B \Longleftrightarrow \forall x(x \in A \Longrightarrow x \in B)}$$

L'ensemble de toutes les parties d'un ensemble A est noté $P(A)$.

Exemple 12. *(a) Soit $A = \{1, \alpha, 2\}$,on a $cardA = 3$ alors $CardP(A) = 2^3$, et*

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{\alpha\}, \{2\}, \{1, \alpha\}, \{1, 2\}, \{\alpha, 2\}, A\}$$

(b) $E = \emptyset, CardE = 0$ donc $CardP(A) = 2^0 = 1$ et $P(E) = \{\emptyset\}$

2. L'égalité Soient A et B deux ensembles, on dit que A est égal à B, on note$A = B$, s'ils ont les mêmes éléments. Formellement on a :

$$\boxed{\text{A} = \text{B} \Longleftrightarrow \forall x(x \in A \Longleftrightarrow x \in B)}$$

3. Complémentaire. Si $A \subset E$,

$$\boxed{\complement_E A = \big\{x \in E \mid x \notin A\big\}}$$

On le note aussi $E \setminus A$ ou $\complement A$

Exemple 13. *Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et soit A un sous ensemble de E avec $A = \{1, 5\}$ alors le complémentaire de A dans E est l'ensemble $\{2, 3, 4\}$*

4. Union. Pour $A, B \subset E$,

$$\boxed{\text{A} \cup B = \big\{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\big\}}$$

Le « ou » n'est pas exclusif : x peut appartenir à A et à B en même temps.

Exemple 14. *Soit $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et soit $B = \{\alpha, \beta\}$ alors $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, \alpha, \beta\}$*

5. Intersection.

$$\boxed{\text{A} \cap B = \big\{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\big\}}$$

Exemple 15. *Soit $A = \{1, 2, 3\}$ et soit $B = \{\alpha, 1, \beta\}$ alors $A \cap B = \{1\}$*

Proposition 2.1.1. *Soit A un ensemble, alors $\emptyset \in P(A)$ et $A \in P(A)$.*

Ensembles disjoints. On dit que F et G sont disjoints si $F \cap G = \emptyset$.
On dit que des ensembles F_i sont deux à deux disjoints si $(\forall i \in \mathbb{N})$ $(\forall j \in \mathbb{N})$,
$i \neq jF_i \cap F_j \neq \emptyset$.

2.1.3 Différence

La différence de deux sous-ensembles F et G de E, c'est l'ensemble des éléments de F qui n'appartiennent pas à G,

$$\boxed{\mathrm{F}\backslash G = \{x \in E \,|\, ((x \in F) \wedge (x \notin G))\} = F \cap C_E G.}$$

2.1.4 Différence symétrique

La différence symétrique de deux ensembles F et G est l'ensemble noté $F\Delta G$ définit par

$$\boxed{\mathrm{F}\Delta G = (F \setminus G) \cup (G \setminus F) = (F \cup G) \setminus (F \cap G)}$$

Exemple 16. *Soit $F \subset \mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers divisibles par 2 et $G \subset \mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers divisibles par 3. Alors $F\Delta G$ est l'ensemble des entiers divisibles par 2 ou 3 mais pas par 6, $F\Delta G = \{\ldots, -9, -8, -4, -3, -2, 0, 2, 3, 4, 8, 9, 14, 15, \ldots\}$.*

2.1.5 Règles de calculs

Soient A, B, C des parties d'un ensemble E.

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- $A \cap \varnothing = \varnothing, \quad A \cap A = A, \quad A \subset B \Longleftrightarrow A \cap B = A$
- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- $A \cup \varnothing = A, \quad A \cup A = A, \quad A \subset B \Longleftrightarrow A \cup B = B$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $\complement\left(\complement A\right) = A$ et donc $A \subset B \Longleftrightarrow \complement B \subset \complement A$
- $\complement\,(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$
- $\complement\,(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$

2.1.6 Cardinal

Définition 2.1.1. *Soit E Un ensemble ; le nombre d'éléments de E est noté $E = n$. cet entier n est unique et s'appelle le cardinal de E (ou le nombre d'éléments) et est noté $CardE$.*

Enfin quelques propriétés :

1. Si A est un ensemble fini et $B \subset A$ alors B est aussi un ensemble fini et $CardB \leq CardA$.
2. Si A, B sont des ensembles finis disjoints (c'est-à-dire $A \cap B = \varnothing$) alors
$$\boxed{\text{Card (A }\cup B) = CardA + CardB.}$$
3. Si A est un ensemble fini et $B \subset A$ alors
$$\boxed{\text{Card (A }\setminus B) = CardA - CardB.}$$
En particulier si $B \subset A$ et $CardA = CardB$ alors $A = B$.
4. Enfin pour A, B deux ensembles finis quelconques :
$$\boxed{Card(A \cup B) = CardA + CardB - Card(A \cap B)}$$

La preuve de la dernière propriété utilise la décomposition

$$A \cup B = A \cup \big(B \setminus (A \cap B)\big)$$

Les ensembles A et $B \setminus (A \cap B)$ sont disjoints, donc

$$Card(A \cup B) = CardA + Card\big(B \setminus (A \cap B)\big) = CardA + CardB - Card(A \cap B)$$

2.1.7 Produit cartésien

Soient E et F deux ensembles. Le produit cartésien, noté $E \times F$, est l'ensemble des couples (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$.

$$E \times F = \{(x, y\}, x \in E \land y \in F\}$$

Exemple. *1. Vous connaissez $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \big\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\big\}$.*

2. Autre exemple $[0, 1] \times \mathbb{R} = \big\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, y \in \mathbb{R}\big\}$

3. $[0,1] \times [0,1] \times [0,1] = \{(x,y,z) \mid 0 \leq x,y,z \leq 1\}$

2.2 Relations binaires sur un ensemble

De façon informelle, une relation binaire sur un ensemble E est une proposition qui lie entre eux certains elements de cet ensemble. Plus proprement, une relation binaire R sur un ensemble E est d'éfinie par une partie G de $E \times E$. Si $(x,y) \in G$ on dit que x est en relation avec y et on le note xRy.

Exemple 17. *si $E = P(F)$, ensemble des parties d'un ensemble F, on peut definir la relation d'inclusion entre éléments de E. Si A et B sont deux parties de F, on dit que "A est inclus dans B" et on écrit $A \subset B$ si les éléments de A appartiennent tous á B.*

Proposition 2.2.1. *une relation binaire R sur un ensemble E est*

1. *réflexive si $\forall x \in E, xRx$*
2. *transitive si $\forall x,y,z \in E, (xRyetyRz) \Longrightarrow xRz$*
3. *symétrique si $\forall x,y \in E, (xRy) \Longrightarrow (yRx)$*
4. *antisymétrique si $\forall x,y \in E, (xRyetyRx) \Longrightarrow x = y$*

2.2.1 Relations d'équivalence

Definition 2.2.1. Une relation binaire R sur un ensemble E qui est réflexive, transitive et symétrique est appelée relation d'équivalence sur E.

Exemple 18. *Soit R une relation binaire définie par :*

$$\forall x,y \in \mathbb{R}; xRy \Longleftrightarrow x^2 - 1 = y^2 - 1$$

Montrer que R est une relation d'équivalence.

Solution 2.2.1. *Pour qur R soit une relation d'équivalence; il faut montrer qu'elle soit reflexive transitive et symétrique :*

1. *R est bien reflexive puisque $xRx \Longleftrightarrow x^2 - 1 = x^2 - 1$*
2. *R est symétrique puique $xRy \Longleftrightarrow x^2 - 1 = y^2 - 1 \Longrightarrow y^2 - 1 = x^2 - 1$*
3. *R est transitive $xRy \Longleftrightarrow x^2 - 1 = y^2 - 1$ et $yRz \Longleftrightarrow y^2 - 1 = z^2 - 1$ donc xRz*

2.2.2 Relations d'ordre

Definition 2.2.2. Une relation binaire R sur un ensemble E qui est réflexive, transitive et antisymétrique est appelée relation d'ordre sur E. Deux elements $x$et y d'un ensemble E muni d'une relation d'ordre R sont dits comparables si xRy ou yRx. Si tous les éléments de E sont deux á deux comparables la relation d'ordre est dite totale.C'est l'ordre n'est pas totale alors on dit que c'est une reletion d'ordre partielle.

Exemple 19. 1. *la relation d'ordre usuelle$\leq$ ou $\geq$ sur R (ou sur Q) est une relation d'ordre totale.*

2. *la relation d'inclusion entre parties d'un ensemble E est une relation d'ordre partielle.*

2.2.3 Exercices avec solutions

Exercice 2.2.1. *Montrer l'assertions suivante, E étant un ensemble :*

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap B = A \cup B) \Longrightarrow A = B$$

Correction. *Nous allons démontrer l'assertion par deux méthodes.*

1. *Tout d'abord de façon "directe". Nous supposons que A et B sont deux parties de E telles que $A \cap B = A \cup B$. Nous devons montrer que $A = B$.*

   Pour cela étant donné $x \in A$ montrons qu'il est aussi dans B. Comme $x \in A$ alors $x \in A \cup B$ donc $x \in A \cap B$ (car $A \cup B = A \cap B$). Ainsi $x \in B$.

   Maintenant nous prenons $x \in B$ et le même raisonnement implique $x \in A$. Donc tout élément de A est dans B et tout élément de B est dans A. Cela veut dire $A = B$.

2. *Ensuite, nous pouvons démontrer par contraposition. Nous supposons que $A \neq B$ et non devons monter que $A \cap B \neq A \cup B$.*

   Si $A \neq B$ cela veut dire qu'il existe un élément $x \in A \setminus B$ ou alors un élément $x \in B \setminus A$. Quitteà échanger A et B, nous supposons qu'il existe $x \in A \setminus B$. Alors $x \in A \cup B$ mais $x \notin A \cap B$. Donc $A \cap B \neq A \cup B$.

Exercice 2.2.2. *Soient A, B et C trois sous-ensembles de E. Montrer que :*

Si $A \cup C \subset A \cup B$ et $A \cap C \subset A \cap B$ alors $C \subset B$.

Correction. *étant donné $x \in C$ montrons qu'il est aussi dans B. Si $x \in C$ alors $x \in A \cup C$ et puisque $A \cup C \subset A \cup B$ donc $x \in A \cup B$ On a :$x \in A \cup C$ et $x \in A \cup B$ alors $x \in A$ ou bien $x \in B$, Si $x \in A$ alors $x \in A \cap C$ et puisque $A \cap C \subset A \cap B$ donc $x \in A \cap B$ ainsi $x \in B$.*

Chapitre 3

les applications

3.0.4 Définitions

1. *une application est une relation entre deux ensembles pour laquelle chaque élément du premier (appelé ensemble de départ ou source) est relié à un unique élément du second (l'ensemble d'arrivée ou but). Le terme est concurrencé par celui de fonction, bien que celui-ci désigne parfois plus spécifiquement les applications dont le but est un ensemble de nombres et parfois, englobe plus largement les relations pour lesquelles chaque élément de l'ensemble de départ est relié à au plus un élément de l'ensemble d'arrivée*

   Nous représenterons les applications par deux types d'illustrations : les ensembles « patates », l'ensemble de départ (et celui d'arrivée) est schématisé par un ovale ses éléments par des points. L'association $x \mapsto f(x)$ est représentée par une flèche.

   L'autre représentation est celle des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ou des sous-ensembles de $\mathbb{R}$).

   L'ensemble de départ $\mathbb{R}$ est représenté par l'axe des abscisses et celui d'arrivée par l'axe des ordonnées. L'association $x \mapsto f(x)$ est représentée par le point $(x, f(x))$.

2. *Égalité. Deux applications $f, g : E \to F$ sont égales si et seulement si pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$. On note alors $f = g$.*

3. *Le graphe de $f : E \to F$ est $\Gamma_f = \Big\{\big(x, f(x)\big) \in E \times F \mid x \in E\Big\}$*

4. *Composition. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ alors $g \circ f : E \to G$ est l'application définie par $g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$.*

5. *Antécédents Fixons $y \in F$. Tout élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$ est un antécédent de y.*

   En termes d'image réciproque l'ensemble des antécédents de y est $f^{-1}(\{y\})$.

Exemple 20. *1. L'identité, $Id_E : E \to E$ est simplement définie par $x \mapsto x$ et sera très utile dans la suite.*

2. Définissons f, g ainsi

$$f : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow &]0,+\infty[\\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}, \qquad g : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x-1}{x+1} \end{array}.$$

Alors $g \circ f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ vérifie pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1} = \frac{1-x}{1+x} = -g(x).$$

3.0.5 Image directe, image réciproque

Soient E, F deux ensembles.

Definition 3.0.3. Soit $A \subset E$ et $f : E \to F$, l'image directe de A par f est l'ensemble

$$\boxed{\mathrm{f(A)} = \left\{ \mathrm{f(x)} \mid x \in A \right\}}$$

Definition 3.0.4. Soit $B \subset F$ et $f : E \to F$, l'image réciproque de B par f est l'ensemble

$$\boxed{\mathrm{f}^{-1}(B) = \left\{ x \in E \mid f(x) \in B \right\}}$$

Remarque. *1. $f(A)$ est un sous-ensemble de F, $f^{-1}(B)$ est un sous-ensemble de E.*

2. La notation « $f^{-1}(B)$ » est un tout, rien ne dit que f est un fonction bijective (voir plus loin). L'image réciproque existe quelque soit la fonction.

3. L'image directe d'un singleton $f(\{x\}) = \{f(x)\}$ est un singleton. Par contre l'image réciproque d'un singleton $f^{-1}(\{y\})$ dépend de f. Cela peut être un singleton, un ensemble à plusieurs éléments ; mais cela peut-être E tout entier (si f est une fonction constante) ou même l'ensemble vide (si aucune image par f ne vaut y).

3.1 Injection, surjection, bijection

3.1.1 Injection, surjection

Soit E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

Definition 3.1.1. f est injective si pour tout $x, x' \in E$ avec $f(x) = f(x')$ alors $x = x'$. Autrement dit :

$$\boxed{\forall x, x' \in E \quad \big(f(x) = f(x') \implies x = x'\big)}$$

Definition 3.1.2. f est surjective si pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Autrement dit :

$$\boxed{\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad \big(y = f(x)\big)}$$

Une autre formulation : f est surjective si et seulement si $f(E) = F$.

Remarque. *Une autre façon de formuler l'injectivité et la surjectivité est d'utiliser les antécédents.*

- *f est injective si et seulement si tout élément y de F a au plus un antécédent (et éventuellement aucun).*
- *f est surjective si et seulement si tout élément y de F a au moins un antécédent.*

Exemple 21. *1. Soit $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ définie par $f_1(x) = \frac{1}{1+x}$. Montrons que f_1 est injective. soit $x, x' \in \mathbb{N}$ tels que $f_1(x) = f_1(x')$. Alors $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x'}$, donc $1 + x = 1 + x'$ et donc $x = x'$. Ainsi f_1 est injective.*

Par contre f_1 n'est pas surjective. Il s'agit de trouver un élément y qui n'a pas d'antécédent par f_1. Par exemple $y = 2$ n'a pas d'antécédent. Ainsi f_1 n'est pas surjective.

2. Soit $f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ définie par $f_2(x) = x^2$. Alors f_2 n'est pas injective. En effet on peut trouver deux éléments $x, x' \in$ différents tels que $f_2(x) = f_2(x')$. Il suffit de prendre par exemple $x = 1$, $x' = -1$.

f_2 n'est pas non plus surjective, en effet il existe des éléments $y \in \mathbb{Z}$ qui n'ont aucun antécédent. Par exemple $y = 3$: si $y = 3$ avait un antécédent x par f_2, nous aurions $f_2(x) = y$, c'est-à-dire $x^2 = 3$, d'où $x = \pm\sqrt{3}$. Mais alors x n'est pas un entier de $\mathbb{Z}$. Donc $y = 3$ n'a pas d'antécédent et f_2 n'est pas surjective.

3.1.2 Bijection

Definition 3.1.3. f est bijective si elle injective et surjective. Cela équivaut à : pour tout $y \in F$ il existe un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Autrement dit : $\forall y \in F \quad \exists! x \in E \quad \big(y = f(x)\big)$

L'existence du x vient de la surjectivité et l'unicité de l'injectivité. Autrement dit, tout élément de F a un unique antécédent par f.

Definition 3.1.4. Soit E, F des ensembles et $f : E \to F$ une application.alors si f est bijective donc elle est inversible i-e : il existe une application $g : F \to E$ telle que $f \circ g =_F$ et $g \circ f =_E$. g est l'application inverse de f et vice versa.

Definition 3.1.5.

Proposition 3.1.1.

Si f est inversible alors l'application g est unique et elle aussi est bijective. L'application g s'appelle aussi la bijection réciproque de f et est notée f^{-1}. De plus $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

Remarque. *$f \circ g = Id_F$ se reformule ainsi*

$$\forall y \in F \quad f\big(g(y)\big) = y.$$

Alors que $g \circ f = Id_E$ s'écrit :

$$\forall x \in E \quad g\big(f(x)\big) = x.$$

Exemple 22. *$f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ définie par $f(x) = \exp(x)$ est bijective, sa bijection réciproque est $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(y) = \ln(y)$. Nous avons bien $\exp\big(\ln(y)\big) = y$, pour tout $y \in]0, +\infty[$ et $\ln\big(\exp(x)\big) = x$, pour tout $x \in$.*

Proposition 3.1.1. *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications bijectives. L'application $g \circ f$ est bijective et sa bijection réciproque est $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$*

Chapitre 4

Les structures algébriques

Definition 4.0.6. Soit E un ensemble. Une loi de composition interne (LCI) sur E est une application $*$ de $E \times E$ dans E.

Exemple 23. *1. La somme sur* $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ *.*

2. Le produit sur $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ *.*

3. La différence sur $\mathbb{R}$ *ou*$\mathbb{Z}$

4. Les lois $\cup; \cap; \triangle$ *(reunion, intersection et différence symétrique) définies sur* $P(F)$*.*

Definition 4.0.7. Soient $*$ et o deux lois de compositions internes sur un ensemble E

1. $*$ est commutative si $\forall a, b \in E; a * b = b * a$
2. $*$ est associative si $\forall a, b, c \in E; (a * b) * c = a * (b * c)$
3. $*$ est distributive par rapport à o si

$$\forall a, b, c \in E; a * (boc) = (a * b)o(a * c)\text{et}(boc) * a = (b * a)o(c * a)$$

4. $e \in E$ un élément neutre à gauche (respectivement à droite) de la loi $*$ si

$$\exists e \in E, \forall a \in E; e * a = a$$

respectivement$(\exists e \in E, \forall a \in E; a * e = a)$

Exemple 24. *1. La différence n'est ni associative ni commutative sur* $\mathbb{R}$*.*

2. Les lois $\cup, \cap, \triangle$ *sur* $P(F)$ *sont associatives et commutatives. Elles admettent pour neutres respectifs* $\emptyset, F, \emptyset$*.*

Si $*$ admet un élément neutre, celui-ci est unique. Soit x un élément de E. Si $*$ est associative (et admet un élément neutre) et si x admet un symétrique pour $*$, celui-ci est unique.

4.1 Groupe

4.1.1 Définition

Definition 4.1.1. Un groupe $(G, \star)$ est un ensemble G auquel est associé une opération $\star$ (la loi de composition) vérifiant les quatre propriétés suivantes :

1. pour tout $x, y \in G$, $\quad x \star y \in G \quad$ ($\star$ est une loi de composition interne)
2. pour tout $x, y, z \in G$, $\quad (x \star y) \star z = x \star (y \star z) \quad$ (la loi est associative)
3. il existe $e \in G$ tel que $\quad \forall x \in G,\ x \star e = x$ et $e \star x = x \quad$ (e est l'élément neutre)
4. pour tout $x \in G$ il existe $x' \in G$ tel que $\quad x \star x' = x' \star x = e \quad$ (x' est l'inverse de x et est noté x^{-1})

Si de plus l'opération vérifie

$$\text{pour tout } x, y \in G, \qquad x \star y = y \star x,$$

on dit que G est un groupe commutatif (ou abélien).

- L'élément neutre e est unique. En effet si e' vérifie aussi le point (3), alors on a $e' \star e = e$ (car e est élément neutre) et $e' \star e = e'$ (car e' aussi). Donc $e = e'$. Remarquez aussi que l'inverse de l'élément neutre est lui-même.
- Un élément $x \in G$ ne possède qu'un seul inverse. En effet si x' et x'' vérifient tous les deux le point (4) alors on a $x \star x'' = e$ donc $x' \star (x \star x'') = x' \star e$. Par l'associativité (2) et la propriété de l'élément neutre (3) alors $(x' \star x) \star x'' = x'$. Mais $x' \star x = e$ donc $e \star x'' = x'$ et ainsi $x'' = x'$.

4.1.2 Exemples

1. $(\mathbb{R}^*, \times)$ est un groupe commutatif, $\times$ est la multiplication habituelle. En effet :
   (a) Si $x, y \in \mathbb{R}^*$ alors $x \times y \in \mathbb{R}^*$.
   (b) Pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}^*$ alors $x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$, c'est l'associativité de la multiplication des nombres réels.
   (c) 1 est l'élément neutre pour la multiplication, en effet $1 \times x = x$ et $x \times 1 = x$, ceci quelque soit $x \in \mathbb{R}^*$.
   (d) L'inverse d'un élément $x \in \mathbb{R}^*$ est $x' = \frac{1}{x}$ (car $x \times \frac{1}{x}$ est bien égal à l'élément neutre 1). L'inverse de x est donc $x^{-1} = \frac{1}{x}$.
   Ces propriétés font de $(\mathbb{R}^*, \times)$ un groupe.

(e) Enfin $x \times y = y \times x$, c'est la commutativité de la multiplication des réels.

Definition 4.1.2. Soient $(G, *)$ un groupe et H une partie de G. H est un sous-groupe de $(G, *)$ si et seulement si H est non vide, stable pour $*$ (c'est à dire $\forall (x, y) \in H^2, x * y \in H$) e et G sont des sous-groupes de $(G, *)$ appelés sous-groupes triviaux du groupe $(G, *)$.

Definition 4.1.3. Soient $(G, *)$ un groupe et H une partie non vide de G

$$H\text{est un sous groupe} \Longleftrightarrow \begin{cases} 1) e \in H \\ 2) \forall (x, y) \in H^2, x * y \in H \\ 3) \forall x \in H, x' \in H \end{cases}$$

Definition 4.1.4. (Caractérisation d'un sous groupe) Soient $(G, *)$ un groupe et H une partie non vide de G

$$H\text{est un sous groupe} \Longleftrightarrow \forall (x, y) \in H^2, x * y^{-1} \in H$$

Exemple 25. *Soit*

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x + y = 0\}$$

Montrer que H est un sous groupe de $(\mathbb{R}^2, +)$

Solution 4.1.1. *1)*$(0, 0) \in \mathbb{R}^2$
2)$(x, y) \in H, (x', y') \in H$

$$(x, y) - (x', y') = (x - x', y - y') \in H$$

En effet $2(x - x') + (y - y') = 0$

Remarque. *1. L'intersection de deux sous groupes est un sous groupe.*

2. La réunion de deux sous groupes n'est pas en général un sous groupe.

3. Pour tout ensemble G ;l'ensemble $\{e\}$ et G tout entier sont des sous groupes de G.

4. Tout sous groupe d'un groupe abélien est un groupe abélien.

Hommomorphisme de groupe

Soient $(G; *)$ et $(G'; \circ)$ deux groupes ; et soit f une application de $(G; *)$ vers $(G'; \circ)$ est dite hommomorphisme de groupe si :

$$\forall a, b \in G, f(a * b) = f(a) \circ f(b)$$

Si f bijective,on dit que f est un isomorphisme

Si $G = G'$ on dit que f endomorphisme ,si de plus f bijecive on dit que f est un automorphisme.

Exemple 26.

$f: \ (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \times).$
$x \mapsto \exp(x)$

$f: \ (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{G}, \times).$
$n \mapsto a^n$

4.1.3 Anneaux et corps

.

Anneaux

Soit A un ensemble non vide ayant au moins deux éléments muni de deux lois de composition interne (notées $+$ et $\times$). $(A, +, \times)$ est un anneau ,

1. *(A,+) est un groupe commutatif*
2. *a) $\times$ est associative b) $\times$ possède un élément neutre dans A*
3. *$\times$ est distributive sur $+$*
4. *Si$\times$ est commutative, l'anneau est dit commutatif*

Exemple 27. *1.* $(\mathbb{R}, +, \times)$ *est un anneau commutatif.*

2. $(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$ *est un anneau commutatif.avec :*

$$(a, b) \oplus (a', b') = (a + a', b + b')$$

$$(a, b) \otimes (a', b') = (aa', bb')$$

Corps

Soit $(K, +, \times)$ un anneau. $(K, +, \times)$ est un corps si et seulement si tout élément non nul de K admet un inverse (pour $\times$) dans K. Si $\times$ est commutative, le corps est dit commutatif.

Exemple 28. $(Q, +, \times), (R, +,)$ *sont des corps commutatifs.*

Chapitre 5

Les nombres complexes

5.0.4 Définition

Definition 5.0.5. Un nombre complexe est un couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ que l'on notera $a + ib$ avec $i^2 = -1$

Cela revient à identifier 1 *avec le vecteur* $(1, 0)$ *de* $\mathbb{R}^2$*, et* i *avec le vecteur* $(0, 1)$*. On note* $\mathbb{C}$ *l'ensemble des nombres complexes. Si* $b = 0$*, alors* $z = a$ *est situé sur l'axe des abscisses, que l'on identifie à* $\mathbb{R}$*. Dans ce cas on dira que* z *est réel, et si* $b \neq 0$ *et* $a = 0$*,* z *est dit imaginaire pur. En particulier un nombre complexe est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle. Un nombre complexe est nul si et et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nuls.*

5.0.5 Opérations sur les nombres complexes

Si $z = a + ib$ *et* $z' = a' + ib'$ *sont deux nombres complexes, alors on définit les opérations suivantes :*

- *addition :* $(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$
- *multiplication :* $(a + ib) \times (a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$*. On développe en suivant les règles de la multiplication usuelle avec la convention :* $i^2 = -1$

5.0.6 Partie réelle et imaginaire

Soit $z = a + ib$ *un nombre complexe, sa partie réelle est le réel* a *et on la note* $\Re(z)$ *; sa partie imaginaire est le réel* b *et on la note* $\Im(z)$*.*

$$z = z' \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} \Re(z) = \Re(z') \\ et \\ \Im(z) = \Im(z') \end{array} \right.$$

5.0.7 L'opposé et l'inverse d'un nombre complexe

- *L'opposé de* $z = a + ib$ *est* $-z = (-a) + i(-b) = -a - ib$.
- *La multiplication par un scalaire* $\lambda \in \mathbb{R}$ *:* $\lambda \cdot z = (\lambda a) + i(\lambda b)$.
- *L'inverse : si* $z \neq 0$*, il existe un unique* $z' \in \mathbb{C}$ *tel que* $zz' = 1$ *(où* $1 = 1 + i \times 0$*).*$T"T^n - T^nT" \geq_A 0$

  Pour la preuve et le calcul on écrit $z = a + ib$ *puis on cherche* $z' = a' + ib'$ *tel que* $zz' = 1$*. Autrement dit* $(a + ib)(a' + ib') = 1$*. En développant et identifiant les parties réelles et imaginaires on obtient les équations*

$$\begin{cases} aa' - bb' = 1 & (L_1) \\ ab' + ba' = 0 & (L_2) \end{cases}$$

  En écrivant $aL_1 + bL_2$ *(on multiplie la ligne* (L_1) *par* a*, la ligne* (L_2) *par* b *et on additionne) et* $-bL_1 + aL_2$ *on en déduit*

$$\begin{cases} a'\left(a^2 + b^2\right) = a \\ b'\left(a^2 + b^2\right) = -b \end{cases} \qquad \textit{donc} \qquad \begin{cases} a' = \frac{a}{a^2+b^2} \\ b' = -\frac{b}{a^2+b^2} \end{cases}$$

  L'inverse de z*, noté* $\frac{1}{z}$*, est donc*

$$z' = \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i\frac{-b}{a^2 + b^2} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}.$$

- *La division :* $\frac{z}{z'}$ *est le nombre complexe* $z \times \frac{1}{z'}$.
- *Puissances :* $z^2 = z \times z$, $z^n = z \times \cdots \times z$ *(*n *fois,* $n \in \mathbb{N}$*). Par convention* $z^0 = 1$ *et* $z^{-n} = \left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{z^n}$.

5.0.8 Conjugué, module

Le conjugué de $z = a + ib$ *est* $\bar{z} = a - ib$*, autrement dit* $\Re(\bar{z}) = \Re(z)$ *et* $\Im(\bar{z}) = -\Im(z)$*. Le point* $\bar{z}$ *est le symétrique du point* z *par rapport à l'axe réel.*

Le module de $z = a + ib$ *est le réel positif* $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$*. Comme* $z \times \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$ *alors le module vaut aussi* $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$*.*

Quelques formules :

- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}, \quad \bar{\bar{z}} = z, \quad \overline{zz'} = \bar{z}\overline{z'}$
- $z = \bar{z} \Longleftrightarrow z \in R$

- $|z|^2 = z \times \bar{z}, \quad |\bar{z}| = |z|, \quad |zz'| = |z||z'|$

- $|z| = 0 \iff z = 0$

Proposition 5.0.1 (L'inégalité triangulaire). $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$

preuve. *Pour la preuve on calcule* $|z + z'|^2$ *:*

$$\begin{aligned}
|z + z'|^2 &= (z + z')\,\overline{(z + z')} \\
&= z\bar{z} + z'\overline{z'} + z\overline{z'} + z'\bar{z} \\
&= |z|^2 + |z'|^2 + 2\Re(z'\bar{z}) \\
&\leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|z'\bar{z}| \\
&\leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|zz'| \\
&\leq (|z| + |z'|)^2
\end{aligned}$$

5.1 Racines carrées, équation du second degré

5.1.1 Racines carrées d'un nombre complexe

Soitz un nombre complexe, une racine carrée est un nombre complexe ω *tel que* $\omega^2 = z$. *Par exemple si* $x \in R_+$, *on connaît deux racines carrées :* $\sqrt{x}, -\sqrt{x}$. *Autre exemple : les racines carrées de* -1 *sont* i *et* $-i$.

Proposition 5.1.1. *Soit* z *un nombre complexe, alors* z *admet deux racines carrées,* ω *et* $-\omega$.

Si $z \neq 0$ *ces deux racines carrées sont distinctes. Si* $z = 0$ *alors* $\omega = 0$ *est une racine double.*
Pour $z = a + ib$ *nous allons calculer* ω *et* $-\omega$ *en fonction de* a *et* b.

preuve. *Nous écrivons* $\omega = x + iy$, *nous cherchons* x, y *tels que* $\omega^2 = z$.

$$\begin{aligned}
\omega^2 = z &\iff (x + iy)^2 = a + ib \\
&\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = a & \text{en identifiant parties réelles} \\ 2xy = b & \text{et parties imaginaires.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Petite astuce ici : nous rajoutons l'équation $|\omega|^2 = |z|$ *(qui se déduit bien sûr de* $\omega^2 = z$*) qui* *s'écrit aussi* $x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}$. *Nous obtenons des systèmes équivalents aux précédents :*

$$\left\{\begin{array}{l} x^2-y^2=a \\ 2xy=b \\ x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 2x^2=\sqrt{a^2+b^2}+a \\ 2y^2=\sqrt{a^2+b^2}-a \\ 2xy=b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+a} \\ y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a} \\ 2xy=b \end{array}\right.$$

Discutons suivant le signe du réel b. *Si* $b\geqslant 0$, x *et* y *sont de même signe ou nuls (car* $2xy=b\geq 0$*) donc*

$$\omega=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+a}+i\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}\right),$$

et si $b\leqslant 0$

$$\omega=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+a}-i\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}\right).$$

En particulier si $b=0$ *le résultat dépend du signe de* a, *si* $a\geqslant 0$, $\sqrt{a^2}=a$ *et par conséquent* $\omega=\pm\sqrt{a}$, *tandis que si* $a<0$, $\sqrt{a^2}=-a$ *et donc* $\omega=\pm i\sqrt{-a}=\pm i\sqrt{|a|}$.

Exemple 29. *Les racines carrées de* i *sont* $+\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ *et* $-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.
En effet :

$$\begin{aligned} \omega^2=i &\iff (x+iy)^2=i \\ &\iff \left\{\begin{array}{l} x^2-y^2=0 \\ 2xy=1 \end{array}\right. \end{aligned}$$

Rajoutons la conditions $|\omega|^2=|i|$ *pour obtenir le système équivalent au précédent :*

$$\left\{\begin{array}{l} x^2-y^2=0 \\ 2xy=1 \\ x^2+y^2=1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 2x^2=1 \\ 2y^2=1 \\ 2xy=1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2xy=1 \end{array}\right.$$

Les réels x *et* y *sont donc de même signe, nous trouvons bien deux solutions :*

$$x+iy=\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}} \quad ou \quad x+iy=-\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

5.1.2 Équation du second degré

Proposition 5.1.2. *L'équation du second degré* $az^2+bz+c=0$, *où* $a,b,c\in\mathbb{C}$ *et* $a\neq 0$, *possède deux solutions* $z_1,z_2\in C$
Soit $\Delta=b^2-4ac$ *le discriminant et* $\delta\in\mathbb{C}$ *une racine carrée de* Δ. *Alors les solutions sont* $z_1=\dfrac{-b+\delta}{2a}$ *et* $z_2=\dfrac{-b-\delta}{2a}$.

Et si $\Delta = 0$ alors la solution $z = z_1 = z_2 = -b/2a$ est unique (elle est dite double).

Exemple 30. – $z^2 + z + 1 = 0$, $\Delta = -3$, $\delta = i\sqrt{3}$,

les solutions sont

$$z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

.

– $z^2 + z + \frac{1-i}{4} = 0$, $\Delta = i$, $\delta = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$,

les solutions sont

$$z = \frac{-1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{4}(1+i)$$

.

On retrouve aussi le résultat bien connu pour le cas des équations à coefficients réels :

Corollaire 5.1.1. *Si les coefficients a, b, c sont réels alors $\Delta \in \mathbb{R}$ et les solutions sont de trois types :*

– *si $\Delta = 0$, la racine double est réelle et vaut $-\dfrac{b}{2a}$,*

– *si $\Delta > 0$, on a deux solutions réelles $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$,*

– *si $\Delta < 0$, on a deux solutions complexes, mais non réelles, $\dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.*

preuve. *On écrit la factorisation*

$$\begin{aligned}
az^2 + bz + c &= a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\delta^2}{4a^2}\right) \\
&= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right) - \frac{\delta}{2a}\right)\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right) + \frac{\delta}{2a}\right) \\
&= a\left(z - \frac{-b+\delta}{2a}\right)\left(z - \frac{-b-\delta}{2a}\right) = a\,(z - z_1)\,(z - z_2)
\end{aligned}$$

Donc le binôme s'annule si et seulement si $z = z_1$ ou $z = z_2$.

5.1.3 Théorème fondamental de l'algèbre

[d'Alembert–Gauss] Soit $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ un polynôme à coefficients complexes et de degré n. Alors l'équation $P(z) = 0$ admet exactement n solutions complexes comptées avec leur multiplicité.

En d'autres termes il existe des nombres complexes $z_1, \ldots, z_n$ (dont certains sont éventuellement confondus) tels que

$$P(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n).$$

5.2 Argument et trigonométrie

5.2.1 Argument

Si $z = x + iy$ est de module 1, alors $x^2 + y^2 = |z|^2 = 1$. Par conséquent le point (x, y) est sur le cercle unité du plan, et son abscisse x est notée $\cos\theta$, son ordonnée y est $\sin\theta$, où θ est (une mesure de) l'angle entre l'axe réel et z. Plus généralement, si $z \neq 0$, $z/|z|$ est de module 1, et cela amène à :

Definition 5.2.1. Pour tout $z \in$C* un nombre $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$z = |z| (\cos\theta + i \sin\theta)$$

est appelé un argument de z et noté $\theta = \arg(z)$.

Proposition 5.2.1. *Soit $k \in \mathbb{Z}$ .L'argument satisfait les propriétés suivantes :*
- $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi$
- $\arg(z^n) \equiv n \arg(z) + 2k\pi$
- $\arg(1/z) \equiv -\arg(z) + 2k\pi$
- $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg z + 2k\pi$

preuve.

$$\begin{aligned} zz' &= |z| (\cos\theta + i \sin\theta) |z'| (\cos\theta' + i \sin\theta') \\ &= |zz'| (\cos\theta \cos\theta' - \sin\theta \sin\theta' + i (\cos\theta \sin\theta' + \sin\theta \cos\theta')) \\ &= |zz'| (\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')) \end{aligned}$$

donc $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \pmod{2\pi}$. *On en déduit les deux autres propriétés, dont la deuxième par récurrence.*

5.2.2 Formule de Moivre, notation exponentielle

La formule de Moivre est :

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$$

cette preuve est hors programme mais on vas le faire comme même

preuve. *Par récurrence, on montre que*

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^n &= (\cos\theta + i\sin\theta)^{n-1} \times (\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= (\cos((n-1)\theta) + i\sin((n-1)\theta)) \times (\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= (\cos((n-1)\theta)\cos\theta - \sin((n-1)\theta)\sin\theta) \\ &\quad +i(\cos((n-1)\theta)\sin\theta + \sin((n-1)\theta)\cos\theta) \\ &= \cos n\theta + i\sin n\theta\end{aligned}$$

Nous définissons la notation exponentielle par $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ *et donc tout nombre complexe s'écrit* $z = \rho e^{i\theta}$ *où* $\rho = |z|$ *est le module et* $\theta = \arg(z)$ *est un argument.*

Avec la notation exponentielle, on peut écrire pour $z = \rho e^{i\theta}$ *et* $z' = \rho' e^{i\theta'}$

$$\begin{cases} zz' = \rho\rho' e^{i\theta} e^{i\theta'} = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')} \\ z^n = \left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n \left(e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta} \\ 1/z = 1/\left(\rho e^{i\theta}\right) = \frac{1}{\rho} e^{-i\theta} \\ \bar{z} = \rho e^{-i\theta} \end{cases}$$

La formule de Moivre se réduit à l'égalité : $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$.
Et nous avons aussi : $\rho e^{i\theta} = \rho' e^{i\theta'}$ *(avec* $\rho, \rho' > 0$*) si et seulement si* $\rho = \rho'$ *et* $\theta \equiv \theta' \pmod{2\pi}$.

5.2.3 Racines n-ième

Definition 5.2.2. Pour $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, une racine n-ième est un nombre $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\omega^n = z$.

Proposition 5.2.2. *Il y a* n *racines* n*-ièmes* $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ *de* $z = \rho e^{i\theta}$*, de la forme :*

$$\omega_k = \rho^{1/n} e^{\frac{i\theta + 2ik\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

preuve. *Écrivons* $z = \rho e^{i\theta}$ *et cherchons* ω *sous la forme* $\omega = re^{it}$ *tel que* $z = \omega^n$. *Nous obtenons donc* $\rho e^{i\theta} = \omega^n = (re^{it})^n = r^n e^{int}$. *Prenons tout d'abord le module :* $\rho = \left|\rho e^{i\theta}\right| = |r^n e^{int}| = r^n$ *et donc* $r = \rho^{1/n}$ *(il s'agit ici de nombres réels). Pour les arguments nous avons* $e^{int} = e^{i\theta}$ *et donc* $nt \equiv \theta \pmod{2\pi}$ *(n'oubliez surtout pas le modulo* 2π *!). Ainsi on résout* $nt = \theta + 2k\pi$ *(pour* $k \in \mathbb{Z}$*) et donc* $t = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$. *Les solutions de l'équation* $\omega^n = z$ *sont donc les* $\omega_k = \rho^{1/n} e^{\frac{i\theta + 2ik\pi}{n}}$. *Mais en fait il n'y a que* n *solutions distinctes car* $\omega_n = \omega_0$, $\omega_{n+1} = \omega_1$, ... *Ainsi les* n *solutions sont* $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$.

Par exemple pour $z = 1$, *on obtient les* n *racines* n*-ièmes de l'unité* $e^{2ik\pi/n}$, $k = 0, \dots, n-1$ *qui forment un groupe multiplicatif.*

5.2.4 Applications à la trigonométrie

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ *,les formules d'Euler sont :*

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad , \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

Nous les appliquons dans la la linéarisation.

Linéarisation. On exprime $\cos^n\theta$ *ou* $\sin^n\theta$ *en fonction des* $\cos k\theta$ *et* $\sin k\theta$ *pour* k *allant de* 0 *à* n.

Méthode : avec la formule d'Euler on écrit $\sin^n\theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^n$. *On développe à l'aide du binôme de Newton puis on regroupe les termes par paires conjuguées.*

Exemple 31.

$$\begin{aligned}
\sin^3\theta &= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 \\
&= \frac{1}{-8i}\left((e^{i\theta})^3 - 3(e^{i\theta})^2 e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}(e^{-i\theta})^2 - (e^{-i\theta})^3\right) \\
&= \frac{1}{-8i}\left(e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}\right) \\
&= -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}}{2i} - 3\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right) \\
&= -\frac{\sin 3\theta}{4} + \frac{3\sin\theta}{4}
\end{aligned}$$

5.3 Nombres complexes et géométrie

On associe à tout point M *de* $\mathbb{R}^2$ *de coordonnées* (x, y), *le nombre complexe* $z = x + iy$ *appelé son affixe.*

5.3.1 Équation complexe d'une droite

Soit

$$ax + by = c$$

l'équation réelle d'une droite $\mathcal{D}$ *:* a, b, c *sont des nombres réels (*a *et* b *n'étant pas tous les deux nuls) d'inconnues* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Écrivons $z = x + iy \in \mathbb{C}$*, alors*

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i},$$

donc $\mathcal{D}$ *a aussi pour équation* $a(z+\bar{z}) - ib(z-\bar{z}) = 2c$ *ou encore* $(a-ib)z + (a+ib)\bar{z} = 2c$.
Posons $\omega = a + ib \in \mathbb{C}^*$ *et* $k = 2c \in \mathbb{R}$ *alors l'équation complexe d'une droite est :* $\bar{\omega} z + \omega \bar{z} = k$ *où* $\omega \in \mathbb{C}^*$ *et* $k \in \mathbb{R}$.

5.3.2 Équation complexe d'un cercle

Soit $\mathcal{C}(\Omega, r)$ *le cercle de centre* Ω *et de rayon* r*. C'est l'ensemble des points* M *tel que* $\mathrm{dist}(\Omega, M) = r$*. Si l'on note* ω *l'affixe de* Ω *et* z *l'affixe de* M*. Nous obtenons :*

$$\mathrm{dist}(\Omega, M) = r \iff |z - \omega| = r \iff |z - \omega|^2 = r^2 \iff (z - \omega)\overline{(z - \omega)} = r^2$$

et en développant nous trouvons que l'équation complexe du cercle centré en un point d'affixe ω *et de rayon* r *est :* $z\bar{z} - \bar{\omega} z - \omega \bar{z} = r^2 - |\omega|^2$ *où* $\omega \in \mathbb{C}$ *et* $r \in \mathbb{R}$.

5.3.3 Équation $\frac{|z-a|}{|z-b|} = k$

Proposition 5.3.1. *Soit* A, B *deux points du plan et* $k \in \mathbb{R}_+$*. L'ensemble des points* M *tel que* $\frac{MA}{MB} = k$ *est*
– *une droite qui est la médiatrice de* $[AB]$*, si* $k = 1$*,*
– *un cercle, sinon.*

Exemple 32. *Prenons* A *le point d'affixe* $+1$*,*B *le point d'affixe* -1.

preuve. *Si les affixes de* A, B, M *sont respectivement* a, b, z*, cela revient à résoudre l'équa-*

tion $\frac{|z-a|}{|z-b|} = k$.

$$\begin{aligned}
\frac{|z-a|}{|z-b|} = k &\Longleftrightarrow |z-a|^2 = k^2|z-b|^2 \\
&\Longleftrightarrow (z-a)\overline{(z-a)} = k^2(z-b)\overline{(z-b)} \\
&\Longleftrightarrow (1-k^2)z\bar{z} - z(\bar{a}-k^2\bar{b}) - \bar{z}(a-k^2b) + |a|^2 - k^2|b|^2 = 0
\end{aligned}$$

Donc si $k=1$, *on pose* $\omega = a - k^2 b$ *et l'équation obtenue* $z\bar{\omega} + \bar{z}\omega = |a|^2 - k^2|b|^2$ *est bien celle d'une droite. Et bien sûr l'ensemble des points qui vérifient* $MA = MB$ *est la médiatrice de* $[AB]$. *Si* $k \neq 1$ *on pose* $\omega = \frac{a-k^2b}{1-k^2}$ *alors l'équation obtenue est* $z\bar{z} - z\bar{\omega} - \bar{z}\omega = \frac{-|a|^2+k^2|b|^2}{1-k^2}$. *C'est l'équation d'un cercle de centre* ω *et de rayon* r *satisfaisant* $r^2 - |\omega|^2 = \frac{-|a|^2+k^2|b|^2}{1-k^2}$, *soit* $r^2 = \frac{|a-k^2b|^2}{(1-k^2)^2} + \frac{-|a|^2+k^2|b|^2}{1-k^2}$.

Chapitre 6

Polynômes et fractions rationnelles

6.0.4 Polynômes

Definition 6.0.1. On désigne par K le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,on appel polynôme toute expression de la forme $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 ...... + a_nx^n$
Un polynôme quelconque s'écrit donc sous la forme

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

Exemple 33. *1.* $P(x) = 5 + 3x - 2x^2 + x^3$ *polynôme à coefficients réels.*

2. $Q(x) = 7 + (2i + 9)x + (6 - i)x^3 - 8ix^5$ *polynôme à coefficients complexes.*

L'ensemble des polynômes à coefficients réels est noté $\mathbb{R}[X]$*. L'ensemble des polynômes à coefficients complexes est lui noté* $\mathbb{C}[X]$*. Le polynôme nul est donné par* $P(x) = 0, \forall X$

Definition 6.0.2. Si $P \neq 0$, on note $\deg(P)$ le rang du dernier coefficient non nul de P. Par convention, on posera le degré du polynôme nul est $-\infty$. On appellera les polynômes de degré 0 les polynômes constants : ils sont de la forme $P(X) = a_0$ avec a_0 un réel ou un complexe non nul. On notera $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égale à n.

Exemple 34. *Calculer suivant les valeurs de* λ *le degré de* P *avec* $P(x) = (\lambda^2 + 2\lambda + 1)X^3 + (\lambda + 3)X + 5$

1. Si $\lambda = -1$ *, le degré de* P *égale à* 1

2. Si $\lambda = -1 et \lambda = -3$ *, le degré de* P *égale à* 0

3. Si $\lambda \neq -1 et \lambda \neq -3$ *, le degré de* P *égale à* 3

6.1 Opérations sur les polynômes

6.1.1 Addition

Considérons $P(X) = 2X + 1$ *et* $Q(X) = 1 + X - X^2$
On peut additionner des polynômes

$$P(X) + Q(X) = (P + Q)(X) = 2 + 3X - X^2$$

6.1.2 Multiplier un polynôme par un scalaire

$$3 \times P(X) = (3 \cdot P)(X) = 6X + 3$$

Multiplication de deux polynômes

$$P(X) \cdot Q(X) = (P \cdot Q)(X) = 1 + 3X + X^2 - 2X^3$$

6.1.3 composition de deux polynômes

$$P \circ Q(X) = P[Q(X)] = -2X^2 + 2X + 3 \qquad Q \circ P(X) = Q[P(X)] = -4X^2 - 2X + 1$$

Proposition 6.1.1.

$\deg(P + Q) = \sup(\deg(P), \deg(Q))$

$\deg(P \cdot Q) = \deg(P) + \deg(Q)$

$\deg(P \circ Q) = \deg(P) + \deg(Q)$

6.1.4 Division euclidienne de polynômes

Soient A *et* B *deux polynômes de* $\mathbb{K}[X]$, *avec* $B \neq 0$. *Alors il existe un unique couple* (Q, R) *de polynômes tels que*

$$A = B \cdot Q + R \qquad \textit{avec } \deg(R) < \deg(B)$$

Si $R(x) = 0$, *on dit que* A *est divisible par* B.

Exemple 35.

$$\begin{array}{lll|l}
A & X^5 + X^4 - X^3 & + X - 1 & X^3 + X^2 + 2 \\
\cline{4-4}
BQ_1 & X^5 + X^4 & + 2X^2 & \underbrace{X^2}_{Q_1} \ \underbrace{-1}_{Q_2} \\
A_1 = A - BQ_1 & . & - X^3 - 2X^2 + X - 1 & \\
BQ_2 & . & - X^3 - X^2 \qquad - 2 & \\
R = A_1 - BQ_2 & . & - X^2 + X + 1 &
\end{array}$$

Cela veut donc dire que

$$X^5 + X^4 - X^3 + X - 1 = (X^3 + X^2 + 2)(X^2 - 1) - X^2 + X + 1$$

On a bien $R(X) = -X^2 + X + 1$, $\deg(R) = 2 < 3 = \deg(B)$.
Si $R = 0$*, on dit que* A *est* ***divisible*** *par* B*, ou que* B *divise* A*, ou encore que* A *est un multiple de* B*.*
Par contre, vous connaissez les nombres premiers : ce sont les nombres entiers supérieurs à 2 qui ne sont divisibles que par 1 et eux-mêmes. Nous avons besoin d'une définition équivalente pour les polynômes : on les appelle les polynômes irreductibles

6.1.5 Polynômes irreductibles

Un polynôme P *est irréductible si*

1. $\deg(P) = 1$
2. *les seuls diviseurs de* P *sont 1,* P*, et leurs associés.*

Cela revient à dire qu'un polynôme irreductible ne peut pas s'écrire sous la forme $P_1 \cdot P_2$ *avec* P_1 *et* P_2 *des polynômes de degré supérieur ou égal à 1.*
En particulier, tous les polynomes de degré 1 sont irréductibles.

Polynômes irreductibles dans $\mathbb{C}[X]$

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ *sont les polynômes de degré 1*

Exemple 36.

(X-3)

(X-i)

Polynômes irreductibles dans $\mathbb{R}[X]$

Les polynomes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont

1. *les polynômes de degré 1*
2. *les polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif.*

Exemple 37. *1. $P(X) = X^2 + X + 5$ est un polynôme irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ puisque son discriminant est négatif.*

2. $P(x) = x + 5$ est un polynôme irréductible dans $\mathbb{R}[X]$

6.1.6 Racines d'un polynôme

On dit que α est une racine de P (ou un zéro de P) lorsque $P(\alpha) = 0$
Par exemple, $P(X) = X^2 + 1$ admet deux racines dans $\mathbb{C}[x]$ et aucune dans $\mathbb{R}[x]$.

$$\boxed{\textit{Le polynôme } P \textit{ est divisible par } (X-\alpha) \textit{ si et seulement si } \alpha \textit{ est une racine de } P}$$

$$P(X) = (X - \alpha)Q + R \qquad \textit{avec } \deg(R) < \deg(X - \alpha) = 1$$

Definition 6.1.1. Si a est une racine de P, alors $X - a$ divise P, c'est à dire qu'il existe un polynôme Q tel que

$$P(X) = (X - a) \times Q(X).$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on dit que a est de racine de **multiplicité** k de P si

$$(X - a)^k \,\text{divise} P$$

et si

$$(X - a)^{k+1} \,\text{ne divise pas} P$$

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[x]$ admet au moins une racine.

En effet, puisque les seuls polynomes irréductibles de $\mathbb{C}[x]$ sont les polynomes de degré 1, tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[x]$ peut s'écrire comme produit de polynômes de degré 1 : tout polynôme non constant peut donc s'écrire sous la forme $(X - a)Q$ qui admet donc au moins une racine a.

6.2 Division selon les puissances croissantes

Nous verrons dans la section suivante qu'il peut être utile d'écrire un polynôme A sous la forme

$$A = BS + X^{p+1}T \qquad \textit{avec } \deg(S)p$$

le polynôme B étant donné et devant être obligatoirement de valuation 0 (en gros, le coefficient de X^0 est non nul).

Cela donne pour $A = 1 - 2X + X^3 + X^4$ et $B = 1 + X + X^2$ à l'ordre $p = 2$

$$\begin{array}{ll|l}
A & 1 - 2X \qquad\quad + X^3 \;\; + X^4 & 1 + X + X^2 \\
 & & \overline{} \\
BQ_1 & 1 + X \;\; + X^2 & 1 - 3X - 2X^2 \\
A - BQ_1 & . \; - 3X - X^2 + X^3 \;\; + X^4 & Q_1 \;\; Q_2 \quad\; Q_3 \\
BQ_2 & . \; - 3X - 3X^2 - 3X^3 & \\
A - BQ_1 - BQ_2 & . \qquad\qquad 2X^2 + 4X^3 + X^4 & \\
BQ_3 & . \qquad\qquad 2X^2 + 2X^3 + 2X^4 & \\
A - BQ_1 - BQ_2 - BQ_3 & . \qquad\qquad\qquad\quad 2X^3 - X^4 &
\end{array}$$

On a donc $A = \underbrace{(1 - 3X + 2X^2)}_{S} B + \underbrace{(2 - X)}_{T} X^3$

6.3 Fractions rationnelles

Definition 6.3.1. Une fraction rationnelle est un quotient de deux polynômes. Autrement dit, c'est une fraction dont le numérateur et la dénominateur sont des polynômes. Le numérateur peut être une constante et les polynômes peuvent être écrits sous diverses formes.

Par exemple, $F(X) = \frac{X^3-3X+1}{X^2-1}$ est une fraction rationnelle ; $F(X) = \frac{(X^3-3X+1)(X+1)}{(X^2-1)(X+1)}$ est aussi une fraction rationnelle

6.3.1 Degré d'une fraction rationnelle

Soit F une fraction rationnelle ; une fraction rationnelle $F = \frac{A}{B}$, alors :

$$\deg(F) = \deg(A) - \deg(B)$$

6.3.2 Pôles et zéros

Soit F une fraction rationnelle et deux polynômes A et B tels que $F = A/B$ soit une forme irréductible de F. On appelle

(a) Pole de F les racines de B

(b) Zéro de F les racines de A

Par exemple $F(X) = \frac{X+32}{X^2-1}$ admet pour pôles -1 et 1 et pour zéro -32.

6.3.3 Partie entière d'une fraction rationnelle

On peut écrire de manière unique toute fraction sous la forme $F = E + \frac{R}{B}$ avec $\deg \frac{R}{B} = \deg(R) - \deg(B) < 0$, c'est à dire d'un polynôme plus une fraction de degré négatif (le degré du numérateur est plus petit que le degré du dénominateur).E est appellé la partie entière de F, la division euclidienne nous permet d'obtenir la partie entière.

Par exemple, nous avons vu précédemment que

$$X^5 + X^4 - X^3 + X - 1 = (X^3 + X^2 + 2)(X^2 - 1) - (X^2 - X - 1)$$

et donc que

$$\frac{X^5 + X^4 - X^3 + X - 1}{X^3 + X^2 + 2} = X^2 - 1 - \frac{X^2 - X - 1}{X^3 + X^2 + 2}$$

En effet, la division euclidienne de A par B s'écrit

$$A = B \cdot Q + R \qquad \text{avec } \deg(R) < \deg(B)$$

c'est à dire

$$\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B} \qquad \text{avec } \deg \frac{R}{B} < 0$$

, et donc le quotient de la division euclidienne de A par B est bien la partie entière de A/B.

6.4 Décomposition en éléments simples

Structure de la décomposition

Notre fraction F s'écrivant sous la forme $E + R/B$, le E nous intéresse car c'est un polynôme qu'on sait intégrer. Pour la partie R/B, qu'on appelle la **partie polaire**, ce n'est pas toujours évident d'en trouver une primitive. Pour nous aider, on va la décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ et dans $\mathbb{C}(X)$.

6.4.1 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.

Soit $\dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle sur $\mathbb{C}$. Le dénominateur Q peut s'écrire sous la forme du produit

$$\lambda(X - a_1)^{p_1}(X - a_2)^{p_2} \dots (X - a_k)^{p_k},$$

où les p_i sont des entiers et les a_i et λ des complexes.
Il existe alors un polynôme E et des éléments b_{ij} de $\mathbb{C}$ tels que :

$$\frac{P}{Q} = E + \frac{b_{11}}{(X - a_1)} + \frac{b_{12}}{(X - a_1)^2} + \dots + \frac{b_{1p_1}}{(X - a_1)^{p_1}} + \dots + \frac{b_{kp_k}}{(X - a_k)^{p_k}}.$$

E s'appelle la partie entière de $\dfrac{P}{Q}$ et les $\dfrac{b_{ij}}{(X - a_i)^j}$ s'appellent des éléments simples.

6.4.2 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

Soit $\dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle sur $\mathbb{R}$. Le dénominateur Q peut s'écrire sous la forme du produit

$$\lambda(X-a_1)^{p_1}(X-a_2)^{p_2} \dots (X-a_k)^{p_k}(X^2+b_1X+c_1)^{q_1}(X^2+b_2X+c_2)^{q_2} \dots (X^2+b_\ell X+c_\ell)^{q_\ell},$$

où les p_i et q_i sont des entiers et les a_i, b_i,c_i et λ des réels tels que $b_i^2 - 4c_i < 0$.

Il existe alors un polynôme E, des éléments d_{ij} de $\mathbb{R}$ et des polynômes A_{ij} de degré inférieur ou égal à 1 tels que :

$$\frac{P}{Q} = E + \frac{d_{11}}{(X-a_1)} + \frac{d_{12}}{(X-a_1)^2} + \ldots + \frac{d_{1p_1}}{(X-a_1)^{p_1}} + \ldots + \frac{d_{kp_k}}{(X-a_k)^{p_k}} +$$

$$\ldots + \frac{A_{11}}{(X^2+b_1X+c_1)} + \frac{A_{12}}{(X^2+b_1X+c_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1q_1}}{(X^2+b_1X+c_1)^{q_1}} + \ldots + \frac{A_{\ell q_\ell}}{(X^2+b_\ell X+c_\ell)^{q_\ell}}.$$

- le polynôme E s'appelle la **partie entière** de $\dfrac{P}{Q}$,
- les fractions de la forme $\dfrac{d_{ij}}{(X-a_i)^j}$ s'appellent des **éléments simples de première espèce**,
- les fractions de la forme $\dfrac{A_{ij}}{(X^2+b_iX+c_i)^j}$ des **éléments simples de seconde espèce**.

Exemple 38.

$$\frac{R(x)}{B(x)} = \frac{x^3 - 21x - 7}{(x+2)(x-1)^2(x^2+x+1)}$$

éléments simples de 1espèce :

- *le pôle $x = 1$ de multiplicité 2 $\rightsquigarrow$ 2 éléments simples :*

$$\frac{A_1}{x-1}\ ,\quad \frac{A_2}{(x-1)^2}\ ,$$

- *le pôle $x = -2$ de multiplicité 1 $\rightsquigarrow$ 1 élément simple*

$$\frac{A_3}{x+2}$$

éléments simples de 2espèce : 1 seul, associé au facteur irreductible $x^2 + x + 1$

$$\frac{B_1\,x + C_1}{x^2+x+1}$$

Remarque. *il faut toujours s'assurer de la décomposition complète du dénominateur.*

Soit $F(x) = A(x)/B(x)$ une fraction rationnelle alors F se décompose dans $\mathbb{R}(X)$ de manière unique en somme de tous les éléments simples relatifs à B comme suit :

$$\frac{R(x)}{B(x)} = \sum_i \sum_k \frac{A_{ik}}{(x-r_i)^k} + \sum_j \sum_\ell \frac{B_{jk}\,x + C_{jk}}{(x^2+b_jx+c_j)^k}$$

Exemple 39. *Dans l'exemple précédent la décomposition théorique en éléments simples de $R(x)/B(x)$ est*

$$\frac{R(x)}{B(x)} = \frac{x^3 - 21\,x - 7}{(x+2)(x-1)(x+x+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + + \frac{A_3}{x+2} + \frac{B_1\,x + C_1}{x+x+1}$$

Maintenant, on vas calculer les coefficients de la décomposition.

6.4.3 Calculs des coefficients de la décomposition

Cas où la fraction ne présente que des pôles simples

$$\mathrm{F}(x) = \frac{5\,x - 29}{(x+3)\,(x-8)}$$

$F(x)$ présente deux pôles simples :-3 et 8 . La forme de sa décomposition est donc :

$$\mathrm{F}(x) = \frac{\alpha}{x+3} + \frac{\beta}{x-8}$$

On donne à X des valeurs et on cherche α et β ,après calcul on trouve

$$\mathrm{F}(x) = \frac{4}{x+3} + \frac{1}{x-8}$$

La division selon les puissances croissantes pour les pôles multiples

La deuxième méthode pour trouver les coefficients est par la division selon les puissances croissantes appliqué pour les pôles d'ordre de multiplicité assez élevé

$$\mathrm{F}(x) = \frac{38\,x + 30 + 2\,x^3 + 15\,x^2}{(x+2)^3\,(x+1)}$$

$F(x)$ présente -2 comme pôle triple , -1 comme pôle simple.
La forme de la décomposition de $F(x)$ est donc :

$$\mathrm{F}(x) = \frac{\alpha}{(x-2)^3} + \frac{\beta}{(x+2)^2} + \frac{\gamma}{x+2} + \frac{\delta}{x+1}$$

Je fais dans $F(x)$ le changement de varriable $x = h - 2$

$$\mathrm{F}(h-2) = \frac{2\,h - 2 + 2\,h^3 + 3\,h^2}{h^3\,(h-1)}$$

Je divise le numérateur obtenu par $h-1$ suivant les puissances croissantes à l'ordre $2 = 3-1$ (3 est l'ordre de -2 comme pôle de la fraction). J'obtiens :

$$2\,h - 2 + 2\,h^3 + 3\,h^2 = (h-1)\,(2 - 3\,h^2) + 5\,h^3$$

Pour revenir à $F(h-2)$ je divise les deux membres de cette égalité par $h^3\,(h-1)$ ce qui me donne aussitôt

$$\mathrm{F}(h-2) = \frac{2}{h^3} - \frac{3}{h} + \frac{5}{h-1}$$

Je pose $h = x+2$ ce qui me donne :

$$\mathrm{F}(x) = \frac{2}{(x+2)^3} - \frac{3}{x+2} + \frac{5}{x+1}$$

Autres méthodes

On peut souvent se débrouiller autrement : parité, limite en l'infini, valeurs particulières.

3. ***Méthode des limites ou méthode de substitution***

Cette méthode consiste à multiplier d'abord par la plus basse puissance qui intervient dans la décomposition en éléments simples, et de prendre la limite $x \to \infty$ (où il suffit de garder les puissances les plus élevées). Ainsi, on a dans le membre de droite la somme des coefficients qui correspondent à cette puissance, qui permet de déterminer un coefficient en terme des autres.

Exemple : *Considérons*

$$F(x) = \frac{x^3 - 21\,x - 7}{(x+2)(x-1)(x+x+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x+2} + \frac{B_1\,x + C_1}{x^2+x+1}$$

On multiplie par x, la limite donne alors

$$\lim \frac{x^4}{x^5} = 0 = A_1 + A_3 + B_1$$

et donc $B_1 = -A_1 - A_3 = -2 - 1 = -3$

4. ***Méthode des valeurs particulières***

   Une autre méthode consiste à simplement prendre des valeurs particulières pour x (différents des pôles) et ainsi d'avoir un système d'équations qui permettra de déterminer les coefficients manquants.

   Exemple *En gardant notre exemple, prenons $x = 0$:*

$$\frac{-7}{2} = -A_1 + A_2 + \frac{A_3}{2} + C_1$$

   et donc

$$C_1 = -\frac{7}{2} + A_1 - A_2 - \frac{A_3}{2} = -\frac{7}{2} + 2 + 3 - \frac{1}{2} = -4 + 5 = 1$$

   Remarque : dans le cas général, il faut ainsi créer un système d'autant d'équations (indépendantes) qu'il reste de coefficients à déterminer.

5. ***Par identification***

   La méthode générique qui marche toujours mais qui n'est pas toujours pas la plus rapide, consiste à réécrire la somme des éléments simples sur le dénominateur commun qui est $B(x)$, et d'identifier les coefficients des mêmes puissances de x du membre de gauche (coefficients de $R(x)$) et du membre de droite (les A, B, C multipliés par une partie des facteurs de $B(x)$).

   Ainsi on obtient un système d'équations linéaires dont la solution donne les coefficients (manquants).

Résumé

Pratique de la décomposition

(a) *On détermine la partie entière à l'aide d'une division euclidienne. on pose $F = E + \frac{R}{Q}$.Ensuite on décompose la fraction $\frac{R}{Q}$*

(b) *On détermine les pôles de Q avec leur ordre de multiplicité et on dresse la liste des diviseurs primaires du dénominateur.*

(c) *On écrit la décomposition théorique de $\frac{R}{Q}$ dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$.*

(d) *On choisit la méthode que l'on va pour trouver les coefficients de la décomposition*

(e) *Une fois $\frac{R}{Q}$ décomposée, en lui ajoutant la partie entière .*

Chapitre 7

Les matrices

7.1 Rappels et notions

On se donne un corps $\mathbb{K}$ avec ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). On note $M_{m,n}(K)$ l'espace des matrices à m lignes et n colonnes à coefficients dans K.

$$A = (a_{ij}) \ i \in [1..m] \ et \ j \in [1..n]$$

$$A = (a_{ji}) \ est \ la \ transposée \ de \ A$$

$$A^* \in M_{m,n}(K) \ tel \ que \ a^*_{ij} = \overline{a_{ji}} \ est \ la \ matrice \ adjointe \ de \ A.$$

Exemple 40. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 6 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Definition 7.1.1. – Deux matrices sont égales lorsqu'elles ont la même taille et que les coefficients correspondants sont égaux.

– L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans est noté $M_{n,p}()$. Les éléments de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ sont appelés matrices réelles.

7.1.1 Matrices particulières

Voici quelques types de matrices intéressantes :

– *Si $n = p$ (même nombre de lignes que de colonnes), la matrice est dite matrice carrée. On note $M_n(\mathbb{K})$ au lieu de $M_{n,n}(\mathbb{K})$.*

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Les éléments $a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}$ *forment la diagonale principale de la matrice.*

– *Une matrice qui n'a qu'une seule ligne* ($n = 1$) *est appelée matrice ligne ou vecteur ligne. On la note*

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \end{pmatrix}.$$

– *De même, une matrice qui n'a qu'une seule colonne* ($p = 1$) *est appelée matrice colonne ou vecteur colonne. On la note*

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}.$$

– *La matrice (de taille* $n \times p$*) dont tous les coefficients sont des zéros est appelée la matrice nulle et est notée* $0_{n,p}$ *ou plus simplement* 0*. Dans le calcul matriciel, la matrice nulle joue le rôle du nombre* 0 *pour les réels.*

7.1.2 opérations sur les matrices

Addition de matrices

Definition 7.1.2 (Somme de deux matrices)**.** Soient A et B deux matrices ayant la même taille $n \times p$. Leur somme $C = A + B$ est la matrice de taille $n \times p$ définie par

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

En d'autres termes, on somme coefficients par coefficients. Remarque : on note indifféremment a_{ij} *où* $a_{i,j}$ *pour les coefficients de la matrice* A*.*

Exemple 41.

$$\text{Si} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{alors} \qquad A + B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Par contre si $B' = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ *alors* $A + B'$ *n'est pas définie.*

Produit d'une matrice par un scalaire

Le produit d'une matrice $A = \big(a_{ij}\big)$ *de* $M_{n,p}()$ *par un scalaire* $\alpha \in \mathbb{K}$ *est la matrice* $\big(\alpha a_{ij}\big)$ *formée en multipliant chaque coefficient de* A *par* α*. Elle est notée* $\alpha \cdot A$ *(ou simplement* αA*).*

Exemple 42.

$$\text{Si} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \alpha = 2 \qquad \text{alors} \qquad \alpha A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice $(-1)A$ *est l'opposée de* A *et est notée* $-A$*. La différence* $A - B$ *est définie par* $A + (-B)$*.*

Exemple 43.

$$\text{Si} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 7 & -5 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad A - B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

L'addition et la multiplication par un scalaire se comportent sans surprises :

Proposition 7.1.1. *Soient* A*,* B *et* C *trois matrices appartenant à* $M_{n,p}(\mathbb{K})$*. Soient* $\alpha \in \mathbb{K}$ *et* $\beta \in \mathbb{K}$ *deux scalaires.*

1. $A + B = B + A$ *: la somme est commutative,*
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ *: la somme est associative,*
3. $A + 0 = A$ *: la matrice nulle est l'élément neutre de l'addition,*
4. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$*,*
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$*.*

preuve. *Prouvons le quatrième point. Le terme général de* $(\alpha+\beta)A$ *est égal à* $(\alpha+\beta)a_{ij}$*. D'après les règles de calcul dans* $\mathbb{K}$*,* $(\alpha+\beta)a_{ij}$ *est égal à* $\alpha a_{ij} + \beta a_{ij}$ *qui est le terme général de la matrice* $\alpha A + \beta A$*.*

Exercice 7.1.1. *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 21 & -6 \\ 0 & 3 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}$$

$$D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer toutes les sommes possibles de deux de ces matrices.*
2. *Calculer $3A + 2C$ et $5B - 4D$. Trouver α tel que $A - \alpha C$ soit la matrice nulle.*
3. *Montrer que si $A + B = A$, alors B est la matrice nulle.*
4. *Que vaut $0 \cdot A$? et $1 \cdot A$? Justifier l'affirmation : $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$. Idem avec $nA = A + A + \cdots + A$ (n occurrences de A).*

7.2 Multiplication de matrices

7.2.1 Définition du produit

Le produit AB de deux matrices A et B est défini si et seulement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Definition 7.2.1 (Produit de deux matrices)**.** Soient $A = (a_{ij})$ une matrice $n \times p$ et $B = (b_{ij})$ une matrice $p \times q$. Alors le produit $C = AB$ est une matrice $n \times q$ dont les coefficients c_{ij} sont définis par :
$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$

On peut écrire le coefficient de façon plus développée, à savoir :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj} + \cdots + a_{ip}b_{pj}.$$

Il est commode de disposer les calculs de la façon suivante.

$$\begin{array}{ccc}
 & \begin{pmatrix} & & & \times & \\ & & & \times & \\ & & & \times & \\ & & & \times & \end{pmatrix} & \leftarrow B \\
A \rightarrow \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ \times & \times & \times & \times \\ & & & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & & & | & \\ & & & | & \\ - & - & - & c_{ij} & \\ & & & & \end{pmatrix} & \leftarrow AB
\end{array}$$

Avec cette disposition, on considère d'abord la ligne de la matrice A située à gauche du coefficient que l'on veut calculer (ligne représentée par des $\times$ dans A) et aussi la colonne de la matrice B située au-dessus du coefficient que l'on veut calculer (colonne représentée par des $\times$ dans B). On calcule le produit du premier coefficient de la ligne par le premier coefficient de la colonne ($a_{i1} \times b_{1j}$), que l'on ajoute au produit du deuxième coefficient de la ligne par le deuxième coefficient de la colonne ($a_{i2} \times b_{2j}$), que l'on ajoute au produit du troisième...

7.2.2 Exemples

Exemple 44.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On dispose d'abord le produit correctement (à gauche) : la matrice obtenue est de taille 2×2. *Puis on calcule chacun des coefficients, en commençant par le premier coefficient* $c_{11} = 1 \times 1 \ + \ 2 \times (-1) \ + \ 3 \times 1 = 2$ *(au milieu), puis les autres (à droite).*

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 11 \end{pmatrix} \end{array}$$

Remarque. *Le produit d'un vecteur ligne par un vecteur colonne si on a deux vecteurs u et v avec*

$$u = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Alors $u \times v$ est une matrice de taille 1×1 dont l'unique coefficient est $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$.

7.2.3 remarques

Le produit de matrices n'est pas commutatif en général.

En effet, il se peut que AB soit défini mais pas BA, ou que AB et BA soient tous deux définis mais pas de la même taille. Mais même dans le cas où AB et BA sont définis et de la même taille, on a en général $AB \neq BA$.

Exemple 45.

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \qquad \textit{mais} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 29 & -2 \end{pmatrix}.$$

$AB = 0$ ***n'implique pas*** $A = 0$ ***ou*** $B = 0$.

Il peut arriver que le produit de deux matrices non nulles soit nul. En d'autres termes, on peut avoir $A \neq 0$ et $B \neq 0$ mais $AB = 0$.

Exemple 46.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \textit{et} \qquad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$AB = AC$ ***n'implique pas*** $B = C$. *On peut avoir $AB = AC$ et $B \neq C$.*

Exemple 47.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad AB = AC = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 15 & 12 \end{pmatrix}.$$

7.2.4 Propriétés du produit de matrices

Proposition 7.2.1. *1. $A(BC) = (AB)C$: associativité du produit,*

2. $A(B + C) = AB + AC$ et $(B + C)A = BA + CA$: distributivité du produit par rapport à la somme,

3. $A \cdot 0 = 0$ et $0 \cdot A = 0$.

preuve. *Posons $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}()$, $B = (b_{ij}) \in M_{p,q}()$ et $C = (c_{ij}) \in M_{q,r}()$. Prouvons que $A(BC) = (AB)C$ en montrant que les matrices $A(BC)$ et $(AB)C$ ont les mêmes coefficients.*

Le terme d'indice (i, k) de la matrice AB est $x_{ik} = \sum_{\ell=1}^{p} a_{i\ell} b_{\ell k}$. Le terme d'indice (i, j) de la matrice $(AB)C$ est donc

$$\sum_{k=1}^{q} x_{ik} c_{kj} = \sum_{k=1}^{q} \left(\sum_{\ell=1}^{p} a_{i\ell} b_{\ell k} \right) c_{kj}.$$

Le terme d'indice (ℓ, j) de la matrice BC est $y_{\ell j} = \sum_{k=1}^{q} b_{\ell k} c_{kj}$. Le terme d'indice (i, j) de la matrice $A(BC)$ est donc

$$\sum_{\ell=1}^{p} a_{i\ell} \left(\sum_{k=1}^{q} b_{\ell k} c_{kj} \right).$$

Comme dans la multiplication est distributive et associative, les coefficients de $(AB)C$ et $A(BC)$ coïncident. Les autres démonstrations se font comme celle de l'associativité.

7.2.5 La matrice identité

La matrice carrée suivante s'appelle la matrice identité :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Ses éléments diagonaux sont égaux à 1 et tous ses autres éléments sont égaux à 0. Elle se note I_n ou simplement I. Dans le calcul matriciel, la matrice identité joue un rôle analogue à celui du nombre 1 pour les réels. C'est l'élément neutre pour la multiplication. En d'autres termes :

Proposition 7.2.2. *Si A est une matrice $n \times p$, alors*

$$I_n \cdot A = A \qquad \textit{et} \qquad A \cdot I_p = A.$$

7.2.6 Puissance d'une matrice

Dans l'ensemble $M_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, la multiplication des matrices est une opération interne : si $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ alors $AB \in M_n(\mathbb{K})$.
En particulier, on peut multiplier une matrice carrée par elle-même : on note $A^2 = A \times A$, $A^3 = A \times A \times A$.
On peut ainsi définir les puissances successives d'une matrice :

Definition 7.2.2. Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$, on définit les puissances successives de A par $A^0 = I_n$ et $A^{p+1} = A^p \times A$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Autrement dit, $A^p = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{p \text{ facteurs}}$.

Exemple 48. *On cherche à calculer A^p avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On calcule A^2, A^3 et A^4 et on obtient :*

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad A^4 = A^3 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

L'observation de ces premières puissances permet de penser que la formule est : $A^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^p - 1 \\ 0 & (-1)^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix}$. Démontrons ce résultat par récurrence.
Il est vrai pour $p = 0$ (on trouve l'identité). On le suppose vrai pour un entier p et on va le démontrer pour $p + 1$. On a, d'après la définition,

$$A^{p+1} = A^p \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^p - 1 \\ 0 & (-1)^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^{p+1} - 1 \\ 0 & (-1)^{p+1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{p+1} \end{pmatrix}.$$

Donc la propriété est démontrée.

7.2.7 Formule du binôme

Comme la multiplication n'est pas commutative, les identités binomiales usuelles sont fausses. En particulier, $(A + B)^2$ ne vaut en général pas $A^2 + 2AB + B^2$, mais on sait seulement que

$$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2.$$

Proposition 7.2.3 (Calcul de $(A+B)^p$ lorsque $AB = BA$)**.** *Soient A et B deux éléments de $M_n()$ qui commutent, c'est-à-dire tels que $AB = BA$. Alors, pour tout entier $p \geq 0$, on a la formule*

$$(A + B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^{p-k} B^k$$

où $\binom{p}{k}$ désigne le coefficient du binôme.

La démonstration est similaire à celle de la formule du binôme pour $(a + b)^p$, avec $a, b \in$.

Exemple 49. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *On pose* $N = A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *La matrice* N *est nilpotente (c'est-à-dire il existe* $k \in$ *tel que* $N^k = 0$*) comme le montrent les calculs suivants :*

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad N^4 = 0.$$

Comme on a $A = I + N$ *et les matrices* N *et* I *commutent (la matrice identité commute avec toutes les matrices), on peut appliquer la formule du binôme de Newton. On utilise que* $I^k = I$ *pour tout* k *et surtout que* $N^k = 0$ *si* $k \geq 4$. *On obtient*

$$A^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} N^k I^{p-k} = \sum_{k=0}^{3} \binom{p}{k} N^k = I + pN + \tfrac{p(p-1)}{2!} N^2 + \tfrac{p(p-1)(p-2)}{3!} N^3.$$

D'où

$$A^p = \begin{pmatrix} 1 & p & p^2 & p(p^2 - p + 1) \\ 0 & 1 & 2p & p(3p-2) \\ 0 & 0 & 1 & 3p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 50. 1. *Soient* $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 6 & -4 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \end{smallmatrix}\right)$, $C = \left(\begin{smallmatrix} 8 & 2 \\ -3 & 2 \\ -5 & 5 \end{smallmatrix}\right)$, $D = \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $E = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$. *Quels produits sont possibles ? Les calculer !*

2. *Soient* $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ *et* $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. *Calculer* A^2, B^2, AB *et* BA.

3. *Soient* $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ *et* $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. *Calculer* A^p *et* B^p *pour tout* $p \geq 0$. *Montrer que* $AB = BA$. *Calculer* $(A+B)^p$.

7.2.8 Matrices triangulaires, matrices diagonales

Soit A *une matrice de taille* $n \times n$. *On dit que* A *est triangulaire inférieure si ses éléments au-dessus de la diagonale sont nuls, autrement dit :*

$$i < j \implies a_{ij} = 0.$$

Une matrice triangulaire inférieure a la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

On dit que A est triangulaire supérieure si ses éléments en-dessous de la diagonale sont nuls, autrement dit :

$$i > j \implies a_{ij} = 0.$$

Une matrice triangulaire supérieure a la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemple 51. *(à gauche), (à droite) :*

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Deux matrices triangulaires inférieures

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Une matrice triangulaire supérieure

Une matrice qui est triangulaire inférieure et triangulaire supérieure est dite diagonale. Autrement dit : $i \neq j \implies a_{ij} = 0$.

Exemple 52. *Exemples de matrices diagonales :*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad et \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exemple 53 (Puissances d'une matrice diagonale)**.** *Si D est une matrice diagonale, il est très facile de calculer ses puissances D^p (par récurrence sur p) :*

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad D^p = \begin{pmatrix} \alpha_1^p & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2^p & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{n-1}^p & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_n^p \end{pmatrix}$$

Une matrice A de taille $n \times n$, triangulaire, est inversible si et seulement si ses éléments diagonaux sont tous non nuls.

7.2.9 La transposition

Soit A la matrice de taille $n \times p$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

On appelle matrice transposée de A la matrice A^t de taille $p \times n$ définie par :

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

Autrement dit : le coefficient à la place (i, j) de A^t est a_{ji}. Ou encore la i-ème ligne de A devient la i-ème colonne de A^t (et réciproquement la j-ème colonne de A^t est la j-ème ligne de A).

Notation : *La transposée de la matrice A se note aussi souvent ${}^tA$.*

Exemple 54.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} \qquad (1 \quad -2 \quad 5)^t = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

L'opération de transposition obéit aux règles suivantes :

1. $(A+B)^t = A^t + B^t$
2. $(\alpha A)^t = \alpha A^t$
3. $(A^t)^t = A$
4. $(AB)^t = B^t A^t$

7.2.10 La trace

Dans le cas d'une matrice carrée de taille $n \times n$, les éléments a_{11}, $a_{22}, \ldots, a_{nn}$ sont appelés les éléments diagonaux.
Sa diagonale principale est la diagonale $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Definition 7.2.3. La trace de la matrice A est le nombre obtenu en additionnant les éléments diagonaux de A. Autrement dit, $trA = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$.

Exemple 55. *newline*
– *Si* $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{smallmatrix}\right)$, *alors* $trA = 2 + 5 = 7$.
– *Pour* $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 8 \\ 11 & 0 & -10 \end{smallmatrix}\right)$, $B = 1 + 2 - 10 = -7$.

Soient A et B deux matrices $n \times n$. Alors :

1. $tr(A+B) = trA + trB$,
2. $tr(\alpha A) = \alpha\ trA$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{K}$,
3. $tr(A^t) = trA$,
4. $tr(AB) = tr(BA)$.

7.2.11 Matrices symétriques

Definition 7.2.4. Une matrice A de taille $n \times n$ est symétrique si elle est égale à sa transposée, c'est-à-dire si

$$A = A^t$$

ou encore si $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout $i, j = 1, \ldots, n$. Les coefficients sont donc symétriques par rapport à la diagonale.

Exemple 56. *Les matrices suivantes sont symétriques :*

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

7.2.12 Matrices antisymétriques

Definition 7.2.5. Une matrice A de taille $n \times n$ est antisymétrique si

$$A^t = -A,$$

c'est-à-dire si $a_{ij} = -a_{ji}$ pour tout $i, j = 1, \ldots, n$.

Exemple 57.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -4 & 0 & -5 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarquons que les éléments diagonaux d'une matrice antisymétrique sont toujours tous nuls.

Exemple 58. *Toute matrice est la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.*

Preuve : Soit A une matrice. Définissons $B = \frac{1}{2}(A + A^T)$ et $C = \frac{1}{2}(A - A^T)$. Alors d'une part $A = B + C$; d'autre part B est symétrique, car $B^t = \frac{1}{2}(A^t + (A^t)^t) = \frac{1}{2}(A^t + A) = B$; et enfin C est antisymétrique, car $C^t = \frac{1}{2}(A^t - (A^t)^t) = -C$.
Exemple :

$$\textit{Pour} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 8 & -3 \end{pmatrix} \qquad \textit{alors} \qquad A \quad = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}}_{\textit{symétrique}} \quad + \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\textit{antisymétrique}}.$$

Exercice 7.2.1. *1. Montrer que la somme de deux matrices triangulaires supérieures reste triangulaire supérieure. Montrer que c'est aussi valable pour le produit.*

2. Montrer que si A est triangulaire supérieure, alors A^T est triangulaire inférieure. Et si A est diagonale ?

3. Soit $A = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Calculer $A^T \cdot A$, puis $A \cdot A^T$.

4. Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Calculer $(A \cdot A^T)$.

5. Soit A une matrice de taille 2×2 inversible. Montrer que si A est symétrique, alors A^{-1} aussi. Et si A est antisymétrique ?

6. Montrer que la décomposition d'une matrice sous la forme « symétrique + antisymétrique » est unique.

7.3 Inverse d'une matrice : définition

7.3.1 Définition

Definition 7.3.1 (Matrice inverse)**.** Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. S'il existe une matrice carrée B de taille $n \times n$ telle que

$$AB = I \qquad \text{et} \qquad BA = I,$$

on dit que A est inversible. On appelle B l'inverse de A et on la note A^{-1}.

On verra plus tard qu'il suffit en fait de vérifier une seule des conditions $AB = I$ ou bien $BA = I$.

– *Plus généralement, quand A est inversible, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note :*

$$A^{-p} = (A^{-1})^p = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \cdots A^{-1}}_{p \text{ facteurs}}.$$

– *L'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$ est noté $GL_n(\mathbb{K})$.*

7.3.2 Exemples

Exemple 59. *Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$. Étudier si A est inversible, c'est étudier l'existence d'une matrice $B = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ à coefficients dans , telle que $AB = I$ et $BA = I$. Or $AB = I$ équivaut* *à :*

$$AB = I \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette égalité équivaut au système :

$$\begin{cases} a+2c = 1 \\ b+2d = 0 \\ 3c = 0 \\ 3d = 1 \end{cases}$$

Sa résolution est immédiate : $a = 1$, $b = -\frac{2}{3}$, $c = 0$, $d = \frac{1}{3}$. *Il n'y a donc qu'une seule matrice possible, à savoir* $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{smallmatrix}\right)$. *Pour prouver qu'elle convient, il faut aussi montrer l'égalité* $BA = I$. *La matrice* A *est donc inversible et* $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Exemple 60. *La matrice* $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ *n'est pas inversible. En effet, soit* $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *une matrice quelconque. Alors le produit*

$$BA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+5b & 0 \\ 3c+5d & 0 \end{pmatrix}$$

ne peut jamais être égal à la matrice identité.

Exemple 61. – *Soit* I_n *la matrice carrée identité de taille* $n \times n$. *C'est une matrice inversible, et son inverse est elle-même par l'égalité* $I_n I_n = I_n$.
– *La matrice nulle* 0_n *de taille* $n \times n$ *n'est pas inversible.*

7.3.3 Propriétés

Unicité

Proposition 7.3.1. *Si* A *est inversible, alors son inverse est unique.*

Inverse de l'inverse

Soit A *une matrice inversible. Alors* A^{-1} *est aussi inversible et on a :* $(A^{-1})^{-1} = A$

Inverse d'un produit

Proposition 7.3.2. *Soient A et B deux matrices inversibles de même taille. Alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$*

Il faut bien faire attention à l'inversion de l'ordre !

preuve. *Il suffit de montrer $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$ et $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$. Cela suit de*

$$\begin{aligned} &(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I, \\ \text{et} \quad &(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I. \end{aligned}$$

Simplification par une matrice inversible

Si C est une matrice quelconque de $M_n(\mathbb{K})$, nous avons vu que la relation $AC = BC$ où A et B sont des éléments de $M_n(\mathbb{K})$ n'entraîne pas forcément l'égalité $A = B$. En revanche, si C est une matrice inversible, on a la proposition suivante :

Proposition 7.3.3. *Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$ et C une matrice inversible de $M_n(\mathbb{K})$. Alors l'égalité $AC = BC$ implique l'égalité $A = B$.*

preuve. *Ce résultat est immédiat : si on multiplie à droite l'égalité $AC = BC$ par C^{-1}, on obtient l'égalité : $(AC)C^{-1} = (BC)C^{-1}$. En utilisant l'associativité du produit des matrices on a $A(CC^{-1}) = B(CC^{-1})$, ce qui donne d'après la définition de l'inverse $AI = BI$, d'où $A = B$.*

Exercice 7.3.1.
1. *Soient $A = \left(\begin{smallmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ et $B = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{smallmatrix}\right)$. Calculer A^{-1}, B^{-1} , $(AB)^{-1}$, $(BA)^{-1}$, A^{-2}.*
2. *Calculer l'inverse de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.*
3. *Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Calculer $2A - A^2$. Sans calculs, en déduire A^{-1}.*

7.4 Inverse d'une matrice : calcul

Nous allons voir une méthode pour calculer l'inverse d'une matrice quelconque de manière efficace. Cette méthode est une reformulation de la méthode du pivot de Gauss pour les systèmes linéaires. Auparavant, nous commençons par une formule directe dans le cas simple des matrices 2×2.

7.4.1 Matrices 2×2

Considérons la matrice 2×2 : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Proposition 7.4.1. *Si* $ad - bc \neq 0$, *alors* A *est inversible et* $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Démonstration. *On vérifie que si* $B = \frac{1}{ad-bc} \left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$ *alors* $AB = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. *Meme chose pour* BA.

7.4.2 Méthode de Gauss pour inverser les matrices

La méthode pour inverser une matrice A *consiste à faire des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice* A *jusqu'à la transformer en la matrice identité* I. *On fait simultanément les mêmes opérations élémentaires en partant de la matrice* I. *On aboutit alors à une matrice qui est* A^{-1}. *La preuve sera vue dans la section suivante.*

En pratique, on fait les deux opérations en même temps en adoptant la disposition suivante : à côté de la matrice A *que l'on veut inverser, on rajoute la matrice identité pour former un tableau* $(A \mid I)$. *Sur les lignes de cette matrice augmentée, on effectue des opérations élémentaires jusqu'à obtenir le tableau* $(I \mid B)$. *Et alors* $B = A^{-1}$.

Ces opérations élémentaires sur les lignes sont :

1. $L_i \leftarrow \lambda L_i$ *avec* $\lambda \neq 0$ *: on peut multiplier une ligne par un réel non nul (ou un élément de* $\setminus\{0\}$*).*
2. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ *avec* $\lambda \in$ *(et* $j \neq i$*) : on peut ajouter à la ligne* L_i *un multiple d'une autre ligne* L_j.
3. $L_i \leftrightarrow L_j$ *: on peut échanger deux lignes.*

N'oubliez pas : tout ce que vous faites sur la partie gauche de la matrice augmentée, vous devez aussi le faire sur la partie droite.

Exemple 62. *Calculons l'inverse de* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Voici la matrice augmentée, avec les lignes numérotées :

$$(A \mid I) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

On applique la méthode de Gauss pour faire apparaître des 0 *sur la première colonne, d'abord sur la deuxième ligne par l'opération élémentaire* $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$ *qui conduit à la matrice augmentée :*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)_{L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1}$$

Puis un 0 *sur la première colonne, à la troisième ligne, avec* $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ *:*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)_{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}$$

On multiplie la ligne L_2 *afin qu'elle commence par* 1 *:*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)_{L_2 \leftarrow -\frac{1}{8}L_2}$$

On continue afin de faire apparaître des 0 *partout sous la diagonale, et on multiplie la ligne* L_3*. Ce qui termine la première partie de la méthode de Gauss :*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)_{L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2}$$

puis

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right)_{L_3 \leftarrow 2L_3}$$

Il ne reste plus qu'à « remonter » pour faire apparaître des zéros au-dessus de la diagonale :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right)_{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{5}{8}L_3}$$

puis

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad {\scriptstyle L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 - L_3}$$

Ainsi l'inverse de A est la matrice obtenue à droite et après avoir factorisé tous les coefficients par $\frac{1}{4}$, on a obtenu :

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 7 & -3 & -5 \\ -8 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Pour se rassurer sur ses calculs, on n'oublie pas de vérifier rapidement que $A \times A^{-1} = I$.

Exercice 7.4.1. *1. Si possible calculer l'inverse des matrices :* $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \alpha+1 & 1 \\ 2 & \alpha \end{pmatrix}$.

2. Soit $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Calculer $A(\theta)^{-1}$.

3. Calculer l'inverse des matrices : $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

7.5 Inverse d'une matrice : systèmes linéaires et matrices élémentaires

7.5.1 Matrices et systèmes linéaires

Le système linéaire

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1p}\,x_p = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2p}\,x_p = b_2 \\ \qquad\qquad \cdots \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \cdots + a_{np}\,x_p = b_n \end{cases}$$

peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B}.$$

On appelle $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice des coefficients du système. $B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ est le vecteur du second membre. Le vecteur $X \in M_{p,1}(\mathbb{K})$ est une solution du système si et seulement si

$$AX = B.$$

Nous savons que : Un système d'équations linéaires n'a soit aucune solution, soit une seule solution, soit une infinité de solutions.

7.5.2 Matrices inversibles et systèmes linéaires

Considérons le cas où le nombre d'équations égale le nombre d'inconnues :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B}.$$

Alors $A \in M_n(\mathbb{K})$ est une matrice carrée et B un vecteur de $M_{n,1}(\mathbb{K})$. Pour tout second membre, nous pouvons utiliser les matrices pour trouver la solution du système linéaire.

propriétés 2. *Si la matrice A est inversible, alors la solution du système $AX = B$ est unique et est : $X = A^{-1}B$.*

La preuve est juste de vérifier que si $X = A^{-1}B$, alors $AX = A\big(A^{-1}B\big) = \big(AA^{-1}\big)B = I \cdot B = B$. Réciproquement si $AX = B$, alors nécessairement $X = A^{-1}B$. Nous verrons bientôt que si la matrice n'est pas inversible, alors soit il n'y a pas de solution, soit une infinité.

7.6 Déterminant des matrices inversibles

Comment savoir si une matrice est inversible ? Il suffit de calculer son déterminant !
Une matrice carrée A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. De plus si A est inversible, alors :

$$\boxed{\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det A}}$$

7.6.1 Le déterminant d'une matrice

Déterminant en dimension 2 et 3

En dimension 2, le déterminant est très simple à calculer :

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

C'est donc le produit des éléments sur la diagonale principale (en bleuen gris foncé) moins le produit des éléments sur l'autre diagonale (en orangeen gris clair).

7.6.2 Matrice 3×3

Soit $A \in M_3()$ une matrice 3×3 :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Voici la formule pour le déterminant :

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}\ .$$

Il existe un moyen facile de retenir cette formule, c'est la règle de Sarrus : on recopie les deux premières colonnes à droite de la matrice (colonnes grisées), puis on additionne les produits de trois termes en les regroupant selon la direction de la diagonale descendante (à gauche), et on soustrait ensuite les produits de trois termes regroupés selon la direction de la diagonale montante (à droite).

Exemple 63. *Calculons le déterminant de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Par la règle de Sarrus :

$$\begin{aligned} \det A &= 2 \times (-1) \times 1 + 1 \times 3 \times 3 + 0 \times 1 \times 2 \\ &\quad - 3 \times (-1) \times 0 - 2 \times 3 \times 2 - 1 \times 1 \times 1 = -6. \end{aligned}$$

(i) le déterminant est linéaire par rapport à chaque vecteur colonne, les autres étant fixés ;
(ii) si une matrice A a deux colonnes identiques, alors son déterminant est nul ;
(iii) le déterminant de la matrice identité I_n vaut 1.

On note le déterminant d'une matrice $A = (a_{ij})$ par :

$$\det A \qquad ou \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Si on note C_i la i-ème colonne de A, alors

$$\det A = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{vmatrix} = \det(C_1, C_2, \dots, C_n)\,.$$

Avec cette notation, la propriété (i) de linéarité par rapport à la colonne j s'écrit : pour tout $\lambda, \mu \in$, $\det(C_1, \dots, \lambda C_j + \mu C'_j, \dots, C_n) = \lambda \det(C_1, \dots, C_j, \dots, C_n) + \mu \det(C_1, \dots, C'_j, \dots, C_n)$, *soit*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \lambda a_{1j} + \mu a'_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & \lambda a_{ij} + \mu a'_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \lambda a_{nj} + \mu a'_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a'_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a'_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Exemple 64.

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 7 & -10 & -3 \\ 12 & 25 & -1 \end{vmatrix} = 5 \times \begin{vmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 7 & -2 & -3 \\ 12 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

Car la seconde colonne est un multiple de 5.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4-3 \\ 7 & -5 & 3-2 \\ 9 & 2 & 10-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 7 & -5 & 3 \\ 9 & 2 & 10 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 7 & -5 & 2 \\ 9 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

Par linéarité sur la troisième colonne.

$$\boxed{\det\left(A^T\right) = \det A}$$

7.6.3 Inverse d'une matrice

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ *une matrice carrée.*
Nous lui associons la matrice C *des cofacteurs, appelée comatrice, et notée* $\mathrm{Com}(A)$ *:*

$$C = (C_{ij}) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

Soient A *une matrice inversible, et* C *sa comatrice. On a alors*

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, C^t}$$

Exemple 65. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$*. Le calcul donne que* $\det A = 2$*. La comatrice* C *s'obtient en calculant* 9 *déterminants* 2×2 *(sans oublier les signes* $+/-$*). On trouve :*

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textit{et donc} \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot C^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

7.6.4 Méthode de Cramer

Le théorème suivant, appelé règle de Cramer, donne une formule explicite pour la solution de certains systèmes d'équations linéaires ayant autant d'équations que d'inconnues. Considérons le système d'équations linéaires à n *équations et* n *inconnues suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \cdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \right.$$

Ce système peut aussi s'écrire sous forme matricielle $AX = B$ où

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K}), \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Définissons la matrice $A_j \in M_n(\mathbb{K})$ par

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Autrement dit, A_j est la matrice obtenue en remplaçant la j-ème colonne de A par le second membre B. La règle de Cramer va nous permettre de calculer la solution du système dans le cas où $\det A \neq 0$ en fonction des déterminants des matrices A et A_j.
[Règle de Cramer] Soit

$$AX = B$$

un système de n équations à n inconnues. Supposons que $\det A \neq 0$. Alors l'unique solution $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ du système est donnée par :

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} \qquad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} \qquad \ldots \qquad x_n = \frac{\det A_n}{\det A}.$$

Exemple 66. *Résolvons le système suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & + & 2x_3 & = & 6 \\ -3x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 30 \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 8. \end{array} \right.$$

On a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 30 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

et

$$\det A = 44 \qquad \det A_1 = -40 \qquad \det A_2 = 72 \qquad \det A_3 = 152.$$

La solution est alors

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = -\frac{40}{44} = -\frac{10}{11} \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11} \quad x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}\,.$$

La méthode de Cramer n'est pas la méthode la plus efficace pour résoudre un système, mais est utile si le système contient des paramètres.

Bibliographie

[1] Brahim oukacha et collectif ,Annales de mathématiques ,Algèbre 12. les annales bleues internationales,janvier 2014.

[2] C. Baba Hamed, K. Benhabib, Algèbre 1, Rappels de cours et exercices corrigés. O.P.U. Alger, 2007.

[3] C.Deschamps,F.Moulin,A.Warusfel,mathématiques tout-en-un. Dunod 2014.

[4] J.Freslon,M.Hézard,j.Poineau,A.Freslon,mathématiques exercices incontournables 4ème édition ,Dunod 2007.

[5] J, Quinet,Cours élémentaire de mathématiques supèrieure,1-Algèbre. 6ème édition ,Dunod 2007,Paris 1976.

[6] Karine beaurpère,savoir faire en prépas,maths .PTSI. Ellipses 2016. 4ème édition ,Dunod 2007.

[7] S. Belhaj, Mathématiques pour l'économie et la gestion, analyse et algèbre. Edition Vuibert. Paris, 2011.