



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا «محمد بوضياف»
République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur Et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté d'Architecture et de Génie Civil

CONSEIL SCIENTIFIQUE DE LA FACULTE

.....

EXTRAIT DU PROCES VERBAL DE LA REUNION DU CSF TENUE 26 FEVRIER 2026

Suite aux rapports favorables émis par **Mme LEHBAB Zakia** (MCA , USTO-MB) et **Mme DELHOUM Zohra Sabrina** (MCA, ESE. Oran), le CSF valide le polycopié de **M. BERGANE Cheikh** (MCB, USTO-MB).

Destiné aux étudiants L2 ST et 1ere année Ingénieurs ST, l'ouvrage a pour titre
« « Probabilités et statistiques- Partie : Probabilités » » .



Le Président du C.S.F

الأستاذ : رحال إدريس جواد
رئيس المجلس العلمي للكلية

Avant-propos

Aucune discipline scientifique n'est aujourd'hui exempte du recours aux probabilités et aux statistiques, tant elles interviennent dans tous les domaines de la vie quotidienne et de la recherche.

Le présent cours de Probabilités a été conçu pour accompagner les étudiants de première année ingénieur et de deuxième année licence dans l'acquisition et la compréhension progressive des concepts fondamentaux de la théorie des probabilités. Il s'adresse principalement aux étudiants inscrits dans des filières de mathématiques, de sciences appliquées ou d'ingénierie, et vise à leur fournir une base solide pour des études ultérieures en statistique, modélisation et mathématiques appliquées.

Les probabilités occupent une place fondamentale dans l'analyse et la compréhension des phénomènes aléatoires. Elles constituent un outil indispensable dans de nombreux domaines scientifiques, tels que la finance, la physique, la biologie, l'ingénierie, l'informatique, l'hydroscience, la climatologie ou encore les sciences sociales. Dans cette perspective, ce cours vise à présenter les principaux concepts théoriques (analyse combinatoire, lois de probabilité, espérance, variance, etc.) ainsi que leurs applications pratiques, illustrées par des exemples issus de situations réelles et professionnelles.

L'objectif de ce cours est de préparer les étudiants à utiliser les probabilités dans la prise de décision, en adoptant une approche progressive consistant à introduire d'abord les notions de base avant d'aborder des concepts plus avancés.

Le document est structuré en cinq chapitres :

- Le premier chapitre rappelle les outils essentiels de l'analyse combinatoire ;
- Le deuxième présente la construction de l'espace de probabilités ;
- Le troisième est consacré aux variables aléatoires ;
- Le quatrième traite des lois usuelles discrètes ;
- Le cinquième expose les principales lois continues.

Des exemples d'application sont intégrés au sein de chaque chapitre, et une série d'exercices types, accompagnés de leurs corrigés détaillés, est proposée en fin de chapitre afin de permettre au lecteur d'évaluer et de renforcer ses acquis.

Ce polycopié est le fruit de plusieurs années d'enseignement du cours « Probabilités et Statistiques » au département de Génie Mécanique de la Faculté de Génie Mécanique de l'USTO-MB.

Malgré le soin apporté à sa rédaction, des erreurs peuvent subsister. Je remercie par avance toute personne, collègue ou étudiant, qui voudra bien me les signaler.

Bonne lecture et bon apprentissage !

Table des matières

Chapitre I Analyse combinatoire.....	1
I.1 Introduction.....	2
I.2 Propriétés de l'analyse combinatoire	2
I.2.1 Arrangement ordonné avec répétition (avec remise)	2
I.2.1.1 Définition	2
I.2.1.2 Premier exemple d'arrangement avec répétition.....	2
I.2.1.3 Deuxième exemple d'arrangement avec répétition	3
I.2.2 Arrangement ordonné sans répétition (sans remise)	3
I.2.2.1 Définition	3
I.2.2.2 Propriétés de l'arrangement ordonné sans répétition	3
I.2.2.3 Premier exemple d'arrangement sans répétition	3
I.2.2.4 Deuxième exemple d'arrangement sans répétition	4
I.2.3 Permutation sans répétition (sans remise).....	5
I.2.3.1 Définition	5
I.2.3.2 Premier exemple de permutation sans répétition	5
I.2.3.3 Deuxième exemple de permutation sans répétition.....	6
I.2.4 Permutation avec répétition (avec remise).....	6
I.2.4.1 Définition	6
I.2.4.2 Exemple de permutation avec répétition.....	6
I.2.5 Combinaison	7
I.2.5.1 Définition	7
I.2.5.2 Propriétés des combinaisons	7
I.2.5.3 Symétrie des combinaisons	7
I.2.5.4 Premier exemple de combinaison	8
I.2.5.5 Deuxième exemple de combinaison.....	8
I.3 Triangle de Pascal	9
I.3.1 Binôme de Newton.....	10
Exercices corrigés du Chapitre I Analyse combinatoire	13
Exercice I.1 :.....	14
Corrigé de l'exercice I.1 :.....	14
Exercice I.2 :.....	14
Corrigé de l'exercice I.2 :.....	14
Exercice I.3 :.....	14
Corrigé de l'exercice I.3 :.....	14
Exercice I.4 :.....	15
Corrigé de l'exercice I.4 :.....	15

Exercice I.5 :.....	16
Corrigé de l'exercice I.5 :.....	16
Exercice I.6 :.....	17
Corrigé de l'exercice I.6 :.....	17
Exercice I.7 :.....	17
Corrigé de l'exercice I.7 :.....	17
Exercice I.8 :.....	18
Corrigé de l'exercice I.8 :.....	18
Exercice I.9 :.....	18
Corrigé de l'exercice I.9 :.....	18
Exercice I.10 :.....	19
Corrigé de l'exercice I.10 :.....	19
Exercice I.11 :.....	20
Corrigé de l'exercice I.11 :.....	20
Exercice I.12 :.....	21
Corrigé de l'exercice I.12 :.....	21
Exercice I.13 :.....	22
Corrigé de l'exercice I.13 :.....	22
Exercice I.14 :.....	23
Corrigé de l'exercice I.14 :.....	24
Exercice I.15 :.....	25
Corrigé de l'exercice I.15 :.....	25
Exercice I.16 :.....	25
Corrigé de l'exercice I.16 :.....	26
Exercice I.17 :.....	26
Corrigé de l'exercice I.17 :.....	26
Exercice I.18 :.....	27
Corrigé de l'exercice I.18 :.....	27
Chapitre II Espace de probabilités.....	29
II.1 Vocabulaire fondamental en probabilités	30
II.2 Opérations sur les événements.....	31
II.2.1 Intersection de deux événements	31
II.2.2 Union de deux événements	31
II.2.3 Événements incompatibles	31
II.3 Probabilité d'un événement	32
II.3.1 Définition.....	32
II.3.2 Probabilité de l'union de deux événements.....	32

II.3.3 Événements indépendants.....	33
II.4 Premier exemple d'application du calcul de probabilité.....	33
II.5 Deuxième exemple d'application du calcul de probabilité.....	34
II.6 Probabilité conditionnelle	36
II.6.1 Introduction à la probabilité conditionnelle (à travers un exemple)	36
II.6.2 Propriétés de la probabilité conditionnelle	36
II.6.3 Théorème de Bayes.....	37
II.6.4 Exemple d'application de probabilité conditionnelle	37
Exercices corrigés du Chapitre II Espace de probabilités	39
Exercice II.1 :	40
Corrigé de l'exercice II.1 :	40
Exercice II.2 :	40
Corrigé de l'exercice II.2 :	41
Exercice II.3 :	41
Corrigé de l'exercice II.3 :	41
Exercice II.4 :	42
Corrigé de l'exercice II.4 :	42
Exercice II.5 :	43
Corrigé de l'exercice II.5 :	43
Exercice II.6 :	44
Corrigé de l'exercice II.6 :	44
Exercice II.7 :	45
Corrigé de l'exercice II.7 :	45
Exercice II.8 :	45
Corrigé de l'exercice II.8 :	45
Exercice II.9 :	46
Corrigé de l'exercice II.9 :	46
Exercice II.10 :	47
Corrigé de l'exercice II.10 :	48
Exercice II.11 :	48
Corrigé de l'exercice II.11 :	48
Exercice II.12 :	49
Corrigé de l'exercice II.12 :	49
Exercice II.13 :	50
Corrigé de l'exercice II.13 :	50
Exercice II.14 :	51
Corrigé de l'exercice II.14 :	51

Chapitre III Variables aléatoires.....	53
III.1 Notion de la variable aléatoire.....	54
III.1.1 Exemple introductif : variable aléatoire simple.....	54
III.1.2 Définition générale d'une variable aléatoire	54
III.2 Types de variables aléatoires.....	54
III.2.1 Variable aléatoire discrète	54
III.2.1.1 Définition.....	54
III.2.1.2 Loi de probabilité	55
III.2.1.3 Fonction de répartition	55
III.2.1.3.1 Propriétés de la fonction de répartition.....	55
III.2.1.4 Exemples de variables aléatoires discrètes	56
III.2.1.4.1 Exemple 1 : Extraction de la loi de probabilité à partir d'une fonction de répartition	56
III.2.1.4.2 Exemple 2 : Fonction de répartition à partir d'une loi de probabilité donnée.....	57
III.2.1.4.3 Exemple 3 : Loi de probabilité et fonction de répartition du nombre de « Pile » obtenus lors de deux lancers d'une pièce de monnaie équilibrée	58
III.2.1.5 Caractéristiques statistiques.....	59
III.2.1.5.1 Espérance Mathématique.....	59
III.2.1.5.2 Variance.....	60
III.2.1.5.3 Écart-type	60
III.2.2 Variable aléatoire continue.....	61
III.2.2.1 Définition.....	61
III.2.2.2 Exemple introductif : Temps d'attente	61
III.2.2.3 Loi de probabilité	63
III.2.2.3.1 Densité de probabilité.....	63
III.2.2.3.2 Fonction de répartition	65
III.2.2.3.2.1 Propriétés de la fonction de répartition.....	65
III.2.2.4 Caractéristiques statistiques.....	66
III.2.2.4.1 Espérance mathématique	66
III.2.2.4.2 Variance.....	66
III.2.2.4.3 Écart-type	66
III.2.2.5 Exemples de variables continues.....	67
III.2.2.5.1 Exemple 1 : Vérification d'une densité de probabilité sur un intervalle	67
III.2.2.5.2 Exemple 2 : Calcul de probabilités avec une densité exponentielle	69
III.2.2.5.3 Exemple 3 : Calcul de l'espérance avec une densité polynomiale.....	69
Exercices corrigés du Chapitre III Variables aléatoires	70
Exercice III.1 :	71
Corrigé de l'exercice III.1 :	71

Exercice III.2 :	72
Corrigé de l'exercice III.2 :	72
Exercice III.3 :	74
Corrigé de l'exercice III.3 :	75
Exercice III.4 :	76
Corrigé de l'exercice III.4 :	76
Exercice III.5 :	79
Corrigé de l'exercice III.5 :	79
Exercice III.6 :	80
Corrigé de l'exercice III.6 :	80
Exercice III.7 :	82
Corrigé de l'exercice III.7 :	82
Exercice III.8 :	84
Corrigé de l'exercice III.8 :	84
Exercice III.9 :	86
Corrigé de l'exercice III.9 :	86
Exercice III.10 :	87
Corrigé de l'exercice III.10 :	87
Exercice III.11 :	89
Corrigé de l'exercice III.11 :	89
Exercice III.12 :	91
Corrigé de l'exercice III.12 :	91
Exercice III.13 :	92
Corrigé de l'exercice III.13 :	92
Exercice III.14 :	93
Corrigé de l'exercice III.14 :	93
Exercice III.15 :	93
Corrigé de l'exercice III.15 :	93
Exercice III.16 :	95
Corrigé de l'exercice III.16 :	95
Exercice III.17 :	95
Corrigé de l'exercice III.17 :	95
Exercice III.18 :	98
Corrigé de l'exercice III.18 :	98
Exercice III.19 :	99
Corrigé de l'exercice III.19 :	99
Chapitre IV Lois usuelles discrètes	102

IV.1 Introduction	103
IV.2 Loi uniforme discrète	104
IV.2.1 Définition	104
IV.2.2 Espérance mathématique.....	104
IV.2.3 Variance	104
IV.2.4 Écart-type	104
IV.2.5 Exemples d'application.....	104
IV.2.5.1 Premier exemple.....	104
IV.2.5.2 Deuxième exemple.....	106
IV.3 Loi de Bernoulli	107
IV.3.1 Définition et propriétés.....	107
IV.3.2 Exemples d'application.....	108
IV.3.2.1 Premier exemple.....	108
IV.3.2.2 Deuxième exemple.....	108
IV.3.2.3 Troisième exemple	109
IV.3.2.4 Quatrième exemple	110
IV.4 Loi binomiale	110
IV.4.1 Quand est-ce qu'on a affaire à une loi binomiale ?	110
IV.4.2 Définition de la loi binomiale.....	111
IV.4.3 Démonstration de la formule	111
IV.4.3.1 Exemple introductif.....	111
IV.4.4 Espérance mathématique et variance	113
IV.4.5 Exemples d'application.....	113
IV.4.5.1 Premier exemple.....	113
IV.4.5.2 Deuxième exemple.....	114
IV.5 Loi de Poisson.....	115
IV.5.1 Définition et propriétés.....	115
IV.5.2 Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson	116
IV.5.3 Exemple d'application.....	117
IV.6 Loi géométrique	118
IV.6.1 Définition et propriétés.....	118
IV.6.2 Exemple d'application.....	121
IV.7 Loi hypergéométrique	122
IV.7.1 Définition et contexte d'utilisation.....	122
IV.7.2 Espérance mathématique.....	123
IV.7.3 Variance	123
IV.7.4 Approximation de la loi hypergéométrique par la loi binomiale	124

IV.7.5 Exemple d'application.....	125
Exercices corrigés du Chapitre IV Lois usuelles discrètes	127
Exercice IV.1 :.....	128
Corrigé de l'exercice IV.1 :.....	128
Exercice IV.2 :.....	129
Corrigé de l'exercice IV.2 :.....	129
Exercice IV.3 :.....	130
Corrigé de l'exercice IV.3 :.....	130
Exercice IV.4 :.....	130
Corrigé de l'exercice IV.4 :.....	130
Exercice IV.5 :.....	131
Corrigé de l'exercice IV.5 :.....	131
Exercice IV.6 :.....	132
Corrigé de l'exercice IV.6 :.....	132
Exercice IV.7 :.....	133
Corrigé de l'exercice IV.7 :.....	133
Exercice IV.8 :.....	133
Corrigé de l'exercice IV.8 :.....	134
Exercice IV.9 :.....	134
Corrigé de l'exercice IV.9 :.....	134
Exercice IV.10 :.....	135
Corrigé de l'exercice IV.10 :.....	135
Exercice IV.11 :.....	136
Corrigé de l'exercice IV.11 :.....	136
Exercice IV.12 :.....	137
Corrigé de l'exercice IV.12 :.....	137
Exercice IV.13 :.....	138
Corrigé de l'exercice IV.13 :.....	138
Exercice IV.14 :.....	140
Corrigé de l'exercice IV.14 :.....	140
Exercice IV.15 :.....	141
Corrigé de l'exercice IV.15 :.....	141
Exercice IV.16 :.....	142
Corrigé de l'exercice IV.16 :.....	142
Exercice IV.17 :.....	143
Corrigé de l'exercice IV.17 :.....	143
Exercice IV.18 :.....	143

Corrigé de l'exercice IV.18 :	143
Chapitre V Lois usuelles continues	145
V.1 Introduction	146
V.2 Loi uniforme continue	147
V.2.1 Définition et propriétés	147
V.2.2 Calcul de probabilité avec la loi uniforme continue	148
V.2.3 Fonction de répartition	148
V.2.4 Espérance mathématique	148
V.2.5 Variance	148
V.2.6 Exemples d'application	148
V.2.6.1 Premier exemple	148
V.2.6.2 Deuxième exemple	149
V.3 Loi normale	150
V.3.1 Introduction	150
V.3.2 Caractéristiques de la loi normale	150
V.3.3 Passage à un modèle standard : Loi normale centrée réduite	152
V.3.4 Lecture des probabilités à l'aide de la table de la loi normale centrée réduite	154
V.3.5 Approximation de la loi binomiale par la loi normale	154
V.4 Loi exponentielle	155
V.4.1 Définition et propriétés	155
V.4.2 Fonction de répartition	156
V.4.3 Espérance mathématique	156
V.4.4 Variance	157
V.4.5 Calcul de la probabilité $P(a \leq X \leq b)$	157
V.4.6 Exemple d'application	159
V.5 Loi gamma	159
V.5.1 Définition	159
V.5.2 Propriété fondamentale	159
V.5.3 Démonstration	160
V.5.4 Fonction de densité	161
V.5.5 Espérance mathématique	161
V.5.6 Variance	162
V.5.7 Exemple d'application	163
Exercices corrigés du Chapitre V Lois usuelles continues	165
Exercice V.1 :	166
Corrigé de l'exercice V.1 :	166
Exercice V.2 :	166

Corrigé de l'exercice V.2 :	166
Exercice V.3 :	166
Corrigé de l'exercice V.3 :	167
Exercice V.4 :	167
Corrigé de l'exercice V.4 :	168
Exercice V.5 :	169
Corrigé de l'exercice V.5 :	169
Exercice V.6 :	170
Corrigé de l'exercice V.6 :	170
Exercice V.7 :	171
Corrigé de l'exercice V.7 :	171
Exercice V.8 :	173
Corrigé de l'exercice V.8 :	173
Exercice V.9 :	174
Corrigé de l'exercice V.9 :	174
Exercice V.10 :	175
Corrigé de l'exercice V.10 :	175
Exercice V.11 :	175
Corrigé de l'exercice V.11 :	176
Exercice V.12 :	177
Corrigé de l'exercice V.12 :	177
Exercice V.13 :	178
Corrigé de l'exercice V.13 :	178
Exercice V.14 :	179
Corrigé de l'exercice V.14 :	179
Exercice V.15 :	180
Corrigé de l'exercice V.15 :	180
Exercice V.16 :	182
Corrigé de l'exercice V.16 :	182
Annexe : Table de la loi normale centrée réduite	184
Bibliographie	185

Liste des figures

Figure II.1 : Arbre pondéré des événements liés à la couleur et au gain lors du tirage d'une boule	38
Figure II.2 : Arbre pondéré des traitements administrés en cas de migraine et probabilités de soulagement.....	50
Figure III.1 : Graphe en bâtons de la distribution de probabilité de X	59
Figure III.2 : Graphique en escalier de $F(x)$ associée à X	59
Figure III.3 : Histogramme des densités de probabilité du temps d'attente en (minutes)	62
Figure III.4 : Densité de probabilité continue pour la variable « temps d'attente »	64
Figure III.5 : Courbe de densité sur un intervalle borné $[a ; b]$	64
Figure III.6 : Courbe de densité sur un intervalle non borné à droite $[a ; +\infty[$	65
Figure III.7 : Courbe de densité sur l'ensemble R	65
Figure III.8 : Courbe de la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 2]$	67
Figure III.9 : Arbre pondéré des issues et des gains associés lors de trois lancers successifs d'une pièce de monnaie	73
Figure III.10 : Arbre pondéré représentant les différentes combinaisons possibles de plats et desserts dans le menu du restaurant	77
Figure III.11 : Représentation graphique en escalier de la fonction de répartition de la durée d'attente aux remontées mécaniques	88
Figure III.12 : Représentation en bâtons de la loi de probabilité du nombre d'enfants de 10 ans dans un groupe de 6 volontaires	90
Figure III.13 : Fonction de répartition en escalier du nombre d'enfants de 10 ans parmi les volontaires	91
Figure IV.1 : Arbre pondéré du lancer de 3 pièces ($p = 0,8$ pour pile).....	111
Figure IV.2 : Arbre pondéré des tirages jusqu'à l'obtention du premier succès	119
Figure V.1 : Représentation graphique de la densité de la loi uniforme continue sur $[a, b]$	147
Figure V.2 : Visualisation de la loi normale en forme de cloche	150
Figure V.3 : Positionnement des paramètres de la loi normale : moyenne et écart-type.....	151
Figure V.4 : Représentation graphique des probabilités pour les variables a , b et m sur la courbe de la loi normale.....	152
Figure V.5 : Représentation de la loi normale centrée réduite avec la moyenne (0) et l'écart-type (1)	153
Figure V.6 : Aire représentant la probabilité $P(a \leq X \leq b)$ sous la courbe de densité d'une loi exponentielle	158
Figure V.7 : Courbe de densité d'une loi exponentielle de paramètre λ	175
Figure V.8 : Représentation graphique de la probabilité $P(X \leq 1)$ et lecture directe de λ	176

Liste des tableaux

Tableau I.1 : Construction du triangle de Pascal (n de 0 à 6).....	10
Tableau I.2 : Structure du développement $(a + b)^n$ selon la formule du binôme de Newton.....	11
Tableau I.3 : Nombre de possibilités pour différentes configurations de tirage selon le mode d'échantillonnage	24
Tableau I.4 : Nombre de combinaisons possibles pour différentes configurations de tirage simultané	25
Tableau I.5 : Nombre de tirages possibles pour différentes configurations (tirage successif sans remise)	26
Tableau II.1 : Ensemble des couples $(x ; y)$ obtenus lors de deux lancers successifs d'un dé équilibré	35
Tableau II.2 : Valeur maximale obtenue lors du lancer de deux dés équilibrés	47
Tableau III.1 : Valeurs de la fonction de répartition et des probabilités associées	56
Tableau III.2 : Loi de probabilité de X et de sa fonction de répartition $F(x)$	57
Tableau III.3 : Issues possibles des deux lancers de la pièce de monnaie	58
Tableau III.4 : Loi de probabilité et fonction de répartition de la variable aléatoire X	58
Tableau III.5 : Loi de probabilité de la variable aléatoire X (gain du joueur).....	60
Tableau III.6 : Tableau de variation et de signe de la fonction $f(x) = \frac{3}{4}(1 - x^2)$	68
Tableau III.7 : Loi de probabilité de la variable aléatoire X représentant le gain algébrique dans un jeu de dé à 6 faces	71
Tableau III.8 : Loi de probabilité de la variable aléatoire G représentant le gain algébrique du joueur après trois lancers de pièce de monnaie	73
Tableau III.9 : Loi de probabilité de la variable aléatoire X représentant le nombre de boules blanches obtenues lors d'un double tirage dans deux urnes.....	75
Tableau III.10 : Loi de probabilité de la variable aléatoire X représentant le montant total à payer pour un repas complet (plat + dessert).....	78
Tableau III.11 : Valeurs de la variable aléatoire X représentant l'écart absolu entre les résultats de deux dés cubiques équilibrés.....	80
Tableau III.12 : Loi de probabilité de la variable aléatoire X représentant l'écart entre les deux nombres obtenus au lancer de deux dés	80
Tableau III.13 : Loi de probabilité de la variable aléatoire X représentant le gain net du joueur	82
Tableau III.14 : Loi de probabilité de X représentant le gain algébrique du joueur à l'issue du jeu.....	84
Tableau III.15 : Loi de probabilité modifiée de X pour équilibrer le jeu (espérance nulle)	85
Tableau III.16 : Valeurs du discriminant $\Delta = \beta^2 - 4ac$ pour toutes les combinaisons (α, β)	86
Tableau III.17 : Loi de probabilité de la variable aléatoire S (nombre de solutions de l'équation)	87
Tableau III.18 : Loi de probabilité et fonction de répartition de la durée d'attente aux remontées mécaniques	88
Tableau III.19 : Distribution de probabilité et fonction de répartition du nombre d'enfants de 10 ans parmi les volontaires	90
Tableau IV.1 : Loi de probabilité d'une variable aléatoire uniforme discrète $X \sim U(10, 20, 50, 100)$	105

Tableau IV.2 : Loi de probabilité d'une variable aléatoire uniforme discrète $X \sim U(1, 2, \dots, n)$	105
Tableau IV.3 : Loi de probabilité de la variable aléatoire X suivant une loi de Bernoulli	107
Tableau IV.4 : Répartition des probabilités pour avoir « Pile » (Bernoulli $p = \frac{1}{2}$)	108
Tableau IV.5 : Loi de probabilité de X d'un dé équilibré (loi de Bernoulli $B(\frac{1}{6})$)	109
Tableau IV.6 : Loi de probabilité de X (nouveau-né garçon) - loi de Bernoulli $B(0,43)$	109
Tableau IV.7 : Loi de probabilité de X (tirage d'une boule blanche, loi de Bernoulli $B(\frac{6}{11})$)	110
Tableau IV.8 : Loi de probabilité associée à une loi binomiale	112
Tableau IV.9 : Loi de probabilité pour l'obtention de boules rouges (application de la loi hypergéométrique).....	125
Tableau IV.10 : Loi de probabilité du nombre d'essais nécessaires pour découvrir le trésor parmi 4 coffres.....	128
Tableau IV.11 : Loi de probabilité associée à la valeur aléatoire des cartes cadeaux distribuées.....	129
Tableau IV.12 : Loi de probabilité de $X \sim B(0,4)$	130
Tableau IV.13 : Répartition des probabilités pour le choix d'une carte fidèle (succès $p = \frac{1}{5}$).....	131
Tableau IV.14 : Répartition des probabilités pour le tirage d'une boule dans l'urne (succès = boule noire)	132
Tableau IV.15 : Loi de probabilité de X (tirage d'une boule verte), $X \sim B(\frac{5}{7})$	133

Chapitre I Analyse combinatoire

I.1 Introduction

L'analyse combinatoire est une branche des mathématiques dédiée à l'étude du dénombrement des objets dans divers contextes. Elle vise à déterminer le nombre de configurations ou d'arrangements possibles dans une situation donnée, sans se focaliser sur le calcul des probabilités.

L'objectif principal de l'analyse combinatoire est donc d'identifier le nombre de possibilités dans une expérience aléatoire. Par exemple, considérons une série de livres que l'on souhaite disposer sur une étagère. L'analyse combinatoire permet de calculer le nombre de façons différentes dont ces livres peuvent être rangés.

I.2 Propriétés de l'analyse combinatoire**I.2.1 Arrangement ordonné avec répétition (avec remise)****I.2.1.1 Définition**

Dans un ensemble de n éléments, on peut assembler (ou arranger) p éléments, avec répétition (ou remise), de manière ordonnée. Dans ce cas, le nombre total d'arrangements possibles est donné par la formule :

$$A_n^p = n^p \quad \text{Avec } 0 \leq p \leq n$$

Où : n représente le nombre total d'éléments dans l'ensemble (effectif total) et p est le nombre d'éléments à assembler (effectif partiel).

I.2.1.2 Premier exemple d'arrangement avec répétition**Énoncé**

Un code est composé de 3 chiffres, chacun compris entre 0 et 9. Combien de codes peut-on former ?

Corrigé

Dans ce cas, l'ordre des chiffres est important (par exemple, $12 \neq 21$), et les chiffres peuvent se répéter, c'est-à-dire qu'il n'y a aucune restriction sur leur réutilisation.

On a :

- $n = 10$ (Nombre total de chiffres possibles, de 0 à 9) ;
- $p = 3$ (Nombre de chiffres à utiliser dans le code).

Le nombre total de codes possibles est donné par la formule :

$$A_n^p = n^p = 10^3 = 1000$$

Ainsi, avec 3 chiffres, il est possible de former 1000 codes différents.

I.2.1.3 Deuxième exemple d'arrangement avec répétition**Énoncé**

Un code est composé de 4 chiffres impairs. Combien de codes peut-on former ?

Corrigé

Les chiffres impairs disponibles sont : 1, 3, 5, 7 et 9.

On a donc :

- $n = 5$ (Nombre total de chiffres impairs disponibles) ;
- $p = 4$ (Nombre de chiffres à utiliser dans le code).

Le nombre total de codes possibles est donné par la formule :

$$A_n^p = n^p = 5^4 = 625$$

Ainsi, on peut former 625 codes composés de 4 chiffres impairs.

I.2.2 Arrangement ordonné sans répétition (sans remise)**I.2.2.1 Définition**

Dans un ensemble de n éléments, on peut assembler (ou arranger) p éléments de manière ordonnée, sans répétition (sans remise). Cela signifie qu'une fois un élément sélectionné, il ne peut plus être utilisé dans l'arrangement. Le nombre total d'arrangements possibles est donné par la formule :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \quad \text{Avec } 0 \leq p \leq n$$

Où : n représente le nombre total d'éléments dans l'ensemble (effectif total), p est le nombre d'éléments à assembler (effectif partiel), $n!$ est la factorielle de n , qui correspond au produit de tous les entiers positifs inférieurs ou égaux à n .

La factorielle d'un entier naturel n est définie comme suit :

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$$

Par exemple, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

I.2.2.2 Propriétés de l'arrangement ordonné sans répétition

- $A_n^0 = 1$: Il n'y a qu'une seule façon de ne sélectionner aucun élément (cas vide).
- $A_n^1 = n$: Choisir un seul élément parmi n donne exactement n arrangements possibles.
- $A_n^n = n!$: Il n'y a qu'une seule façon d'arranger tous les éléments, et cela correspond à $(n!)$, c'est-à-dire le nombre de permutations de n éléments.

I.2.2.3 Premier exemple d'arrangement sans répétition**Énoncé**

Un code est composé de 3 chiffres (compris entre 0 et 9). Combien de codes différents peut-on former ?

Corrigé

Dans ce cas, l'ordre des chiffres est important (par exemple, $13 \neq 31$), et les chiffres ne peuvent pas se répéter, car il y a une restriction sur l'utilisation des chiffres (les codes doivent être différents).

On a :

- $n = 10$ (Nombre total de chiffres disponibles) ;
- $p = 3$ (Nombre de chiffres à utiliser dans le code).

Le nombre total de codes différents possibles est donné par la formule des arrangements sans répétition :

$$A_n^p = A_{10}^3 = \frac{n!}{(n-p)!} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!}$$

En simplifiant les factorielles :

$$A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

Ainsi, avec 3 chiffres, 720 codes différents peuvent être formés.

I.2.2.4 Deuxième exemple d'arrangement sans répétition**Énoncé**

Un code est composé de 2 chiffres pairs. Combien de codes différents peut-on former ?

Corrigé

Les chiffres pairs disponibles sont : 0, 2, 4, 6 et 8.

On a :

- $n = 5$ (Nombre total de chiffres pairs disponibles) ;
- $p = 2$ (Nombre de chiffres à utiliser dans le code).

Le nombre total de codes différents possibles est donné par la formule des arrangements sans répétition :

$$A_n^p = A_5^2 = \frac{n!}{(n-p)!} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!}$$

En simplifiant les factorielles :

$$A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20$$

Ainsi, 20 codes différents peuvent être formés avec 2 chiffres pairs.

I.2.3 Permutation sans répétition (sans remise)**I.2.3.1 Définition**

Dans un ensemble de n éléments, on effectue une permutation sans répétition (ou sans remise) de p éléments ordonnés. La permutation est un cas particulier d'arrangement, et la formule générale pour une permutation de p éléments parmi n est :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Lorsque $n = p$, c'est-à-dire que l'on permute tous les n éléments de l'ensemble, la formule devient :

$$A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Autrement dit, pour une permutation ordonnée de tous les n éléments d'un ensemble, nous avons :

$$P_n = n!$$

Pourquoi $0! = 1$?

- $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$
- $(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1)$
- $\frac{n!}{n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n}{n} = (n-1)!$

Ainsi, pour $n = 2$:

- $\frac{2!}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1 = (2-1)! = 1! = 1$

Et pour $n = 1$:

- $\frac{1!}{1} = \frac{1}{1} = 1 = (1-1)! = 0! = 1$

I.2.3.2 Premier exemple de permutation sans répétition**Énoncé**

On permute les lettres du mot COURS. Combien de mots distincts peut-on former ?

Corrigé

L'ordre des lettres est important et la répétition des lettres n'est pas autorisée.

Puisqu'il y a 5 lettres distinctes, nous utilisons une permutation de 5 éléments.

Donc $n = p = 5$.

La formule pour calculer le nombre de permutations est :

$$P_n = n! = P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

Ainsi, avec les lettres du mot COURS, on peut former 120 mots distincts.

I.2.3.3 Deuxième exemple de permutation sans répétition**Énoncé**

Calculer le nombre de possibilités qu'il y a d'asseoir 4 garçons et 4 filles sur un banc, sachant qu'il y a alternativement un garçon, une fille, etc.

Corrigé

Dans ce cas, nous devons disposer les 4 garçons et les 4 filles de manière alternée, c'est-à-dire un garçon, puis une fille, puis un garçon, etc.

Il y a 4 garçons à placer sur le banc. Le nombre de façons de les disposer est donné par une permutation des 4 garçons, soit :

$$4! = 24$$

Ensuite, il faut placer les filles dans les espaces restants, ce qui est aussi une permutation des 4 filles :

$$4! = 24$$

Il y a deux possibilités pour débiter la disposition : soit on commence par un garçon, soit on commence par une fille. Ce choix ajoute un facteur multiplicatif de 2.

$$2 \cdot 4! \cdot 4! = 1152$$

Donc, il y a 1152 façons d'asseoir les 4 garçons et les 4 filles en alternant les sexes.

I.2.4 Permutation avec répétition (avec remise)**I.2.4.1 Définition**

La permutation avec répétition, également appelée permutation avec remise, est une situation dans laquelle certains éléments se répètent plusieurs fois parmi les n éléments. Lorsque ces répétitions existent, le nombre de permutations possibles doit tenir compte du fait que les éléments identiques sont indiscernables dans les différentes dispositions.

Si un ensemble contient n éléments et k d'entre eux sont identiques, le nombre total de permutations est donné par la formule :

$$P_n = \frac{n!}{k!}$$

$k!$: Représente la factorielle du nombre d'éléments identique k

I.2.4.2 Exemple de permutation avec répétition**Énoncé**

On permute les lettres du mot SCIENCE. Combien de mots peut-on former ?

Corrigé

Les lettres C apparaissent 2 fois, et les lettres E apparaissent également 2 fois. Le nombre de permutations possibles est donné par la formule suivante :

$$P_n = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2!}$$

Où :

- n : Nombre total de lettres (ici, 7) ;
- $k_1!$: Correspond aux répétitions de la lettre C (2 fois) ;
- $k_2!$: Correspond aux répétitions de la lettre E (2 fois).

Sachant que dans le langage de probabilité, le mot "et" se traduit par une multiplication, les répétitions des lettres sont prises en compte dans le calcul avec $2! \cdot 2!$ pour les lettres C et E.

$$P_7 = \frac{7!}{2! \cdot 2!} = 1260$$

Ainsi, il est possible de former 1260 mots différents avec les lettres du mot SCIENCE.

I.2.5 Combinaison

I.2.5.1 Définition

Dans un ensemble de n éléments, une combinaison sans répétition consiste à sélectionner p éléments non ordonnés. Le nombre de combinaisons possibles est donné par la formule :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} \quad \text{Avec } 0 \leq p \leq n$$

L'arrangement ordonné sans répétition est lié à la combinaison par la relation :

$$A_n^p = p! \cdot C_n^p$$

Cela signifie que l'arrangement ordonné des éléments est une combinaison où l'ordre compte. De plus, lorsque $p = 1$, c'est-à-dire que l'on choisit un seul élément parmi n , l'arrangement et la combinaison sont équivalents.

I.2.5.2 Propriétés des combinaisons

- $C_n^0 = 1$: Il n'y a qu'une seule façon de ne sélectionner aucun élément (cas vide).
- $C_n^1 = n$: Choisir un seul élément parmi n donne exactement n possibilités.
- $C_n^n = 1$: Il n'y a qu'une seule façon de sélectionner tous les n éléments.

I.2.5.3 Symétrie des combinaisons

$$C_n^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot (n-n+p)!} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot (p)!} = C_n^p \quad \text{D'où : } C_n^{n-p} = C_n^p$$

Identité de Pascal :

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$$

Démonstration :

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = \frac{(n-1)!}{(p-1)! \cdot (n-1-p+1)!} + \frac{(n-1)!}{p! \cdot (n-1-p)!}$$

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = \frac{(n-1)!}{(p-1)! \cdot (n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p! \cdot (n-1-p)!}$$

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = \frac{p \cdot (n-1)!}{p \cdot (p-1)! \cdot (n-p)!} + \frac{(n-p) \cdot (n-1)!}{(n-p) \cdot p! \cdot (n-p-1)!}$$

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = \frac{p \cdot (n-1)!}{p! \cdot (n-p)!} + \frac{(n-p) \cdot (n-1)!}{p! \cdot (n-p)!}$$

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = \frac{(n-1)! \cdot (p+n-p)}{p! \cdot (n-p)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{p! \cdot (n-p)!} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} = C_n^p$$

$$\text{D'où : } C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$$

I.2.5.4 Premier exemple de combinaison

Énoncé

À partir d'un groupe de 18 étudiants, combien de comités différents composés de 4 étudiants peut-on former ?

Corrigé

- $n = 18$ (Nombre total d'étudiants).
- $p = 4$ (Nombre d'étudiants à choisir pour former un comité).

Les étudiants sont choisis sans répétition et l'ordre n'est pas important (ce qui correspond à une combinaison).

$$C_n^p = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} = C_{18}^4 = \frac{18!}{4! \cdot (18-4)!}$$

$$C_{18}^4 = 3060$$

À partir de 18 étudiants, on peut former 3060 comités différents composés de 4 étudiants.

I.2.5.5 Deuxième exemple de combinaison

Énoncé

À partir d'un groupe de 5 femmes et 7 hommes, combien de comités différents composés de 2 femmes et de 3 hommes peut-on former ?

Corrigé

- Choix des femmes :
 $n = 5$ (Nombre total de femmes) ;
 $p = 2$ (Nombre de femmes à choisir).

$$C_n^p = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} = C_5^2 = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!}$$

$$C_5^2 = 10$$

Il existe donc 10 façons de choisir 2 femmes parmi 5.

- Choix des hommes :

$n = 7$ (Nombre total d'hommes) ;

$p = 3$ (Nombre d'hommes à choisir).

$$C_n^p = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} = C_7^3 = \frac{7!}{3! \cdot (7-3)!}$$

$$C_7^3 = 35$$

Il existe donc 35 façons de choisir 3 hommes parmi 7.

Le nombre total de comités différents est obtenu en multipliant les combinaisons des femmes et des hommes, car ces choix sont indépendants.

$$C_5^2 \cdot C_7^3 = 10 \cdot 35$$

$$C_5^2 \cdot C_7^3 = 350$$

On peut former 350 comités différents composés de 2 femmes et de 3 hommes.

I.3 Triangle de Pascal

Le triangle arithmétique, connu en Europe sous le nom de triangle de Pascal, a été étudié de manière approfondie par Blaise Pascal en 1654, notamment dans son *Traité du triangle arithmétique*. Cependant, cette organisation des nombres était déjà connue bien avant dans d'autres civilisations. On retrouve des formes similaires en Chine dès le XIII^e siècle avec Yang Hui, dans le monde arabe avec Al-Karaji et Omar Khayyam au XI^e siècle, et en Inde encore plus tôt.

Ce qui distingue l'apport de Pascal, c'est qu'il a entrepris une étude systématique du triangle, en utilisant pour la première fois le raisonnement par récurrence pour démontrer ses propriétés.

Le triangle de Pascal est utilisé pour calculer les coefficients binomiaux C_n^p , c'est-à-dire le nombre de combinaisons de p éléments parmi n . Il est construit selon les règles suivantes :

- La première et la dernière valeur de chaque ligne sont toujours égales à 1, ce qui correspond aux propriétés :

$$C_n^0 = 1 \quad \text{et} \quad C_n^n = 1$$

- Chaque nombre situé à l'intérieur du triangle est la somme des deux nombres situés juste au-dessus de lui, conformément à l'identité :

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$$

- Les cases pour lesquelles $p > n$ ne sont pas définies, car il est impossible de choisir plus d'éléments qu'il n'en existe (par exemple, on ne peut pas choisir 5 boules parmi 3).

Tableau I.1 : Construction du triangle de Pascal (n de 0 à 6)

n \ p	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

I.3.1 Binôme de Newton

Le binôme de Newton est une formule qui permet de développer une puissance d'un binôme de la forme $(a + b)^n$, sans avoir à effectuer manuellement toutes les multiplications. Pour de petites valeurs de n comme 1 ou 2, les identités sont déjà bien connues. Mais pour un entier naturel quelconque n , la formule générale est donnée par le développement suivant :

Soient a et b deux nombres réels, et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(a + b)^n = \sum_{p=0}^n C_n^p \cdot a^{n-p} \cdot b^p$$

Exemples de développements :

Pour $n = 0$: $(a + b)^0 = 1 = C_0^0$

Pour $n = 1$: $(a + b)^1 = 1a + 1b = C_1^0 a + C_1^1 b$

Pour $n = 2$: $(a + b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2$

À partir de $n = 3$, on applique la formule du binôme de Newton pour obtenir :

Pour $n = 3$: $(a + b)^3 = C_3^0 \cdot a^3 \cdot b^0 + C_3^1 \cdot a^2 \cdot b^1 + C_3^2 \cdot a^1 \cdot b^2 + C_3^3 \cdot a^0 \cdot b^3$

$$(a + b)^3 = 1 \cdot a^3 \cdot 1 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + 1 \cdot 1 \cdot b^3$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Pour $n = 4$: $(a + b)^4 = C_4^0 \cdot a^4 \cdot b^0 + C_4^1 \cdot a^3 \cdot b^1 + C_4^2 \cdot a^2 \cdot b^2 + C_4^3 \cdot a^1 \cdot b^3 + C_4^4 \cdot a^0 \cdot b^4$

$$(a + b)^4 = 1 \cdot a^4 \cdot 1 + 4 \cdot a^3 \cdot b + 6 \cdot a^2 \cdot b^2 + 4 \cdot a \cdot b^3 + 1 \cdot 1 \cdot b^4$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Pour $n = 5$: $(a + b)^5 = C_5^0 \cdot a^5 \cdot b^0 + C_5^1 \cdot a^4 \cdot b^1 + C_5^2 \cdot a^3 \cdot b^2 + C_5^3 \cdot a^2 \cdot b^3 + C_5^4 \cdot a^1 \cdot b^4 + C_5^5 \cdot a^0 \cdot b^5$

$$(a + b)^5 = 1 \cdot a^5 \cdot 1 + 5 \cdot a^4 \cdot b + 10 \cdot a^3 \cdot b^2 + 10 \cdot a^2 \cdot b^3 + 5 \cdot a \cdot b^4 + 1 \cdot 1 \cdot b^5$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Cas particuliers avec un signe négatif :

On peut aussi utiliser la formule pour développer $(a - b)^n$ ou $(-a + b)^5$, en appliquant les propriétés des puissances :

Pour $(a - b)^5$:

$$(a - b)^5 = a^5 + 5a^4(-b) + 10a^3(-b)^2 + 10a^2(-b)^3 + 5a(-b)^4 + (-b)^5$$

$$(a - b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$$

Pour $(-a + b)^5$:

$$(-a + b)^5 = (-a)^5 + 5(-a)^4b + 10(-a)^3b^2 + 10(-a)^2b^3 + 5(-a)b^4 + b^5$$

$$(-a + b)^5 = -a^5 + 5a^4b - 10a^3b^2 + 10a^2b^3 - 5ab^4 + b^5$$

Remarques importantes :

- Le nombre de termes dans le développement est toujours $n + 1$;
- Les puissances de a décroissent de a^n à a^0 , tandis que les puissances de b croissent de b^0 à b^n ;
- Les coefficients binomiaux apparaissant dans le développement correspondent exactement à la ligne n du triangle de Pascal.

Tableau I.2 : Structure du développement $(a + b)^n$ selon la formule du binôme de Newton

n	Expression développée de $(a + b)^n$	Coefficients binomiaux (ligne n du triangle de Pascal)						
0	$(a + b)^0 = 1$	1						
1	$(a + b)^1 = 1a + 1b$	1	1					
2	$(a + b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$	1	2	1				
3	$(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$	1	3	3	1			
4	$(a + b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$	1	4	6	4	1		

5	$(a + b)^5 = 1a^5 + 5a^4b$ $+ 10a^3b^2$ $+ 10a^2b^3 + 5ab^4$ $+ 1b^5$	1	5	10	10	5	1	
6	$(a + b)^6 = 1a^6 + 6a^5b$ $+ 15a^4b^2$ $+ 20a^3b^3$ $+ 15a^2b^4 + 6ab^5$ $+ b^6$	1	6	15	20	15	6	1

Exercices corrigés du Chapitre I
Analyse combinatoire

Exercice I.1 :

Combien de mots de 3 lettres peut-on former avec les 26 lettres de l'alphabet ?

Corrigé de l'exercice I.1 :

On a :

- $n = 26$ (Nombre total de lettres dans l'alphabet) ;
- $p = 3$ (Nombre de lettres à utiliser pour former un mot).

L'ordre des lettres est important, et la répétition des lettres est autorisée.

La formule à utiliser est donc :

$$A_n^p = A_{26}^3 = n^p = 26^3$$

$$A_{26}^3 = 17576$$

Ainsi, on peut former 17576 mots de 3 lettres.

Exercice I.2 :

Un cadenas à numéros a trois roues, chacune porte les numéros de 0 à 9. Combien de nombres secrets y a-t-il ?

Corrigé de l'exercice I.2 :

On a :

- $n = 10$ (Nombre de chiffres possibles sur chaque roue, de 0 à 9) ;
- $p = 3$ (Nombre de chiffres dans le code).

L'ordre des chiffres est important, et la répétition des chiffres est autorisée.

La formule à utiliser est donc :

$$A_n^p = A_{10}^3 = n^p = 10^3$$

$$A_{10}^3 = 1000$$

Il y a donc 1000 nombres secrets possibles pour un cadenas à trois roues.

Exercice I.3 :

Combien de nombres à quatre chiffres peut-on former à partir des chiffres 1, 2, 3, ..., 9 dans les cas suivants :

- Les chiffres peuvent se répéter ;
- Les chiffres ne peuvent pas se répéter ;
- Les chiffres ne peuvent pas se répéter, et les nombres formés ne contiennent que des chiffres impairs.

Corrigé de l'exercice I.3 :

- 1er cas : Les chiffres peuvent se répéter

$n = 9$ (Nombre de chiffres disponibles est 1 à 9, donc 9 chiffres).

$p = 4$ (On forme des nombres à 4 chiffres).

L'ordre est important et la répétition est autorisée. La formule est :

$$A_n^p = A_9^4 = n^p = 9^4$$

$$A_9^4 = 6561$$

On peut former 6561 nombres à quatre chiffres

- 2e cas : Les chiffres ne peuvent pas se répéter

$n = 9, p = 4$.

L'ordre est important et la répétition n'est pas autorisée. La formule devient :

$$A_n^p = A_9^4 = \frac{n!}{(n-p)!} = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!}$$

$$A_9^4 = 3024$$

On peut former 3024 nombres à quatre chiffres sans répétition.

- 3e cas : Les chiffres ne peuvent pas se répéter et ne contiennent que des chiffres impairs.

Les chiffres impairs disponibles sont 1, 3, 5, 7 et 9, donc $n = 5, p = 4$.

L'ordre est important et la répétition n'est pas autorisée. La formule devient :

$$A_n^p = A_5^4 = \frac{n!}{(n-p)!} = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5!}{1!}$$

$$A_5^4 = 120$$

On peut former 120 nombres à quatre chiffres impairs sans répétition.

Exercice I.4 :

Combien de numéros de téléphone composés de 7 chiffres (numérotés de 0 à 9) existe-t-il si les répétitions de chiffres sont exclues ?

Corrigé de l'exercice I.4 :

On a :

- $n = 10$ (Chiffres disponibles vont de 0 à 9, donc 10 chiffres au total) ;
- $p = 7$ (On veut former des numéros à 7 chiffres).

L'ordre est important et la répétition des chiffres n'est pas autorisée. On utilise la formule des arrangements sans répétition :

$$A_n^p = A_{10}^7 = \frac{n!}{(n-p)!} = \frac{10!}{(10-7)!} = \frac{10!}{3!}$$

$$A_{10}^7 = 604800$$

Il existe donc 604800 numéros de téléphone composés de 7 chiffres sans répétition.

Exercice I.5 :

Un clavier de dix touches (Tableau ci-dessous) permet de composer le code d'entrée d'une salle, le code se compose de deux chiffres suivis de trois lettres. Combien de codes différents peut-on former ?

1	2	3	4	5
A	B	C	D	E

Corrigé de l'exercice I.5 :

Pour les chiffres :

- $n = 5$ (Il y a 5 chiffres disponibles) ;
- $p = 2$ (On choisit 2 chiffres pour former le début du code).

L'ordre est important et la répétition n'est pas autorisée. On utilise la formule des arrangements sans répétition :

$$A_n^p = A_5^2 = \frac{n!}{(n-p)!} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!}$$
$$A_5^2 = 20$$

Il y a donc 20 façons de choisir les 2 chiffres.

Pour les lettres :

- $n = 5$ (Il y a 5 lettres disponibles) ;
- $p = 3$ (On choisit 3 lettres pour former la fin du code).

L'ordre est également important et la répétition n'est pas autorisée :

$$A_n^p = A_5^3 = \frac{n!}{(n-p)!} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!}$$
$$A_5^3 = 60$$

Il y a donc 60 façons de choisir les 3 lettres.

Le nombre total de codes différents est obtenu en multipliant les deux résultats :

$$A_5^2 * A_5^3 = 20 * 60$$
$$A_5^2 * A_5^3 = 1200$$

On peut donc former 1200 codes différents composés de deux chiffres et trois lettres, sans répétition.

Exercice I.6 :

Combien de mots (on ne s'occupe pas de leur signification) peut-on faire avec les lettres suivantes ?

- A, C, H, L.
- B, B, I, K.
- C, C, C, F, M, M.

Corrigé de l'exercice I.6 :

- Première partie (A, C, H, L) : permutation sans répétition.

Il y a 4 lettres distinctes.

$$P_n = n! = P_4 = 4!$$

$$P_4 = 24$$

On peut faire 24 mots avec les lettres A, C, H, L.

- Deuxième partie (B, B, I, K) : permutation avec répétition.

Il y a 4 lettres dont 2 répétées (B).

$$P_n = \frac{n!}{k!} = P_4 = \frac{4!}{2!}$$

$$P_4 = 12$$

On peut faire 12 mots avec les lettres B, B, I, K.

- Troisième partie (C, C, C, F, M, M) : permutation avec répétition.

Il y a 6 lettres dont 3 C répétées et 2 M répétées.

$$P_n = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2!} = P_6 = \frac{6!}{3! \cdot 2!}$$

$$P_6 = 60$$

On peut faire 60 mots avec les lettres C, C, C, F, M, M.

Exercice I.7 :

De combien de façons différentes peut-on mettre l'une derrière l'autre 9 personnes ?

Corrigé de l'exercice I.7 :

Il y a 9 personnes. On cherche à les ordonner sans remise, c'est-à-dire une permutation simple.

$$P_n = n! = P_9 = 9!$$

$$P_9 = 362880$$

Le nombre de façons différentes de mettre 9 personnes l'une derrière l'autre est de 362880.

Exercice I.8 :

De combien de façons différentes peut-on mettre l'un derrière l'autre 3 Algériens, 4 Tunisiens et 2 Marocains ?

Corrigé de l'exercice I.8 :

Il y a 9 personnes en tout, réparties en 3 groupes : 3 Algériens, 4 Tunisiens et 2 Marocains.

Comme il y a des répétitions au sein des groupes (les personnes d'une même nationalité sont indiscernables entre elles), il s'agit d'une permutation avec répétition.

$$P_n = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3!} = P_9 = \frac{9!}{3! \cdot 4! \cdot 2!}$$
$$P_9 = 1260$$

Le nombre de façons différentes de mettre 3 Algériens, 4 Tunisiens et 2 Marocains l'un derrière l'autre est de 1260.

Exercice I.9 :

Déterminer le nombre de possibilités qu'il y a pour que cinq personnes puissent s'asseoir sur un banc. Combien de possibilités y a-t-il si deux personnes insistent pour s'asseoir l'une à côté de l'autre ?

Corrigé de l'exercice I.9 :

- 1ère partie : Cinq personnes s'asseyant sans contrainte

$n = 5$ (Nombre de personnes).

$p = 5$ (Nombre de places, toutes occupées).

L'ordre est important et la répétition n'est pas autorisée (permutation sans remise).

$$P_n = n! = P_5 = 5!$$

$$P_5 = 120$$

Le nombre total de façons pour que cinq personnes s'asseyent sur un banc est de 120.

- 2ème partie : Deux personnes insistent pour s'asseoir l'une à côté de l'autre

Deux personnes doivent s'asseoir ensemble (traitées comme un bloc),

On réduit donc le nombre d'éléments à permuter de 5 à 4 (le bloc + les trois autres personnes).

Étape 1 : Calcul de la permutation des 4 éléments (le bloc et les trois autres personnes) :

$$4! = 24$$

Étape 2 : Arrangement des deux personnes dans le bloc :

Les deux personnes dans le bloc peuvent s'asseoir dans deux ordres possibles :

$$2! = 2$$

Le nombre total de façons de placer ces cinq personnes avec la contrainte que deux d'entre elles doivent s'asseoir ensemble est donné par le produit des deux permutations :

$$4! \times 2! = 24 \times 2 = 48$$

Le nombre de façons pour que deux personnes soient assises ensemble est de 48.

Exercice I.10 :

Calculer le nombre de possibilités qu'il y a de ranger sur une étagère de bibliothèque 5 gros livres, 4 livres de grosseur moyenne et 3 livres beaucoup plus minces, sachant que les livres de même dimension sont placés les uns à côté des autres.

Corrigé de l'exercice I.10 :

La condition donnée est que les livres de même dimension doivent être placés les uns à côté des autres, ce qui signifie que :

- Les gros livres forment un groupe ;
- Les livres moyens forment un autre groupe ;
- Les livres minces forment un troisième groupe.

Puisque les trois groupes de livres sont distincts (gros, moyens, minces), le nombre de façons de permuter ces trois groupes est donné par une permutation des 3 groupes. Cela se calcule par : $3! = 6$

Il y a donc 6 façons d'organiser les trois groupes sur l'étagère.

Ensuite, nous devons organiser les livres à l'intérieur de chaque groupe, car l'ordre des livres dans chaque groupe est important.

Les 5 gros livres peuvent être arrangés de $5!$ façons.

Les 4 livres de taille moyenne peuvent être arrangés de $4!$ façons.

Les 3 livres plus minces peuvent être arrangés de $3!$ façons.

Le nombre total de possibilités est le produit des résultats obtenus dans les étapes précédentes :

Permutations des groupes : $3! = 6$;

Permutations à l'intérieur de chaque groupe : $5! = 120$, $4! = 24$, $3! = 6$.

Le nombre total de façons de ranger les livres est donc :

$$\text{Total} = 3! \times 5! \times 4! \times 3!$$

$$\text{Total} = 103680$$

Il y a 103680 façons de ranger les 5 gros livres, 4 livres de grosseur moyenne, et 3 livres beaucoup plus minces sur une étagère, tout en respectant la contrainte que les livres de même taille doivent rester ensemble.

Exercice I.11 :

Dans un département, il y a 50 étudiants : 30 étudiants de première année et 20 étudiants de deuxième année.

1) On a besoin de 3 étudiants au conseil de département. Combien de choix sont-ils possibles ?

2) Combien de choix sont-ils possibles s'il doit y avoir deux représentants de première année et un représentant de deuxième année ?

Corrigé de l'exercice I.11 :

1) Choix de 3 étudiants parmi les 50 (sans restriction) :

- $n = 50$ (Nombre total d'étudiants) ;
- $p = 3$ (Nombre d'étudiants à choisir) ;
- Non-ordonnés et sans remise.

$$C_n^p = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} = C_{50}^3 = \frac{50!}{3! \cdot (50-3)!}$$
$$C_{50}^3 = 19600$$

Il y a 19600 façons de former un conseil de 3 étudiants à partir des 50 étudiants sans aucune restriction.

2) Choix de 2 étudiants de première année et 1 étudiant de deuxième année :

- Choix des étudiants de première année :
 - ✚ $n = 30$ (Nombre d'étudiants de première année) ;
 - ✚ $p = 2$ (Nombre d'étudiants à choisir parmi les 30) ;
 - ✚ Non-ordonnés et sans remise.

$$C_n^p = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} = C_{30}^2 = \frac{30!}{2! \cdot (30-2)!}$$
$$C_{30}^2 = 435$$

Il y a 435 façons de choisir 2 étudiants parmi les 30 de première année.

- Choix des étudiants de deuxième année :
 - ✚ $n = 20$ (Nombre d'étudiants de deuxième année) ;
 - ✚ $p = 1$ (Nombre d'étudiants à choisir parmi les 20).

$$C_n^p = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} = C_{20}^1 = \frac{20!}{1! \cdot (20-1)!}$$
$$C_{20}^1 = 20$$

Il y a 20 façons de choisir 1 étudiant parmi les 20 de deuxième année.

Le nombre total de choix pour former un conseil de 2 étudiants de première année et 1 étudiant de deuxième année est :

$$C_{30}^2 * C_{20}^1 = 435 * 20$$

$$C_{30}^2 * C_{20}^1 = 8700$$

Il y a 8700 façons de former un conseil de département composé de 2 étudiants de première année et 1 étudiant de deuxième année.

Exercice I.12 :

On veut former un comité de 7 personnes, dont 2 républicains, 2 démocrates et 3 indépendants. On a le choix parmi les 5 républicains, 6 démocrates et 4 indépendants. De combien de manières peut-on procéder ?

Corrigé de l'exercice I.12 :

- Sélection des républicains :

$$n = 5 ; p = 2.$$

$$C_n^p = \frac{n!}{p! \cdot (n - p)!} = C_5^2 = \frac{5!}{2! \cdot (5 - 2)!}$$

$$C_5^2 = 10$$

Il y a 10 façons de choisir 2 républicains parmi 5.

- Sélection des démocrates :

$$n = 6 ; p = 2.$$

$$C_6^2 = \frac{6!}{2! \cdot (6 - 2)!}$$

$$C_6^2 = 15$$

Il y a 15 façons de choisir 2 démocrates parmi 6.

- Sélection des indépendants :

$$n = 4 ; p = 3.$$

$$C_4^3 = \frac{4!}{3! \cdot (4 - 3)!}$$

$$C_4^3 = 4$$

Il y a 4 façons de choisir 3 indépendants parmi 4.

Le nombre total de manières de former un comité de 7 personnes (2 républicains, 2 démocrates et 3 indépendants) est donné par le produit des trois combinaisons :

$$C_5^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^3 = 10 \cdot 15 \cdot 4 = 600$$

Il y a 600 façons de former un comité de 7 personnes composé de 2 républicains, 2 démocrates et 3 indépendants.

Exercice I.13 :

Un étudiant doit répondre à 10 questions sur 13 lors d'un examen.

- 1) Combien de choix possibles a-t-il ?
- 2) Combien de possibilités a-t-il s'il doit répondre aux deux premières questions ?
- 3) Combien s'il doit répondre à la première ou à la seconde question, mais pas aux deux ensembles ?
- 4) Combien s'il doit répondre à exactement 3 des 5 premières questions ?
- 5) Combien s'il doit répondre au moins à 3 des 5 premières questions ?

Corrigé de l'exercice I.13 :

- 1) L'étudiant doit choisir 10 questions parmi les 13 proposées.

$$n = 13, p = 10.$$

$$C_n^p = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} = C_{13}^{10} = \frac{13!}{10! \cdot (13-10)!}$$
$$C_{13}^{10} = 286$$

Il y a 286 choix possibles.

- 2) L'étudiant doit répondre obligatoirement aux 2 premières questions, il doit donc choisir 8 autres questions parmi les 11 restantes.

$$n = 11, p = 8.$$

$$C_{11}^8 = \frac{11!}{8! \cdot (11-8)!}$$
$$C_{11}^8 = 165$$

Il y a 165 possibilités s'il doit répondre aux deux premières questions.

- 3) L'étudiant doit répondre à la première ou la seconde question, mais pas aux deux en même temps. Cela signifie qu'il doit choisir 9 autres questions parmi les 11 restantes.

Il a 2 possibilités (répondre à la première ou à la seconde question). Pour chaque possibilité, il doit encore choisir 9 questions parmi 11 :

$$2 \cdot C_{11}^9 = 2 \cdot \frac{11!}{9! \cdot (11-9)!}$$
$$2 \cdot C_{11}^9 = 110$$

Il y a 110 possibilités s'il doit répondre à la première ou à la seconde question, mais pas aux deux ensembles.

4) L'étudiant doit répondre à exactement 3 questions parmi les 5 premières, et il doit donc choisir 7 autres questions parmi les 8 restantes.

$$C_5^3 \cdot C_8^7 = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} \cdot \frac{8!}{7! \cdot (8-7)!} = 10 \cdot 8$$
$$C_5^3 \cdot C_8^7 = 80$$

Il y a 80 possibilités s'il doit répondre à exactement 3 des 5 premières questions.

5) L'étudiant doit répondre à au moins 3 des 5 premières questions. Cela signifie qu'il peut répondre à 3, 4, ou 5 des 5 premières questions. Pour chaque cas, il choisira les autres questions parmi les 8 restantes.

Cas 1 : Il choisit 3 questions parmi les 5 premières et 7 autres parmi les 8 restantes :

$$C_5^3 \cdot C_8^7 = 10 \cdot 8 = 80$$

Cas 2 : Il choisit 4 questions parmi les 5 premières et 6 autres parmi les 8 restantes :

$$C_5^4 \cdot C_8^6 = 5 \cdot 28 = 140$$

Cas 3 : Il choisit 5 questions parmi les 5 premières et 5 autres parmi les 8 restantes :

$$C_5^5 \cdot C_8^5 = 1 \cdot 56 = 56$$

Le total est la somme de ces trois cas :

$$C_5^3 \cdot C_8^7 + C_5^4 \cdot C_8^6 + C_5^5 \cdot C_8^5 = 80 + 140 + 56 = 276$$

Il y a 276 possibilités s'il doit répondre à au moins 3 des 5 premières questions.

Exercice I.14 :

Une urne contient 4 boules rouges, 3 boules vertes et 2 boules noires. On tire 3 boules de l'urne au hasard pour 3 cas différents :

- 1er cas : Tirage simultané (toutes les boules tirées en même temps) ;
- 2ème cas : Tirage successif sans remise (chaque boule tirée n'est pas remise dans l'urne) ;
- 3ème cas : Tirage successif avec remise (chaque boule tirée est remise dans l'urne avant le tirage suivant).

Déterminer le nombre total de possibilités pour obtenir :

- 3 boules rouges ;
- 3 boules de la même couleur ;
- 2 boules rouges et 1 boule noire ;
- 3 boules de couleurs différentes.

N.B. : Les résultats doivent être regroupés dans un tableau.

Corrigé de l'exercice I.14 :

- Cas 1 : Tirage simultané

Pour les tirages simultanés, on utilise les combinaisons C_n^p , car l'ordre n'a pas d'importance.

- Cas 2 : Tirage successif sans remise

Pour les tirages successifs sans remise, on utilise les arrangements A_n^p , car l'ordre des tirages compte, et il n'y a pas de remise.

- Cas 3 : Tirage successif avec remise

Pour les tirages successifs avec remise, chaque tirage est indépendant et chaque boule est remise dans l'urne après avoir été tirée. Cela revient à calculer simplement le nombre de possibilités à chaque étape, donc n^p .

Tableau I.3 : Nombre de possibilités pour différentes configurations de tirage selon le mode d'échantillonnage

Cas	Tirage simultané	Tirage successif sans remise	Tirage successif avec remise
3 boules rouges	$C_4^3 = 4$	$A_4^3 = 24$	$4^3 = 64$
3 boules de même couleur	$C_4^3 + C_3^3 = 5$	$A_4^3 + A_3^3 = 30$	$4^3 + 3^3 + 2^3 = 99$
2 boules rouges et une boule noire	$C_4^2 \cdot C_2^1 = 12$	$(A_4^2 \cdot A_2^1) \cdot \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 72$ Le coefficient d'ordre $\frac{3!}{2! \cdot 1!}$ représente une permutation avec répétition, car deux des boules sont identiques (rouges).	$(4^2 \cdot 2^1) \cdot \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 96$ $C_3^2 \cdot C_1^1$ représente le coefficient d'ordre
3 boules de couleurs différentes	$C_4^1 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1 = 24$	$(A_4^1 \cdot A_3^1 \cdot A_2^1) \cdot 3! = 144$ Le coefficient d'ordre $3!$ représente une permutation sans répétition, car toutes les boules sont distinctes.	$(4^1 \cdot 3^1 \cdot 2^1) \cdot 3! = 144$ $C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1$ représente le coefficient d'ordre

Exercice I.15 :

Une urne contient 4 boules blanches, 5 boules rouges et 1 boule noire. On tire simultanément 3 boules au hasard.

Déterminer le nombre total de possibilités pour obtenir :

- Trois boules de la même couleur ;
- Trois boules de couleurs différentes ;
- Aucune boule blanche ;
- Au moins une boule blanche ;
- Au plus une boule blanche.

N.B. : Les résultats doivent être regroupés dans un tableau.

Corrigé de l'exercice I.15 :

Au moins signifie qu'il y aura au minimum une boule blanche, mais il peut y en avoir 2 ou bien 3.

Au plus signifie au maximum, c'est-à-dire que le nombre de boules blanches tirées peut être égal à 0 ou 1, mais pas plus.

Tableau I.4 : Nombre de combinaisons possibles pour différentes configurations de tirage simultané

Cas	Tirage simultané
3 boules de la même couleur	$C_4^3 + C_5^3 = 14$
3 boules de couleurs différentes	$C_4^1 \cdot C_5^1 \cdot C_1^1 = 20$
Aucune boule blanche	$C_6^3 = 20$
Au moins une boule blanche	$C_4^1 \cdot C_6^2 + C_4^2 \cdot C_6^1 + C_4^3 \cdot C_6^0 = 100$
Au plus une boule blanche	$C_4^1 \cdot C_6^2 + C_4^0 \cdot C_6^3 = 80$

Exercice I.16 :

Une urne contient 4 boules vertes et 5 rouges. On tire successivement trois boules de l'urne au hasard et sans remise.

Déterminer le nombre total de tirages possibles pour obtenir :

- Trois boules vertes ;
- Trois boules rouges ;

- Trois boules de même couleur ;
- Trois boules de couleurs différentes ;
- Deux boules vertes seulement.

N.B. : Les résultats doivent être regroupés dans un tableau.

Corrigé de l'exercice I.16 :

Tableau I.5 : Nombre de tirages possibles pour différentes configurations (tirage successif sans remise)

Cas	Tirage successif sans remise
Trois boules vertes	$A_4^3 = 24$
Trois boules rouges	$A_5^3 = 60$
Trois boules de même couleur	$A_4^3 + A_5^3 = 84$
Trois boules de couleurs différentes	$(A_4^1 \cdot A_5^2 + A_4^2 \cdot A_5^1) \cdot \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 420$
Deux boules vertes seulement	$(A_4^2 \cdot A_5^1) \cdot \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 180$

Exercice I.17 :

Le triangle de Pascal est un outil permettant de calculer facilement les coefficients binomiaux C_n^p , sans utiliser directement la formule $C_n^p = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$

- 1) Construire le triangle de Pascal pour les valeurs de n allant de 0 à 10.
- 2) À l'aide du triangle construit, déterminer combien de façons différentes il est possible de former un groupe de 6 personnes parmi 10. Indiquer directement la valeur correspondante dans la ligne $n = 10$.

Corrigé de l'exercice I.17 :

- 1) Construction du triangle de Pascal :

Tableau I.6 : Triangle de Pascal pour $n = 0$ à $n = 10$

n \ p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						

5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

2) Lecture directe dans le triangle :

Pour former un groupe de 6 personnes parmi 10, on cherche : C_{10}^6

Par symétrie : $C_{10}^6 = C_{10}^4 = 210$

Il est possible de former 210 groupes différents de 6 personnes parmi 10.

Exercice I.18 :

Développer les expressions suivantes en utilisant la formule du binôme de Newton :

1) $(3 - y)^3$

2) $(2x + 3)^4$

3) $(x - 1)^5$

4) $(-x + 5)^6$

Corrigé de l'exercice I.18 :

1) Développement de $(3 - y)^3$:

On applique la formule :

$$(a + b)^n = \sum_{p=0}^n C_n^p \cdot a^{n-p} \cdot b^p$$

$a = 3, b = -y$ et $n = 3$

$$(3 - y)^3 = 3^3 + 3 \cdot 3^2 \cdot (-y) + 3 \cdot 3 \cdot (-y)^2 + (-y)^3$$

$$(3 - y)^3 = 27 - 27y + 9y^2 - y^3$$

2) Développement de $(2x + 3)^4$:

$a = 2x, b = 3$ et $n = 4$

$$(2x + 3)^4 = (2x)^4 + 4 \cdot (2x)^3 \cdot 3 + 6 \cdot (2x)^2 \cdot 3^2 + 4 \cdot (2x) \cdot 3^3 + 3^4$$

$$(2x + 3)^4 = 16x^4 + 96x^3 + 216x^2 + 216x + 81$$

3) Développement de $(x - 1)^5$:

$a = x, b = -1$ et $n = 5$

$$(x - 1)^5 = x^5 + 5x^4(-1) + 10x^3(-1)^2 + 10x^2(-1)^3 + 5x(-1)^4 + (-1)^5$$

$$(x - 1)^5 = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$$

4) Développement de $(-x + 5)^6$:

$$a = -x, b = 5 \text{ et } n = 6$$

$$(-x + 5)^6 = (-x)^6 + 6(-x)^5 \cdot 5 + 15(-x)^4 \cdot 5^2 + 20(-x)^3 \cdot 5^3 + 15(-x)^2 \cdot 5^4 + 6(-x) \cdot 5^5 + 5^6$$

$$(-x + 5)^6 = x^6 - 30x^5 + 375x^4 - 2500x^3 + 9375x^2 - 18750x + 15625$$

Chapitre II Espace de probabilités

II.1 Vocabulaire fondamental en probabilités**a) Expérience aléatoire (ou épreuve aléatoire) :**

Une expérience (ou épreuve) aléatoire est une expérience dont les résultats (issues) ne sont pas prévisibles à l'avance.

Exemples :

- On lance une pièce de monnaie et on observe sa face supérieure ;
- On lance un dé équilibré à 6 faces et on observe la face supérieure.

b) Univers (ou espace fondamental ou ensemble fondamental) :

L'univers, noté Ω , est l'ensemble des résultats (issues) possibles d'une expérience aléatoire.

Exemples :

- L'univers pour l'expérience où l'on lance une pièce de monnaie et on observe sa face supérieure est $\Omega = \{Face, Pile\}$;
- L'univers pour l'expérience où l'on lance un dé équilibré à 6 faces et on observe la face supérieure est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

c) Cardinal de l'ensemble :

Le cardinal d'un ensemble est le nombre d'éléments dans cet ensemble.

Exemples :

- Le cardinal de l'univers pour l'expérience avec une pièce de monnaie est $card(\Omega) = 2$;
- Le cardinal de l'univers pour l'expérience avec un dé à 6 faces est $card(\Omega) = 6$.

d) Événement :

Un événement est un sous-ensemble de l'univers, c'est-à-dire une partie de l'ensemble des issues possibles.

Exemples :

- Pour l'expérience avec une pièce de monnaie :
 - ✚ Soit l'événement A : "Obtenir Face", alors $A = \{Face\}$, avec $card(A) = 1$.
- Pour l'expérience avec un dé équilibré à 6 faces :
 - ✚ Soit l'événement A : "Obtenir un résultat pair", alors $A = \{2, 4, 6\}$, avec $card(A) = 3$;
 - ✚ Soit l'événement B : "Obtenir un multiple de 3", alors $B = \{3, 6\}$, avec $card(B) = 2$;

- ✚ Soit l'événement C : " Obtenir un résultat inférieur à 7 ", alors $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, avec $\text{card}(C) = 6$. Cet événement est appelé événement certain, car il est identique à l'univers ;
- ✚ Soit l'événement D : " Obtenir un 8 ", alors $D = \{\} = \emptyset$ (ensemble vide), avec $\text{card}(D) = 0$. Cet événement est appelé événement impossible, car aucune issue ne correspond à cet événement ;
- ✚ Soit l'événement E : " Ne pas obtenir un résultat pair ", alors $E = \{1, 3, 5\}$, avec $\text{card}(E) = 3$. Cet événement est le contraire de A , noté $\bar{A}$: " Ne pas obtenir un résultat pair ", donc $\bar{A} = \{1, 3, 5\}$, avec $\text{card}(\bar{A}) = 3$.

II.2 Opérations sur les événements

Prenons l'exemple de l'expérience aléatoire : lancer un dé équilibré à 6 faces.

Soient les événements suivants :

- A : « Obtenir un résultat pair » ; $A = \{2, 4, 6\}$; $\text{card}(A) = 3$;
- B : « Obtenir un multiple de 3 » ; $B = \{3, 6\}$; $\text{card}(B) = 2$;
- C : « Obtenir un chiffre inférieur à 3 » ; $C = \{1, 2\}$; $\text{card}(C) = 2$.

II.2.1 Intersection de deux événements

L'intersection de deux événements A et B , notée $A \cap B$, correspond à l'événement « Obtenir un résultat pair et un multiple de 3 ». Cet événement se réalise si A et B se réalisent simultanément, c'est-à-dire obtenir un résultat à la fois pair et multiple de 3.

$$A \cap B \Leftrightarrow A \text{ et } B$$

Exemple : $A \cap B = \{6\}$

II.2.2 Union de deux événements

L'union de deux événements A et B , notée $A \cup B$, correspond à l'événement « Obtenir un résultat pair ou un multiple de 3 ». Cet événement se réalise si A ou B se réalise, c'est-à-dire obtenir un résultat qui est soit pair, soit multiple de 3. Le "ou" ici est inclusif, ce qui signifie que l'événement est réalisé même si les deux conditions sont remplies en même temps.

$$A \cup B \Leftrightarrow A \text{ ou } B$$

Exemple : $A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$

II.2.3 Événements incompatibles

Deux événements A et B sont dits incompatibles si leur intersection est vide $A \cap B = \{\} = \emptyset$, c'est-à-dire s'ils ne peuvent pas se réaliser simultanément.

Exemple : $B \cap C = \emptyset$

II.3 Probabilité d'un événement**II.3.1 Définition**

La probabilité d'un événement exprime la chance que cet événement se réalise (ou se produise). Elle est notée $P(A)$ et est un nombre réel compris entre 0 et 1, autrement dit :

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Ou encore en pourcentage :

$$0 \% \leq P(A) \leq 100 \%$$

Si $P(A) = 1$, l'événement est certain. Dans ce cas, on a : $P(A) = P(\Omega)$.

Si $P(A) = 0$, l'événement est impossible, c'est-à-dire qu'il ne pourra jamais se réaliser.

La probabilité d'un événement A est donnée par la formule suivante :

$$P(A) = \frac{\text{Nombre de cas favorables à la réalisation de l'événement } A}{\text{Nombre total de cas possibles dans l'univers } \Omega} = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

La probabilité de l'événement contraire de A (noté $\bar{A}$) est calculée par la formule suivante :

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

II.3.2 Probabilité de l'union de deux événements

Prenons l'exemple de l'expérience aléatoire suivante : lancer un dé équilibré à 6 faces.

Soient les événements suivants :

- A : « Obtenir un résultat pair » ; $A = \{2, 4, 6\}$; $\text{card}(A) = 3$;
- B : « Obtenir un multiple de 3 » ; $B = \{3, 6\}$, $\text{card}(B) = 2$.

L'intersection des deux événements est : $A \cap B = \{6\}$

Le cardinal de l'intersection est : $\text{card}(A \cap B) = 1$

L'union des deux événements est : $A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$

Le cardinal de l'union est : $\text{card}(A \cup B) = 4$

Cependant, si nous utilisons la formule du cardinal, nous obtenons initialement :

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) = 3 + 2 = 5 \neq 4$$

Mais il faut tenir compte de l'intersection $A \cap B$ (car 6 est compté deux fois), donc :

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$$

$$4 = 3 + 2 - 1 = 4$$

Par conséquent, la probabilité de l'union de A et B s'exprime par :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

II.3.3 Événements indépendants

Soient A et B deux événements, on dit que A et B sont indépendants si la probabilité de leur intersection est égale au produit de leurs probabilités, c'est-à-dire :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

II.4 Premier exemple d'application du calcul de probabilité**Énoncé**

On lance un dé à 6 faces équilibré, et on s'intéresse à la face supérieure obtenue.

- 1) Quel est le nombre d'issues possibles ?
- 2) Donner l'univers associé à cette expérience aléatoire.
- 3) On considère les événements suivants :

- A : « Avoir un chiffre impair » ;
- B : « Avoir un chiffre divisible par 2 » ;
- C : « Avoir un chiffre inférieur à 3 » ;
- D : « Avoir un 5 » ;
- E : « Avoir un chiffre premier ».

- 3.a) Calculer les probabilités que ces événements se réalisent.
- 3.b) Vérifier si A et D , ainsi que C et D , sont des événements incompatibles.
- 3.c) Vérifier si A et E , ainsi que C et E , sont des événements indépendants.
- 3.d) Quel est l'événement contraire de E ? Calculer sa probabilité.

Corrigé

- 1) Le nombre d'issues possibles : Il y a 6 issues possibles, correspondant aux 6 faces du dé.
- 2) L'univers associé à cette expérience aléatoire est : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- 3.a) Probabilités des événements :

$$A = \{1, 3, 5\} \quad P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$B = \{2, 4, 6\} \quad P(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$C = \{1, 2\} \quad P(C) = \frac{\text{card}(C)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$D = \{5\} \quad P(D) = \frac{\text{card}(D)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{6}$$

$$E = \{2, 3, 5\} \quad P(E) = \frac{\text{card}(E)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

- 3.b) Vérification si A et D , ainsi que C et D sont des événements incompatibles :

$$A = \{1, 3, 5\} \quad D = \{5\} \quad A \cap D = \{5\}$$

A et D ne sont pas des événements incompatibles.

$$C = \{1, 2\} \quad D = \{5\} \quad C \cap D = \{\} = \emptyset$$

C et D sont des événements incompatibles.

3.c) Vérification si A et E, ainsi que C et E, sont des événements indépendants :

$$A = \{1, 3, 5\} \quad E = \{2, 3, 5\} \quad A \cap E = \{3, 5\}$$

$$P(A \cap E) \stackrel{?}{=} P(A) \cdot P(E) \quad P(A \cap E) = \frac{\text{card}(A \cap E)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} \stackrel{?}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \neq \frac{1}{4}$$

A et E ne sont pas des événements indépendants.

$$C = \{1, 2\} \quad E = \{2, 3, 5\} \quad C \cap E = \{2\}$$

$$P(C \cap E) \stackrel{?}{=} P(C) \cdot P(E) \quad P(C \cap E) = \frac{\text{card}(C \cap E)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{6} \stackrel{?}{=} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \quad \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

C et E sont des événements indépendants.

3.d) L'événement contraire de E et sa probabilité :

$$\bar{E} : \text{« Ne pas avoir un chiffre premier »}. \quad E = \{1, 4, 6\}$$

$$P(\bar{E}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

II.5 Deuxième exemple d'application du calcul de probabilité

Énoncé

On jette un dé bien équilibré deux fois de suite, les résultats obtenus sont désignés par un couple $(x ; y)$ où x est la valeur affichée sur le dé 1 et y est la valeur affichée sur le dé 2.

1) Quel est l'ensemble fondamental pour cette expérience aléatoire ?

2) On note les événements suivants :

A : « Au moins l'un des dés montre 1 » ;

B : « La somme des nombres montrés par les dés est 5 ».

- Déterminer les événements A et B , et calculer leurs probabilités.

3) Déterminer $A \cup B$ et $A \cap B$, et calculer leurs probabilités.

4) Vérifier l'égalité suivante : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Corrigé

1) Ensemble fondamental pour cette expérience aléatoire :

Comme chaque dé a 6 faces, l'ensemble des issues possibles est :

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 5), (6, 6)\}$$

$$\text{card}(\Omega) = n^P = 6^2 = 36$$

Tableau II.1 : Ensemble des couples $(x ; y)$ obtenus lors de deux lancers successifs d'un dé équilibré

Dé 1 \ Dé 2	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)
2	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
3	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)
4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)
5	(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)
6	(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)

2) Détermination des événements et calcul de leurs probabilités :

A : « Au moins l'un des dés montre 1 ».

$$A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1)\}$$

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{11}{36}$$

B : « La somme des nombres montrés par les dés est 5 ».

$$B = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$$

$$P(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

3) Détermination de $A \cup B$ et $A \cap B$, et calcul de leurs probabilités :

$$A \cup B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (5, 1), (6, 1)\}$$

$$P(A \cup B) = \frac{\text{card}(A \cup B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{13}{36}$$

$$A \cap B = \{(1, 4), (4, 1)\}$$

$$P(A \cap B) = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

4) Vérification de cette égalité :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\frac{13}{36} = \frac{11}{36} + \frac{1}{9} - \frac{1}{18}$$

$$\frac{13}{36} = \frac{13}{36}$$

L'égalité est donc vérifiée.

II.6 Probabilité conditionnelle**II.6.1 Introduction à la probabilité conditionnelle (à travers un exemple)**

Supposons qu'au sein d'une section d'une université, il y a trois catégories d'étudiants :

- La première catégorie regroupe les étudiants qui sont forts en physique ;
- La deuxième catégorie concerne les étudiants qui sont forts en chimie ;
- La troisième catégorie rassemble les étudiants qui sont forts à la fois en physique et en chimie.

Soient les événements suivants :

- A : « L'étudiant est fort en physique » ;
- B : « L'étudiant est fort en chimie » ;
- C : « L'étudiant est fort à la fois en physique et en chimie ».

On choisit un étudiant au hasard dans cette section, et on souhaite connaître la probabilité qu'il soit fort en physique sachant qu'il est fort en chimie. Ici, la condition est que l'étudiant est déjà fort en chimie. Cela signifie que parmi les étudiants forts en chimie (événement B), nous recherchons ceux qui sont également forts en physique (événement A). On restreint ainsi l'analyse à l'ensemble des étudiants forts en chimie, en s'intéressant uniquement à cet événement B.

La probabilité cherchée est celle de A sachant B, notée $P_B(A)$ ou bien $P(A/B)$. Cela traduit la probabilité que l'événement A se réalise, sachant que l'événement B est déjà réalisé. La formule de la probabilité conditionnelle est :

$$P_B(A) = P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Avec $P(B) \neq 0$

II.6.2 Propriétés de la probabilité conditionnelle

$$0 \leq P(A/B) \leq 1$$

$$P(\bar{A}/B) = 1 - P(A/B)$$

Si A et B sont des événements indépendants, alors $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Par conséquent :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$$

Si A et B sont des événements incompatibles, alors $A \cap B = \{\} = \emptyset$, ce qui implique $P(A \cap B) = 0$

Ainsi :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0}{P(B)} = 0$$

II.6.3 Théorème de Bayes

Le théorème de Bayes, également appelé théorème des causes, permet d'exprimer la probabilité conditionnelle d'un événement B sachant qu'un autre événement A est réalisé, en fonction de la probabilité conditionnelle de A sachant B , c'est-à-dire de calculer $P(B/A)$ à partir de $P(A/B)$. Ce théorème est particulièrement utile lorsqu'on connaît les probabilités directes, mais qu'on cherche à remonter aux causes probables d'un événement.

Soient deux événements A et B tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$. On rappelle les relations fondamentales :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{et} \quad P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Puisque $P(A \cap B) = P(B \cap A)$, on peut écrire :

$$(A/B) \cdot P(B) = P(B/A) \cdot P(A)$$

En isolant $P(B/A)$, on obtient la formule de Bayes :

$$P(B/A) = \frac{P(A/B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

II.6.4 Exemple d'application de probabilité conditionnelle

Énoncé

On tire au hasard une boule dans une urne contenant des boules rouges et noires. L'urne contient 40 % de boules rouges. Parmi les boules rouges, 75 % sont gagnantes et 25 % de boules sont noires et gagnantes.

On définit les événements suivants :

- R : "Tirer une boule rouge" ;
- N : "Tirer une boule noire" ;
- G : "Tirer une boule gagnante" ;
- $\bar{G}$: "Tirer une boule qui n'est pas gagnante".

- 1) Faire un arbre pondéré représentant la situation.
- 2) Quelle est la probabilité d'avoir une boule gagnante ?
- 3) Quelle est la probabilité d'avoir une boule qui n'est pas gagnante ?

Corrigé

1) Pour tracer l'arbre pondéré, on suit deux règles importantes :

Première règle : La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud doit être égale à 1. Par exemple : $P(R) + P(N) = 0,4 + 0,6 = 1$

Deuxième règle : La probabilité à l'extrémité d'un chemin est égale au produit des probabilités sur ce chemin. Par exemple, pour calculer $P(G/R)$, on a : $P(G/R) = \frac{P(G \cap R)}{P(R)}$

Donc : $P(G \cap R) = P(R \cap G) = P(G/R) \cdot P(R) = 0,75 \cdot 0,4 = 0,3$

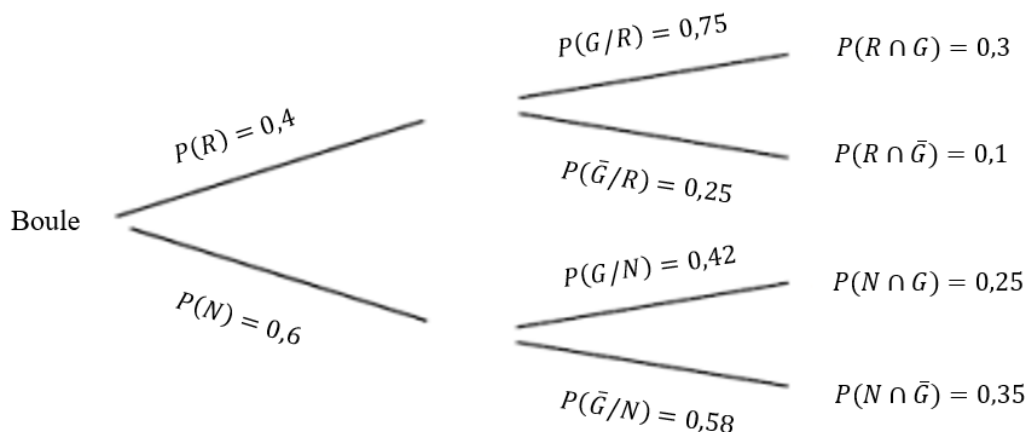


Figure II.1 : Arbre pondéré des événements liés à la couleur et au gain lors du tirage d'une boule

2) Probabilité d'avoir une boule gagnante :

Pour obtenir une boule gagnante, cela peut venir soit d'une boule rouge, soit d'une boule noire. On peut donc additionner les probabilités correspondantes :

$$P(G) = P(R \cap G) + P(N \cap G)$$

$$P(G) = 0,3 + 0,25 = 0,55$$

3) Probabilité d'avoir une boule qui n'est pas gagnante :

On peut utiliser deux méthodes pour calculer $P(\bar{G})$:

- Première méthode : En utilisant la complémentarité :

$$P(\bar{G}) = 1 - P(G) = 1 - 0,55 = 0,45$$

- Deuxième méthode : En calculant directement la probabilité que la boule ne soit pas gagnante, que ce soit une boule rouge ou noire :

$$P(\bar{G}) = P(R \cap \bar{G}) + P(N \cap \bar{G}) = 0,1 + 0,35 = 0,45$$

Exercices corrigés du Chapitre II
Espace de probabilités

Exercice II.1 :

Une urne contient 15 boules numérotées de 1 à 15. On tire une boule au hasard et on observe son numéro.

- 1) Quel est le nombre d'issues possibles ?
- 2) Quelle est la probabilité de tirer :
 - 2.a) la boule n°1 ?
 - 2.b) une boule avec un numéro impair ?
 - 2.c) une boule dont le numéro contient le chiffre 5 ?
 - 2.d) une boule dont le numéro contient le chiffre 1 ?
 - 2.e) une boule avec un numéro divisible par 3 ?
 - 2.f) une boule avec un numéro premier ?

Corrigé de l'exercice II.1 :

- 1) Le nombre d'issues possibles est 15.
- 2) L'univers de cette expérience aléatoire est défini par l'ensemble des numéros de boules :
$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$
- 2.a) Probabilité de tirer la boule n°1 :

$$A = \{1\} \qquad P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{15}$$

- 2.b) Probabilité de tirer une boule avec un numéro impair :

$$B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\} \qquad P(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{8}{15}$$

- 2.c) Probabilité de tirer une boule dont le numéro contient le chiffre 5 :

$$C = \{5, 15\} \qquad P(C) = \frac{\text{card}(C)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{2}{15}$$

- 2.d) Probabilité de tirer une boule dont le numéro contient le chiffre 1 :

$$D = \{1, 10, 11, 12, 13, 14, 15\} \qquad P(D) = \frac{\text{card}(D)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{7}{15}$$

- 2.e) Probabilité de tirer une boule avec un numéro divisible par 3 :

$$E = \{3, 6, 9, 12, 15\} \qquad P(E) = \frac{\text{card}(E)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

- 2.f) Probabilité de tirer une boule avec un numéro premier :

$$F = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\} \qquad P(F) = \frac{\text{card}(F)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

Exercice II.2 :

On lance un dé à 6 faces. On considère les événements suivants :

- A : " On obtient un 3 " ;
- B : " On obtient un chiffre pair " ;

- C : “ On obtient un chiffre strictement supérieur à 4 ”.

- 1) Calculer les probabilités que ces événements se réalisent.
- 2) Vérifier si A et B, A et C, ainsi que B et C sont des événements incompatibles.
- 3) Vérifier si les événements B et C sont indépendants.

Corrigé de l'exercice II.2 :

- 1) Calcul des probabilités des événements suivants :

L'univers de cette expérience aléatoire est : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$A = \{3\} \quad P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{6}$$

$$B = \{2, 4, 6\} \quad P(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$C = \{5, 6\} \quad P(C) = \frac{\text{card}(C)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

- 2) Vérification si les événements A et B, A et C, ainsi que B et C sont incompatibles :

$$A \cap B = \{\} = \emptyset, \text{ donc A et B sont incompatibles.}$$

$$A \cap C = \{\} = \emptyset, \text{ donc A et C sont incompatibles.}$$

$$B \cap C = \{6\}, \text{ donc A et B ne sont pas incompatibles.}$$

- 3) Vérification si les événements B et C sont indépendants :

$$P(B \cap C) = \frac{\text{card}(B \cap C)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{6} \quad \text{Avec } P(B) = \frac{1}{2} \text{ et } P(C) = \frac{1}{3}$$

$$P(B \cap C) \stackrel{?}{=} P(B) \cdot P(C)$$

$$\frac{1}{6} \stackrel{?}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{6}, \text{ les événements B et C sont donc indépendants.}$$

Exercice II.3 :

En appuyant sur un bouton, on allume une des cases de cette grille (Figure ci-dessous).

- 1) Quelle est la probabilité que la case 5 s'allume ?
- 2) Quelle est la probabilité qu'une case marquée d'un chiffre impair s'allume ?
- 3) Définir un événement qui aurait pour probabilité de 4/9.
- 4) Définir un événement qui aurait pour probabilité de 1/3.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

- 5) Les cases 3 et 9 sont restées allumées. En appuyant sur un autre bouton, quelle est la probabilité que les trois cases allumées soient alignées ?

Corrigé de l'exercice II.3 :

- 1) Probabilité que la case 5 s'allume :

L'univers de cette expérience aléatoire est :

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$A = \{5\}$$

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{9}$$

2) Probabilité qu'une case marquée d'un chiffre impair s'allume :

$$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$P(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{5}{9}$$

3) Événement ayant pour probabilité 4/9 :

C : "Les quatre premières cases s'allument"

$$C = \{1, 2, 3, 4\}$$

Ou bien C : "Les cases marquées d'un chiffre pair s'allument"

$$C = \{2, 4, 6, 8\}$$

Ici, plusieurs événements peuvent avoir pour probabilité 4/9.

4) Événement ayant pour probabilité 1/3 :

$$P(D) = \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{3}{9}$$

D : "Les cases marquées d'un multiple de 3 s'allument"

$$D = \{3, 6, 9\}$$

Ou bien D : "Les trois dernières cases s'allument"

$$D = \{7, 8, 9\}$$

Ici, plusieurs événements peuvent avoir pour probabilité 1/3.

5) Probabilité que les trois cases allumées soient alignées :

Soit $E = \{6\}$, représentant la case restante pour aligner les cases allumées en ligne verticale avec les cases 3 et 9 déjà allumées.

Dans ce cas, l'univers devient :

$$\Omega = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

$$P(E) = \frac{\text{card}(E)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{7}$$

Exercice II.4 :

On lance un dé à 6 faces. On note P_i la probabilité de sortie de la face marquée i . Ce dé est truqué de telle sorte que les probabilités de sortie des faces sont : $P_1 = 0,05$; $P_2 = 0,25$; $P_3 = 0,2$; $P_4 = 0,15$ et $P_6 = 0,25$.

1) Quelle est la probabilité :

1.a) de sortie de la face marquée 5 ?

1.b) d'obtenir un chiffre impair ?

Corrigé de l'exercice II.4 :

1.a) Probabilité de sortie de la face marquée 5 :

L'univers de cette expérience aléatoire est : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Le dé étant truqué, les probabilités ne sont pas égales pour chaque face. On a la somme des probabilités pour toutes les faces égale à 1 :

$$P(\Omega) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) = 1$$

$$P(\Omega) = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 1$$

$$P_5 = 1 - (P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_6)$$

$$P_5 = 1 - (0,05 + 0,25 + 0,2 + 0,15 + 0,25) = 1 - 0,9$$

$$P_5 = 0,1$$

b) Probabilité d'obtenir un chiffre impair :

$$P(\{1, 3, 5\}) = P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) = P_1 + P_3 + P_5 = 0,05 + 0,2 + 0,1$$

$$P(\{1, 3, 5\}) = 0,35$$

Exercice II.5 :

On lance un dé pipé (truqué) à 6 faces numérotées de 1 à 6. Les faces portant un chiffre pair ont toutes la même probabilité d'apparition, de même que les faces portant un chiffre impair. La probabilité d'apparition d'un chiffre impair est le double de celle d'un chiffre pair.

1) Quelle est la probabilité de voir apparaître chaque face ?

2) Calculer la probabilité de voir apparaître un chiffre pair et celle de voir apparaître un chiffre impair.

Corrigé de l'exercice II.5 :

1) Probabilité de voir apparaître chaque face :

On note P la probabilité d'apparition d'un chiffre pair et Q celle d'un chiffre impair.

$$P = P(\{2\}) = P(\{4\}) = P(\{6\})$$

$$Q = P(\{1\}) = P(\{3\}) = P(\{5\})$$

$$Q = 2P$$

Sachant que la somme des probabilités est égale à 1 :

$$P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) = 1$$

$$Q + P + Q + P + Q + P = 1$$

$$3Q + 3P = 1$$

$$3(2P) + 3P = 1$$

$$9P = 1$$

$$P = \frac{1}{9}$$

$$Q = 2P = 2 \cdot \frac{1}{9}$$

$$Q = \frac{2}{9}$$

Donc, les probabilités de voir apparaître chaque face sont :

Pour les faces paires (2, 4, 6) : $P = \frac{1}{9}$

Pour les faces impaires (1, 3, 5) : $Q = \frac{2}{9}$

2) Probabilité de voir apparaître un chiffre pair et un chiffre impair :

Probabilité de voir apparaître un chiffre pair :

$$P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

Probabilité de voir apparaître un chiffre impair :

$$P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) = 3 \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{3}$$

Exercice II.6 :

Dans un groupe de 30 étudiants, 20 étudient l'anglais et 15 étudient le français. De plus, 8 étudient les deux langues. Pour un étudiant donné, on note A l'événement : « L'étudiant étudie l'anglais » et B l'événement : « L'étudiant étudie le français ». On choisit un étudiant au hasard dans ce groupe.

- 1) Que représente l'événement $A \cap B$? Donner sa probabilité.
- 2) Que représente l'événement $A \cup B$? Donner sa probabilité.
- 3) Quelle est la probabilité que l'étudiant choisi n'étudie ni l'anglais ni le français ?
- 4) Quel est l'événement contraire de A ? Calculer sa probabilité.

Corrigé de l'exercice II.6 :

1) Signification de l'événement $A \cap B$ et calcul de sa probabilité :

$A \cap B$: « L'étudiant étudie l'anglais et le français ».

$$P(A \cap B) = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$$

2) Signification de l'événement $A \cup B$ et calcul de sa probabilité :

$A \cup B$: « L'étudiant étudie l'anglais ou le français ».

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} + \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{20}{30} + \frac{15}{30} - \frac{8}{30} = \frac{27}{30} = \frac{9}{10}$$

3) Probabilité que l'étudiant choisi n'étudie ni l'anglais ni le français :

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{27}{30} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$$

4) Événement contraire de A et calcul de sa probabilité :

$\bar{A}$: « L'étudiant n'étudie pas l'anglais »

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{20}{30} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

Exercice II.7 :

Soient A et B deux événements tels que $P(A) = 1/5$ et $P(A \cup B) = 1/2$.

1) Supposons que A et B soient incompatibles. Calculer $P(B)$.

2) Supposons que A et B soient indépendants. Calculer $P(B)$.

Corrigé de l'exercice II.7 :

1) Calcul de la probabilité de l'événement B si A et B sont incompatibles :

Si A et B sont incompatibles, cela signifie que $A \cap B = \{ \} = \emptyset$, donc $P(A \cap B) = 0$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 0$$

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$$

2) Calcul de la probabilité de l'événement B si A et B sont indépendants :

Si A et B sont indépendants, alors $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cup B) - P(A) = P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{5} = P(B) - \frac{1}{5} P(B)$$

$$\frac{3}{10} = \frac{4}{5} P(B)$$

$$P(B) = \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$$

Exercice II.8 :

Une urne contient 8 boules dont 5 boules blanches et 3 boules vertes. On tire de façon simultanée et au hasard deux boules de l'urne.

1) Quelle est la probabilité de tirer deux boules blanches ?

2) Quelle est la probabilité de tirer exactement une boule verte ?

3) Quelle est la probabilité de tirer au moins une boule verte ?

Corrigé de l'exercice II.8 :

1) Probabilité de tirer deux boules blanches :

A : "Obtenir deux boules blanches".

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$$

2) Probabilité de tirer exactement une boule verte :

B : "Obtenir exactement une boule verte".

$$P(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{C_3^1 \cdot C_5^1}{C_8^2} = \frac{15}{28}$$

3) Probabilité de tirer au moins une boule verte :

C : « Obtenir au moins une boule verte ».

$$P(C) = \frac{\text{Card}(C)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{C_3^1 \cdot C_5^1 + C_3^2 \cdot C_5^0}{C_8^2} = \frac{18}{28} = \frac{9}{14}$$

$$\text{Ou bien } P(C) = 1 - \frac{C_5^2}{C_8^2} = 1 - \frac{10}{28} = \frac{9}{14}$$

Exercice II.9 :

On jette successivement deux dés cubiques bien équilibrés, notés dé 1 et dé 2. L'issue d'un lancer est donc représentée par un couple (x ; y), où x est la valeur affichée sur le dé 1 et y est la valeur affichée sur le dé 2.

1) Combien y a-t-il d'issues possibles à cette expérience aléatoire ?

2) Recopier et compléter le tableau suivant, donnant le plus grand des deux nombres obtenus lors du lancer :

Dé 2 Dé 1	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

3) Déterminer la probabilité des événements suivants :

- A : « Le plus grand des deux nombres obtenus est 4 » ;
- B : « Le plus grand des deux nombres obtenus est au plus 3 » ;
- C : « Le plus grand des deux nombres obtenus est au moins 5 » ;
- D : « Le plus grand des deux nombres est un multiple de 2 ou de 3 ».

Corrigé de l'exercice II.9 :

1) Nombre d'issues possibles à cette expérience aléatoire :

Comme chaque dé a 6 faces, l'ensemble des issues possibles est :

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 5), (6, 6)\}$$

$$\text{card}(\Omega) = n^P = 6^2 = 36$$

Il y a donc 36 issues possibles pour cette expérience aléatoire.

2) Complétion du tableau :

Tableau II.2 : Valeur maximale obtenue lors du lancer de deux dés équilibrés

Dé 2 Dé 1	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

3) Calcul de la probabilité des événements :

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{7}{36}$$

Au plus 3, c'est-à-dire au maximum 3, cela signifie que le plus grand nombre entre les deux dés est soit 1, soit 2, soit 3.

$$P(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

Au moins 5, c'est-à-dire au minimum 5, cela signifie que le plus grand nombre entre les deux dés est soit 5, soit 6.

$$P(C) = \frac{\text{card}(C)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

Les multiples de 2 ou 3 sont 2, 3, 4, 6.

$$P(D) = \frac{\text{card}(D)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{26}{36}$$

Exercice II.10 :

Dans une usine, on utilise conjointement deux machines M_1 et M_2 pour fabriquer des pièces cylindriques en série. Pour une période donnée, leurs probabilités de tomber en panne sont respectivement 0,01 et 0,008. De plus la probabilité de l'événement « la machine M_2 est en panne sachant que M_1 est en panne » est égale à 0,4.

1) Quelle est la probabilité d'avoir les deux machines en panne au même moment ?

2) Quelle est la probabilité d'avoir au moins une machine qui fonctionne ?

Corrigé de l'exercice II.10 :

Soient les événements suivants :

- M_1 : " La première machine tombe en panne " ;
- M_2 : " La deuxième machine tombe en panne " ;
- $M_1 \cap M_2$: " Les deux machines tombent en panne " .

$$P(M_1) = 0,01, P(M_2) = 0,008 \text{ et } P(M_2/M_1) = 0,4.$$

1) Probabilité d'avoir les deux machines en panne au même moment :

$$P(M_2/M_1) = \frac{P(M_1 \cap M_2)}{P(M_1)}$$

$$P(M_1 \cap M_2) = P(M_2/M_1) \cdot P(M_1)$$

$$P(M_1 \cap M_2) = 0,4 \cdot 0,01 = 0,004$$

2) Probabilité d'avoir au moins une machine qui fonctionne :

$$P(\overline{M_1 \cap M_2}) = 1 - P(M_1 \cap M_2) = 1 - 0,004$$

$$P(\overline{M_1 \cap M_2}) = 0,996$$

Exercice II.11 :

Un magasin reçoit pour la vente des produits en provenance de trois usines dont les parts relatives sont : usine 1 (50 %), usine 2 (30 %) et usine 3 (20 %). Le pourcentage de produits défectueux dans la production de ces usines est respectivement : 2 %, 3 % et 5 %. Quelle est la probabilité pour qu'un produit acheté au hasard soit de bonne qualité ?

Corrigé de l'exercice II.11 :

Soient les événements suivants :

- U_1 : " Le produit provient de l'usine 1 " ;
- U_2 : " Le produit provient de l'usine 2 " ;
- U_3 : " Le produit provient de l'usine 3 " ;
- D : " Le produit est défectueux " ;
- $\bar{D}$: " Le produit est de bonne qualité " .

$$P(U_1) = 0,5, \quad P(U_2) = 0,3, \quad P(U_3) = 0,2, \quad P(D/U_1) = 0,02, \quad P(\bar{D}/U_1) = 0,98,$$

$$P(D/U_2) = 0,03, P(\bar{D}/U_2) = 0,97, P(D/U_3) = 0,05, P(\bar{D}/U_3) = 0,95.$$

- Probabilité pour qu'un produit acheté au hasard soit de bonne qualité :

$$P(\bar{D}) = P(U_1 \cap \bar{D}) + P(U_2 \cap \bar{D}) + P(U_3 \cap \bar{D})$$

$$P(\bar{D}) = P(U_1) \cdot P(\bar{D}/U_1) + P(U_2) \cdot P(\bar{D}/U_2) + P(U_3) \cdot P(\bar{D}/U_3)$$

$$P(\bar{D}) = 0,5 \cdot 0,98 + 0,3 \cdot 0,97 + 0,2 \cdot 0,95$$

$$P(\bar{D}) = 0,971$$

Exercice II.12 :

Supposons que 75 % d'une population est vaccinée contre une certaine maladie. La probabilité d'attraper cette maladie est de 0,1 si on est vacciné et de 0,8 si on n'est pas vacciné. Une personne est choisie au hasard de la population. Quelle est la probabilité pour qu'elle :

- 1) soit vaccinée et ait la maladie ? 2) ait la maladie ? 3) soit vaccinée si elle a la maladie ?
4) soit vaccinée si elle n'a pas la maladie ? 5) ne soit pas vaccinée si elle a la maladie ?
6) ne soit pas vaccinée si elle n'a pas la maladie ?

Corrigé de l'exercice II.12 :

Soient les événements suivants :

- V : " La personne est vaccinée " ;
- $\bar{V}$: " La personne n'est pas vaccinée " ;
- M : " La personne attrape la maladie " ;
- $\bar{M}$: " La personne n'attrape pas la maladie " .

$$P(V) = 0,75, P(\bar{V}) = 0,25, P(M/V) = 0,1, P(\bar{M}/V) = 0,9, P(M/\bar{V}) = 0,8, \\ P(\bar{M}/\bar{V}) = 0,2.$$

- 1) Probabilité qu'une personne soit vaccinée et attrape la maladie :

$$P(V \cap M) = P(V) \cdot P(M/V) = 0,75 \cdot 0,1 = 0,075 = \frac{3}{40}$$

- 2) Probabilité qu'une personne attrape la maladie :

$$P(M) = P(V \cap M) + P(\bar{V} \cap M) \\ P(M) = P(V) \cdot P(M/V) + P(\bar{V}) \cdot P(M/\bar{V}) = 0,75 \cdot 0,1 + 0,25 \cdot 0,8 \\ P(M) = 0,275 = \frac{11}{40}$$

- 3) Probabilité qu'une personne soit vaccinée sachant qu'elle a la maladie :

$$P(V/M) = \frac{P(V \cap M)}{P(M)} = \frac{0,075}{0,275} = 0,273 = \frac{3}{11}$$

- 4) Probabilité qu'une personne soit vaccinée sachant qu'elle n'a pas la maladie :

$$P(V/\bar{M}) = \frac{P(V \cap \bar{M})}{P(\bar{M})} = \frac{P(V) \cdot P(\bar{M}/V)}{1 - P(M)} = \frac{0,75 \cdot 0,9}{1 - 0,275} = 0,931 = \frac{27}{29}$$

- 5) Probabilité qu'une personne ne soit pas vaccinée sachant qu'elle a la maladie :

$$P(\bar{V}/M) = 1 - P(V/M) = 1 - 0,273 = 0,727 = \frac{8}{11}$$

6) Probabilité qu'une personne ne soit pas vaccinée sachant qu'elle n'a pas la maladie :

$$P(\bar{V}/\bar{M}) = 1 - P(V/\bar{M}) = 1 - 0,931 = 0,069 = \frac{2}{29}$$

Exercice II.13 :

En cas de migraine trois patients sur cinq prennent de l'aspirine, deux sur cinq prennent un médicament présentant des effets secondaires.

Avec l'aspirine, 75 % des patients sont soulagés.

Avec le médicament, 90 % des patients sont soulagés.

1) Faire un arbre représentant la situation.

2) Quel est le taux global de personnes soulagées ?

3) Quelle est la probabilité pour un patient d'avoir pris de l'aspirine sachant qu'il est soulagé ?

Corrigé de l'exercice II.13 :

1) Arbre pondéré représentant la situation :

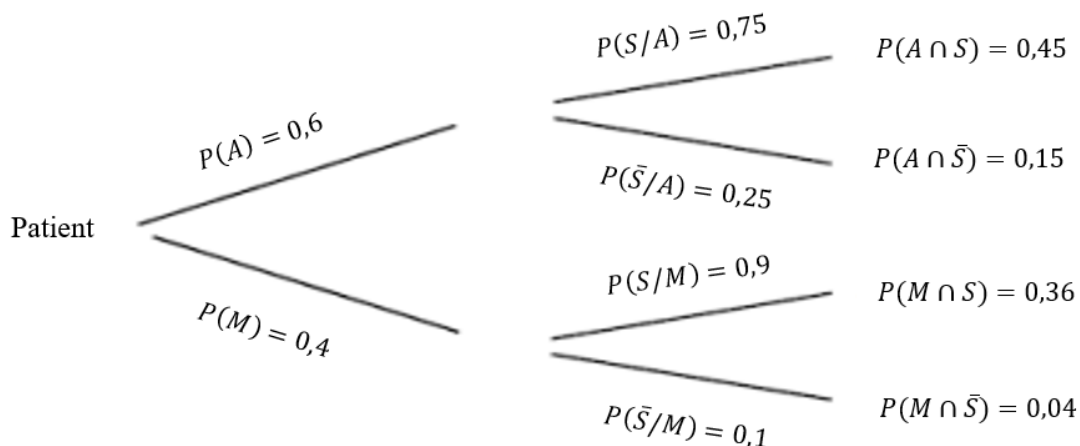


Figure II.2 : Arbre pondéré des traitements administrés en cas de migraine et probabilités de soulagement

2) Taux global de personnes soulagées :

$$P(S) = P(A \cap S) + P(M \cap S) = P(A) \cdot P(S/A) + P(M) \cdot P(S/M)$$

$$P(S) = 0,6 \cdot 0,75 + 0,4 \cdot 0,9 = 0,81 = \frac{81}{100}$$

3) Probabilité pour un patient d'avoir pris de l'aspirine sachant qu'il est soulagé :

La probabilité $P(A/S)$ est déterminée à l'aide du théorème de Bayes, qui permet d'exprimer $P(A/S)$ en fonction de $P(S/A)$, $P(A)$ et $P(S)$, selon la formule :

$$P(A/S) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{P(A) \cdot P(S/A)}{P(S)} = \frac{0,6 \cdot 0,75}{0,81}$$

$$P(A/S) = 0,56 = \frac{5}{9}$$

Exercice II.14 :

Dans un centre de loisirs, il y a uniquement des collégiens et lycéens. 40 % sont collégiens. Un quart des collégiens ne sait pas nager, tandis que 90 % des lycéens savent nager.

- 1) Faire un arbre représentant la situation.
- 2) Quelle est la probabilité qu'un jeune choisi au hasard soit un lycéen qui ne sait pas nager ?
- 3) Quelle est la probabilité de choisir au hasard un jeune de ce centre qui sait nager ?
- 4) On choisit un jeune qui ne sait pas nager. Quelle est la probabilité que ce soit un collégien ?

Corrigé de l'exercice II.14 :

- 1) Arbre pondéré :

Définition des événements :

- C : " Le jeune est collégien " ;
- $\bar{C}$: " Le jeune est lycéen " ;
- N : " Le jeune sait nager " ;
- $\bar{N}$: " Le jeune ne sait pas nager " .

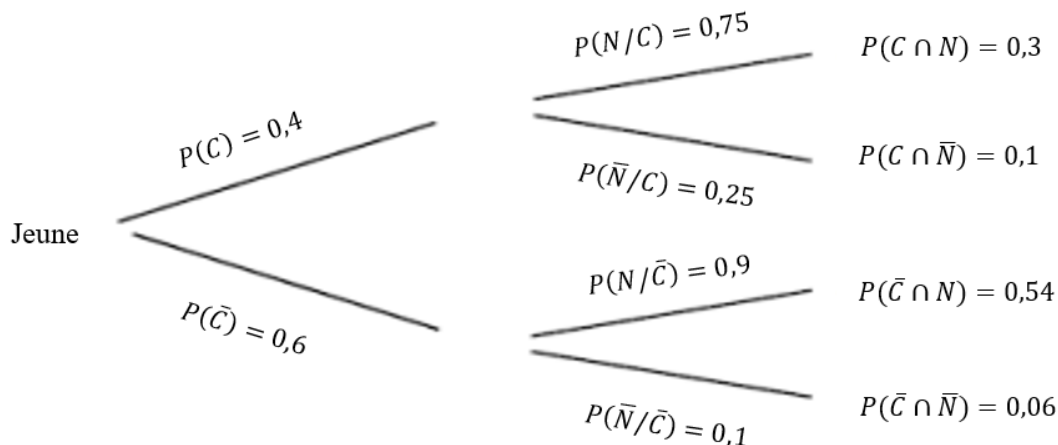


Figure II.3 : Arbre pondéré représentant la répartition des collégiens et lycéens selon leur aptitude à nager

- 2) Probabilité qu'un jeune soit un lycéen qui ne sait pas nager :

$$P(\bar{C} \cap \bar{N}) = P(\bar{C}) \cdot P(\bar{N}/\bar{C}) = 0,6 \cdot 0,1$$

$$P(\bar{C} \cap \bar{N}) = 0,06$$

- 3) Probabilité de choisir un jeune qui sait nager :

$$P(N) = P(C \cap N) + P(\bar{C} \cap N) = P(C) \cdot P(N/C) + P(\bar{C}) \cdot P(N/\bar{C})$$

$$P(N) = 0,4 \cdot 0,75 + 0,6 \cdot 0,9$$

$$P(N) = 0,84$$

4) Probabilité qu'un jeune qui ne sait pas nager soit un collégien :

La probabilité $P(C/\bar{N})$ est déterminée à l'aide du théorème de Bayes, qui permet d'exprimer $P(C/\bar{N})$ en fonction de $P(\bar{N}/C)$, $P(C)$ et $P(\bar{N})$, selon la formule :

$$P(C/\bar{N}) = \frac{P(\bar{N} \cap C)}{P(\bar{N})} = \frac{P(C) \cdot P(\bar{N}/C)}{1 - P(N)} = \frac{0,4 \cdot 0,25}{1 - 0,84}$$

$$P(C/\bar{N}) = 0,625 = 62,5 \%$$

Parmi les jeunes qui ne savent pas nager, 62,5 % sont des collégiens.

Chapitre III Variables aléatoires

III.1 Notion de la variable aléatoire

III.1.1 Exemple introductif : variable aléatoire simple

Supposons un jeu de lancer de dé à 6 faces avec les propositions suivantes :

- Si le résultat est un nombre pair : on gagne 20 DA ;
- Si le résultat est 1 : on gagne 50 DA ;
- Si le résultat est 3 ou 5 : on perd 10 DA.

Tous les cas (faces) du dé sont donc traités dans les propositions.

L'univers de cette expérience aléatoire est : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

À chaque issue de l'univers, on a associé un nombre réel représentant le gain ou la perte :

$$\text{Valeurs prises} \left\{ \begin{array}{l} 1 \rightarrow 50 \text{ DA} \\ 2 \rightarrow 20 \text{ DA} \\ 3 \rightarrow -10 \text{ DA} \\ 4 \rightarrow 20 \text{ DA} \\ 5 \rightarrow -10 \text{ DA} \\ 6 \rightarrow 20 \text{ DA} \end{array} \right\} \text{Valeurs rendues}$$

Par exemple : Si on obtient la face 1, le gain est de 50 DA, donc $X(1) = 50$.

Probabilités associées :

- $P(X = -10) = P(\{3, 5\})$: probabilité de perdre 10 DA, soit celle d'obtenir les faces 3 ou 5.
- $P(X = 20) = P(\{2, 4, 6\})$: probabilité de gagner 20 DA, soit celle d'obtenir un nombre pair.
- $P(X = 50) = P(\{1\})$: probabilité de gagner 50 DA, soit celle d'obtenir la face 1.

III.1.2 Définition générale d'une variable aléatoire

Une variable aléatoire est une fonction qui associe un nombre réel à chaque issue de l'univers. Ici, la variable aléatoire X représente le gain algébrique du joueur : soit on gagne, soit on perd.

D'après l'exemple précédent, les valeurs possibles de X sont : -10, 20, et 50.

III.2 Types de variables aléatoires

III.2.1 Variable aléatoire discrète

III.2.1.1 Définition

Une variable aléatoire discrète est une variable qui peut prendre un nombre fini ou dénombrable de valeurs, appelées valeurs ponctuelles ou isolées. Ces valeurs sont généralement issues d'un univers fini ou dénombrable.

Exemple : Le nombre de faces obtenues lors du lancer d'un dé à six faces.

L'univers associé est : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

III.2.1.2 Loi de probabilité

La loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète X est la fonction qui, à chaque valeur x_i que peut prendre X , associe la probabilité correspondante :

$$P_X(x_i) = P(X = x_i)$$

Les valeurs x_i doivent satisfaire :

$$\sum_{i=1}^n P(X = x_i) = 1 \quad \text{et} \quad \forall i, P(X = x_i) \geq 0$$

Cette loi peut être représentée graphiquement par un diagramme en bâtons, où chaque bâton correspond à une probabilité $P(X = x_i)$ associée à la valeur x_i .

III.2.1.3 Fonction de répartition

La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète X est la fonction F , définie pour tout réel x par :

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$$

Autrement dit, elle donne la probabilité que la variable aléatoire prenne une valeur inférieure ou égale à x . Elle est aussi appelée fonction de distribution cumulée, car elle résulte de la somme cumulée des probabilités.

Pour une valeur x_i appartenant à l'ensemble des valeurs prises par X , on a :

$$F(x_i) = P(X \leq x_i) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + \dots + P(X = x_i) = P_1 + P_2 + \dots + P_i$$

La représentation graphique de $F(x)$ a une forme en escalier.

III.2.1.3.1 Propriétés de la fonction de répartition

Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète X . Alors :

- F est croissante sur R :

$$\forall x, y \in R, x < y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$$

- F est continue à droite (et présente des sauts discontinus aux points x_i où X prend ses valeurs) ;
- Les valeurs limites sont :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

- Pour tout intervalle $[a, b]$ avec $a, b \in R$ et $a < b$, on a :

$$F(b) - F(a) = P(a \leq X \leq b)$$

III.2.1.4 Exemples de variables aléatoires discrètes

III.2.1.4.1 Exemple 1 : Extraction de la loi de probabilité à partir d'une fonction de répartition

Énoncé

Soit X une variable aléatoire discrète dont la fonction de répartition est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F(x_i)$	0	0,15	0,25	0,4	0,55	0,7	0,8	0,85	0,9	0,95	1

- Déterminer les probabilités suivantes :

$$P(X = 5) ;$$

$$P(X < 5) ;$$

$$P(2 \leq X < 7) ;$$

$$P(X \geq 5) ;$$

$$P(3 < X < 9).$$

Corrigé

On commence par déterminer la fonction de masse de probabilité $f(x) = P(X = x)$, à partir de la fonction de répartition $F(x) = P(X \leq x)$:

$$f(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

Tableau III.1 : Valeurs de la fonction de répartition et des probabilités associées

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F(x_i) = P(X \leq x_i)$	0	0,15	0,25	0,4	0,55	0,7	0,8	0,85	0,9	0,95	1
$f(x_i) = P(X = x_i)$	0	0,15	0,1	0,15	0,15	0,15	0,1	0,05	0,05	0,05	0,05

Avec :

$F(x_i) = P(X \leq x_i)$ est une fonction de répartition ;

$f(x_i) = P(X = x_i)$ est une fonction de distribution.

- $P(X = 5) = P_6 = f(5) = 0,15$
- $P(X < 5) = P(X \leq 4) = F(4) = 0,55$
- $P(2 \leq X < 7) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6)$
 $P(2 \leq X < 7) = P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7 = 0,1 + 0,15 + 0,15 + 0,15 + 0,1$
 $P(2 \leq X < 7) = 0,65$
- $P(X \geq 5) = P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$

$$P(X \geq 5) = P_6 + P_7 + P_8 + P_9 + P_{10} + P_{11} = 0,15 + 0,1 + 0,05 + 0,05 + 0,05 + 0,05$$

$$P(X \geq 5) = 0,45$$

Ou bien :

- $P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - 0,55 = 0,45$
- $P(3 < X < 9) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8)$
 $P(3 < X < 9) = P_5 + P_6 + P_7 + P_8 + P_9 = 0,15 + 0,15 + 0,1 + 0,05 + 0,05 = 0,5$

III.2.1.4.2 Exemple 2 : Fonction de répartition à partir d'une loi de probabilité donnée

Énoncé

Considérant une variable aléatoire discrète X dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3
$P_i = P(X = x_i)$	$\frac{14}{55}$	$\frac{28}{55}$	$\frac{12}{55}$	$\frac{1}{55}$

- Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X .

Corrigé

On commence par calculer les valeurs de la fonction de répartition $F(x_i) = P(X \leq x_i)$, en cumulant les probabilités successives :

Tableau III.2 : Loi de probabilité de X et de sa fonction de répartition $F(x)$

x_i	0	1	2	3
$P_i = P(X = x_i)$	$\frac{14}{55}$	$\frac{28}{55}$	$\frac{12}{55}$	$\frac{1}{55}$
$F(x_i) = P(X \leq x_i)$	$\frac{14}{55}$	$\frac{42}{55}$	$\frac{54}{55}$	$\frac{55}{55}$

La fonction de répartition $F(x)$ s'écrit alors :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 14/55 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 42/55 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 54/55 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 55/55 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

III.2.1.4.3 Exemple 3 : Loi de probabilité et fonction de répartition du nombre de « Pile » obtenus lors de deux lancers d'une pièce de monnaie équilibrée

Énoncé

On lance une pièce de monnaie équilibrée deux fois. On définit la variable aléatoire discrète X comme étant le nombre de "Pile" obtenus lors de ces deux lancers.

- 1) Déterminer la loi de probabilité de X , puis établir sa fonction de répartition.
- 2) Représenter graphiquement la fonction de distribution et la fonction de répartition.

Corrigé

- 1) Détermination de la loi de probabilité de X et la fonction de répartition :

L'univers associé à cette expérience aléatoire est : $\Omega = \{PP, FP, PF, FF\}$

$$\text{card}(\Omega) = 4$$

Tableau III.3 : Issues possibles des deux lancers de la pièce de monnaie

Lancé 2 Lancé 1	Pile	Face
Pile	PP	PF
Face	FP	FF

X compte le nombre de fois où l'on obtient « Pile ».

Les valeurs possibles de X sont : 0, 1, 2.

Tableau III.4 : Loi de probabilité et fonction de répartition de la variable aléatoire X

x_i	0	1	2
$P_i = P(X = x_i)$	$\frac{1}{4} = 0,25$	$\frac{2}{4} = 0,5$	$\frac{1}{4} = 0,25$
$F(x_i) = P(X \leq x_i)$	0,25	0,75	1

Condition de vérification : La somme des probabilités doit être égale à 1 :

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^3 P_i = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Soit, la fonction de répartition :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0,25 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0,75 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

2) Représentations graphiques :

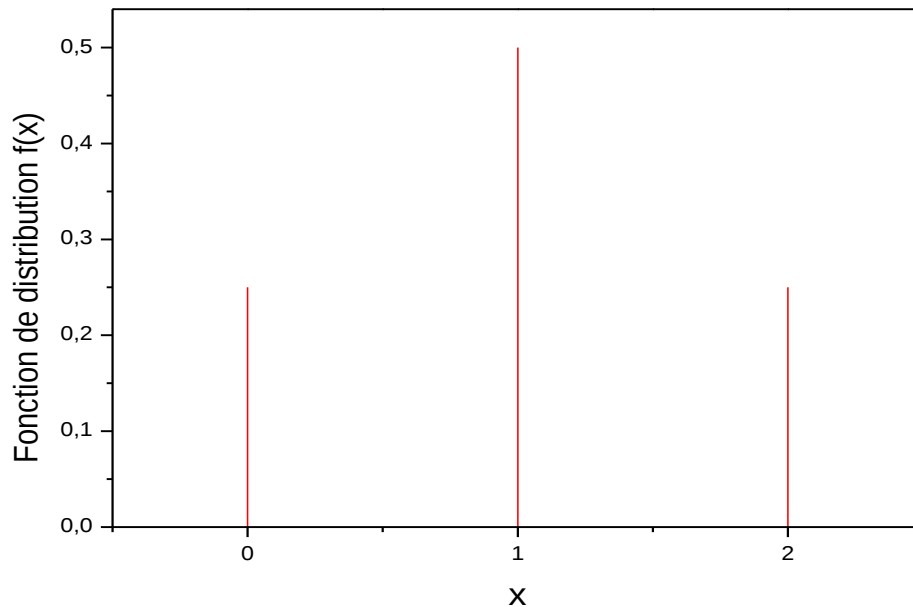


Figure III.1 : Graphe en bâtons de la distribution de probabilité de X

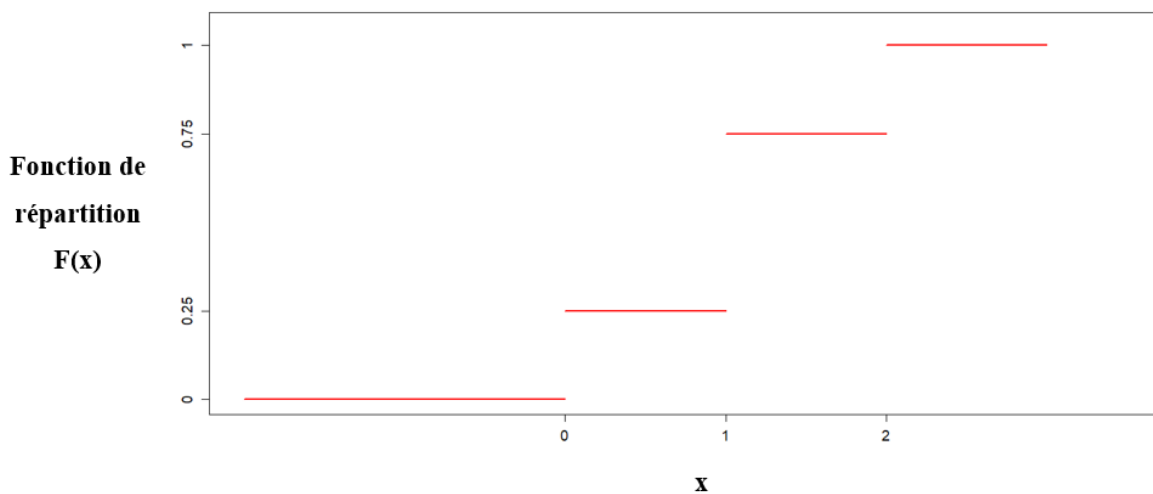


Figure III.2 : Graphique en escalier de $F(x)$ associée à X

III.2.1.5 Caractéristiques statistiques

III.2.1.5.1 Espérance Mathématique

Dans le domaine des statistiques, on parle de moyenne, en probabilité, on parle d'espérance. L'espérance est donc une moyenne à grande échelle.

L'espérance de X, notée $E(X)$, est calculée comme suit :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P_i = x_1 \cdot P_1 + x_2 \cdot P_2 + \cdots + x_n \cdot P_n$$

Application numérique :

Considérons une variable aléatoire X représentant le gain en (DA) d'un joueur selon le résultat d'un jeu aléatoire. La loi de probabilité de X est donnée dans le tableau suivant :

Tableau III.5 : Loi de probabilité de la variable aléatoire X (gain du joueur)

x_i	-10	20	50
$P_i = P(X = x_i)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X) = \sum_{i=1}^3 x_i \cdot P_i = x_1 \cdot P_1 + x_2 \cdot P_2 + x_3 \cdot P_3 = -10 \cdot \frac{2}{6} + 20 \cdot \frac{3}{6} + 50 \cdot \frac{1}{6}$$

$$E(X) = 15 \text{ DA}$$

En moyenne, le gain du joueur est de 15 DA par lancer.

Interprétation de l'espérance :

- Si $E(X) < 0$, le jeu est désavantageux (défavorable) (n'est pas rentable) pour le joueur.
- Si $E(X) > 0$, le jeu est avantageux (favorable) (rentable) pour le joueur.
- Si $E(X) = 0$, le jeu est équitable.

III.2.1.5.2 Variance

La variance mesure la dispersion des gains par rapport à l'espérance, c'est une étape intermédiaire avant de calculer l'écart-type. La variance de X , notée $V(X)$, est calculée par la formule suivante :

$$V(X) = \sum_{i=1}^n P_i (x_i - E(x))^2$$

$$V(X) = P_1 (x_1 - E(x))^2 + P_2 (x_2 - E(x))^2 + \dots \dots \dots + P_n (x_n - E(x))^2$$

Application numérique :

On poursuit l'exemple de la variable X représentant le gain du joueur.

$$V(X) = \frac{2}{6} (-10 - 15)^2 + \frac{3}{6} (20 - 15)^2 + \frac{1}{6} (50 - 15)^2$$

$$V(X) = 425 \text{ DA}^2$$

III.2.1.5.3 Écart-type

L'écart-type, noté $\sigma(X)$, est la racine carrée de la variance et représente la dispersion moyenne des valeurs autour de l'espérance. Il est calculé comme suit :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Application numérique :

On poursuit l'exemple précédent concernant le gain du joueur.

$$\sigma(X) = \sqrt{425}$$

$$\sigma(X) = 20,62 \text{ DA}$$

$$\sigma(X) \approx 21 \text{ DA}$$

Dans ce contexte, un écart-type de 21 DA signifie que les gains obtenus par le joueur fluctuent, en moyenne, de 21 DA autour de l'espérance (15 DA). Un écart-type élevé indique une grande variabilité des gains possibles autour de la moyenne. Cela signifie que le gain d'un joueur peut largement varier, ce qui traduit le caractère aléatoire et incertain du jeu.

Même si l'espérance de gain est de 15 DA, le joueur doit s'attendre à ce que ses gains puissent s'éloigner de cette moyenne d'environ 21 DA dans un sens ou dans l'autre, d'un lancer à l'autre.

III.2.2 Variable aléatoire continue**III.2.2.1 Définition**

Une variable aléatoire continue est une variable qui peut prendre une infinité de valeurs réelles, généralement dans un intervalle continu, borné (par exemple $[a ; b]$) ou non borné (par exemple $[0 ; +\infty[$).

Contrairement à une variable aléatoire discrète, qui prend un nombre fini ou dénombrable de valeurs, la variable continue prend des valeurs dans un ensemble non dénombrable (par exemple tous les réels entre 0 et 1).

III.2.2.2 Exemple introductif : Temps d'attente

Supposons que X soit une variable aléatoire continue représentant un temps d'attente en minutes. On donne une répartition des probabilités sous forme d'un histogramme (Figure III.3), représentant des densités pour des intervalles de temps :

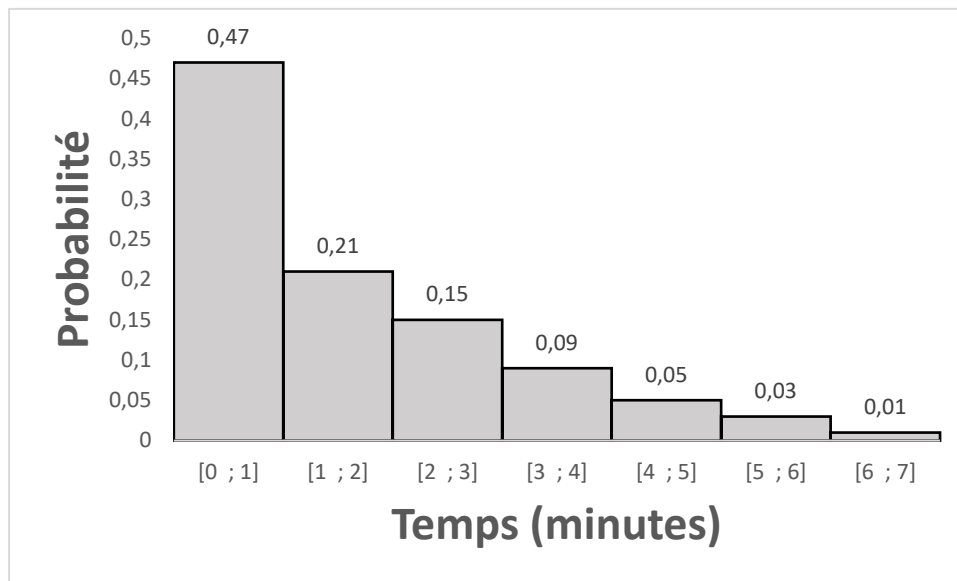


Figure III.3 : Histogramme des densités de probabilité du temps d'attente en (minutes)

- Quelle est la probabilité d'attendre entre 1 et 3 minutes ?

On calcule :

$$P(1 \leq X \leq 3) = 0,21 + 0,15 = 0,36$$

- Quelle est la probabilité d'attendre au plus 1 minute ?

On calcule :

$$P(X \leq 1) = 0,47$$

Remarque importante :

Dans le cas d'une variable continue, la probabilité est interprétée comme une aire sous une courbe. Par exemple, dans l'histogramme :

$$P(X \leq 1) = \text{largeur de la barre} \cdot \text{hauteur (densité)}$$

$$P(X \leq 1) = 1 \cdot 0,47 = 0,47$$

Autres exemples d'univers continus :

Arrivée d'une personne entre 11h00 et 12h00

X : Variable aléatoire représentant l'heure d'arrivée.

$$\Omega = [11 ; 12]$$

Durée de vie d'une ampoule

X : Variable aléatoire représentant la durée de vie (en heures)

$$\Omega = [0 ; +\infty[$$

Remarque :

Dans le cas discret, on utilise un tableau qui associe à chaque valeur de X une probabilité $P(X = x_i)$. Dans le cas continu, on ne peut pas faire de tableau, on travaille avec une fonction de densité et on utilise l'intégrale pour calculer des probabilités.

III.2.2.3 Loi de probabilité

La loi de probabilité d'une variable aléatoire continue est décrite par une fonction de densité f , et sa fonction de répartition F .

III.2.2.3.1 Densité de probabilité

Lorsqu'on lisse l'histogramme représentant la répartition des fréquences d'une variable aléatoire continue (Figure III.3), on obtient une courbe (Figure III.4) appelée fonction de densité de probabilité de cette variable.

Cette fonction permet de visualiser comment les valeurs prises par la variable aléatoire X sont réparties dans un intervalle donné.

Le terme densité fait référence au fait que la probabilité que la variable prenne une valeur dans un intervalle $[c ; d]$ correspond à l'aire sous la courbe de densité entre $x = c$ et $x = d$.

La fonction de densité $f(x)$ permet de modéliser la répartition des probabilités sur un intervalle. Elle vérifie les trois propriétés fondamentales suivantes :

- Continuité : $f(x)$ est généralement une fonction continue sur son domaine ;
- Positivité : $f(x) \geq 0$ pour tout x ;
- Aire totale égale à 1 : $\int_a^b f(x) dx = 1$.

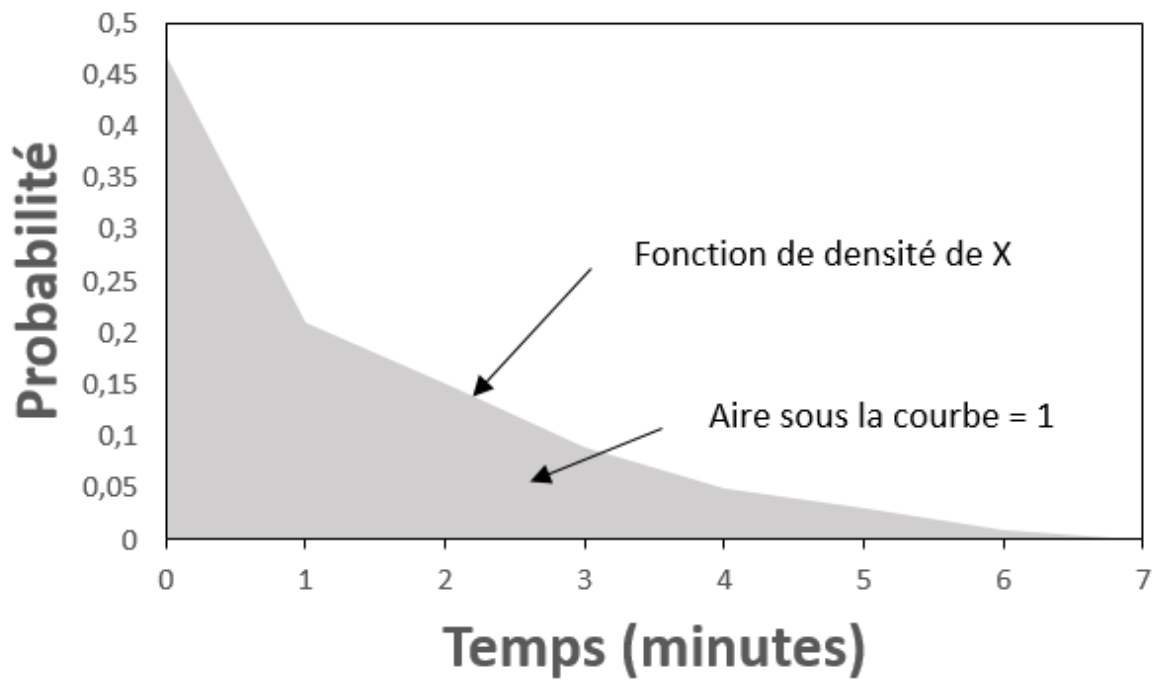


Figure III.4 : Densité de probabilité continue pour la variable « temps d'attente »

Cas particuliers selon l'intervalle I :

- Cas d'un intervalle borné : $I = [a ; b]$

La fonction f est une densité si :

- f est continue et positive sur I ;
- $\int_a^b f(x) \cdot dx = 1$.

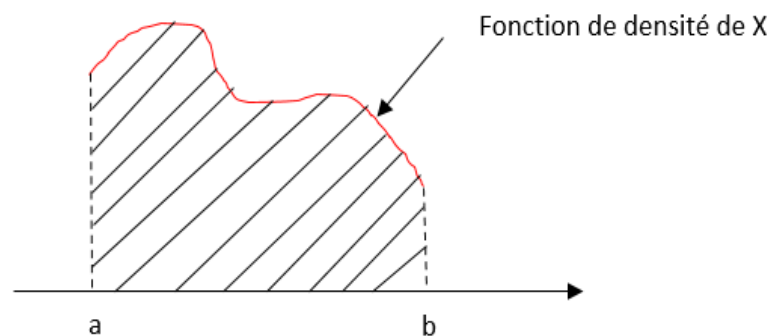


Figure III.5 : Courbe de densité sur un intervalle borné $[a ; b]$

- Cas d'un intervalle non borné : $I = [a ; +\infty[$

La fonction f est une densité si :

- f est continue et positive sur I ;
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) \cdot dx = 1$.

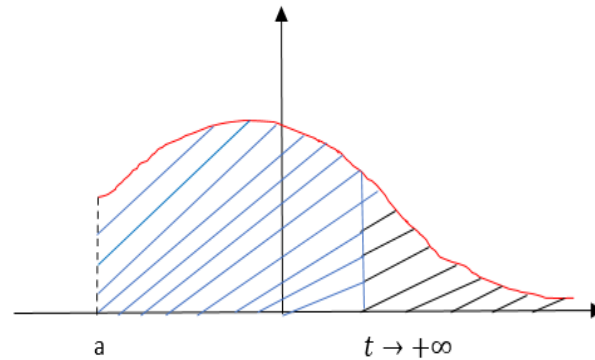


Figure III.6 : Courbe de densité sur un intervalle non borné à droite $[a ; +\infty[$

- Cas de tout $R : I = R$

La fonction f est une densité si :

- f est continue et positive sur I ;
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) \cdot dx + \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a f(x) \cdot dx = 1$.

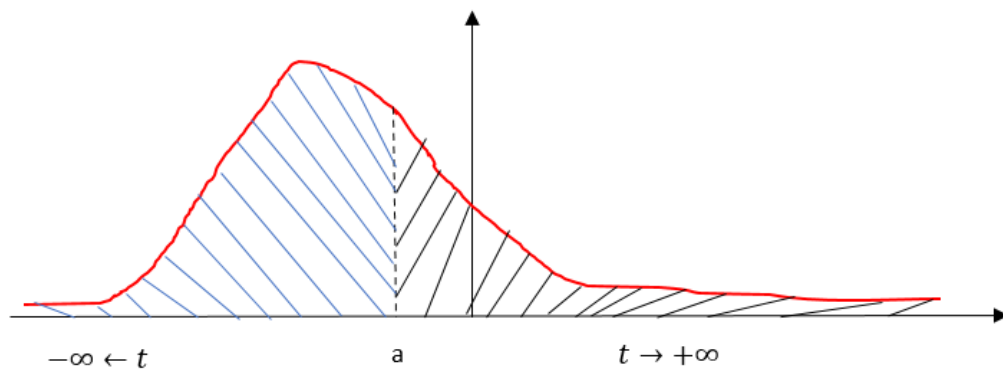


Figure III.7 : Courbe de densité sur l'ensemble R

III.2.2.3.2 Fonction de répartition

La fonction de répartition d'une variable aléatoire continue X est la fonction F , définie sur R par :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

III.2.2.3.2.1 Propriétés de la fonction de répartition

Les principales propriétés de la fonction de répartition sont les suivantes :

- La fonction F est continue et croissante (au sens large) ;
- Elle prend ses valeurs dans l'intervalle $[0 ; 1]$:

$$0 \leq F(x) \leq 1 \quad \text{pour tous } x \in R$$

- Limites aux extrémités :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

- Pour tous couple $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

- On a aussi :

$$P(X \geq x) = 1 - P(X \leq x)$$

- $F(x)$ n'est pas une probabilité au sens strict, mais une fonction qui donne la probabilité que X soit inférieure ou égale à x .
- Pour les variables continues, on a :

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$$

- On ne peut pas parler de la probabilité que X prenne une valeur exacte, car pour une variable continue, $P(X = x) = 0$.

III.2.2.4 Caractéristiques statistiques

III.2.2.4.1 Espérance mathématique

Si X une variable aléatoire continue de densité f . Son espérance mathématique, notée $E(X)$, est définie par :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$$

III.2.2.4.2 Variance

Si $E(X)$ existe, la variance de X , notée $V(X)$, est donnée par :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Où :

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$$

III.2.2.4.3 Écart-type

L'écart-type, noté $\sigma(X)$, est la racine carrée de la variance :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

III.2.2.5 Exemples de variables continues

III.2.2.5.1 Exemple 1 : Vérification d'une densité de probabilité sur un intervalle

Énoncé

Dans chacun des cas suivants, justifier que la fonction f est une densité de probabilité sur l'intervalle I indiqué :

1) f est définie sur $I = [0 ; 2]$ par sa courbe ci-dessous.

2) f est définie sur $I = [-1 ; 1]$ par : $f(x) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}x^2$

3) f est définie sur $I = [0 ; +\infty]$ par : $f(x) = e^{-x}$

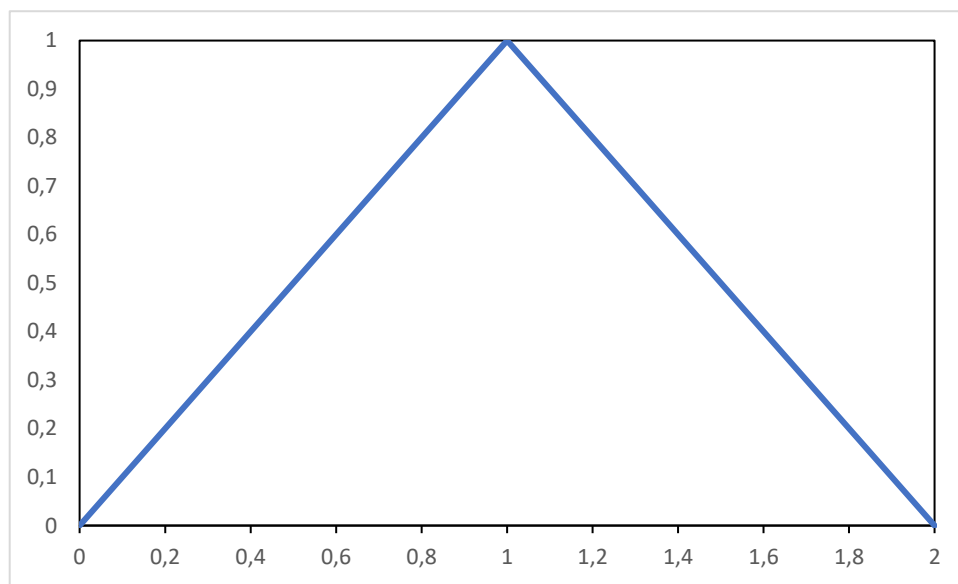


Figure III.8 : Courbe de la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 2]$

Corrigé

1) Étude graphique sur $[0 ; 2]$:

D'après la figure, la fonction f est continue et positive sur l'intervalle $[0 ; 2]$.

L'aire sous la courbe est celle d'un triangle de base 2 et de hauteur 1 :

$$\text{Aire} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$$

f est une densité de probabilité sur $[0 ; 2]$

2) Étude de la fonction $f(x) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}x^2$ sur $[-1 ; 1]$:

La fonction f est un polynôme, donc elle est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[-1 ; 1]$.

Pour étudier la positivité de la fonction, on trace le tableau de variation :

$$f(x) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}x^2$$

$$f(x) = \frac{3}{4}(1 - x^2)$$

Tableau III.6 : Tableau de variation et de signe de la fonction $f(x) = \frac{3}{4}(1 - x^2)$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$\frac{3}{4}$				
$1 - x^2$	+	0	0	-
$f(x)$	-	+	-	-

Donc, f est positive sur $[-1 ; 1]$

L'aire sous la courbe : $A = \int_{-1}^1 f(x) \cdot d(x) \stackrel{?}{=} 1$

Rappel sur les intégrales :

$\int a \, dx = ax + c$ avec c est une constante réelle.

$$\int x \, dx = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{3}{4} - \frac{3}{4}x^2 = \left[\frac{3}{4}x - \frac{3}{4} \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \left(\left(\frac{3}{4} \cdot 1 \right) - \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1^3}{3} \right) \right) - \left(\left(\frac{3}{4} \cdot (-1) \right) - \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{-1^3}{3} \right) \right)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{3}{4} - \frac{3}{4}x^2 = 0,5 - (-0,5) = 1$$

f est une densité de probabilité sur $[-1 ; 1]$.

3) Étude de la fonction $f(x) = e^{-x}$ sur $[0 ; +\infty[$:

$f(x) = e^{-x}$ est la composition de fonctions continues, donc elle est continue sur $[0 ; +\infty[$.

Pour tous $x \in [0 ; +\infty[$, $e^{-x} > 0$, donc f est positive sur $[0 ; +\infty[$.

Rappel sur les intégrales :

$$\int e^{ax} = \frac{e^{ax}}{a} + c$$

$$\int_0^t e^{-x} \, dx = \left[\frac{e^{-x}}{-1} \right]_0^t = [-e^{-x}]_0^t = [e^{-x}]_t^0 = e^{-0} - e^{-t} = 1 - e^{-t} = 1 - \frac{1}{e^t}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{e^t} = ?$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^t} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{e^t} = 1 - 0 = 1$$

f est une densité de probabilité sur $[0 ; +\infty[$.

III.2.2.5.2 Exemple 2 : Calcul de probabilités avec une densité exponentielle**Énoncé**

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = e^{-x}$$

Soit X une variable aléatoire continue admettant f comme densité de probabilité.

Calculer les probabilités suivantes :

1) $P(1 \leq X \leq 2)$;

2) $P(x \geq 3)$.

Corrigé

1) Calcul de $P(1 \leq X \leq 2)$:

$$P(1 \leq X \leq 2) = \int_1^2 e^{-x} dx = \left[\frac{e^{-x}}{-1} \right]_1^2 = [-e^{-x}]_1^2 = [e^{-x}]_2^1 = e^{-1} - e^{-2}$$

$$P(1 \leq X \leq 2) = 0,2325 = 23,25 \%$$

2) Calcul de $P(x \geq 3)$:

On utilise la complémentarité :

$$P(x \geq 3) = 1 - P(x \leq 3) = 1 - P(0 \leq X \leq 3) = 1 - \int_0^3 e^{-x} dx$$

$$P(x \geq 3) = 1 - \left[\frac{e^{-x}}{-1} \right]_0^3 = 1 - [-e^{-x}]_0^3$$

$$P(x \geq 3) = 1 - [e^{-x}]_3^0 = 1 - (e^{-0} - e^{-3}) = 0,0498 = 4,98 \%$$

III.2.2.5.3 Exemple 3 : Calcul de l'espérance avec une densité polynomiale**Énoncé**

Soit X une variable aléatoire continue de densité f définie sur $[0 ; 3]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{9}x^2$$

- Déterminer l'espérance mathématique $E(X)$.

Corrigé

Par définition, l'espérance $E(X)$ d'une variable aléatoire continue est donnée par :

$$E(X) = \int_0^3 x f(x) dx = \int_0^3 x \frac{1}{9}x^2 dx = \frac{1}{9} \int_0^3 x^3 dx = \frac{1}{9} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^3 = \frac{1}{9} \left[\frac{3^4}{4} - \frac{0^4}{4} \right] = \frac{9}{4} = 2,25$$

Exercices corrigés du Chapitre III
Variables aléatoires

Exercice III.1 :

On joue à un jeu. On lance un dé à 6 faces :

- Si on obtient 6, on gagne 30 DA ;
- Si on obtient 5, On gagne 20 DA ;
- Si on obtient 4, On ne gagne rien ;
- Sinon on perd 30.

Soit X la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur.

- 1) Quelles sont les valeurs possibles de X ?
- 2) Donner la loi de probabilité de X .
- 3) Calculer l'espérance et l'écart-type de X .

Corrigé de l'exercice III.1 :

- 1) Les valeurs possibles de X sont : -30, 0, 20, 30.
- 2) La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

Tableau III.7 : Loi de probabilité de la variable aléatoire X représentant le gain algébrique dans un jeu de dé à 6 faces

x_i	-30	0	20	30
$P_i = P(X = x_i)$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Condition de vérification : La somme des probabilités doit être égale à 1 :

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^4 P_i = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

La condition est vérifiée.

- 3) Calcul de l'espérance et de l'écart-type :

Espérance :

$$E(X) = \sum_{i=1}^4 x_i \cdot P_i = x_1 \cdot P_1 + x_2 \cdot P_2 + x_3 \cdot P_3 + x_4 \cdot P_4$$

$$E(X) = -30 \cdot \frac{3}{6} + 0 \cdot \frac{1}{6} + 20 \cdot \frac{1}{6} + 30 \cdot \frac{1}{6} = -6,67 \text{ DA}$$

$$E(X) \approx -7 \text{ DA}$$

En moyenne, à ce jeu, on perd 7 DA par lancer.

Ecart-type :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^n P_i (x_i - E(x))^2}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{P_1 (x_1 - E(x))^2 + P_2 (x_2 - E(x))^2 + P_3 (x_3 - E(x))^2 + P_4 (x_4 - E(x))^2}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{3}{6}(-30 + 7)^2 + \frac{1}{6}(0 + 7)^2 + \frac{1}{6}(20 + 7)^2 + \frac{1}{6}(30 + 7)^2}$$

$$\sigma(X) = 24,95 \text{ DA}$$

$$\sigma(X) \approx 25 \text{ DA}$$

Un écart-type de 25 DA indique que les gains ou pertes d'argent à ce jeu s'écartent en moyenne de 25 DA autour de la valeur moyenne de -7 DA. Cela montre une grande variabilité dans les résultats du jeu, ce qui renforce le caractère incertain et risqué de celui-ci.

Exercice III.2 :

On vous propose le jeu suivant : pour jouer, il faut payer 20 DA. Ensuite, on lance 3 fois de suite une pièce de monnaie bien équilibré. Chaque pile rapporte 30 DA et chaque face fait perdre 20 DA. On considère la variable aléatoire G égale au gain algébrique du joueur.

- 1) Déterminer la loi de probabilité de G .
- 2) Calculer l'espérance et l'écart-type de G .

Corrigé de l'exercice III.2 :

- 1) La loi de probabilité de G :

On doit chercher toutes les valeurs que peut prendre G , mais avant tout ça, on doit chercher le nombre d'issues possibles pour cette expérience aléatoire.

Le lancement de la pièce de monnaie se fait successivement et avec répétition, donc, il s'agit d'un arrangement ordonné avec répétition.

$$\text{card}(\Omega) = n^P = 2^3 = 8$$

Avec n est le nombre d'issues de l'expérience aléatoire et P est le nombre de lancers.

Il y a 8 issues possibles.

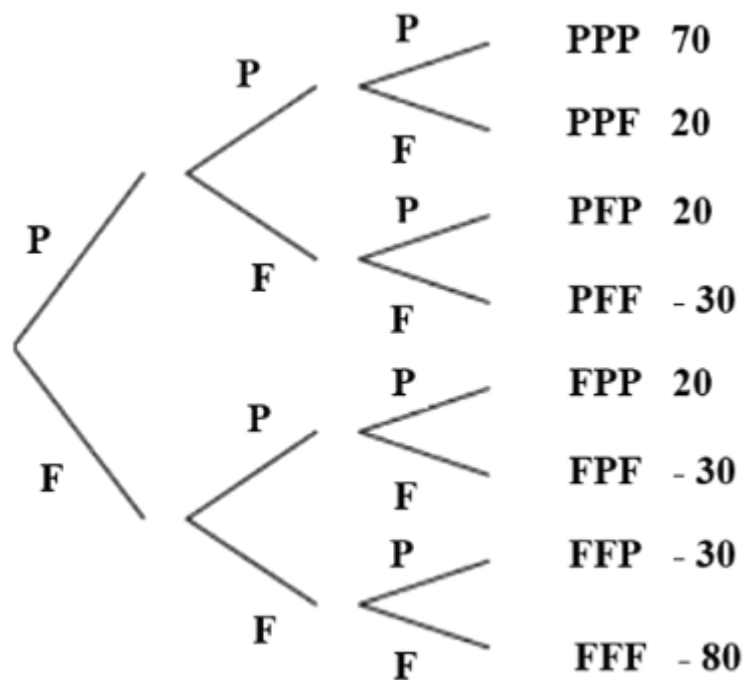


Figure III.9 : Arbre pondéré des issues et des gains associés lors de trois lancers successifs d'une pièce de monnaie

La loi de probabilité de G est donnée par le tableau suivant :

Tableau III.8 : Loi de probabilité de la variable aléatoire G représentant le gain algébrique du joueur après trois lancers de pièce de monnaie

g_i	-80	-30	20	70
$P_i = P(G = g_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Condition de vérification : La somme des probabilités doit être égale à 1 :

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^4 P_i = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

La condition est vérifiée.

2) Calcul de l'espérance et de l'écart-type :

Espérance :

$$E(X) = \sum_{i=1}^4 x_i \cdot P_i = x_1 \cdot P_1 + x_2 \cdot P_2 + x_3 \cdot P_3 + x_4 \cdot P_4$$

$$E(X) = -80 \cdot \frac{1}{8} + -30 \cdot \frac{3}{8} + 20 \cdot \frac{3}{8} + 70 \cdot \frac{1}{8}$$

$$E(X) = -5 \text{ DA}$$

En moyenne, à ce jeu, on perd 5 DA par lancer.

Ecart-type :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^n P_i (x_i - E(x))^2}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{P_1 (x_1 - E(x))^2 + P_2 (x_2 - E(x))^2 + P_3 (x_3 - E(x))^2 + P_4 (x_4 - E(x))^2}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{8}(-80 + 5)^2 + \frac{3}{8}(-30 + 5)^2 + \frac{3}{8}(20 + 5)^2 + \frac{1}{8}(70 + 5)^2}$$

$$\sigma(X) = 43,30 \text{ DA}$$

$$\sigma(X) \approx 43 \text{ DA}$$

Un écart-type de 43 DA indique que les gains ou pertes à ce jeu s'écartent en moyenne de 43 DA autour de la valeur moyenne (-5 DA). Cela reflète une forte variabilité dans les résultats, soulignant que ce jeu est risqué, avec des fluctuations importantes autour du gain ou de la perte moyenne.

Exercice III.3 :

On dispose d'une urne U_1 et d'une urne U_2 . L'urne U_1 contient 3 boules blanches et 2 boules noires. L'urne U_2 contient 2 boules blanches et 2 boules noires. Toutes les sont indiscernables au toucher.

On considère l'épreuve suivante : on tire au hasard une boule de U_1 et une boule de U_2 . Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de boules blanches obtenues.

- 1) Quelles sont les valeurs possibles de X ?
- 2) Donner la loi de probabilité de X .
- 3) Calculer l'espérance et l'écart-type de X .

Corrigé de l'exercice III.3 :

1) Les valeurs possibles de X sont : 0, 1, 2.

- $X = 0$: Aucune boule blanche (les deux boules sont noires).
- $X = 1$: Une seule boule blanche (une blanche et une noire).
- $X = 2$: Les deux boules sont blanches.

2) La loi de probabilité de X :

Probabilités des différentes valeurs de X :

$$P(X = 0) = P(N, N) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{4}{20}$$

$$P(X = 1) = P(B, N) + P(N, B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{10}{20}$$

$$P(X = 2) = P(B, B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$$

Tableau III.9 : Loi de probabilité de la variable aléatoire X représentant le nombre de boules blanches obtenues lors d'un double tirage dans deux urnes

x_i	0	1	2
$P_i = P(X = x_i)$	$\frac{4}{20}$	$\frac{10}{20}$	$\frac{6}{20}$

Condition de vérification : La somme des probabilités doit être égale à 1 :

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^4 P_i = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{4}{20} + \frac{10}{20} + \frac{6}{20} = \frac{20}{20} = 1$$

La condition est vérifiée.

3) Calcul de l'espérance et de l'écart-type :

Espérance :

$$E(X) = \sum_{i=1}^3 x_i \cdot P_i = x_1 \cdot P_1 + x_2 \cdot P_2 + x_3 \cdot P_3$$

$$E(X) = 0 \cdot \frac{4}{20} + 1 \cdot \frac{10}{20} + 2 \cdot \frac{6}{20}$$

$$E(X) = 1,1 \text{ boule}$$

$$E(X) \approx 1 \text{ boule}$$

En moyenne, à chaque tirage, on peut s'attendre à obtenir une boule blanche.

Ecart-type :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^n P_i (x_i - E(x))^2}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{P_1 (x_1 - E(x))^2 + P_2 (x_2 - E(x))^2 + P_3 (x_3 - E(x))^2}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{4}{20} (0 - 1)^2 + \frac{10}{20} (1 - 1)^2 + \frac{6}{20} (2 - 1)^2}$$

$$\sigma(X) = 0,7 \text{ boule}$$

$$\sigma(X) \approx 1 \text{ boule}$$

Le nombre de boules blanches reste généralement proche de la moyenne (entre 1 et 2 boules blanches, avec peu de chances d'obtenir 0 boule blanche).

Exercice III.4 :

Voici le menu d'un restaurant :

Plats		Desserts	
Légumes	800 DA	Glaces	400 DA
Viande	900 DA		
Poissons	1100 DA	Tarte	500 DA

Chaque client prend un plat et un dessert.

- 1) Faire un arbre représentant l'expérience aléatoire.
- 2) En prenant un client au hasard. Préciser quel peut être le montant de sa facture.
- 3) Combien de combinaisons peut-on créer à partir de ce menu ?
- 4) Soit X la variable aléatoire représentant le prix à payer pour un client.
 - 4.a) Déterminer la loi de probabilité de X .
 - 4.b) Calculer l'espérance et l'écart-type de X .

Corrigé de l'exercice III.4 :

Soient les événements suivants :

- L : "Le client prend des légumes" ;
- V : "Le client prend de la viande" ;
- P : "Le client prend des poissons" ;
- G : "Le client prend des glaces" ;

- T : “ Le client prend de la tarte ”.

1) Arbre représentant l’expérience aléatoire :

Un client choisit un plat (légumes, viande ou poissons) puis un dessert (glaces ou tarte).

Structure de l'arbre :

- Niveau 1 : Choix du plat (L, V, P) ;
- Niveau 2 : Choix du dessert (G, T).

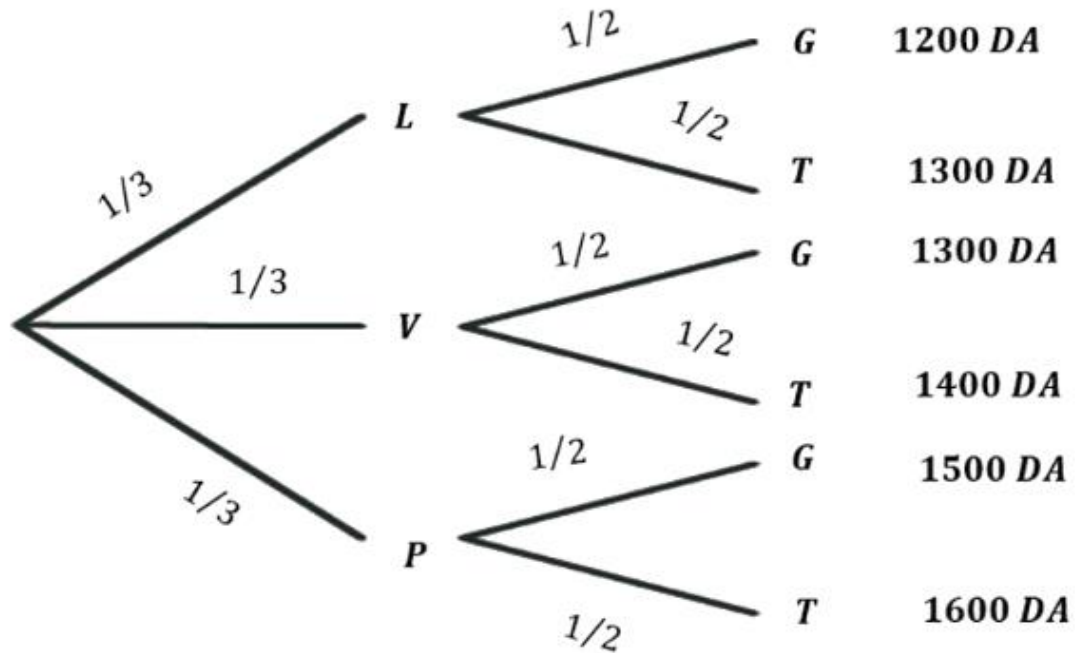


Figure III.10 : Arbre pondéré représentant les différentes combinaisons possibles de plats et desserts dans le menu du restaurant

2) Le montant de facture de chaque client est calculé comme suit :

- $L + G = 800 + 400 = 1200 \text{ DA}$
- $L + T = 800 + 500 = 1300 \text{ DA}$
- $V + G = 900 + 400 = 1300 \text{ DA}$
- $V + T = 900 + 500 = 1400 \text{ DA}$
- $P + G = 1100 + 400 = 1500 \text{ DA}$
- $P + T = 1100 + 500 = 1600 \text{ DA}$

Les montants possibles sont les suivants :

$$\{1200 \text{ DA}, 1300 \text{ DA}, 1400 \text{ DA}, 1500 \text{ DA}, 1600 \text{ DA}\}$$

3) On peut créer 6 combinaisons possibles à partir de ce menu.

Chaque plat peut être combiné avec chaque dessert :

$$3 \text{ (plats)} \cdot 2 \text{ (desserts)} = 6 \text{ combinaisons}$$

4) La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

Tableau III.10 : Loi de probabilité de la variable aléatoire X représentant le montant total à payer pour un repas complet (plat + dessert)

x_i	1200	1300	1400	1500	1600
$P_i = P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Condition de vérification : La somme des probabilités doit être égale à 1 :

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^5 P_i = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

La condition est vérifiée.

3) Calcul de l'espérance et de l'écart-type :

Espérance :

$$E(X) = \sum_{i=1}^5 x_i \cdot P_i = x_1 \cdot P_1 + x_2 \cdot P_2 + x_3 \cdot P_3 + x_4 \cdot P_4 + x_5 \cdot P_5$$

$$E(X) = 1200 \cdot \frac{1}{6} + 1300 \cdot \frac{2}{6} + 1400 \cdot \frac{1}{6} + 1500 \cdot \frac{1}{6} + 1600 \cdot \frac{1}{6} = 1383,33 \text{ DA}$$

$$E(X) \approx 1383 \text{ DA}$$

En moyenne, un client paiera 1383 DA pour son repas.

Ecart-type :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^n P_i (x_i - E(x))^2}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{P_1 (x_1 - E(x))^2 + P_2 (x_2 - E(x))^2 + P_3 (x_3 - E(x))^2 + P_4 (x_4 - E(x))^2 + P_5 (x_5 - E(x))^2}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{6}(1200 - 1383)^2 + \frac{2}{6}(1300 - 1383)^2 + \frac{1}{6}(1400 - 1383)^2 + \frac{1}{6}(1500 - 1383)^2 + \frac{1}{6}(1600 - 1383)^2}$$

$$\sigma(X) = 134,37 \text{ DA} \approx 134 \text{ DA}$$

Une faible valeur de l'écart-type signifie que les montants facturés sont relativement proches de la moyenne. Cela reflète une variabilité modérée dans les prix en fonction des choix de plats et de desserts et signifie que le coût des repas dans ce restaurant est assez homogène et que les clients peuvent s'attendre à des factures relativement proches de la moyenne, quelle que soit la combinaison de plat et de dessert choisie.

Exercice III.5 :

I) On considère la loi de probabilité ci-dessous :

x_i	-2	-1	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,25	0,3	0,15	α	β

- Calculer α et β pour que l'espérance soit nulle.

II) Dans un jeu basé sur une expérience aléatoire, la variable aléatoire X est le gain en (DA) réalisé par le participant.

Le tableau suivant présente la loi de probabilité de la variance X :

x_i	0	10	20	30	60
$P(X = x_i)$	0,34	0,3	0,19	0,15	0,02

- 1) Que représente le calcul de : $P(X < 30)$?
- 2) Calculer la probabilité d'obtenir un gain égal à au moins 30 DA.
- 3) Calculer la probabilité suivante : $P(20 \leq X < 50)$.

Corrigé de l'exercice III.5 :

I) Calcul de α et β pour que l'espérance soit nulle :

D'après la condition de la somme des probabilités : $\sum_{i=1}^5 P_i = 1$

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = 1$$

$$0,25 + 0,3 + 0,15 + \alpha + \beta = 1$$

$$\alpha + \beta = 0,3$$

$$\alpha = 0,3 - \beta$$

La condition pour que l'espérance soit nulle :

$$E(X) = \sum_{i=1}^5 x_i \cdot P_i = x_1 \cdot P_1 + x_2 \cdot P_2 + x_3 \cdot P_3 + x_4 \cdot P_4 + x_5 \cdot P_5 = 0$$

$$-0,5 + -0,3 + 0,15 + 2\alpha + 3\beta = 0$$

$$2\alpha + 3\beta = 0,65$$

$$2(0,3 - \beta) + 3\beta = 0,65$$

$$0,6 - 2\beta + 3\beta = 0,65$$

$$\beta = 0,05 \text{ et } \alpha = 0,25$$

II.1) Interprétation de $P(X < 30)$:

$P(X < 30)$: Représente la probabilité pour que le gain soit strictement inférieur à 30 DA.

II.2) Calcul de $P(X \geq 30)$:

$$P(X \geq 30) = P(X = 30) + P(X = 60) = 0,15 + 0,02 = 0,17$$

II.3) Calcul de $P(20 \leq X \leq 50)$:

$$P(20 \leq X \leq 50) = P(X = 20) + P(X = 30) = 0,19 + 0,15 = 0,34$$

Exercice III.6 :

On lance deux dés cubiques bien équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note X la variable aléatoire égale à l'écart entre les deux nombres sortis.

1) Déterminer la loi de probabilité de X .

2) Calculer l'espérance et l'écart-type de X .

Corrigé de l'exercice III.6 :

1) Détermination de la loi de probabilité de X :

Les écarts possibles entre deux dés sont les suivants :

$$X = |\text{Dé 1} - \text{Dé 2}| \quad \text{Où Dé 1 et Dé 2 sont les issues des deux dés}$$

Tableau III.11 : Valeurs de la variable aléatoire X représentant l'écart absolu entre les résultats de deux dés cubiques équilibrés

Dé 1 \ Dé 2	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

Tableau III.12 : Loi de probabilité de la variable aléatoire X représentant l'écart entre les deux nombres obtenus au lancer de deux dés

x_i	0	1	2	3	4	5
$P_i = P(X = x_i)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

Condition de vérification : La somme des probabilités doit être égale à 1 :

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^6 P_i = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = \frac{6}{36} + \frac{10}{36} + \frac{8}{36} + \frac{6}{36} + \frac{4}{36} + \frac{2}{36} = \frac{36}{36} = 1$$

La condition est vérifiée.

2) Calcul de l'espérance et l'écart-type de X :

Espérance :

$$E(X) = \sum_{i=1}^6 x_i \cdot P_i = x_1 \cdot P_1 + x_2 \cdot P_2 + x_3 \cdot P_3 + x_4 \cdot P_4 + x_5 \cdot P_5 + x_6 \cdot P_6$$

$$E(X) = \frac{0 \cdot 6 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 2}{36} = 1,94$$

Si l'expérience est répétée un grand nombre de fois, la moyenne des écarts entre les deux dés converge vers 1,94.

Écart-type :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^n P_i (x_i - E(x))^2}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{P_1 (x_1 - E(x))^2 + P_2 (x_2 - E(x))^2 + P_3 (x_3 - E(x))^2 + P_4 (x_4 - E(x))^2 + P_5 (x_5 - E(x))^2 + P_6 (x_6 - E(x))^2}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{6}{36} (0 - 1,94)^2 + \frac{10}{36} (1 - 1,94)^2 + \frac{8}{36} (2 - 1,94)^2 + \frac{6}{36} (3 - 1,94)^2 + \frac{4}{36} (4 - 1,94)^2 + \frac{2}{36} (5 - 1,94)^2}$$

$$\sigma(X) = 1,43 \approx 1$$

L'écart-type de ce jeu, égal à 1,43, indique une dispersion modérée des écarts entre les deux dés par rapport à la moyenne (1,94). Cela signifie que les valeurs de X sont majoritairement concentrées autour de cette moyenne, avec une variabilité modérée. Cette mesure reflète le fait que les écarts entre les dés ne s'écartent pas de manière excessive de la moyenne, ce qui est attendu dans un jeu de dés équilibré.

Exercice III.7 :

On considère une roue partagée en 10 secteurs égaux tels que : il y a un secteur de couleur rouge ; il y a trois secteurs de couleur verte ; il y a six secteurs de couleur bleue. Pour pouvoir faire tourner la roue : un joueur doit payer 100 DA ; il gagne 0 DA si le bleu sort ; 200 DA si le vert sort ; 300 DA si le rouge sort. On appelle X la variable aléatoire associée au gain final du joueur.

- 1) Donner la loi de probabilité associée à X .
- 2) Calculer l'espérance et l'écart-type de gain du joueur.
- 3) Proposer une modification du jeu pour qu'il soit équitable.

Corrigé de l'exercice III.7 :

- 1) La loi de probabilité de X :

Le gain net est calculé comme suit :

- Si le bleu sort : $0 - 100 = -100$ DA ;
- Si le vert sort : $200 - 100 = 100$ DA ;
- Si le rouge sort : $300 - 100 = 200$ DA.

Les valeurs possibles de X sont : -100, 100, 200.

Tableau III.13 : Loi de probabilité de la variable aléatoire X représentant le gain net du joueur

x_i	-100	100	200
$P_i = P(X = x_i)$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

Condition de vérification : La somme des probabilités doit être égale à 1 :

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^3 P_i = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{6}{10} + \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

La condition est vérifiée.

- 2) Calcul de l'espérance et l'écart-type de gain du joueur :

Espérance :

$$E(X) = \sum_{i=1}^3 x_i \cdot P_i = x_1 \cdot P_1 + x_2 \cdot P_2 + x_3 \cdot P_3 = \frac{-100 \cdot 6 + 100 \cdot 3 + 200 \cdot 1}{10}$$

$$E(X) = -10 \text{ DA}$$

En moyenne, si le joueur joue un grand nombre de fois, il va perdre 10 DA.

Écart-type :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^n P_i (x_i - E(x))^2}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{P_1 (x_1 - E(x))^2 + P_2 (x_2 - E(x))^2 + P_3 (x_3 - E(x))^2}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{6}{10}(-100 + 10)^2 + \frac{3}{10}(100 + 10)^2 + \frac{1}{10}(200 + 10)^2}$$

$$\sigma(X) = 113,58 \text{ DA}$$

$$\sigma(X) \approx 114 \text{ DA}$$

L'écart-type, qui est d'environ 114 DA, mesure la dispersion des gains du joueur par rapport à l'espérance mathématique (-10DA). Cet écart-type relativement élevé indique que les gains du joueur varient de manière significative autour de la moyenne. Ainsi, un écart-type élevé traduit une variabilité importante dans les résultats du jeu, ce qui signifie que les joueurs peuvent s'attendre à des résultats très différents à chaque tour, augmentant l'aspect risqué du jeu.

3) Modification du jeu pour qu'il soit équitable :

Pour rendre le jeu équitable ($E(X) = 0$), il faut ajuster les gains pour équilibrer la perte initiale moyenne de 10 DA.

Ajouter 10 DA à chaque gain :

- Si le bleu sort : $-100 + 10 = -90 \text{ DA}$;
- Si le vert sort : $100 + 10 = 110 \text{ DA}$;
- Si le rouge sort : $200 + 10 = 210 \text{ DA}$.

Les nouveaux gains rendent le jeu équitable puisque :

$$E(X) = \sum_{i=1}^3 x_i \cdot P_i = x_1 \cdot P_1 + x_2 \cdot P_2 + x_3 \cdot P_3 = \frac{-90 \cdot 6 + 110 \cdot 3 + 210 \cdot 1}{10}$$

$$E(X) = 0 \text{ DA}$$

Exercice III.8 :

Une urne contient sept boules : une rouge, deux jaunes et quatre vertes. Un joueur tire au hasard une boule, si la boule est rouge, il gagne 10 points, si elle est jaune, il perd 5 points, si elle est verte, il tire sans remise une deuxième boule de l'urne, si cette deuxième boule est rouge, il gagne 8 points, sinon il perd 4 points. Soit X la variable aléatoire associant à chaque tirage le gain algébrique du joueur.

- 1) Déterminer la loi de probabilité de X .
- 2) Calculer l'espérance et l'écart-type de X .
- 3) Les conditions de jeu restent identiques. Indiquer le montant du gain algébrique qu'il faut attribuer à un joueur lorsque la boule tirée au deuxième tirage est rouge, pour que l'espérance de la variable aléatoire X soit nulle.

Corrigé de l'exercice III.8 :

- 1) Détermination de la loi de probabilité de X :

Si la boule tirée est rouge, $X = 10$ avec $P(X = 10) = \frac{1}{7}$

Si la boule tirée est jaune, $X = -5$ avec $P(X = -5) = \frac{2}{7}$

Si la boule tirée est verte :

- Deuxième tirage : si rouge, $X = 8$, avec $P(X = 8) = P(V) \cdot P(R) = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{42} = \frac{2}{21}$
- Deuxième tirage : si jaune ou verte, $X = -4$, avec $P(X = -4) = P(V) \cdot (P(J) + P(V)) = \frac{4}{7} \cdot \left(\frac{2}{6} + \frac{3}{6}\right) = \frac{4}{7} \cdot \frac{5}{6} = \frac{20}{42} = \frac{10}{21}$

Les valeurs possibles de X sont : -5, -4, 8, 10.

Tableau III.14 : Loi de probabilité de X représentant le gain algébrique du joueur à l'issue du jeu

x_i	-5	-4	8	10
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{7}$

Condition de vérification : La somme des probabilités doit être égale à 1 :

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^4 P_i = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \frac{2}{7} + \frac{10}{21} + \frac{2}{21} + \frac{1}{7} = 1$$

La condition est vérifiée.

2) Calcul de l'espérance et l'écart-type de X :

Espérance :

$$E(X) = \sum_{i=1}^4 x_i \cdot P_i = x_1 \cdot P_1 + x_2 \cdot P_2 + x_3 \cdot P_3 + x_4 \cdot P_4$$

$$E(X) = -5 \cdot \frac{2}{7} + -4 \cdot \frac{10}{21} + 8 \cdot \frac{2}{21} + 10 \cdot \frac{1}{7} = -1,14 \text{ points}$$

L'espérance de X représente le gain moyen du joueur sur une longue série de jeux. Ici, une espérance de -1,14 indique que le joueur perd, en moyenne, environ 1,14 points par partie. Cela suggère que le jeu n'est pas favorable au joueur.

Écart-type :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^n P_i (x_i - E(x))^2}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{P_1 (x_1 - E(x))^2 + P_2 (x_2 - E(x))^2 + P_3 (x_3 - E(x))^2 + P_4 (x_4 - E(x))^2}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{2}{7}(-5 + 1,14)^2 + \frac{10}{21}(-4 + 1,14)^2 + \frac{2}{21}(8 + 1,14)^2 + \frac{1}{7}(10 + 1,14)^2}$$

$$\sigma(X) = 5,82 \text{ points} \approx 6 \text{ points}$$

L'écart-type est relativement élevée indiquant que les gains peuvent varier considérablement d'un tirage à l'autre, ce qui reflète une grande incertitude sur le résultat d'un tirage individuel.

3) Gain algébrique pour $E(X) = 0$:

Soit α le nouveau gain lorsque la deuxième boule tirée est rouge. Donc, les valeurs deviennent :

Tableau III.15 : Loi de probabilité modifiée de X pour équilibrer le jeu (espérance nulle)

x_i	-5	-4	α	10
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{7}$

L'équation de l'espérance devient :

$$E(X) = \sum_{i=1}^4 x_i \cdot P_i = x_1 \cdot P_1 + x_2 \cdot P_2 + x_3 \cdot P_3 + x_4 \cdot P_4 = 0$$

$$-5 \cdot \frac{2}{7} + -4 \cdot \frac{10}{21} + \alpha \cdot \frac{2}{21} + 10 \cdot \frac{1}{7} = 0$$

$$\alpha = 20$$

Exercice III.9 :

L'expérience consiste à lancer deux dés à 4 faces, un bleu et un rouge, que l'on suppose équilibrés. On note α le résultat obtenu par le dé bleu et β le résultat obtenu par le rouge.

On considère l'équation : $\alpha x^2 + \beta x + 1 = 0$. On note S la variable aléatoire représentant le nombre de solutions de l'équation.

- Déterminer la loi de probabilité de S .

Corrigé de l'exercice III.9 :

- Détermination de la loi de probabilité de S :

La variable aléatoire S représente le nombre de solutions de l'équation $\alpha x^2 + \beta x + 1 = 0$, où α est le résultat du dé bleu et β celui du dé rouge.

L'équation quadratique est résolue en fonction de son discriminant :

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha$$

Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions distinctes ($S = 2$).

Si $\Delta = 0$, l'équation admet une solution double ($S = 1$).

Si $\Delta < 0$, l'équation n'admet pas de solutions ($S = 0$).

Les valeurs de Δ pour chaque paire (α, β) et pour toutes les combinaisons possibles sont :

Tableau III.16 : Valeurs du discriminant $\Delta = \beta^2 - 4\alpha$ pour toutes les combinaisons (α, β)

$\beta \backslash \alpha$	1	2	3	4
1	-3	-7	-11	-15
2	0	-4	-8	-12
3	5	1	-3	-7
4	12	8	4	0

Tableau III.17 : Loi de probabilité de la variable aléatoire S (nombre de solutions de l'équation)

s_i	0	1	2
$P(S = s_i)$	$\frac{9}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{5}{16}$

Condition de vérification : La somme des probabilités doit être égale à 1 :

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^3 P_i = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{9}{16} + \frac{2}{16} + \frac{5}{16} = \frac{16}{16} = 1$$

La condition est vérifiée.

Exercice III.10 :

Dans une station de sports d'hiver, les probabilités en (pourcentage) d'attente en minutes aux remontées mécaniques sont données dans le tableau suivant :

Durée d'attente (minutes)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Probabilité (%)	2	8	13	18	21	15	11	7	3	2

- 1) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X (temps d'attente) et représenter graphiquement cette fonction.
- 2) Calculer la probabilité d'attendre plus de 5 minutes.
- 3) Déterminer la durée maximale d'attente assurant une probabilité d'attente inférieure ou égale à 88 %.

Corrigé de l'exercice III.10 :

- 1) Détermination de la fonction de répartition de X :

On commence par calculer les valeurs cumulées de la fonction de répartition $F(x_i) = P(X \leq x_i)$.

Tableau III.18 : Loi de probabilité et fonction de répartition de la durée d'attente aux remontées mécaniques

x_i (min)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P_i = P(X = x_i)$ (%)	2	8	13	18	21	15	11	7	3	2
$F(x_i) = P(X \leq x_i)$ (%)	2	10	23	41	62	77	88	95	98	100

Fonction de répartition en (pourcentage) :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 10 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 23 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 41 & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 62 & \text{si } 5 \leq x < 6 \\ 77 & \text{si } 6 \leq x < 7 \\ 88 & \text{si } 7 \leq x < 8 \\ 95 & \text{si } 8 \leq x < 9 \\ 98 & \text{si } 9 \leq x < 10 \\ 100 & \text{si } x \geq 10 \end{cases}$$

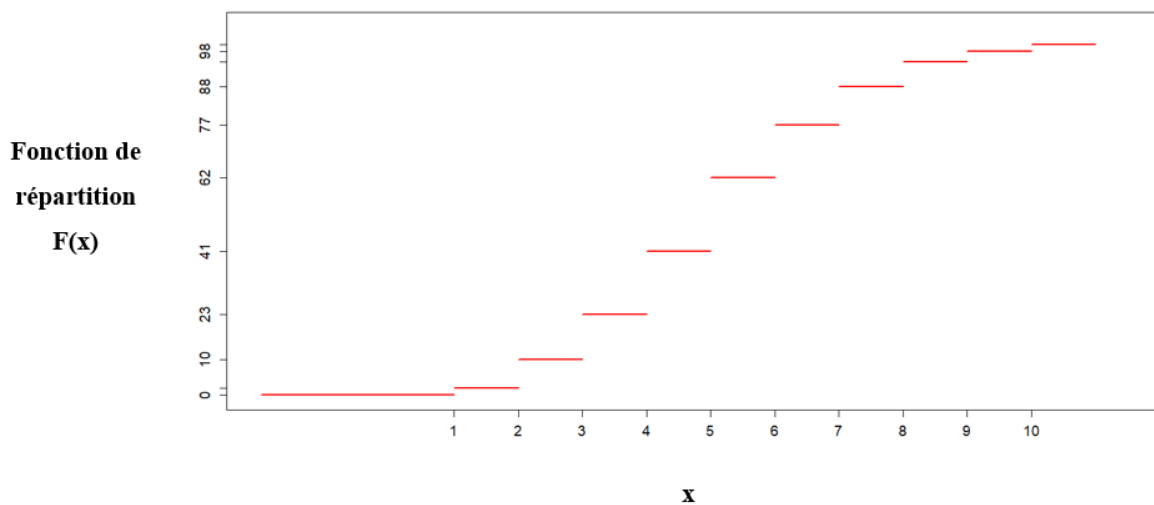


Figure III.11 : Représentation graphique en escalier de la fonction de répartition de la durée d'attente aux remontées mécaniques

2) Détermination de la probabilité d'attendre plus de 5 minutes :

$$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - \left(\frac{62}{100}\right) = 0,38 = 38 \%$$

3) Détermination de la durée maximale d'attente qui assure une probabilité d'attente de 0,88 (88 %) :

On cherche la plus grande valeur de x_i telle que :

$$P(X \leq x_i) = 0,88 = 88 \%$$

En consultant la fonction de répartition, on observe que :

$$x_i = 7 \text{ min}$$

Exercice III.11 :

Dans un groupe de 12 enfants, on compte :

- 4 enfants de 8 ans ;
- 5 enfants de 9 ans ;
- 3 enfants de 10 ans.

On choisit au hasard 6 enfants qui se portent volontaires pour une activité, en supposant que chaque groupe de 6 enfants a la même probabilité d'être sélectionné.

Soit X la variable aléatoire représentant le nombre d'enfants de 10 ans parmi les 6 choisis.

1) Déterminer la loi de probabilité de X et en donner une représentation graphique.

2) Définir la fonction de répartition associée à X et la représenter graphiquement.

Corrigé de l'exercice III.11 :

1) Détermination et représentation de la loi de probabilité de X :

La variable aléatoire X peut prendre les valeurs : 0, 1, 2 ou 3, car il y a au total 3 enfants de 10 ans.

Le nombre total de combinaisons possibles de 6 enfants parmi 12 est :

$$C_{12}^6 = 924$$

$$P(X = 0) = \frac{C_9^6}{C_{12}^6} = 0,09$$

$$P(X = 1) = \frac{C_9^5 \cdot C_3^1}{C_{12}^6} = 0,41$$

$$P(X = 2) = \frac{C_9^4 \cdot C_3^2}{C_{12}^6} = 0,41$$

$$P(X = 3) = \frac{C_9^3 \cdot C_3^3}{C_{12}^6} = 0,09$$

Tableau III.19 : Distribution de probabilité et fonction de répartition du nombre d'enfants de 10 ans parmi les volontaires

x_i	0	1	2	3
$P_i = P(X = x_i)$	0,09	0,41	0,41	0,09
$F(x_i) = P(X \leq x_i)$	0,09	0,5	0,91	1

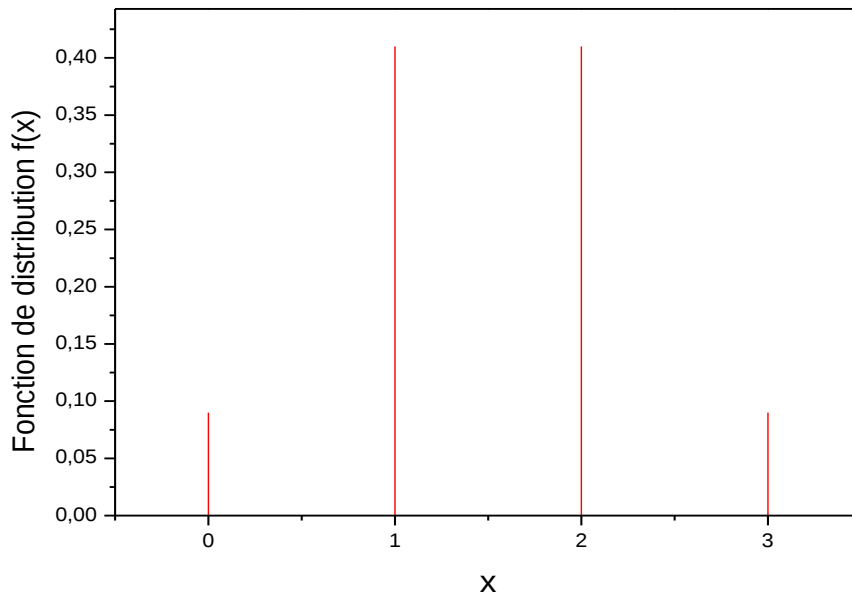


Figure III.12 : Représentation en bâtons de la loi de probabilité du nombre d'enfants de 10 ans dans un groupe de 6 volontaires

2) Détermination et représentation de la fonction de répartition associée à X :

La fonction de répartition $F(x)$ s'écrit alors :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0,09 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0,5 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0,91 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

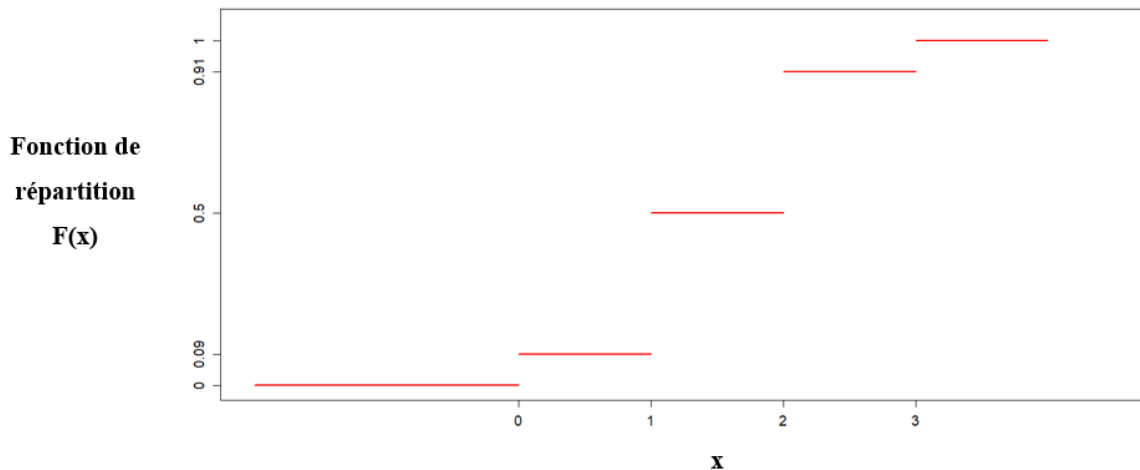


Figure III.13 : Fonction de répartition en escalier du nombre d'enfants de 10 ans parmi les volontaires

Exercice III.12 :

On considère la fonction f définie sur $[1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2}{x^3}$$

- 1) Vérifier que f est une densité de probabilité sur $[1 ; +\infty[$.
- 2) Soit X une variable aléatoire continue de densité f . Déterminer l'espérance $E(X)$.

Corrigé de l'exercice III.12 :

- 1) Vérification que f est une densité :

- Continuité :

$f(x) = \frac{2}{x^3}$ est une fonction rationnelle (quotient de polynômes), continue sur $[1 ; +\infty[$, car le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle.

- Positivité :

Pour tout $x \geq 1$, $f(x) > 0$, donc f est positive sur $[1 ; +\infty[$.

- Calcul de l'aire sous la courbe :

On vérifie que l'intégrale sur tout l'intervalle vaut 1 :

$$\int_1^t \frac{2}{x^3} dx = \int_1^t 2x^{-3} dx = 2 \int_1^t x^{-3} dx = 2 \left[\frac{x^{-2}}{-2} \right]_1^t = 2 \left[\frac{-1}{2x^2} \right]_1^t = 2 \left[\frac{1}{2x^2} \right]_1^t$$

$$\int_1^t \frac{2}{x^3} dx = 2 \left(\frac{1}{2(1)^2} - \frac{1}{2t^2} \right) = 1 - \frac{1}{t^2}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right) = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{t^2} \right) = 1 - 0 = 1$$

L'aire sous la courbe vaut 1 donc f est une densité de probabilité sur $[1 ; +\infty[$

2) Calcul de l'espérance $E(X)$

$$E(X) = \int_a^b x f(x) dx$$

$$E(X) = \int_1^t x \frac{2}{x^3} dx = \int_1^t \frac{2}{x^2} dx = \int_1^t 2x^{-2} dx = 2 \int_1^t x^{-2} dx = 2 \left[\frac{x^{-1}}{-1} \right]_1^t$$

$$E(X) = 2 \left[\frac{-1}{x} \right]_1^t = 2 \left[\frac{1}{x} \right]_t^1 = 2 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{t} \right) = 2 - \frac{2}{t}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{2}{t} \right) = 2 - 0 = 2$$

$$E(X) = 2$$

Exercice III.13 :

Déterminer si la fonction suivante est une densité de probabilité :

$$f(x) = \begin{cases} xe^x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Corrigé de l'exercice III.13 :

Pour que $f(x)$ soit une densité de probabilité, trois conditions doivent être vérifiées :

- Continuité : La fonction f est un produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et donc, elle est continue sur $[0 ; 1]$.
- Positivité : Pour tout $x \in [0 ; 1]$, $x \geq 0$ et $e^x \geq 0$, donc $f(x) = xe^x \geq 0$.
- Calcul de l'aire sous la courbe :

On vérifie que l'intégrale sur tout l'intervalle vaut 1 :

$$\int_0^1 xe^x \stackrel{?}{=} 1$$

On utilise l'intégration par parties :

Rappel sur l'intégration par partie :

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

u', v' sont continues sur I , avec $a \in I$ et $b \in I$.

On pose : $v(x) = x$ afin de réduire le degré du polynôme et ainsi faciliter le calcul de l'intégrale.

$$\text{Et } u'(x) = e^x$$

Donc, on aura : $v'(x) = 1$ et $u(x) = e^x$

$$\int_0^1 xe^x = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \cdot 1$$

$$\int_0^1 xe^x = ((1e^1) - (0e^0)) - [e^x]_0^1$$

$$\int_0^1 xe^x = ((1e^1) - (0e^0)) - (e^1 - e^0) = e^1 - e^1 + e^0 = 1$$

Donc, f est une densité de probabilité.

Exercice III.14 :

Déterminer si la fonction suivante est une densité de probabilité :

$$f(x) = \begin{cases} 1 \cdot \ln(x) & \text{si } 1 \leq x \leq e \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Corrigé de l'exercice III.14 :

Pour que $f(x)$ soit une densité de probabilité, trois conditions doivent être vérifiées :

- Continuité : La fonction $\ln(x)$ est continue sur $[0 ; +\infty[$, donc en particulier sur l'intervalle $[1 ; e]$.
- Positivité : Sur $[1 ; e]$, on a : $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$. Pour tout $x \in [1 ; e]$, $f(x) \geq 0$.
- Calcul de l'aire sous la courbe :

On vérifie que l'intégrale sur tout l'intervalle vaut 1 :

$$\int_1^e 1 \cdot \ln(x) \stackrel{?}{=} 1$$

On utilise l'intégration par parties :

On pose : $v(x) = \ln(x)$ et $u'(x) = 1$

Donc, on aura : $v'(x) = \frac{1}{x}$ et $u(x) = x$

$$\int_1^e 1 \cdot \ln(x) = [x \cdot \ln(x)]_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\int_1^e 1 \cdot \ln(x) = ((e \cdot \ln(e)) - (1 \cdot \ln(1))) - [x]_1^e$$

$$\int_1^e 1 \cdot \ln(x) = ((e \cdot \ln(e)) - (1 \cdot \ln(1))) - (e - 1) = ((e \cdot 1) - (1 \cdot 0)) - e + 1$$

$$\int_1^e 1 \cdot \ln(x) = e - e + 1 = 1$$

Donc, f est une densité de probabilité.

Exercice III.15 :

On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} K(1-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- 1) Déterminer la valeur de K pour que f soit une densité de probabilité.
- 2) Déterminer la fonction de répartition F associée à la variable aléatoire X de densité f .

Corrigé de l'exercice III.15 :

1) Détermination de K :

$$\int_0^1 f(x) dx = 1$$

$$\int_0^1 K(1-x) dx = 1$$

$$K \int_0^1 (1-x) dx = 1$$

$$K \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 1$$

$$K \left(\left(1 - \left(\frac{1^2}{2} \right) \right) - \left(0 - \left(\frac{0^2}{2} \right) \right) \right) = 1$$

$$\frac{K}{2} = 1$$

$$K = 2$$

2) Détermination de la fonction de répartition :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

On distingue trois cas :

- Si $x < 0$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = 0$$

- Si $0 \leq x \leq 1$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt$$

$$F(x) = 0 + \int_0^x 2(1-t) dt$$

$$F(x) = 2 \int_0^x (1-t) dt = 2 \left[t - \frac{t^2}{2} \right]_0^x$$

$$F(x) = \left(2 \left(x - \frac{x^2}{2} \right) - 2 \left(0 - \frac{0^2}{2} \right) \right)$$

$$F(x) = 2x - x^2$$

- Si $x > 1$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt$$

$$F(x) = 0 + 1 + 0$$

$$F(x) = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x - x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Exercice III.16 :

Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire continue X définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Calculer $P(1 \leq x \leq 2)$.

Corrigé de l'exercice III.16 :

La probabilité que X soit comprise entre 1 et 2 est donnée par :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

$$P(1 \leq X \leq 2) = F(2) - F(1)$$

$$P(1 \leq X \leq 2) = (1 - e^{-\frac{2}{2}}) - (1 - e^{-\frac{1}{2}})$$

$$P(1 \leq X \leq 2) = 0,2387 = 23,87 \%$$

Exercice III.17 :

Soit X une variable aléatoire continue dont la densité de probabilité est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq \beta \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

1) Déterminer β pour que f soit une densité de probabilité.

2) Soit $\beta = 2$, déterminer la fonction de répartition de X .

3) Calculer $P(0,5 \leq X \leq 3)$.

4) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Corrigé de l'exercice III.17 :

1) Détermination de β :

$$\int_0^\beta f(x) dx = 1$$

$$\int_0^\beta (1 - \frac{x}{2}) dx = 1$$

$$[x - \frac{x^2}{4}]_0^\beta = 1$$

$$((\beta - \frac{\beta^2}{4}) - (0 - \frac{0^2}{4})) = 1$$

$$\beta - \frac{\beta^2}{4} - 1 = 0$$

$$-\frac{\beta^2}{4} + \beta - 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot (-1) = 0$$

$$\beta = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)}$$

$$\beta = 2$$

2) Détermination de la fonction de répartition de X :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

On distingue trois cas :

- Si $x < 0$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = 0$$

- Si $0 \leq x \leq 2$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt$$

$$F(x) = 0 + \int_0^x \left(1 - \frac{t}{2}\right) dt$$

$$F(x) = \left[t - \frac{t^2}{4}\right]_0^x$$

$$F(x) = \left(x - \frac{x^2}{4}\right) - \left(0 - \frac{0^2}{4}\right)$$

$$F(x) = x - \frac{x^2}{4}$$

- Si $x > 2$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^2 f(t) dt + \int_2^x f(t) dt$$

$$F(x) = 0 + 1 + 0$$

$$F(x) = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x - \frac{x^2}{4} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

3) Calcul de la probabilité pour que X soit entre 0,5 et 3 :

$$P(0,5 \leq x \leq 3) = P(x \leq 3) - P(x \leq 0,5) = 1 - \left(0,5 - \frac{0,5^2}{4}\right)$$

$$P(0,5 \leq x \leq 3) = 0,5625 = 56,25 \%$$

4) Calcul de l'espérance et de la variance :

Espérance :

$$E(X) = \int_0^2 x f(x) dx$$

$$E(X) = \int_0^2 x \left(1 - \frac{x}{2}\right) dx$$

$$E(X) = \int_0^2 \left(x - \frac{x^2}{2}\right) dx$$

$$E(X) = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right]_0^2$$

$$E(X) = \left(\left(\frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{6}\right) - \left(\frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{6}\right)\right)$$

$$E(X) = \frac{2}{3}$$

Variance :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = \int_0^2 x^2 f(x) dx$$

$$E(X^2) = \int_0^2 x^2 \left(1 - \frac{x}{2}\right) dx$$

$$E(X^2) = \int_0^2 \left(x^2 - \frac{x^3}{2}\right) dx$$

$$E(X^2) = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{8}\right]_0^2$$

$$E(X^2) = \left(\left(\frac{2^3}{3} - \frac{2^4}{8}\right) - \left(\frac{0^3}{3} - \frac{0^4}{8}\right)\right)$$

$$E(X^2) = \frac{2}{3}$$

$$V(X) = \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$V(X) = \frac{2}{9}$$

Exercice III.18 :

On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 3(1-x)^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- 1) Montrer que f est une densité de probabilité.
- 2) Déterminer sa fonction de répartition $F(x)$.
- 3) Calculer la probabilité $P(0,35 \leq X \leq 0,9)$.

Corrigé de l'exercice III.18 :

- 1) Vérification que f est une densité de probabilité :

- Continuité : La fonction f est polynomiale donc continue sur $[0 ; 1]$.
- Positivité : Pour tout $x \in [0 ; 1]$, on a $f(x) = 3(1-x)^2 \geq 0$.
- Calcul de l'aire sous la courbe :

On vérifie que l'intégrale sur tout l'intervalle vaut 1 :

Rappel sur les intégrales :

$$\int (1+x)^n = \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int (1-x)^n = \frac{-(1-x)^{n+1}}{n+1} + c$$

Avec c est une constante réelle et $n \in \mathbb{N}$.

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 3(1-x)^2 = 3 \int_0^1 (1-x)^2 = 3 \left[-\frac{(1-x)^3}{3} \right]_0^1 = [(1-x)^3]_1^0$$

$$\int_0^1 3(1-x)^2 = ((1-0)^3 - (1-1)^3) = 1 - 0 = 1$$

Donc, f est bien une densité de probabilité.

- 2) Détermination de la fonction de répartition :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

On distingue trois cas :

- Si $x < 0$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = 0$$

- Si $0 \leq x \leq 1$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt$$

$$F(x) = 0 + \int_0^x 3(1-t)^2 dt$$

$$F(x) = 3 \left[-\frac{(1-t)^3}{3} \right]_0^x = 3 \left[\frac{(1-t)^3}{3} \right]_x^0$$

$$F(x) = ((1-0)^3 - (1-x)^3) = 1 - (1-x)^3$$

- Si $x > 1$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt$$

$$F(x) = 0 + 1 + 0$$

$$F(x) = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1-x)^3 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

3) Calcule de la probabilité $P(0,35 \leq X \leq 0,9)$:

$$P(0,35 \leq X \leq 0,9) = F(0,9) - F(0,35) = ((1 - (1 - 0,9)^3) - (1 - (1 - 0,35)^3))$$

$$P(0,35 \leq X \leq 0,9) = 0,2736 = 27,36 \%$$

Exercice III.19 :

Soit X une variable aléatoire continue de densité de probabilité définie par :

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-3\beta x}(1 - e^{-\beta x}) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Où $\beta > 0$ est une constante connue, et k est une constante réelle à déterminer.

- 1) Montrer que la constante k est égale à 12β .
- 2) Déterminer la fonction de répartition.
- 3) Pour $\beta = 1$, calculer les probabilités suivantes :
 - $P(-2 \leq X \leq 2)$
 - $P(0,5 < X \leq 3,25)$
 - $P(X > 5)$

Corrigé de l'exercice III.19 :

1) Démonstration de la constante $k = 12\beta$:

$$\int_0^{+\infty} ke^{-3\beta x}(1 - e^{-\beta x}) dx = 1$$

$$k \int_0^{+\infty} (e^{-3\beta x} - e^{-4\beta x}) dx = 1$$

$$k \left[\frac{e^{-3\beta x}}{-3\beta} - \frac{e^{-4\beta x}}{-4\beta} \right]_0^{+\infty} = 1$$

$$k \left[-\frac{e^{-3\beta x}}{3\beta} + \frac{e^{-4\beta x}}{4\beta} \right]_0^{+\infty} = 1$$

$$k \left[\frac{-4\beta e^{-3\beta x} + 3\beta e^{-4\beta x}}{12\beta^2} \right]_0^{+\infty} = 1$$

$$k \left(\left(\frac{-0 + 0}{12\beta^2} \right) - \left(\frac{-4\beta + 3\beta}{12\beta^2} \right) \right) = 1$$

$$k \left((0) - \left(\frac{-\beta}{12\beta^2} \right) \right) = 1$$

$$k \left(\frac{\beta}{12\beta^2} \right) = 1$$

$$k\beta = 12\beta^2$$

$$k = 12\beta$$

2) Détermination de la fonction de répartition de X :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

On distingue deux cas :

- Si $x < 0$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = 0$$

- Si $x \geq 0$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt$$

$$F(x) = 0 + \int_0^x 12\beta e^{-3\beta t} (1 - e^{-\beta t}) dt$$

$$F(x) = \int_0^x (12\beta e^{-3\beta t} - 12\beta e^{-4\beta t}) dt$$

$$F(x) = 12\beta \int_0^x (e^{-3\beta t} - e^{-4\beta t}) dt$$

$$F(x) = 12\beta \left[\frac{e^{-3\beta t}}{-3\beta} - \frac{e^{-4\beta t}}{-4\beta} \right]_0^x$$

$$F(x) = 12\beta \left[\frac{-4\beta e^{-3\beta t} + 3\beta e^{-4\beta t}}{12\beta^2} \right]_0^x$$

$$F(x) = 12\beta \left(\left(\frac{-4\beta e^{-3\beta x} + 3\beta e^{-4\beta x}}{12\beta^2} \right) - \left(\frac{-4\beta + 3\beta}{12\beta^2} \right) \right)$$

$$F(x) = \left(\frac{-4\beta e^{-3\beta x} + 3\beta e^{-4\beta x}}{\beta} \right) - \left(\frac{-\beta}{\beta} \right)$$

$$F(x) = -4e^{-3\beta x} + 3e^{-4\beta x} + 1$$

$$F(x) = 1 - 4e^{-3\beta x} + 3e^{-4\beta x}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - 4e^{-3\beta x} + 3e^{-4\beta x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

3) Calcul des probabilités suivantes pour $\beta = 1$:

- $P(-2 \leq X \leq 2)$

$$P(-2 \leq X \leq 2) = F(2) - F(-2) = (1 - 4e^{-3(1)(2)} + 3e^{-4(1)(2)}) - 0$$

$$P(-2 \leq X \leq 2) = 0,9911 = 99,11 \%$$

- $P(0,5 < X \leq 3,25)$

$$P(0,5 < X \leq 3,25) = F(3,25) - F(0,5)$$

$$P(0,5 < X \leq 3,25) = (1 - 4e^{-3(1)(3,25)} + 3e^{-4(1)(3,25)}) - (1 - 4e^{-3(1)(0,5)} + 3e^{-4(1)(0,5)})$$

$$P(0,5 < X \leq 3,25) = (0,9998) - (0,5135)$$

$$P(0,5 < X \leq 3,25) = 0,4863 = 48,63 \%$$

- $P(X > 5)$

$$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - F(5)$$

$$P(X > 5) = 1 - (1 - 4e^{-3(1)(5)} + 3e^{-4(1)(5)})$$

$$P(X > 5) = 1,22 \cdot 10^{-6} = 1,22 \cdot 10^{-4} \%$$

Chapitre IV Lois usuelles discrètes

IV.1 Introduction

Dans de nombreuses situations aléatoires de la vie réelle, on cherche à modéliser des phénomènes dans lesquels les résultats possibles sont en nombre fini ou dénombrable. Ces phénomènes sont représentés à l'aide de variables aléatoires discrètes, c'est-à-dire des variables qui prennent des valeurs isolées, généralement entières. Pour décrire le comportement de ces variables, on utilise des lois de probabilité spécifiques, appelées lois discrètes usuelles.

Ces lois constituent des outils fondamentaux en probabilités, car elles permettent non seulement de modéliser mathématiquement des expériences aléatoires variées, mais aussi d'en déduire des caractéristiques essentielles telles que l'espérance, la variance ou encore la probabilité d'un événement d'intérêt.

Dans cette partie, nous nous intéressons aux principales lois discrètes usuelles. Ces lois ne sont pas arbitraires, mais résultent de contextes bien définis et se retrouvent fréquemment dans l'étude de phénomènes concrets :

- La loi uniforme discrète, utilisée lorsque toutes les issues sont équiprobables (exemple : tirage au sort parmi des options égales) ;
- La loi de Bernoulli, qui modélise une expérience aléatoire à deux issues possibles (succès/échec) ;
- La loi binomiale, qui généralise la loi de Bernoulli à un nombre fini d'épreuves indépendantes identiques ;
- La loi de Poisson, adaptée aux événements rares dans un intervalle de temps ou d'espace fixe ;
- La loi géométrique, qui mesure le nombre d'échecs avant le premier succès dans une suite d'épreuves indépendantes ;
- La loi hypergéométrique, utilisée dans les cas de tirages successifs sans remise dans une population finie.

Chaque loi sera présentée avec son cadre d'application, sa fonction de probabilité, ses paramètres caractéristiques (comme l'espérance et la variance), ainsi que des exemples d'utilisation concrets permettant de mieux en comprendre le sens et l'intérêt pratique.

La maîtrise de ces lois permet de construire des modèles probabilistes fiables pour analyser et interpréter une grande variété de situations rencontrées dans les domaines des sciences, de l'ingénierie, de l'économie ou encore des sciences sociales.

IV.2 Loi uniforme discrète**IV.2.1 Définition**

Une variable aléatoire discrète suit une loi uniforme discrète lorsqu'elle peut prendre un nombre fini de valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$, toutes équiprobables, c'est-à-dire avec la même probabilité :

$$P(X = x_i) = \frac{1}{n} \quad \text{pour tout } i = 1, 2, \dots, n$$

Notation :

$$X \sim U(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

IV.2.2 Espérance mathématique

L'espérance de X , notée $E(X)$, est donnée par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P_i = x_1 \cdot P_1 + x_2 \cdot P_2 + \dots + x_n \cdot P_n$$

$$E(X) = x_1 \cdot \frac{1}{n} + x_2 \cdot \frac{1}{n} + \dots + x_n \cdot \frac{1}{n}$$

$$E(X) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

IV.2.3 Variance

La variance de X , notée $V(X)$, est donnée par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^n P_i (x_i - E(x))^2$$

$$V(X) = P_1 (x_1 - E(x))^2 + P_2 (x_2 - E(x))^2 + \dots + P_n (x_n - E(x))^2$$

$$V(X) = \frac{1}{n} (x_1 - E(x))^2 + \frac{1}{n} (x_2 - E(x))^2 + \dots + \frac{1}{n} (x_n - E(x))^2$$

$$V(X) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - (E(x))^2$$

IV.2.4 Écart-type

L'écart-type, noté $\sigma(X)$, est donné par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

IV.2.5 Exemples d'application**IV.2.5.1 Premier exemple****Énoncé**

Soit une variable aléatoire discrète X définie sur les valeurs $x_i = 10, 20, 50$ et 100 , avec $P(X = x_i) = c$ identique pour tout i .

- Déterminer la loi de probabilité, l'espérance et la variance de X .

Corrigé

Puisque toutes les valeurs ont la même probabilité :

$$X \sim U(10, 20, 50, 100)$$

$$P(X = x_i) = c = \frac{1}{n} = \frac{1}{4}$$

Tableau IV.1 : Loi de probabilité d'une variable aléatoire uniforme discrète

$$X \sim U(10, 20, 50, 100)$$

x_i	10	20	50	100
$P_i = P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$E(X) = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{n} = \frac{10 + 20 + 50 + 100}{4}$$

$$E(X) = 45$$

$$V(X) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}{n} - (E(x))^2$$

$$V(X) = \frac{10^2 + 20^2 + 50^2 + 100^2}{4} - (45)^2$$

$$V(X) = 1225$$

Remarque importante : Cas particulier

Dans le cas particulier d'une variable aléatoire X suivant une loi uniforme discrète sur l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$, on écrit :

$$P(X = x_i) = \frac{1}{n}$$

Notation :

$$X \sim U(1, 2, \dots, n)$$

Espérance mathématique :

Soit n un entier naturel non nul et X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$. La variable aléatoire X admet une espérance, égale à $E(X) = \frac{n+1}{2}$

Démonstration de $E(X) = \frac{n+1}{2}$:

Tableau IV.2 : Loi de probabilité d'une variable aléatoire uniforme discrète

$$X \sim U(1, 2, \dots, n)$$

x_i	1	2	...	n
$P_i = P(X = x_i)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$

Comme X prend les valeurs $1, 2, \dots, n$, qui sont en nombre fini, X admet une espérance, qui vaut :

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{n} + 2 \cdot \frac{1}{n} + \dots + n \cdot \frac{1}{n}$$

$$E(X) = \frac{1}{n}(1 + 2 + \dots + n)$$

D'après la somme des premiers termes d'une suite arithmétique :

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$E(X) = \frac{1}{n} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)$$

$$E(X) = \frac{n+1}{2}$$

Variance :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{n} + 2^2 \cdot \frac{1}{n} + \dots + n^2 \cdot \frac{1}{n}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{n}(1^2 + 2^2 + \dots + n^2)$$

Par récurrence :

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(2n^2+3n+1)}{6}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{n} \left(\frac{n(2n^2+3n+1)}{6} \right)$$

$$E(X^2) = \frac{2n^2+3n+1}{6}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2n^2+3n+1}{6} - \left(\frac{n+1}{2} \right)^2$$

$$V(X) = \frac{2n^2+3n+1}{6} - \frac{n^2+2n+1}{4}$$

$$V(X) = \frac{4n^2+6n+2-3n^2-6n-3}{12}$$

$$V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

IV.2.5.2 Deuxième exemple

Énoncé

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme discrète sur l'ensemble $\{1, 2, 3, \dots, n\}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, et telle que l'espérance de X est $E(X) = 8,5$.

- Déterminer la valeur de n .

Corrigé

Détermination de n :

On sait que si $X \sim U(1, 2, \dots, n)$, alors son espérance est :

$$E(X) = \frac{n+1}{2}$$

$$n = (2 \cdot E(X)) - 1 = (2 \cdot 8,5) - 1$$

$$n = 16$$

IV.3 Loi de Bernoulli

IV.3.1 Définition et propriétés

La loi de Bernoulli est une loi de probabilité discrète associée à une épreuve de Bernoulli, c'est-à-dire une expérience aléatoire avec deux issues possibles :

- Succès ;
- Échec.

La probabilité d'obtenir un succès est p , et celle d'obtenir un échec est $q = 1 - p$.

Par convention :

- Succès : $X = 1$;
- Échec : $X = 0$.

Si X est une variable aléatoire discrète suivant une loi de Bernoulli de paramètre p , on note :

$$X \sim B(p)$$

L'ensemble des valeurs prises par X est donné par :

$$X(\Omega) = \{0, 1\}$$

Donc, la loi de Bernoulli est binaire : elle ne prend que deux valeurs 0 et 1.

La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

Tableau IV.3 : Loi de probabilité de la variable aléatoire X suivant une loi de Bernoulli

x_i	0	1
$P_i = P(X = x_i)$	$q = 1 - p$	p

L'espérance d'une variable aléatoire X suivant une loi de Bernoulli est donnée par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^2 x_i \cdot P_i = x_1 \cdot P_1 + x_2 \cdot P_2 = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p$$

$$E(X) = p$$

Cela signifie que l'espérance est égale à la probabilité de succès.

La variance d'une variable aléatoire X suivant une loi de Bernoulli est donnée par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^2 P_i (x_i - E(x))^2 = P_1 (x_1 - E(x))^2 + P_2 (x_2 - E(x))^2$$

$$V(X) = (1 - p) \cdot (0 - p)^2 + p \cdot (1 - p)^2$$

$$V(X) = (1 - p) \cdot p^2 + p \cdot (1 - p)^2$$

$$V(X) = (1 - p) (p^2 + p \cdot (1 - p))$$

$$V(X) = (1 - p) (p^2 + p - p^2)$$

$$V(X) = p \cdot (1 - p)$$

IV.3.2 Exemples d'application

IV.3.2.1 Premier exemple

Énoncé

On lance une pièce de monnaie bien équilibrée. Soit la variable aléatoire X : « Avoir Pile ». Cette expérience aléatoire suit l'épreuve de Bernoulli.

- Donner la loi de probabilité de X .

Corrigé

Définition des paramètres :

- Probabilité de succès (obtenir Pile) : $p = \frac{1}{2}$
- Probabilité d'échec (ne pas obtenir Pile) : $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Donc X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2}$. On écrit :

$$X \sim B\left(\frac{1}{2}\right)$$

Tableau IV.4 : Répartition des probabilités pour avoir « Pile » (Bernoulli $p = \frac{1}{2}$)

x_i	0	1
$P_i = P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Condition de vérification : La somme des probabilités doit être égale à 1 :

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^2 P_i = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

IV.3.2.2 Deuxième exemple

Énoncé

On lance un dé bien équilibré. On note la variable aléatoire X : « Obtenir la face 6 ». Cette expérience aléatoire suit l'épreuve de Bernoulli.

- Donner la loi de probabilité de X .

Corrigé

Définition des paramètres :

- Probabilité de succès (obtenir la face 6) : $p = \frac{1}{6}$
- Probabilité d'échec (ne pas obtenir la face 6) : $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

Ainsi, la variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{6}$. On écrit :

$$X \sim B\left(\frac{1}{6}\right)$$

Tableau IV.5 : Loi de probabilité de X d'un dé équilibré (loi de Bernoulli $B(\frac{1}{6})$)

x_i	0	1
$P_i = P(X = x_i)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

Condition de vérification : La somme des probabilités doit être égale à 1 :

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^2 P_i = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

IV.3.2.3 Troisième exemple

Énoncé

Dans une population, les statistiques ont montré que 43 % des nouveau-nés sont des garçons. On considère la variable aléatoire X : "Le nouveau-né est un garçon".

- Justifier que cette expérience aléatoire correspond bien à une épreuve de Bernoulli.

Corrigé

Une épreuve de Bernoulli répond aux critères suivants :

- Il y a deux issues possibles : succès (le nouveau-né est un garçon) et échec (le nouveau-né est une fille) ;
- Les probabilités sont fixes pour chaque épreuve : $p = 0,43$ (garçon) et $q = 1 - p = 1 - 0,43 = 0,57$ (fille).

X est une variable aléatoire discrète suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,43$, on note :

$$X \sim B(0,43)$$

Tableau IV.6 : Loi de probabilité de X (nouveau-né garçon) - loi de Bernoulli $B(0,43)$

x_i	0	1
$P_i = P(X = x_i)$	0,57	0,43

Condition de vérification : La somme des probabilités doit être égale à 1 :

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^2 P_i = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,57 + 0,43 = 1$$

IV.3.2.4 Quatrième exemple

Énoncé

Soit une urne contenant 5 boules rouges et 6 boules blanches. Soit l'épreuve de Bernoulli : "On tire une boule de l'urne". Cette épreuve sera un succès si la boule tirée est blanche.

- Donner la loi de probabilité.

Corrigé

p : Probabilité de succès (tirer une boule blanche), $p = \frac{6}{11}$, q : Probabilité d'échec (tirer une boule rouge), $q = 1 - p = 1 - \frac{6}{11} = \frac{5}{11}$

X est une variable aléatoire discrète suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{6}{11}$, on note : $X \sim B(\frac{6}{11})$

Tableau IV.7 : Loi de probabilité de X (tirage d'une boule blanche, loi de Bernoulli $B(\frac{6}{11})$)

x_i	0	1
$P_i = P(X = x_i)$	$\frac{5}{11}$	$\frac{6}{11}$

Condition de vérification : La somme des probabilités doit être égale à 1 :

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^2 P_i = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{5}{11} + \frac{6}{11} = \frac{11}{11} = 1$$

IV.4 Loi binomiale

IV.4.1 Quand est-ce qu'on a affaire à une loi binomiale ?

On rencontre une loi binomiale lorsqu'on est dans la situation suivante : on considère une expérience aléatoire élémentaire qui ne possède que deux issues possibles :

- Le succès ;
- L'échec.

Cette expérience est répétée un certain nombre n de fois, dans des conditions identiques et de manière indépendante (c'est-à-dire que le résultat d'une répétition n'influence pas les autres). On appelle cette répétition d'une épreuve de Bernoulli un schéma de Bernoulli.

IV.4.2 Définition de la loi binomiale

La loi binomiale est une loi de probabilité qui décrit le nombre de succès obtenus lors de n répétitions indépendantes d'une même expérience de Bernoulli de paramètre p .

La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit une loi binomiale de paramètres n et p , que l'on note :

$$X \sim B(n, p)$$

n : Nombre de répétitions de l'expérience.

p : Probabilité du succès lors d'une seule répétition.

$q = 1 - p$: Probabilité de l'échec.

Remarques :

La loi binomiale est donc une généralisation de la loi de Bernoulli : Si $n = 1$, la loi binomiale $B(1, p)$ se réduit à une loi de Bernoulli de paramètre p .

Si $X \sim B(n_1, p)$ et $Y \sim B(n_2, p)$, les variables aléatoires X et Y étant indépendantes, alors :

$$X + Y \sim B(n_1 + n_2, p)$$

IV.4.3 Démonstration de la formule

IV.4.3.1 Exemple introductif

Énoncé

On lance une pièce de monnaie non-équilibrée 3 fois. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois d'avoir Pile. La probabilité d'obtenir Pile est de 80 %.

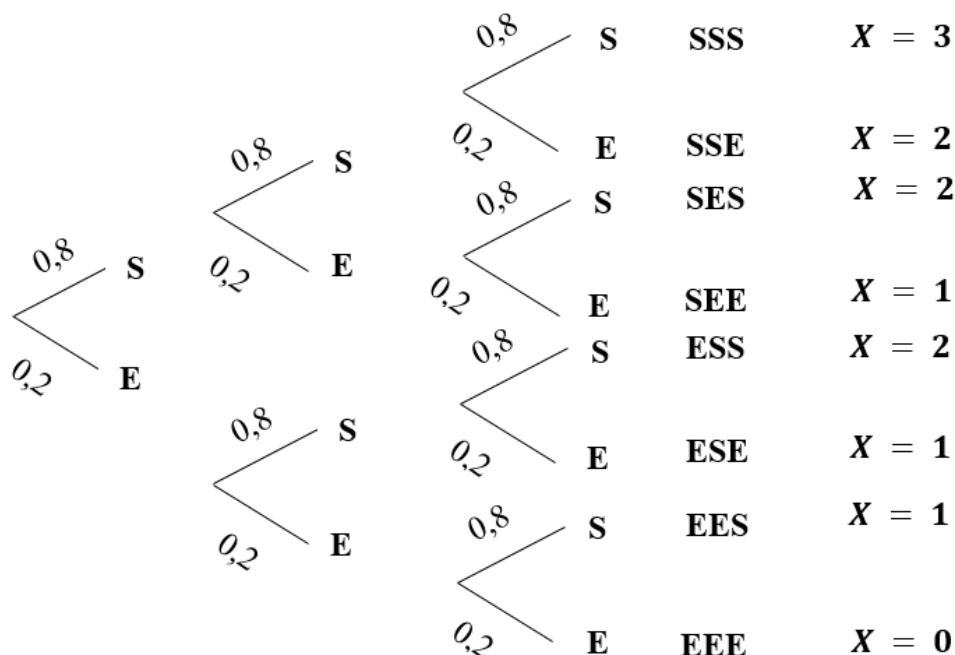


Figure IV.1 : Arbre pondéré du lancer de 3 pièces ($p = 0,8$ pour pile)

- Quelle est la probabilité d'obtenir 3 fois Pile ?

$$P(X = 3) = P(SSS) = 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,8 = 0,8^3 = 0,512$$

- Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 2 fois Pile ?

$$P(X = 2) = P(SSE) + P(SES) + P(ESS) = 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,2 + 0,8 \cdot 0,2 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,8 \cdot 0,8$$

$$P(X = 2) = 3 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2 = 0,384$$

- Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une fois Pile ?

$$P(X = 1) = P(SEE) + P(ESE) + P(EES) = 0,8 \cdot 0,2 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,8 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,8$$

$$P(X = 1) = 3 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8 = 0,096$$

- Quelle est la probabilité de n'obtenir aucun Pile ?

$$P(X = 0) = P(EEE) = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2$$

$$P(X = 0) = 0,2^3 = 0,008$$

Les valeurs possibles de X sont : 0, 1, 2, 3.

Tableau IV.8 : Loi de probabilité associée à une loi binomiale

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,008	0,096	0,384	0,512

Condition de vérification : La somme des probabilités doit être égale à 1 :

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^4 P_i = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$\sum_{i=1}^4 P_i = 0,008 + 0,096 + 0,384 + 0,512 = 1$$

La condition est vérifiée, donc il s'agit bien d'une loi de probabilité.

Généralisation de la formule de la loi binomiale

$$P(X = 2) = 3 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2 = C_3^2 \cdot 0,8^2 \cdot (1 - 0,8)^{3-2}$$

Pour n répétitions indépendantes d'une même épreuve de Bernoulli de paramètre p , la probabilité d'obtenir exactement K succès (et donc $n - K$ échecs) est :

$$P(X = K) = C_n^K \cdot p^K \cdot (1 - p)^{n-K}, \quad K = 0, 1, 2, \dots, n$$

$P(X = K)$: Probabilité d'obtenir K succès.

K : Nombre de succès.

n : Nombre de répétition de l'expérience aléatoire.

C_n^K : Nombre de trajectoires (nombre de chemins) (coefficient binomial).

p : Probabilité du succès.

$1 - p$: Probabilité de l'échec.

$n - K$: Nombre d'échec.

IV.4.4 Espérance mathématique et variance

Si $X \sim B(n, p)$, alors l'espérance mathématique et variance de X sont données par :

$$E(X) = n \cdot p \quad \text{et} \quad V(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

Démonstration :

Espérance mathématique

On peut écrire :

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_k + \dots + X_n$$

Où les X_k sont n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes, avec :

$$X_1 \sim B(p), X_2 \sim B(p), \dots, X_n \sim B(p)$$

Par linéarité de l'espérance :

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_k) + \dots + E(X_n)$$

Or, pour chaque $X_k \sim B(p)$, on a : $E(X_k) = p$

$$\text{Donc : } E(X) = p + p + \dots + p + \dots + p$$

$$E(X) = n \cdot p$$

Variance

Par indépendance des variables aléatoires $(X_k)_{k=1, \dots, n}$:

$$V(X) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_k) + \dots + V(X_n)$$

Or, pour chaque $X_k \sim B(p)$, on a : $V(X_k) = p \cdot (1 - p)$

$$\text{Donc : } V(X) = p \cdot (1 - p) + p \cdot (1 - p) + \dots + p \cdot (1 - p) + \dots + p \cdot (1 - p)$$

$$V(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

IV.4.5 Exemples d'application**IV.4.5.1 Premier exemple****Énoncé**

On lance un dé équilibré quatre fois de suite. On note X la variable aléatoire égale au nombre de faces « 6 » obtenues.

- 1) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
- 2) Calculer la probabilité d'obtenir exactement 4 fois la face 6.
- 3) Calculer la probabilité de n'obtenir jamais la face 6.
- 4) Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois la face 6.

Corrigé

1) Justification :

On définit :

- Succès : Obtenir la face 6 ;

- Échec : Ne pas obtenir la face 6.

On a : $p = \frac{1}{6}$, $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$, $n = 4$.

Comme les 4 lancers sont indépendants, on a :

$$X \sim B(4, \frac{1}{6})$$

2) Calcul de la probabilité d'obtenir exactement 4 fois la face 6 :

$$P(X = K) = C_n^K \cdot p^K \cdot (1 - p)^{n - K}$$

$$P(X = 4) = C_4^4 \cdot (\frac{1}{6})^4 \cdot (1 - \frac{1}{6})^{4 - 4}$$

$$P(X = 4) = 0,00077$$

3) Calcul de la probabilité de n'obtenir jamais la face 6 :

$$P(X = 0) = C_4^0 \cdot (\frac{1}{6})^0 \cdot (1 - \frac{1}{6})^{4 - 0}$$

$$P(X = 0) = 0,482$$

4) Calcul de la probabilité d'obtenir au moins une fois la face 6 :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,482$$

$$P(X \geq 1) = 0,518$$

IV.4.5.2 Deuxième exemple

Énoncé

Un commercial doit rendre visite à 5 clients. Il sait que la probabilité d'obtenir une commande est la même pour tous ses clients et que sa valeur est de 0,2. On admet que la décision de chaque client est indépendante des autres. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de clients qui ont passé une commande.

- 1) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
- 2) Quelle est la probabilité pour le commercial d'obtenir exactement 3 commandes ?
- 3) Quelle est la probabilité pour le commercial de n'obtenir aucune commande ?
- 4) Quelle est la probabilité pour le commercial d'obtenir au moins 2 commandes ?

Corrigé

1) Justification :

On définit :

- Succès : Obtenir une commande ;
- Échec : Ne pas obtenir une commande.

$$p = 0,2, q = 1 - p = 1 - 0,2 = 0,8, n = 5.$$

Comme les 5 expériences aléatoires sont indépendantes, on a :

$$X \sim B(5, 0,2)$$

2) Calcul de la probabilité d'obtenir exactement 3 commandes :

$$P(X = K) = C_n^K \cdot p^K \cdot (1 - p)^{n - K}$$

$$P(X = 3) = C_5^3 \cdot (0,2)^3 \cdot (1 - 0,2)^{5 - 3}$$

$$P(X = 3) = 0,0512$$

3) Calcul de la probabilité d'obtenir aucune commande :

$$P(X = 0) = C_5^0 \cdot (0,2)^0 \cdot (1 - 0,2)^{5 - 0}$$

$$P(X = 0) = 0,3277$$

4) Calcul de la probabilité d'obtenir au moins 2 commandes :

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1))$$

$$\text{Avec : } P(X = 1) = C_5^1 \cdot (0,2)^1 \cdot (1 - 0,2)^{5 - 1} = 0,4096$$

$$P(X \geq 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = 1 - (0,4096 + 0,3277)$$

$$P(X \geq 2) = 0,2627$$

IV.5 Loi de Poisson

IV.5.1 Définition et propriétés

La loi de Poisson est une loi de probabilité discrète, utilisée pour modéliser des événements rares ou peu fréquents. Elle est souvent appliquée dans des situations comme :

- Le nombre de crues importantes causées par des précipitations exceptionnelles dans une région en une année ;
- Le nombre de coupures d'électricité dans une ville en une semaine ;
- Le nombre de clients arrivant dans une station-service en une heure ;
- Le nombre de pannes sur une ligne de production industrielle en une journée ;
- Le nombre de météorites tombant dans une zone spécifique en une année.

La variable aléatoire associée à une loi de Poisson représente le nombre de fois qu'un événement se produit dans un intervalle de temps donné.

Dans une loi de Poisson, on suppose que l'événement se produit en moyenne λ fois durant un intervalle donné.

La loi de Poisson est caractérisée par un seul paramètre $\lambda > 0$, qui correspond à la moyenne ou l'intensité des événements dans l'intervalle considéré.

Si une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre λ , on note :

$$X \sim P(\lambda)$$

La variable aléatoire X prend ses valeurs dans l'ensemble des entiers naturels positifs (y compris 0) :

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, \dots, \infty\} = N$$

La probabilité qu'un événement se produise k fois dans un intervalle donné est donnée par :

$$P(X = K) = \frac{\lambda^K}{K!} e^{-\lambda}$$

Où :

$P(X = K)$: Probabilité que l'événement se produise exactement K fois ;

λ : Moyenne ou intensité de la loi ;

$K \in \mathbb{N}$: Nombre de fois que l'événement se produit ;

e : Base du logarithme naturel (environ $e \approx 2,718$).

Pour une variable aléatoire $X \sim P(\lambda)$, les expressions de l'espérance et de la variance sont données par :

$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

La particularité de la loi de Poisson réside dans le fait que son espérance et sa variance sont égales. Cela reflète la nature des événements rares étudiés avec cette loi, la dispersion des données autour de la moyenne est limitée, car les événements étudiés se produisent peu fréquemment.

Remarque :

Si $X \sim P(\lambda_1)$ et $Y \sim P(\lambda_2)$, les variables aléatoires X et Y étant indépendantes, alors :

$$X + Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$$

La somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson reste une loi de Poisson, dont le paramètre est la somme des paramètres initiaux.

Exemple de la remarque :

Un standard téléphonique reçoit en moyenne 3 appels par heure le matin $X \sim P(3)$ et 4 appels par heure l'après-midi $Y \sim P(4)$.

Si l'on considère le nombre total d'appels reçus pendant une heure, on a :

$$X + Y \sim P(3 + 4) = P(7)$$

IV.5.2 Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson

La loi binomiale dépend de deux paramètres : n (le nombre d'épreuves) et p (la probabilité de succès). En revanche, la loi de Poisson ne dépend que d'un seul paramètre λ , qui représente l'espérance.

Pour qu'une loi binomiale puisse être approximée par une loi de Poisson, ces deux lois doivent avoir la même espérance.

L'espérance de la loi binomiale est donnée par : $E(X) = n \cdot p$

L'espérance de la loi de Poisson est λ .

Ainsi, pour une approximation cohérente, il est nécessaire que : $\lambda = n \cdot p$

Cependant, cette condition n'est pas suffisante. L'approximation est théoriquement valide sous les conditions suivantes :

- n est grand : $n \rightarrow \infty$ où $n \geq 30$
- p est petit : $p \rightarrow 0$ où $p \leq 0,1$
- Le produit $n \cdot p$ reste constant : $n \cdot p < 15$

Si les conditions ci-dessus sont satisfaites, on peut approximer une loi binomiale $B(n, p)$ par une loi de Poisson $P(\lambda)$, où $\lambda = n \cdot p$

On écrit : $B(n, p) \approx P(\lambda)$

Ou encore : $B(n, p) \approx P(n \cdot p)$

La probabilité d'obtenir K succès est alors donnée par la formule de la loi de Poisson :

$$P(X = K) = \frac{\lambda^K}{K!} e^{-\lambda}$$

Avec $\lambda = n \cdot p$

IV.5.3 Exemple d'application

Énoncé

Dans une région, on observe en moyenne 1 pluie torrentielle par mois. Soit X le nombre de pluies torrentielles en un mois.

1) Quelle est la loi de probabilité de X ?

2) Quelle est la probabilité de :

2.a) Ne pas observer de pluie torrentielle ;

2.b) Observer exactement deux pluies torrentielles ;

2.c) Observer trois pluies torrentielles ou plus.

Corrigé

1) Détermination de la loi de probabilité de X :

La variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$, on écrit $X \sim P(1)$, et on a :

$$P(X = K) = \frac{\lambda^K}{K!} e^{-\lambda}$$

$$P(X = K) = \frac{1^k}{k!} e^{-1}$$

2) Calcul de probabilités :

2.a) Ne pas observer de pluie torrentielle :

$$P(X = 0) = \frac{1^0}{0!} e^{-1}$$

$$P(X = 0) = 0,3679$$

2.b) Observer exactement deux pluies torrentielles :

$$P(X = 2) = \frac{1^2}{2!} e^{-1}$$

$$P(X = 2) = 0,1839$$

2.c) Observer trois pluies torrentielles ou plus :

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3)$$

$$P(X \geq 3) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2))$$

$$P(X = 1) = \frac{1^1}{1!} e^{-1} = 0,3679$$

$$P(X \geq 3) = 1 - (0,3679 + 0,3679 + 0,1839)$$

$$P(X \geq 3) = 0,0803$$

IV.6 Loi géométrique

IV.6.1 Définition et propriétés

La loi géométrique est une loi de probabilité discrète associée à une succession d'épreuves de Bernoulli. Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire ayant deux issues possibles, généralement appelées succès et échec, avec une probabilité de succès p ($0 < p < 1$) et une probabilité d'échec $q = 1 - p$.

Dans le cadre de la loi géométrique, les épreuves sont répétées de manière indépendante jusqu'à l'obtention du premier succès.

La variable aléatoire X associée à cette loi est discrète et représente le nombre d'essais nécessaires pour obtenir ce premier succès.

$P(X = K)$: Cette probabilité signifie la probabilité d'avoir le succès dans le $K^{\text{ième}}$ rang.

Exemple : Considérons une urne contenant 10 boules, dont 3 sont vertes et 7 blanches. L'objectif est d'obtenir une boule verte (succès). Si une boule verte est obtenue, l'expérience s'arrête. Sinon, la boule est remise dans l'urne et l'expérience est répétée jusqu'à l'obtention du succès.

- Probabilité de succès : $p = \frac{3}{10} = 0,3$
- Probabilité d'échec : $q = 1 - p = \frac{7}{10} = 0,7$

Soit X la variable aléatoire donnant le rang du premier succès.

Soient les événements suivants :

- V : "Avoir une boule verte" ;
- B : "Avoir une boule blanche".

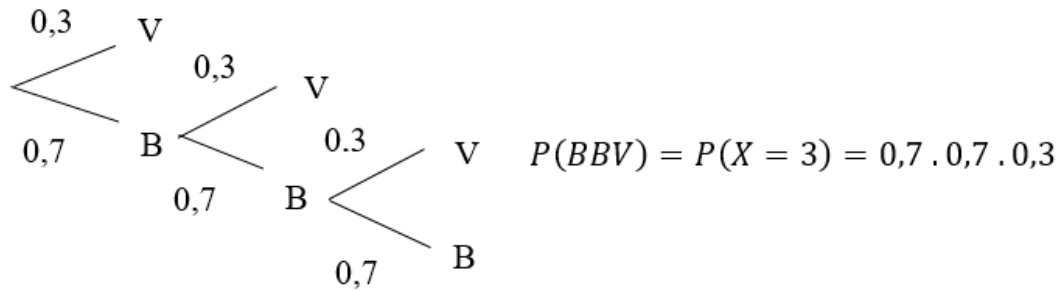


Figure IV.2 : Arbre pondéré des tirages jusqu'à l'obtention du premier succès

- Calcul de $P(X = 3)$:

Pour obtenir le succès au troisième tirage, il faut deux échecs suivis d'un succès.

La probabilité est :

$$P(X = 3) = P(BBV) = 0,7 . 0,7 . 0,3 = 0,147$$

Formule générale de la loi géométrique :

$$P(X = 3) = 0,7 . 0,7 . 0,3 = 0,3 . 0,7^2$$

$$P(X = K) = p . (1 - p)^{K-1}, \quad K \in N^*$$

$P(X = K)$: Probabilité d'obtenir le premier succès au $K^{\text{ième}}$ essai.

K : Rang d'obtention du premier succès.

p : Probabilité de succès.

$1 - p$: Probabilité d'échec.

$K - 1$: Nombre d'échecs avant d'obtenir le succès.

Si X suit une loi géométrique de paramètre p , on note :

$$X \sim G(p)$$

La variable aléatoire X prend ses valeurs dans l'ensemble des entiers naturels strictement positifs :

$$X(\Omega) = \{1, 2, 3, \dots, \infty\} = N^*$$

Pour une variable aléatoire $X \sim G(p)$, les expressions de l'espérance et de la variance sont données par :

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

$$V(X) = \frac{1 - p}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

Démonstration :

Pour $X \sim G(p)$ (loi géométrique avec $p \in (0, 1)$), on a pour $K \geq 1$:

$$P(X = K) = p . (1 - p)^{K-1}$$

Avec $q = 1 - p$. Alors $0 < q < 1$ et $P(X = K) = p \cdot q^{K-1}$

Espérance mathématique :

On écrit :

$$E(X) = \sum_{K=1}^{\infty} K \cdot P(X = K) = p \sum_{K=1}^{\infty} K \cdot q^{K-1}$$

Or, pour $|q| < 1$ la série géométrique et ses dérivées donnent :

$$\sum_{K=0}^{\infty} q^K = \frac{1}{1-q}$$

D'où, en dérivant par rapport à q ,

$$\sum_{K=1}^{\infty} K \cdot q^{K-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

Ainsi

$$E(X) = p \frac{1}{(1-q)^2}$$

Rappelant que $1 - q = p$, on obtient :

$$E(X) = p \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$$

Variance :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Détermination de $E(X^2)$:

On utilise l'identité utile :

$$K^2 = K(K-1) + K$$

Donc :

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{K=1}^{\infty} K^2 \cdot P(X = K) = \sum_{K=1}^{\infty} (K(K-1) + K) \cdot p \cdot q^{K-1} \\ E(X^2) &= p \sum_{K=1}^{\infty} K(K-1) q^{K-1} + p \sum_{K=1}^{\infty} K \cdot q^{K-1} \end{aligned}$$

La deuxième somme est déjà connue :

$$p \sum_{K=1}^{\infty} K \cdot q^{K-1} = E(X) = \frac{1}{p}$$

Pour la première somme, on remarque que :

$$\sum_{K=2}^{\infty} K(K-1) \cdot q^{K-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

En multipliant par q :

$$\sum_{K=2}^{\infty} K(K-1) \cdot q^{K-1} = \frac{2q}{(1-q)^3}$$

Donc :

$$p \sum_{K=1}^{\infty} K(K-1) \cdot q^{K-1} = \frac{2q}{(1-q)^3}$$

En regroupant :

$$E(X^2) = p \cdot \frac{2q}{(1-q)^3} + \frac{1}{p}$$

Remplaçons $q = 1 - p$ et $1 - q = p$:

$$E(X^2) = p \cdot \frac{2(1-p)}{p^3} + \frac{1}{p} = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2(1-p) + p}{p^2} = \frac{2 - 2p + p}{p^2} = \frac{2 - p}{p^2}$$

Enfin la variance :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2-p}{p^2} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{2-p-1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

IV.6.2 Exemple d'application

Énoncé

Une usine fabrique des ampoules. La probabilité qu'une ampoule soit défectueuse est $p = 0,12$. On prélève successivement des ampoules avec remise (tirages indépendants) jusqu'à obtenir la première ampoule défectueuse. On note X le rang du premier succès (première ampoule défectueuse).

- 1) Donner la loi de probabilité de X .
- 2) Calculer $P(X = 4)$.
- 3) Calculer $E(X)$ et $V(X)$. Interpréter.

Corrigé

- 1) Loi de probabilité de X :

La variable aléatoire X représente le nombre d'essais nécessaires pour obtenir la première pièce défectueuse. Cette situation correspond à une loi géométrique de paramètre $p = 0,12$.

$$p = 0,12, q = 1 - p = 0,88$$

Les tirages effectués sont indépendants.

On note : $X \sim G(0,12)$

Et on a :

$$P(X = K) = p \cdot (1 - p)^{K-1}$$

$$P(X = K) = p \cdot q^{K-1}$$

$$P(X = K) = 0,12 \cdot 0,88^{K-1}$$

2) Calcul de $P(X = 4)$:

$$P(X = K) = 0,12 \cdot 0,88^{K-1}$$

$$P(X = 4) = 0,12 \cdot 0,88^3$$

$$P(X = 4) = 0,0818$$

3) Calcul de $E(X)$ et $V(X)$:

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,12} = 8,33 \approx 8 \text{ ampoules}$$

En moyenne, il faut prélever environ 8 ampoules pour observer la première défectueuse.

$$V(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2} = \frac{0,88}{0,12^2} = 61,11$$

La variance élevée indique une dispersion notable autour de cette moyenne (les réalisations individuelles peuvent s'écarter sensiblement).

IV.7 Loi hypergéométrique

IV.7.1 Définition et contexte d'utilisation

La loi hypergéométrique est une loi de probabilité discrète, très proche de la loi binomiale. Comme cette dernière, elle modélise une suite d'épreuves où l'issue de chaque tirage peut être considérée comme un succès ou un échec.

La différence essentielle est la suivante :

- Loi binomiale : tirages avec remise (un même individu peut apparaître plusieurs fois) ;
- Loi hypergéométrique : tirages sans remise (chaque individu ne peut apparaître qu'une seule fois).

Autrement dit, la loi hypergéométrique s'applique dans le cadre d'un tirage exhaustif sans remise. On suppose que :

- La population totale contient N objets ;
- Parmi eux, D possèdent une certaine caractéristique (appelés « succès ») ;
- Les $N - D$ autres ne la possèdent pas ;
- On effectue un tirage sans remise de n objets.

On s'intéresse à la variable aléatoire :

X : « Nombre d'objets ayant la caractéristique parmi les n tirés ».

Alors, on dit que X suit une loi hypergéométrique de paramètres N, D, n , ce que l'on note :

$$X \sim H(N, D, n)$$

On peut également introduire la proportion de succès dans la population :

$$p = \frac{D}{N}$$

Toutefois, contrairement à la loi binomiale, les paramètres usuels de la loi hypergéométrique restent N, D, n , car ce sont des entiers liés au tirage sans remise.

La probabilité d'obtenir exactement K succès dans l'échantillon est donnée par :

$$P(X = K) = \frac{C_D^K \cdot C_{N-D}^{n-K}}{C_N^n}, \quad \text{si } 0 \leq K \leq D \text{ et } 0 \leq n - K \leq N - D$$

C_D^K : Nombre de façons de choisir K individus possédant la propriété (succès).

C_{N-D}^{n-K} : Nombre de façons de choisir les $n - K$ autres parmi ceux qui ne possèdent pas la propriété (échecs).

C_N^n : Nombre total d'échantillons possibles de taille n .

IV.7.2 Espérance mathématique

Soit $X \sim H(N, D, n)$. On a :

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = n \cdot p$$

Avec : $p = \frac{D}{N}$

L'espérance d'une loi hypergéométrique est identique à celle de la loi binomiale $B(n, p)$. Elle ne dépend pas de N , mais uniquement de n et de la proportion p .

IV.7.3 Variance

Contrairement au cas binomial, les variables X_i ne sont pas indépendantes. Ainsi :

$$V(X) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(X_i, X_j)$$

Le premier terme est celui de la loi binomiale :

$$\sum_{i=1}^n V(X_i) = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

Pour la covariance :

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - p^2$$

Or,

$$P(X_j = 1 | X_i = 1) = \frac{D - 1}{N - 1} = \frac{(N \cdot p) - 1}{N - 1}$$

Donc :

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = p \cdot \frac{(N \cdot p) - 1}{N - 1} - p^2$$

Comme il existe $n(n - 1)$ couples (i, j) , on obtient :

$$V(X) = n \cdot p \cdot (1 - p) + n \cdot (n - 1) \left[p \cdot \frac{(N \cdot p) - 1}{N - 1} - p^2 \right]$$

Après simplification, la variance prend la forme compacte :

$$V(X) = n \cdot p \cdot (1 - p) \cdot \frac{N - n}{N - 1}$$

Le facteur correctif $\frac{N - n}{N - 1}$ distingue la loi hypergéométrique de la loi binomiale. Quand $N \rightarrow \infty$ (population très grande par rapport à l'échantillon), ce facteur tend vers 1 et la loi hypergéométrique se rapproche de la loi binomiale.

IV.7.4 Approximation de la loi hypergéométrique par la loi binomiale

Si $X \sim H(N, D, n)$, et sous la condition que la population est très grande ($N \rightarrow \infty$), avec une proportion de succès : $p = \frac{D}{N}$

Alors la loi hypergéométrique peut être approximée par une loi binomiale de paramètres n et p .

On écrit donc :

$$X \sim H(N, D, n) \approx B(n, p)$$

Plus précisément, pour tout $K \in \{0, 1, \dots, \min(D, n)\}$:

$$P(X = K) = \frac{C_D^K \cdot C_{N-D}^{n-K}}{C_N^n}$$

Et lorsque N est très grand :

$$P(X = K) \approx C_n^K \cdot p^K \cdot (1 - p)^{n-K}$$

Conditions pratiques d'application :

- Population « très grande » par rapport à l'échantillon : $\frac{n}{N}$ petit ;
- Règle usuelle : $\frac{n}{N} \leq 5\%$ (plus conservatrice), on admet souvent jusqu'à 10 % ;
- La proportion $p = \frac{D}{N}$ est considérée stable au cours des tirages ;
- Idéalement, D et $N - D$ ne sont pas trop petits (pour éviter les effets de bord) ;
- Sans remise $\rightarrow$ avec remise lorsque $\frac{n}{N}$ est négligeable. On retrouve alors la binomiale ;

- Dans ce régime, le facteur de correction de la variance $\frac{N-n}{N-1}$ est proche de 1, ce qui explique la qualité de l'approximation.

IV.7.5 Exemple d'application

Énoncé

Une urne contient 15 boules dont 9 sont rouges et 6 sont bleues. On tire au hasard 3 boules sans remise. On considère la variable aléatoire X : le nombre de boules rouges obtenues.

- 1) Déterminer la loi de probabilité de X .
- 2) Calculer la probabilité d'obtenir au moins 2 boules rouges.

Corrigé

- 1) La loi de probabilité de X :

On a : $N = 15, D = 9, n = 3$.

$$X \sim H(15, 9, 3)$$

Les valeurs possibles de X sont : 0, 1, 2, 3.

$$P(X = K) = \frac{C_D^K \cdot C_{N-D}^{n-K}}{C_N^n}$$

$$P(X = 0) = \frac{C_9^0 \cdot C_{15-9}^{3-0}}{C_{15}^3} = \frac{C_9^0 \cdot C_6^3}{C_{15}^3} = 0,044$$

$$P(X = 1) = \frac{C_9^1 \cdot C_{15-9}^{3-1}}{C_{15}^3} = \frac{C_9^1 \cdot C_6^2}{C_{15}^3} = 0,2967$$

$$P(X = 2) = \frac{C_9^2 \cdot C_{15-9}^{3-2}}{C_{15}^3} = \frac{C_9^2 \cdot C_6^1}{C_{15}^3} = 0,4747$$

$$P(X = 3) = \frac{C_9^3 \cdot C_{15-9}^{3-3}}{C_{15}^3} = \frac{C_9^3 \cdot C_6^0}{C_{15}^3} = 0,1846$$

Tableau IV.9 : Loi de probabilité pour l'obtention de boules rouges (application de la loi hypergéométrique)

K	0	1	2	3
$P(X = K)$	0,044	0,2967	0,4747	0,1846

Condition de vérification : La somme des probabilités doit être égale à 1 :

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^4 P_i = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$\sum_{i=1}^4 P_i = 0,044 + 0,2967 + 0,4747 + 0,1846 = 1$$

La loi est bien vérifiée.

2) Calcul de la probabilité d'obtenir au moins 2 boules rouges :

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1))$$

$$P(X \geq 2) = 1 - (0,044 + 0,2967) = 0,6593 = 65,93 \%$$

Ou bien :

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = 0,4747 + 0,1846 = 0,6593 = 65,93 \%$$

Exercices corrigés du Chapitre IV
Lois usuelles discrètes

Exercice IV.1 :

Un aventurier se retrouve devant 4 coffres fermés, dont un seul contient un trésor. À chaque tentative infructueuse, le coffre ouvert se révèle vide, et l'aventurier le marque pour ne pas le réessayer. Il continue ses recherches en choisissant au hasard parmi les coffres qu'il n'a pas encore ouverts.

Soit X la variable aléatoire représentant le nombre d'essais nécessaires pour trouver le trésor.

1) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X . Reconnaître cette loi.

2) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Corrigé de l'exercice IV.1 :

1) Détermination de la loi de probabilité de X :

L'aventurier choisit aléatoirement un coffre parmi ceux qu'il n'a pas encore ouverts, et il ne répète jamais un choix déjà effectué. Comme il y a 4 coffres et que le trésor est dans l'un d'eux, la variable aléatoire X , représentant le nombre d'essais nécessaires pour trouver le trésor, peut prendre les valeurs :

$$X \in \{1, 2, 3, 4\}$$

À chaque étape, la probabilité de trouver le trésor parmi les coffres restants est constante (car les choix sont équiprobables parmi les options restantes). Ainsi :

$$P(X = 1) = \frac{1}{4}$$

$$P(X = 2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

$$P(X = 3) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(X = 4) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4}$$

On peut résumer cette loi de probabilité dans le tableau suivant :

Tableau IV.10 : Loi de probabilité du nombre d'essais nécessaires pour découvrir le trésor parmi 4 coffres

x_i	1	2	3	4
$P_i = P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Toutes les valeurs ont la même probabilité, donc la variable aléatoire X suit une loi uniforme discrète sur $\{1, 2, 3, 4\}$, soit :

$$X \sim U(1, 2, 3, 4)$$

2) Calcul de l'espérance et de la variance :

Pour une loi uniforme discrète sur $\{1, 2, \dots, n\}$, on a :

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

On a $n = 4$, donc :

$$E(X) = \frac{n+1}{2} = \frac{4+1}{2}$$

$$E(X) = 2,5$$

$$V(X) = \frac{4^2-1}{12}$$

$$V(X) = 1,25$$

Exercice IV.2 :

Une entreprise organise un jeu-concours dans lequel chaque gagnant reçoit une carte cadeau d'une valeur parmi les montants suivants : 2000 DA, 3000 DA, 5000 DA, 10000 DA, choisis au hasard et avec la même probabilité.

Soit X la variable aléatoire représentant la valeur de la carte reçue par un gagnant.

1) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

2) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X , puis en déduire l'écart-type.

Corrigé de l'exercice IV.2 :

1) Détermination de la loi de probabilité de X :

$$X \sim U(2000, 3000, 5000, 10000)$$

Il y a $n = 4$ valeurs distinctes et toutes équiprobables :

$$P(X = x_i) = \frac{1}{4} \quad \text{Pour tout } i \in \{1, 2, 3, 4\}$$

Tableau IV.11 : Loi de probabilité associée à la valeur aléatoire des cartes cadeaux distribuées

x_i (DA)	2000	3000	5000	10000
$P_i = P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

2) Calcul de l'espérance mathématique et de la variance de X :

Espérance mathématique :

$$E(X) = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{n} = \frac{2000 + 3000 + 5000 + 10000}{4}$$

$$E(X) = 5000 \text{ DA}$$

Variance :

$$V(X) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}{n} - (E(x))^2$$

$$V(X) = \frac{2000^2 + 3000^2 + 5000^2 + 10000^2}{4} - (5000)^2$$

$$V(X) = 9500000 \text{ DA}^2$$

Écart-type

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{9500000}$$

$$\sigma(X) = 3082 \text{ DA}$$

Exercice IV.3 :

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,4$.

- Donner la loi de probabilité de X et calculer $E(X)$.

Corrigé de l'exercice IV.3 :

La variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,4$.

La probabilité de succès est $p = 0,4$, et la probabilité d'échec est $q = 1 - p = 0,6$.

Tableau IV.12 : Loi de probabilité de $X \sim B(0,4)$

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	0,6	0,4

L'espérance d'une loi de Bernoulli est :

$$E(X) = p = 0,4$$

Exercice IV.4 :

Une personne possède cinq cartes de fidélité de magasins différents dans sa poche. Ces cinq cartes ont toutes le même format et sont indiscernables au toucher. Au moment du passage en caisse dans un de ces magasins, il choisit au hasard une carte de fidélité.

- Justifier que cette expérience aléatoire correspond bien à une épreuve de Bernoulli en précisant le succès et la probabilité de celui-ci.

Corrigé de l'exercice IV.4 :

Justification comme épreuve de Bernoulli :

- On définit le succès comme : « la carte choisie est celle du magasin où la personne est en train d'acheter » ;
- L'échec est l'événement complémentaire : « la carte choisie n'est pas celle du magasin en question ».

L'expérience a exactement deux issues (succès / échec) et la personne choisit une carte au hasard parmi les 5 cartes indiscernables.

La probabilité du succès est donc fixe et égale à $p = \frac{1}{5}$

L'épreuve vérifie donc les conditions d'une épreuve de Bernoulli (deux issues, probabilité de succès constante).

On peut donc modéliser la situation par une variable aléatoire X définie par :

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si la carte choisie est la bonne (succès)} \\ 0 & \text{sinon (échec)} \end{cases}$$

Et on écrit :

$$X \sim B\left(\frac{1}{5}\right)$$

Tableau IV.13 : Répartition des probabilités pour le choix d'une carte fidèle (succès $p = \frac{1}{5}$)

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$q = \frac{4}{5}$	$p = \frac{1}{5}$

Exercice IV.5 :

Dans un jeu télévisé, un candidat doit piocher au hasard une boule dans une urne contenant 20 boules indiscernables au toucher dont une seule est noire. Le candidat perd s'il pioche la boule noire.

- Justifier que cette expérience aléatoire corresponde bien à une épreuve de Bernoulli en précisant le succès et la probabilité de celui-ci.

Corrigé de l'exercice IV.5 :

Identification des issues possibles :

- Succès (au sens de la variable aléatoire) : « piocher la boule noire » ;
- Échec : « piocher une boule non noire » (donc l'une des 19 autres boules).

L'expérience a donc deux issues distinctes : succès ou échec.

Probabilité du succès : $p = \frac{1}{20}$

On définit la variable aléatoire X :

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si le candidat pioche la boule noire (succès)} \\ 0 & \text{sinon (échec)} \end{cases}$$

On obtient ainsi :

$$X \sim B\left(\frac{1}{20}\right)$$

Tableau IV.14 : Répartition des probabilités pour le tirage d'une boule dans l'urne
(succès = boule noire)

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$q = \frac{19}{20}$	$p = \frac{1}{20}$

Remarque :

Même si dans l'énoncé on dit que « le candidat perd » s'il pioche la boule noire, on choisit quand même de définir le succès comme « piocher la boule noire » (par convention de la loi de Bernoulli, succès = probabilité p). Le terme succès n'a pas ici de valeur qualitative (gagner / perdre), mais uniquement mathématique.

Exercice IV.6 :

Soit une urne contenant 5 boules vertes et 2 boules rouges, toutes indiscernables au toucher. On extrait une boule au hasard de l'urne. On considère la variable aléatoire X qui représente l'obtention de la boule verte.

- Justifier que cette expérience aléatoire corresponde bien à une épreuve de Bernoulli en déterminant la loi de probabilité de X .

Corrigé de l'exercice IV.6 :

Identification des issues possibles :

- Succès : obtenir une boule verte ;
- Échec : obtenir une boule rouge.

Il y a donc deux issues distinctes, c'est bien une épreuve de Bernoulli.

Calcul de la probabilité du succès :

Nombre de cas favorables (boules vertes) = 5

Nombre total de cas possibles = 5 + 2 = 7

$$p = \frac{5}{7}$$

On définit :

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si on obtient une boule verte (succès)} \\ 0 & \text{si on obtient une boule rouge (échec)} \end{cases}$$

Donc :

$$X \sim B\left(\frac{5}{7}\right)$$

Tableau IV.15 : Loi de probabilité de X (tirage d'une boule verte), $X \sim B(\frac{5}{7})$

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$q = \frac{2}{7}$	$p = \frac{5}{7}$

Exercice IV.7 :

Pour la recherche d'un emploi, une personne envoie sa candidature à 25 entreprises. La probabilité qu'une entreprise lui réponde est de 0,2 et on suppose que ces réponses sont indépendantes.

- Quelle est la probabilité pour que la personne reçoive au moins 5 réponses ?

Corrigé de l'exercice IV.7 :

- Calcul de la probabilité pour recevoir au moins 5 réponses :

$$p = 0,2, q = 1 - p = 1 - 0,2 = 0,8, n = 25.$$

$$\text{Donc : } X \sim B(25, 0,2)$$

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5)$$

$$P(X \geq 5) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4))$$

$$P(X = K) = C_n^K \cdot p^K \cdot (1 - p)^{n - K}$$

$$P(X = 0) = C_{25}^0 \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^{25} = 0,0038$$

$$P(X = 1) = C_{25}^1 \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^{24} = 0,024$$

$$P(X = 2) = C_{25}^2 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^{23} = 0,071$$

$$P(X = 3) = C_{25}^3 \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^{22} = 0,136$$

$$P(X = 4) = C_{25}^4 \cdot 0,2^4 \cdot 0,8^{21} = 0,187$$

$$P(X \geq 5) = 1 - (0,0038 + 0,024 + 0,071 + 0,136 + 0,187)$$

$$P(X \geq 5) = 0,5782 = 57,82 \%$$

Exercice IV.8 :

Un constructeur de composants produit des résistances. La probabilité qu'une résistance soit défectueuse est égale à 0,005. Dans un lot de 1000 résistances, quelle est la probabilité d'avoir :

- 1) Exactement deux résistances défectueuses ?
- 2) Au plus deux résistances défectueuses ?
- 3) Au moins deux résistances défectueuses ?

Corrigé de l'exercice IV.8 :

$$p = 0,005, q = 1 - p = 1 - 0,005 = 0,995, n = 1000.$$

$$\text{Donc : } X \sim B(1000, 0,005)$$

1) Calcul de la probabilité d'avoir exactement deux résistances défectueuses :

$$P(X = K) = C_n^K \cdot p^K \cdot (1 - p)^{n - K}$$

$$P(X = 2) = C_{1000}^2 \cdot 0,005^2 \cdot 0,995^{998} = 0,084 = 8,4 \%$$

2) Calcul de la probabilité d'avoir au plus 2 résistances défectueuses :

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$P(X = 0) = C_{1000}^0 \cdot 0,005^0 \cdot 0,995^{1000} = 0,0067$$

$$P(X = 1) = C_{1000}^1 \cdot 0,005^1 \cdot 0,995^{999} = 0,033$$

$$P(X \leq 2) = 0,0067 + 0,033 + 0,084 = 0,1237 = 12,37 \%$$

3) Calcul de la probabilité d'avoir au moins deux résistances défectueuses :

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = 1 - (0,0067 + 0,033)$$

$$P(X \geq 2) = 0,9603 = 96,03 \%$$

Exercice IV.9 :

Une compagnie aérienne a mis en place pour une de ses lignes un système de sur-réservation afin d'abaisser les coûts. Les réservations ne peuvent se faire qu'auprès d'une agence ou sur le site internet de la compagnie. Sur cette ligne, la compagnie affrète un appareil de 200 places et a vendu 202 réservations. On suppose que le nombre de clients se présentant à l'embarquement peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 202$ et $p = 0,971$.

1) Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire X .

2) Calculer la probabilité que tous les clients se présentent à l'embarquement.

3) Calculer la probabilité qu'un seul client parmi les 202 qui ont réservé ne se présente pas à l'embarquement.

4) En déduire la probabilité que la compagnie se trouve en situation de sur-réservation (c'est-à-dire avec plus de clients qui se présentent à l'embarquement que de places).

Corrigé de l'exercice IV.9 :

$$p = 0,971, q = 1 - p = 1 - 0,971 = 0,029, n = 202.$$

$$\text{Donc : } X \sim B(202, 0,971)$$

1) Calcul de l'espérance et la variance de X :

Espérance :

$$E(X) = n \cdot p = 202 \cdot 0,971$$

$$E(X) = 196,14 \approx 196$$

Variance :

$$V(X) = n \cdot p \cdot (1 - p) = 202 \cdot 0,971 \cdot (1 - 0,971)$$

$$V(X) = 5,69$$

2) Calcul de la probabilité que tous les clients se présentent :

$$P(X = K) = C_n^K \cdot p^K \cdot (1 - p)^{n - K}$$

$$P(X = 202) = C_{202}^{202} \cdot 0,971^{202} \cdot 0,029^0 = 0,0026$$

3) Calcul de la probabilité qu'un seul client ne se présente pas :

$$P(X = 201) = C_{202}^{201} \cdot 0,971^{201} \cdot 0,029^1 = 0,0158$$

4) Calcul de la probabilité d'avoir plus de clients que de place :

$$P(X > 200) = P(X = 201) + P(X = 202) = 0,0158 + 0,0026 = 0,0184$$

Exercice IV.10 :

Une entreprise produit en grande quantité des stylos. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est 0,1. On prélève dans cette production, successivement et avec remise, huit stylos. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de stylos présentant un défaut parmi les huit stylos prélevés.

1) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ?

2) Quelle est la probabilité qu'il n'y a aucun stylo avec un défaut ?

3) Quelle est la probabilité qu'il y a au moins un stylo avec un défaut ?

4) Quelle est la probabilité qu'il y a moins de deux stylos avec un défaut ?

Corrigé de l'exercice IV.10 :

1) Loi de probabilité de X :

Les prélèvements étant indépendants (tirage avec remise) et chaque essai ayant deux issues (défectueux / non-défectueux) avec probabilité de succès $p = 0,1$, la variable X suit une loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = 0,1$.

$$X \sim B(8, 0,1)$$

2) Calcul de la probabilité qu'il n'y ait aucun stylo défectueux :

$$P(X = K) = C_n^K \cdot p^K \cdot (1 - p)^{n - K}$$

$$P(X = 0) = C_8^0 \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^8 = 0,4305 = 43,05 \%$$

3) Calcul de la probabilité qu'il y ait au moins un stylo défectueux :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,4305 = 0,5695 = 56,95 \%$$

4) Calcul de la probabilité qu'il y ait moins de deux stylos défectueux :

$$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1)$$

$$P(X = 1) = C_8^1 \cdot 0,1^1 \cdot 0,9^7 = 0,3826$$

$$P(X < 2) = 0,4305 + 0,3826 = 0,8131 = 81,31 \%$$

Exercice IV.11 :

Une boutique reçoit en moyenne 3 clients par heure. Soit X le nombre de clients arrivant dans l'heure.

1) Quelle est la loi de probabilité de X ?

2) Quelle est la probabilité de recevoir :

2.a) Aucun client ;

2.b) Entre 2 et 5 clients.

Corrigé de l'exercice IV.11 :

1) Détermination de la loi de probabilité de X :

La variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 3$, on écrit $X \sim P(3)$, et on a :

$$P(X = K) = \frac{\lambda^K}{K!} e^{-\lambda}$$

$$P(X = K) = \frac{3^K}{K!} e^{-3}$$

2) Calcul de probabilités :

2.a) Aucun client :

$$P(X = 0) = \frac{3^0}{0!} e^{-3}$$

$$P(X = 0) = 0,0498$$

2.b) Entre 2 et 5 clients :

$$P(2 \leq X \leq 5) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$$

$$P(X = 2) = \frac{3^2}{2!} e^{-3} = 0,224$$

$$P(X = 3) = \frac{3^3}{3!} e^{-3} = 0,224$$

$$P(X = 4) = \frac{3^4}{4!} e^{-3} = 0,168$$

$$P(X = 5) = \frac{3^5}{5!} e^{-3} = 0,1008$$

$$P(2 \leq X \leq 5) = 0,224 + 0,224 + 0,168 + 0,1008$$

$$P(2 \leq X \leq 5) = 0,7168$$

Exercice IV.12 :

Dans une ville, les contrôles des tickets de bus révèlent que 2 % des passagers voyagent sans billet. On considère X la variable aléatoire correspondant au nombre de passagers sans billet dans un bus contenant 150 passagers.

- 1) Quelle est la loi de probabilité de X ?
- 2) Par quelle loi peut-on approximer X ? Justifier votre réponse.
- 3) Quelle est la probabilité qu'aucun passager ne soit sans billet ?
- 4) Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement deux passagers sans billet ?
- 5) Quelle est la probabilité qu'il y ait entre un et trois passagers sans billet inclusivement ?

Corrigé de l'exercice IV.12 :

- 1) La loi de probabilité de X :

Probabilité qu'un passager voyage sans billet : $p = 0,02$

Probabilité qu'un passager ait un billet : $q = 1 - p = 1 - 0,02 = 0,98$

Nombre total de passagers dans le bus : $n = 150$

Les 150 passagers sont indépendants, et chaque contrôle peut être traité comme une expérience de Bernoulli (succès ou échec).

La variable aléatoire X , représentant le nombre de passagers sans billet, suit une loi binomiale de paramètre n et p , on écrit $X \sim B(150, 0,02)$, et on a :

$$P(X = K) = C_n^K \cdot p^K \cdot (1 - p)^{n - K}$$

$$P(X = K) = C_{150}^K \cdot 0,02^K \cdot (0,98)^{150 - K}$$

- 2) La loi de X qui est la loi binomiale peut être approximer par la loi de Poisson, car les conditions ci-dessus sont satisfaites :

- n est grand : $150 \rightarrow \infty$ où $150 > 30$
- p est petit : $0,02 \rightarrow 0$ où $0,02 < 0,1$
- Le produit $n \cdot p$ reste constant : $150 \cdot 0,02 = 3 < 15$

$$\text{Où } \lambda = n \cdot p = 150 \cdot 0,02 = 3$$

$$\text{On écrit : } B(n, p) \approx P(\lambda)$$

$$\text{Ou encore : } B(150, 0,02) \approx P(3)$$

$$P(X = K) = \frac{3^K}{K!} e^{-3}$$

- 3) Probabilité qu'aucun passager ne soit sans billet :

$$P(X = K) = \frac{3^K}{K!} e^{-3}$$

$$P(X = 0) = \frac{3^0}{0!} e^{-3}$$

$$P(X = K) = 0,0498$$

4) Probabilité qu'il y ait exactement deux passagers sans billet :

$$P(X = K) = \frac{3^K}{K!} e^{-3}$$

$$P(X = 2) = \frac{3^2}{2!} e^{-3}$$

$$P(X = K) = 0,224$$

5) Probabilité qu'il y ait entre un et trois passagers sans billet inclusivement :

$$P(1 \leq X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$P(X = 1) = \frac{3^1}{1!} e^{-3} = 0,1494$$

$$P(X = 3) = \frac{3^3}{3!} e^{-3} = 0,224$$

$$P(1 \leq X \leq 3) = 0,1494 + 0,224 + 0,224$$

$$P(1 \leq X \leq 3) = 0,5974$$

Exercice IV.13 :

Dans un call center, on observe qu'un appel sur 50 échoue à être traité correctement. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre d'appels échoués sur un total de 200 appels.

1) Identifier la loi de X et déterminer son espérance et son écart-type.

2) Par quelle loi peut-on approximer X ? Justifiez votre réponse.

3) Quelle est la probabilité qu'aucun appel n'échoue ?

4) Quelle est la probabilité qu'au plus trois appels échouent ?

Corrigé de l'exercice IV.13 :

1) Identification de la loi de X et calcul de son espérance et son écart-type :

$$\text{Probabilité qu'un appel échoue est } p = \frac{1}{50} = 0,02$$

$$\text{Probabilité qu'un appel soit traité correctement est } q = 1 - p = 1 - 0,02 = 0,98$$

$$\text{Nombre total d'appels est } n = 200$$

Les 200 appels sont indépendants, et chaque appel peut être traité comme une expérience de Bernoulli (succès ou échec).

La variable aléatoire X , représentant le nombre d'appels échoués, suit une loi binomiale de paramètre n et p , on écrit $X \sim B(200, 0,02)$, et on a :

$$P(X = K) = C_n^K \cdot p^K \cdot (1 - p)^{n - K}$$

$$P(X = K) = C_{200}^K \cdot 0,02^K \cdot (0,98)^{200 - K}$$

Espérance :

$$E(X) = n \cdot p = 200 \cdot 0,02 = 4$$

Sur un total de 200 appels, on s'attend en moyenne à ce que 4 appels échouent. Cette valeur est utile pour prévoir le nombre moyen d'échecs sur une grande série d'appels.

Variance :

$$V(X) = n \cdot p \cdot (1 - p) = 200 \cdot 0,02 \cdot (1 - 0,02) = 3,92$$

Écart-type :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{3,92} = 1,98 \approx 2$$

Cela indique que le nombre d'appels échoués fluctue typiquement entre 2 appels ($4 - 2$) et 6 appels ($4 + 2$) autour de la moyenne, avec une variabilité modérée.

2) La loi de X qui est la loi binomiale peut être approximer par la loi de Poisson, car les conditions ci-dessus sont satisfaites :

- n est grand : $200 \rightarrow \infty$ où $200 > 30$
- p est petit : $0,02 \rightarrow 0$ où $0,02 < 0,1$
- Le produit $n \cdot p$ reste constant : $200 \cdot 0,02 = 4 < 15$

$$\text{Où } \lambda = n \cdot p = 200 \cdot 0,02 = 4$$

$$\text{On écrit : } B(n, p) \approx P(\lambda)$$

$$\text{Ou encore : } B(200, 0,02) \approx P(4)$$

$$P(X = K) = \frac{4^K}{K!} e^{-4}$$

3) Probabilité qu'aucun appel n'échoue :

$$P(X = 0) = \frac{4^0}{0!} e^{-4}$$

$$P(X = 0) = 0,0183$$

4) Probabilité qu'au plus trois appels échouent :

$$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$P(X = 1) = \frac{4^1}{1!} e^{-4} = 0,0733$$

$$P(X = 2) = \frac{4^2}{2!} e^{-4} = 0,1465$$

$$P(X = 3) = \frac{4^3}{3!} e^{-4} = 0,1954$$

$$P(X \leq 3) = 0,0183 + 0,0733 + 0,1465 + 0,1954$$

$$P(X \leq 3) = 0,4335$$

Exercice IV.14 :

Une machine de production a une probabilité $p = 0,05$ de produire une pièce défectueuse à chaque essai.

- 1) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X , représentant le nombre d'essais nécessaires pour obtenir la première pièce défectueuse ?
- 2) Quelle est la probabilité qu'une pièce défectueuse soit produite pour la première fois au 6^{ème} essai ?
- 3) Quelle est la probabilité qu'il faille au moins 8 essais pour obtenir la première pièce défectueuse ?

Corrigé de l'exercice IV.14 :

- 1) Loi de probabilité de X :

La variable aléatoire X représente le nombre d'essais nécessaires pour obtenir la première pièce défectueuse. Cette situation correspond à une loi géométrique de paramètre $p = 0,05$.

$$p = 0,05, q = 1 - p = 0,95$$

Les expériences aléatoires effectuées sont indépendantes.

$$\text{On note : } X \sim G(0,05)$$

Et on a :

$$P(X = K) = p \cdot (1 - p)^{K-1}$$

$$P(X = K) = p \cdot q^{K-1}$$

$$P(X = K) = 0,05 \cdot 0,95^{K-1}$$

- 2) Probabilité qu'une pièce défectueuse soit produite pour la première fois au 6^{ème} essai :

$$P(X = K) = 0,05 \cdot 0,95^{K-1}$$

$$P(X = 6) = 0,05 \cdot 0,95^{6-1}$$

$$P(X = 6) = 0,0387$$

- 3) Probabilité qu'il faille au moins 8 essais pour obtenir la première pièce défectueuse :

$$P(X \geq 8) = 1 - P(X < 8)$$

$$P(X \geq 8) = 1 - (P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7))$$

$$P(X \geq 8) = 1 - (p \cdot q^0 + p \cdot q^1 + p \cdot q^2 + p \cdot q^3 + p \cdot q^4 + p \cdot q^5 + p \cdot q^6)$$

$$P(X \geq 8) = 1 - p(1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + q^6)$$

D'après la formule de la somme des termes d'une suite géométrique :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + q^6 = \frac{1 - q^7}{1 - q} = \frac{1 - q^7}{p}$$

$$P(X \geq 8) = 1 - p \left(\frac{1 - q^7}{p} \right)$$

$$P(X \geq 8) = 1 - 1 + q^7 = q^7 = 0,95^7 = 0,698$$

Exercice IV.15 :

Une urne contient 5 boules rouges et 15 boules noires. On tire une boule de l'urne. On note la couleur, puis on remet la boule dans l'urne avant de tirer à nouveau.

- 1) Si X est le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule rouge, quelle est la loi de X ?
- 2) Quelle est la probabilité qu'une boule rouge soit obtenue au cinquième tirage ?
- 3) Quelle est la probabilité qu'il faille plus de 10 tirages pour obtenir la première boule rouge ?

Corrigé de l'exercice IV.15 :**1) Loi de X :**

La variable aléatoire représente le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule rouge.

$$p = \frac{5}{20} = 0,25, q = 1 - p = 1 - 0,25 = 0,75 = \frac{15}{20}$$

Les tirages sont indépendants (remise), on est dans le cadre d'une loi géométrique.

On note : $X \sim G(0,25)$

Et on a :

$$P(X = K) = p \cdot (1 - p)^{K-1}$$

$$P(X = K) = p \cdot q^{K-1}$$

$$P(X = K) = 0,25 \cdot 0,75^{K-1}$$

2) Calcul de la probabilité qu'une boule rouge soit obtenue au cinquième tirage :

$$P(X = 5) = 0,25 \cdot 0,75^4$$

$$P(X = 5) = 0,0791$$

3) Calcul de la probabilité qu'il faille plus de 10 tirages pour obtenir la première boule rouge :

$$P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10)$$

$$P(X > 10) = 1 - (P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + \dots + P(X = 10))$$

$$P(X > 10) = 1 - (p \cdot q^0 + p \cdot q^1 + p \cdot q^2 + p \cdot q^3 + \dots + p \cdot q^9)$$

$$P(X > 10) = 1 - p(1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^9)$$

D'après la formule de la somme des termes d'une suite géométrique :

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^9 = \frac{1 - q^{10}}{1 - q} = \frac{1 - q^{10}}{p}$$

$$P(X > 10) = 1 - p \left(\frac{1 - q^{10}}{p} \right)$$

$$P(X > 10) = 1 - 1 + q^{10} = q^{10} = 0,75^{10} = 0,0563$$

Exercice IV.16 :

Un producteur propose 30 variétés de fruits, dont 10 sont labellisées bio. On choisit au hasard 12 variétés différentes (sans remise) pour constituer une sélection. On note X le nombre de variétés bio parmi les 12 sélectionnées.

- 1) Déterminer la loi de probabilité de X .
- 2) Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X .
- 3) Quelle est la probabilité que moins de deux variétés sélectionnées soient bio ?

Corrigé de l'exercice IV.16 :

1) Loi de probabilité de X :

Population totale : $N = 30$.

Nombre de succès dans la population : $D = 10$ (variétés bio).

Taille de l'échantillon : $n = 12$.

$$p = \frac{D}{N} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

On tire sans remise, donc X suit une loi hypergéométrique : $X \sim H(30, 10, 12)$

La loi de probabilité est, pour K admissible :

$$P(X = K) = \frac{C_D^K \cdot C_{N-D}^{n-K}}{C_N^n}$$

2) Calcul de l'espérance mathématique et l'écart-type :

$$E(X) = n \cdot p = 12 \cdot \frac{10}{30} = 4$$

$$V(X) = n \cdot p \cdot (1 - p) \cdot \frac{N - n}{N - 1} = 12 \cdot \frac{10}{30} \cdot \left(1 - \frac{10}{30}\right) \cdot \frac{30 - 12}{30 - 1} = 1,66$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1,66} = 1,29$$

3) Calcul de la probabilité que moins de deux variétés sélectionnées soient bio :

$$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,00146 + 0,01942 = 0,0209 = 2,09 \%$$

$$P(X = 0) = \frac{C_{10}^0 \cdot C_{30-10}^{12-0}}{C_{30}^{12}} = \frac{C_{10}^0 \cdot C_{20}^{12}}{C_{30}^{12}} = 0,00146$$

$$P(X = 1) = \frac{C_{10}^1 \cdot C_{30-10}^{12-1}}{C_{30}^{12}} = \frac{C_{10}^1 \cdot C_{20}^{11}}{C_{30}^{12}} = 0,01942$$

Exercice IV.17 :

Un lot contient 20 ampoules, dont 6 sont défectueuses. On prélève 4 ampoules simultanément (sans remise). On note X le nombre d'ampoules défectueuses dans l'échantillon.

- Calculer les probabilités suivantes :

- 1) Au moins une ampoule défectueuse ;
- 2) Les 4 ampoules sont défectueuses.

Corrigé de l'exercice IV.17 :

Nous avons un tirage sans remise d'un échantillon de taille $n = 4$ dans une population de taille $N = 20$ comportant $D = 6$ succès (ampoules défectueuses).

Donc :

$$X \sim H(20, 6, 4)$$

La loi de probabilité est, pour K admissible :

$$P(X = K) = \frac{C_D^K \cdot C_{N-D}^{n-K}}{C_N^n}$$

- 1) Calcul de la probabilité d'avoir au moins une ampoule défectueuse :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,2066 = 0,7934 = 79,34 \%$$

$$P(X = 0) = \frac{C_6^0 \cdot C_{20-6}^{4-0}}{C_{20}^4} = \frac{C_6^0 \cdot C_{14}^4}{C_{20}^4} = 0,2066$$

- 2) Calcul de la probabilité que les 4 ampoules soient défectueuses :

$$P(X = 4) = \frac{C_6^4 \cdot C_{20-6}^{4-4}}{C_{20}^4} = \frac{C_6^4 \cdot C_{14}^0}{C_{20}^4} = 0,0031 = 0,31 \%$$

Exercice IV.18 :

Dans un lycée de 500 élèves, 350 pratiquent au moins une activité sportive. On choisit au hasard un groupe de 10 élèves. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre d'élèves pratiquant une activité sportive dans l'échantillon.

- 1) Indiquer le type de la loi de probabilité de X .
- 2) Par quelle loi peut-on approcher la loi de X ?
- 3) Calculer $P(X = 7)$ par la loi exacte, puis par la loi approximative.

Corrigé de l'exercice IV.18 :

- 1) Type de loi de probabilité de X :

Population totale : $N = 500$.

Nombre de succès dans la population : $D = 350$.

Taille de l'échantillon : $n = 10$.

$$\text{Proportion : } p = \frac{D}{N} = \frac{350}{500} = \frac{7}{10} = 0,7$$

Comme le tirage se fait sans remise, X suit une loi hypergéométrique :

$$X \sim H(500, 350, 10)$$

2) Loi approximative de X :

$$\text{On a : } \frac{n}{N} = \frac{10}{500} = 2 \% < 5 \%$$

Donc, on peut approximer par une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,7$:

$$X \approx B(10, 0,7)$$

3) Calcul de $P(X = 7)$:

Par la loi exacte (hypergéométrique) :

$$P(X = K) = \frac{C_D^K \cdot C_{N-D}^{n-K}}{C_N^n}$$

$$P(X = 7) = \frac{C_{350}^7 \cdot C_{500-350}^{10-7}}{C_{500}^{10}} = \frac{C_{350}^7 \cdot C_{150}^3}{C_{500}^{10}} = 0,267$$

Par la loi approximative (binomiale) :

$$P(X = K) = C_n^K \cdot p^K \cdot (1-p)^{n-K}$$

$$P(X = 7) = C_{10}^7 \cdot 0,7^7 \cdot (1-0,7)^{10-7} = 0,267$$

Les deux résultats sont très proches (0,267), ce qui confirme la qualité de l'approximation.

Chapitre V Lois usuelles continues

V.1 Introduction

Dans l'étude des phénomènes aléatoires, de nombreuses grandeurs observées prennent leurs valeurs dans un intervalle continu de nombres réels : temps d'attente, durées de vie, mesures physiques (longueur, masse, température), ou encore grandeurs économiques. Pour modéliser ces situations, on utilise des lois de probabilités continues, qui fournissent un cadre mathématique rigoureux permettant d'analyser et de prédire le comportement de ces variables.

L'intérêt de ces lois est double :

- Sur le plan théorique, elles permettent de définir et de calculer des probabilités à partir d'une densité, ainsi que des caractéristiques essentielles comme l'espérance et la variance ;
- Sur le plan pratique, elles constituent des modèles adaptés à de nombreux contextes, facilitant l'interprétation et la prise de décision.

Dans cette partie, quatre lois continues usuelles sont présentées :

- La loi uniforme continue, qui modélise une variable pouvant prendre n'importe quelle valeur dans un intervalle avec la même probabilité. Elle intervient notamment dans les situations d'ignorance totale ou dans la génération de nombres aléatoires ;
- La loi normale, souvent appelée loi de Gauss, qui est la plus importante en statistique. Elle décrit les phénomènes soumis à de multiples petites fluctuations aléatoires et constitue le modèle de référence pour les distributions de mesures ;
- La loi exponentielle, utilisée principalement pour modéliser le temps d'attente avant un événement aléatoire, comme la durée de vie d'un composant ou le temps entre deux arrivées dans un système ;
- La loi gamma, qui généralise la loi exponentielle, permet de modéliser le temps d'attente jusqu'à l'occurrence d'un nombre donné d'événements. Elle est largement utilisée en fiabilité, en hydrologie ou dans l'étude des phénomènes de comptage.

Ainsi, l'étude de ces lois continues constitue une étape essentielle dans l'apprentissage des probabilités, car elles offrent des outils puissants pour modéliser, analyser et interpréter une grande variété de situations réelles.

V.2 Loi uniforme continue

V.2.1 Définition et propriétés

Une variable aléatoire X suit une loi uniforme continue sur l'intervalle $[a, b]$ si sa densité de probabilité est constante sur cet intervalle. Autrement dit, la probabilité que X prenne une valeur dans un sous-intervalle $[x_1, x_2]$ inclus dans $[a, b]$ est proportionnelle à la longueur de cet intervalle :

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

Où $f(x)$ est la fonction de densité définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Vérification que f est bien une densité :

On vérifie que l'aire totale sous la courbe vaut 1 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a 0 dx + \int_a^b \frac{1}{b-a} dx + \int_b^{+\infty} 0 dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b dx = \frac{1}{b-a} [x]_a^b = \frac{b-a}{b-a} = 1$$

Donc, $f(x)$ est bien une densité de probabilité.

La loi uniforme continue exprime que toutes les valeurs de l'intervalle $[a, b]$ sont équiprobables : la densité est répartie de façon uniforme.

Graphiquement, la représentation de $f(x)$ est un rectangle de hauteur $\frac{1}{b-a}$ et de base $b-a$.

La probabilité d'appartenir à un sous-intervalle $[x_1, x_2]$ correspond à l'aire du rectangle compris entre x_1 et x_2 .

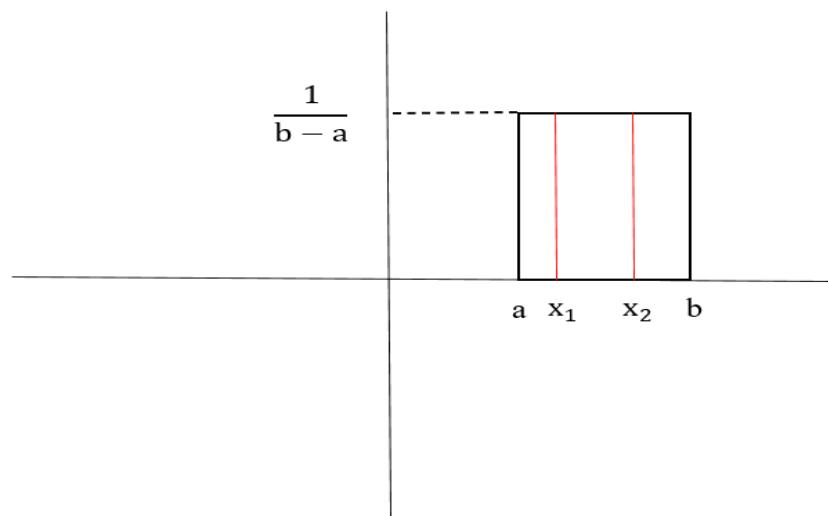


Figure V.1 : Représentation graphique de la densité de la loi uniforme continue sur $[a, b]$

V.2.2 Calcul de probabilité avec la loi uniforme continue

Soit $X \sim U([a, b])$. Pour tout intervalle $[x_1, x_2] \subset [a, b]$, la probabilité est donnée par :

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_{x_1}^{x_2} dx = \frac{1}{b-a} [x]_{x_1}^{x_2} = \frac{x_2 - x_1}{b-a}$$

Ainsi, la probabilité dépend uniquement de la longueur de l'intervalle $[x_1, x_2]$ par rapport à la longueur totale de l'intervalle $[a, b]$.

V.2.3 Fonction de répartition

La fonction de répartition de $X \sim U([a, b])$ est :

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x < b \\ \int_a^b \frac{1}{b-a} dt = 1 & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

V.2.4 Espérance mathématique

$$E(X) = \int_a^b x f(x) dx$$

$$E(X) = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{1}{b-a} \frac{1}{2} [x^2]_a^b = \frac{(b^2 - a^2)}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

V.2.5 Variance

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 f(x) dx = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \frac{1}{3} [x^3]_a^b = \frac{(b^3 - a^3)}{3(b-a)}$$

$$E(X^2) = \frac{(b-a)(a^2 + ab + b^2)}{3(b-a)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

$$V(X) = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = \frac{4a^2 + 4ab + 4b^2 - 3a^2 - 6ab - 3b^2}{12}$$

$$V(X) = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{12} = \frac{(a-b)^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

V.2.6 Exemples d'application

V.2.6.1 Premier exemple

Énoncé

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme continue sur $[0, 4]$.

1) Déterminer la fonction de densité de X .

2) Calculer les probabilités suivantes :

- $P(1 \leq X \leq 3)$

- $P(X \leq 2,5)$
- $P(0,2 \leq X \leq 5)$
- $P(X = 1)$
- $P(X \geq 1)$

3) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X .

Corrigé

1) Détermination de la fonction de densité de X :

La fonction de densité f de la loi uniforme continue sur $[0,4]$ est définie sur R par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4-0} = \frac{1}{4} & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2) Calcul des probabilités :

$$P(1 \leq X \leq 3) = \frac{x_2 - x_1}{b - a} = \frac{3 - 1}{4 - 0} = \frac{2}{4} = 0,5$$

$$P(X \leq 2,5) = \frac{2,5 - 0}{4 - 0} = \frac{2,5}{4} = 0,625$$

$$P(0,2 \leq X \leq 5) = P(0,2 \leq X \leq 4) = \frac{4 - 0,2}{4 - 0} = \frac{3,8}{4} = 0,95$$

$P(X = 1) = 0$, car dans le cas d'un phénomène continue, la probabilité que X prenne une valeur est toujours égale à zéro.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - \left(\frac{1 - 0}{4 - 0}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0,75$$

3) Calcul de l'espérance mathématique et la variance de X :

$$E(X) = \frac{a + b}{2} = \frac{0 + 4}{2} = 2$$

$$V(X) = \frac{(b - a)^2}{12} = \frac{(4 - 0)^2}{12} = \frac{4}{3}$$

V.2.6.2 Deuxième exemple

Énoncé

Soit $X \sim U([10,20])$, calculer les probabilités suivantes : $P(X > 13)$ et $P(13 \leq X \leq 16)$.

Corrigé

$$P(X > 13) = 1 - P(X \leq 13) = 1 - \left(\frac{13-10}{20-10}\right) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$$

$$\text{Ou bien } P(X > 13) = \frac{20 - 13}{20 - 10} = \frac{7}{10}$$

$$P(13 \leq X \leq 16) = \frac{16 - 13}{20 - 10} = \frac{3}{10}$$

V.3 Loi normale**V.3.1 Introduction**

La loi normale, également appelée loi de Gauss en l'honneur du mathématicien allemand Carl Friedrich Gauss, est l'une des lois de probabilité les plus répandues et les plus utiles en statistique. Elle est particulièrement adaptée à l'analyse des variables aléatoires continues et intervient dans de nombreux domaines scientifiques.

La loi normale est utilisée lorsque l'on cherche à calculer des probabilités associées à des intervalles pour des variables aléatoires continues, contrairement aux lois discrètes, qui ne s'appliquent qu'à des valeurs spécifiques. Elle permet ainsi de combler les limitations des lois de probabilité pour les variables discrètes et offre un cadre mathématique puissant pour étudier des phénomènes naturels ou sociaux.

V.3.2 Caractéristiques de la loi normale

La loi normale est une distribution continue et symétrique en forme de cloche. Elle est centrée sur sa moyenne, avec une décroissance progressive de part et d'autre.

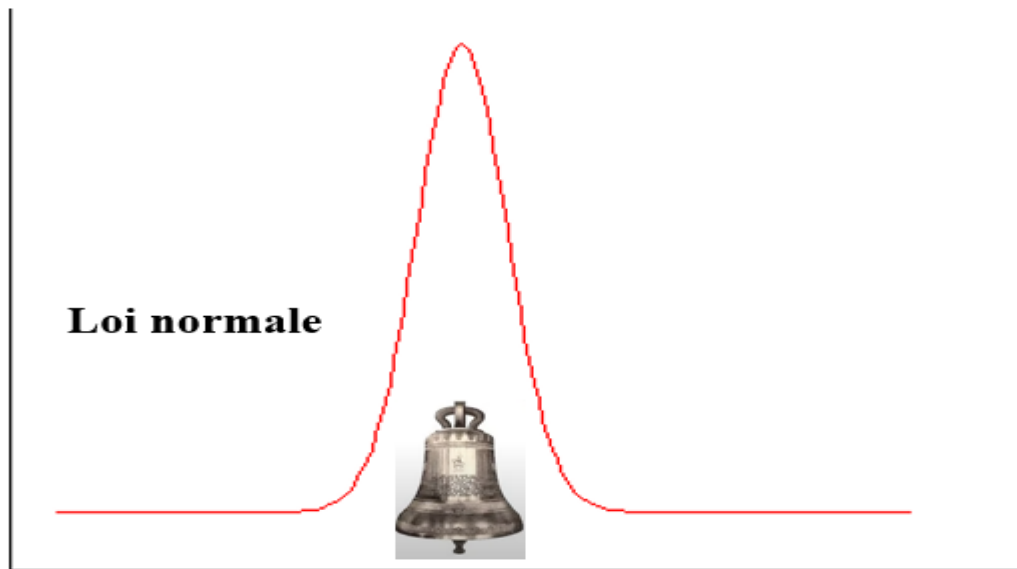


Figure V.2 : Visualisation de la loi normale en forme de cloche

Paramètres :

La loi normale est définie par deux paramètres :

- m (Moyenne) : elle détermine la position centrale de la courbe ;
- σ (Écart-type) : il mesure la dispersion des valeurs autour de la moyenne.

On note qu'une variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne m et d'écart-type σ par :

$$X \sim N(m, \sigma)$$

Expression mathématique :

La fonction de densité de probabilité de la loi normale est donnée par la formule :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2 \cdot \pi}} e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Cette formule décrit la probabilité relative d'une variable continue X prenant une valeur x .

L'espérance et la variance de la loi normale sont données par les formules suivantes :

- Espérance : $E(X) = m$
- Variance : $V(X) = \sigma^2$

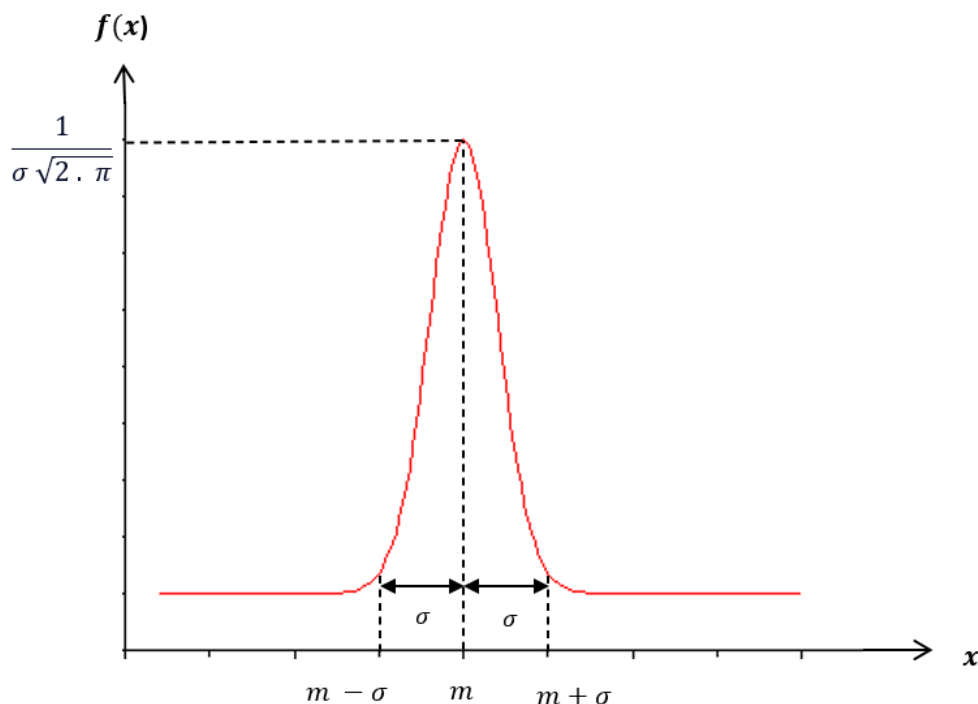


Figure V.3 : Positionnement des paramètres de la loi normale : moyenne et écart-type

Pour comprendre la logique de la courbe de la loi normale, il est essentiel de s'appuyer sur les propriétés suivantes :

$$P(X < m) = 0,5 = 50 \%$$

$$P(X > m) = 0,5 = 50 \%$$

$$P(X < a) = 1 - P(X > a)$$

$$P(X > b) = 1 - P(X < b)$$

$$P(a < X < b) = 1 - (P(X < a) + P(X > b))$$

Ou bien :

$$P(a < X < b) = P(X < b) - P(X < a)$$

$$P(X = a) = 0$$

$$P(X \leq a) = P(X < a)$$

$$P(X \geq b) = P(X > b)$$

Ces propriétés s'appuient sur le fait que la loi normale est une distribution continue dont la densité de probabilité vérifie :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma \sqrt{2 \cdot \pi}} e^{\frac{-1}{2} \cdot (\frac{x-m}{\sigma})^2} dx = 1$$

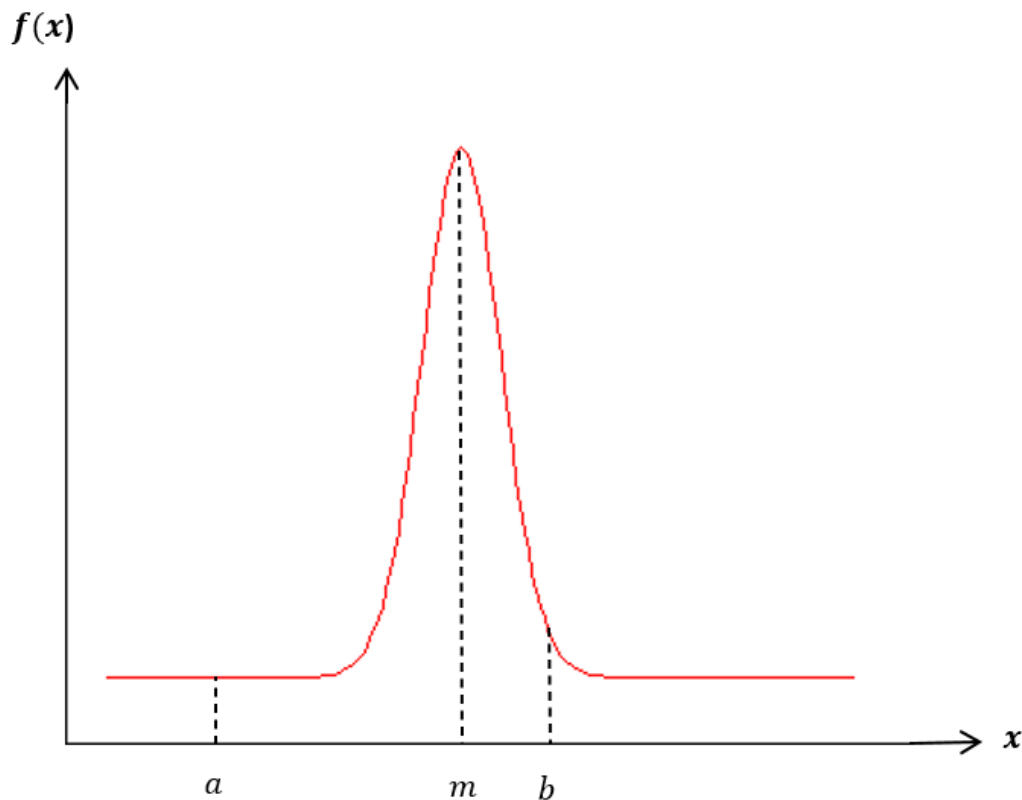


Figure V.4 : Représentation graphique des probabilités pour les variables a, b et m sur la courbe de la loi normale

V.3.3 Passage à un modèle standard : Loi normale centrée réduite

La loi normale est caractérisée par deux paramètres : la moyenne m et l'écart-type σ , qui peuvent varier selon les situations. Puisque la moyenne et l'écart-type ne sont pas fixes, chaque cas nécessiterait une courbe spécifique. Afin de faciliter les calculs et d'uniformiser les interprétations, Carl Friedrich Gauss a introduit un modèle standard appelé loi normale centrée réduite.

Dans ce modèle :

- La moyenne m est fixée à 0 ;
- L'écart-type σ est fixé à 1.

Cela permet de standardiser n'importe quelle loi normale grâce à une transformation simple :

$$T = \frac{X - m}{\sigma}$$

Ainsi :

Si $X \sim N(m, \sigma)$, alors $T \sim N(0, 1)$.

Pour une loi normale générale $X \sim N(m, \sigma)$, la densité de probabilité est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2 \cdot \pi}} e^{\frac{-1}{2} \cdot \left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Pour la loi normale centrée réduite $T \sim N(0, 1)$, la densité devient :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} e^{\frac{-1}{2} \cdot x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Exemple d'application : Passage de X à T

Soit $X \sim N(100, 120)$. On cherche $P(X < 20)$.

$$P(X < 20) = P\left(T < \frac{x-m}{\sigma}\right) = P\left(T < \frac{20-100}{120}\right) = P(T < -0,67)$$

La valeur de $P(T < -0,67)$ peut ensuite être obtenue à partir d'une table de la loi normale centrée réduite.

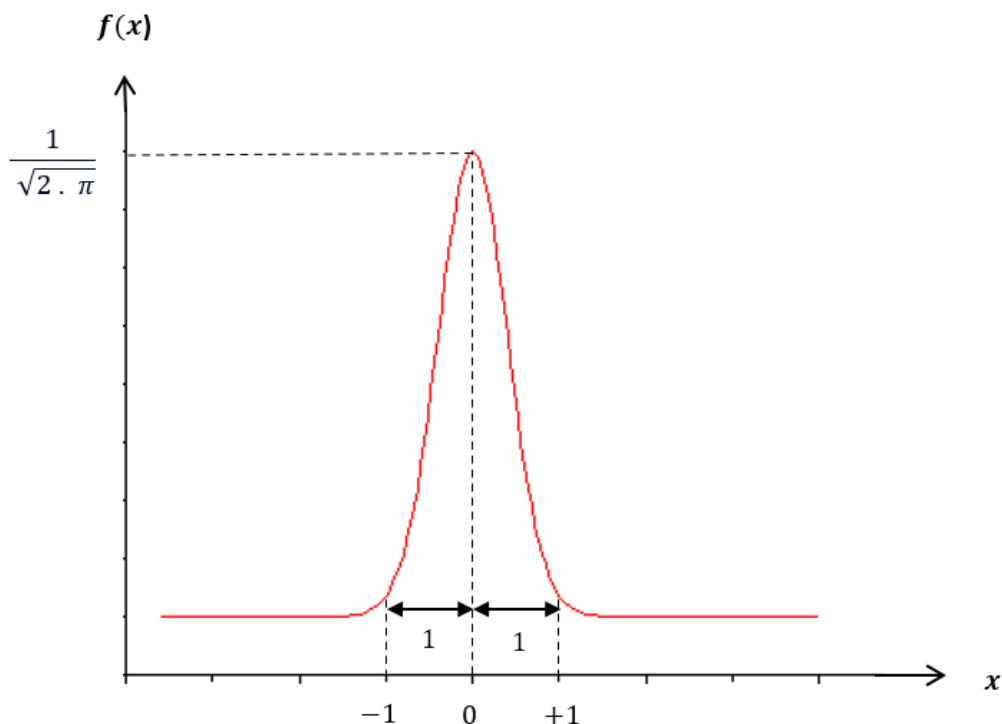


Figure V.5 : Représentation de la loi normale centrée réduite avec la moyenne (0) et l'écart-type (1)

V.3.4 Lecture des probabilités à l'aide de la table de la loi normale centrée réduite

Lorsqu'une variable aléatoire continue suit une loi normale $X \sim N(m, \sigma)$, on peut la transformer en une loi normale centrée réduite grâce à la relation :

$$T = \frac{X - m}{\sigma}, \text{ avec } T \sim N(0, 1)$$

La table de la loi normale centrée réduite est conçue pour donner les probabilités de la forme $P(T < a)$, où $0 \leq a \leq 4$.

Lecture de la table :

- Première colonne : indique le premier chiffre après la virgule ;
- Première ligne : indique le second chiffre après la virgule.

Propriétés et exemples :

Propriété 1 : $P(T > a) = 1 - P(T < a)$

$$P(T < 1,96) = 0,975$$

$$P(T < 3,17) = 0,99924$$

$$P(T > 1,96) = 1 - P(T < 1,96) = 1 - 0,975 = 0,025$$

Propriété 2 : $P(T < -a) = P(T > a) = 1 - P(T < a)$

$$P(T < -1,96) = P(T > 1,96) = 1 - P(T < 1,96) = 1 - 0,975 = 0,025$$

$$P(T < -1,5) = P(T > 1,5) = 1 - P(T < 1,5) = 1 - 0,93319 = 0,06681$$

Propriété 3 : $P(T > -a) = P(T < a)$

$$P(T > -1,5) = 1 - P(T < -1,5) = 1 - P(T > 1,5) = 1 - (1 - P(T < 1,5))$$

$$P(T > -1,5) = 1 - (1 - 0,93319) = 0,93319 = P(T < 1,5)$$

Propriété 4 : $P(a < T < b) = P(T < b) - P(T < a)$

$$P(-1 < T < 0,67) = P(T < 0,67) - P(T < -1) = P(T < 0,67) - P(T > 1)$$

$$P(-1 < T < 0,67) = P(T < 0,67) - (1 - P(T < 1)) = 0,74857 - (1 - 0,84134)$$

$$P(-1 < T < 0,67) = 0,58991$$

V.3.5 Approximation de la loi binomiale par la loi normale

La loi binomiale n'est pas toujours simple d'utilisation. Par exemple, si l'on cherche à calculer $P(X < 100)$, on doit additionner :

$$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + \dots + P(X = 99)$$

Ce qui représente 100 calculs en tout. En revanche, $P(X < 100)$ peut être obtenu beaucoup plus rapidement par lecture dans les tables de la loi normale centrée réduite. Il est donc naturel de chercher une approximation de la loi binomiale par la loi normale.

Conditions d'approximation :

On considère que la loi binomiale de paramètres (n, p) peut être approximée par une loi normale de moyenne $m = n \cdot p$ et d'écart-type $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$, lorsque les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} n \geq 30 \\ n \cdot p \geq 5 \\ n \cdot (1 - p) \geq 5 \end{cases}$$

Autrement dit, n doit être suffisamment grand et p ne doit pas être trop proche de 0 ou de 1.

Correction de continuité :

La correction de continuité s'applique lorsqu'on approche une loi discrète (la binomiale) par une loi continue (la normale). Elle consiste à ajuster les bornes de probabilité de 0,5 unité :

- Pour une probabilité ponctuelle :

$$P(X = K) \rightarrow P(K - 0,5 < X < K + 0,5)$$

- Pour une probabilité d'intervalle fermé :

$$P(a \leq X \leq b) \rightarrow P(a - 0,5 < X < b + 0,5)$$

- Pour une probabilité d'intervalle strict :

$$P(a < X < b) \rightarrow P(a + 0,5 < X < b - 0,5)$$

V.4 Loi exponentielle**V.4.1 Définition et propriétés**

La fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Avec $\lambda > 0$, est une densité de probabilité.

Dire qu'une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, signifie que sa densité de probabilité est donnée par la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note alors :

$$X \sim \varepsilon(\lambda)$$

Vérification que f est une densité :

La fonction f est positive sur $[0 ; +\infty[$, et vérifie la propriété :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = 0 + \left[\lambda \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_0^{+\infty} = [e^{-\lambda x}]_{+\infty}^0 = e^0 - e^{-\infty}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 - 0 = 1$$

Ainsi, f est bien une densité de probabilité.

V.4.2 Fonction de répartition

Soit $X \sim \varepsilon(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.

Sa fonction de répartition $F(x)$ est définie par :

$$F(X) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

Étant donné que la densité est nulle pour $t < 0$, on distingue deux cas :

- Cas 1 : $x < 0$

$$F(X) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$$

- Cas 2 : $x \geq 0$

$$F(X) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt$$

$$F(X) = 0 + \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt$$

$$F(X) = \left[\lambda \frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda} \right]_0^x = [e^{-\lambda t}]_0^x = e^0 - e^{-\lambda x} = 1 - e^{-\lambda x}$$

La fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre λ s'écrit :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

V.4.3 Espérance mathématique

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire continue X de densité $f(x)$ est définie par :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Dans le cas de la loi exponentielle $X \sim \varepsilon(\lambda)$, on a :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$E(X) = 0 + \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx$$

Pour $\int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx$, on utilise l'intégration par partie en utilisant cette formule :

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

On pose : $v(x) = x$ et $u'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

On aura donc : $v'(x) = 1$ et $u(x) = \lambda \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}$

$$\int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = [-x e^{-\lambda x}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-\lambda x}$$

$$\int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = [x e^{-\lambda x}]_{+\infty}^0 + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}$$

$$\int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = 0 + \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_0^{+\infty} = \left[\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \right]_{+\infty}^0 = \frac{1}{\lambda} - 0 = \frac{1}{\lambda}$$

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

L'espérance de la loi exponentielle de paramètre λ est :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

V.4.4 Variance

Soit $X \sim \varepsilon(\lambda)$, avec $\lambda > 0$.

La variance de X est donnée par :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^0 x^2 0 dx + \int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = 0 + \int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx$$

Pour $\int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx$, on utilise l'intégration par partie en utilisant cette formule :

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

On pose : $v(x) = x^2$ et $u'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

On aura donc : $v'(x) = 2x$ et $u(x) = \lambda \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}$

$$\int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = [-x^2 e^{-\lambda x}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -2x e^{-\lambda x}$$

$$\int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = [x^2 e^{-\lambda x}]_{+\infty}^0 + 2 \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x}$$

$$\int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = 0 + 2 \frac{E(X)}{\lambda} = 2 \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{2-1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

La variance de la loi exponentielle de paramètre λ est :

$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

V.4.5 Calcul de la probabilité $P(a \leq X \leq b)$

Soit $X \sim \varepsilon(\lambda)$, avec $\lambda > 0$.

La densité de X est donnée par :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

La probabilité $P(a \leq X \leq b)$ représente l'aire hachurée sous la courbe de densité $f(x)$ entre $x = a$ et $x = b$, comme illustré dans la figure V.6.

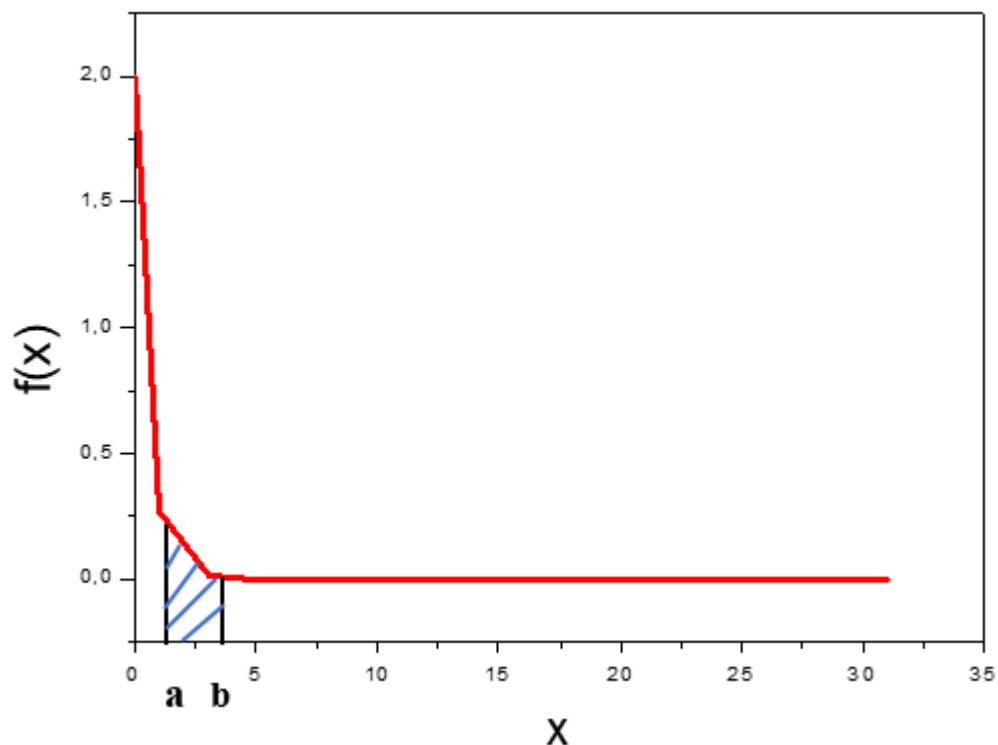


Figure V.6 : Aire représentant la probabilité $P(a \leq X \leq b)$ sous la courbe de densité d'une loi exponentielle

Cette probabilité se calcule à l'aide de l'intégrale suivante :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[\lambda \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_a^b = [-e^{-\lambda x}]_a^b = [e^{-\lambda x}]_b^a = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

Formule générale :

$$P(a \leq X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

Cas particuliers utiles

- Probabilité inférieure à une valeur :

$$P(X \leq a) = P(0 \leq X \leq a) = e^{-\lambda(0)} - e^{-\lambda a} = 1 - e^{-\lambda a}$$

- Probabilité supérieure à une valeur :

$$P(X \geq a) = 1 - P(X < a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - P(0 \leq X \leq a) = 1 - (1 - e^{-\lambda a})$$

$$P(X \geq a) = 1 - 1 + e^{-\lambda a} = e^{-\lambda a}$$

V.4.6 Exemple d'application**Énoncé**

Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ . On sait que $P(X \leq 800) = 0,45$.

- 1) Déterminer la valeur exacte de λ , puis en donner une valeur approchée à 10^{-5} près.
- 2) Dans cette question, on admet que $\lambda = 0,00075$. Déterminer une valeur approchée de $P(X \geq 300)$ à 10^{-5} près.

Corrigé

- 1) Détermination de la valeur exacte de λ :

$$P(X \leq 800) = 0,45 \quad \text{Donc } P(0 \leq X \leq 800) = 0,45$$

$$P(0 \leq X \leq 800) = e^{-\lambda(0)} - e^{-\lambda \cdot (800)} = 0,45$$

$$e^{-\lambda(0)} - e^{-\lambda \cdot (800)} = 0,45$$

$$1 - e^{-\lambda \cdot (800)} = 0,45$$

$$e^{-\lambda \cdot (800)} = 0,55$$

$$-800\lambda = \ln(0,55)$$

$$\lambda = \frac{\ln(0,55)}{-800}$$

$$\lambda = 0,00075$$

- 2) Calcul de la probabilité $P(X \geq 300)$:

$$P(X \geq 300) = 1 - P(X < 300) = 1 - P(X \leq 300) = 1 - P(0 \leq X \leq 300)$$

$$P(X \geq 300) = 1 - (e^{-\lambda(0)} - e^{-\lambda(300)}) = 1 - (e^{-0,00075(0)} - e^{-0,00075(300)})$$

$$P(X \geq 300) = 0,79852$$

V.5 Loi gamma**V.5.1 Définition**

La fonction gamma est définie pour tout réel $n > 0$ par :

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

V.5.2 Propriété fondamentale

On montre que :

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

Et en particulier, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\Gamma(n+1) = n!$$

V.5.3 Démonstration

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$$

Pour le calcul de $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$, on utilise l'intégration par parties :

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

On pose : $v(x) = x^n$ et $u'(x) = e^{-x}$

Donc, on aura : $v'(x) = nx^{n-1}$ et $u(x) = -e^{-x}$

$$\Gamma(n+1) = [-x^n e^{-x}]_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

$$\Gamma(n+1) = [-x^n e^{-x}]_0^{+\infty} + n\Gamma(n)$$

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} [-x^n e^{-x}]_0^a = \lim_{a \rightarrow +\infty} [-a^n e^{-a}] = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[\frac{-a^n}{e^a} \right] = \frac{\infty}{\infty} \text{ est une forme indéterminée.}$$

D'après l'application de façon successive de la règle de l'hôpital qui consiste à dériver ce terme $\left[\frac{-a^n}{e^a} \right]$ par rapport à a n fois.

$$\left(\frac{-a^n}{e^a} \right)' = \frac{-na^{n-1}}{e^a}$$

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \left[\frac{-na^{n-1}}{e^a} \right] = \text{Forme indéterminée}$$

$$\left(\frac{-na^{n-1}}{e^a} \right)' = \frac{-n(n-1)a^{n-2}}{e^a}$$

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \left[\frac{-n(n-1)a^{n-2}}{e^a} \right] = \text{Forme indéterminée}$$

$$\left(\frac{-n(n-1)a^{n-2}}{e^a} \right)' = \frac{-n(n-1)(n-2)a^{n-3}}{e^a}$$

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \left[\frac{-n(n-1)(n-2)a^{n-3}}{e^a} \right] = \text{Forme indéterminée}$$

On peut déduire que :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \left[\frac{-a^n}{e^a} \right] = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[\frac{-n!}{e^a} \right] = 0$$

$$\Gamma(n+1) = [-x^n e^{-x}]_0^{+\infty} + n\Gamma(n)$$

$$\Gamma(n+1) = 0 + n\Gamma(n)$$

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$$

$$\Gamma(n-1) = (n-2)\Gamma(n-2)$$

On peut déduire que :

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)(n-2) \dots \dots \dots$$

Donc :

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Exemples :

$$\Gamma(3) = 2! = 2$$

$$\Gamma(6) = 5! = 120$$

Montrant que : $0! = 1$

$$\Gamma(1) = 0!$$

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} x^{1-1} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^0 e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} 1 e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^{+\infty} = [e^{-x}]_{+\infty}^0 = [e^0 - e^{-\infty}] = [1 - 0] = 1$$

$$\text{Donc : } \Gamma(1) = 1 \quad \text{et} \quad 0! = 1$$

$$\text{De plus, on a : } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}$$

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(0) = \frac{\Gamma(1)}{0} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\Gamma(-1) = \frac{\Gamma(0)}{-1} = \frac{\infty}{-1} = -\infty$$

Exemple : Calculer cette intégrale : $\int_0^{\infty} x^6 e^{-2x} dx$

On pose : $2x = t$

$$\text{Donc : } x = \frac{t}{2} \quad \text{et} \quad dx = \frac{dt}{2}$$

$$\int_0^{\infty} x^6 e^{-2x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left(\frac{t}{2}\right)^6 e^{-t} dt = \frac{1}{2^7} \int_0^{\infty} t^6 e^{-t} dt = \frac{1}{2^7} \Gamma(7) = \frac{1}{2^7} 6! = 5,625$$

V.5.4 Fonction de densité

Une variable aléatoire continue X suit une loi gamma de paramètres n et λ ($n > 0$, $\lambda > 0$) si sa fonction de densité est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{n-1}}{\Gamma(n)} \lambda^n e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note :

$$X \sim \Gamma(n, \lambda)$$

V.5.5 Espérance mathématique

Par définition :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Dans le cas de $X \sim \Gamma(n, \lambda)$, on a :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{+\infty} x \frac{x^{n-1}}{\Gamma(n)} \lambda^n e^{-\lambda x} dx$$

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x \frac{x^{n-1}}{\Gamma(n)} \lambda^n e^{-\lambda x} dx$$

$$E(X) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} x^n dx$$

En utilisant le changement de variable $y = \lambda x, dy = \lambda dx$, on trouve :

$$E(X) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \int_0^{+\infty} e^{-y} \left(\frac{y}{\lambda}\right)^n \frac{dy}{\lambda}$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda \Gamma(n)} \int_0^{+\infty} e^{-y} y^n dy$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda \Gamma(n)} \Gamma(n+1)$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda \Gamma(n)} n \Gamma(n)$$

$$E(X) = \frac{n}{\lambda}$$

L'espérance de la loi gamma de paramètres n et λ est :

$$E(X) = \frac{n}{\lambda}$$

V.5.6 Variance

On a :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^0 x^2 0 dx + \int_0^{+\infty} x^2 \frac{x^{n-1}}{\Gamma(n)} \lambda^n e^{-\lambda x} dx$$

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 \frac{x^{n-1}}{\Gamma(n)} \lambda^n e^{-\lambda x} dx$$

$$E(X^2) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} x^{n+1} dx$$

En utilisant le changement de variable $y = \lambda x, dy = \lambda dx$, on trouve :

$$E(X^2) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \int_0^{+\infty} e^{-y} \left(\frac{y}{\lambda}\right)^{n+1} \frac{dy}{\lambda}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{\lambda^2 \Gamma(n)} \int_0^{+\infty} e^{-y} y^{n+1} dy$$

$$E(X^2) = \frac{1}{\lambda^2 \Gamma(n)} \Gamma(n+2)$$

$$E(X^2) = \frac{1}{\lambda^2 \Gamma(n)} n(n+1) \Gamma(n)$$

$$E(X^2) = \frac{n(n+1)}{\lambda^2}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{n(n+1)}{\lambda^2} - \left(\frac{n}{\lambda}\right)^2 = \frac{n^2+n-n^2}{\lambda^2}$$

$$V(X) = \frac{n}{\lambda^2}$$

La variance de la loi gamma de paramètres n et λ est :

$$V(X) = \frac{n}{\lambda^2}$$

Remarques :

Pour $n = 1$, on retrouve la loi exponentielle :

$$\Gamma(1, \lambda) = \varepsilon(\lambda)$$

Si $X \sim \Gamma(n_1, \lambda)$ et $Y \sim \Gamma(n_2, \lambda)$ sont indépendantes, alors :

$$X + Y \sim \Gamma(n_1 + n_2, \lambda)$$

V.5.7 Exemple d'application

Énoncé

Soit $X \sim \Gamma(2, 1)$.

1) Donner la densité $f(x)$.

2) Calculer la probabilité : $P(X \leq 1)$

Corrigé

1) Détermination de la densité $f(x)$:

Pour $X \sim \Gamma(n, \lambda)$, avec $n > 0$ et $\lambda > 0$, la densité est :

$$f(x) = \frac{x^{n-1}}{\Gamma(n)} \lambda^n e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

Pour $n = 2$ et $\lambda = 1$

Donc :

$$f(x) = \frac{x^{(2-1)}}{\Gamma(2)} (1)^2 e^{-1x} = \frac{x}{1!} e^{-x} = x e^{-x}, \quad x > 0$$

$$f(x) = x e^{-x}, \quad x > 0$$

2) Calcul de la probabilité $P(X \leq 1)$:

$$P(X \leq 1) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x e^{-x} dx$$

On utilise l'intégration par parties : $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$

On pose : $v(x) = x$ et $u'(x) = e^{-x}$

Donc, on aura : $v'(x) = 1$ et $u(x) = -e^{-x}$

$$P(X \leq 1) = \int_0^1 x e^{-x} dx = [-x e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx$$

$$P(X \leq 1) = \int_0^1 x e^{-x} dx = ((-1)e^{-1}) - (-0e^{-0}) + [e^{-x}]_1^0$$

$$P(X \leq 1) = \int_0^1 x e^{-x} dx = -e^{-1} + (e^{-0} - e^{-1}) = 0,2642 = 26,42 \%$$

Exercices corrigés du Chapitre V
Lois usuelles continues

Exercice V.1 :

La durée de vie en (heures) d'une lampe LED fabriquée par une entreprise est modélisée par une variable aléatoire D qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[2000, y]$ avec $y > 3000$.

On observe que $\frac{2}{3}$ des lampes ont une durée de vie comprise entre 2200 h et 3000 h.

- Déterminer y .

Corrigé de l'exercice V.1 :

$$D \sim U([2000, y])$$

$$P(2200 \leq M \leq 3000) = \frac{3000 - 2200}{y - 2000} = \frac{2}{3}$$

$$3(800) = 2(y - 2000)$$

$$2400 = 2y - 4000$$

$$y = \frac{6400}{2}$$

$$y = 3200 \text{ h}$$

Exercice V.2 :

Un bus est susceptible d'arriver à un arrêt entre 8h00 et 9h00.

- 1) Quelle est la probabilité que le bus arrive exactement à 8h15 ?
- 2) Quelle est la probabilité que le bus arrive avant 8h20 ?
- 3) Quelle est la probabilité que le bus arrive entre 8h25 et 8h35 ?

Corrigé de l'exercice V.2 :

Soit X la variable aléatoire représentant le temps d'attente du bus en (minutes) après 8h00.

On a :

$$X \sim U([0, 60])$$

- 1) Probabilité que le bus arrive exactement à 8h15 :

$P(X = 15) = 0$, car une loi uniforme continue donne une probabilité nulle à un point isolé.

- 2) Probabilité que le bus arrive avant 8h20 :

$$P(X \leq 20) = \frac{20 - 0}{60 - 0} = \frac{20}{60} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

- 3) Probabilité que le bus arrive entre 8h25 et 8h35 :

$$P(25 \leq X \leq 35) = \frac{35 - 25}{60 - 0} = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$$

Exercice V.3 :

La longueur en (mm) des tiges métalliques produites par une machine est modélisée par une variable aléatoire L qui suit une loi uniforme continue sur l'intervalle $[98, 102]$.

- 1) Quelle est la probabilité qu'une tige ait exactement la longueur 100 mm ?
- 2) Quelle est la probabilité que la longueur soit comprise entre 99 mm et 101 mm ?
- 3) Quelle est la probabilité que la longueur soit inférieure à 99,5 mm ?
- 4) Calculer l'espérance mathématique et la variance de L .

Corrigé de l'exercice V.3 :

$L \sim U([98, 102])$. Donc la densité est :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{102 - 98} = \frac{1}{4} & \text{si } 98 \leq x \leq 102 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- 1) Calcul de la probabilité qu'une tige ait exactement la longueur 100 mm :

$$P(L = 100) = 0$$

- 2) Calcul de la probabilité que la longueur soit comprise entre 99 mm et 101 mm :

$$P(99 \leq L \leq 101) = \frac{101 - 99}{102 - 98} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50 \%$$

- 3) Calcul de la probabilité que la longueur soit inférieure à 99,5 mm :

$$P(L < 99,5) = P(98 \leq L \leq 99,5) = \frac{99,5 - 98}{102 - 98} = \frac{1,5}{4} = 0,375 = 37,5 \%$$

- 4) Calcul de l'espérance mathématique et la variance de L :

Espérance mathématique :

$$E(X) = \frac{a + b}{2}$$

$$E(X) = \frac{98 + 102}{2} = 100 \text{ mm}$$

Variance :

$$V(X) = \frac{(b - a)^2}{12}$$

$$V(X) = \frac{(102 - 98)^2}{12} = \frac{4}{3} \text{ mm}^2$$

Exercice V.4 :

Les notes des étudiants de Première Année ST Ingénieur dans la matière "Probabilités et Statistiques" suivent une loi normale avec une moyenne de 10 et un écart-type de 5.

- 1) Quelle est la probabilité qu'un étudiant ait une note inférieure à 8 ?
- 2) Quelle est la probabilité qu'un étudiant ait une note supérieure à 16 ?
- 3) Quelle est la probabilité qu'un étudiant ait une note comprise entre 8 et 16 ?
- 4) Déterminer la note minimale que doit avoir un étudiant pour être dans les 10 % des meilleurs de la section.

Corrigé de l'exercice V.4 :

1) Calcul de la probabilité qu'un étudiant ait une note inférieure à 8 :

$$P(X < 8) = P\left(T < \frac{X - m}{\sigma}\right)$$

$$P(X < 8) = P\left(T < \frac{8 - 10}{5}\right)$$

$$P(X < 8) = P(T < -0,4)$$

$$P(X < 8) = P(T > 0,4)$$

$$P(X < 8) = 1 - P(T < 0,4)$$

$$P(X < 8) = 1 - 0,65542$$

$$P(X < 8) = 0,34458$$

2) Calcul de la probabilité qu'un étudiant ait une note supérieure à 16 :

$$P(X > 16) = P\left(T > \frac{X - m}{\sigma}\right)$$

$$P(X > 16) = P\left(T > \frac{16 - 10}{5}\right)$$

$$P(X > 16) = P(T > 1,2)$$

$$P(X > 16) = 1 - P(T < 1,2)$$

$$P(X > 16) = 1 - 0,88493$$

$$P(X > 16) = 0,11507$$

3) Calcul de la probabilité qu'un étudiant ait une note comprise entre 8 et 16 :

$$P(8 < X < 16) = P(X < 16) - P(X < 8)$$

$$P(8 < X < 16) = P\left(T < \frac{X - m}{\sigma}\right) - P\left(T < \frac{X - m}{\sigma}\right)$$

$$P(8 < X < 16) = P\left(T < \frac{16 - 10}{5}\right) - P\left(T < \frac{8 - 10}{5}\right)$$

$$P(8 < X < 16) = P(T < 1,2) - P(T < -0,4)$$

$$P(8 < X < 16) = P(T < 1,2) - P(T > 0,4)$$

$$P(8 < X < 16) = P(T < 1,2) - (1 - P(T < 0,4))$$

$$P(8 < X < 16) = P(T < 1,2) - 1 + P(T < 0,4)$$

$$P(8 < X < 16) = 0,88493 - 1 + 0,65542$$

$$P(8 < X < 16) = 0,54035$$

4) Détermination de la note minimale que doit avoir un étudiant pour être dans les 10 % des meilleurs de la section :

$$P(X > c) = 0,1$$

$$P\left(T > \frac{c - m}{\sigma}\right) = 0,1$$

$$1 - P\left(T < \frac{c - m}{\sigma}\right) = 0,1$$

$$P\left(T < \frac{c-m}{\sigma}\right) = 1 - 0,1$$

$$P\left(T < \frac{c-m}{\sigma}\right) = 0,9$$

$$\frac{c-m}{\sigma} = 1,28$$

$$\frac{c-10}{5} = 1,28$$

$$c = 10 + (5 \cdot 1,28)$$

$$c = 16,4$$

Exercice V.5 :

On suppose que les précipitations journalières maximales dans un bassin versant suivent une distribution normale. On constate que :

- ✓ La probabilité que la précipitation quotidienne maximale dépasse 60 mm est de 0,0869 ;
- ✓ La probabilité que la précipitation quotidienne maximale soit inférieure à 45 mm est de 0,6406.
- Calculer la précipitation journalière maximale moyenne ainsi que l'écart-type de celle-ci.

Corrigé de l'exercice V.5 :

Traduction des probabilités en termes de distribution normale standard :

- $P(X > 60) = 0,0869$
 $1 - P(X < 60) = 0,0869$
 $P(X < 60) = 1 - 0,0869$
 $P(X < 60) = 0,9131$
 $P\left(T < \frac{X-m}{\sigma}\right) = 0,9131$
 $P\left(T < \frac{60-m}{\sigma}\right) = 0,9131$
 $\frac{60-m}{\sigma} = 1,36$
- $P(X < 45) = 0,6406$
 $P\left(T < \frac{X-m}{\sigma}\right) = 0,6406$
 $P\left(T < \frac{45-m}{\sigma}\right) = 0,6406$
 $\frac{45-m}{\sigma} = 0,36$

Obtention du système d'équations à résoudre :

$$\begin{cases} \frac{60-m}{\sigma} = 1,36 \\ \frac{45-m}{\sigma} = 0,36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 60 - m = 1,36 \cdot \sigma \\ 45 - m = 0,36 \cdot \sigma \end{cases}$$

Afin d'éliminer m , la deuxième équation est multipliée par (-1) :

$$\begin{cases} 60 - m = 1,36 \cdot \sigma \\ -45 + m = -0,36 \cdot \sigma \end{cases}$$

En additionnant les deux équations, on obtient :

$$15 = 1 \cdot \sigma$$

$$\sigma = 15 \text{ mm}$$

Par déduction :

$$m = 39,6 \text{ mm}$$

Exercice V.6 :

Une série de 44 pluies annuelles est distribuée normalement avec une moyenne de 227,4 mm et un écart-type de 73,87 mm.

- 1) Quelle est la probabilité des pluies inférieures à 160 mm ?
- 2) Quelle est la probabilité des pluies supérieures à 340 mm ?
- 3) Quelle est la probabilité des pluies comprises entre 160 et 340 mm ?

Corrigé de l'exercice V.6 :

- 1) Calcul de la probabilité des pluies inférieures à 160 mm :

$$P(X < 160) = P\left(T < \frac{X - m}{\sigma}\right)$$

$$P(X < 160) = P\left(T < \frac{160 - 227,4}{73,87}\right)$$

$$P(X < 160) = P(T < -0,91)$$

$$P(X < 160) = P(T > 0,91)$$

$$P(X < 160) = 1 - P(T < 0,91)$$

$$P(X < 160) = 1 - 0,81859$$

$$P(X < 160) = 0,18141$$

- 2) Calcul de la probabilité des pluies supérieures à 340 mm :

$$P(X > 340) = P\left(T > \frac{X - m}{\sigma}\right)$$

$$P(X > 340) = P\left(T > \frac{340 - 227,4}{73,87}\right)$$

$$P(X > 340) = P(T > 1,52)$$

$$P(X > 340) = 1 - P(T < 1,52)$$

$$P(X > 340) = 1 - 0,93574$$

$$P(X > 340) = 0,06426$$

- 3) Calcul de la probabilité des pluies comprises entre 160 et 340 mm :

$$P(160 < X < 340) = P(X < 340) - P(X < 160)$$

$$\begin{aligned}P(160 < X < 340) &= P\left(T < \frac{X-m}{\sigma}\right) - P\left(T < \frac{X-m}{\sigma}\right) \\P(160 < X < 340) &= P\left(T < \frac{340-227,4}{73,87}\right) - P\left(T < \frac{160-227,4}{73,87}\right) \\P(160 < X < 340) &= P(T < 1,52) - P(T < -0,91) \\P(160 < X < 340) &= P(T < 1,52) - P(T > 0,91) \\P(160 < X < 340) &= P(T < 1,52) - (1 - P(T < 0,91)) \\P(160 < X < 340) &= P(T < 1,52) - 1 + P(T < 0,91) \\P(160 < X < 340) &= 0,93574 - 1 + 0,81859 \\P(160 < X < 340) &= 0,75433\end{aligned}$$

Exercice V.7 :

On poursuit l'étude sur les précipitations horaires pendant une journée dans une région. On s'intéresse cette fois à leur hauteur mesurée en (mm). La hauteur suit une loi normale de paramètres (5, 2).

- 1) Quelle est la probabilité d'avoir une pluie dont la hauteur est inférieure à 3 mm ?
- 2) Quelle est la probabilité d'avoir une pluie dont la hauteur est supérieure à 8 mm ?
- 3) En déduire la probabilité d'avoir une pluie dont la hauteur est comprise entre 3 et 8 mm.
- 4) Déterminer la hauteur minimale des pluies les 5 % les plus intenses.
- 5) Déterminer la hauteur maximale des pluies les 50 % les plus faibles.

Corrigé de l'exercice V.7 :

- 1) Calcul de la probabilité d'avoir une pluie dont la hauteur est inférieure à 3 mm :

$$\begin{aligned}P(X < 3) &= P\left(T < \frac{X-m}{\sigma}\right) \\P(X < 3) &= P\left(T < \frac{3-5}{2}\right) \\P(X < 3) &= P(T < -1) \\P(X < 3) &= P(T > 1) \\P(X < 3) &= 1 - P(T < 1) \\P(X < 3) &= 1 - 0,84134 \\P(X < 3) &= 0,15866\end{aligned}$$

- 2) Calcul de la probabilité d'avoir une pluie dont la hauteur est supérieure à 8 mm :

$$\begin{aligned}P(X > 8) &= P\left(T > \frac{X-m}{\sigma}\right) \\P(X > 8) &= P\left(T > \frac{8-5}{2}\right) \\P(X > 8) &= P(T > 1,5) \\P(X > 8) &= 1 - P(T < 1,5)\end{aligned}$$

$$P(X > 8) = 1 - 0,93319$$

$$P(X > 8) = 0,06681$$

3) Calcul de la probabilité d'avoir une pluie dont la hauteur est comprise entre 3 et 8 mm :

$$P(3 < X < 8) = 1 - (P(X < 3) + P(X > 8))$$

$$P(3 < X < 8) = 1 - (0,15866 + 0,06681)$$

$$P(3 < X < 8) = 0,77453$$

Vérification :

$$P(3 < X < 8) = P(X < 8) - P(X < 3)$$

$$P(3 < X < 8) = P\left(T < \frac{X-m}{\sigma}\right) - P\left(T < \frac{X-m}{\sigma}\right)$$

$$P(3 < X < 8) = P\left(T < \frac{8-5}{2}\right) - P\left(T < \frac{3-5}{2}\right)$$

$$P(3 < X < 8) = P(T < 1,5) - P(T < -1)$$

$$P(3 < X < 8) = P(T < 1,5) - P(T > 1)$$

$$P(3 < X < 8) = P(T < 1,5) - (1 - P(T < 1))$$

$$P(3 < X < 8) = P(T < 1,5) - 1 + P(T < 1)$$

$$P(3 < X < 8) = 0,93319 - 1 + 0,84134$$

$$P(3 < X < 8) = 0,77453$$

4) Détermination de la hauteur minimale des pluies les 5 % les plus intenses :

$$P(X > c) = 0,05$$

$$1 - P(X < c) = 0,05$$

$$P(X < c) = 1 - 0,05$$

$$P(X < c) = 0,95$$

$$P\left(T < \frac{c-m}{\sigma}\right) = 0,95$$

$$\frac{c-m}{\sigma} = 1,64$$

$$\frac{c-5}{2} = 1,64$$

$$c = 5 + (2 \cdot 1,64)$$

$$c = 8,28 \text{ mm}$$

La hauteur minimale des pluies les 5 % les plus intenses est de 8,28 mm, c'est-à-dire

$$P(X > 8,28) = 0,05$$

5) Détermination de la hauteur maximale des pluies les 50 % les plus faibles :

$$P(X < c) = 0,5$$

$$P\left(T < \frac{c-m}{\sigma}\right) = 0,5$$

$$\frac{c - m}{\sigma} = 0$$

$$\frac{c - 5}{2} = 0$$

$$c = 5 + (2 \cdot 0)$$

$$c = 5 \text{ mm}$$

La hauteur maximale des pluies les 50 % les plus faibles est de 5 mm, c'est-à-dire

$$P(X < 5) = 0,5$$

Exercice V.8 :

Dans une région donnée, un barrage est équipé d'un dispositif qui contrôle le débit journalier de l'eau. Les données historiques montrent qu'environ 5 % des jours sur une année donnée le débit dépasse une valeur critique, ce qui peut engendrer des risques pour les infrastructures. On examine un échantillon de 365 jours pris au hasard et on note X la variable aléatoire représentant le nombre de jours où le débit dépasse cette valeur critique.

- 1) Par quelle loi peut-on approximer la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Justifier votre réponse.
- 2) Calculer la probabilité d'avoir plus de 25 jours où le débit dépasse la valeur critique.
- 3) Calculer la probabilité d'avoir entre 10 et 20 jours où le débit dépasse la valeur critique.
- 4) Calculer la probabilité pour que le nombre de jours où le débit dépasse la valeur critique soit inférieur à 5 jours.

Corrigé de l'exercice V.8 :

- 1) Justification de l'approximation :

La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 365$ et $p = 0,05$.

$$X \sim B(365, 0,05)$$

Les conditions d'approximation binomiale $\rightarrow$ normale sont remplies :

- $n = 365 > 30$;
- $n \cdot p = 365 \cdot 0,05 = 18,25 > 5$;
- $n \cdot (1 - p) = 365 \cdot (1 - 0,05) = 346,75 > 5$.

On peut donc approximativement remplacer X par une loi normale de moyenne et d'écart-type :

$$m = n \cdot p = 365 \cdot 0,05 = 18,25$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{365 \cdot 0,05 \cdot (1 - 0,05)} = 4,16$$

On note $T < \frac{c - m}{\sigma}$ la variable normale centrée réduite $N(0, 1)$.

2) Calcul de la probabilité d'avoir plus de 25 jours où le débit dépasse la valeur critique :

$$P(X > 25) \xrightarrow{\text{Correction de continuité}} P(X > 25,5) = P\left(T > \frac{25,5 - 18,25}{4,16}\right) = P(T > 1,74)$$

$$P(X > 25) = 1 - P(T < 1,74) = 1 - 0,95907 = 0,04093$$

$$P(X > 25) = 4,09 \%$$

3) Calcul de la probabilité d'avoir entre 10 et 20 jours où le débit dépasse la valeur critique :

$$P(10 \leq X \leq 20) \xrightarrow{\text{Correction de continuité}} P(9,5 \leq X \leq 20,5)$$

$$P(10 \leq X \leq 20) = P\left(\frac{9,5 - 18,25}{4,16} \leq T \leq \frac{20,5 - 18,25}{4,16}\right) = P(-2,1 \leq T \leq 0,54)$$

$$P(10 \leq X \leq 20) = P(T < 0,54) - P(T < -2,1) = P(T < 0,54) - P(T > 2,1)$$

$$P(10 \leq X \leq 20) = P(T < 0,54) - (1 - P(T < 2,1)) = 0,7054 - 1 + 0,98214 = 0,68754$$

$$P(10 \leq X \leq 20) = 68,75 \%$$

4) Calcul de la probabilité pour que le nombre de jours où le débit dépasse la valeur critique soit inférieur à 5 jours :

$$P(X < 5) \xrightarrow{\text{Correction de continuité}} P(X < 4,5) = P\left(T < \frac{4,5 - 18,25}{4,16}\right) = P(T < -3,31)$$

$$P(X < 5) = P(T > 3,31) = 1 - P(T < 3,31) = 1 - 0,99953 = 0,00047 \approx 0,0005$$

$$P(X < 5) = 0,05 \%$$

Exercice V.9 :

Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

- Déterminer λ sachant que $P(2 \leq X \leq 4) = \frac{1}{4}$.

Corrigé de l'exercice V.9 :

- Détermination de la valeur de λ :

$$P(2 \leq X \leq 4) = \frac{1}{4}$$

$$P(2 \leq X \leq 4) = e^{-\lambda(2)} - e^{-\lambda(4)} = \frac{1}{4}$$

$$e^{-2\lambda} - (e^{-2\lambda})^2 = \frac{1}{4}$$

$$\text{On pose } x = e^{-2\lambda}$$

$$x - x^2 = \frac{1}{4}$$

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4\left(1 \cdot \frac{1}{4}\right) = 0$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2} = e^{-2\lambda}$$

$$e^{-2\lambda} = \frac{1}{2}$$

$$-2\lambda = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(1) - \ln(2) = 0 - \ln(2) = -\ln(2)$$

$$-2\lambda = -\ln(2)$$

$$\lambda = \frac{\ln(2)}{2} = 0,34657$$

Exercice V.10 :

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

La courbe ci-dessous représente la densité f de cette loi exponentielle.

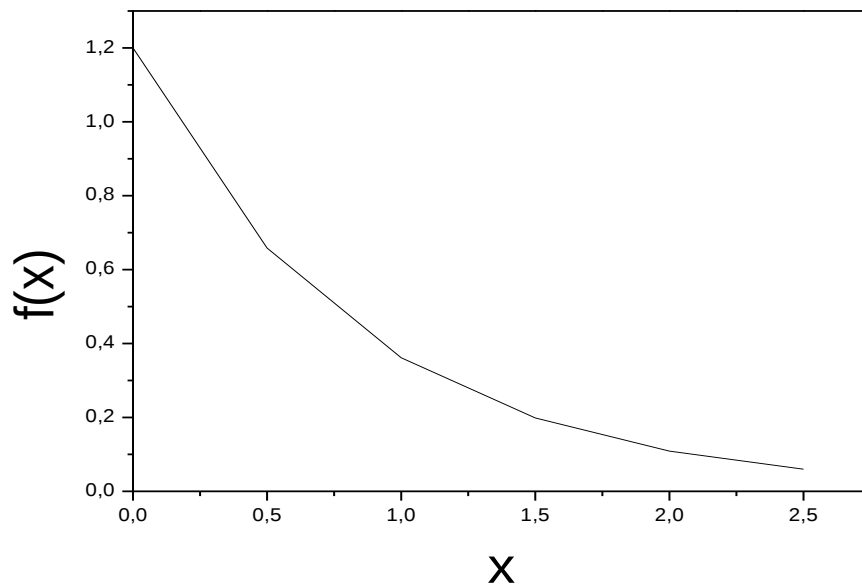


Figure V.7 : Courbe de densité d'une loi exponentielle de paramètre λ

- Déterminer la probabilité $P(X \geq 2)$.

Corrigé de l'exercice V.10 :

- Détermination de la probabilité $P(X \geq 2)$:

La densité de la loi exponentielle est : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$

On a $f(0) = \lambda e^{-\lambda(0)} = \lambda e^0 = \lambda$

D'après la figure : $f(0) = 1,2 = \lambda$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - P(0 \leq X \leq 2) = 1 - (1 - e^{-(1,2)(2)})$$

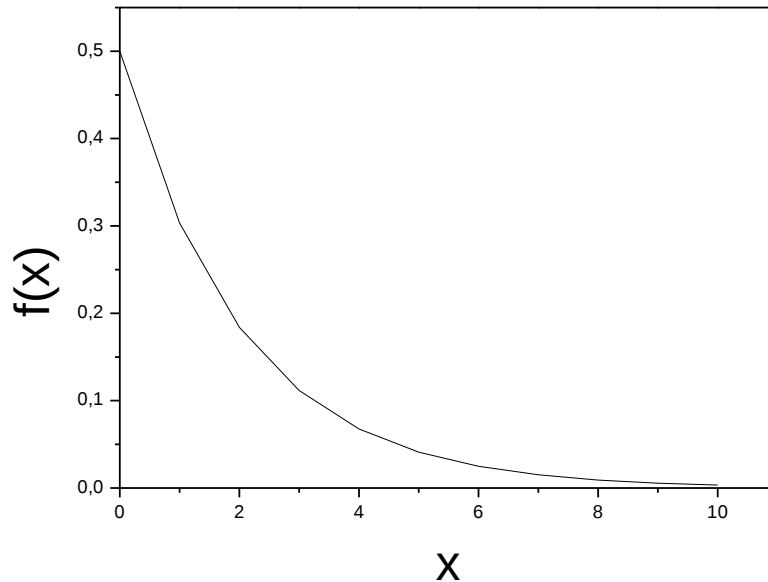
$$P(X \geq 2) = e^{-2,4} = 0,09072$$

Exercice V.11 :

La durée de vie, en années, d'un composant électrique peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ , avec $\lambda > 0$. La courbe de la densité de probabilité associée est représentée dans le repère ci-dessous.

- 1) Représenter la probabilité $P(X \leq 1)$.

- 2) Indiquer où se lit directement la valeur de λ .
- 3) Avec cette valeur de λ , déterminer $E(X)$. Interpréter $E(X)$ dans le contexte de cette situation.
- 4) Calculer $P(X \leq 2)$. Arrondir au centième. Interpréter ce résultat.

**Corrigé de l'exercice V.11 :**

- 1) Représentation de $P(X \leq 1)$:

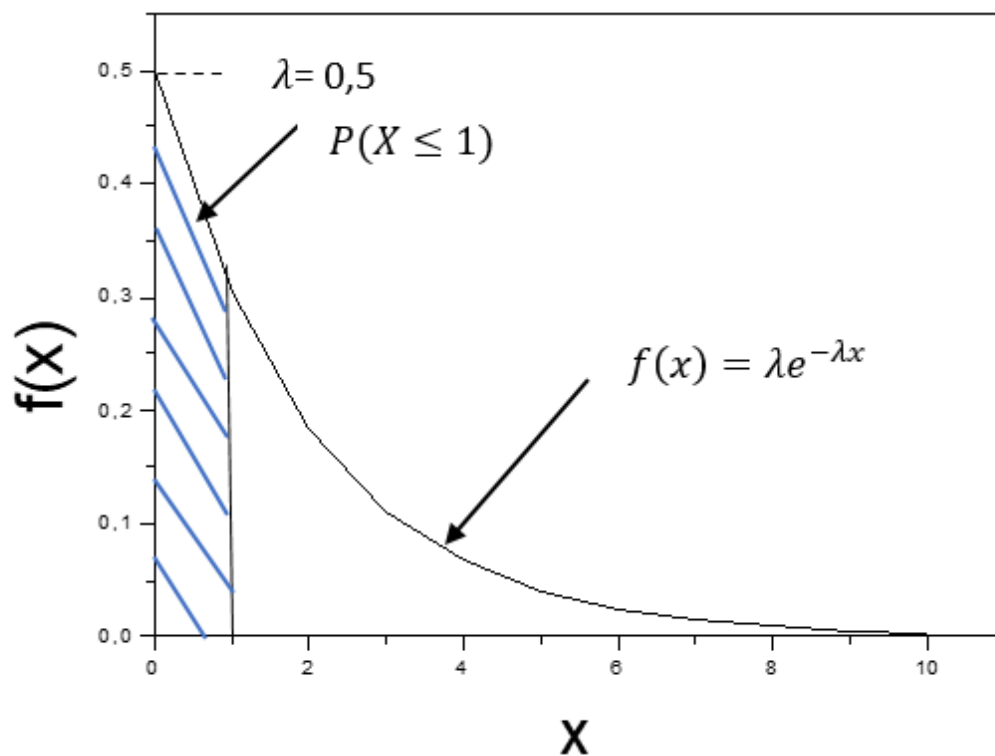


Figure V.8 : Représentation graphique de la probabilité $P(X \leq 1)$ et lecture directe de λ

2) Lecture directe de λ sur la figure :

$$f(0) = \lambda e^{-\lambda(0)} = \lambda e^0 = \lambda$$

D'après le graphe : pour $f(0) = 0,5 = \lambda$

3) Calcul de l'espérance mathématique et interprétation :

Si X suit la loi exponentielle de paramètre λ , alors :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,5} = 2$$

En moyenne, la durée de vie d'un composant électrique est de 2 ans.

4) Calcul de $P(X \leq 2)$ et interprétation :

$$P(X \leq 2) = P(0 \leq X \leq 2) = e^{-\lambda(0)} - e^{-\lambda(2)} = 1 - e^{-(0,5)(2)} = 0,63 = 63 \%$$

La probabilité que la durée de vie du composant électrique ne dépasse deux ans est d'environ 63 %.

Exercice V.12 :

La durée de vie, en heures, d'une batterie rechargeable est une variable aléatoire continue notée X suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1) Sachant que $P(X > 500) = 0,4$, déterminer la valeur de λ .

2) Calculer la probabilité qu'une batterie ait une durée de vie inférieure à 200 heures.

3) Sachant qu'une batterie a déjà fonctionné pendant 300 heures, quelle est la probabilité qu'elle dure plus de 600 heures au total ?

Corrigé de l'exercice V.12 :

1) Détermination de la valeur de λ :

$$P(X > 500) = P(X \geq 500) = 1 - P(X \leq 500) = 0,4$$

$$1 - P(X \leq 500) = 1 - P(0 \leq X \leq 500) = 0,4$$

$$1 - P(0 \leq X \leq 500) = 1 - (1 - e^{-\lambda(500)}) = 0,4$$

$$e^{-\lambda(500)} = 0,4$$

$$-\lambda(500) = \ln(0,4)$$

$$\lambda = \frac{\ln(0,4)}{-500}$$

$$\lambda = 0,00183$$

2) Calcul de la probabilité que la durée de vie soit inférieure à 200 heures :

$$P(X \leq 200) = P(0 \leq X \leq 200) = 1 - e^{-\lambda(200)} = 1 - e^{-0,00183(200)} = 0,3065 = 30,65 \%$$

3) Calcul de la probabilité qu'elle dure plus de 600 heures sachant qu'elle a déjà fonctionné 300 heures :

$$P_{X>300}(X > 600) = \frac{P(X > 600 \cap X > 300)}{P(X > 300)} = \frac{1-P(X \leq 600)}{1-P(X \leq 300)} = \frac{1-P(X \leq 600)}{1-P(X \leq 300)} = \frac{e^{-0,00183(600)}}{e^{-0,00183(300)}}$$

$$P_{X>300}(X > 600) = 0,5775 = 57,75 \%$$

Exercice V.13 :

Soit $X \sim \Gamma(3, 2)$.

1) Donner la densité $f(x)$.

2) Calculer la probabilité : $P(X \leq 2)$

Corrigé de l'exercice V.13 :

1) Détermination de la densité $f(x)$:

Pour $X \sim \Gamma(n, \lambda)$, avec $n > 0$ et $\lambda > 0$, la densité est :

$$f(x) = \frac{x^{n-1}}{\Gamma(n)} \lambda^n e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

Pour $n = 3$ et $\lambda = 2$

Donc :

$$f(x) = \frac{x^{(3-1)}}{\Gamma(3)} (2)^3 e^{-2x} = \frac{x^2}{2!} (2)^3 e^{-2x}, \quad x > 0$$

$$f(x) = 4x^2 e^{-2x}, \quad x > 0$$

2) Calcul de la probabilité $P(X \leq 2)$:

$$P(X \leq 2) = \int_0^2 f(x) dx = 4 \int_0^2 x^2 e^{-2x} dx$$

On pose $t = 2x$

$$\text{Donc : } x = \frac{t}{2} \quad dx = \frac{dt}{2}$$

Quand x varie de 0 à 2, t varie de 0 à 4. Alors :

$$P(X \leq 2) = 4 \int_0^2 x^2 e^{-2x} dx = 4 \int_0^4 \left(\frac{t}{2}\right)^2 e^{-t} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int_0^4 t^2 e^{-t} dt$$

On utilise l'intégration par parties : $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$

On pose : $v(x) = t^2$ et $u'(x) = e^{-t}$

Donc, on aura : $v'(x) = 2t$ et $u(x) = -e^{-t}$

$$P(X \leq 2) = \frac{1}{2} ([-t^2 e^{-t}]_0^4 + 2 \int_0^4 t e^{-t} dt)$$

Calcul de : $\int_0^4 t e^{-t} dt$

On pose : $v(x) = t$ et $u'(x) = e^{-t}$

Donc, on aura : $v'(x) = 1$ et $u(x) = -e^{-t}$

$$\int_0^4 t e^{-t} dt = [-t e^{-t}]_0^4 + \int_0^4 e^{-t} dt = [(-4e^{-4}) - (-0e^{-0})] - [e^{-t}]_0^4$$

$$\int_0^4 t e^{-t} dt = -4e^{-4} - e^{-4} + e^{-0} = -5e^{-4} + 1$$

$$P(X \leq 2) = \frac{1}{2}([-t^2 e^{-t}]_0^4 + 2 \int_0^4 t e^{-t} dt) = \frac{1}{2}[(-4^2 e^{-4}) - (-0^2 e^{-0})] + 2(-5e^{-4} + 1)$$

$$P(X \leq 2) = \frac{1}{2}(-16e^{-4} - 10e^{-4} + 2) = \frac{1}{2}(-26e^{-4} + 2)$$

$$P(X \leq 2) = 0,7619 = 76,19 \%$$

Exercice V.14 :

Soit $X \sim \Gamma(4, 1)$.

- Calculer la probabilité : $P(2 \leq X \leq 5)$

Corrigé de l'exercice V.14 :

Pour la loi gamma,

$$f(x) = \frac{x^{n-1}}{\Gamma(n)} \lambda^n e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

Pour $n = 4$ et $\lambda = 1$

Donc :

$$f(x) = \frac{x^{(4-1)}}{\Gamma(4)} (1)^4 e^{-1x} = \frac{x^3}{3!} (1)^4 e^{-1x}, \quad x > 0$$

$$f(x) = \frac{1}{6} x^3 e^{-x}, \quad x > 0$$

$$P(2 \leq X \leq 5) = \int_2^5 f(x) dx = \frac{1}{6} \int_2^5 x^3 e^{-x} dx$$

On utilise l'intégration par parties : $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$

On pose : $v(x) = x^3$ et $u'(x) = e^{-x}$

Donc, on aura : $v'(x) = 3x^2$ et $u(x) = -e^{-x}$

$$P(2 \leq X \leq 5) = \frac{1}{6} \int_2^5 x^3 e^{-x} dx = \frac{1}{6} ([-x^3 e^{-x}]_2^5 + 3 \int_2^5 x^2 e^{-x} dx)$$

Deuxième intégration par parties pour $\int_2^5 x^2 e^{-x} dx$

On pose : $v(x) = x^2$ et $u'(x) = e^{-x}$

Donc, on aura : $v'(x) = 2x$ et $u(x) = -e^{-x}$

$$\int_2^5 x^2 e^{-x} dx = [-x^2 e^{-x}]_2^5 + \int_2^5 2x e^{-x} dx$$

$$P(2 \leq X \leq 5) = \frac{1}{6} \int_2^5 x^3 e^{-x} dx = \frac{1}{6} ([-x^3 e^{-x}]_2^5 + 3 ([-x^2 e^{-x}]_2^5 + \int_2^5 2x e^{-x} dx))$$

Troisième intégration par parties pour $\int_2^5 2x e^{-x} dx$

On pose : $v(x) = 2x$ et $u'(x) = e^{-x}$

Donc, on aura : $v'(x) = 2$ et $u(x) = -e^{-x}$

$$\int_2^5 2xe^{-x} dx = [-2xe^{-x}]_2^5 + \int_2^5 2e^{-x} dx$$

$$P(2 \leq X \leq 5) = \frac{1}{6} \int_2^5 x^3 e^{-x} dx = \frac{1}{6} ([-x^3 e^{-x}]_2^5 + 3 \left([-x^2 e^{-x}]_2^5 + [-2xe^{-x}]_2^5 + \int_2^5 2e^{-x} dx \right))$$

$$P(2 \leq X \leq 5) = \frac{1}{6} ([-x^3 e^{-x}]_2^5 + 3([-x^2 e^{-x}]_2^5 + [-2xe^{-x}]_2^5 + 2[-e^{-x}]_2^5))$$

$$P(2 \leq X \leq 5) = \frac{1}{6} ([x^3 e^{-x}]_2^5 + 3([x^2 e^{-x}]_2^5 + [2xe^{-x}]_2^5 + 2[e^{-x}]_2^5))$$

$$P(2 \leq X \leq 5) = \frac{1}{6} ([2^3 e^{-2} - 5^3 e^{-5}] + 3([2^2 e^{-2} - 5^2 e^{-5}] + [4e^{-2} - 10e^{-5}] + [2e^{-2} - 2e^{-5}]))$$

$$P(2 \leq X \leq 5) = \frac{1}{6} (8e^{-2} - 125e^{-5} + 12e^{-2} - 75e^{-5} + 12e^{-2} - 30e^{-5} + 6e^{-2} - 6e^{-5})$$

$$P(2 \leq X \leq 5) = \frac{1}{6} (-236e^{-5} + 38e^{-2})$$

$$P(2 \leq X \leq 5) = -\frac{118}{3} e^{-5} + \frac{19}{3} e^{-2}$$

$$P(2 \leq X \leq 5) = 0,5921 = 59,21 \%$$

Exercice V.15 :

Soient $X \sim \Gamma(2, 3)$ et $Y \sim \Gamma(4, 3)$, indépendantes.

1) Quelle est la loi de $X + Y$?

2) Donner son espérance et sa variance.

Corrigé de l'exercice V.15 :

1) Détermination de la loi de $X + Y$:

Données :

$X \sim \Gamma(2, 3)$ et $Y \sim \Gamma(4, 3)$, indépendantes.

Leurs densités :

$$f_X(x) = \frac{x^{n_1-1}}{\Gamma(n_1)} \lambda^{n_1} e^{-\lambda x} = \frac{x^1}{1!} 3^2 e^{-3x} = 9xe^{-3x}, \quad x \geq 0$$

$$f_Y(y) = \frac{y^{n_2-1}}{\Gamma(n_2)} \lambda^{n_2} e^{-\lambda y} = \frac{y^3}{3!} 3^4 e^{-3y} = \frac{81}{6} y^3 e^{-3y}, \quad y \geq 0$$

La densité $Z = X + Y$ pour $z \geq 0$:

$$f_Z(z) = (f_X \cdot f_Y)(z) = \int_0^z f_X(x) f_Y(z-x) dx$$

Substituons :

$$f_Z(z) = \int_0^z (9xe^{-3x}) \left(\frac{81}{6} (z-x)^3 e^{-3(z-x)} \right) dx$$

$$f_Z(z) = \frac{729}{6} e^{-3z} \int_0^z x(z-x)^3 dx$$

Calcul de l'intégrale polynomiale (développement direct) :

$$\int_0^z x(z-x)^3 dx = \int_0^z (z^3x - 3z^2x^2 + 3zx^3 - x^4) dx$$

$$\int_0^z x(z-x)^3 dx = \left[z^3 \frac{x^2}{2} - 3z^2 \frac{x^3}{3} + 3z \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right]_0^z = z^3 \frac{z^2}{2} - 3z^2 \frac{z^3}{3} + 3z \frac{z^4}{4} - \frac{z^5}{5}$$

$$\int_0^z x(z-x)^3 dx = \frac{10z^5 - 20z^5 + 15z^5 - 4z^5}{20}$$

$$\int_0^z x(z-x)^3 dx = \frac{z^5}{20}$$

Donc :

$$f_Z(z) = \frac{729}{6} e^{-3z} \frac{z^5}{20} = \frac{729}{120} z^5 e^{-3z} = \frac{z^{6-1}}{5!} 3^6 e^{-3z}, \quad z \geq 0$$

Or la densité d'une loi gamma $\Gamma(n, \lambda)$ est :

$$f(z) = \frac{z^{n-1}}{\Gamma(n)} \lambda^n e^{-\lambda z} = \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \lambda^n e^{-\lambda z}$$

$\lambda = 3, n = 6$, donc :

$$X + Y \sim \Gamma(6, 3)$$

2) Calcul de l'espérance et de la variance :

Pour $\Gamma(n, \lambda)$:

$$E(Z) = \frac{n}{\lambda}, \quad V(Z) = \frac{n}{\lambda^2}$$

Donc pour $Z \sim \Gamma(6, 3)$:

$$E(X + Y) = \frac{6}{3} = 2$$

$$V(X + Y) = \frac{6}{3^2} = \frac{2}{3}$$

Vérification par additivité :

$$E(X) = \frac{2}{3} \quad E(Y) = \frac{4}{3} \quad E(X + Y) = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{6}{3}$$

$$V(X) = \frac{2}{9} \quad V(Y) = \frac{4}{9} \quad V(X + Y) = \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Exercice V.16 :

Un technicien effectue chaque jour une intervention sur un site situé à 30 km de son domicile.

Le temps X en (minutes) qu'il met pour se rendre au site dépend des conditions de circulation et de la météo. Sa densité de probabilité est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Avec $\lambda > 0$.

- 1) Reconnaître la loi de probabilité de la variable aléatoire X . Déterminer la valeur de λ sachant que la durée moyenne du trajet est de 60 minutes.
- 2) Déterminer la fonction de répartition de X .
- 3) Le site exige que les interventions soient effectuées dans un délai maximum de 90 minutes. Quelle est la probabilité que le technicien arrive en retard ?

Corrigé de l'exercice V.16 :

- 1) Reconnaissance de la loi de probabilité et détermination de λ :

La densité proposée est de la forme :

$$f(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

C'est exactement la densité d'une loi gamma de paramètres :

$$X \sim \Gamma(2, \lambda)$$

Or, pour une loi $\Gamma(n, \lambda)$:

$$E(X) = \frac{n}{\lambda}$$

$$E(X) = 60 \text{ et } n = 2$$

$$\lambda = \frac{n}{E(X)} = \frac{2}{60} = \frac{1}{30}$$

- 2) Détermination de la fonction de répartition de X :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

On distingue deux cas :

- Si $x < 0$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = 0$$

- Si $x \geq 0$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt$$

$$F(x) = 0 + \int_0^x \lambda^2 t e^{-\lambda t} dt$$

$$F(x) = \left(\frac{1}{30}\right)^2 \int_0^x t e^{-\frac{1}{30}t} dt$$

On utilise l'intégration par parties : $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$

On pose : $v(t) = t$ et $u'(t) = e^{-\frac{1}{30}t}$

Donc, on aura : $v'(t) = 1$ et $u(t) = -30e^{-\frac{1}{30}t}$

$$F(x) = \left(\frac{1}{30}\right)^2 \left([-30te^{-\frac{1}{30}t}]_0^x + 30 \int_0^x e^{-\frac{1}{30}t} dt \right)$$

$$F(x) = \left(\frac{1}{30}\right)^2 \left(-30xe^{-\frac{1}{30}x} + 30[-30e^{-\frac{1}{30}t}]_0^x \right)$$

$$F(x) = \left(\frac{1}{30}\right)^2 \left(-30xe^{-\frac{1}{30}x} + 30(-30e^{-\frac{1}{30}x} + 30) \right)$$

$$F(x) = \frac{-30}{30^2} x e^{-\frac{1}{30}x} + \frac{-30^2}{30^2} e^{-\frac{1}{30}x} + \frac{30^2}{30^2}$$

$$F(x) = 1 + \frac{-1}{30} x e^{-\frac{1}{30}x} - e^{-\frac{1}{30}x}$$

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{1}{30}x} \left(\frac{1}{30}x + 1 \right)$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{30}x} \left(\frac{1}{30}x + 1 \right) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

3) Probabilité de retard :

$$P(X \geq 90) = 1 - P(X < 90) = 1 - F(90) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{30}x} \left(\frac{1}{30}x + 1 \right) \right)$$

$$P(X \geq 90) = e^{-\frac{1}{30}x} \left(\frac{1}{30}x + 1 \right) = e^{-\frac{1}{30}(90)} \left(\frac{1}{30}(90) + 1 \right) = 0,1991 = 19,91 \%$$

Annexe : Table de la loi normale centrée réduite

t	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,5279	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,5438	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,6293	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,6591	0,66276	0,6664	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,7054	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,7224
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,7549
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,7673	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,7823	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,8665	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,879	0,881	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,9032	0,9049	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,9222	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,9452	0,9463	0,94738	0,94845	0,9495	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,9608	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,9732	0,97381	0,97441	0,975	0,97558	0,97615	0,9767
2	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,9803	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,983	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,985	0,98537	0,98574
2,2	0,9861	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,9884	0,9887	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,9901	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,9918	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,9943	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,9952
2,6	0,99534	0,99547	0,9956	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,9972	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,9976	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,999
3,1	0,99903	0,99906	0,9991	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,9994	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,9995
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,9996	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,9997	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,9998	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,9999	0,9999	0,9999	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Bibliographie

- [1] Lipschutz, S. S. (1973). Probabilités : cours et problèmes. McGraw-Hill.
- [2] Gnedenko, B. V., & Sheinin, O. B. (1992). The theory of probability. In Mathematics of the 19th Century : Mathematical Logic Algebra Number Theory Probability Theory (pp. 211-282). Basel : Birkhäuser Basel.
- [3] Bremaud, P. (1997). Introduction aux probabilités : modélisation des phénomènes aléatoires. Springer Science & Business Media.
- [4] Saporta, G. (2006). Probabilités, analyse des données et statistique. Editions technip.
- [5] Ross, S. M. (2007). Initiation aux probabilités. EPFL Press.
- [6] Fredon, D., Maumy, M., & Bertrand, F. (2009). Mathématiques L1/L2 : Statistique et Probabilités en 30 fiches (pp. 160-pages). Dunod.
- [7] Cantoni, E., Huber, P., & Ronchetti, E. (2009). Variables aléatoires discrets. In Maîtriser l'aléatoire : Exercices résolus de probabilités et statistique (pp. 23-47). Paris : Springer Paris.
- [8] Perrut, A. (2010). Cours de probabilités et statistiques. Université Claude Bernard Lyon, 1.
- [9] Velenik, Y. (2011). Probabilités et statistique. Université de Genève.
- [10] Grinstead, C. M., & Snell, J. L. (2012). Introduction to probability. American Mathematical Soc.
- [11] Grimmett, G., & Welsh, D. J. (2014). Probability: an introduction. Oxford University Press.
- [12] Lecoutre, J. P. (2015). TD Statistique et probabilités : 6e édition. Dunod.
- [13] Delhoum, Z. S. (2020). Cours et exercices corrigés en probabilités. École Supérieure d'Économie d'Oran.

[14] Caravenna, F., Dai Pra, P., & Berger, Q. (2021). Introduction aux probabilités : Modèles et applications : mathématiques, physique, informatique, sciences de l'ingénieur, biologie. Dunod.

[15] Appel, W. (2024). Probabilités pour les non-probabilistes. H&K Éditions.