

**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**

---

Université des Sciences et de la Technologie d'Oran  
Faculté d'Architecture et de Génie civil  
Département de Génie Civil



**Polycopié de cours et exercices  
corrigés de  
Résistance Des Matériaux**

Elaboré par :

**Dr Imene BENAÏSSA**

**2019-2020**

## **PREAMBULE**

Le présent polycopié est un support de cours de résistance des matériaux (RDM) avec exercices corrigés, destiné aux étudiants de 2<sup>ème</sup> année (S4) licence de Génie civil, avec en plus deux chapitres destinés aux étudiants de 3<sup>ème</sup> année (S5) de la même licence.

Ce polycopié s'articule autour de huit chapitres :

- Le premier chapitre est une introduction générale à la RDM où différentes notions sont abordées, notamment, les forces extérieures, les efforts internes, les types de liaisons et la détermination des réactions dans le cas des systèmes isostatiques. Nous avons également donné, dans ce même chapitre, les hypothèses de calcul des éléments de construction.
- Le deuxième chapitre est consacré à la détermination des caractéristiques géométriques des sections planes, tels que : le moment statique, le centre de gravité, les moments d'inertie, le rayon de giration ainsi que le module de résistance.
- Dans le troisième chapitre, qui est relatif à la traction-compression, nous avons montré comment déterminer les efforts normaux ainsi que les contraintes normales et les déformations, nous avons aussi évoqué l'essai de traction et les hypothèses de calcul des contraintes normales.
- Le quatrième chapitre concerne la flexion simple : dans ce chapitre nous avons procédé à la détermination des efforts internes (moment fléchissant et effort tranchant), ainsi qu'à l'étude des contraintes normales et tangentielle avec démonstration des formules de calcul de celles-ci.
- Le cinquième chapitre est dédié au calcul des déplacements en flexion simple où trois méthodes de calcul ont été abordées: la méthode de l'intégration de l'équation de la ligne élastique, la méthode des paramètres initiaux et la méthode de la poutre conjuguée.
- Le sixième chapitre est consacré à la détermination des efforts internes (moment fléchissant et effort tranchant) ainsi qu'à l'étude des contraintes et déformations suivant les deux axes principaux d'inertie : il s'agit de la flexion déviée.
- Le septième chapitre concerne la détermination des efforts normaux dans les barres d'un treillis isostatique suivant deux méthodes : la méthode des nœuds et la méthode des sections.
- Le huitième et dernier chapitre est dédié à l'étude des portiques plans isostatiques où nous avons montré, par le biais de quelques exemples détaillés, comment déterminer le degré d'hyperstaticité ainsi que les efforts internes agissant dans les éléments d'un portique isostatique.

Tous les chapitres sont enrichis par une série d'exercices corrigés.

## Sommaire

Préambule

Sommaire

<b>I/ Généralités.....</b>	<b>1</b>
I.1/ Objectifs principaux de la RDM.....	2
I.2/ Système de points matériels étudiés en RDM.....	2
I.3/ Définition d'une poutre.....	2
I.4/ Loi fondamentale de l'équilibre.....	3
I.5/ Notion de force extérieure.....	3
I.6/ Charges appliquées (forces extérieures) .....	3
I.7/ Réactions .....	4
I.8/ Appuis courants des structures planes chargées dans leur plan.. .....	4
I.9/ Systèmes isostatique et hyperstatique .....	5
a) Système isostatique.....	6
b) Système hyperstatique .....	6
I.9.1/ Calcul des réactions d'appuis.....	7
I.9.2/ Représentation schématique.....	7
I.10/ Hypothèses générales de comportement .....	7
I.10.1/ hypothèses sur les matériaux.....	7
I.10.2/ Forces extérieures .....	7
I.10.3/ Loi de Hooke généralisée.....	8
I.10.4/ Principe de superposition.....	8
I.10.5/ Principe de St Venant.....	8
I.10.6/ Principe de Navier Bernoulli.....	9
I.11/ Eléments de réduction des efforts de cohésion (efforts intérieurs) au centre de gravité d'une section normale.....	9
I.11.1/ Définition.....	9
I.11.2/ Convention de signe des efforts internes.....	10
I.11.3/ Méthode de calcul des efforts internes.....	10
I.12/ Notions sur la détermination des contraintes.....	12
I.12.a/ Contraintes normales.....	13
I.12.b/ Contraintes tangentielles.....	13
Exercices.....	14

<b>II/ Caractéristiques géométriques des sections planes.....</b>	<b>17</b>
II.1/ Introduction.....	18
II.2/ Aire d'une section .....	18
II.3/ Moment statique .....	18
II.4/ Centre de gravité .....	19
II.5/ Moment d'inertie .....	21
II.6/ Moment d'inertie polaire .....	22
II.7/ Rayon de giration (rayon d'inertie).....	22
II.8/ Moment d'inertie centrifuge (produit d'inertie) .....	23
II.9/ Variation des moments d'inertie .....	23
II.9.1/ Translation des axes (théorème de Huygens).....	23
II.9.2/ Rotation des axes .....	25
II.9.3/ Détermination de la direction des axes d'inertie principaux .....	26
II.10/ Module de résistance.....	27
Exercices.....	28
<b>III/ Traction-Compression.....</b>	<b>40</b>
III.I/ Définition.....	41
III.2/ Convention de signe de N .....	41
III.3/ Calcul de l'effort normal.....	41
III.4/ Essai de traction .....	42
III.5/ Contrainte.....	43
III.6/ Contrainte admissible .....	44
III.7/ Condition de résistance .....	44
III.8/ Déformation .....	44
III.9/ Contrainte et déformation d'une barre dues à son poids propre .....	45
III.9.1/ Contrainte .....	45
III.9.2/ Déformation .....	45
Exercices.....	46
<b>IV/ Flexion pure-Flexion simple.....</b>	<b>54</b>
IV.1/ Définition .....	55
IV.2/ Flexion pure .....	55
IV.2.1/ Etude des contraintes .....	56
IV.2.2/Diagramme des contraintes normales .....	58
IV.2.3/ Moment de résistance à la flexion ou module de résistance .....	59
IV.2.3/ Déformation en flexion pure .....	59
IV.3/ Flexion simple .....	60

IV.3.1/ Eléments de réduction .....	61
IV.3.2/ Convention de signe des moments fléchissants et des efforts tranchants .....	61
IV.3.3/ Détermination de M et T .....	61
IV.3.4/ Relation entre M et T.....	62
IV.3.5/ Relation entre q et T.....	63
IV.3.6/ Diagrammes de M et T .....	63
IV.3.7/ Contraintes normales.....	66
IV.3.8/ Contrainte tangentielle (de cisaillement) .....	66
IV.3.9/ Contraintes maximales.....	70
a) Contrainte normale .....	70
b) Contrainte tangentielle .....	70
IV.3.10/ Condition de résistance .....	70
a) Contrainte normale .....	70
b) Contrainte tangentielle.....	70
Exercices.....	71
<b>V/ Détermination des déplacements en flexion.....</b>	<b>102</b>
V.1/ Définition .....	103
V.2/ Equation différentielle de la ligne élastique .....	104
V.3/ Méthodes de calcul.....	104
V.3 .1/ Méthode de l'intégration de l'équation de la ligne élastique .....	105
V.3 .2/ Méthode des paramètres initiaux (Méthode de Clebsch).....	106
V.3 .3/ Méthode de la poutre conjuguée (poutre auxiliaire).....	108
Exercices.....	109
<b>VI/ Flexion déviée.....</b>	<b>127</b>
VI.1/ Définition .....	128
VI.2/ Contraintes .....	129
VI.3/ Diagrammes des contraintes normales-Axe neutre .....	129
VI.4/ Calcul à la résistance .....	132
VI.5/ Calcul des déplacements .....	133
Exercices.....	134
<b>VII/ Treillis isostatiques.....</b>	<b>150</b>
VII.1/ Définition .....	151
VII.2/ Hypothèses de calcul .....	151
VII.3/ Treillis isostatiques .....	151
VII.4/ Calcul des efforts internes dans les barres .....	153
VII.4.1/ Méthode des nœuds.....	153

VII.4.2/ Méthode des sections (méthode de Ritter).....	153
Exercices.....	154
<b>VIII/ Portiques plans isostatiques.....</b>	<b>159</b>
VIII.1/ Introduction.....	160
VIII.2/ Degré d'hyperstaticité.....	160
VIII.2.a/ Méthode d'élimination des liaisons surabondantes.....	161
VIII.2.b/ Méthode des contours fermés.....	162
VIII.3/ Convention de signe.....	163
VIII.4/ Détermination des efforts internes.....	163
Exercices.....	168
Bibliographie.....	179

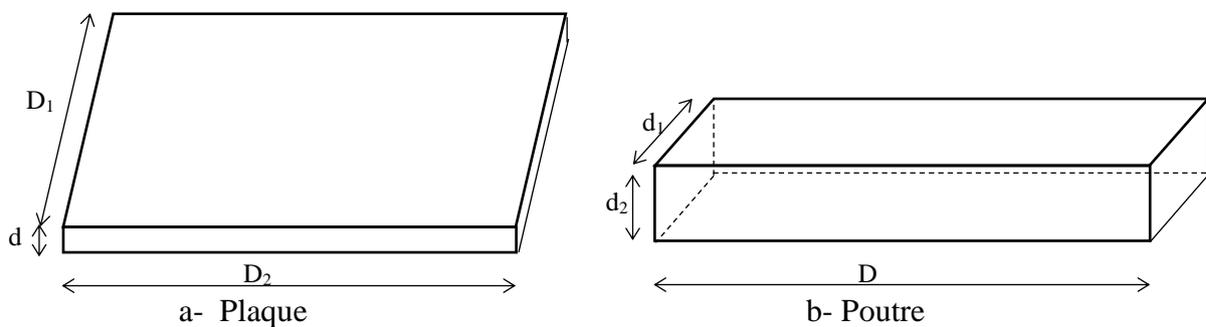
## **GENERALITES**

### **I.1/ Objectifs principaux de la RDM :**

La résistance des matériaux (RDM) est la science de l'étude du comportement (déformations, déplacements, contraintes) des solides considérés comme déformables sous l'action de charges extérieures. Elle s'intéresse particulièrement au dimensionnement et à la vérification des pièces (résistance, stabilité, rigidité, etc...) afin qu'elles résistent sans dommage à toutes les forces auxquelles elles seront soumises pendant leur service dans des conditions de sécurité satisfaisantes et au meilleur coût.

### **I.2/ Système de points matériels étudiés en RDM :**

L'observation des constructions permet de ranger la plupart des solides soit dans la classe des corps dont une dimension est grande devant les autres (poutres), soit dans la classe des corps dont une dimension est petite devant les autres (ce sont les plaques et coques) (Figure I.1).



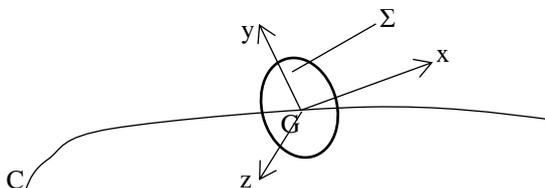
**Figure I.1**

Dans le cadre de ce cours, nous nous intéresserons aux poutres.

### **I.3/ Définition d'une poutre :**

On appelle poutre le solide engendré par une surface ( $S$ ) du plan  $\Sigma$  dont le centre de gravité  $G$  décrit une courbe ( $C$ ) appelée *fibres moyenne*.

Le plan  $\Sigma$  de  $S$  restant normal à cette courbe,  $\Sigma$  est appelée section droite ou normale (figure I.2).



**Figure I.2**

La poutre est dite :

- Plane si sa fibre moyenne est totalement contenue dans un plan.
- Gauche si sa fibre moyenne suit une courbe gauche.
- Droite si sa fibre moyenne est une droite.
- A section constante ou variable selon que l'aire  $S$  de  $\Sigma$  est constante ou variable le long de la fibre moyenne (figure I.3).

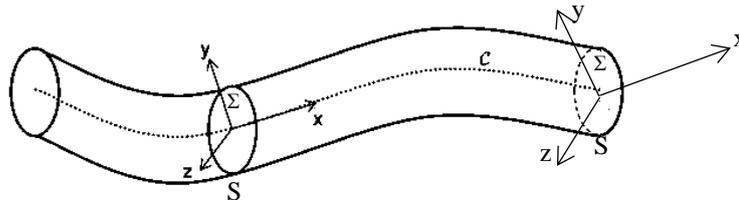


Figure I.3

#### **I.4/ Loi fondamentale de l'équilibre :**

Pour qu'un corps solide indéformable soit en équilibre sous l'action de plusieurs forces, il faut et il suffit que :

- La somme géométrique de toutes les forces soit nulle  $\sum \vec{F} = \vec{0}$  (équation vectorielle).
- Le moment résultant par rapport à un point quelconque soit nul  $\sum \vec{M}_{/pt} = \vec{0}$ .

Finalement, les conditions d'équilibre du solide s'écrivent analytiquement comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0. \\ \sum F_y = 0. \quad \rightarrow \text{Dans le plan} \\ \sum M_{F/o} = 0. \end{array} \right.$$

Ce sont les équations universelles fondamentales d'équilibre.

#### **I.5/ Notion de force extérieure :**

\* *Forces extérieures* : On appelle forces extérieures toutes forces appliquées sur un système donné.

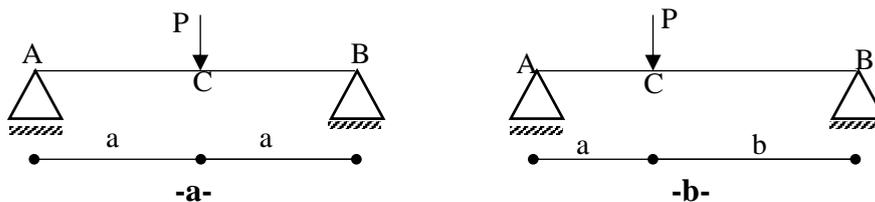
\* *Définition statique* : une force est une cause capable de maintenir un corps au repos ou de le déformer.

\* *Définition dynamique* : une force est une cause capable de provoquer ou de modifier le mouvement d'un corps.

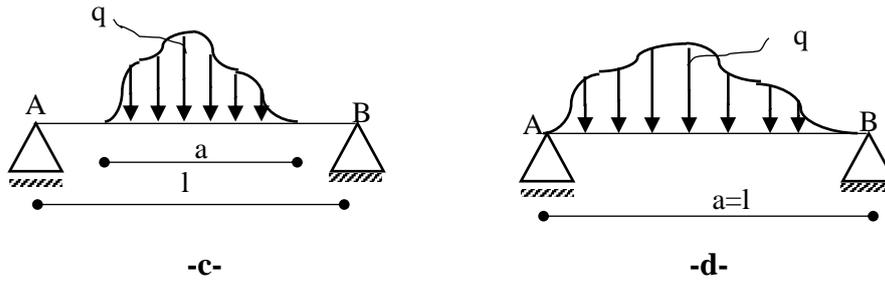
#### **I.6/ Charges appliquées (forces extérieures) :**

Une poutre est soumise à des charges extérieures qui peuvent être :

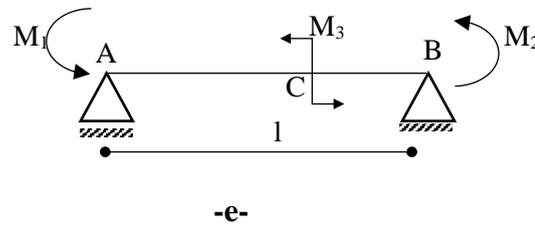
- Concentrées en un point : elles peuvent être centrées (fig.I.4-a) ou excentrées (fig.I.4-b).
- Réparties sur un tronçon (fig.I.4-c) ou sur toute la longueur de la poutre (fig.I.4-d).
- Des moments (fig.I.4-e).



**N.B :** Le point C est appelé *point d'application de la force concentrée (P)*.



- c-
- d-
- La charge répartie  $q$  se mesure par unité de force sur unité de longueur (t/m, kN/m, etc).
- Dans les calculs, la charge répartie  $q$  est remplacée par sa résultante  $\vec{R}$  qui est égale numériquement à l'aire de son diagramme et son point d'application se trouve au niveau du centre de gravité de celui-ci.
- Pour une charge uniformément répartie, le diagramme est rectangulaire, sa résultante  $\vec{R}$  est égale à l'aire du rectangle ; soit :  $\vec{R} = q \times a$  et son point d'application se trouve à  $a/2$  (centre de gravité du rectangle).



**-e-**  
 $M_3$  est un **moment concentré en C** et tourne dans le sens trigonométrique (sens anti-horaire).

Figure I.4

**I.7/ Réactions :**

Afin de compenser l'effet des charges auxquelles est soumise la poutre, l'environnement de la poutre oppose des charges extérieures appelées **réactions**. Ces réactions peuvent être :

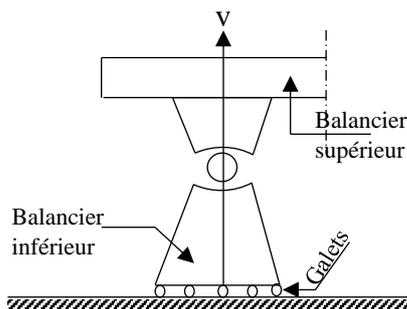
- Forces horizontales (H ou  $R_x$ ).
- Forces verticales (V ou  $R_y$ ).
- Ou moments (M).

Le nombre de réactions est imposé par la nature de l'appui de la poutre (type de liaison).

**I.8/ Appuis courants des structures planes chargées dans leur plan :**

Il existe trois catégories théoriques essentielles : appui simple ou rouleau-appui double-appui triple (encastrement).

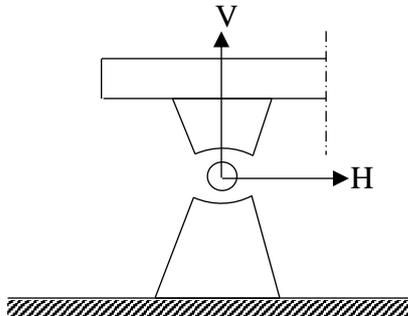
a) **Appui simple** : ou appui à rotule et à chariot de roulement.



Rotule → déplacement angulaire	} 2 degrés de liberté
Galets → translation	

La réaction  $V$  est perpendiculaire au plan de roulement et ne comporte qu'une seule inconnue. C'est son intensité ou grandeur  $\Rightarrow$  appui simple.

**b) Appui double :**



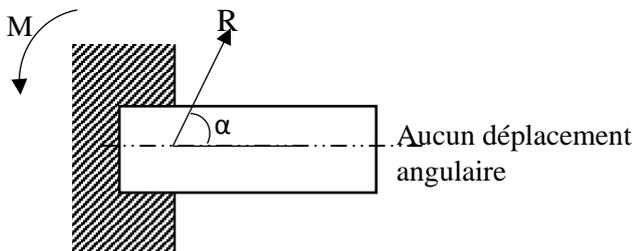
Rotule  $\rightarrow$  déplacement angulaire  $\Rightarrow$   
1 degré de liberté dans le plan

Cet appui provoque une réaction à deux inconnues  $R_x$  et  $R_y$  ou  $H$  et  $V$  d'où la dénomination « appui double ».

**$R_x$  ou  $H$  :** Réaction horizontale.

**$R_y$  ou  $V$  :** Réaction verticale.

**c) Appui triple dit "encastrement" :**



$V$  : Réaction verticale.  
 $H$  : Réaction horizontale.  
 $M$  : Moment d'encastrement. } 0 degré de liberté dans le plan

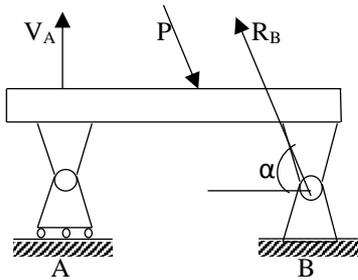
Cet appui développe une réaction  $R$  de grandeur et de direction inconnues (sauf si toutes les forces extérieures sont verticales) et ne permettra aucune rotation, nous devons donc admettre l'existence d'un moment antagoniste opposé noté «  $M$  » ou moment d'encastrement. Cet appui fait donc que  $R$  a une grandeur et une direction non définies et un moment d'encastrement inconnu, d'où la dénomination « appui triple ».

**I.8/ Systèmes isostatique et hyperstatique :**

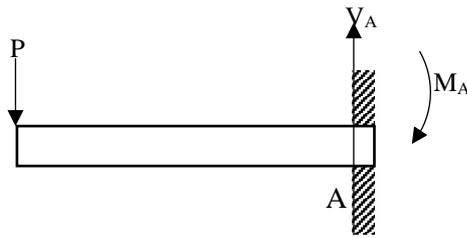
Ne seront considérés que les cas de forces aires coplanes donc le nombre d'équation d'équilibre est de 3 au plus.

- 1) Si les sections de contact des appuis introduisent au total moins de 03 inconnues, le problème est en général impossible : systèmes astatiques.
- 2) Si les sections de contact des appuis introduisent au total 03 inconnues, le problème est soluble et il n'existe qu'une seule solution : systèmes isostatiques.
- 3) Si les sections de contact des appuis introduisent au total plus de 03 inconnues, le problème est mathématiquement indéterminé, on dit que le système est hyperstatique.

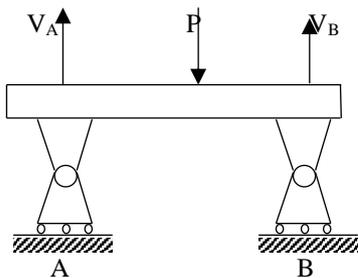
**a) Système isostatique :**



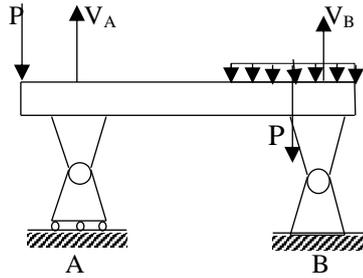
3 équations-3 inconnues ( $V_A$ ,  $R_B$ ,  $\alpha$ )



2 équations-2 inconnues ( $V_A$ ,  $M_A$ )



2 équations-2 inconnues ( $V_A$ ,  $V_B$ )

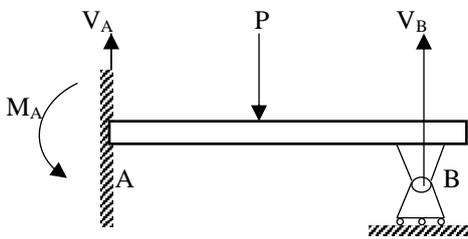


2 équations-2 inconnues ( $V_A$ ,  $V_B$ )

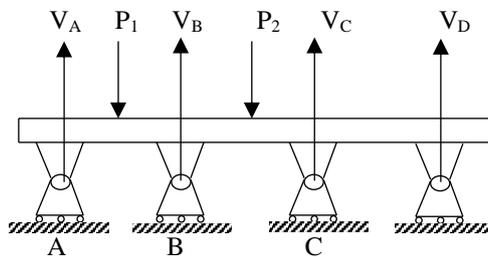
**b) Système hyperstatique :**

\* Notion de degré d'hyperstaticité (d) :

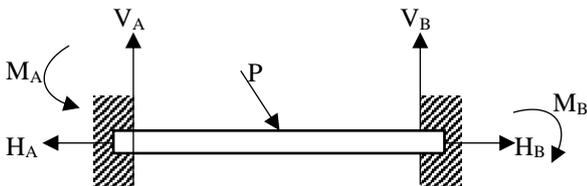
Le degré d'hyperstaticité est la différence entre le nombre d'inconnues (réactions d'appuis et moment d'encastrement) et le nombre d'équations de la statique.



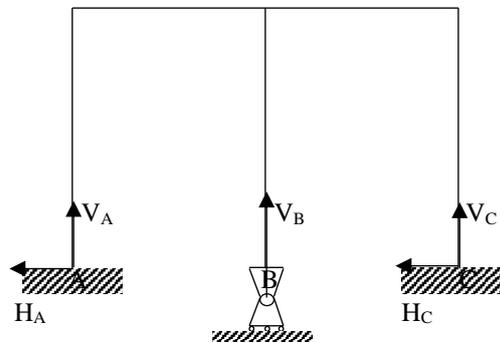
$d = 3 \text{ inc.} - 2 \text{ éq.} = 1$



$d = 4 \text{ inc.} - 2 \text{ éq.} = 2$



$d = 6 \text{ inc.} - 3 \text{ éq.} = 3$

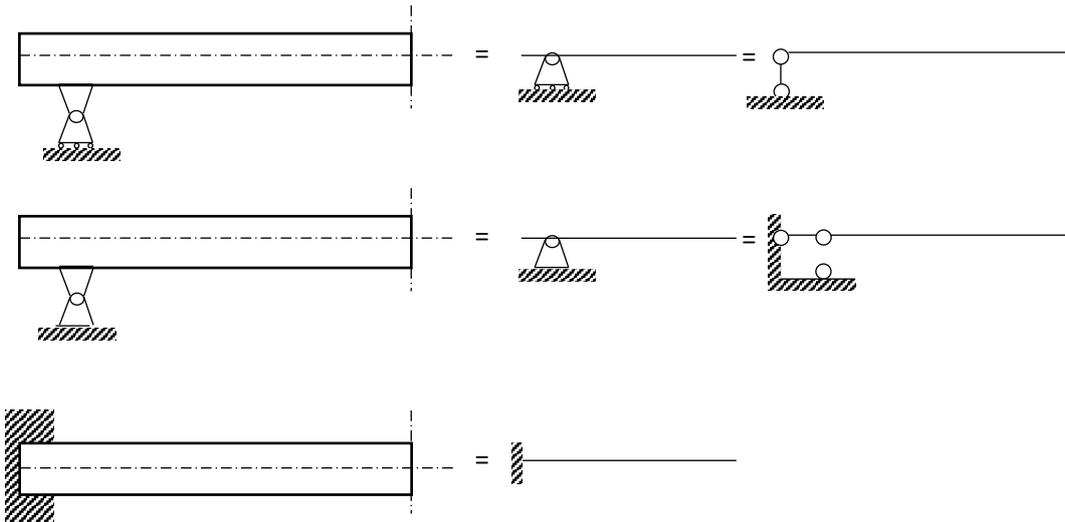


$d = 7 \text{ inc.} - 3 \text{ éq.} = 4$

**I.9.1/ Calcul des réactions d'appuis :**

Le calcul des réactions se fait à l'aide des équations universelles fondamentales d'équilibre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0. \\ \sum F_y = 0. \\ \sum M_{F/o} = 0. \end{array} \right.$$

**I.9.2/ Représentation schématique :****I.10/ Hypothèses générales de comportement :****I.10.1/ hypothèses sur les matériaux :**

Le matériau possédant les caractéristiques de continuité, d'isotropie et d'homogénéité ne subit, sous l'effet extérieur, que de petites déformations de types réversibles (élasticité linéaire). Les équations d'équilibre ne prennent pas en considération les faibles déplacements des points de la structure du matériau (Loi de Hooke généralisée).

- Homogénéité, isotropie et continuité du matériau : on suppose que le matériau a les mêmes propriétés élastiques en tous les points du corps, dans toutes les directions et que le matériau est assimilé à un milieu continu (pas de défaut macroscopique tels que fissures, criques).
- Elasticité linéaire du matériau : On suppose qu'en chaque point, les contraintes et déformations sont proportionnelles et qu'après déformation, l'élément revient à son état initial.

**I.10.2/ Forces extérieures :**

Les forces extérieures sont situées dans le plan de symétrie de la poutre ou disposées symétriquement par rapport à ce plan.

**I.10.3/ Loi de Hooke généralisée :**

Dans le domaine élastique du matériau, les relations entre contraintes et déformations sont linéaires c'est-à-dire, les déformations sont proportionnelles aux contraintes.

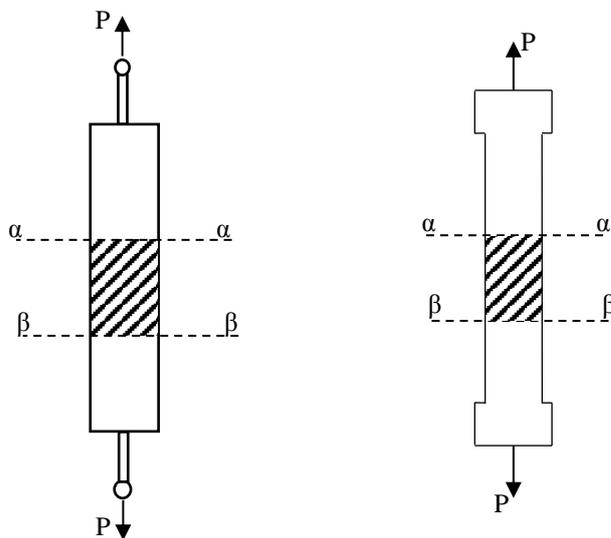
**I.10.4/ Principe de superposition :** (Concernant les petits déplacements)

Les contraintes et les déformations sont liées par la loi de proportionnalité de Hooke, si plusieurs forces agissant simultanément provoquent un petit déplacement, celui-ci est égale à la somme de tous les déplacements que provoqueraient les forces agissant séparément.

**Remarque :** Cette loi est valable pour les contraintes

Des contraintes normales, appliquées au même point de la même section dues à des forces indépendantes agissant simultanément, s'ajoutent algébriquement.

NB : Si le cumul des forces entraîne un dépassement du domaine élastique, la loi n'est plus valable.

**I.10.5/ Principe de St Venant :**

Les parties limitées par les axes  $\alpha\alpha$  et  $\beta\beta$  sont les mêmes dans les deux barreaux qui sont sollicités par des forces de tensions identiques aux extrémités qui diffèrent.

St Venant a montré que les contraintes dans une section, éloignée des points où agissent les efforts ne dépendent que des éléments de réduction du système constitués par les forces appliquées d'un seul côté de cette section. Ces éléments de réductions sont les sollicitations.

Il y a donc une même répartition des déformations et des contraintes dans les 2 cas envisagés.

L'analyse des contraintes et déformations est très complexe au niveau des points d'applications des forces, elle relève du domaine de la théorie de l'élasticité.

En conclusion, nous pouvons dire qu'il existe deux distributions d'effets inégales

- Contraintes locales qui ne sont sensibles qu'aux extrémités de la poutre.
- Contraintes générales qui se propagent dans toute la pièce.

**I.10.6/ Principe de Navier Bernoulli :**

Les sections planes, normales aux fibres avant déformation demeurent planes et normales aux fibres après déformation.

Ils peuvent éventuellement subir un gauchissement de telle sorte que deux sections voisines restent superposables ; mais de manière générale, dans les cas courants, ce phénomène est négligé.

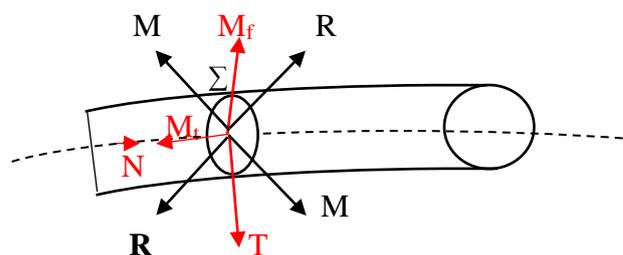
**I.11/ Eléments de réduction des efforts de cohésion (efforts intérieurs) au centre de gravité d'une section normale :****I.11.1/ Définition :**

On appelle force intérieure tout effort se trouvant entre les particules d'un corps. Ces forces tendent à s'opposer aux éventuelles déformations du corps dues aux forces extérieures.

En résistance des matériaux, les forces intérieures qui apparaissent suite à l'application de forces extérieures s'appellent *efforts internes*.

On distingue les efforts internes suivants :

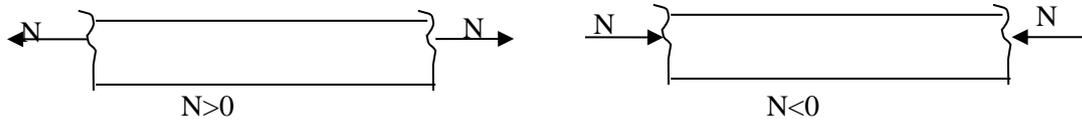
- Effort normal (N) : c'est la somme algébrique des projections sur la normale de la section de toutes les forces extérieures situées d'un même côté de la section considérée.
- Effort tranchant (T) : c'est la somme géométrique des projections, sur le plan de la section de toutes les forces extérieures situées d'un même côté de la section.
- Moment de torsion ( $M_t$ ) : c'est la somme géométrique des moments par rapport à la normale à la section au centre de gravité de toutes les forces extérieures situées d'un même côté.
- Moment de flexion ( $M_f$ ) : c'est la somme géométrique des projections, sur le plan de la section, des moments pris par rapport au centre de gravité des forces extérieures situées d'un même côté de la section.



- R : résultante générale
- N : sur la tangente en G à la ligne moyenne.
- T : dans le plan de  $\Sigma$ .
- M : couple résultant.
- $M_t$  : sur la tangente à la fibre moyenne ; c'est le moment longitudinal dans le cas des poutres à section symétrique.
- $M_f$  : dans le plan de ( $\Sigma$ ).

**I.11.2/ Convention de signe des efforts internes :***a) Effort normal :*

Par convention, l'effort normal est positif s'il est dirigé vers l'extérieur de la section.

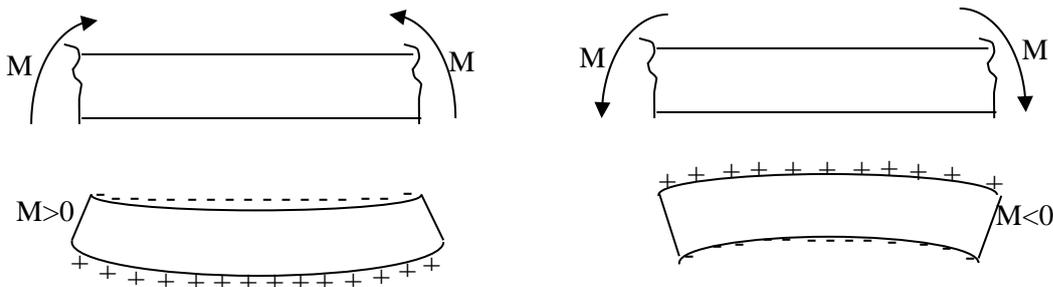


Si  $N$  est dirigé positivement suivant la convention de signe établie, cet effort tend à provoquer un allongement : c'est la **traction**.

Si  $N$  est négatif : il s'agit d'une **compression**.

*b) Moment fléchissant :*

Par convention, le moment de flexion est positif lorsqu'il provoque la traction des fibres inférieures.

*c) Effort tranchant :*

L'effort tranchant est positif lorsqu'il tend à faire tourner un élément de longueur  $dx$  dans le sens des aiguilles d'une montre.

**I.11.3/ Méthode de calcul des efforts internes :**

Le calcul des efforts internes ( $N$ ,  $M$  et  $T$ ) se fait par *la méthode des sections*.

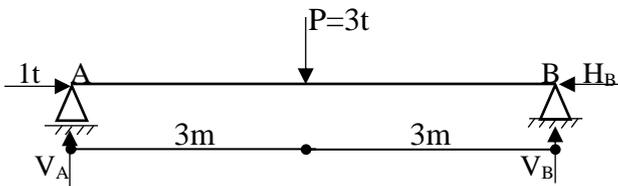
Principe de la méthode :

Lorsqu'un élément est en équilibre, alors chaque partie de cet élément est équilibrée par un système de forces intérieures.

Cette méthode consiste à faire une coupe imaginaire, à l'endroit voulu, de manière à avoir deux tronçons et comme l'élément est en équilibre, on applique les équations de l'équilibre statique sur l'un des deux tronçons pour avoir les valeurs de  $N$ ,  $M$  et  $T$ .

Exemple :

Déterminons les efforts internes de la poutre suivante :



Commençons par calculer les réactions au niveau des appuis A et B :

L'appui A est un appui simple, donc il possède une seule réaction verticale  $V_A$ .

L'appui B est un appui double, donc il possède deux réactions, une réaction verticale  $V_B$  et une réaction horizontale  $H_B$ .

La force  $P = 3t$  est concentrée au milieu ce qui signifie que nous avons une symétrie de charges et de géométrie.

**N.B :**

Dans le cas d'une poutre bi-articulée où nous avons une symétrie de géométrie et de charge, les réactions au niveau des appuis sont identiques et représentent la moitié de la force concentrée. Donc on peut déterminer directement les réactions  $V_A$  et  $V_B$  :

$$\text{Soit } V_A = V_B = \frac{P}{2}$$

1) Calcul des réactions :

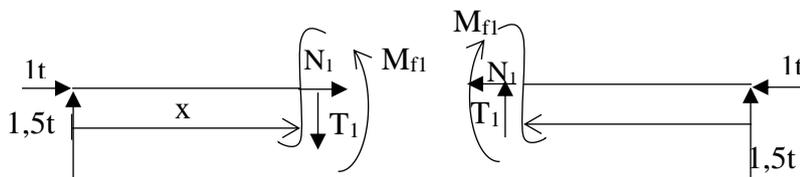
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 1 - H_B = 0 \Rightarrow H_B = 1t$$

$$\text{Par symétrie : } V_A = V_B = \frac{P}{2} = \frac{3}{2} = 1,5t$$

2) Calcul de N, M et T :

On utilise la méthode des sections pour calculer les efforts internes :

Section I:  $0 \leq x \leq 3m$

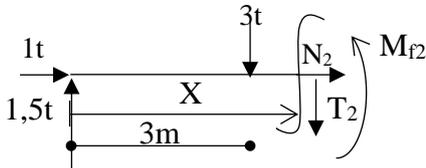


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 1 + N_1 = 0 \Rightarrow N_1 = -1t \text{ (compression)}$$

$$\sum F_{/y} = 0 \Rightarrow T_1 = 1,5t$$

$$\sum M_{/c} = 0 \Rightarrow M_{f1} = 1,5x \begin{cases} x = 0 & M_{f1} = 0 \\ x = 3m & M_{f1} = 4,5t.m \end{cases}$$

**Section II :**  $3m \leq x \leq 6m$



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 1 + N_2 = 0 \Rightarrow N_2 = -1t(\text{compression})$$

$$\sum F_{/y} = 0 \Rightarrow T_2 = 1,5 - 3 = -1,5 t$$

$$\sum M_{/c} = 0 \Rightarrow M_{f2} = 1,5x - 3(x-3) \begin{cases} x = 3m & M_{f2} = 4,5tm \\ x = 6m & M_{f2} = 0 \end{cases}$$

**I.12/ Notions sur la détermination des contraintes :**

En général, le vecteur-contrainte résultant en un point quelconque d'une section droite est décomposé :

- en deux composantes :  $\sigma_x, \tau_x$  (figure I.4,a).
- en trois composantes :  $\sigma_x, \tau_{xy}$  et  $\tau_{xz}$  (figure I.4,b).

Avec  $\sigma_x$  : contrainte normale due à l'effort normal  $N_x$ , aux moments de flexion  $M_y$  (dans le plan  $xoz$ ) et  $M_z$  (dans le plan  $xoy$ ).

$\tau_x$  : contrainte tangentielle due au moment de torsion  $M_x$ .

$\tau_{xy}$  et  $\tau_{xz}$  sont les composantes de  $\tau_x$  dans les plans  $xoy$  et  $xoz$ , dues respectivement aux efforts tranchants  $T_y$  et  $T_z$ .

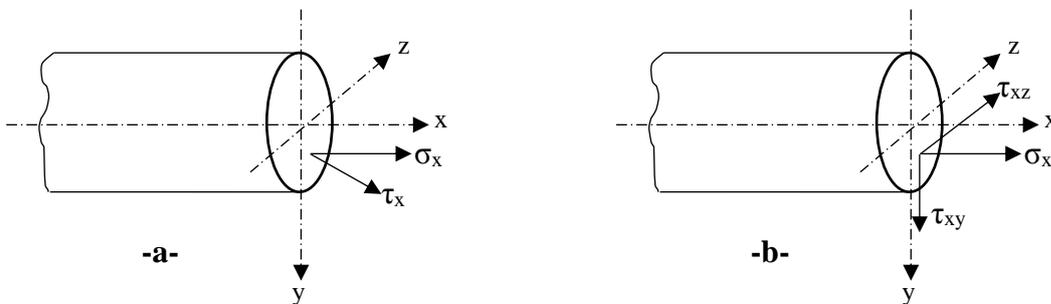


Figure I.5

D'après le principe de superposition, les contraintes normale et tangentielle en un point quelconque de la section peuvent être données par la somme des composantes provoquées par les efforts correspondants :

$$\sigma_x = \sigma_x(N_x) + \sigma_x(M_y) + \sigma_x(M_z)$$

$$\tau_x = \tau_x(M_x) + \tau_x(T_y) + \tau_x(T_z)$$

### **I.12.a/ Contraintes normales :**

Dans le cas de la traction (ou compression) simple, la contrainte normale  $\sigma_x$  s'écrit sous la forme :

$$\sigma_x = \frac{N_x}{S} \text{ (voir chapitre traction – compression).}$$

Où  $N_x$  est l'effort normal de traction (ou compression) et  $S$  est la surface de la section droite de la barre.

Dans le cas de la flexion pure, la contrainte normale  $\sigma_x$  s'écrit sous la forme :

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} Y \text{ (dans le plan } xoy) \text{ et } \frac{M_y}{I_y} Z \text{ (dans le plan } xoz) \text{ (voir chapitre flexion pure)}$$

où  $I_y$  et  $I_z$  sont les moments d'inertie axiaux de la section droite suivant  $Y$  et  $Z$ .

Donc l'expression de  $\sigma_x$  pour le cas général d'une sollicitation peut être écrite sous la forme :

$$\sigma_x = \frac{N_x}{S} + \frac{M_y}{I_y} Z + \frac{M_z}{I_z} Y$$

### **I.12.b/ Contraintes tangentielles :**

Les contraintes tangentielles se caractérisent par la formule de Jourawski :

$$\tau_{xy} = \frac{T_y \cdot M_{S/z}}{b_0 \cdot I_z}; \left( \text{ou } \tau_{xz} = \frac{T_z \cdot M_{S/y}}{b_0 \cdot I_y} \right)$$

Avec,  $b_0$  est la largeur de la fibre étudiée.

$M_S$  est le moment statique de la section droite par rapport à l'axe  $z$  ou  $y$ .

Dans le cas de la torsion simple, la contrainte tangentielle s'écrit sous la forme :

$$\tau_x = \frac{M_x}{W_p} \text{ où } M_x \text{ est le moment de torsion et } W_p \text{ est le moment résistant polaire.}$$

$$W_p = \frac{I_p}{r}$$

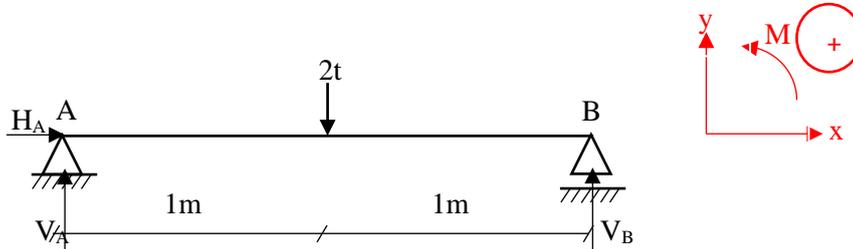
$I_p$ : moment d'inertie polaire

$r$ : rayon de la section

**EXERCICES**

Calculer les réactions d'appuis des systèmes suivants :

1)



Nous avons une poutre reposant sur deux appuis (A et B) soumise à une force concentrée au milieu :

l'appui A est un appui double donc il possède deux réactions ; une réaction horizontale ( $H_A$ ) et une réaction verticale ( $V_A$ ) ;

l'appui B est un appui simple, donc il possède une seule réaction verticale ( $V_B$ ) ;

Commençons par calculer le degré d'hyperstaticité :

$d = n_{\text{eq}} - n_i = 3 - 3 = 0$  donc la poutre est isostatique.

Calculons ensuite les réactions des appuis A et B :

$$\begin{cases} \sum F_{/x} = 0 \\ \sum F_{/y} = 0 \\ \sum M_{/A} = 0 \\ \sum M_{/B} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A + V_B = 2t \\ 2V_B - (2 \times 1) = 0 \\ -2V_A + (2 \times 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A + V_B = 2t \\ V_B = 1t \\ V_A = 1t \end{cases}$$

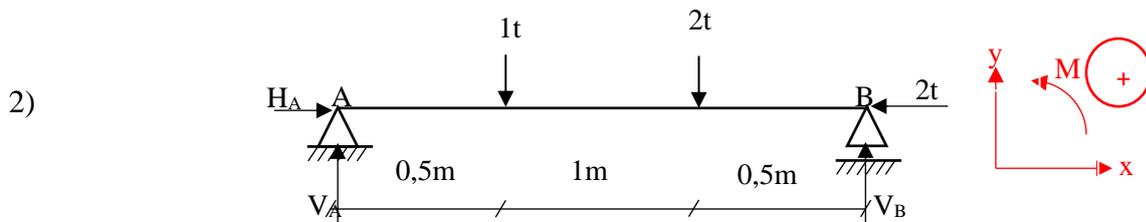
**Vérification :**

$V_A + V_B = 1 + 1 = 2t$  donc l'équation de l'équilibre des forces par rapport à l'axe Y est vérifiée.

**N.B. :**

Comme nous avons une symétrie totale, on peut calculer directement  $V_A$  et  $V_B$  :

$$V_A = V_B = \frac{P}{2} = \frac{2}{2} = 1t$$



$$\sum F_{/x} = 0 \Rightarrow H_A - 2 = 0 \Rightarrow H_A = 2t$$

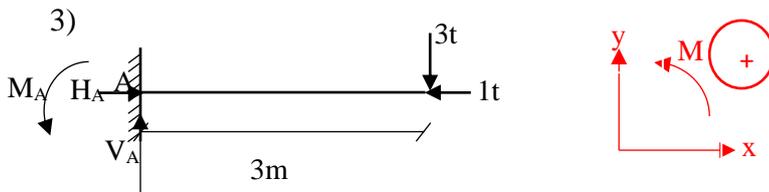
$$\sum F_{/y} = 0 \Rightarrow V_A + V_B = 2 + 1 = 3t$$

$$\sum M_{/A} = 0 \Rightarrow 2V_B - 2(1,5) - 1(0,5) = 0 \Rightarrow V_B = 1,75t$$

$$\sum M_{/B} = 0 \Rightarrow -2V_A + 1(1,5) + 2(0,5) = 0 \Rightarrow V_A = 1,25t$$

**Vérification :**

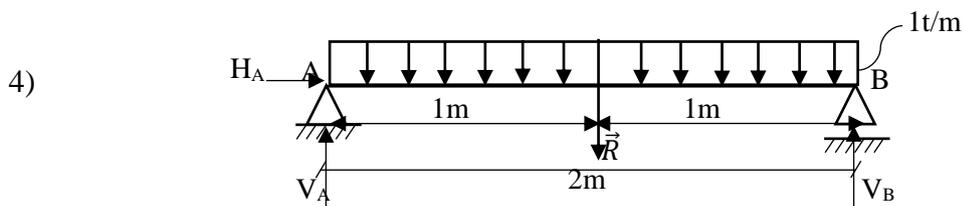
$V_A + V_B = 1,25 + 1,75 = 3t$  donc l'équation de l'équilibre des forces par rapport à l'axe Y est vérifiée.



$$\sum F_{/x} = 0 \Rightarrow H_A = 1t$$

$$\sum F_{/y} = 0 \Rightarrow V_A = 3t$$

$$\sum M_{/A} = 0 \Rightarrow M_A = 3(3) = 9t.m$$

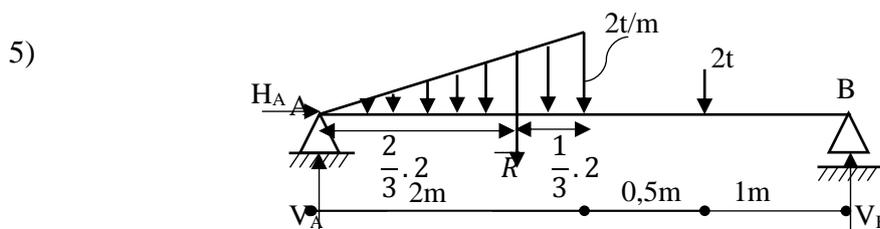


$$\sum F_{/x} = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum F_{/y} = 0 \Rightarrow V_A + V_B = R = 1 \times 2 = 2t \text{ (aire du rectangle).}$$

$$\sum M_{/A} = 0 \Rightarrow 2V_B = (1 \times 2) \left(\frac{2}{2}\right) \Rightarrow V_B = 1t$$

$$\sum M_{/B} = 0 \Rightarrow 2V_A = (1 \times 2) \left(\frac{2}{2}\right) \Rightarrow V_A = 1t$$



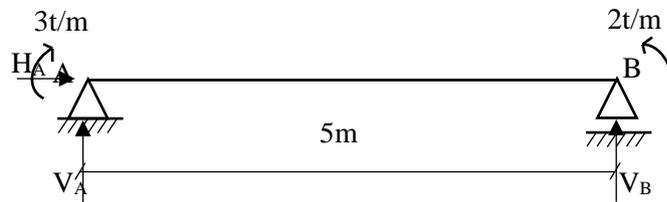
$$\sum F_{/x} = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum F_{/y} = 0 \Rightarrow V_A + V_B = 2 + R = 2 + \frac{2 \times 2}{2} = 4t$$

$$\sum M_{/A} = 0 \Rightarrow 3,5V_B = 2(2,5) + \left(\frac{2 \times 2}{2}\right)\left(\frac{2}{3} \cdot 2\right) \Rightarrow V_B = 2,19 \text{ t}$$

$$\sum M_{/B} = 0 \Rightarrow 3,5V_A = 2\left[\left(\frac{1}{3} \cdot 2\right) + 1,5\right] + 2(1) \Rightarrow V_A = 1,81 \text{ t}$$

6)



$$\sum F_{/x} = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum F_{/y} = 0 \Rightarrow V_A + V_B = 0 \text{ donc } V_A \text{ et } V_B \text{ vont former un couple inverse.}$$

$$\sum M_{/A} = 0 \Rightarrow 5V_B + 2 - 3 = 0 \Rightarrow V_B = \frac{-2 + 3}{5} = 0,2 \text{ t}$$

$$\sum M_{/B} = 0 \Rightarrow 5V_A + 3 - 2 = 0 \Rightarrow V_A = -0,2 \text{ t}$$

## **CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DES SECTIONS PLANES**

**II.1/ Introduction :**

La résistance d'une barre dépend non seulement du matériau et de ses dimensions, mais aussi de la configuration de son axe, de la forme des sections transversales ainsi que de leur disposition par rapport aux charges de sollicitations.

Dans le présent chapitre, nous allons voir comment déterminer les caractéristiques géométriques principales des sections transversales d'une barre.

**II.2/ Aire d'une section :**

L'aire d'une section est définie par l'intégrale :

$$A = \int_A dA \dots \dots (II.1) : \text{milieu continu}$$

Pour une section composée de sections usuelles, l'aire est égale à la somme des aires des sections :

$$A = \sum_{i=1}^n A_i : \text{milieu discet.}$$

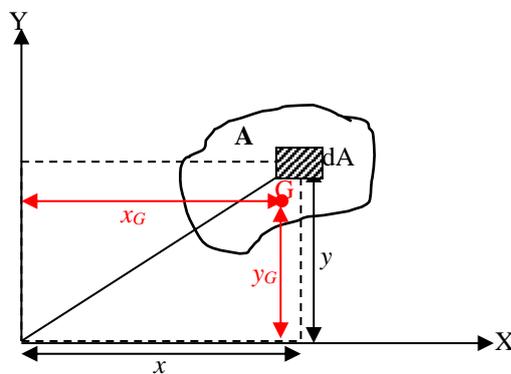
**II.3/ Moment statique :**

Par définition, le moment statique d'une section par rapport à un axe quelconque est égal au produit de l'aire de la section par la distance entre son centre de gravité G et cet axe.

$$\left\{ \begin{array}{l} S_x = \int_A y dA \\ S_y = \int_A x dA \end{array} \right\} \dots \dots (II.2)$$

$S_x$  : moment statique par rapport à l'axe X.

$S_y$ : moment statique par rapport à l'axe Y.



**Figure II.1 : vue d'une section plane.**

A : section totale,

dA : section élémentaire,

x : distance entre la section élémentaire dA et l'axe Y,

y : distance entre la section élémentaire dA et l'axe X,

G : centre de gravité de la section A,

$x_G$ : distance entre le centre de gravité de la section A et l'axe Y,

$y_G$ : distance entre le centre de gravité de la section A et l'axe X,

L'unité du moment statique est une unité de longueur à la puissance 3.

Le moment statique de la section totale (A) par rapport aux axes de référence X et Y peut s'écrire sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} S_x = \int_A y dA = A \cdot y_G \\ S_y = \int_A x dA = A \cdot x_G \end{array} \right\} \dots \dots (II.3)$$

Pour une section composée (A), le moment statique de cette section par rapport à l'axe X ou Y est la somme des moments statiques des sections élémentaires par rapport à ce même axe., soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} S_x = \sum_{i=1}^n A_i \cdot y_i \\ S_y = \sum_{i=1}^n A_i \cdot x_i \end{array} \right\} \dots \dots (II.4)$$

**Remarque :**

**Le moment statique total d'une section par rapport à son centre de gravité est nul.**

#### **II.4/ Centre de gravité :**

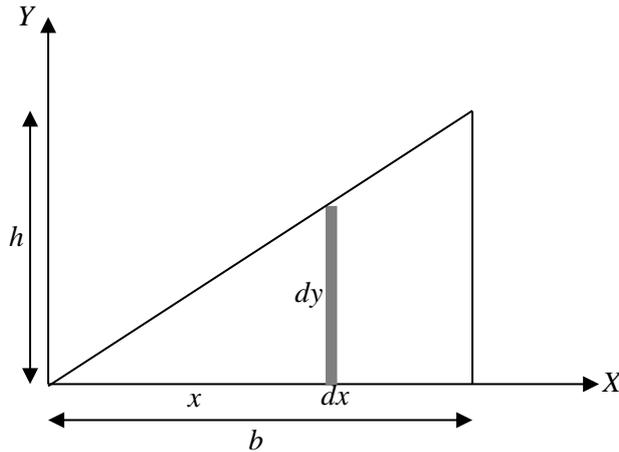
Le centre de gravité G d'une section est le point tel que le moment statique de la section par rapport à n'importe quel axe passant par ce point est nul.

D'après les formules (II.3) et (II.4), les coordonnées du centre de gravité  $X_G$  et  $Y_G$  s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_G = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \\ Y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \end{array} \right\} \dots \dots (II.5)$$

**Exemple :**

Proposons-nous de déterminer l'aire d'une section triangulaire ainsi que les coordonnées de son centre de gravité :



1) Détermination de l'aire de la section :

$$\text{On a : } A = \int_A dA$$

$$dA = dx \cdot dy$$

$$dy = ?$$

D'après le théorème de Thalès (triangles semblables):  $\frac{h}{b} = \frac{dy}{x} \Rightarrow dy = \frac{h}{b}x$

$$dA = dx \cdot \frac{h}{b}x$$

$$\rightarrow A = \int_0^b \frac{h}{b}x \cdot dx = \left[ \frac{h \cdot x^2}{2b} \right]_0^b$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \frac{bh}{2}}$$

2) Détermination de la position du centre de gravité de la section :

d'après la formule 2.5 :

$$\begin{cases} X_G = \frac{S_y}{A} \\ Y_G = \frac{S_x}{A} \end{cases}$$

**Cherchons les moments statiques par rapport aux axes X et Y :**

Par rapport à l'axe X :

$$S_x = \int_A y dA,$$

$$\text{avec } y = \frac{dy}{2} = \frac{hx}{2b}$$

$$\rightarrow S_x = \int_0^b \frac{hx}{2b} \cdot \frac{hx}{b} dx = \frac{h^2}{2b^2} \int_0^b x^2 dx = \left[ \frac{h^2 x^3}{6b^2} \right]_0^b$$

$$\Rightarrow \boxed{S_x = \frac{bh^2}{6}}$$

Par rapport à l'axe Y:

$$S_y = \int_A x dA$$

$$\rightarrow S_y = \int_0^b x \cdot \frac{hx}{b} dx = \frac{h}{b} \int_0^b x^2 dx = \left[ \frac{hx^3}{3b} \right]_0^b$$

$$\Rightarrow \boxed{S_y = \frac{hb^2}{3}}$$

En remplaçant  $S_x$  et  $S_y$  dans les expressions de  $X_G$  et  $Y_G$ , on trouve :

$$\begin{cases} X_G = \frac{S_y}{A} = \frac{2}{3}b \\ Y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{1}{3}h \end{cases}$$

### II.5/ Moment d'inertie :

Le moment d'inertie (ou moment quadratique) d'une section est défini par l'intégrale :

$$\left. \begin{aligned} I_x &= \int_A y^2 dA : \text{moment d'inertie par rapport à l'axe X.} \\ I_y &= \int_A x^2 dA : \text{moment d'inertie par rapport à l'axe Y.} \end{aligned} \right\} \text{(II.6)}$$

$y$  : distance entre la section élémentaire  $dA$  et l'axe X.

$x$  : distance entre la section élémentaire  $dA$  et l'axe Y.

L'unité du moment d'inertie est une unité de longueur à la puissance 4.

#### **Exemple :**

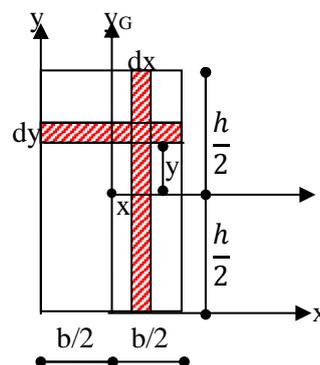
On se propose de déterminer l'expression du moment d'inertie d'une section rectangulaire par rapport aux axes  $X_G$  et  $Y_G$ .

$$I_{x_G} = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 b dy = b \left[ \frac{y^3}{3} \right]_{-h/2}^{+h/2}$$

$$\rightarrow \boxed{I_{x_G} = \frac{bh^3}{24} + \frac{bh^3}{24} = \frac{bh^3}{12}}$$

$$I_{y_G} = \int_A x^2 dA = \int_{-b/2}^{+b/2} x^2 h dx = h \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-b/2}^{+b/2}$$

$$\rightarrow \boxed{I_{y_G} = \frac{hb^3}{24} + \frac{hb^3}{24} = \frac{hb^3}{12}}$$



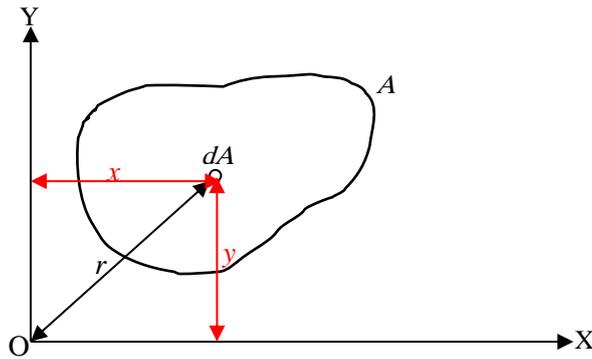
**II.6/ Moment d'inertie polaire :**

Figure II.2

Le moment d'inertie polaire d'une section par rapport au point O est défini par l'intégrale :

$$I_p = I_o = \int_A r^2 \cdot dA \dots\dots(\text{II.7})$$

avec  $r^2 = x^2 + y^2$  (théorème de Pythagore).

**donc l'expression (II.7) devient :**

$$I_p = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = I_y + I_x$$

$$\rightarrow I_P = I_x + I_y \dots\dots(\text{II.8})$$

**r :** distance entre la surface élémentaire dA et le point O appelé pôle (figure II.2).

**II.7/ Rayon de giration (rayon d'inertie) :**

Le rayon de giration d'une section A par rapport à un axe est défini par la relation suivante :

$$\text{Par rapport à l'axe } x : r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

$$\text{Par rapport à l'axe } Y : r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

L'unité du rayon de giration est une unité de longueur à la puissance 1.

**Exemple :**

Soit une section de forme circulaire.

On se propose de déterminer:

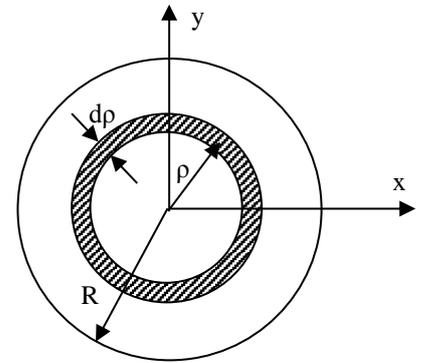
- le moment d'inertie polaire d'une section circulaire par rapport à O,
- le moment d'inertie de cette même section par rapport à son diamètre,
- le rayon de giration par rapport au centre et au diamètre de la section.

**1) Moment d'inertie polaire :**

$$I_o = \int_A \rho^2 \cdot dA = \int_0^R \rho^2 \cdot 2\pi \cdot \rho \cdot d\rho = 2\pi \int_0^R \rho^3 d\rho$$

$$I_o = 2\pi \cdot \frac{1}{4} R^4$$

$$\rightarrow I_o = \frac{\pi R^4}{2}$$

**2) Moment d'inertie par rapport à un diamètre :**

$$\text{D'après la formule II. 8, } I_o = I_{xx} + I_{yy} = \frac{\pi R^4}{2}$$

$$\text{Par symétrie, } I_{xx} = I_{yy} = \frac{I_o}{2} = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$\rightarrow I_{xx} = I_{yy} = \frac{\pi R^4}{4}$$

**3) Rayon de giration par rapport au centre et au diamètre :**

a) Par rapport au centre :

$$r_o = \sqrt{\frac{I_o}{A}} = \sqrt{\frac{\pi R^4}{2 \cdot \pi R^2}}$$

$$\rightarrow r_o = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

b) Par rapport au diamètre :

$$r_{xx} = \sqrt{\frac{I_{xx}}{A}} = \sqrt{\frac{\pi R^4}{4 \cdot \pi R^2}} = \frac{R}{2}$$

$$\rightarrow r_{xx} = \frac{R}{2}$$

**II.8/ Moment d'inertie centrifuge (produit d'inertie) :**

Le moment d'inertie centrifuge peut être déterminé par l'intégrale suivante :

$$I_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA = A \cdot x_G \cdot y_G \dots \dots \dots (\text{II.9})$$

**Remarque :**

**Le moment d'inertie centrifuge par rapport aux axes centraux principaux est nul.**

**II.9/ Variation des moments d'inertie :****II.9.1/ Translation des axes (théorème de Huygens):**

Soit la section représentée par la figure II.3.

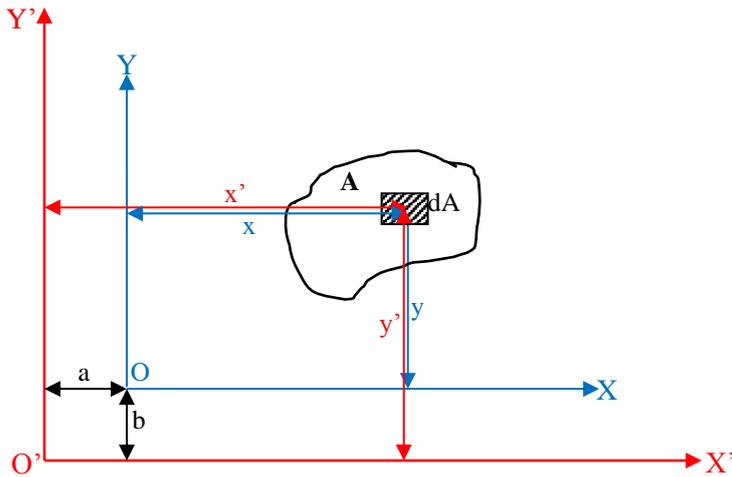


Figure II.3

On se propose de calculer les moments d'inertie par rapport aux axes X' et Y' :

$$x' = x + a$$

$$y' = y + b$$

$$I_{x'} = \int_A y'^2 dA = \int_A (y + b)^2 dA = \int_A y^2 dA + \int_A b^2 dA + \int_A 2ybdA$$

$$= \int_A y^2 dA + b^2 \int_A dA + 2b \int_A y dA$$

$$\Rightarrow I_{x'} = I_x + b^2 \cdot A + 2b \cdot S_x \dots\dots(II.11)$$

Il en est de même pour I<sub>y'</sub> :

$$I_{y'} = \int_A x'^2 dA = \int_A (x + a)^2 dA = \int_A x^2 dA + \int_A a^2 dA + \int_A 2xadaA$$

$$= \int_A x^2 dA + a^2 \int_A dA + 2a \int_A x dA$$

$$\Rightarrow I_{y'} = I_y + a^2 \cdot A + 2a \cdot S_x \dots\dots(II.12)$$

Dans le cas où le point O coïncide avec le centre de gravité de la section, les moments statiques S<sub>x</sub> et S<sub>y</sub> s'annulent.

donc les relations (II.11) et (II.12) deviennent :

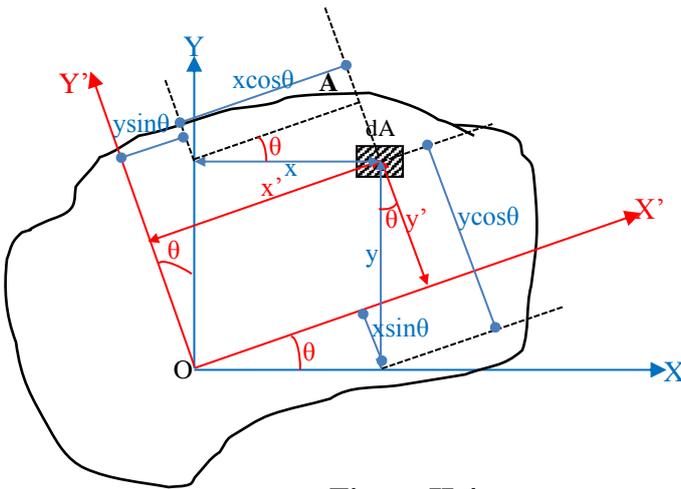
$$I_{x'} = I_x + b^2 \cdot A \dots\dots(II.11)'$$

$$I_{y'} = I_y + a^2 \cdot A \dots\dots(II.12)'$$

$$I_{x'y'} = I_{xy} + a \cdot b \cdot A \dots\dots(II.13)$$

**II.9.2/ Rotation des axes :**

Calculons les moments d'inertie  $I_{x'}$ ,  $I_{y'}$ ,  $I_{x'y'}$  par rapport aux axes  $x'$  et  $y'$  de la section suivante :



**Figure II.4**

$$I_{x'} = \int_A y'^2 dA$$

$$I_{y'} = \int_A x'^2 dA$$

Avec :

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' = y \cos \theta - x \sin \theta \end{cases}$$

$\theta$  est l'angle que forment les axes  $x, y$  avec les axes  $x', y'$ .

$$I_{x'} = \int_A y'^2 dA = \int_A (y \cos \theta - x \sin \theta)^2 dA = \int_A y^2 \cos^2 \theta dA + \int_A x^2 \sin^2 \theta dA - 2 \int_A x^2 y^2 \sin \theta \cos \theta dA$$

$$\rightarrow I_{x'} = I_x \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta - 2 I_{xy} \sin \theta \cdot \cos \theta \dots \dots II.14$$

Avec :

$$\begin{cases} \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \\ \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \\ \sin \theta \cdot \cos \theta = \frac{\sin 2\theta}{2} \end{cases}$$

$$\rightarrow I_{x'} = \frac{1}{2} I_x (1 + \cos 2\theta) + \frac{1}{2} I_y (1 - \cos 2\theta) - 2 \cdot \frac{1}{2} I_{xy} \cdot \sin 2\theta$$

$$\rightarrow I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right) \cos 2\theta - I_{xy} \cdot \sin 2\theta \dots \dots II. 14'$$

De même pour  $I_{y'}$  :

$$I_{y'} = \int_A x'^2 dA = \int_A (x \cos \theta + y \sin \theta)^2 dA = \int_A x^2 \cos^2 \theta dA + \int_A y^2 \sin^2 \theta dA + 2 \int_A x^2 y^2 \sin \theta \cos \theta dA$$

$$\rightarrow I_{y'} = I_x \sin^2 \theta + I_y \cos^2 \theta + 2I_{xy} \sin \theta \cdot \cos \theta \dots \dots II. 15$$

$$\rightarrow I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right) \cos 2\theta + I_{xy} \cdot \sin 2\theta \dots \dots II. 15'$$

De même également pour  $I_{x'y'}$  :

$$I_{x'y'} = \int_A x'y' dA = \int_A (x \cos \theta + y \sin \theta)(y \cos \theta - x \sin \theta) dA \Rightarrow \int_A x^2 \sin \theta \cdot \cos \theta dA + \int_A xy \cos^2 \theta dA + \int_A y^2 \sin \theta \cdot \cos \theta dA - \int_A xy \sin^2 \theta dA$$

$$\rightarrow I_{x'y'} = (I_x - I_y) \sin \theta \cdot \cos \theta + I_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \dots \dots II. 16$$

$$\rightarrow I_{x'y'} = I_{xy} \cos 2\theta + \frac{(I_x - I_y)}{2} \sin 2\theta \dots \dots II. 16'$$

On remarque qu'en additionnant les équations II.15 et II.16 ou bien II.15' et II.16', nous aurons :  
 $I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y = I_p$

**II.9.3/ Détermination de la direction des axes d'inertie principaux :**

Pour ce faire, on va chercher la valeur de l'angle  $\theta$  qui permet de déterminer les moments d'inertie extrêmes ( $I_{\max}$  et  $I_{\min}$ ). Pour cela, on va poser la dérivée de  $I_{x'}$  ou de  $I_{y'}$  égale à zéro :

$$\frac{dI_{x'}}{d\theta} = 0 \Rightarrow (I_y - I_x) \sin 2\theta - 2I_{xy} \cdot \cos 2\theta = 0$$

$$\rightarrow \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{2I_{xy}}{(I_y - I_x)}$$

$$\rightarrow \text{tg} 2\theta = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} \dots \dots II. 17$$

En introduisant cette dernière relation dans la formule II. 14' et en se servant des

relations trigonométriques  $\left\{ \begin{array}{l} \cos 2\theta = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 2\theta}} \\ \sin 2\theta = \pm \frac{\text{tg} 2\theta}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 2\theta}} \end{array} \right.$ , on obtient :

$$\begin{cases} I_{max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \\ I_{min} = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \end{cases}$$

-> ce sont les moments d'inertie principaux correspondants aux axes principaux d'inertie.

Symbolisation des axes principaux en fonction du signe de l'angle de rotation  $\theta$  :

- Lorsque l'angle  $\theta$  est positif, ce dernier se mesure à partir de l'axe de départ  $x$  dans le sens antihoraire (sens trigonométrique) (figure II.5.a).
- Lorsque l'angle  $\theta$  est négatif, ce dernier se mesure à partir de l'axe de départ  $x$  dans le sens horaire (figure II.5.b).

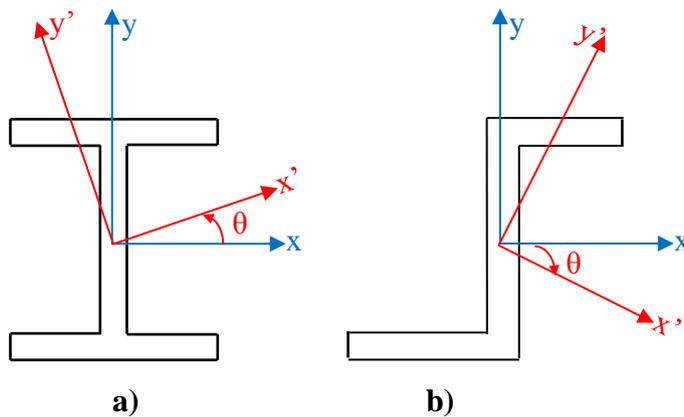


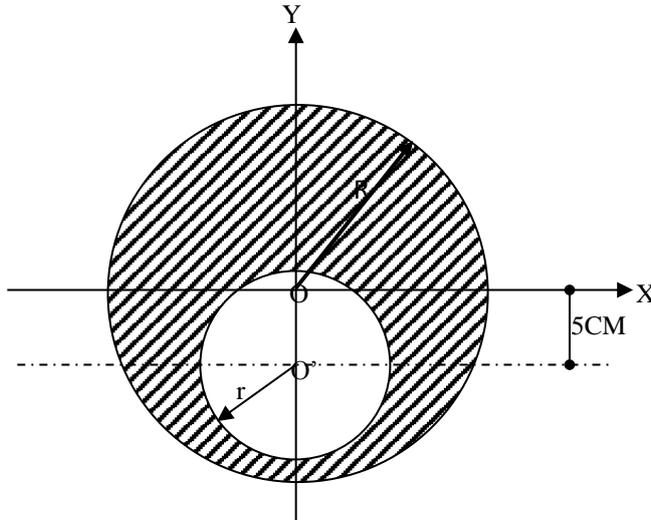
Figure II.5

### II.10/ Module de résistance :

Le module de résistance ( $W$ ) appelé aussi moment résistant, est défini par le rapport du moment d'inertie par rapport à un axe donné à la distance de cet axe, jusqu'au point le plus éloigné de la section transversale ( $y_{max}$ ).

Soit:  $W_x = \frac{I_x}{y_{max}}$  : Module de résistance par rapport à l'axe  $X$  ... .. (II.10)

L'unité du module de résistance est une unité de longueur à la puissance 3.

**EXERCICES****Exercice 1 :**

Déterminer le centre de gravité de l'aire hachurée représentée par la figure ci-dessus.

On donne :  $R = 30$  cm,  $r = 15$  cm.

**Solution :**

$$X_G = 0$$

$$Y_G = ?$$

On va positionner  $Y_G$  par rapport à O, origine du repère.

$$Y_G = \frac{S_{/x}}{A} = \frac{\text{moment statique de l'aire hachurée par rapport à } OX}{\text{aire hachurée}}$$

$S_{/x}$  = moment statique de l'aire du grand cercle (G.C) par rapport à OX – moment statique de l'aire du petit cercle (P.C) par rapport à OX.

$$S_x = S_x^{GC} - S_x^{PC} = 0 - [-(\pi r^2 \cdot 5)]$$

$$S_x = 5\pi r^2$$

Aire hachurée = aire du grand cercle – aire du petit cercle.

$$A = \pi R^2 - \pi r^2$$

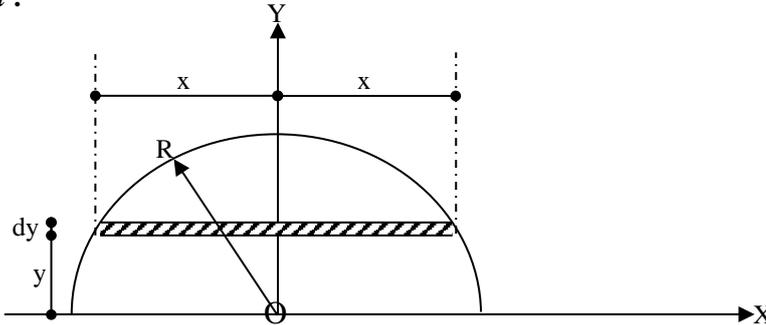
$$Y_G = \frac{5\pi r^2}{\pi(R^2 - r^2)} = \frac{5r^2}{(R^2 - r^2)} = \frac{5(15)^2}{(30^2 - 15^2)}$$

$$\boxed{Y_G = 1,67 \text{ cm}}$$

**Exercice 2 :**

Déterminer le moment statique ainsi que la position la du centre de gravité d'un demi-cercle par rapport à un de ses diamètres.

**Solution :**



1) *Moment statique par rapport à (OX) :*

$$S_{/x} = \int_S y dA \text{ avec } dA = 2x \cdot dy$$

$$\rightarrow S_{/x} = \int_S y \cdot 2x \cdot dy$$

$$x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow x = \sqrt{R^2 - y^2}$$

$$S_{/x} = 2 \int_0^R y \sqrt{R^2 - y^2} dy$$

$$\text{Posons } U = R^2 - y^2 \Rightarrow dU = -2y dy$$

Etude des nouvelles bornes de l'intégrale :

$$y = R \rightarrow U = R^2 - R^2 = 0$$

$$y = 0 \rightarrow U = R^2 - 0^2 = R^2$$

$$S_x = 2 \int_{R^2}^0 y \sqrt{U} \frac{dU}{-2y} = -2 \cdot \frac{1}{2} \int_{R^2}^0 \sqrt{U} dU = \left[ \frac{2}{3} U^{3/2} \right]_0^{R^2} = \frac{2}{3} \left[ (R^2)^{3/2} - 0 \right] = \frac{2}{3} R^3$$

$$\rightarrow \boxed{S_x = \frac{2}{3} R^3}$$

2) *Position du centre de gravité :*

$$Y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{2}{3} R^3 \cdot \frac{1}{\frac{\pi R^2}{2}}$$

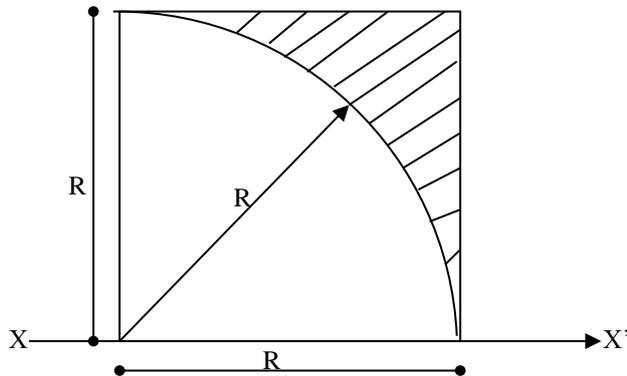
$$\rightarrow \boxed{Y_G = \frac{4R}{3\pi}}$$

**Exercice 3 :**

On donne un carré de côté R et un quart de cercle de rayon R inscrit dans ce carré.

On demande de :

- Calculer l'aire hachurée.
- Déterminer l'ordonnée du centre de gravité par rapport à l'axe (XX').



**Solution :**

1) Calcul de A :

Aire hachurée = aire du carré – aire du quart de cercle

$$\rightarrow A = R^2 - \frac{\pi R^2}{4}$$

$$\boxed{\rightarrow A = R^2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)}$$

2) Calcul de  $y_G$  :

$$Y_G = \frac{S_{/X}}{A_i} = \frac{S_{1/X} - S_{2/X}}{R^2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$S_{1/x}$ : Moment statique du carré par rapport à XX' =  $R^2 \cdot \frac{R}{2}$

$S_{2/x}$ : Moment statique du quart de cercle par rapport à XX' =

$\frac{1}{2}$  moment statique d'un demi cercle par rapport à son diamètre (voir exercice 2) =

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} R^3$$

$$S_{/x} = \left[ R^2 \cdot \frac{R}{2} \right] - \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} R^3 \right] = \frac{R^3}{2} - \frac{R^3}{3} = \frac{R^3}{6}$$

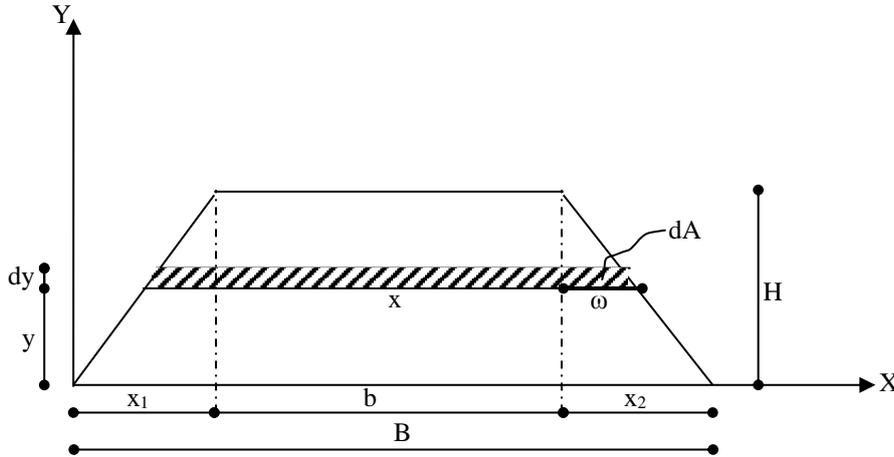
$$Y_G = \frac{R^3}{6R^2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\boxed{\rightarrow Y_G = \frac{R}{6 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)}}$$

**Exercice 4 :**

Déterminer le moment d'inertie d'un trapèze isocèle par rapport à sa grande base.

**Solution :**



$$I_x = \int_A y^2 dA$$

$dA = dy \cdot x$  avec  $x$  varie en fonction de  $H$ .

$$x = b + 2 \cdot \omega \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{or } \frac{\omega}{x_1} = \frac{H - y}{H} \Rightarrow \omega = \frac{H - y}{H} x_1$$

$$\text{avec } x_1 = \frac{B - b}{2}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{B - b}{2} \cdot \frac{H - y}{H} \dots \dots (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \rightarrow x = b + 2 \cdot \frac{B - b}{2} \cdot \frac{H - y}{H} = \frac{bH + (B - b)(H - y)}{H}$$

$$dA = dy \cdot x = \frac{bH + (B - b)(H - y)}{H} dy$$

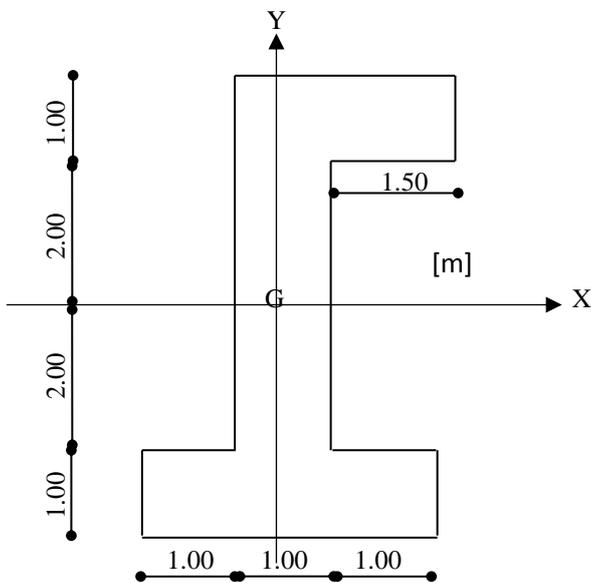
$$I_x = \int_0^H y^2 \cdot \frac{bH + (B - b)(H - y)}{H} dy = \int_0^H \frac{bH}{H} y^2 dy + \int_0^H \frac{(B - b)(H - y)}{H} y^2 dy$$

$$= \frac{bH^3}{3} + \int_0^H \frac{(B - b)}{H} H \cdot y^2 dy - \int_0^H \frac{(B - b)}{H} y \cdot y^2 dy$$

$$= \frac{bH^3}{3} + (B - b) \cdot \frac{1}{3} H^3 - \frac{(B - b)}{H} \cdot \frac{1}{4} \cdot H^4$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{bH^3}{3} + (B - b) \cdot \left( \frac{1}{3}H^3 - \frac{1}{4}H^3 \right) \\
 &= \frac{bH^3}{3} + (B - b) \cdot \left( \frac{4H^3 - 3H^3}{12} \right) \\
 &= \frac{bH^3}{3} + (B - b) \cdot \frac{H^3}{12} \\
 &= \frac{H^3}{3} \left[ b + \frac{B - b}{4} \right] = \frac{H^3}{3} \left[ \frac{4b + B - b}{4} \right] \\
 &= \frac{H^3}{3} \left[ \frac{3b + B}{4} \right] = \frac{H^3}{12} (3b + B)
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\rightarrow I_x = \frac{H^3}{12} (3b + B)}$$

**Exercice 5 :**

- Déterminer  $I_x$  et  $I_y$ .
- Déterminer  $I_{xy}$ .

**Solution :**

\* Calcul de  $I_x$  :

$$I_x = I_{1/X} + I_{2/X} + I_{3/X} = \left[ \frac{2,5(1)^3}{12} + (2,5 \times 1)(2,5)^2 \right] + \left[ \frac{1(4)^3}{12} \right] + \left[ \frac{3(1)^3}{12} + (3 \times 1)(2,5)^2 \right]$$

$$\boxed{I_x = 40,16 \text{ m}^4}$$

\* Calcul de  $I_y$  :

$$I_y = I_{1/Y} + I_{2/Y} + I_{3/Y} = \left[ \frac{1(2,5)^3}{12} + (1 \times 2,5) \left( 2 - \frac{2,5}{2} \right)^2 \right] + \left[ \frac{4(1)^3}{12} \right] + \left[ \frac{1(3)^3}{12} \right]$$

$$\boxed{I_y = 5,29 \text{ m}^4}$$

\* Calcul du produit d'inertie  $I_{xy}$  :

$$I_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA = A_1 \cdot x_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot x_2 \cdot y_2 + A_3 \cdot x_3 \cdot y_3$$

$$I_{XY} = I_{XY}^1 + I_{XY}^2 + I_{XY}^3 = \left[ (2,5 \times 1) \cdot \left( \frac{2,5}{2} - \frac{1}{2} \right) (3 - 0,5) \right] + [(4 \times 1) \cdot (0)(0)] +$$

$$[(3 \times 1) \cdot (-2,5)(0)]$$

$$\rightarrow \boxed{I_{XY} = 4,68 \text{ m}^4}$$

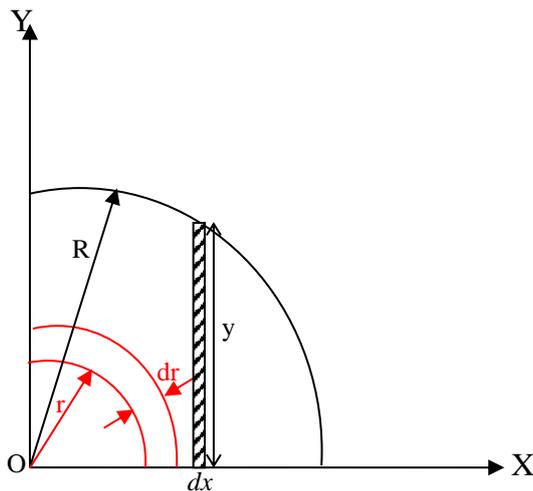
### Exercice 6 :

Soit un quart de cercle de rayon R.

On demande de :

- Etablir l'expression du moment d'inertie par rapport à (OX).
- Déterminer les coordonnées du centre de gravité.
- Donner l'expression donnant le moment d'inertie par rapport à un axe vertical passant par G et parallèle à (OY).

**Solution :**



1) Expression de  $I_x$  :

$$\left. \begin{array}{l} I_x = I_y \\ I_x + I_y = I_0 \end{array} \right\} \rightarrow I_x = I_y = \frac{I_0}{2} = \frac{1}{2} \int_A r^2 \cdot dA$$

$$A = \frac{\pi R^2}{4} \Rightarrow dA = \frac{\pi}{4} 2r dr = \frac{\pi}{2} r dr$$

$$\rightarrow I_x = \frac{1}{2} \int_A r^2 \cdot \frac{\pi}{2} r dr = \frac{\pi}{4} \int_A r^3 dr = \frac{1}{4} \frac{\pi R^4}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_x = \frac{\pi R^4}{16}}$$

1) Coordonnées du centre de gravité :

$$X_G = \frac{\Sigma S/y}{\Sigma A_i} = \frac{\int_A x \cdot ds}{\frac{\pi R^2}{4}} = \frac{4}{\pi R^2} \int_A x \cdot ds$$

$$= \frac{4}{\pi R^2} \int_A x \cdot dx \cdot y = \frac{4}{\pi R^2} \int_0^R x \cdot dx \sqrt{R^2 - x^2}$$

Posons  $R^2 - x^2 = U \rightarrow \frac{dU}{dx} = -2x \Rightarrow dx = -\frac{dU}{2x}$

$$\rightarrow X_G = -\frac{4}{\pi R^2} \int_0^R x \cdot \sqrt{U} \cdot \frac{dU}{2x} = -\frac{4}{2\pi R^2} \int_{R^2}^0 \sqrt{U} \cdot dU$$

$$\rightarrow X_G = -\frac{2}{\pi R^2} \cdot \left[ \frac{2}{3} U^{3/2} \right]_{R^2}^0 = -\frac{4}{3\pi R^2} \cdot \left[ -\sqrt{(R^2)^3} \right]$$

$$= \frac{4}{3\pi R^2} \cdot \left[ \sqrt{(R^2)^3} \right]$$

$$\rightarrow X_G = \frac{4R}{3\pi}$$

$$\boxed{Y_G = X_G = \frac{4R}{3\pi}}$$

2) Moment d'inertie par rapport à  $(OY_G)$  :

$$I_Y = I_G + A \cdot d^2 \Rightarrow I_G = I_Y - A \cdot d^2$$

$$I_Y = \frac{\pi R^4}{16}$$

$$A = \frac{\pi R^2}{4}$$

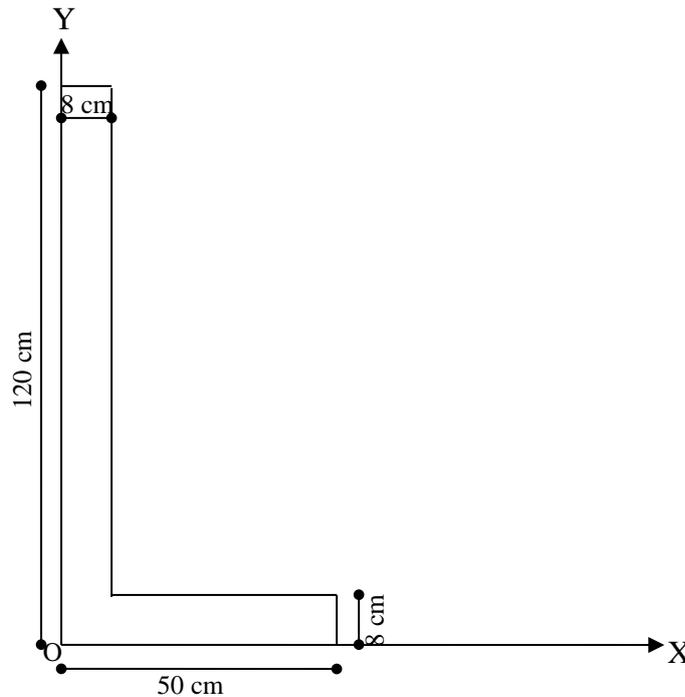
$$d = X_G = \frac{4R}{3\pi}$$

$$I_{Y_G} = \frac{\pi R^4}{16} - \frac{\pi R^2}{4} \left( \frac{4R}{3\pi} \right)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{Y_G} = \frac{4}{9} \cdot \frac{R^4}{\pi}}$$

**Exercice 7:**

Soit la section en L suivante :



On demande de :

- Déterminer la position de son centre de gravité.
- Calculer les moments d'inertie suivant (OX) et (OY).
- Calculer les moments d'inertie suivant les axes vertical et horizontal passant par son centre de gravité.
- Déterminer la position des axes principaux d'inertie.
- Calculer les moments d'inertie principaux ( $I_{\max}$  et  $I_{\min}$ ).

**Solution :**

1) Position du centre de gravité :

$$\begin{cases} X_G = \frac{\Sigma S/y}{\Sigma A_i} = \frac{\Sigma A_i x_i}{\Sigma A_i} \\ Y_G = \frac{\Sigma S/x}{\Sigma A_i} = \frac{\Sigma A_i y_i}{\Sigma A_i} \end{cases}$$

$$\Sigma A_i = A_1 + A_2 = (42 \times 8) + (8 \times 120) = 1296 \text{ cm}^2.$$

$$\Sigma S/y = A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 = \left[ (42 \times 8) \cdot \left( \frac{42}{2} + 8 \right) \right] + \left[ (8 \times 120) \cdot \left( \frac{8}{2} \right) \right] = 13584 \text{ cm}^3$$

$$\Sigma S/x = A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 = \left[ (42 \times 8) \cdot \frac{8}{2} \right] + \left[ (8 \times 120) \cdot \frac{120}{2} \right] = 58944 \text{ cm}^3$$

$$X_G = \frac{13584}{1296} = 10,48 \text{ cm.}$$

$$Y_G = \frac{58944}{1296} = 45,48 \text{ cm.}$$

$$\boxed{G(10,48 ; 45,48)\text{cm.}}$$

2) Moments d'inertie suivant (OX) et (OY) :

$$I_X = I_{1/X} + I_{2/X} = \left[ \frac{42(8)^3}{12} + (42 \times 8) \left( \frac{8}{2} \right)^2 \right] + \left[ \frac{8(120)^3}{12} + (8 \times 120) \left( \frac{120}{2} \right)^2 \right]$$

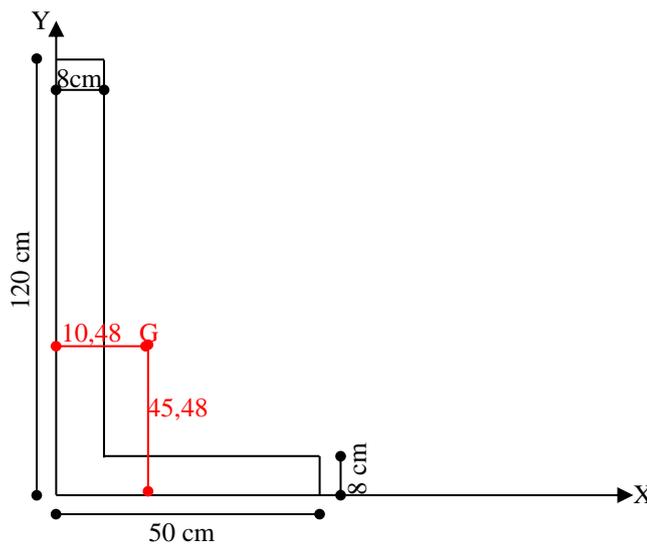
$$\boxed{I_X = 4\,615\,168 \text{ cm}^4}$$

\* Calcul de  $I_Y$  :

$$I_Y = I_{1/y} + I_{2/y} = \left[ \frac{8(42)^3}{12} + (8 \times 42) \left( \frac{42}{2} + 8 \right)^2 \right] + \left[ \frac{120(8)^3}{12} + (8 \times 120) \left( \frac{8}{2} \right)^2 \right]$$

$$\boxed{I_Y = 352\,448 \text{ cm}^4}$$

3) Moments d'inertie suivant les axes vertical et horizontal passant par le centre de gravité :



$$I_{XG} = I_{1/XG} + I_{2/XG}$$

$$= \left[ \frac{42(8)^3}{12} + (42 \times 8) \left( 45,48 - \frac{8}{2} \right)^2 \right] + \left[ \frac{8(120)^3}{12} + (8 \times 120) \left( \frac{120}{2} - 45,48 \right)^2 \right]$$

$$\boxed{I_{XG} = 1\,934\,307,56 \text{ cm}^4}$$

$$I_{YG} = I_{1/YG} + I_{2/YG}$$

$$= \left[ \frac{8(42)^3}{12} + (8 \times 42) \left( 29 - 10,48 \right)^2 \right] + \left[ \frac{120(8)^3}{12} + (8 \times 120) \left( 10,48 - \frac{8}{2} \right)^2 \right]$$

$$\boxed{I_{YG} = 210\,067,56 \text{ cm}^4}$$

4) Position des axes principaux :

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2I_{x_G y_G}}{I_{y_G} - I_{x_G}}$$

$$I_{x_G y_G} = \int_A x \cdot y \cdot dA = A_1 \cdot x_{G1} \cdot y_{G1} + A_2 \cdot x_{G2} \cdot y_{G2}$$

$$I_{x_G y_G} = \left[ (42 \times 8) \left( \frac{42}{2} + 8 - 10,48 \right) \left( 45,48 - \frac{8}{2} \right) \right] +$$

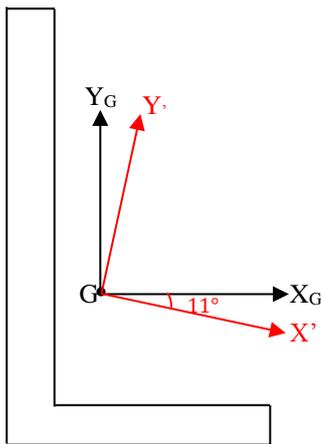
$$\left[ (8 \times 120) \left( 10,48 - \frac{8}{2} \right) \left( \frac{120}{2} - 45,48 \right) \right]$$

$$I_{x_G y_G} = 348\,444,44 \text{ cm}^4$$

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2I_{x_G y_G}}{I_{y_G} - I_{x_G}} = \frac{2 \times 348\,444,44}{210\,067,56 - 1\,934\,307,56}$$

$$\rightarrow \operatorname{tg} 2\theta = -0,404 \Rightarrow 2\theta = -22^\circ$$

$$\boxed{\theta = -11^\circ}$$



5) Calcul des moments d'inertie principaux :

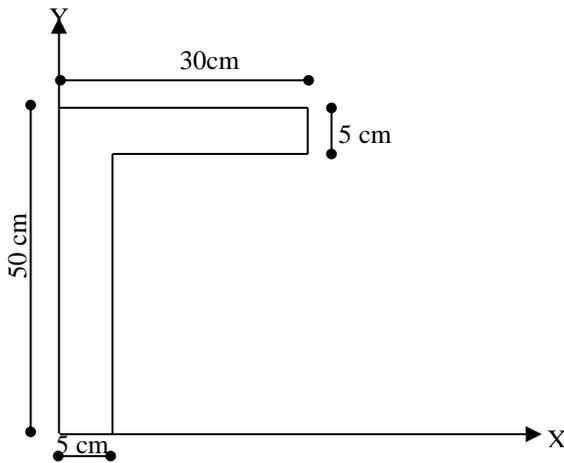
$$\begin{cases} I_{max} = \frac{I_{x_G} + I_{y_G}}{2} + \sqrt{\left( \frac{I_{x_G} - I_{y_G}}{2} \right)^2 + I_{x_G y_G}^2} \\ I_{min} = \frac{I_{x_G} + I_{y_G}}{2} - \sqrt{\left( \frac{I_{x_G} - I_{y_G}}{2} \right)^2 + I_{x_G y_G}^2} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} I_{max} = \frac{1\,934\,307,56 + 210\,067,56}{2} + \sqrt{\left( \frac{1\,934\,307,56 - 210\,067,56}{2} \right)^2 + (348\,444,44)^2} \\ I_{min} = \frac{1\,934\,307,56 + 210\,067,56}{2} - \sqrt{\left( \frac{1\,934\,307,56 - 210\,067,56}{2} \right)^2 + (348\,444,44)^2} \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{cases} I_{max} = 2\,002\,060,89 \text{ cm}^4 \\ I_{min} = 142\,314,22 \text{ cm}^4 \end{cases}}$$

**Exercice 8 :**

Soit la cornière en L représentée dans la figure ci-dessous :



On demande de :

- Déterminer la position du centre de gravité.
- Calculer le moment d'inertie polaire  $I_p$ .

**Solution :**

1) Position du centre de gravité :

$$\begin{cases} X_G = \frac{\Sigma S/y}{\Sigma A_i} = \frac{\Sigma A_i x_i}{\Sigma A_i} \\ Y_G = \frac{\Sigma S/x}{\Sigma A_i} = \frac{\Sigma A_i y_i}{\Sigma A_i} \end{cases}$$

$$\Sigma A_i = A_1 + A_2 = (25 \times 5) + (5 \times 45) = 375 \text{ cm}^2.$$

$$\Sigma S/y = A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 = \left[ (30 \times 5) \cdot \left(\frac{30}{2}\right) \right] + \left[ (5 \times 45) \cdot \left(\frac{5}{2}\right) \right] = 2812,5 \text{ cm}^3$$

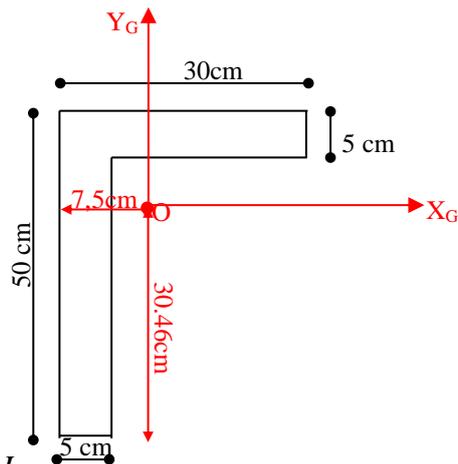
$$\Sigma S/x = A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 = \left[ (30 \times 5) \cdot \left(50 - \frac{5}{2}\right) \right] + \left[ (5 \times 45) \cdot \left(\frac{45}{2}\right) \right] = 12187,5 \text{ cm}^3$$

$$X_G = \frac{2812,5}{400} = 7,5 \text{ cm.}$$

$$Y_G = \frac{12187,5}{400} = 30,46 \text{ cm.}$$

$$\boxed{G(7,5 ; 30,46) \text{ cm}}$$

2) Moment d'inertie polaire :



$$I_o = I_x + I_y$$

$$I_x = I_{1/x_G} + I_{2/x_G} = \left[ \frac{30(5)^3}{12} + (30 \times 5) \cdot \left( 50 - 30,46 - \frac{5}{2} \right)^2 \right] +$$

$$\left[ \frac{5(45)^3}{12} + (5 \times 45) \cdot \left( 30,46 - \frac{45}{2} \right)^2 \right] = 96\,091,85 \text{ cm}^4.$$

$$I_y = I_{1/y_G} + I_{2/y_G} = \left[ \frac{5(30)^3}{12} + (30 \times 5) \cdot \left( \frac{30}{2} - 7,5 \right)^2 \right] +$$

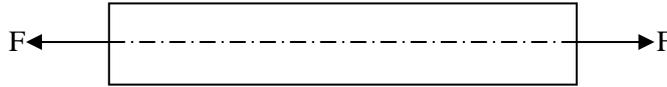
$$\left[ \frac{45(5)^3}{12} + (5 \times 45) \cdot \left( 7,5 - \frac{5}{2} \right)^2 \right] = 25\,781,25 \text{ cm}^4.$$

$$\rightarrow I_o = 96\,091,85 + 25\,781,25 = 121\,873,10 \text{ cm}^4$$

## **TRACTION-COMPRESSION**

**III.1/ Définition :**

Une pièce travaille en traction simple (ou compression simple) quand elle est soumise uniquement à deux forces axiales opposées, réduites au centre de gravité et qui tendent à allonger la pièce (ou la raccourcir) (figure III.1).

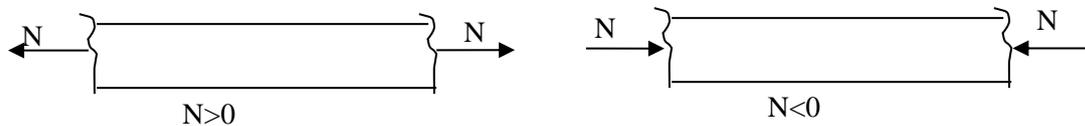
**Figure III.1**

Dans le cas de la traction (compression), le tenseur de cohésion se réduit à :

$$\begin{cases} T = 0 \\ M = 0 \\ N \neq 0 \end{cases}$$

**III.2/ Convention de signe de N :**

Par convention, l'effort normal est positif s'il est dirigé vers l'extérieur de la section.



Si N est dirigé positivement suivant la convention de signe établie, cet effort tend à provoquer un allongement : c'est la **traction**.

Si N est négatif : il s'agit d'une **compression**.



$l_f$  : Longueur finale de la barre après déformation.

$l_i$  : Longueur initiale de la barre avant déformation.

$\Delta l$  : allongement longitudinale de la barre.

**III.3/ Calcul de l'effort normal :**

L'effort normal se calcule à l'aide de la méthode des sections (voir chapitre I). Sa valeur est égale à la somme algébrique de toutes les forces uni-axiales externes.

$$N_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}$$

### III.4/ Essai de traction :

L'essai est réalisé à l'aide d'une machine d'essai de traction universelle avec des éprouvettes standardisées. Le type des éprouvettes varie selon le type du matériau.

L'éprouvette est serrée dans le dispositif de fixation de la machine et est soumise à un effort de traction qui tend à l'allonger jusqu'à la rupture.

On effectue plusieurs essais, et à chaque essai on enregistre l'allongement de l'éprouvette en fonction de la force appliquée. On obtient alors une courbe contrainte-déformation.

En général, la courbe obtenue a l'allure de celle présentée par la figure III.2.

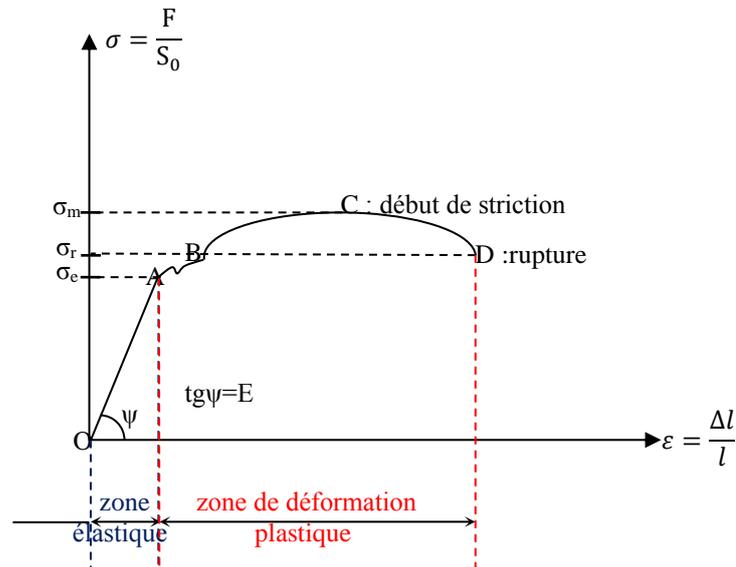


Figure III.2 : Courbe classique contrainte-déformation.

$$\sigma = \frac{F}{S_0} : \text{contrainte de traction.}$$

F : force appliquée.

$S_0$  : surface initiale (avant déformation).

Cet essai permet de déterminer les caractéristiques mécaniques d'un matériau, à savoir :

- Sa limite élastique (résistance limite) :  $\sigma_e$  ou  $R_e$ .
- Sa résistance à la rupture :  $\sigma_r$ ,
- Son allongement à la rupture :  $\epsilon$ .
- Son module d'élasticité : E.

•  $\sigma_e$  : contrainte limite élastique : c'est la contrainte maximum que peut supporter un matériau sans danger de déformation permanente et à partir de laquelle se produit la déformation plastique (déformation permanente).

•  $\sigma_r$  : contrainte de rupture : correspond à la force causant la rupture en traction de l'éprouvette.

- La partie linéaire de la courbe (OA) caractérise le domaine de la déformation élastique (loi de proportionnalité entre les allongements et les déformations) c'est-à-dire, si on interrompt l'expérience, la barre reprend sa longueur initiale.
- La tangente de la pente de la droite de la partie élastique caractérise *le module d'élasticité* (appelé aussi module de Young)  $E : \text{tg}\psi = E$ .  
Ce qui donne la relation:  $\sigma = E \cdot \varepsilon$  : c'est la loi de Hooke.
- La zone (AB) caractérise le début de la déformation plastique.
- La zone (BC). Dans cette zone, si on interrompt l'expérience, la barre ne reprend pas sa forme initiale. On a une déformation permanente.
- La zone (CD) caractérise le phénomène de striction : dans cette zone la contrainte  $\sigma$  décroît alors que l'allongement augmente pour des charges inférieures à la valeur maximale.
- En point D, l'éprouvette se rompt.

**N.B :** La loi de Hooke est valable seulement pour la partie linéaire de la courbe (OA) correspondant à la déformation élastique.

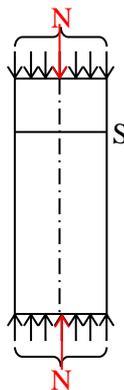
### III.5/ Contrainte :

#### *Hypothèses de calcul :*

Le calcul de contrainte est relativement aisé, si l'on admet les hypothèses suivantes :

- 1) Selon l'axe x, une section normale avant déformation reste normale après déformation.
- 2) Une section plane avant déformation reste plane après déformation.

Chaque élément de surface supporte un effort de traction parallèle à la ligne moyenne. La contrainte n'est constante dans toute section d'un barreau que si la force extérieure s'applique uniformément sur les extrémités (figure III.1).



**Figure II.4 :** Répartition uniforme des contraintes.

Comme indiqué sur la figure III.4, Il y a répartition uniforme des contraintes dans la section

$$\text{droite. D'où } \sigma(x) = \frac{N(x)}{S(x)} [\text{MPa}] \dots \dots (\text{III. 1})$$

Lorsque  $N(x)$  et  $S(x)$  sont constants, l'expression de la contrainte normale devient :

$$\sigma = \frac{N}{S} \dots \dots (\text{III. 2})$$

- Lorsqu'il s'agit d'une compression,  $\sigma < 0$ .
- Lorsqu'il s'agit d'une traction,  $\sigma > 0$ .

### III.6/ Contrainte admissible :

Pour vérifier une pièce vis-à-vis de la traction (compression), une certaine valeur de la contrainte ne doit pas être dépassée : *c'est la contrainte admissible ( $\sigma_{adm}$ )*.

### III.7/ Condition de résistance :

Lorsqu'une pièce est soumise à la traction (ou à la compression), la contrainte maximale ne doit pas dépasser la contrainte admissible  $\sigma_{adm}$ .

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} \leq \sigma_{adm} \dots \dots (\text{III. 3})$$

Cette condition permet de déterminer l'aire minimale de la section droite de la barre, soit :

$$\frac{N_{max}}{A} \leq \sigma_{adm} \Rightarrow A \geq \frac{N_{max}}{\sigma_{adm}}$$

### III.8/ Déformation :

La déformation représente le rapport de la variation de la longueur sur la longueur de référence :



$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{dx} \dots \dots (\text{III. 4})$$

D'après la loi de proportionnalité entre la contrainte et la déformation (Loi de Hooke dans le domaine élastique), on a :  $\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \dots \dots (\text{III. 5})$

L'égalité des équations (III. 4) et (III. 5) donne :  $\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{dx} = \frac{\sigma_x}{E}$

$$\text{avec } \sigma(x) = \frac{N(x)}{S(x)}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_x = \frac{\Delta x}{dx} = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{N(x)}{E \cdot S(x)}$$

$$\Delta x = \frac{N(x) \cdot dx}{E \cdot S(x)} \dots \dots (III. 6)$$

Par intégration, on obtient :

$$\Delta l = \int \frac{N(x)}{E \cdot S(x)} dx: \text{allongement absolu longitudinale}$$

$$\text{Si } N, E \text{ et } S \text{ sont constants, } \Delta l = \frac{N \cdot l_i}{E \cdot S}$$

### III.9/ Contrainte et déformation d'une barre dues à son poids propre :

#### III.9.1/ Contrainte :

- Sous l'effet de P, la barre s'allonge et le travail provoqué par « P » est un Travail positif dû à la réception d'énergie par la barre qui lui permet de revenir à son état initial lorsque la charge est réduite. La loi de Hooke s'écrira alors :

$$\Delta l = \frac{P \cdot l}{E \cdot S}$$

- Si la longueur de la barre « l » est considérable, le poids propre ne peut être négligé et entraîne par conséquent une contrainte supplémentaire. Dans ce cas la nouvelle contrainte qui s'établit au niveau d'une section quelconque est :

$$\sigma = \frac{P}{S} + \frac{p_x}{S}$$

avec  $\begin{cases} P: \text{force extérieure} \\ p_x: \text{poids propre de la partie se trouvant au dessous de la section considérée} \end{cases}$

Si  $\gamma$  est le poids volumique du matériau, alors  $p = \gamma \cdot l \cdot S$  : poids de toute la barre.

$$\sigma = \frac{P}{S} + \frac{\gamma \cdot l \cdot S}{S} = \frac{P}{S} + \gamma \cdot l \dots \dots (III. 7)$$

$$\sigma_{max} = \sigma = \frac{P}{S} + \gamma \cdot l: \text{agit au niveau de l'encastrement.}$$

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \frac{P}{S} + \gamma \cdot x \dots \dots (III. 8)$$

#### III.9.2/ Déformation :

L'allongement d'une section quelconque sous l'effet de son poids propre et de la force appliquée P est :

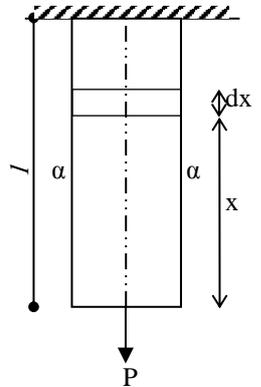
$$\Delta l(x) = \frac{1}{ES} \int_x^l (P + \gamma \cdot x \cdot S) dx = \frac{1}{ES} \left[ Px + \gamma \cdot S \cdot \frac{x^2}{2} \right]_x^l$$

$$\rightarrow \Delta l(x) = \frac{1}{ES} \left[ P(l - x) + \gamma \cdot S \cdot \frac{(l^2 - x^2)}{2} \right]$$

$$\rightarrow \Delta l(x) = \frac{P}{ES} (l - x) + \frac{\gamma}{2E} (l^2 - x^2) \dots \dots (III. 10)$$

Donc l'allongement total de la barre (extrémité libre de la barre) est de :

$$\rightarrow \Delta l(x = 0) = \frac{P \cdot l}{ES} + \frac{\gamma \cdot l^2}{2E}$$



**EXERCICES****Exercice 1 :**

Calculer la contrainte normale engendrée par un effort de traction  $N = 2t$  dans une barre de section carrée de dimensions  $(30 \times 30) \text{cm}^2$ .

**Solution :**

$$\text{On a } \sigma = \frac{N}{A} \Rightarrow \sigma = \frac{2 \times 10^3}{30 \times 30} = 2,22 \text{ bars.}$$

**Exercice 2 :**

Soit une barre d'acier de section circulaire soumise à un effort de traction. Si la contrainte maximale  $\sigma_{\max} = 2 \text{ bars}$ , calculer l'effort normal maximal que peut supporter la barre.

On donne  $d$  : diamètre de la section = 15 mm.

**Solution :**

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \Rightarrow N_{\max} = \sigma_{\max} \cdot A = 2 \cdot \frac{\pi(1,5)^2}{4} = 3,53 \text{ kg.}$$

**Exercice 3 :**

Calculer l'allongement  $\Delta l$  d'une barre de longueur  $l = 10 \text{ m}$  et de section rectangulaire de dimensions  $(20 \times 25) \text{cm}^2$ , soumise à un effort normal  $N = 200 \text{ kN}$ .

On donne  $E = 21 \times 10^3 \text{ daN/mm}^2$ .

**Solution :**

En appliquant la loi de Hooke, on a :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \text{ avec } \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

$$\sigma = E \cdot \frac{\Delta l}{l} \Rightarrow \Delta l = \frac{\sigma \cdot l}{E}$$

$$\text{or } \sigma = \frac{N}{A} \Rightarrow \Delta l = \frac{N \cdot l}{A \cdot E} = \frac{200 \cdot 10^2 \cdot 10 \cdot 10^2}{(20 \times 25) \cdot 21 \cdot 10^3 \cdot 10^2} = 0,019 \text{ cm.}$$

$\Delta l = 0,019 \text{ cm.}$

**Exercice 4 :**

Soit une barre de section circulaire sollicitée par un effort normal de traction  $N = +50 \text{ kN}$ . Calculer le diamètre de la barre si  $\sigma_{\max} = 15 \text{ daN/mm}^2$ .

**Solution :**

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} \Rightarrow A = \frac{N_{max}}{\sigma_{max}} = \frac{50 \cdot 10^2}{15} = 333,33 \text{ mm}^2$$

$$\text{Section circulaire} \Rightarrow A = \frac{\pi d^2}{4} \Rightarrow \frac{\pi d^2}{4} = 333,33 \text{ mm}^2$$

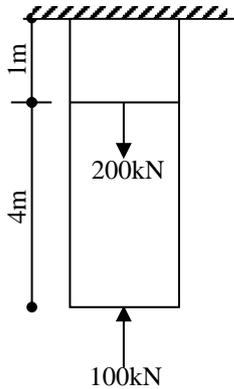
$$d = \sqrt{\frac{4 \times 333,33}{\pi}}$$

$$d = 20,6 \text{ mm}$$

**Exercice 5 :**

Déterminer le diamètre de la barre suivante en négligeant son poids propre.

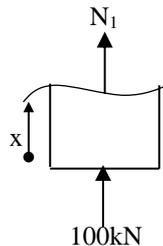
On donne  $\sigma_{adm} = 1500 \text{ bars}$ .



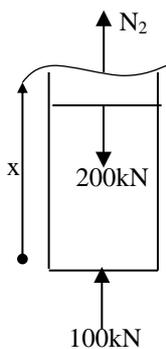
**Solution :**

Section I :  $0 \leq x \leq 4\text{m}$

$N_1 = -100 \text{ kN}$  (compression)



Section II :  $4\text{m} \leq x \leq 5\text{m}$



$$N_2 + 100 - 200 = 0 \Rightarrow N_2 = +100 \text{ kN (traction)}$$

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} \leq \sigma_{adm} \Rightarrow A \geq \frac{N_{max}}{\sigma_{adm}}$$

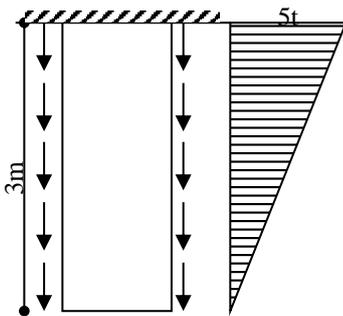
$$A = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$\rightarrow \frac{\pi d^2}{4} \geq \frac{N_{max}}{\sigma_{adm}} \Rightarrow d \geq \sqrt{\frac{4N_{max}}{\pi \cdot \sigma_{adm}}} = \sqrt{\frac{4 \times 100 \cdot 10^2}{\pi \cdot 1500}} = 2,91 \text{ cm}$$

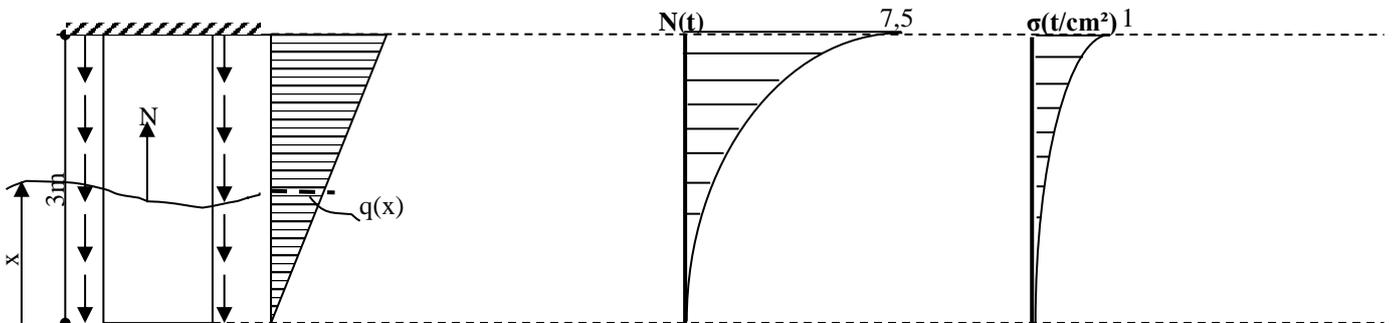
Soit  $d \approx 29,1 \text{ mm}$

### Exercice 6 :

Tracer le diagramme des efforts normaux et des contraintes normales de la barre suivante : la charge répartie varie linéairement de  $q = 0$  à  $q = 5 \text{ t}$ . La barre est de section rectangulaire de dimensions  $(25 \times 30) \text{ mm}^2$ , son poids propre est négligeable.



**Solution :**



Section  $0 \leq x \leq 3 \text{ m}$  :

$$N = \int q(x) \cdot dx$$

$$\text{avec } \frac{q(x)}{x} = \frac{5}{3} \Rightarrow q(x) = \frac{5}{3}x$$

$$N = \int_0^x \frac{5}{3}x \cdot dx = \frac{5x^2}{6}$$

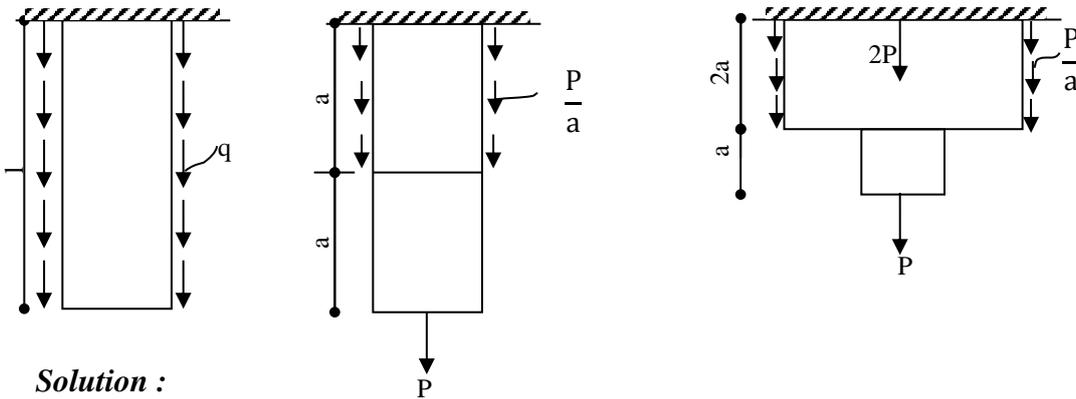
Valeurs aux bornes :

$$x = 0 \rightarrow N = 0 \Rightarrow \sigma = 0$$

$$x = 3 \text{ m} \rightarrow N = 7,5 \text{ t (compression)} \Rightarrow \sigma = \frac{7,5}{(25 \times 30) \cdot 10^{-2}} = 1 \text{ t/cm}^2$$

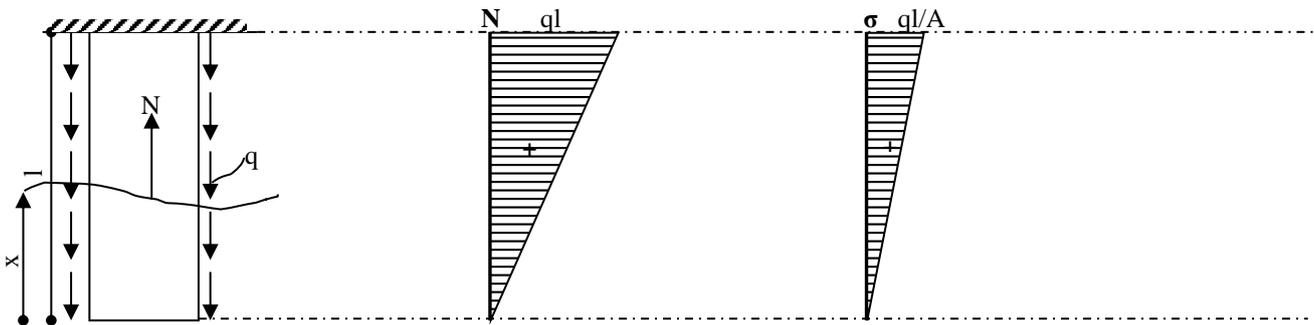
**Exercice 7 :**

Tracer le diagramme des efforts normaux et des contraintes normales des barres suivantes :  
 NB : le poids propre des barres est négligeable.



**Solution :**

a)



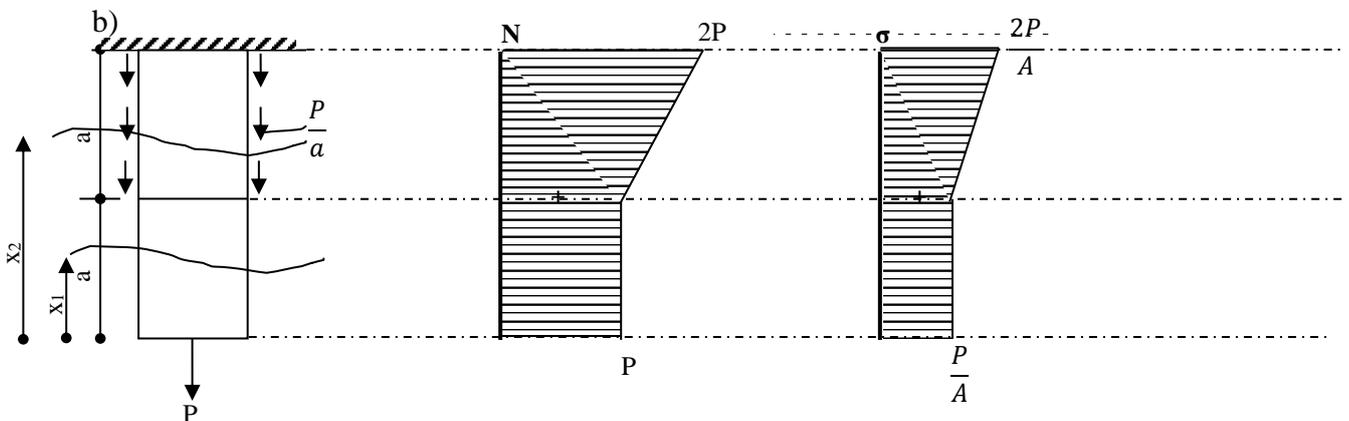
Section  $0 \leq x \leq l$  :

$$N = q \cdot x$$

Valeurs aux bornes :

$$x = 0 \rightarrow N = 0 \Rightarrow \sigma = 0$$

$$x = l \rightarrow N = ql \Rightarrow \sigma = \frac{ql}{A}$$



Section I :  $0 \leq x \leq a$  :

$$N_1 = P \Rightarrow \sigma = \frac{P}{A}$$

Section II:  $a \leq x \leq 2a$  :

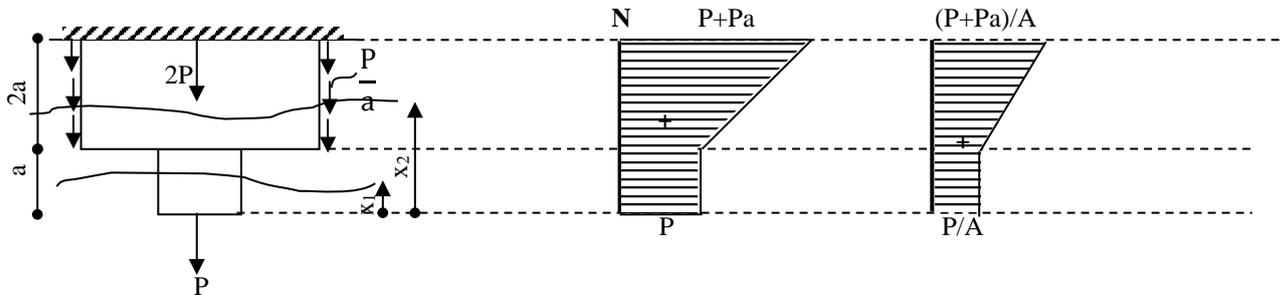
$$N_2 = P + \frac{P}{a}(x - a)$$

Valeurs aux bornes :

$$x = a \rightarrow N = P \Rightarrow \sigma = \frac{P}{A}$$

$$x = 2a \rightarrow N = 2P \Rightarrow \sigma = \frac{2P}{A}$$

c)



Section I:  $0 \leq x \leq a$  :

$$N_1 = P \Rightarrow \sigma = \frac{P}{A}$$

Section II:  $a \leq x \leq 3a$  :

$$N_2 = P + \frac{P}{a}(x - a)$$

Valeurs aux bornes :

$$x = a \rightarrow N = P \Rightarrow \sigma = \frac{P}{A}$$

$$x = 3a \rightarrow N = P + Pa \Rightarrow \sigma = \frac{P + Pa}{A}$$

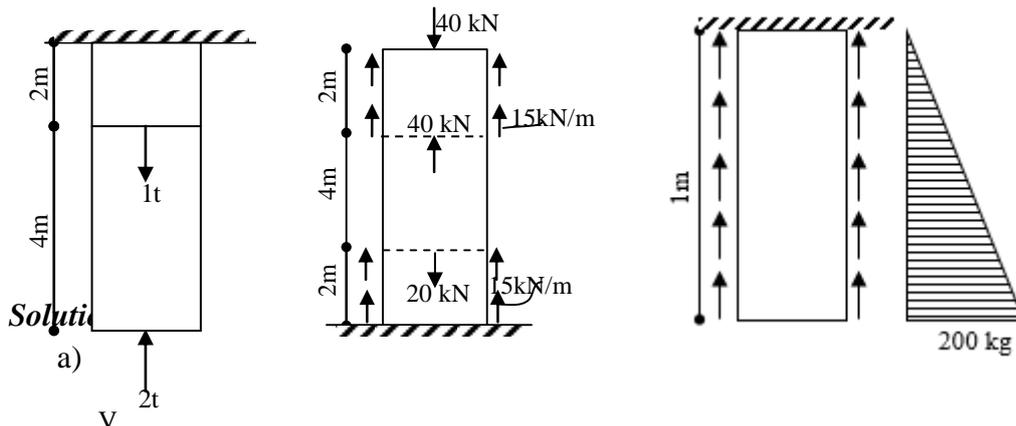
**Exercice 8:**

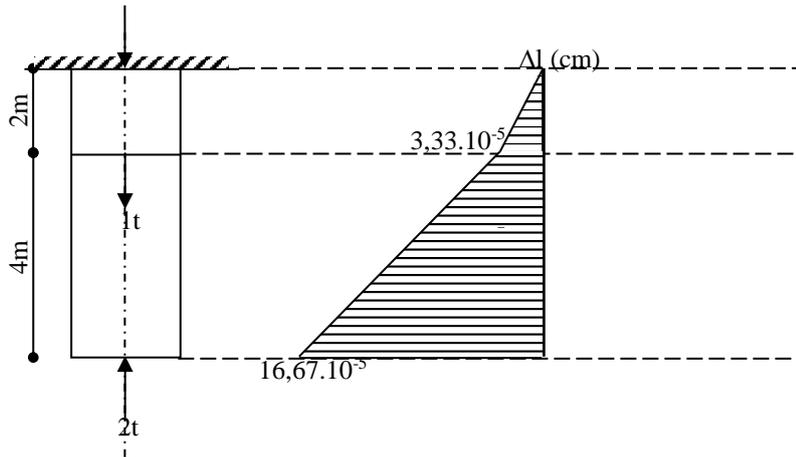
Tracer le diagramme des allongements des systèmes suivants:

On donne :  $E = 2 \times 10^6 \text{ daN/cm}^2$

$A = 3 \text{ cm}^2$

Poids propre des barres négligeable.





$$\Sigma F_v = 0 \Rightarrow V = 1t$$

Section I :  $0 \leq x \leq 2m$

$$N_1 = -1t$$

$$\text{On a } \Delta l_i = \Delta l_{i-1} + \int_a^x \frac{N(x)}{E.S} dx \text{ avec } x \in [a - b]$$

$$\Delta l_1 = \Delta l_0 + \int_0^x \frac{N(x)}{E.S} dx$$

$$\Delta l_0 = 0 \text{ (encastrement)}$$

$$\rightarrow \Delta l_1 = \int_0^x \frac{N(x)}{E.S} dx = -\frac{1}{ES} \int_0^x 1 \cdot dx = -\frac{x}{ES} = -\frac{x}{2 \cdot 10^6 \cdot 3}$$

Valeurs aux bornes :

$$x = 0 \rightarrow \Delta l_1 = 0$$

$$x = 2m \rightarrow \Delta l_1 = -3,33 \cdot 10^{-7} \text{ cm.}$$

Section II:  $2m \leq x \leq 6m$

$$N_2 = -2t$$

$$\Delta l_2 = \Delta l_{1(x=2m)} + \int_2^x \frac{N(x)}{E.S} dx$$

$$\Delta l_2 = -3,33 \cdot 10^{-7} - \int_2^x \frac{2}{6 \cdot 10^6} dx$$

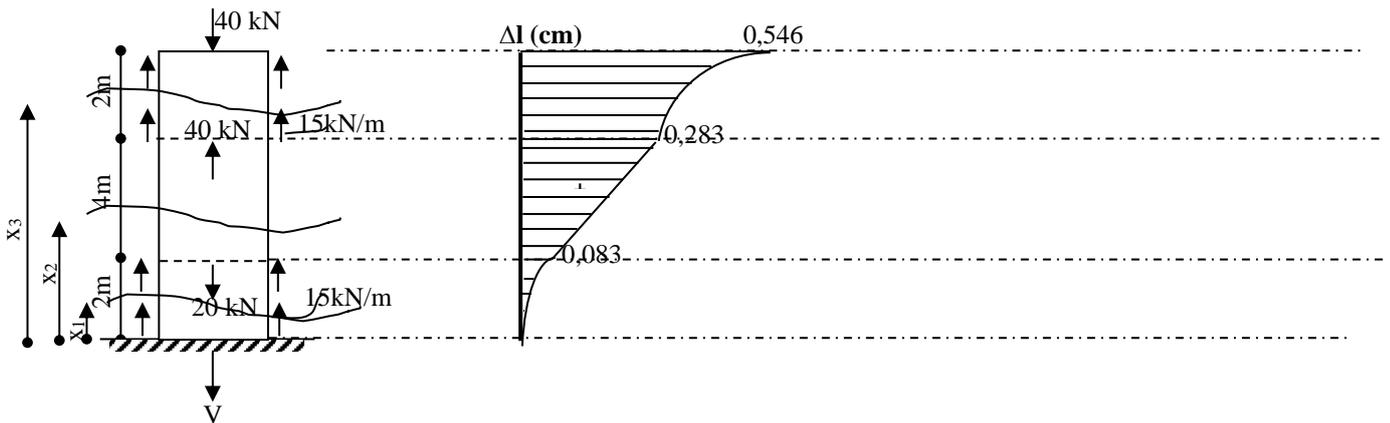
$$\rightarrow \Delta l_2 = -3,33 \cdot 10^{-7} - \frac{2(x-2)}{6 \cdot 10^6}$$

Valeurs aux bornes :

$$x = 2m \rightarrow \Delta l_2 = -3,33 \cdot 10^{-7} \text{ cm}$$

$$x = 6m \rightarrow \Delta l_1 = -16,67 \cdot 10^{-7} \text{ cm.}$$

b)



$$\Sigma F_v = 0 \Rightarrow V = 40 \text{ kN}$$

Section I :  $0 \leq x \leq 2\text{m}$

$$N_1 = 40 - 15x$$

$$\Delta l_1 = \Delta l_0 + \int_0^x \frac{N(x)}{E \cdot S} dx = 0 + \frac{1}{6 \cdot 10^6} \int_0^x (40 - 15x) dx = \frac{40x}{6 \cdot 10^6} - \frac{15x^2}{2 \times 6 \cdot 10^6}$$

Valeurs aux bornes :

$$x = 0 \rightarrow \Delta l_1 = 0$$

$$x = 2\text{m} \rightarrow \Delta l_1 = 0,083 \text{ cm.}$$

Section II :  $2\text{m} \leq x \leq 6\text{m}$

$$N_2 = 30 \text{ kN}$$

$$\Delta l_2 = \Delta l_{1(x=2\text{m})} + \int_2^x \frac{N_2(x)}{E \cdot S} dx = 0,083 + \int_2^x \frac{30}{6 \cdot 10^6} dx$$

$$\Delta l_2 = 0,083 + \frac{30}{6 \cdot 10^6} (x - 2)$$

Valeurs aux bornes :

$$x = 2\text{m} \rightarrow \Delta l_2 = 0,083 \text{ cm}$$

$$x = 6\text{m} \rightarrow \Delta l_2 = 0,283 \text{ cm.}$$

Section III :  $6\text{m} \leq x \leq 8\text{m}$

$$N_3 + 40 - 20 - 40 + 30 + 15(x - 6) = 0 \Rightarrow N_3 = -10 - 15(x - 6)$$

$$\Delta l_3 = \Delta l_{2(x=6\text{m})} + \int_6^x \frac{N(x)}{E \cdot S} dx$$

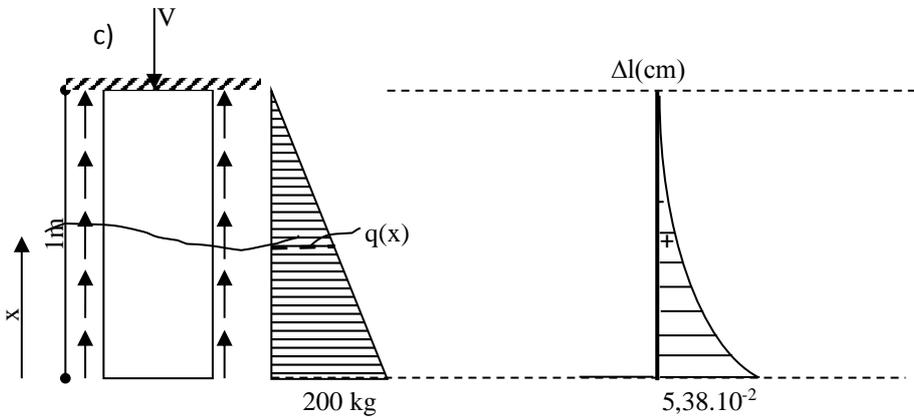
$$\rightarrow \Delta l_3 = 0,283 + \frac{1}{6 \cdot 10^6} \int_6^x (10 - 15(x - 6)) dx = 0,283 - \frac{1}{6 \cdot 10^6} \int_6^x (10 + 15x - 90) dx$$

$$\rightarrow \Delta l_3 = 0,283 - \frac{1}{6 \cdot 10^6} \left[ \frac{15x^2}{2} - 80x \right]_6^x = 0,283 - \frac{1}{6 \cdot 10^6} [7,5(x^2 - 6^2) - 80(x - 6)]$$

Valeurs aux bornes :

$$x = 6m \rightarrow \Delta l_3 = 0,283 \text{ cm}$$

$$x = 8m \rightarrow \Delta l_3 = 0,546 \text{ cm.}$$



$$\Sigma F_v = 0 \Rightarrow V = \int q(x) \cdot dx$$

$$\text{avec } \frac{q(x)}{x} = \frac{200}{1} \Rightarrow q(x) = 200x$$

$$V = \int_0^1 200x \cdot dx = [100x^2]_0^1 = 100 \text{ kg}$$

Section  $0 \leq x \leq 1m$

$$N = -100 + \int q(x) \cdot dx$$

$$N = -100 + \int_0^x 2x \cdot dx = -100 + [x^2]_0^x = -100 + x^2$$

$$\Delta l = \Delta l_0 + \int_0^x \frac{N(x)}{E \cdot S} dx = 0 + \frac{1}{6 \cdot 10^6} \int_0^x (x^2 - 100) dx = \frac{x^3}{3 \times 6 \cdot 10^6} - \frac{100x}{6 \cdot 10^6}$$

Valeurs aux bornes :

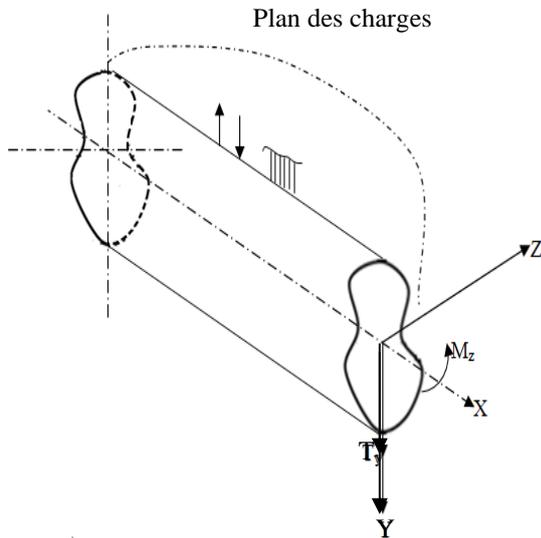
$$x = 0 \rightarrow \Delta l = 0$$

$$x = 1m \rightarrow \Delta l = 5,38 \cdot 10^{-2} \text{ cm.}$$

## **FLEXION PURE-FLEXION SIMPLE**

**IV.1/ Définition :**

On appelle flexion l'effet produit au niveau d'une section suite à un moment fléchissant et un effort tranchant (figure IV.1), si ce dernier est nul, alors il s'agit du cas de la flexion pure. Les pièces sollicitées en flexion sont surtout les poutres.



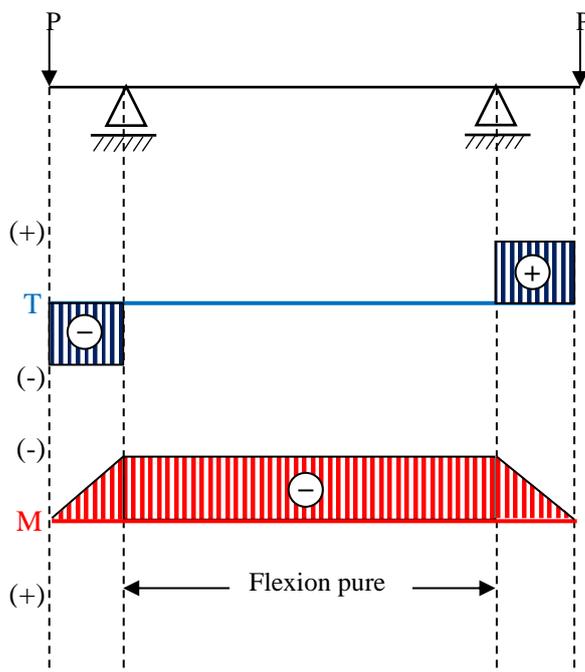
**Figure IV.1** (Ref. [2])

**IV.2/ Flexion pure :**

Dans le cas de la flexion pure, le torseur de cohésion se réduit à :

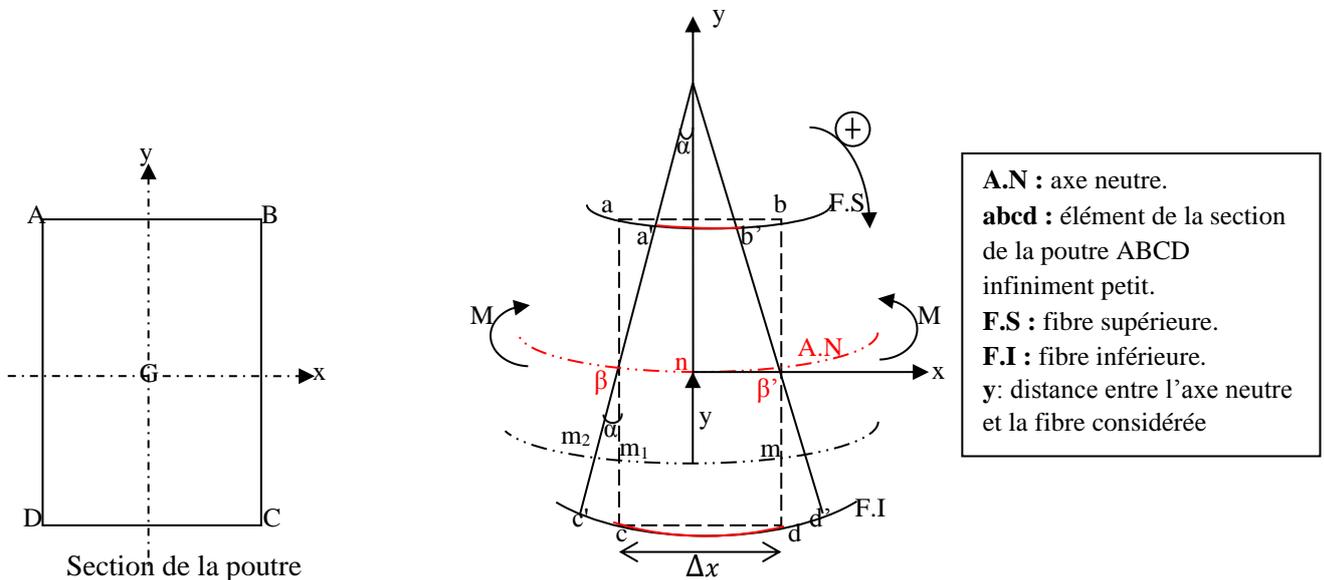
$$\begin{cases} M \neq 0 = \text{constante} \\ T = 0 \\ N = 0 \end{cases}$$

Exemple de flexion pure :



**IV.2.1/ Etude des contraintes :**

Le moment fléchissant provoque dans la section droite de la barre des contraintes normales  $\sigma_i$  et l'effort tranchant provoque des contraintes tangentielles  $\tau_i$ .



**Figure IV.2**

Dans le cas de la flexion pure, l'axe neutre coïncide avec le centre de gravité de la section. Sur cet axe, les contraintes sont nulles.

Après déformation, les fibres supérieures (celles situées au-dessus de l'axe neutre A.N) subissent une compression (rétrécissement) tandis que les fibres inférieures (celles situées en-dessous) subissent une traction (allongement). L'axe neutre, quant à lui, ne subit ni traction ni compression.

Il est à rappeler que, dans le cas de la flexion pure,  $N=0$ ,  $T=0$  et  $M \neq 0$ .

Ces trois équations d'équilibre donneront ce qui suit :

1)  $N=0$  :

D'après la figure ci-dessus, la fibre  $ab$  se comprime et devient  $a'b'$  et la fibre  $mm_1$  s'allonge et devient  $mm_2$ .

L'allongement relatif ( $\epsilon$ ) de cette fibre ( $mm_1$ ) est égale à :

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{m_1 m_2}{m m_1}$$

avec  $m_1 m_2 = y\alpha$  et  $m m_1 = \Delta x$

$$\rightarrow \epsilon = \frac{y\alpha}{\Delta x}$$

D'après la loi de Hooke (voir chapitre III), la contrainte normale ( $\sigma$ ) est donnée par la relation  $\sigma = E \cdot \epsilon$

$$\rightarrow \sigma = E \cdot y \cdot \alpha \cdot \frac{1}{\Delta x}$$

L'élément constituant la force intérieure correspondant à  $\sigma$  s'écrira :

$$dF = \sum \sigma \cdot dA = \sum E y \alpha \frac{1}{\Delta x} ds = E \frac{\alpha}{\Delta x} \sum y ds$$

$$dF = N = 0$$

$$\rightarrow E \frac{\alpha}{\Delta x} \sum y dA$$

$$E = c^{te}$$

$$\frac{\alpha}{\Delta x} = c^{te}$$

$$\rightarrow \sum y dA = 0$$

C'est le moment statique de l'aire de la section droite par rapport à un axe, perpendiculaire au plan de la figure et passant par n, et n est justement le centre de gravité (CDG) de la section considérée => moment statique nul.

$$\rightarrow \sum y dA = 0$$

**Remarque :** La rotation des sections droites en fonction de P se fait autour d'un axe perpendiculaire au plan contenant la flexion et passant par le CDG = axe neutre.

2)  $T = 0$  : cette deuxième expression d'équilibre s'écrira :

$$T + \sum \tau dA = 0$$

$$\text{avec } T = 0 \rightarrow \tau = 0$$

3)  $M \neq 0$ : cette relation s'écrira à partir de l'équilibre élastique de rotation :

$$M = E \frac{\alpha}{\Delta x} y \sum y dA$$

$$M = E \frac{\alpha}{\Delta x} \sum y^2 dA$$

Avec  $\sum y^2 dA =$  le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe  $O'_x$ .

$$\rightarrow M = E \frac{\alpha}{\Delta x} I_x$$

$$\frac{\alpha}{\Delta x} = \frac{M}{I_x} \cdot \frac{1}{E}$$

$$\sigma = + E \cdot y \cdot \frac{M}{EI_x} = + \frac{M \cdot y}{I_x} = \sigma$$

$$\boxed{\sigma = + \frac{M \cdot y}{I_x}}$$

avec :

$M$  : moment fléchissant dans la section considérée.

$I_x$  : moment d'inertie de la section par rapport à l'axe  $x$ .

$y$  : distance entre l'axe neutre et la fibre considérée (fibre par rapport à laquelle on souhaite calculer la contrainte normale).

Les limites de  $\sigma$  seront obtenues pour  $y = \pm h/2$  relativement à une section rectangulaire.

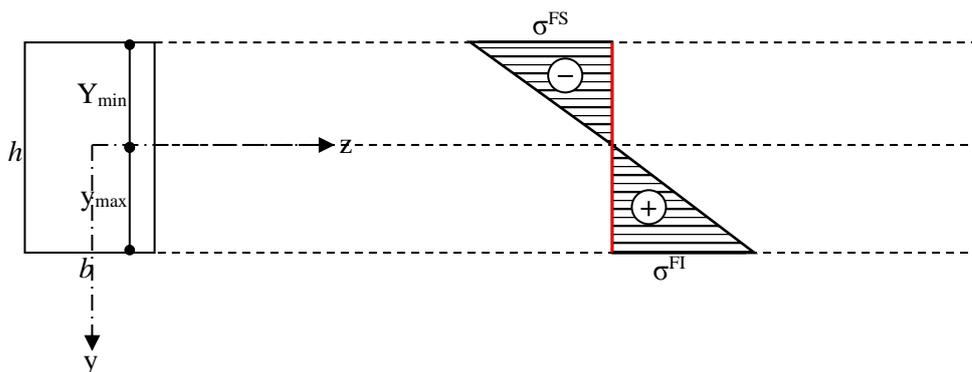
$$\rightarrow \sigma = \frac{M \cdot y}{I_z} = \frac{12M}{b \cdot h^3} \cdot \left( \pm \frac{h}{2} \right) = \pm \frac{6M}{b \cdot h^2}$$

$$\text{Si } M < 0 \rightarrow \begin{cases} y < 0 \rightarrow \sigma > 0 \rightarrow \text{traction} \\ y > 0 \rightarrow \sigma < 0 \rightarrow \text{compression} \end{cases}$$

$$\text{Si } M > 0 \rightarrow \begin{cases} y > 0 \rightarrow \sigma > 0 \rightarrow \text{traction} \\ y < 0 \rightarrow \sigma < 0 \rightarrow \text{compression} \end{cases}$$

#### IV.2.2/Diagramme des contraintes normales :

Prenons comme exemple une section rectangulaire ( $b \times h$ ) :



$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I_z}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

*Fibre supérieure :*

$$y_{min} = -\frac{h}{2}$$

$$\rightarrow \sigma_{max}^{FS} = -\frac{6M}{bh^2}$$

*Fibre inférieure :*

$$y_{min} = +\frac{h}{2}$$

$$\rightarrow \sigma_{max}^{FI} = +\frac{6M}{bh^2}$$

Axe neutre :

$$\sigma_0 = \frac{M \cdot y_0}{I_z}$$

$$y_0 = 0$$

$$\rightarrow \sigma_0 = 0$$

**IV.2.3/ Moment de résistance à la flexion ou module de résistance :**

On appelle module de résistance les grandeurs définies :

$$W_1 = \frac{I}{y}$$

De manière générale si le CDG ne se trouve pas au niveau de l'axe de symétrie c'est-à-dire à  $h/2$  (pour une section rectangulaire), alors les valeurs de  $y$  donnant les contraintes maximales sont respectivement  $v_1$  et  $v_2$ .

$$W_1 = \frac{I}{v_1}$$

$$W_2 = \frac{I}{v_2}$$

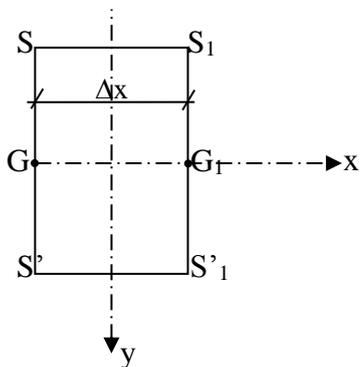
d'où

$$\sigma_{max} = \frac{M}{w_1}$$

$$\sigma_{min} = -\frac{M}{w_2}$$

**IV.2.3/ Déformation en flexion pure :**

Considérons deux sections  $SS'$  et  $S_1S'_1$  ayant pour centre de gravité respectivement  $G$  et  $G_1$  et distantes de  $\Delta x$ . Après déformation,  $SS'$  subit un angle de rotation de valeur  $\alpha$  avec  $S_1S'_1$ . La fibre moyenne  $GG_1$  devient un arc de cercle  $GG'_1$  de rayon  $\rho$  et de centre  $O$  (Figure IV.3).



Nous avons établi la relation :

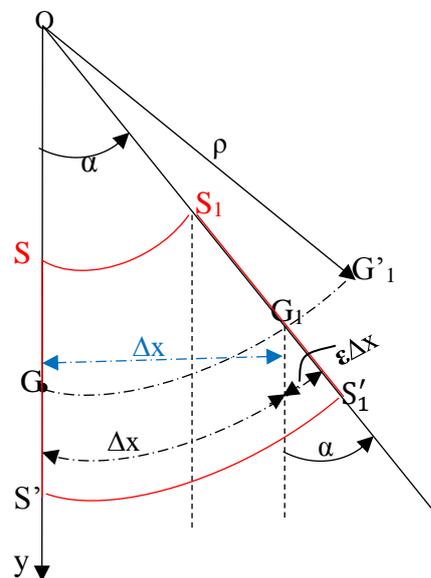


Figure IV.3

$$\sigma = E \cdot y \cdot \alpha \cdot \frac{1}{\Delta x}$$

$$\rightarrow y \cdot \alpha = \frac{\sigma \cdot \Delta x}{E} = \frac{1}{E} \cdot \frac{M \cdot y}{I} \cdot \Delta x \left( \text{car } \sigma = \frac{M \cdot y}{I} \right)$$

$$\text{d'où } \alpha = \frac{1}{E} \cdot \frac{M \cdot y}{I} \cdot \Delta x \cdot \frac{1}{y}$$

$$\rightarrow \alpha = \frac{M}{EI} \cdot \Delta x$$

Considérons les relations :

$$\alpha = \frac{M}{EI} \cdot \Delta x$$

$$\Delta x = \rho \cdot \alpha$$

$$\rho \cdot \alpha = \Delta x$$

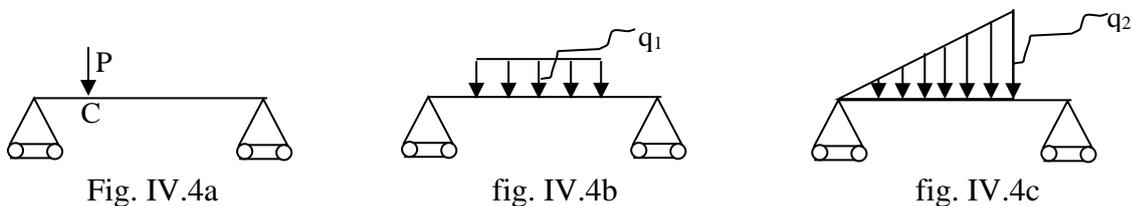
$$\rightarrow \frac{\alpha}{\rho \alpha} = \frac{(M/EI) \cdot \Delta x}{\Delta x}$$

$$\rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} : \text{c'est la valeur de la courbure.}$$

### IV.3/ Flexion simple :

On dit qu'une poutre est sollicitée en flexion simple lorsque toutes les forces extérieures appliquées à celle-ci appartiennent à l'un des plans principaux d'inertie perpendiculaire à l'axe neutre de la poutre.

Ces forces peuvent être soit concentrées en un point, soit réparties (voir figures II.1a, II.1b, II.1c).



**Figure IV.4**

P: force concentrée en C.

$q_1$  : charge uniformément répartie (charge rectangulaire).

$q_2$  : charge irrégulièrement répartie (charge triangulaire).

**IV.3.1/ Eléments de réduction :**

Si en plus du moment fléchissant  $M$ , agit un effort tranchant  $T$ , alors on dit de cette flexion qu'elle est du type *Simple*.

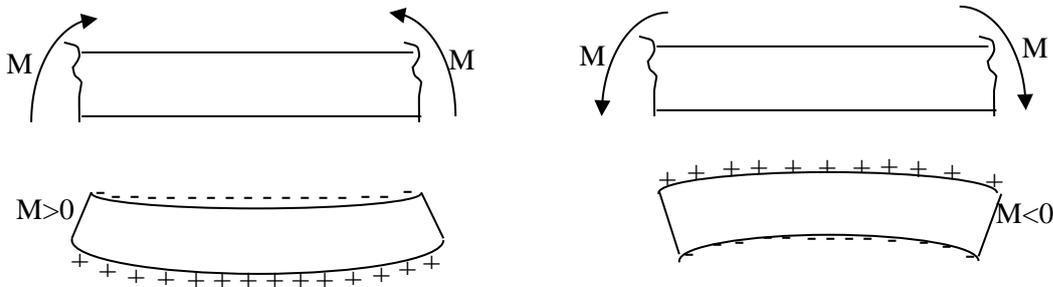
$$\begin{cases} M \neq 0 \\ T \neq 0 \\ N = 0 \end{cases}$$

Ces deux éléments de réduction conduisent respectivement à une rotation et un glissement.

**IV.3.2/ Convention de signe des moments fléchissant et des efforts tranchants :**

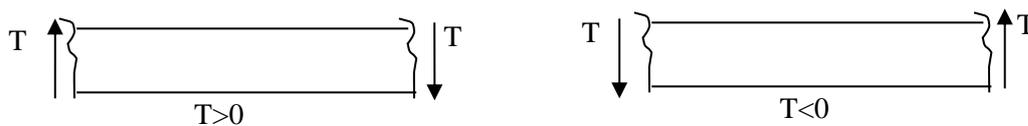
a) *Moment fléchissant :*

Par convention, le moment de flexion est positif lorsqu'il provoque la traction des fibres inférieures.



b) *Effort tranchant :*

L'effort tranchant est positif lorsqu'il tend à faire tourner un élément de longueur  $dx$  dans le sens des aiguilles d'une montre.

**IV.3.3/ Détermination de M et T :**

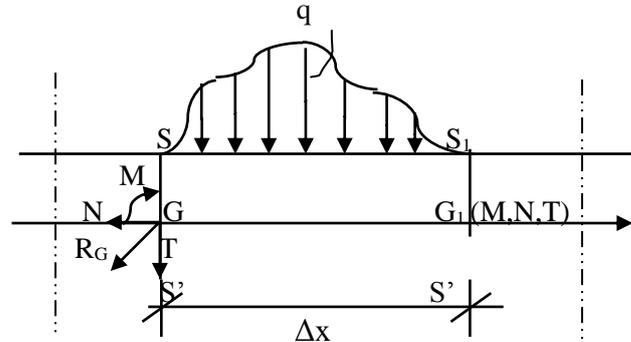
La méthode permettant de déterminer les efforts internes ( $M$  et  $T$ ) est dite *méthode des sections*. Cette méthode consiste à faire une coupe fictive à l'endroit où on veut calculer  $M$  et  $T$ , ainsi nous obtenons deux tronçons, considérons alors un des deux tronçons (de préférence le moins sollicité par des forces extérieures) puis appliquons les équations de l'équilibre statique pour calculer  $M$  et  $T$ .

$$\text{Soit: } \begin{cases} \sum F_{/y} = 0 \text{ pour le calcul de } T \\ \sum M_{/pt} = 0 \text{ pour le calcul de } M \end{cases}$$

**N.B :** le choix du tronçon (droit ou gauche) n'affecte pas sur les valeurs de  $M$  et  $T$ .

**IV.3.4/ Relation entre M et T :**

Théorème fondamental : La dérivée par rapport à l'abscisse de la section, du moment de flexion d'une poutre droite, chargée normalement à sa direction est égale à l'effort tranchant dans la section, changé de signe.



Considérons un élément d'une poutre pris entre deux sections très voisines  $SS'$  et  $S_1S_1'$  et distantes de  $\Delta x$ .

$$\sum M_{SS'} = 0 \Rightarrow M_1 = M + MR_{G/G_1} + M \text{ (Forces entre G et G}_1\text{)}$$

$R_G$  : résultante des forces extérieures.

$$M_1 = M + MT_{/G_1} - q\Delta x \frac{\Delta x}{2}$$

$$\rightarrow M_1 = M - T\Delta x - q\Delta x \frac{\Delta x}{2}$$

$$(\Delta x)^2 \rightarrow 0$$

$$M_1 = M - T\Delta x$$

$$M_1 - M = - T\Delta x$$

$M_1 - M = \Delta M$  accroissement de M quand on passe de G à  $G_1$

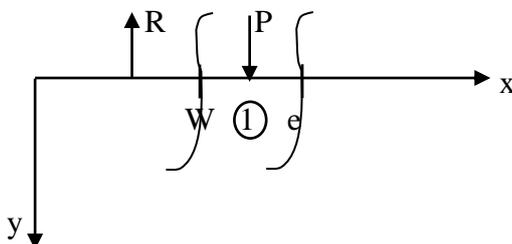
$$\Delta M = - T\Delta x$$

$$T = - \frac{\Delta M}{\Delta x}$$

$$\Delta x \rightarrow 0 \rightarrow \frac{\Delta M}{\Delta x} \rightarrow M'(x)$$

$$\rightarrow \boxed{T = - M'(x)}$$

Remarque : l'effort tranchant n'est pas défini au point d'application d'une charge localisée



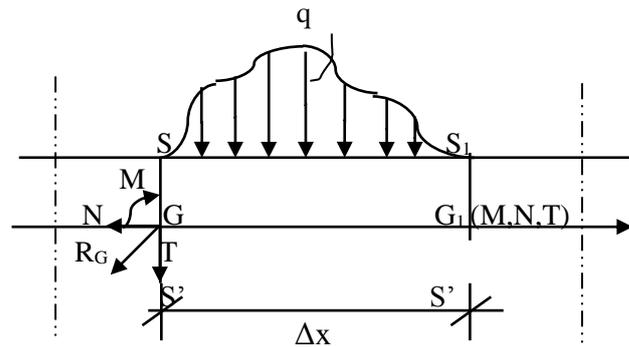
Si R : résultantes des forces situées à gauche de w qui est situé à gauche de ① où est appliquée P.

En w :  $T_w = R$

En e :  $T_e = R + P$

En ①, il n'y a pas plus de raison de compter que de ne pas compter P pour exprimer  $T_1 \rightarrow T_1$  est indéfini : il y a discontinuité.

**IV.3.5/ Relation entre q et T:**



$T_1 = T + q\Delta x$

$T_1 - T = q\Delta x$

$\Delta T = q\Delta x$

$q = \frac{\Delta T}{\Delta x} \rightarrow \boxed{q = T'(x)}$

En tout point où l'effort tranchant est défini, la charge unitaire q est égale à la dérivée de l'effort tranchant par rapport à x.

Donc finalement, M, T et q sont liés par la relation :  $\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dT}{dx} = -q$  : c'est

***la relation de Jouravsky***

**IV.3.6/ Diagrammes de M et T :**

Les valeurs de M et T dépendent de l'abscisse du point considéré

Les représentations graphiques de ces valeurs sont appelées *les diagrammes*.

Diagramme de M(x) :

$T_x = - M'(x)$

$T(x) = 0 \rightarrow M'(x) = 0 \rightarrow$  tg à M(x) est horizontale et M(x) admet un extremum.

$T(x)$  constitue le coefficient angulaire changé de signe de la tg au diagramme de  $M(x)$  au point considéré.

$X = 0 \longrightarrow T(0) = V_A = \text{réaction de gauche}$

$X = l \longrightarrow T(l) = -V_B = \text{réaction de droite}$

Diagramme  $T(x)$  :

1°) Si  $q = 0 \longrightarrow$  Pas de charge répartie entre 2 forces concentrées  $\longrightarrow T'(x) = 0$   
 $T(x) = C^{te}$

->  $T(x)$  est une droite parallèle à l'axe des  $x \rightarrow M(x)$  de la forme  $y = a x + b$

2°) Si  $q = C^{te}$  c'est-à-dire sur charge uniformément répartie,  $T(x)$  est une droite de la forme  $qx + \alpha$  et  $M(x)$  une parabole du second degré de la forme  $-q \frac{x^2}{2} - \alpha x + \beta$

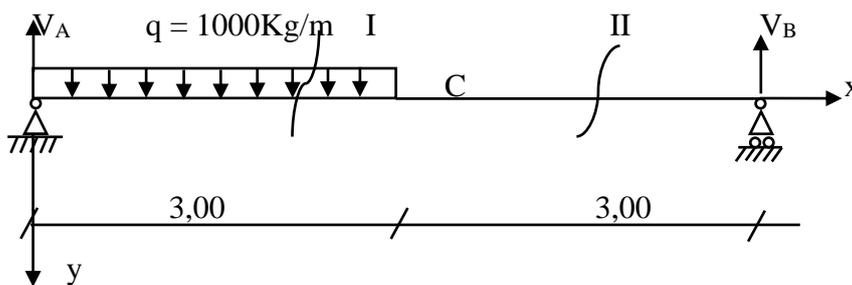
3°) Si  $q = a x + b$  surcharge variable trapézoïdale

$$T(x) = \frac{ax^2}{2} + bx + c \text{ (parabole second degré)}$$

$$M(x) = -\frac{ax^3}{6} - \frac{bx^2}{2} - cx + d \text{ (parabole 3eme degré)}$$

**Exemple :**

Traçons les diagrammes des efforts internes de la poutre suivante :



1) Réaction des appuis  $V_A$  et  $V_B$  :

$$V_A + V_B = 1000 \times 3$$

$$\sum M_{/B} = 0 \Rightarrow V_A \times 6 - 3 \cdot 1000 \left( \frac{3}{2} + 3 \right) = 0 \rightarrow V_A = 2250 \text{ Kg}$$

$$\sum M_{/A} = 0 \Rightarrow V_B \times 6 - 3 \cdot 1000 \left( \frac{3}{2} \right) = 0 \rightarrow V_B = 750 \text{ Kg}$$

2)  $M(x) = ?$ :Section I :  $0 \leq x \leq 3$  :

$$M(x) = V_A \cdot x - q \frac{x^2}{2}$$

$$= 2250x - 1000 \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$= 2250x - 500x^2 \begin{cases} x=0 \longrightarrow M_1 = 0 \\ x=3 \longrightarrow M_1 = 3350 \text{Kg.m} \end{cases}$$

Section II :  $3 \leq x \leq 6$  :

$$M_2 = V_A \cdot x - q \Delta x \left( -\frac{\Delta x}{2} + x \right)$$

$$= 2250x - q \cdot 3 \left( x - \frac{3}{2} \right)$$

$$= 2250x - 3000 \left( x - \frac{3}{2} \right) \begin{cases} x=3 \longrightarrow M_2 = 2250 \text{kg.m} \\ x=6 \longrightarrow M_2 = 0 \end{cases}$$

3) Effort tranchant:a)  $0 < x < 3$ 

$$T_1(x) = -V_A + qx$$

$$= -2250 - 1000x \begin{cases} x=0 \longrightarrow T(0) = V_A = -2250 \text{kg} \\ x=3 \longrightarrow T(3) = 750 \text{Kg} \end{cases}$$

$$T(x) = 0 \rightarrow V_A = q \cdot x \rightarrow x = \frac{V_A}{q} = \frac{2250}{1000} = 2,25 \text{ m}$$

En ce point  $M(x)$  passe par un extremum.

$$T_x = -M'(x)$$

$$M(x) = 2250x - 500x^2$$

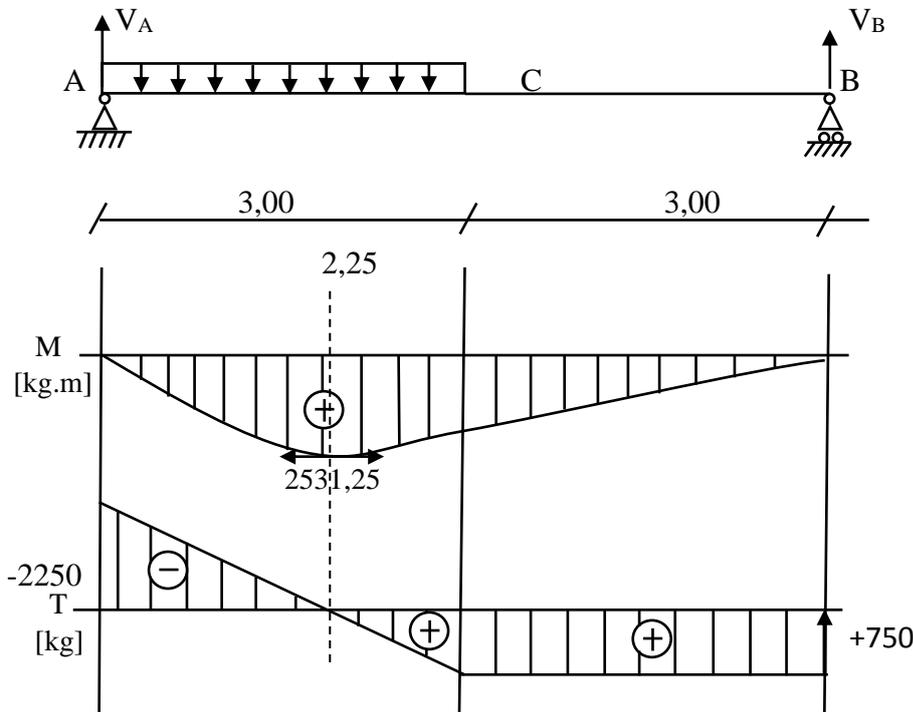
$$M(x=2,25) = 2250(2,25) - 500(2,25)^2 = 2531,25 \text{mkg}$$

b)  $3 \leq x \leq 6$ 

$$T(x) = -V_A + q\Delta x$$

$$= -2250 + 1000 \times 3 = 750 \text{kg}$$

Diagrammes :



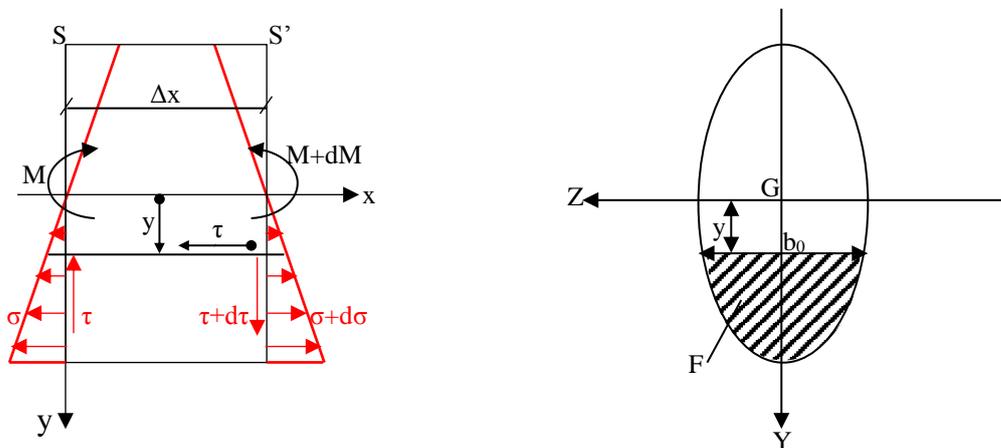
**IV.3.7/ Contraintes normales :**

Les formules établies en flexion pure restent valables.

à savoir :

$$\begin{cases} \sigma = \frac{M \cdot y}{I_z} : \text{contrainte normale maximale} \\ \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} : \text{équation de la courbure} \end{cases}$$

**IV.3.8/ Contrainte tangentielle (de cisaillement) :**



L'équilibre selon x de l'élément de poutre de section F et de longueur  $\Delta x$  :

$$-\iint_F \sigma dF + \iint_F (\sigma + d\sigma) dF - b_0 \cdot \Delta x \cdot \tau = 0$$

$$-N + (N + \Delta N) - b_0 \cdot \Delta x \cdot \tau = 0$$

$$+N - (N + \Delta N) + b_0 \cdot \Delta x \cdot \tau = 0$$

$$\sum \sigma ds - \sum (\sigma + d\sigma) ds + b_0 \cdot \Delta x \cdot \tau = 0$$

$$\sum \frac{M \cdot y}{I} ds - \sum \frac{(M + \Delta M)y}{I} ds + b_0 \cdot \Delta x \cdot \tau = 0$$

$$\frac{M}{I} \sum y ds - \frac{(M + \Delta M)}{I} \sum y \cdot ds + b_0 \cdot \Delta x \cdot \tau = 0$$

$$\frac{M}{I} S_z - \frac{(M + \Delta M)}{I} S_z + b_0 \cdot \Delta x \cdot \tau = 0$$

$$\tau = \frac{1}{b \cdot \Delta x} \left[ \frac{\Delta M}{I_G} S_z \right]$$

$$\tau = \frac{\Delta M}{\Delta x} \left[ \frac{S_z}{b_0 \cdot I_G} \right]$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta x} = M'_x = T$$

$$\boxed{\tau = \frac{T_y \cdot S_z}{b_0 \cdot I_z}}$$

avec :

$T_y$  : effort tranchant dans la section considérée.

$S_z$  : moment statique de la section transversale par rapport à l'axe Z.

$b_0$  : largeur minimale de la section transversale.

$I_z$  : moment d'inertie de la section transversale par rapport à l'axe Z.

**Exemples :** Déterminons la distribution des contraintes tangentielles pour les sections suivantes :

a) *Section rectangulaire de largeur b et de hauteur h :*

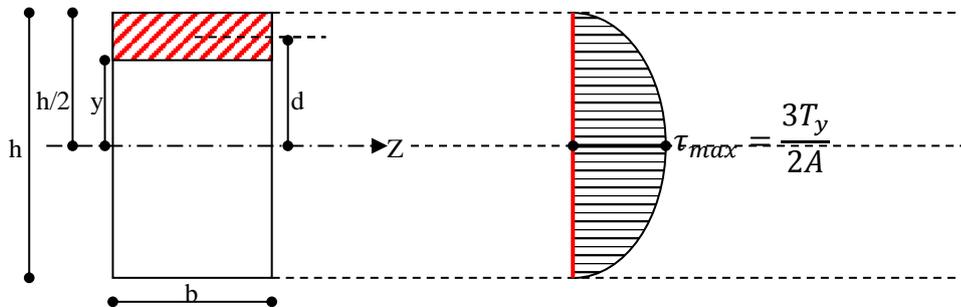
$$\text{On a } \tau = \frac{T_y \cdot S_z}{b_0 \cdot I_z}$$

$T_y = \text{constante.}$

$b_0 = b$

$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Cherchons l'expression du moment statique de la partie hachurée par rapport à Z :



$$S_z = A' \cdot d$$

$$A' = b \times \left(\frac{h}{2} - y\right)$$

$$d = \frac{\left(\frac{h}{2} - y\right)}{2} + y = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y\right)$$

$$\rightarrow S_z = b \left(\frac{h}{2} - y\right) \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y\right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

$$\rightarrow \tau = \frac{T_y \cdot S_x}{b_0 \cdot I_x} = \frac{T_y \cdot b \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \cdot 12}{2b \cdot bh^3} = \frac{6T_y \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)}{bh^3}$$

$$\rightarrow \tau = \frac{6T_y}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

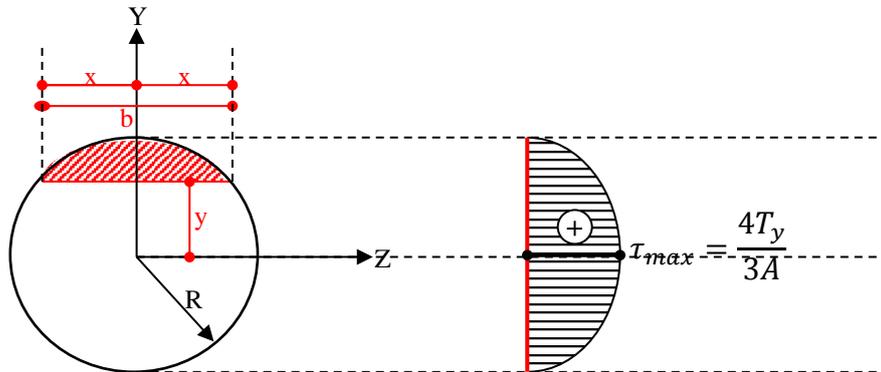
$\tau = f(y^2)$ : c'est une parabole

$$\text{Pour } y = \frac{h}{2} \rightarrow \tau = 0$$

$$y = -\frac{h}{2} \rightarrow \tau = 0$$

$$y = 0 \rightarrow \tau = \frac{6T_y}{4bh} = \frac{3}{2} \cdot \frac{T_y}{A}$$

b) Section circulaire de rayon  $R$  :



$$\tau = \frac{T_y \cdot S_z}{b_0 \cdot I_z}$$

$$b_0 = b$$

$$\left. \begin{aligned} I_z &= \frac{\pi R^4}{4} \\ S_z &= \frac{2}{3} U^{3/2} \text{ avec } U = R^2 - y^2 \end{aligned} \right\} \text{(Voir Exercices caractéristiques géométriques des sections)}$$

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{T_y \cdot 4}{b \cdot \pi R^4} \cdot \frac{2}{3} U^{3/2} = \frac{8}{3} T_y \frac{1}{b \cdot \pi R^4} U^{3/2} \\ &= \frac{8}{3} T_y \frac{1}{b \cdot \pi R^4} (R^2 - y^2)^{3/2} = \frac{8}{3} \frac{T_y}{\pi b \cdot R^4} (R^2 - y^2)^{3/2} \end{aligned}$$

$$b = 2x$$

$$x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow x^2 = R^2 - y^2$$

$$\Rightarrow b = 2\sqrt{R^2 - y^2}$$

$$\tau = \frac{8}{3} \frac{T_y}{\pi \cdot R^4 \cdot 2\sqrt{R^2 - y^2}} (R^2 - y^2)^{3/2}$$

$$\tau = \frac{4}{3} \frac{T_y}{\pi \cdot R^4 \cdot \sqrt{R^2 - y^2}} (R^2 - y^2)^{3/2} = \frac{4}{3} \frac{T_y}{\pi \cdot R^4 \cdot \sqrt{R^2 - y^2}} \cdot (\sqrt{R^2 - y^2}) \cdot (R^2 - y^2)$$

$$\tau = \frac{4}{3} \frac{T_y}{\pi \cdot R^4} \cdot R^2 \left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right)$$

$$\tau = \frac{4}{3} \frac{T_y}{\pi \cdot R^2} \cdot \left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right)$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{4 T_y}{3 A} \cdot \left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right) \rightarrow \text{c'est aussi une fonction parabolique}$$

$$\text{Pour } y = 0 \rightarrow \tau = \tau_{max} = \frac{4 T_{max}}{3 A}$$

$$y = \pm R \rightarrow \tau = \tau_{min} = 0$$

#### **IV.3.9/ Contraintes maximales :**

a) Contrainte normale :

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max} \cdot y_{max}}{I_z}$$

$M_{max}$  : moment fléchissant maximal.

$I_z$  : moment d'inertie de la section par rapport à l'axe Z.

$y_{max}$  : distance maximale entre l'axe neutre et le point le plus éloigné de la section.

b) Contrainte tangentielle :

$$\tau_{max} = \frac{T_{y_{max}} \cdot S_z}{b_0 \cdot I_z}$$

$T_{y_{max}}$  étant l'effort tranchant maximal.

#### **IV.3.10/ Condition de résistance :**

a) Contrainte normale : Pour que la poutre résiste à la flexion, il faut que la contrainte normale maximale calculée ( $\sigma$ ) ne dépasse pas la limite élastique pratique à la traction ou compression ( $\sigma_{adm}$ ).

$$\text{soit } \sigma_{max} = \frac{M_{max} \cdot y_{max}}{I_z} \leq \sigma_{adm}$$

A partir de cette condition, on peut déterminer les dimensions de la section transversale.

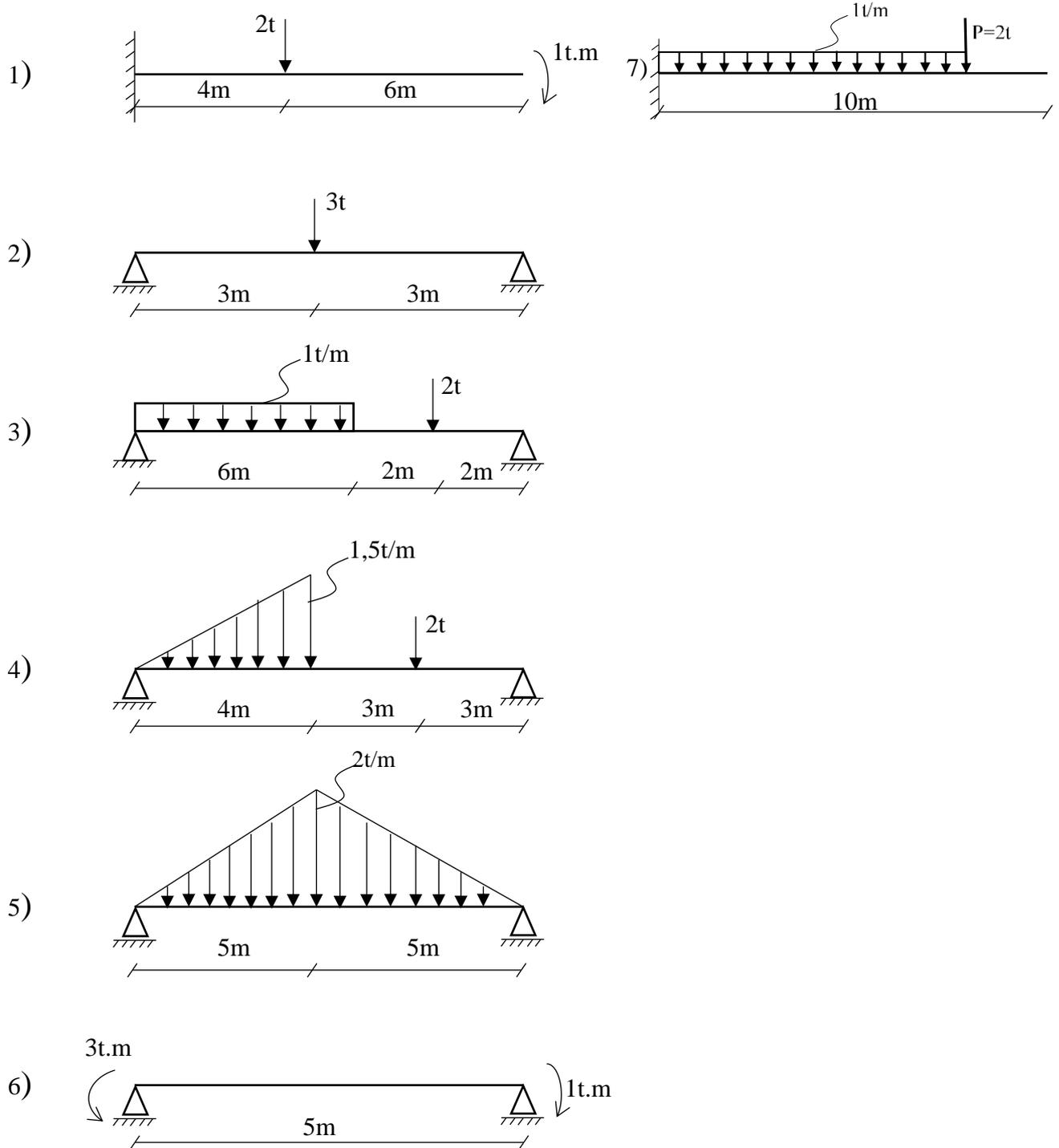
b) Contrainte tangentielle : Pour que la résistance de la poutre au cisaillement soit assurée, il faut que la contrainte tangentielle maximale calculée ( $\tau$ ) soit inférieure ou égale à la limite élastique pratique au cisaillement ( $\tau_{adm}$ ).

$$\tau_{max} = \frac{T_{y_{max}} \cdot S_z}{b_0 \cdot I_z} \leq \tau_{adm}$$

**EXERCICES**

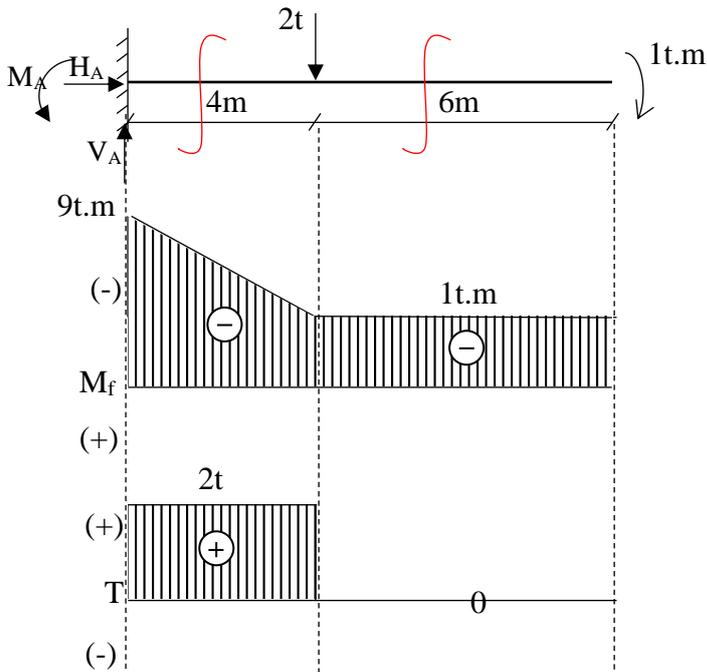
**Exercice 1 :**

Tracer les diagrammes des moments fléchissant et des efforts tranchants des poutres suivantes :



Solution :

1)

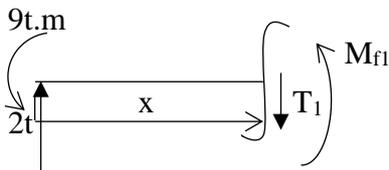


1) Calcul des réactions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_{/x} = 0 \\ \sum F_{/y} = 0 \\ \sum M_{/A} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} H_A = 0 \\ V_A = 2t \\ M_A = (2 \cdot 4) + 1 = 9t.m \end{array} \right.$$

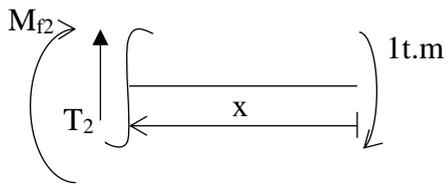
2) Calcul de M et T :

Section I :  $0 \leq x \leq 4m$



$$\begin{array}{l} \sum F_{/y} = 0 \Rightarrow T_1 = 2t \\ \sum M_{/c} = 0 \Rightarrow M_{f1} = 2x - 9 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \quad M_{f1} = -9t.m \\ x = 4m \quad M_{f1} = -1t.m \end{array} \right.$$

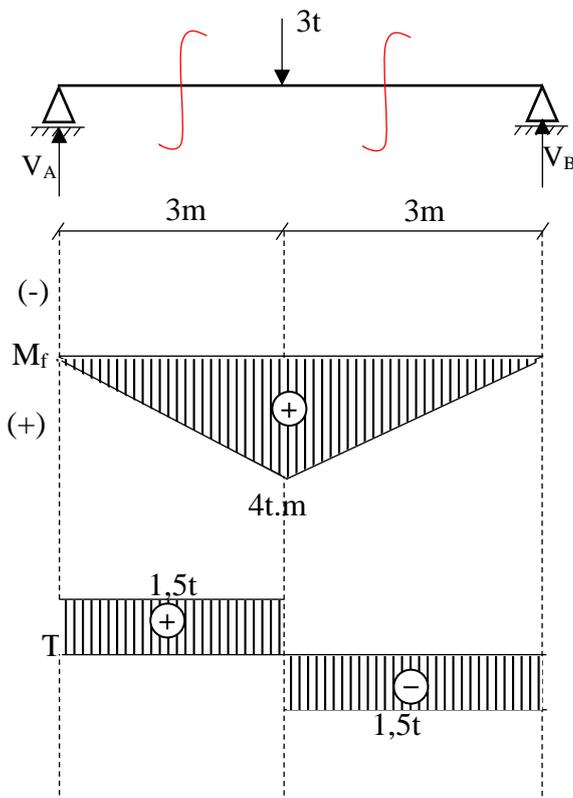
Section II :  $0 \leq x \leq 6m$



$$\sum F_{/y} = 0 \Rightarrow T_2 = 0$$

$$\sum M_{/c} = 0 \Rightarrow M_{f2} = - 1t.m$$

2)

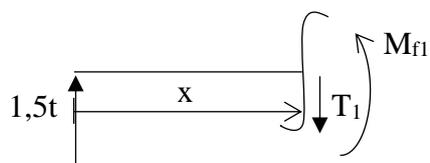


1) Calcul des réactions :

$$\text{Par symétrie : } V_A = V_B = \frac{P}{2} = \frac{3}{2} = 1,5t$$

2) Calcul de M et T :

Section I:  $0 \leq x \leq 3m$



$$\sum F_{/y} = 0 \Rightarrow T_1 = 1,5t$$

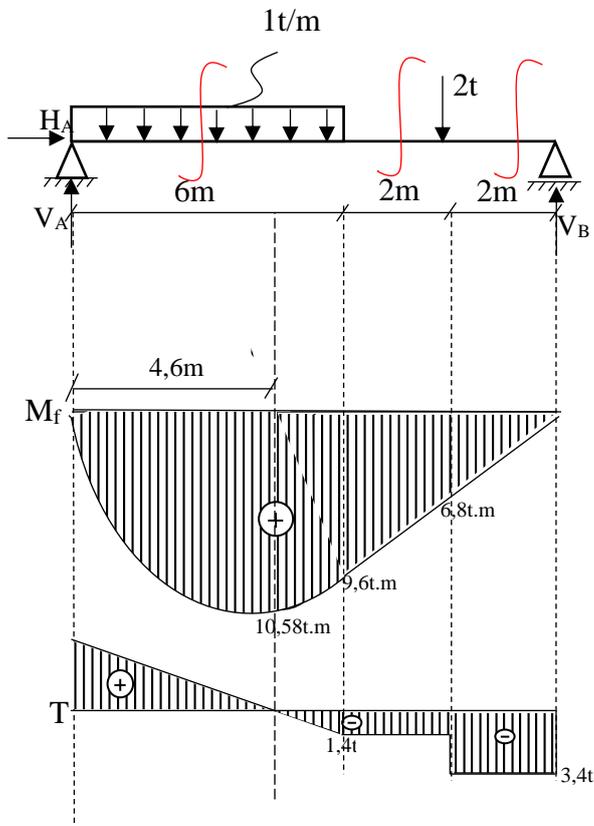
$$\sum M_{/c} = 0 \Rightarrow M_{f1} = 1,5x \begin{cases} x = 0 & M_{f1} = 0 \\ x = 3m & M_{f1} = 4,5t.m \end{cases}$$

Section II :  $0 \leq x \leq 3m$

Par symétrie  $M_{f1} = M_{f2}$

$$T_2 = -T_1$$

3)



Calcul des réactions :

$$\sum F_{/x} = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

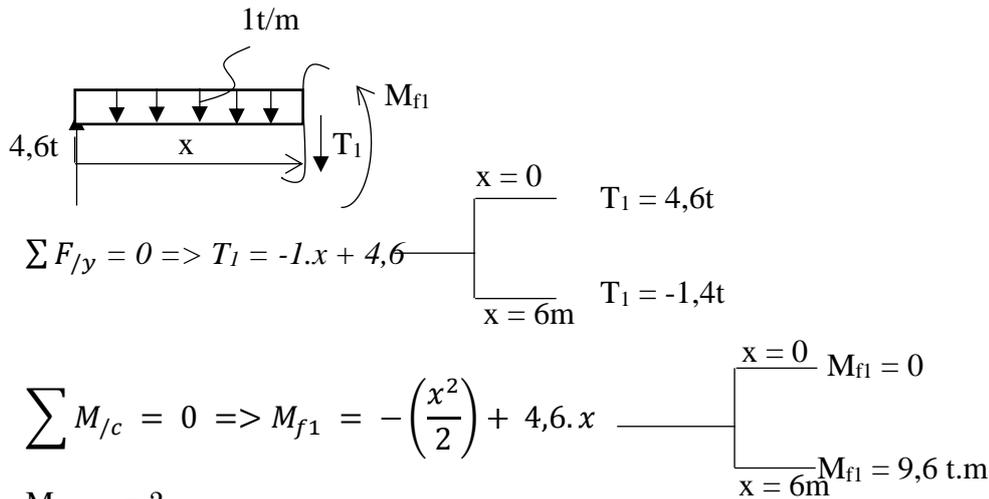
$$\sum F_{/y} = 0 \Rightarrow V_A + V_B = (1 \times 6) + 2 = 8t$$

$$\sum M_{/A} = 0 \Rightarrow 10V_B = (2 \times 8) + \left(1 \times 6 \times \frac{6}{2}\right) \rightarrow V_B = 3,4t$$

$$\sum M_{/B} = 0 \Rightarrow 10V_A = (2 \times 2) + \left[(1 \times 6) \left(\frac{6}{2} + 4\right)\right] \rightarrow V_A = 4,6t$$

1) Calcul de M et T :

Section I :  $0 \leq x \leq 6m$



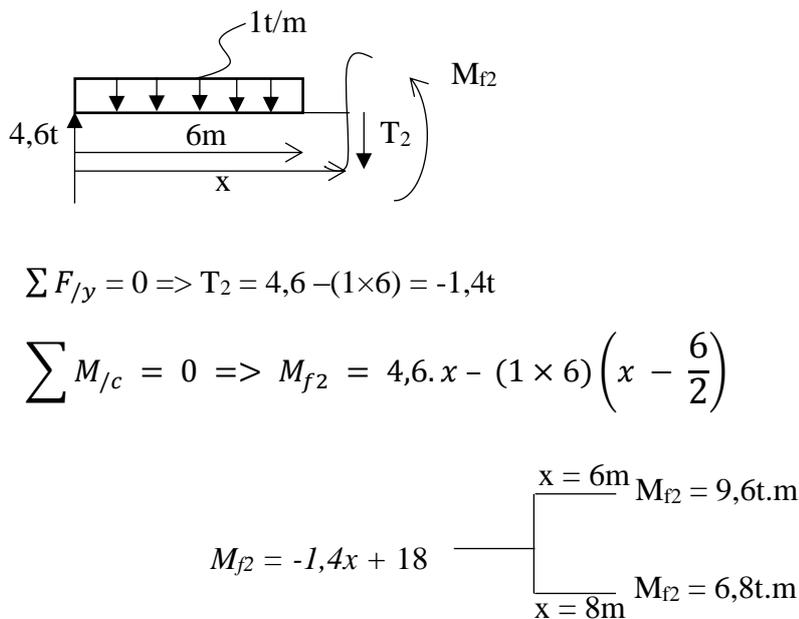
Remarque :

L'équation de  $M_f$  est une équation du second degré donc le diagramme de  $M_f$  est parabolique.

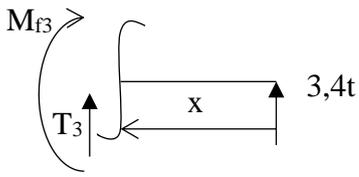
Le sommet de cette parabole représente la valeur de  $M_{f \max}$  dont les coordonnées sont

(4,6m ; 10,58 kg.m)

Section II:  $6 \leq x \leq 8m$



Section III :  $0 \leq x \leq 2m$

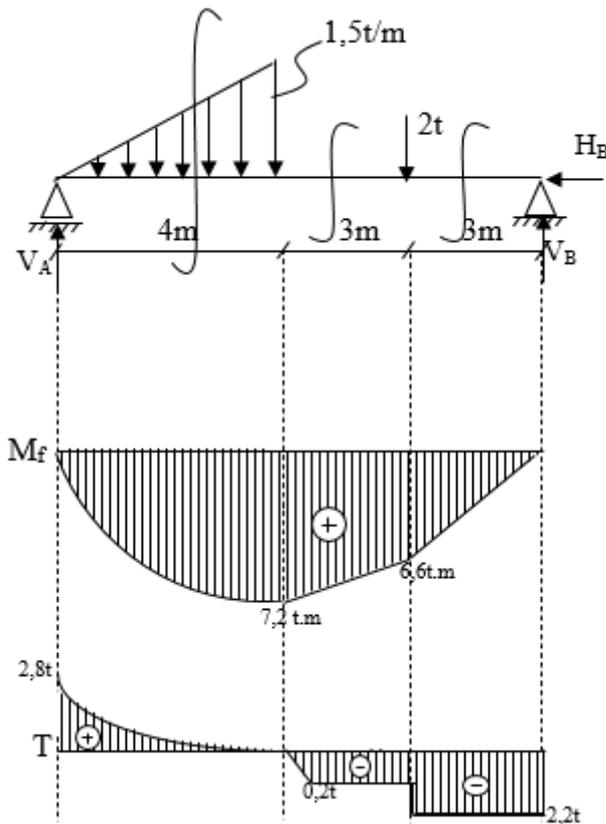


$$\sum F_{/y} = 0 \Rightarrow T_3 = -3,4t$$

$$\sum M_{/c} = 0 \Rightarrow M_{f3} = 3,4 \cdot x$$

$$\begin{cases} x = 0 & M_{f3} = 0 \\ x = 2m & M_{f3} = 6,8t.m \end{cases}$$

4)



1) Calcul des réactions :

$$\sum F_{/x} = 0 \Rightarrow H_B = 0$$

$$\begin{aligned} \sum F_{/y} = 0 &\Rightarrow V_A + V_B = \left(\frac{4 \times 1,5}{2}\right) + 2 \\ &\Rightarrow V_A + V_B = 5t \end{aligned}$$

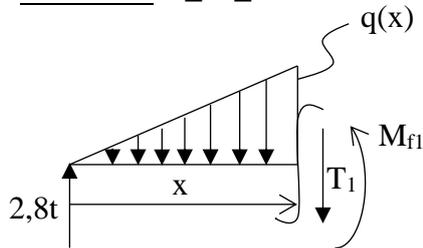
$$\begin{aligned} \sum M_{/A} = 0 &\Rightarrow 10V_B = (2 \times 7) + \left(\frac{4 \times 1,5}{2}\right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 4\right) \\ &\Rightarrow V_B = 2,2t \end{aligned}$$

$$\sum M_{/B} = 0 \Rightarrow 10V_A = (2 \times 3) + \left(\frac{4 \times 1,5}{2}\right)10 - \left(\frac{2}{3} \cdot 4\right)$$

$$\Rightarrow V_A = 2,8t$$

2) Calcul de M et T :

Section I :  $0 \leq x \leq 4m$



$$\sum F_{/y} = 0 \Rightarrow T_1 = -\frac{q(x) \cdot x}{2} + 2,8$$

Déterminons  $q(x)$  à l'aide du théorème de Thales (triangle semblable)

$$\text{On a : } \frac{q(x)}{x} = \frac{1,5}{4} \rightarrow q(x) = \frac{1,5}{4}x = 0,375x$$

$$T_1 = -\frac{0,375x^2}{2} + 2,8 \quad \begin{cases} x=0 & T_1 = 2,8t \\ x=4m & T_1 = -0,2t \end{cases}$$

$$\sum M_{/c} = 0 \Rightarrow M_{f1} = -(0,1875x^2) \cdot \left(\frac{x}{3}\right) + 2,8x$$

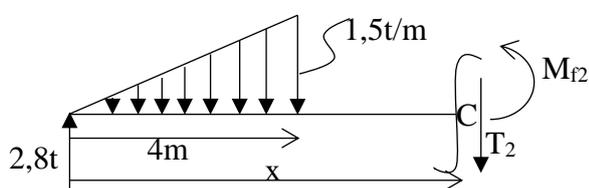
$$M_{f1} = -0,0625x^3 + 2,8x \quad \begin{cases} x=0 & M_{f1} = 0 \\ x=4m & M_{f1} = 7,2t.m \end{cases}$$

$$\frac{dM_{f1}}{dx} = 0 \Rightarrow -0,1875 \cdot x^2 + 2,8 = 0$$

$$\rightarrow x^2 = 14,93m^2 \Rightarrow x = 3,86 \text{ m}$$

$$M_{f1 \text{ max}} = M_{f1}(3,86) = 7,2t.m$$

Section II :  $4m \leq x \leq 7m$



$$\sum F_{/y} = 0 \Rightarrow T_2 = -\frac{1,5 \times 4}{2} + 2,8$$

$$\rightarrow T_2 = -0,8 \text{ t}$$

$$\sum M_{/c} = 0 \Rightarrow M_{f2} = 2,8x - 3\left(x - \frac{2}{3} \cdot 4\right)$$

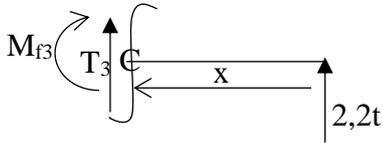
$x = 4$

$M_{f2} = 7,2 \text{ t}$

$x = 7$

$M_{f2} = 6,6 \text{ t.m}$

Section III :  $0 \leq x \leq 3\text{m}$



$$\sum F_{/y} = 0 \Rightarrow T_3 = -2,2\text{t}$$

$$\sum M_{/c} = 0 \Rightarrow M_{f3} = 2,2x$$

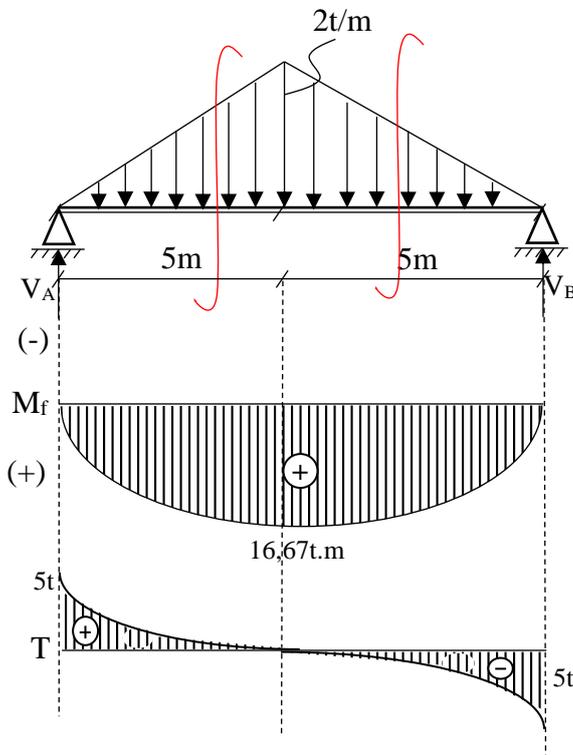
$x = 0$

$M_{f3} = 0$

$x = 3\text{m}$

$M_{f3} = 6,6\text{t.m}$

5)



1) Calcul des réactions :

$$\sum F_{/y} = 0 \Rightarrow V_A + V_B = \frac{10 \times 2}{2} = 10\text{t}$$

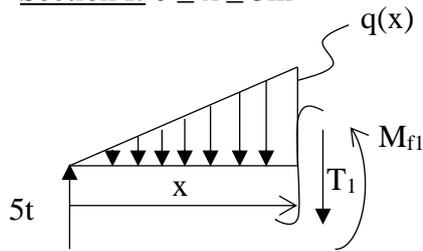
$$\sum M_{/A} = 0 \Rightarrow V_B = \frac{10 \times 5}{10}$$

$$\Rightarrow V_B = 5\text{t}$$

Par symétrie :  $V_A = V_B = 5t$

2) Détermination des efforts internes  $M_f$  et  $T$  :

Section I:  $0 \leq x \leq 5m$



$$\sum F_{/y} = 0 \Rightarrow T_1 = -\left(\frac{q(x) \cdot x}{2}\right) + 5$$

$q(x) = ?$

$$\frac{q(x)}{x} = \frac{2}{5} \text{ (triangles semblables)} \Rightarrow q(x) = 0,4x$$

$$T_1 = -0,2x^2 + 5 \begin{cases} x=0 & T_1 = 5t \\ x=5 & T_1 = 0 \end{cases}$$

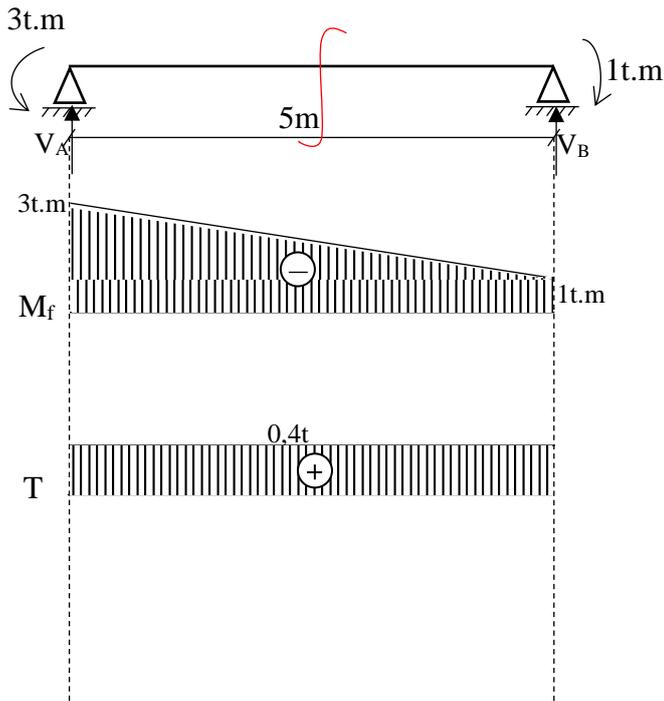
$$\sum M_{/c} = 0 \Rightarrow M_{f1} = -0,2x^2 \cdot \left(\frac{x}{3}\right) + 5x$$

$$M_{f1} = -0,067x^3 + 5x \begin{cases} x=0 & M_{f1} = 0 \\ x=5 & M_{f1} = 16,67t.m \end{cases}$$

Section II:  $0 \leq x \leq 5m$

Cette section est symétrique à la 1<sup>ère</sup> section  $\Rightarrow M_{f2} = M_{f1}$  et  $T_2 = -T_1$

6)



Calcul des réactions :

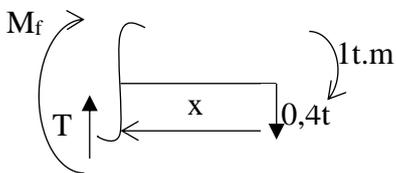
$$\sum F_{/y} = 0 \Rightarrow V_A + V_B = 0$$

$$\sum M_{/A} = 0 \Rightarrow 5V_B = 1 - 3 = -0,4t$$

$$\sum M_{/B} = 0 \Rightarrow V_A = +0,4t$$

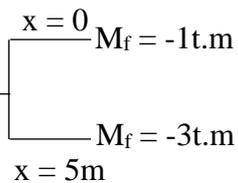
1) Détermination des efforts internes  $M_f$  et  $T$  :

Section I:  $0 \leq x \leq 5m$

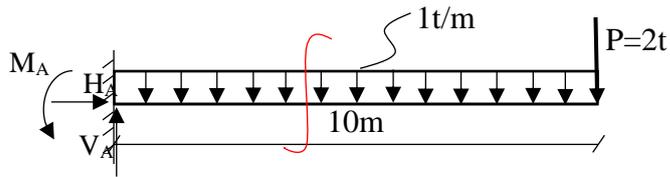


$$\sum F_{/y} = 0 \Rightarrow T = 0,4t$$

$$\sum M_{/c} = 0 \Rightarrow M_f = -0,4x - 1$$



7)

1) Calcul des réactions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_{/x} = 0 \\ \sum F_{/y} = 0 \\ \sum M_{/A} = 0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} H_A = 0 \\ V_A = (1 \times 10) + 2 = 12t \\ M_A = (1 \times 10 \times \frac{10}{2}) + (2 \times 10) = 70t.m \end{array} \right.$$

2) Détermination des efforts internes  $M_f$  et  $T$  :

Section I:  $0 \leq x \leq 10m$

$$\sum F_{/y} = 0 \Rightarrow T = -1x + 12$$

$$\sum M_{/c} = 0 \Rightarrow M_f = -0,5x^2 + 12x - 70$$

$x = 0 \quad T = 12t$   
 $x = 10m \quad T = 2t$

$x = 0 \quad M_f = -70t.m$   
 $x = 10m \quad M_f = 0$

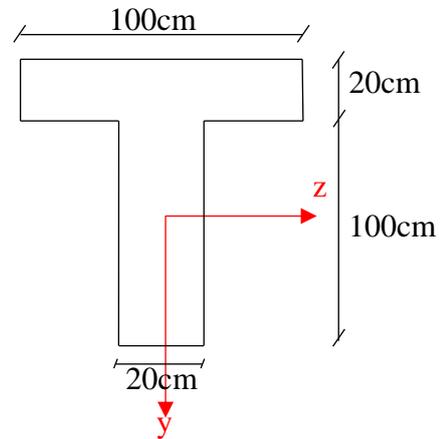
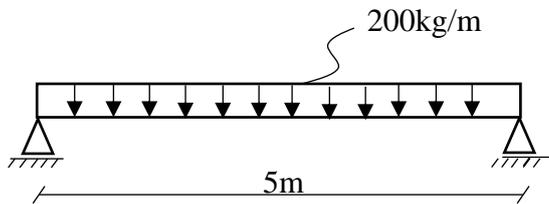
$$\frac{dM_f}{dx} = 0 \Rightarrow x = 12m \rightarrow \text{en dehors de l'intervalle de la section} \rightarrow$$

pas besoin de calculer  $M_f$  (12)

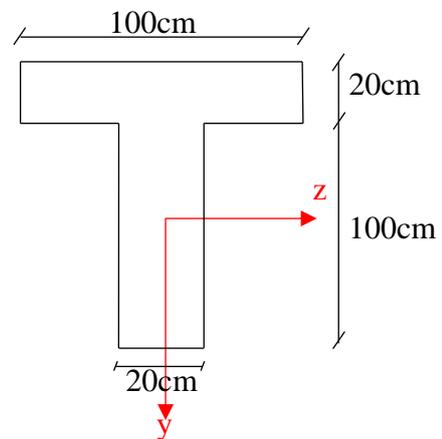
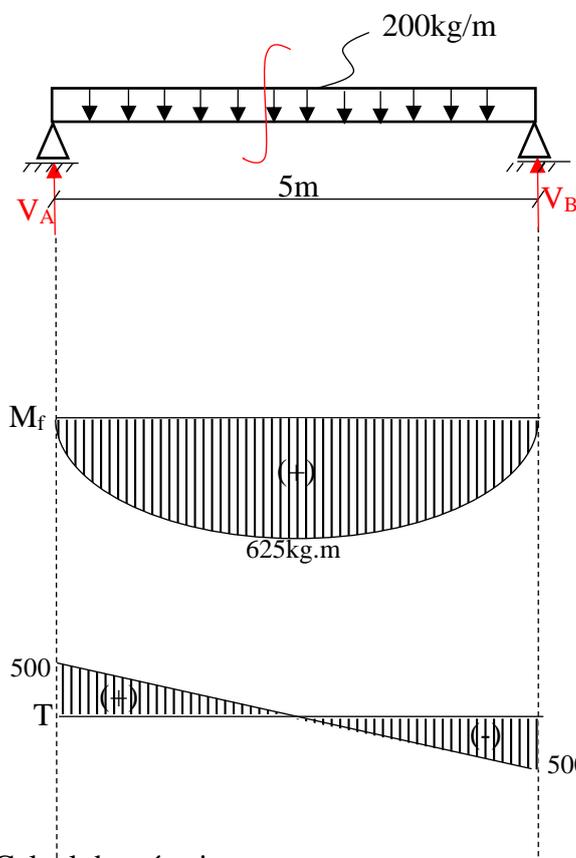
**Exercice 2:**

Vérifier la stabilité de la poutre suivante vis-à-vis de la flexion simple et du cisaillement.

On donne :  $\sigma_{adm}^+ = +1 \text{ bar}$ ,  $\sigma_{adm}^- = -1 \text{ bar}$ ,  $\tau_{adm} = 0,5 \text{ bars}$ .



*Solution:*

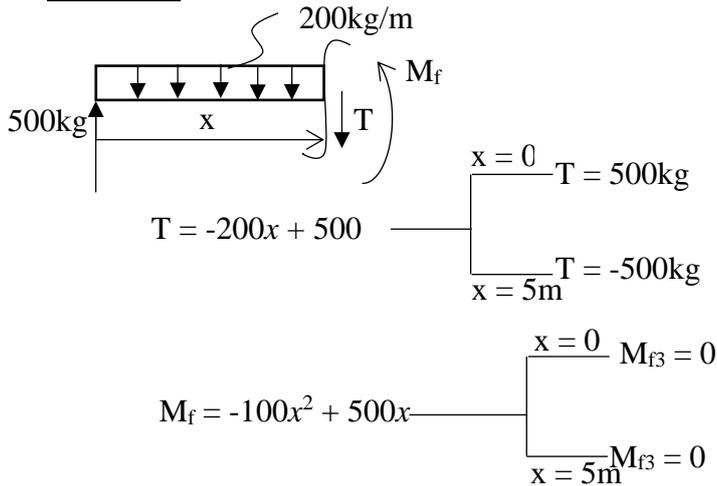


1) Calcul des réactions :

$$\text{Par symétrie : } V_A = V_B = \frac{ql}{2} = \frac{200 \times 5}{2} = 500 \text{ kg}$$

2) Détermination des efforts internes :

Section I :  $0 \leq x \leq 5\text{m}$



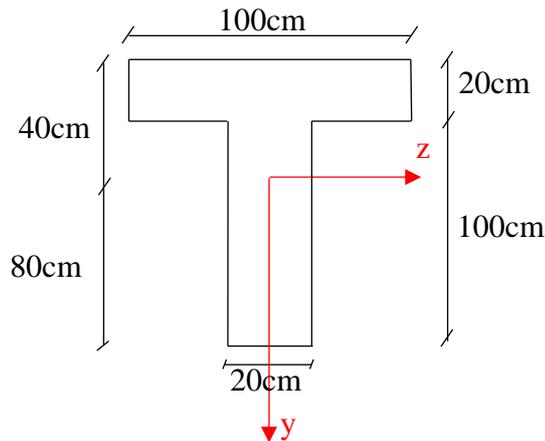
$$\frac{dM_f}{dx} = 0 \Rightarrow -200x + 500 = 0 \Rightarrow x = 2,5\text{m}$$

$$M_{f \max} = M_f(2,5) = 625 \text{ kg.m}$$

3) Vérification des contraintes :

Déterminons d'abord le centre de gravité de la section :

$$Y_G = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{[(100 \times 20 \times 110) + (20 \times 100 \times 50)]}{4000} = 80 \text{ cm}$$



Contraintes normales :

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{f \max}}{W_z}$$

$$M_{f \max} = 625 \text{ kg.m}$$

$$W_z = \frac{I_z}{y}$$

$$I_z = \left[ \frac{100(20)^3}{12} + (100 \times 20)(40 - 10)^2 \right] + \left[ \frac{20(100)^3}{12} + (20 \times 100)(80 - 50)^2 \right]$$

$$= 5\,333\,333,33 \text{ cm}^4$$

Fibre supérieure :

$$y = -40 \text{ cm}$$

$$\sigma_{\max}^- = \frac{625 \times 10^2}{3733333,33} (-40) = -0,47 \text{ kg/cm}^2 < \sigma_{\text{adm}}^- = -1 \text{ bar}$$

Fibre inférieure :

$$y = +80 \text{ cm}$$

$$\sigma_{\max}^+ = \frac{625 \times 10^2}{3733333,33} (+80) = +0,94 \text{ kg/cm}^2 < \sigma_{\text{adm}}^+ = +1 \text{ bar}$$

-> La poutre résiste à la flexion simple.

Contrainte tangentielle :

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max} \cdot M_{s/z}}{b_0 \cdot I_z}$$

$$T_{\max} = 500 \text{ kg}$$

$$I_z = 5\,333\,333,33 \text{ cm}^4$$

$$b_0 = 20 \text{ cm}$$

$$M_{s/z} = \left( 20 \times 80 \times \frac{80}{2} \right) = 64\,000 \text{ cm}^3$$

$$\tau_{\max} = \frac{500 \times 64\,000}{20 \times 5\,333\,333,33} = 0,3 \text{ kg/cm}^2$$

$\tau_{\max} = +0,3 \text{ bars} < \tau_{\text{adm}} = 0,5 \text{ bars}$  -> la poutre résiste au cisaillement.

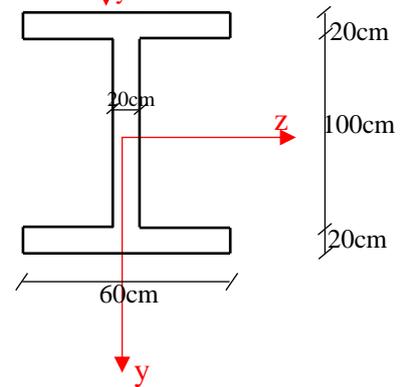
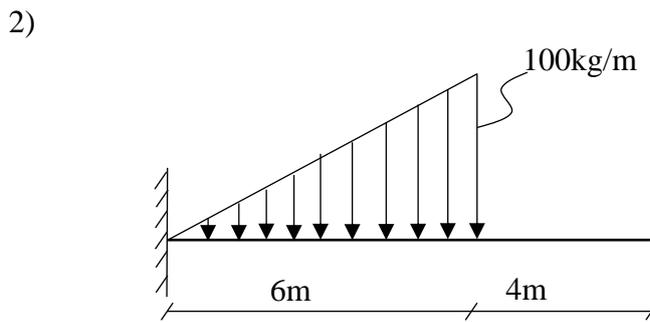
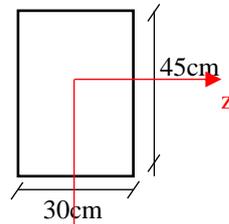
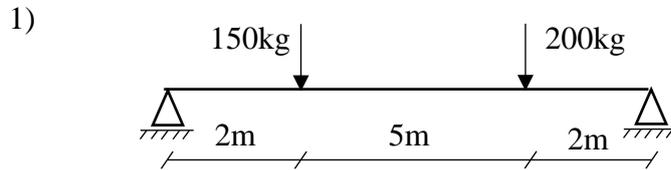
**Conclusion :**

La stabilité de la poutre vis-à-vis de la flexion simple et du cisaillement est assurée.

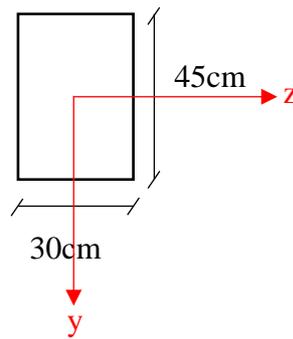
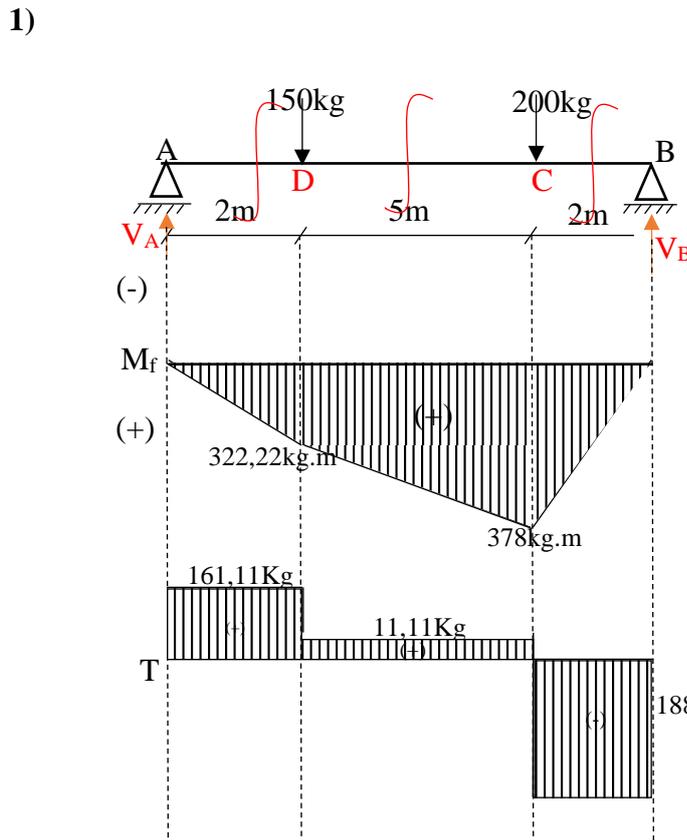
**Exercice 3 :**

Soient les poutres suivantes :

- Tracer les diagrammes des moments fléchissant et des efforts tranchants.
  - Déterminer la répartition des contraintes normales et tangentielles.
  - Vérifier la résistance des poutres vis-à-vis de la flexion simple et du cisaillement.
- On donne :  $\sigma_{adm}^+ = +2 \text{ bars}$ ,  $\sigma_{adm}^- = -2 \text{ bars}$  et  $\tau_{adm} = 0,5 \text{ bars}$ .



*Solution :*

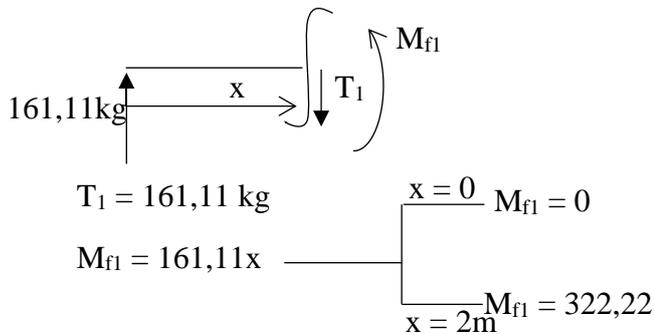


1) Calcul des réactions :

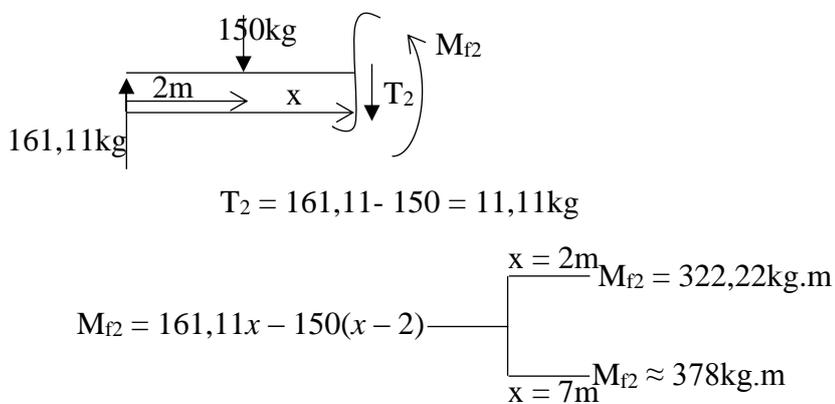
$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} V_A + V_B = 350 \text{ kg} \\ 9V_B = (200 \times 7) + (150 \times 2) \Rightarrow V_B = 188,89 \text{ kg} \\ 9V_A = (150 \times 7) + (200 \times 2) \Rightarrow V_A = 161,11 \text{ kg} \end{array} \right.$$

2) Détermination des efforts internes :

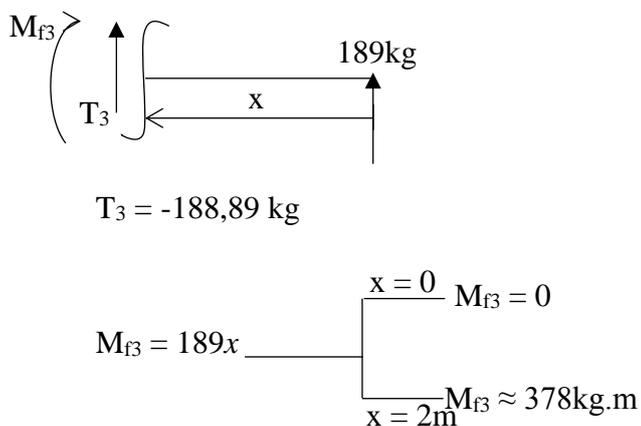
Section I :  $0 \leq x \leq 2\text{m}$



Section II :  $2\text{m} \leq x \leq 7\text{m}$



Section III :  $0 \leq x \leq 2\text{m}$



3) Répartition des contraintes :Contraintes normales :

$$\sigma_z = \frac{M_{fmax}}{W_z}$$

D'après le diagramme des moments fléchissant, on voit que le moment fléchissant atteint sa valeur maximale au point C.

⇒ Déterminons la répartition des contraintes normales au point C.

$$M_{fmax} = 378 \text{ kg.m}$$

$$W_z = \frac{I_z}{y}$$

$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{30(45)^3}{12} = 227812,5 \text{ cm}^4$$

$$y = ?$$

Fibre supérieure :

$$y_{max} = -\frac{h}{2} = -22,5 \text{ cm}$$

$$\sigma_z = \frac{378 \cdot 10^2}{227812,5} (-22,5) = -3,73 \text{ kg/cm}^2$$

Fibre inférieure :

$$y_{max} = +\frac{h}{2} = +22,5 \text{ cm}$$

$$\sigma_z = \frac{378 \cdot 10^2}{227812,5} (+22,5) = +3,73 \text{ kg/cm}^2$$

Axe neutre :

$$y = 0 \Rightarrow \sigma_z = 0$$

Contrainte tangentielle :

$$\tau_{max} = \frac{T_{max} \cdot M_{s/z}}{b_0 \cdot I_z}$$

L'effort tranchant maximal se trouve dans la section 3 (section CB)

$$|T_{max}| = 188,89 \text{ kg}$$

$$b_0 = b = 30 \text{ cm}$$

$$I_z = 227812,5 \text{ cm}^4$$

$$M_{s/z} = ?$$

Fibre supérieure :

$$M_{s/z} = 0 \Rightarrow \tau = 0$$

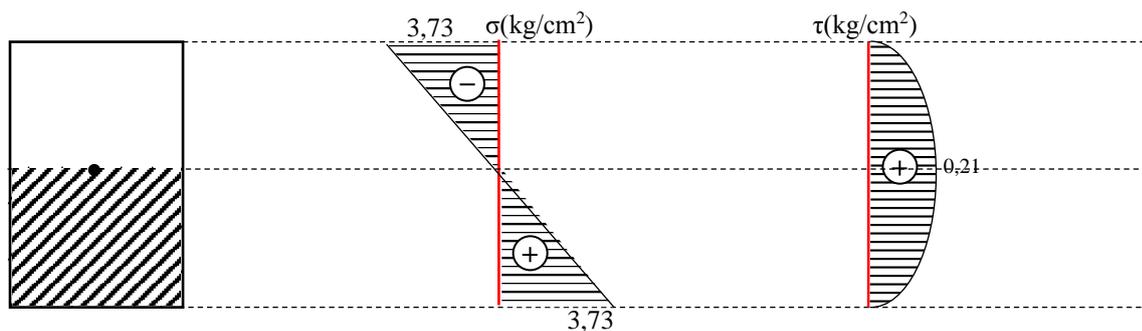
Fibre inférieure :

$$M_{s/z} = 0 \Rightarrow \tau = 0$$

Axe neutre :

$$M_{s/z} = b \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8} = \frac{30(45)^2}{8} = 7593,75 \text{ cm}^3$$

$$\tau = \frac{189 \times 7593,75}{30 \times 227812,5} = 0,21 \text{ kg/cm}^2$$



4) Vérification des contraintes :

Contraintes normales :

Condition de résistance :  $\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{adm}}$

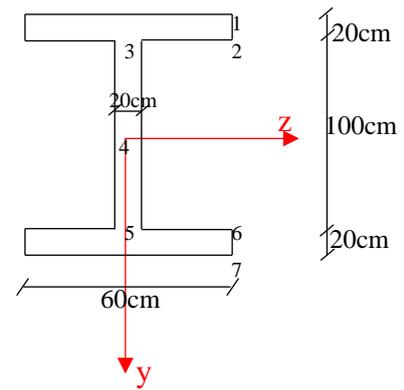
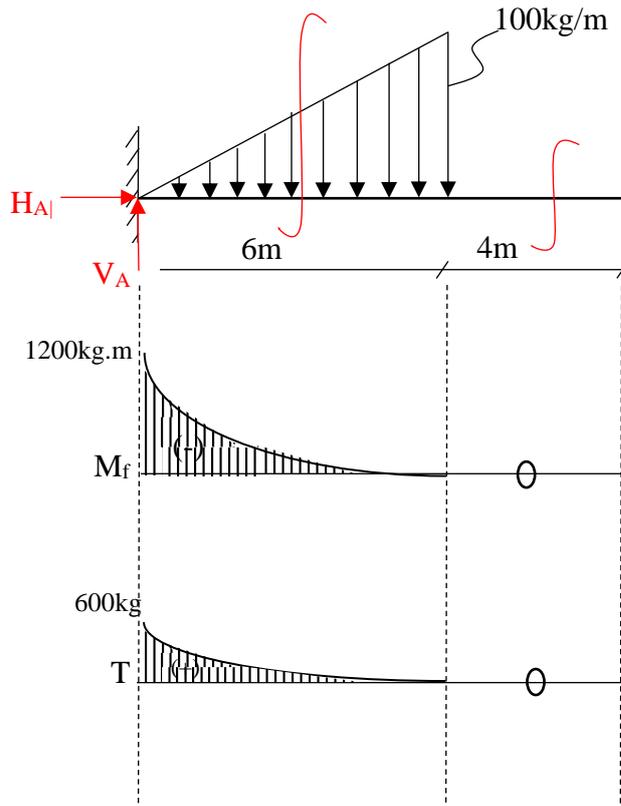
On a :

$$\sigma_{\max}^+ = + 3,73 \text{ bars} > \sigma_{\text{adm}}^+ = + 2 \text{ bars}$$

$$\sigma_{\max}^- = - 3,73 \text{ bars} > \sigma_{\text{adm}}^- = - 2 \text{ bars}$$

-> La poutre n'est pas stable vis-à-vis de la flexion simple donc inutile de vérifier la stabilité au cisaillement.

2)



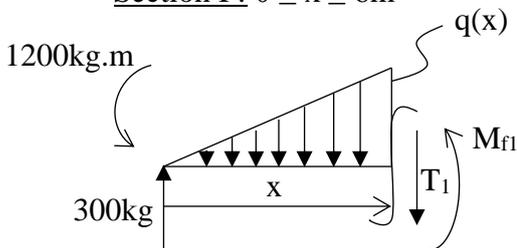
1) Calcul des réactions :

$$\sum F_{/y} = 0 \Rightarrow V_A = \frac{100 \times 6}{2} = 300 \text{ kg (aire du triangle)}$$

$$\sum M_{/A} = 0 \Rightarrow M_A = 300 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = 1200 \text{ kg.m}$$

2) Calcul de M et T :

Section I :  $0 \leq x \leq 6\text{m}$



$$\sum F_{/y} = 0 \Rightarrow T_1 = -\left(\frac{q(x) \cdot x}{2}\right) + 300$$

On a :  $\frac{q(x)}{x} = \frac{100}{6} \Rightarrow q(x) = 16,67x$

$$T_1 = -8,335x^2 + 300 \quad \begin{cases} x=0 & T_1 = 300 \text{ kg} \\ x=6\text{m} & T_1 = 0 \end{cases}$$

$$\sum M/c = 0 \Rightarrow M_{f1} = -8,33x^2 \cdot \frac{x}{3} + 300x - 1200$$

$$M_{f1} = -2,77x^3 + 300x - 1200 \quad \left\{ \begin{array}{l} x=0 \quad M_{f1} = -1200 \text{ kg.m} \\ x=6\text{m} \quad M_{f1} = 0 \end{array} \right.$$

$$M_{f \max} = ?$$

$$\frac{dM_{f1}}{dx} = 0 \Rightarrow -8,33x^2 + 300 = 0 \Rightarrow x^2 = 36 \text{ m}^2$$

L'équation admet deux solutions, une positive et l'autre négative

On prend la valeur positive et on calcule  $M_{f \max}$ .

$$x = +6 \text{ m}$$

$$M_{f1}(6) = 0$$

Section II :  $0 \leq x \leq 4 \text{ m}$

Cette section n'est pas chargée donc :

$$T_2 = 0$$

$$M_{f2} = 0$$

### 3) Répartition des contraintes :

*Contraintes normales :*

$$\sigma_z = \frac{M_{f \max}}{W_z}$$

$$M_{f \max} = -1200 \text{ kg.m}$$

$$W_z = \frac{I_z}{y}$$

$$I_z = \left[ 2 \left( \frac{60(20)^3}{12} \right) + (60 \times 20)(50)^2 \right] + \left[ \frac{20(80)^3}{12} \right] = 6933333,33 \text{ cm}^4$$

Fibre supérieure :

$$\sigma_z^{FS} = \frac{1200 \times 10^2}{6933333,33} (-60) = -1,04 \text{ bars}$$

Fibre inférieure :

$$\sigma_z^{FI} = \frac{1200 \times 10^2}{6933333,33} (+60) = +1,04 \text{ bars}$$

Axe neutre :

$$y = 0$$

$$\sigma_{z(0)} = 0$$

Contraintes tangentielles :

$$\tau = \frac{T_{max} \cdot M_{s/z}}{b_0 \cdot I_z}$$

$$T_{max} = 300 \text{ kg}$$

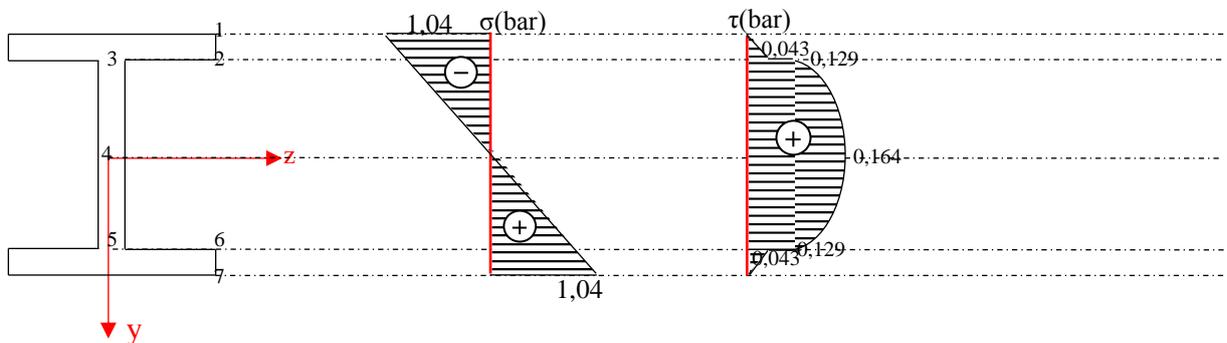
Calculons les contraintes tangentielles aux points 1,2,3,4,5,6 et 7 de la section transversale.

$$\tau_1 = \tau_7 = 0$$

$$\tau_2 = \tau_6 = \frac{300 \times (60 \times 20 \times 50)}{60 \times 6933333,33} = 0,043 \text{ bars}$$

$$\tau_3 = \tau_5 = \frac{300 \times (60 \times 20 \times 50)}{20 \times 6933333,33} = 0,129 \text{ bars}$$

$$\tau_4 = \frac{300 \times (60 \times 20 \times 50)}{20 \times 6933333,33} + \frac{300 \times (20 \times 40 \times 20)}{20 \times 6933333,33} = 0,164 \text{ bars}$$



#### 4) Vérification des contraintes :

Contraintes normales :

$$\sigma_{max}^+ = + 1,04 \text{ bars} < \sigma_{adm}^+ = + 2 \text{ bars}$$

$$\sigma_{max}^- = - 1,04 \text{ bars} < \sigma_{adm}^- = - 2 \text{ bars}$$

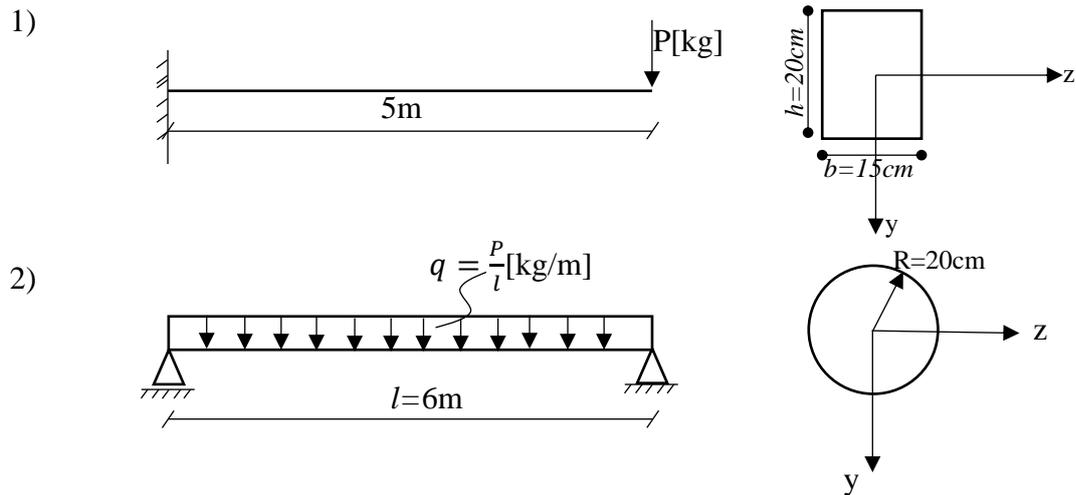
Contrainte tangentielle :

$$\tau_{max} = 0,164 \text{ bars} < \tau_{ads} = 0,5 \text{ bars}$$

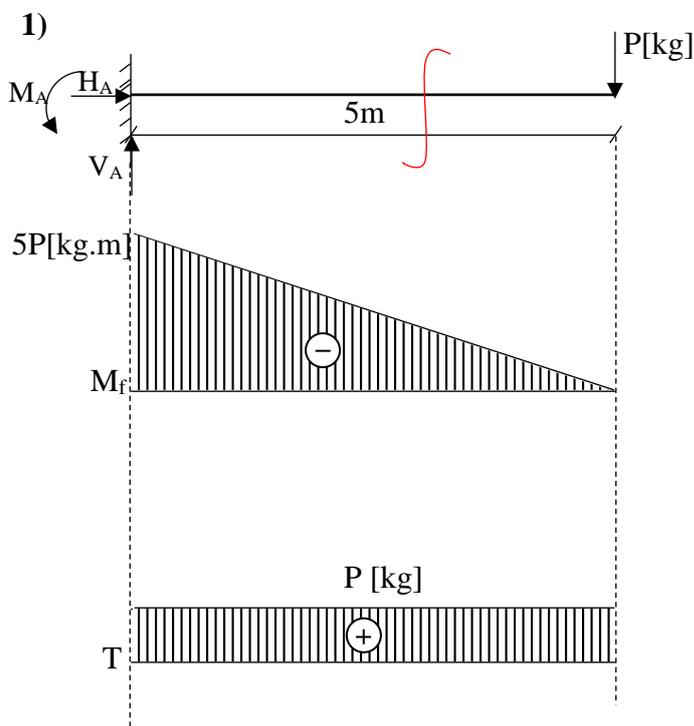
⇒ La poutre est stable

**Exercice 3 :**

Déterminer la force maximale  $[P_{max}]$  que peuvent supporter les poutres suivantes :

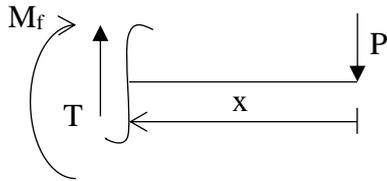


*Solution :*



1) Calcul des réactions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_{/x} = 0 \\ \sum F_{/y} = 0 \\ \sum M_{/A} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} H_A = 0 \\ V_A = P \text{ [kg]} \\ M_A = P \cdot 5 = 5P \text{ [kgm]} \end{array} \right.$$

2) Calcul de M et T :Section I :  $0 \leq x \leq 5m$ 

$$\begin{aligned} \sum F_{/x} = 0 &\Rightarrow T = P \text{ [kg]} \\ \sum M_{/c} = 0 &\Rightarrow M_f = -P \cdot x \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 5m \end{array} \right\} \begin{array}{l} M_f = 0 \\ M_f = -5P \text{ [kg.m]} \end{array}$$

3) Détermination de  $P_{max}$  :

On a la condition de résistance suivante:  $\sigma_{max} = \frac{M_{max} \cdot y_{max}}{I_z} \leq \sigma_{adm}$

Avec :

$$M_{max} = -5P \text{ [kg.m]}$$

$$y_{max} = \pm \frac{h}{2}$$

$$I_z = \frac{bh^3}{12}$$

$$|\sigma_{max}| = \left| \frac{M_{max} \cdot y_{max}}{I_z} \right| = \frac{5P \cdot 10^2 \times h \times 12}{2 \times bh^3} = \frac{30P \cdot 10^2}{bh^2} = \frac{30P \cdot 10^2}{(15)(20)^2}$$

$$|\sigma_{max}| = \frac{30P \cdot 10^2}{(15)(20)^2} = 0,5P \leq \sigma_{adm} = 20bars$$

$$P_{max} \leq \frac{20}{0,5} = 40kg$$

-> Pour que la résistance de la poutre vis-à-vis de la flexion simple soit assurée, il faut que la force maximale que doit supporter la poutre ne dépasse pas 40 kg.

4) Vérification de la poutre au cisaillement :

$$\tau_{max} \leq \tau_{adm}$$

S'agissant d'une section rectangulaire,  $\tau_{max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{T_{max}}{A}$

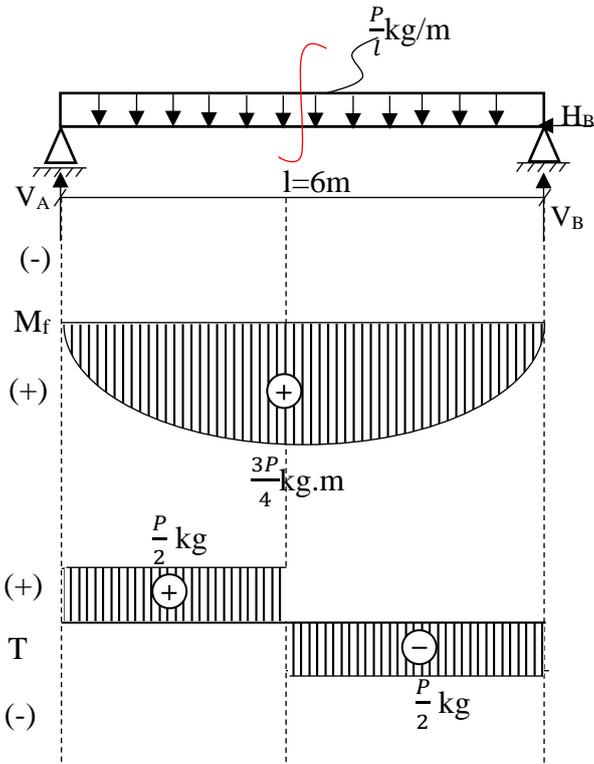
$$\rightarrow \tau_{max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{P}{b \times h} = \frac{3}{2} \cdot \frac{40}{15 \times 20}$$

$$\rightarrow \tau_{max} = 0,2 bars < \tau_{adm} = 5bars$$

**Conclusion :**

Avec  $P=40$  kg, la poutre résiste à la flexion et au cisaillement.

2)



1) Calcul des réactions :

Par symétrie :  $V_A = V_B = \frac{ql}{2} = \frac{P}{2} \text{ kg}$

$H_B = 0$

2) Calcul de M et T :

Section I:  $0 \leq x \leq 6\text{m}$

$$\sum F_{/y} = 0 \Rightarrow T = -\frac{P}{l}x + \frac{P}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ x = l \end{array} \right\} \begin{array}{l} T = +\frac{P}{2} \text{ kg} \\ T = -\frac{P}{2} \text{ kg} \end{array}$$

$$\sum M_{/c} = 0 \Rightarrow M_f = -\frac{P}{l} \cdot x \cdot \left(\frac{x}{2}\right) + \frac{P}{2} \cdot x$$

$$= -\left(\frac{Px^2}{2l}\right) + \frac{P}{2}x$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ x = \end{array} \right\} \begin{array}{l} M_f = 0 \\ M_f = 0 \end{array}$$

Cherchons la valeur maximale de  $M_{fmax}$  :

$$\frac{dM_f}{dx} = 0 \Rightarrow -\frac{P}{l}x + \frac{P}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{l}{2} = 3\text{m}$$

$$M_{fmax} = M_f\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{Pl}{8} = \frac{3P}{4} [\text{kg. m}]$$

3) Détermination de  $P_{max}$  :

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max} \cdot y_{max}}{I_z} \leq \sigma_{adm}$$

$$M_{max} = \frac{3P}{4} [\text{kg. m}]$$

$$y_{max} = R$$

$$I_z = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$|\sigma_{max}| = \left| \frac{M_{max} \cdot y_{max}}{I_z} \right| = \frac{3P \cdot 10^2 \times R \times 4}{4 \times \pi R^4} = \frac{3P \cdot 10^2}{\pi R^3} = \frac{3P \cdot 10^2}{\pi (20)^3}$$

$$|\sigma_{max}| = 0,012P \leq \sigma_{adm} = 20\text{bars}$$

$$P_{max} \leq \frac{20}{0,012} = 1\,666,66\text{kg}$$

4) Vérification de la poutre au cisaillement :

$$\tau_{max} \leq \tau_{adm}$$

$$\text{S'agissant d'une section circulaire, } \tau_{max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{T_{max}}{A}$$

$$\rightarrow \tau_{max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{|T_{max}|}{\pi \cdot R^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{P/2}{\pi (20)^2} = \frac{1\,666,66/2}{\pi (20)^2} = 0,88 \text{ bars}$$

$$\rightarrow \tau_{max} = 0,88 \text{ bars} < \tau_{adm} = 5\text{bars}$$

**Conclusion :**

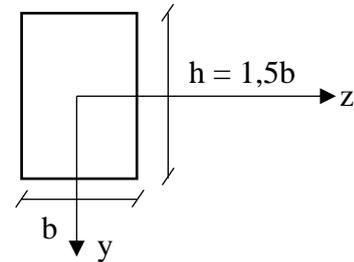
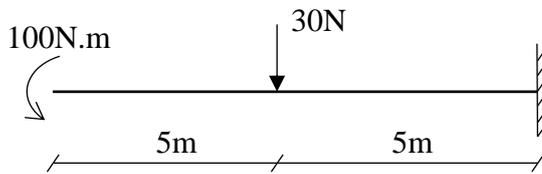
La poutre résiste à la flexion et au cisaillement

**Exercice 4 :**

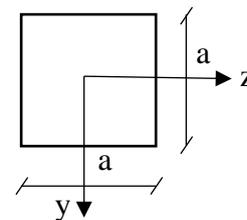
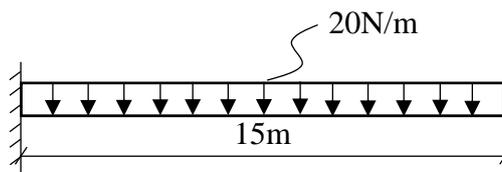
Dimensionner les sections des poutres suivantes :

On donne :  $\sigma_{adm} = 10\text{bars}$  et  $\tau_{adm} = 2\text{ bars}$

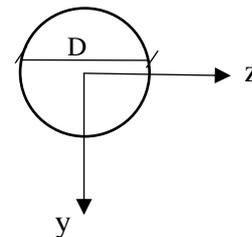
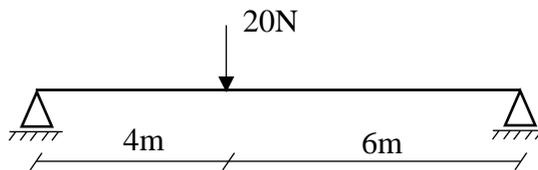
1)



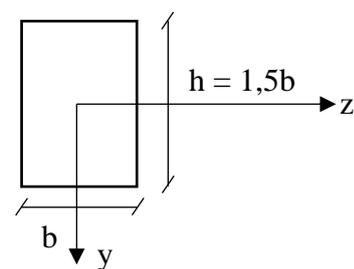
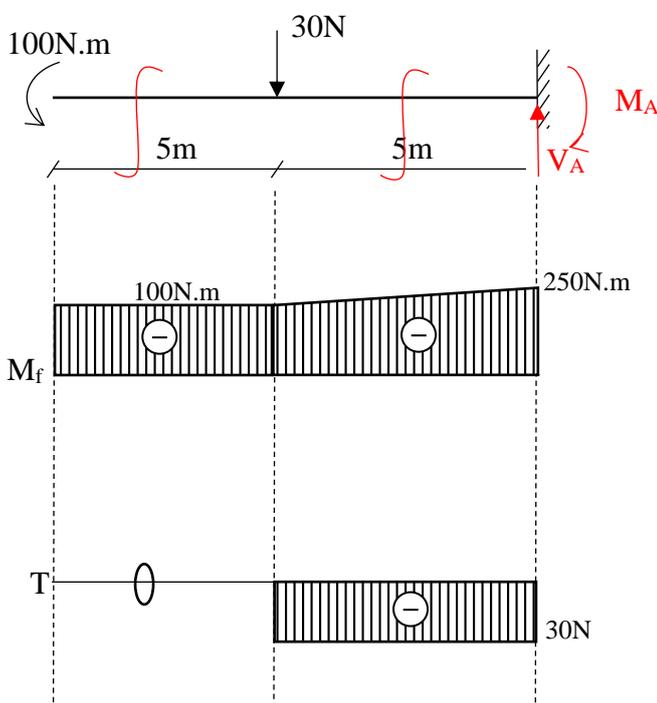
2)



3)



*Solution :*



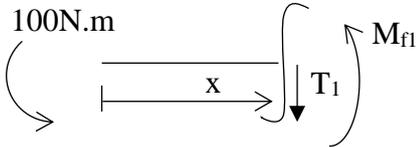
1) Calcul des réactions :

$$V_A = 30 \text{ N}$$

$$M_A = 250 \text{ N.m}$$

2) Détermination des efforts internes :

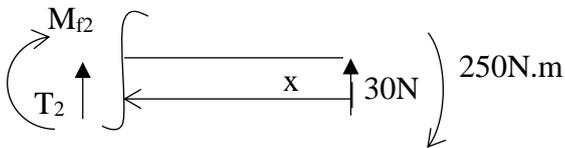
Section I :  $0 \leq x \leq 5\text{m}$



$$T_1 = 0$$

$$M_{f1} = -100 \text{ N.m}$$

Section II :  $0 \leq x \leq 5\text{m}$



$$T_2 = -30 \text{ N}$$

$$M_{f2} = 30x - 250 \quad \begin{cases} x = 0 & M_{f2} = -250 \text{ N.m} \\ x = 5\text{m} & M_{f2} = -100 \text{ N.m} \end{cases}$$

3) Dimensionnement de la section :

Le dimensionnement des sections se fait à l'aide de la condition de résistance :

$$\sigma_{\max} = \left| \frac{M_{f\max}}{W_z} \right| \leq \sigma_{\text{adm}}$$

$$|M_{f\max}| = 250 \text{ N.m} = 250 \cdot 10^{-1} \cdot 10^2 = 2500 \text{ kg.cm}$$

$$|W_z| = \left| \frac{I_z}{y_{\max}} \right|$$

$$I_z = \frac{b(1,5b)^3}{12} = \frac{3,375b^4}{12}$$

$$y_{\max} = \frac{1,5b}{2} = 0,75b$$

$$W_z = \frac{3,375b^4}{12 \times 0,75b} = 0,375b^3$$

$$\rightarrow \frac{2500}{0,375b^3} \leq 10 \text{ bars} \Rightarrow b^3 \geq \frac{2500}{10 \times 0,375} = 666,66 \text{ cm}$$

$$\rightarrow b \geq 8,73 \text{ cm}$$

Soit  $b = 10 \text{ cm}$

$$h = 1,5 \times 10 = 15 \text{ cm}$$

Vérifions la contrainte tangentielle avec les dimensions obtenues :

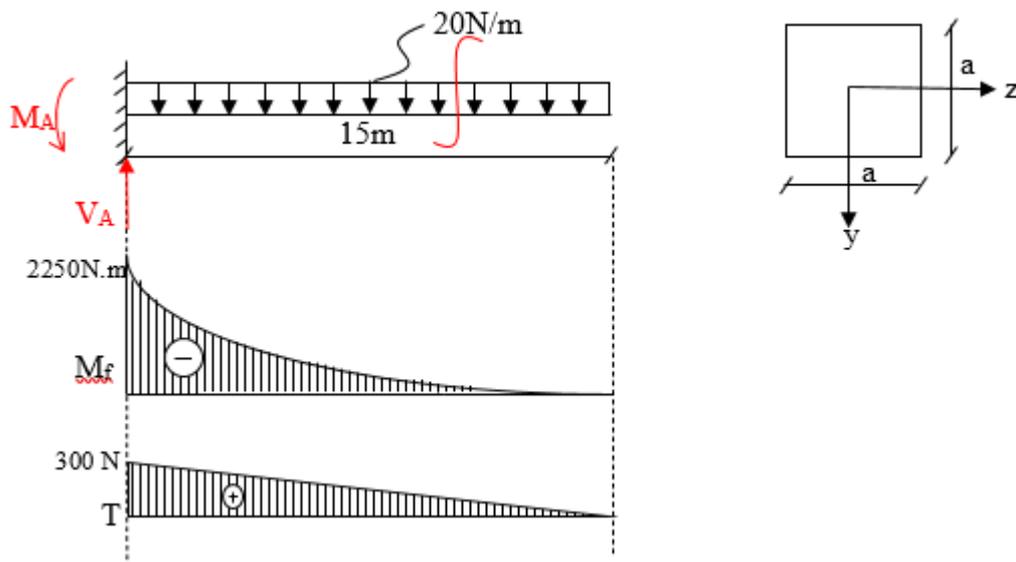
$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{|T_{\max}|}{A}$$

$$I_z = \frac{3,375b^4}{12} = 2812,5 \text{ cm}^4$$

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{30 \times 10^{-1}}{10 \times 15} = 0,03 \text{ bar} < \tau_{\text{adm}} = 3 \text{ bars}$$

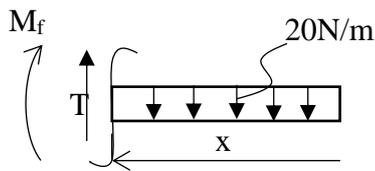
Donc la section  $(10 \times 15) \text{ cm}^2$  convient.

2)



1) Calcul des réactions :

$$\begin{cases} \sum F_{/x} = 0 \\ \sum F_{/y} = 0 \\ \sum M_{/A} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = 20 \times 15 = 300 \text{ N} \\ M_A = 300 \times \frac{15}{2} = 2250 \text{ N.m} \end{cases}$$

2) Calcul des efforts internes :Section I:  $0 \leq x \leq 15\text{m}$ 

$$T = 20x \begin{cases} x = 0 & T = 0 \\ x = 15\text{m} & T = 300\text{N} \end{cases}$$

$$M_f = 20\left(\frac{x^2}{2}\right) \begin{cases} x = 0 & M_f = 0 \\ x = 15\text{m} & M_f = 2250 \text{ N.m} \end{cases}$$

Dimensionnement de la section :

$$\sigma_{\max} = \left| \frac{M_{f\max}}{W_z} \right| \leq \sigma_{\text{adm}}$$

Avec :

$$I_z = \frac{a^4}{12}; y_{\max} = \pm \frac{a}{2}$$

Donc :

$$|\sigma_{\max}| = \left| \frac{12M_{f\max}}{a^4} \cdot \frac{a}{2} \right|$$

$$\rightarrow \sigma_{\max} = \frac{6M_{f\max}}{a^3} \leq \sigma_{\text{adm}}$$

$$\rightarrow a \geq \sqrt[3]{\frac{6M_{f\max}}{\sigma_{\text{adm}}}} = \sqrt[3]{\frac{6 \times 2250 \times 10}{10}}$$

$$\rightarrow a \geq 23,81 \text{ cm}$$

$$\text{soit } a = 25 \text{ cm}$$

Vérifions si cette dimension vérifie la condition de résistance de la contrainte de cisaillement.

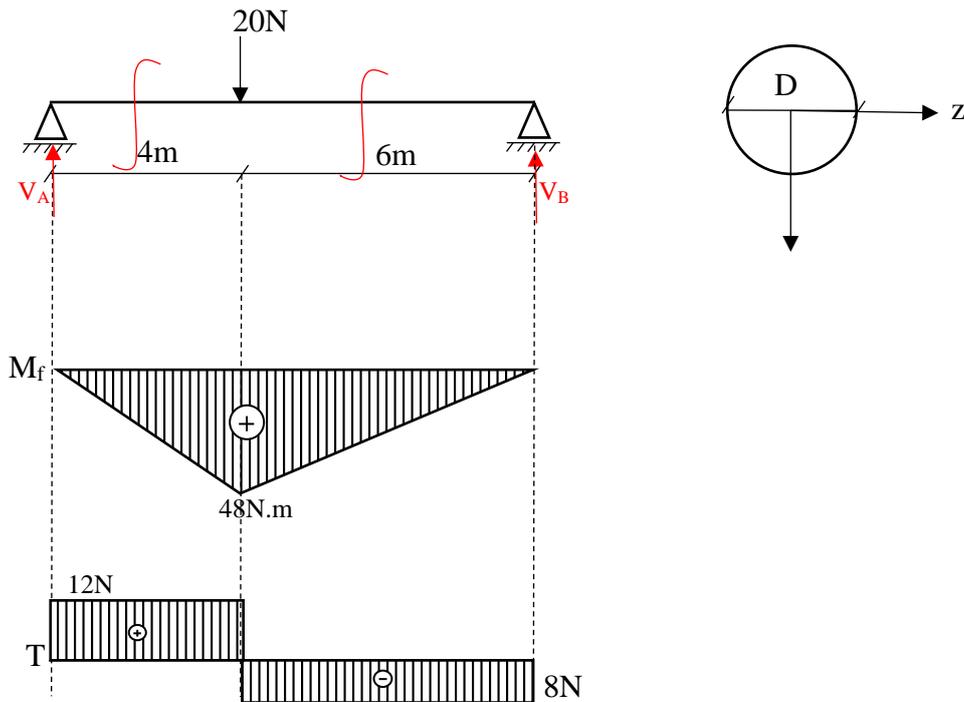
$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{|T_{\max}|}{A} \text{ (Section carrée)}$$

$$|T_{\max}| = 300 \text{ N} = 30 \text{ kg}$$

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{30}{(25 \times 25)}$$

$$\tau_{\max} = 0,072 \text{ bars} < \tau_{\text{adm}} = 2 \text{ bars} \Rightarrow \text{la section } (25 \times 25) \text{ cm}^2 \text{ Convient.}$$

3)



1) Calcul des réactions :

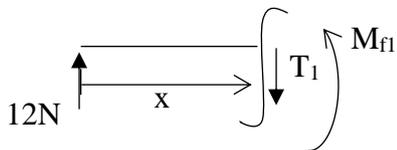
$$V_A + V_B = 20 \text{ N}$$

$$\sum M_{/A} = 0 \Rightarrow V_B = 8 \text{ N}$$

$$\sum M_{/B} = 0 \Rightarrow V_A = 12 \text{ N}$$

2) Détermination des efforts internes :

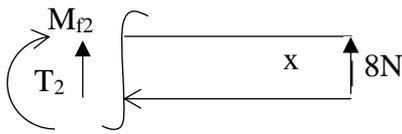
Section I :  $0 \leq x \leq 4\text{m}$



$$T_1 = 12 \text{ N}$$

$$M_{f1} = 12x \begin{cases} x=0 & M_{f1} = 0 \\ x=4\text{m} & M_{f1} = 48 \text{ N.m} \end{cases}$$

Section II :  $0 \leq x \leq 6\text{m}$



$$T_2 = -8 \text{ N}$$

$$M_{f2} = 8x \begin{cases} x=0 & M_{f2} = 0 \\ x=6 & M_{f2} = 48 \text{ N.m} \end{cases}$$

3) Dimensionnement de la section :

$$\sigma_{\max} = \left| \frac{M_{f\max} \cdot y_{\max}}{I_z} \right| \leq \sigma_{\text{adm}} = 10 \text{ bars}$$

$$\text{On a } M_{f\max} = 48 \text{ N.m} = 480 \text{ kg.cm}$$

S'agissant d'une section circulaire,

$$I_z = \frac{\pi D^4}{64}$$

$$y_{\max} = \frac{D}{2}$$

$$\rightarrow \frac{y_{\max}}{I_z} = \frac{D}{2} \cdot \frac{64}{\pi D^4} = \frac{32}{\pi D^3}$$

$$\rightarrow \sigma_{\max} = \frac{32 M_{f\max}}{\pi D^3} \leq \sigma_{\text{adm}}$$

$$\rightarrow D \geq \sqrt[3]{\frac{32 M_{f\max}}{\pi \cdot \sigma_{\text{adm}}}} = \sqrt[3]{\frac{32 \times 480}{\pi \times 10}}$$

$$\rightarrow D \geq 7,87 \text{ cm}$$

$$\text{Soit } D = 10 \text{ cm}$$

Vérification de la résistance au cisaillement :

$$\text{Section circulaire} \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{T_{\max}}{A}$$

$$|T_{\max}| = 12 \text{ N} = 1,2 \text{ kg}$$

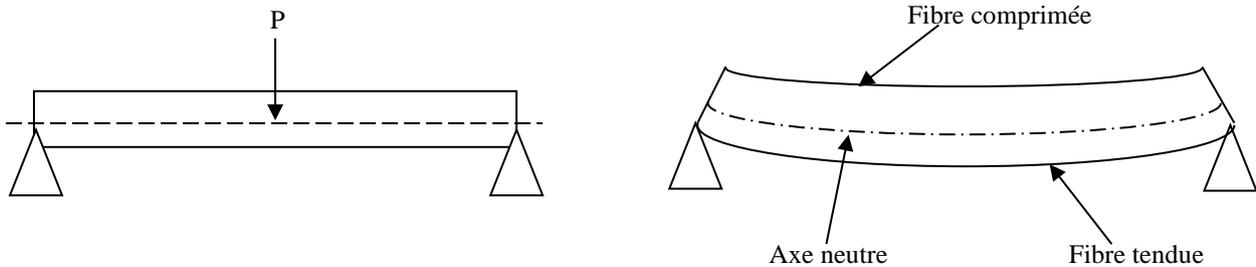
$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1,2}{\pi \left(\frac{10^2}{4}\right)} = 0,02 \text{ bar} < \tau_{\text{adm}} = 2 \text{ bars}$$

Donc le diamètre  $D = 10\text{cm}$  Convient.

## **DETERMINATION DES DEPLACEMENTS EN FLEXION**

**V.1/ Définition :**

Sous l'action d'une charge, la poutre subit des déformations dans différents points. Lors de sa déformation, elle passe d'un état non déformé à un état déformé où les fibres supérieures de l'état initial deviennent comprimées tandis que les fibres inférieures deviennent tendues, entre ces deux fibres, il y a une fibre qui n'est ni comprimée ni tendue, c'est la fibre neutre (voir figure V.1.b).

**-a-** Etat initial (avant déformation)**-b-** Etat final (après déformation)**Figure V.1**

D'après le principe de Navier-Bernoulli, les sections planes, normales aux fibres avant déformation, restent planes et normales aux fibres après déformation. Cependant, les sections droites peuvent changer de grandeur et de forme au cours du mouvement mais de façon très faible, c'est pourquoi nous allons admettre que les sections droites ne changeront ni de forme ni de dimension.

Par conséquent, le déplacement de la poutre peut être caractérisé par les composantes  $\mu$ ,  $v$  et  $\theta$  (voir figure 2.b) :

**Fig.2.a** Etat initial (avant déformation)**fig.2.b** Etat final (après déformation)**Figure V.2.** Etat de déformation

A noter que  $\mu$  est la composante du déplacement horizontal et  $v$  est la composante du déplacement vertical (flèche) de l'axe de la poutre.  $\theta_z$  représente l'angle de rotation mesuré de l'axe  $x$  à la tangente de la déformée, exprimé en radian.

Dans le cas des poutres rigides, le déplacement horizontal  $\mu$  est très faible par rapport au déplacement vertical  $v$ , c'est pourquoi on va négliger l'influence de  $\mu$  sur la déformée de la poutre.

**N.B :** dans le cas des poutres rigides,  $\theta_z < 1^\circ$ , donc on peut admettre que  $\theta_z \approx \text{tg}\theta_z = dv/dx$

Donc pour déterminer le déplacement vertical  $v$  en n'importe quel point de la poutre, il faut établir l'équation de  $v(x)$ . Cette équation va nous permettre également de déduire l'équation de la rotation  $\theta_z$  qui n'est autre que la dérivée de  $v(x)$  par rapport à l'abscisse  $x$ .

### **V.2/ Equation différentielle de la ligne élastique :**

On appelle ligne élastique, l'allure de l'axe de la poutre après déformation.

Rappelons que dans le chapitre flexion pure, nous avons abouti à l'expression de la courbure de l'axe de la poutre  $1/\rho$  exprimée en fonction de la rigidité flexionnelle  $EI_z$  de la section transversale de la poutre et du moment de flexion.

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{M(x)}{EI_z} \dots \dots (V. 1)$$

Le signe  $\pm$  dépend de la direction de l'axe Y :

Si l'axe Y est dirigé vers le haut, la formule prend le signe (+).

Si l'axe Y est dirigé vers le bas, la formule prend le signe (-).

Connaissant l'expression de la courbure, on peut aisément établir l'équation de la ligne élastique en se servant de quelques notions de mathématiques :

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \dots \dots (V. 2)$$

En égalisant les seconds membres des équations (1) et (2), l'équation différentielle de la ligne élastique s'écrira alors :

$$\frac{M(x)}{EI_z} = \pm \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \dots \dots (V. 3)$$

S'agissant de poutres rigides, la valeur maximale de la flèche reste très faible, de l'ordre de  $(0,01-0,001)l$  et pour la rotation maximale, elle est inférieure ou égale à  $1^\circ$ .

→ donc on peut négliger le terme  $\left(\frac{dv}{dx}\right)^2$  dans l'équation(3)

Alors l'équation différentielle de la ligne élastique s'écrira :

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \pm \frac{M(x)}{EI_z} \dots \dots (V. 4)$$

### **V.3/ Méthodes de calcul :**

Les méthodes de calcul des déformations sont nombreuses Dans ce chapitre nous allons aborder les méthodes suivantes :

- Méthode de l'intégration de l'équation de la ligne élastique.
- Méthode des paramètres initiaux.
- Méthode de la poutre conjuguée.

**V.3 .1/ Méthode de l'intégration de l'équation de la ligne élastique :**

Cette méthode est basée sur l'intégration de l'équation de la ligne élastique (équation 4).

En intégrant une fois l'équation (4), on aura l'expression de la rotation, et la 2<sup>ème</sup> intégrale donne l'expression de la flèche.

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \pm \frac{M(x)}{EI_z}$$

$$\theta(x) = \frac{dv}{dx} = \pm \int \frac{M(x)}{EI_z} dx + C_1$$

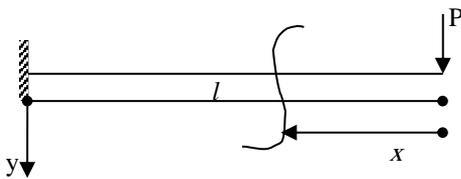
$$v(x) = \pm \iint \frac{M(x)}{EI_z} dx^2 + C_1x + C_2$$

$a$  et  $b$  sont les constantes d'intégration et elles sont déterminées à partir des conditions d'appuis de la poutre.

**Exemple :**

Soit une poutre de portée  $l$ , encadrée à une extrémité et libre à l'autre, soumise à une force  $P$  appliquée à son extrémité libre.

Déterminons les expressions de la flèche et de la rotation.



On a l'équation de la déformée qui s'écrit sous la forme :

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \pm \frac{M(x)}{EI_z}$$

L'axe Y est dirigé vers le bas  $\Rightarrow \frac{d^2v}{dx^2} = - \frac{M(x)}{EI_z}$

$$M(x) = - P \cdot x$$

Remplaçons  $M(x)$  par son expression dans l'équation de la déformée.

$$\frac{d^2v}{dx^2} = + \frac{Px}{EI_z}$$

On intègre une fois pour avoir l'expression de la rotation  $\theta(x)$

$$\theta(x) = \frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI} \int P \cdot x dx$$

$$\theta(x) = \frac{P \cdot x^2}{2EI} + C_1 \dots \dots (1)$$

2<sup>ème</sup> intégrale nous donne l'expression de la flèche  $v(x)$

$$v(x) = \int \left( \frac{P \cdot x^2}{2EI} + C_1 \right) dx$$

$$\rightarrow v(x) = \frac{P \cdot x^3}{6EI} + C_1 x + C_2 \dots \dots (2)$$

Déterminons les constantes d'intégration à partir des conditions aux limites :

Pour une poutre encastree, on sait qu'au niveau de l'encastrement il n'y a ni déplacement ni rotation donc à  $x=l$ , la rotation et la flèche sont nulles.

Remplaçons  $x$  par  $l$  dans les équations (1) et (2).

$$(1) \rightarrow \theta(l) = 0 \Rightarrow \frac{P \cdot l^2}{2EI} + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{P \cdot l^2}{2EI}$$

$$(2) \rightarrow v(l) = 0 \Rightarrow \frac{P \cdot l^2}{2EI} + C_1 l + C_2 = 0 \Rightarrow \frac{P \cdot l^2}{2EI} - \frac{P \cdot l^3}{2EI} + C_2 = 0$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{P \cdot l^3}{3EI}$$

donc finalement les expressions de  $\theta(x)$  et  $v(x)$  s'écrivent sous la forme :

$$= \theta(x) = \frac{P \cdot x^2}{2EI} - \frac{P \cdot l^2}{2EI} \dots \dots \dots (1)'$$

$$v(x) = \frac{P \cdot x^3}{6EI} - \frac{P \cdot l^2}{2EI} x + \frac{P \cdot l^3}{3EI} \dots \dots \dots (2)'$$

Ces deux dernières équations vont nous permettre de calculer la flèche ainsi que la rotation en n'importe quel point de la poutre en remplaçant  $x$  par la valeur recherchée.

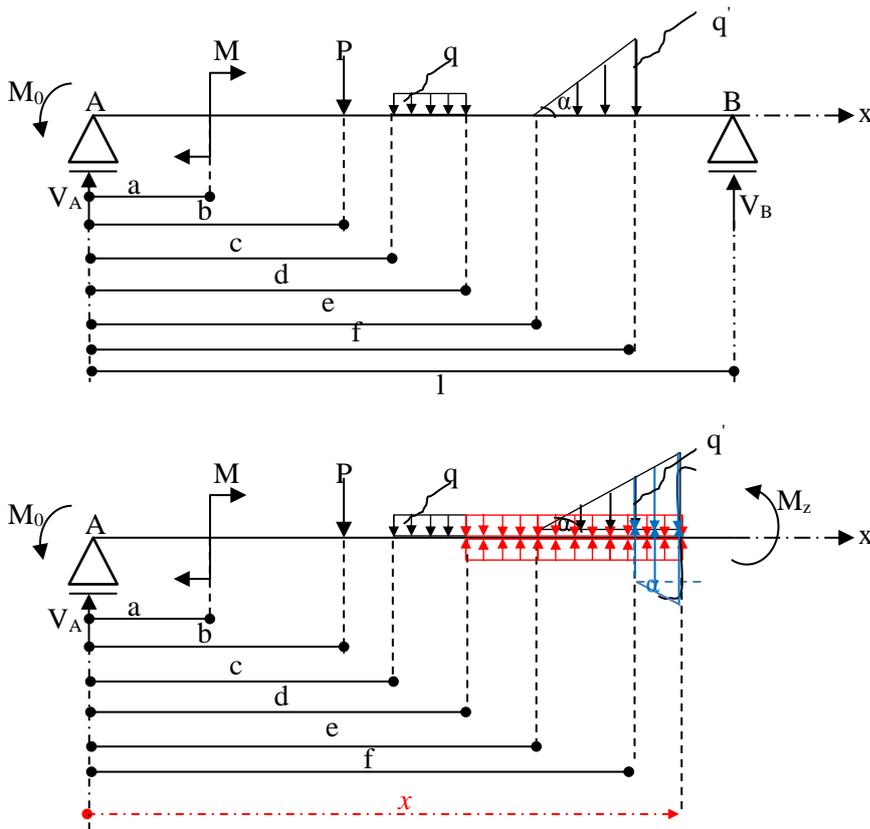
### V.3.2/ Méthode des paramètres initiaux (Méthode de Clebsch):

Lorsque le nombre de tronçons dans une poutre est important, la méthode de l'intégration directe de la ligne élastique devient laborieuse car les constantes d'intégration augmentent.

L'énoncé de cette méthode est le suivant :

- Choisir l'origine des coordonnées à l'extrémité gauche de la poutre, et ce pour tous les tronçons de cette dernière.
- Déterminer l'expression du moment fléchissant engendré par les forces situées à  $f$ =gauche du tronçon considéré.
- Si la poutre est sollicitée par une charge répartie sur une distance donnée, on supposera que cette charge est répartie de son commencement jusqu'au bout de la poutre, et la partie qui n'était pas chargée sera compensée par une charge répartie de même intensité et de sens opposé à la charge réelle.
- Si, dans un tronçon donné, il existe un moment concentré situé à une distance « a » de l'origine des coordonnées, celui-ci sera multiplié par un facteur  $(x-a)$

**Exemple :**



$$M_z = -M_0 + V_A \cdot x + M(x-a)^0 - P(x-b)^1 - \frac{q}{2}(x-c)^2 + \frac{q}{2}(x-d)^2 - \frac{tg\alpha(x-e)^3}{6} + \frac{tg\alpha(x-f)^3}{6} + \frac{q'}{2}(x-f)^2$$

$$EI_x v''(x) = +M_0 - V_A \cdot x - M(x-a)^0 + P(x-b)^1 + \frac{q}{2}(x-c)^2 - \frac{q}{2}(x-d)^2 + \frac{tg\alpha(x-e)^3}{6} - \frac{tg\alpha(x-f)^3}{6} - \frac{q'}{2}(x-f)^2$$

$$EI_x \theta(x) = +M_0 \cdot x - V_A \cdot \frac{x^2}{2} - M(x-a)^1 + \frac{P}{2}(x-b)^2 + \frac{q}{6}(x-c)^3 - \frac{q}{6}(x-d)^3 + \frac{tg\alpha(x-e)^4}{24} - \frac{tg\alpha(x-f)^4}{24} - \frac{q'}{6}(x-f)^3 + C_1 \dots \dots (1)$$

$$EI_x v(x) = +M_0 \cdot \frac{x^2}{2} - V_A \cdot \frac{x^3}{6} - \frac{M}{2}(x-a)^2 + \frac{P}{6}(x-b)^3 + \frac{q}{24}(x-c)^4 - \frac{q}{24}(x-d)^4 + \frac{tg\alpha(x-e)^5}{120} - \frac{tg\alpha(x-f)^5}{120} - \frac{q'}{24}(x-f)^4 + C_1 \cdot x + C_2 \dots \dots (2)$$

Pour  $x = 0$ , les équations (1) et (2) donnent :

$$\begin{cases} C_1 = EI\theta_0 \\ C_2 = EIv_0 \end{cases}$$

$\theta_0$  et  $v_0$  sont, respectivement, les valeurs de la rotation et de la flèche à l'extrémité gauche de la poutre.

(1) et (2) deviennent :

$$* EI_x \theta(x) = EI\theta_0 + M_0 \cdot x - V_A \cdot \frac{x^2}{2} - M(x-a)^1 + \frac{P}{2}(x-b)^2 + \frac{q}{6}(x-c)^3 - \frac{q}{6}(x-d)^3 + \frac{tg\alpha(x-e)^4}{24} - \frac{tg\alpha(x-f)^4}{24} - \frac{q'}{6}(x-f)^3 \dots \dots (1)'$$

$$* EI_x v(x) = EIv_0 + EI\theta_0 \cdot x + M_0 \cdot \frac{x^2}{2} - V_A \cdot \frac{x^3}{6} - \frac{M}{2}(x-a)^2 + \frac{P}{6}(x-b)^3 + \frac{q}{24}(x-c)^4 - \frac{q}{24}(x-d)^4 + \frac{tg\alpha(x-e)^5}{120} - \frac{tg\alpha(x-f)^5}{120} - \frac{q'}{24}(x-f)^4 \dots \dots (2)'$$

$\theta_0$  et  $v_0$  sont déterminées à partir des conditions d'appuis.

**V.3.3/ Méthode de la poutre conjuguée (poutre auxiliaire):**

La méthode consiste à considérer le diagramme des moments fléchissant d'une poutre donnée (poutre réelle) comme une charge fictive d'intensité  $q = \frac{M(x)}{EI_z}$  répartie sur une poutre fictive.

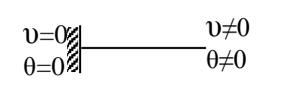
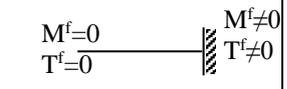
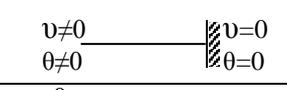
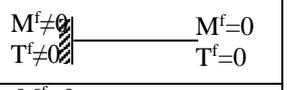
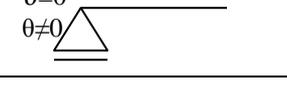
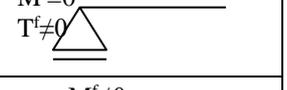
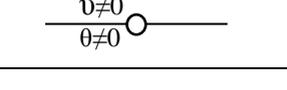
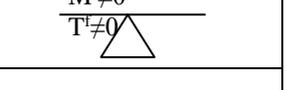
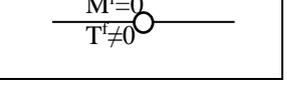
Cette méthode est basée sur l'analogie entre l'équation de la ligne élastique et l'équation de Jourawski :

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI_z} : \text{équation de la ligne élastique}$$

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dT}{dx} = -q : \text{équation de Jourawski}$$

En un point quelconque de la poutre fictive, le moment fléchissant représente la flèche de la poutre réelle, et l'effort tranchant représente la rotation de la poutre réelle.

**Règles de construction des appuis de la poutre conjuguée :**

Poutre réelle		Poutre conjuguée	
Encastrement		Extrémité libre	
Extrémité libre		Extrémité encastree	
Appui simple (ou double)		Reste inchangé	
Articulation		Appui intermediaire	
Appui intermediaire		Articulation	

$M^f$  : Moment fléchissant de la poutre fictive.

$T^f$  : Effort tranchant de la poutre fictive.

**EXERCICES****Exercice 1** : méthode de l'intégration de la ligne élastique.

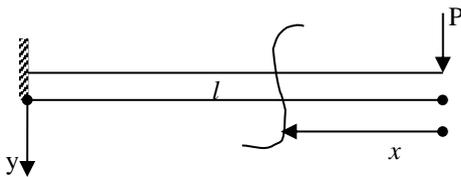
Soit une poutre de portée  $l$ , encastree à une extrémité et libre à l'autre extrémité soumise à une force  $P$  appliquée à son extrémité libre. En utilisant la méthode de l'intégration de la ligne élastique,

- Etablir les expressions de la flèche et de la rotation.
- Déterminer la flèche et la rotation au milieu de la poutre.
- Déterminer la flèche et la rotation maximales.
- Tracer les diagrammes de la flèche et de la rotation.

$EI =$  constante.

***Solution :***

1) Détermination de  $\theta(x)$  et  $v(x)$ :



On a l'équation de la déformée qui s'écrit sous la forme :

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \pm \frac{M(x)}{EI_z}$$

L'axe Y est dirigé vers le bas  $\Rightarrow \frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI_z}$

$$M(x) = -P \cdot x$$

Remplaçons  $M(x)$  par son expression dans l'équation de la déformée.

$$\frac{d^2v}{dx^2} = +\frac{Px}{EI_z}$$

On intègre une fois pour avoir l'expression de la rotation  $\theta(x)$

$$\theta(x) = \frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI} \int P \cdot x dx$$

$$\theta(x) = \frac{P \cdot x^2}{2EI} + C_1 \dots \dots (1)$$

2<sup>ème</sup> intégrale nous donne l'expression de la flèche  $v(x)$

$$v(x) = \int \left( \frac{P \cdot x^2}{2EI} + C_1 \right) dx$$

$$\rightarrow v(x) = \frac{P \cdot x^3}{6EI} + C_1 x + C_2 \dots \dots \dots (2)$$

Déterminons les constantes d'intégration à partir des conditions aux limites :

Pour une poutre encastree, on sait qu'au niveau de l'encastrement il n'y a ni déplacement ni rotation donc à  $x=l$ , la rotation et la flèche sont nulles.

Remplaçons  $x$  par  $l$  dans les équations (1) et (2).

$$(1) \rightarrow \theta(l) = 0 \Rightarrow \frac{P \cdot l^2}{2EI} + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{P \cdot l^2}{2EI}$$

$$(2) \rightarrow v(l) = 0 \Rightarrow \frac{P \cdot l^3}{6EI} + C_1 l + C_2 = 0 \Rightarrow \frac{P \cdot l^3}{6EI} - \frac{P \cdot l^3}{2EI} + C_2 = 0$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{P \cdot l^3}{3EI}$$

donc finalement les expressions de  $\theta(x)$  et  $v(x)$  s'écrivent sous la forme :

$$= \theta(x) = \frac{P \cdot x^2}{2EI} - \frac{P \cdot l^2}{2EI} \dots \dots \dots (1)'$$

$$v(x) = \frac{P \cdot x^3}{6EI} - \frac{P \cdot l^2}{2EI} x + \frac{P \cdot l^3}{3EI} \dots \dots \dots (2)'$$

2) Calcul de  $\theta$  et  $v$  à  $x=l/2$  :

on remplace  $x$  par  $l/2$  dans les équations (1)' et (2)' :

$$\theta\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{P \cdot l^2}{8EI} - \frac{P \cdot l^2}{2EI}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{3Pl^2}{8EI}}$$

$$v\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{P \cdot l^3}{48EI} - \frac{P \cdot l^3}{4EI} + \frac{P \cdot l^3}{3EI}$$

$$\Rightarrow \boxed{v\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5Pl^3}{48EI}}$$

3) Calcul de  $\theta_{max}$  et  $v_{max}$  :

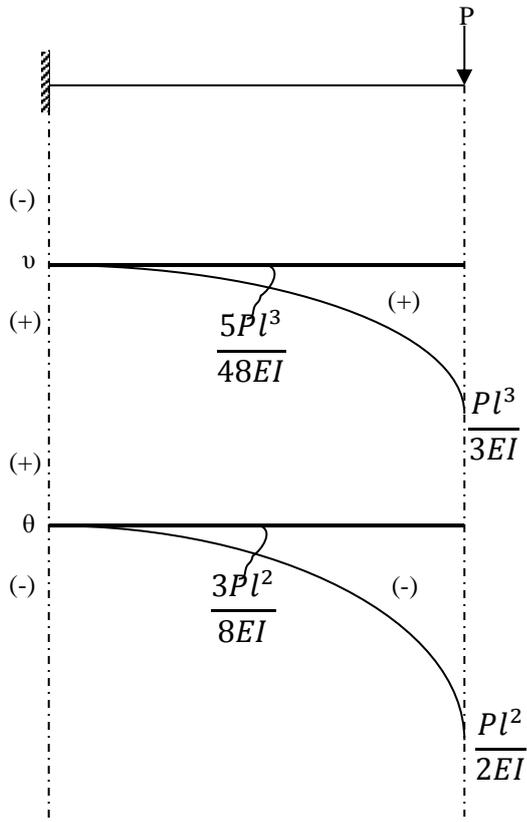
La flèche et la rotation atteignent leurs valeurs maximales au niveau du point d'application de la force c-à-d à  $x = 0$ .

Donc :

$$\theta_{max} = \theta(0) = -\frac{Pl^2}{2EI}$$

$$v_{max} = v(0) = \frac{Pl^3}{3EI}$$

4) Diagrammes de  $\theta$  et  $v_{max}$ :



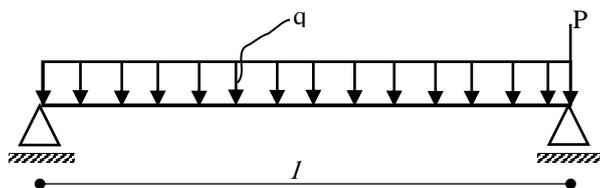
**Exercice 2 :** méthode de l'intégration de la ligne élastique.

Soit la poutre représentée par la figure ci-dessous :

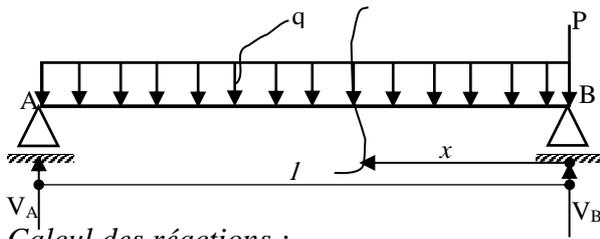
On demande de :

- Calculer la flèche maximale ainsi que la rotation maximale en utilisant la méthode de l'intégration de la ligne élastique.
- Tracer les diagrammes de la flèche et de la rotation.

$EI = \text{constante}$ .



**Solution :**



Calcul des réactions :

$$\begin{cases} \Sigma F_{/y} = 0 \\ \Sigma M_{/A} = 0 \\ \Sigma M_{/B} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_A = \frac{ql}{2} \\ V_B = P + \frac{ql}{2} \end{cases}$$

$$M(x) = -\frac{qx^2}{2} - Px + \left(P + \frac{ql}{2}\right)x = -\frac{qx^2}{2} + \frac{ql}{2}x$$

$$\text{On a } Ely'' = -M(x) = \frac{qx^2}{2} - \frac{ql}{2}x$$

$$Ely' = \int \left( \frac{qx^2}{2} - \frac{ql}{2}x \right) dx \Rightarrow y'(x) = \frac{1}{EI} \int \left( \frac{qx^2}{2} - \frac{ql}{2}x \right) dx$$

$$y'(x) = \theta(x) = \frac{1}{EI} \left[ \frac{qx^3}{6} - \frac{qlx^2}{4} \right] + C_1 \dots \dots (1)$$

$$y(x) = v(x) = \int \frac{1}{EI} \left[ \left( \frac{qx^3}{6} - \frac{qlx^2}{4} \right) + C_1 \right] dx$$

$$\rightarrow v(x) = \frac{1}{EI} \left[ \frac{qx^4}{24} - \frac{qlx^3}{12} \right] + C_1x + C_2 \dots \dots (1)$$

Détermination des constantes d'intégration à partir des conditions aux limites :

Dans le cas d'une poutre bi-articulée, la flèche est nulle au niveau des appuis, c-à-d à  $x=l$  et à  $x=0$ .

$$v(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$v(l) = 0 \Rightarrow \frac{1}{EI} \left[ \frac{ql^4}{24} - \frac{ql^3}{12} \right] + C_1l + 0 = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{ql^3}{24EI}$$

Remplaçons  $C_1$  et  $C_2$  dans les équations (1) et (2).

$$(1) \rightarrow \theta(x) = \frac{1}{24EI} [4qx^3 - 6qlx^2 + ql^3] \dots \dots \dots (1)'$$

$$(2) \rightarrow v(x) = \frac{1}{24EI} [qx^4 - 2qlx^3 + ql^3x] \dots \dots \dots (2)'$$

Calculons  $\theta_{max}$  et  $v_{max}$  :

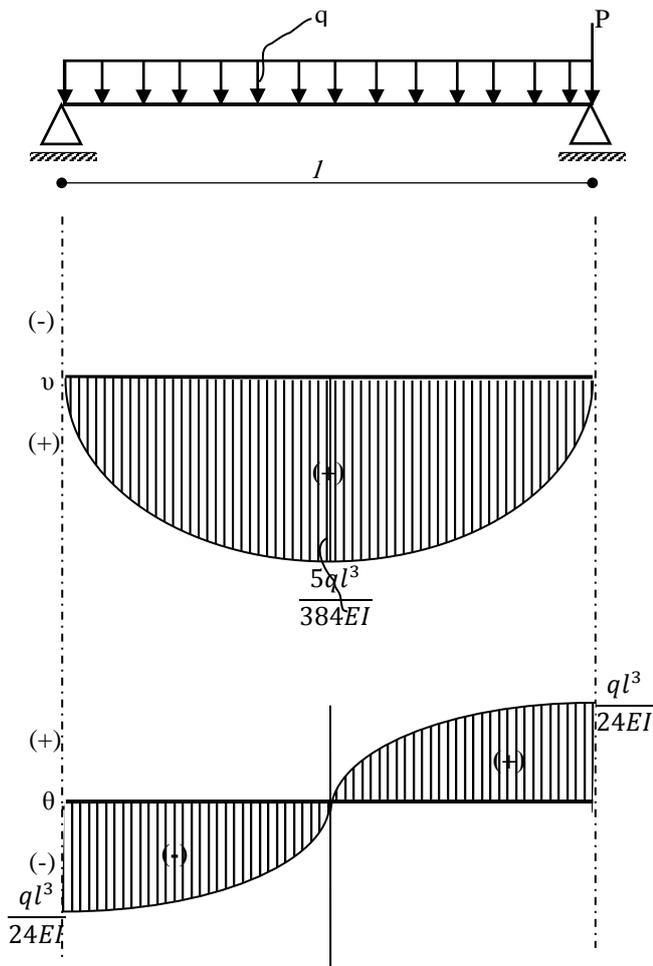
Dans ce cas, la flèche est nulle au niveau des appuis et est maximale au milieu de la poutre tandis que la rotation est nulle là où la flèche atteint sa valeur maximale c-à-d à  $l/2$  et est maximale au niveau des appuis.

$$\text{donc } \theta_{max} = \begin{cases} \theta(0) \\ \theta(l) \end{cases} = \begin{cases} \frac{ql^3}{24EI} \\ -\frac{ql^3}{24EI} \end{cases}$$

$$v_{max} = v\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{24EI} \left[ \frac{ql^4}{16} - \frac{2ql^4}{8} + \frac{ql^4}{2} \right]$$

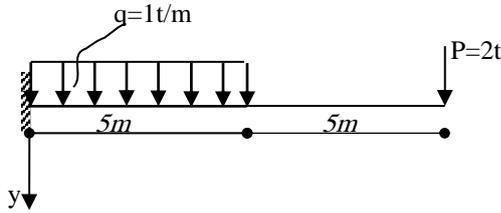
$$\Rightarrow v_{max} = \frac{5ql^4}{384EI}$$

4) Diagrammes de  $\theta$  et  $v_{max}$  :

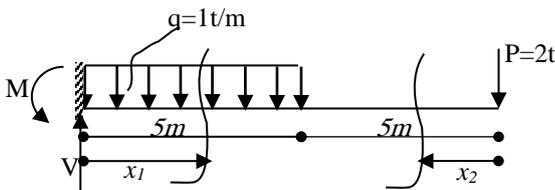


**Exercice 3 :** méthode de l'intégration de la ligne élastique.

Etablir les expressions de  $\theta(x)$  et  $v(x)$  de la poutre suivante :



Solution :



Calcul des réactions :

$$\begin{cases} \sum F_{/y} = 0 \\ \sum M_{/A} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V = 7t \\ M = 32,5t.m \end{cases}$$

$$EIy'' = -M(x)$$

Dans ce cas de chargement, nous avons deux sections ; déterminons les expressions de  $\theta$  et  $v$  pour chaque section :

Section I :  $0 \leq x \leq 5m$

$$M_1(x) = -\frac{qx^2}{2} + 7x - 32,5$$

$$EIy'' = \frac{qx^2}{2} - 7x + 32,5$$

$$* \theta_1(x) = \frac{1}{EI} \int \left[ \frac{qx^2}{2} - 7x + 32,5 \right] dx$$

$$\theta_1(x) = \frac{1}{EI} \left[ \frac{qx^3}{6} - \frac{7x^2}{2} + 32,5x \right] + C_1^{(1)} \dots \dots \dots (1)$$

$$* v_1(x) = \int \left[ \frac{1}{EI} \left( \frac{qx^3}{6} - \frac{7x^2}{2} + 32,5x \right) + C_1^{(1)} \right] dx$$

$$\rightarrow v_1(x) = \frac{1}{EI} \left( \frac{qx^4}{24} - \frac{7x^3}{6} + \frac{32,5x^2}{2} \right) + C_1^{(1)}x + C_2^{(1)} \dots \dots \dots (2)$$

Section II :  $0 \leq x \leq 5m$

$$M_2(x) = -2x$$

$$EIy'' = +2x$$

$$* \theta_2(x) = \frac{1}{EI} \int 2x \cdot dx$$

$$\theta_2(x) = \frac{x^2}{EI} + C_1^{(2)} \dots \dots \dots (3)$$

$$* v_2(x) = \int \left( \frac{x^2}{EI} + C_1^{(2)} \right) dx$$

$$\rightarrow v_2(x) = \frac{x^3}{3EI} + C_1^{(2)} \cdot x + C_2^{(2)} \dots \dots \dots (4)$$

\* Détermination des constantes d'intégration:

$$\text{A l'encastrement : } \begin{cases} \theta_1(0) = 0 \\ v_1(0) = 0 \end{cases}$$

$$(1) \rightarrow C_1^{(1)} = 0$$

$$(2) \rightarrow C_2^{(1)} = 0$$

Au point de jonction, on a les conditions de continuité suivantes :

$$x = 5m \rightarrow \begin{cases} \theta_1 = \theta_2 \\ v_1 = v_2 \end{cases}$$

L'égalité des équations (1) et (3) donne :

$$\frac{1}{EI} \left[ \frac{q(5)^3}{6} - \frac{7(5)^2}{2} + 32,5(5) \right] + C_1^{(1)} = \frac{1}{EI} (5)^2 + C_1^{(2)}$$

$$\Rightarrow C_1^{(2)} = \frac{71}{EI}$$

L'égalité des équations (2) et (4) donne :

$$\frac{1}{EI} \left( \frac{q(5)^4}{24} - \frac{7(5)^3}{6} + \frac{32,5(5)^2}{2} \right) = \frac{(5)^3}{3EI} + \frac{71(5)}{EI} + C_2^{(2)}$$

$$\Rightarrow C_2^{(2)} = -\frac{110,20}{EI}$$

Les expressions de  $\theta(x)$  et  $v(x)$  s'écrivent alors :

$$\theta_1(x) = \frac{1}{12EI} (2qx^3 - 42x^2 + 390x)$$

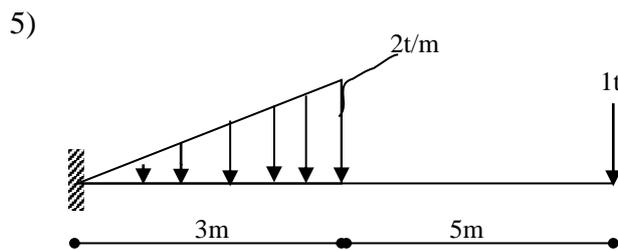
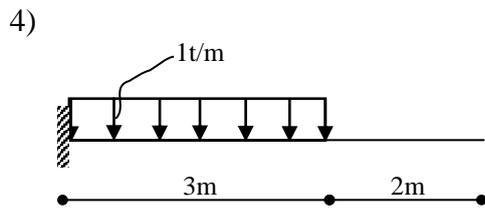
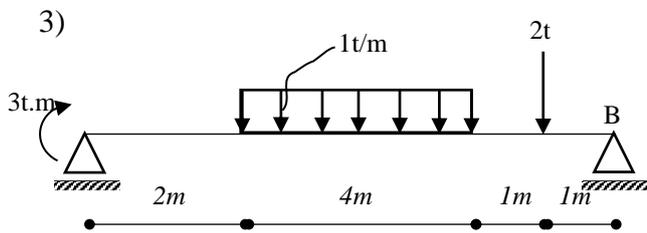
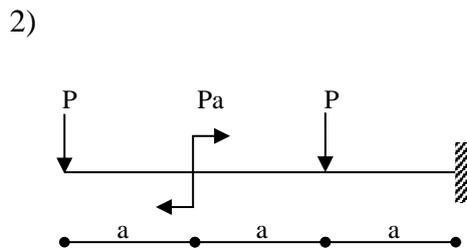
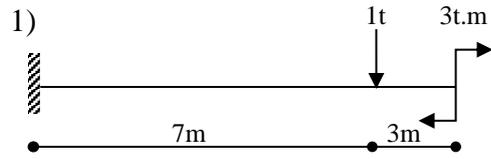
$$\theta_2(x) = \frac{1}{EI} (x^2 + 71)$$

$$v_1(x) = \frac{1}{EI} \left( \frac{qx^4}{24} - \frac{7x^3}{6} + \frac{32,5x^2}{2} \right)$$

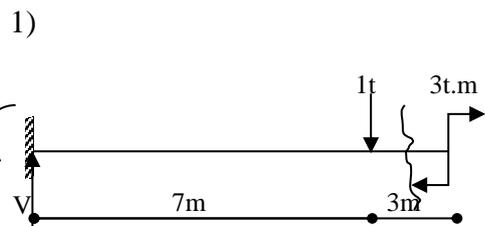
$$v_2(x) = \frac{1}{EI} \left( \frac{x^3}{3} + 71x - 110,20 \right)$$

**Exercice 4 :** Méthode des paramètres initiaux.

Déterminer les expressions de  $\theta(x)$  et  $v(x)$  des poutres suivantes :



**Solution :**



$$\begin{cases} \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M_A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V = 1t \\ M = 10t.m \end{cases}$$

$$M_z = -M + V \cdot x - P(x - 7)^1 = -10 + 1 \cdot x - 1(x - 7)^1$$

$$* EI_x \theta(x) = EI\theta_0 + 10x - 1 \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}(x - 7)^2$$

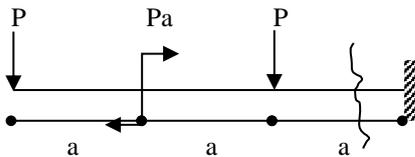
$$* EI_x v(x) = EIv_0 + EI\theta_0 \cdot x + 10 \frac{x^2}{2} - 1 \cdot \frac{x^3}{6} + \frac{1}{6}(x - 7)^3$$

Au niveau de l'encastrement, nous avons:  $\begin{cases} v_0 = 0 \\ \theta_0 = 0 \end{cases}$

$$EIv(x) = 10 \frac{x^2}{2} - 1 \cdot \frac{x^3}{6} + \frac{1}{6}(x - 7)^3$$

$$\rightarrow \begin{cases} v(x) = \frac{1}{6EI} (30x^2 - x^3 + (x - 7)^3) \\ \theta(x) = \frac{1}{2EI} (20x^2 - x^2 + (x - 7)^2) \end{cases}$$

2)



$$EIv(x) = EIy_0 + EI\theta_0 \cdot x + \frac{Px^3}{6} - \frac{Pa(x - a)^2}{2} + \frac{P(x - 2a)^3}{6} \dots \dots \dots (1)$$

$$EI\theta(x) = EI\theta_0 + \frac{Px^2}{2} - Pa(x - a) + \frac{P(x - 2a)^2}{2} \dots \dots \dots (2)$$

Cherchons  $y_0$  et  $\theta_0$  à partir des conditions aux limites :

à l'encastrement ( $x=3a$ ), on a :  $\begin{cases} y = 0 \\ \theta = 0 \end{cases}$

L'équation (2) donne:  $EI\theta_0 + \frac{9Pa^2}{2} - 2Pa^2 + \frac{Pa^2}{2} = 0$

$\Rightarrow EI\theta_0 = -3Pa^2$

$$EIy_0 + EI\theta_0 \cdot x + \frac{27Pa^3}{6} - \frac{4Pa^3}{2} + \frac{Pa^3}{6}$$

L'équation (1) donne:  $EIy_0 - 9Pa^3 + \frac{27Pa^3}{6} - \frac{4Pa^3}{2} + \frac{Pa^3}{6} = 0$

$$\Rightarrow EIy_0 = + \frac{19Pa^3}{3}$$

Enfin, les expressions de  $v(x)$  et  $\theta(x)$  s'écrivent:

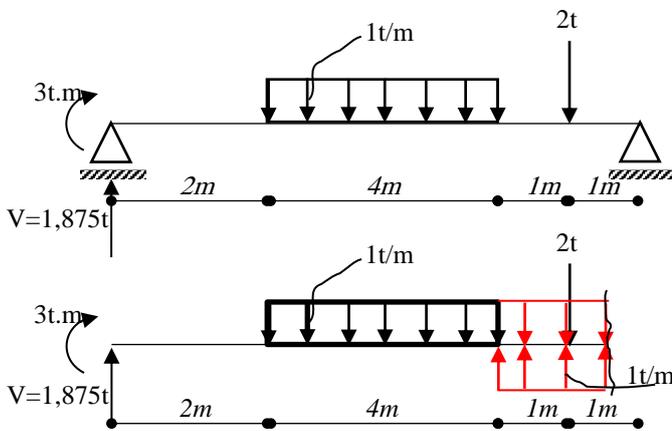
$$EIv(x) = + \frac{19Pa^3}{3} - 3Pa^2x + \frac{Px^3}{6} - \frac{Pa(x-a)^2}{2} + \frac{P(x-2a)^3}{6}$$

$$\Rightarrow v(x) = \frac{1}{6EI} [38Pa^3 - 18Pa^2x + Px^3 - 3Pa(x-a)^2 + P(x-2a)^3]$$

$$EI\theta(x) = -3Pa^2 + \frac{Px^2}{2} - Pa(x-a) + \frac{P(x-2a)^2}{2}$$

$$\Rightarrow \theta(x) = -\frac{1}{2EI} [6Pa^2 - Px^2 + 2Pa(x-a) - P(x-2a)^2]$$

3)



Système réel

Système obtenu après application du principe de compensation de charge

$$EIy(x) = EIy_0 + EI\theta_0 \cdot x - \left[ 3 \frac{x^2}{2} + 1,875 \frac{x^3}{6} - \frac{2(x-7)^3}{6} - \frac{1(x-2)^4}{24} + \frac{1(x-6)^4}{24} \right]$$

Cherchons les paramètres initiaux  $y_0$  et  $\theta_0$ :

La poutre est bi-articulée donc la flèche est nulle au niveau des deux appuis c-à-d à :  $\begin{cases} x = 0 \\ x = 8m \end{cases}$

Donc :

$$\begin{cases} EIy(0) = 0 \\ EIy(8) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} EIy_0 + \frac{2(-7)^3}{6} + \frac{(-2)^4}{24} - \frac{(-6)^4}{24} = 0 \\ EIy_0 + 8EI\theta_0 - \left[ 3 \frac{(8)^2}{2} + 1,875 \frac{(8)^3}{6} - \frac{2(8-7)^3}{6} - \frac{1(8-2)^4}{24} + \frac{1(8-6)^4}{24} \right] = 0 \end{cases}$$

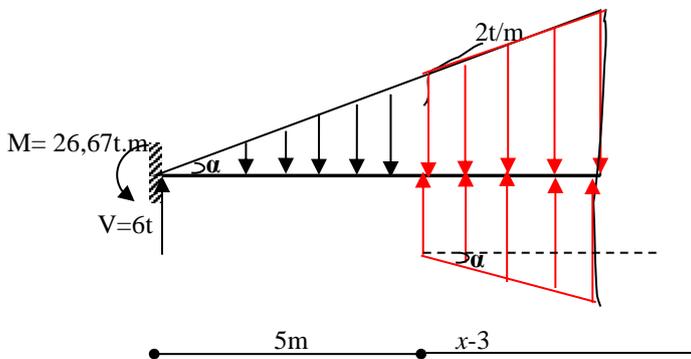
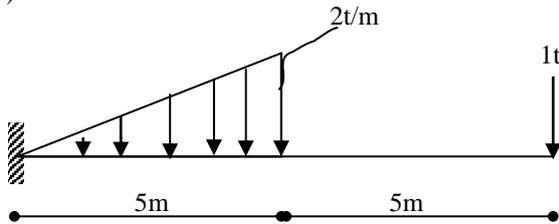
$$\Rightarrow \begin{cases} EIy_0 = 167,67 \\ EI\theta_0 = 4,33 \end{cases}$$

Les équations finales de la flèche ( $y(x)$ ) et de la rotation ( $\theta(x)$ ) sont :

$$Iy(x) = 167,67 + 4,33 \cdot x - \left[ 3 \frac{x^2}{2} + 1,875 \frac{x^3}{6} - \frac{2(x-7)^3}{6} - \frac{1(x-2)^4}{24} + \frac{1(x-6)^4}{24} \right]$$

$$\begin{cases} y(x) = \frac{1}{24EI} [4024 + 104x - 36x^2 - 7,5x^3 + 8(x-7)^3 + (x-2)^4 - (x-6)^4] \\ \theta(x) = \frac{1}{24EI} [104 - 72x - 22,5x^2 + 24(x-7)^2 + 4(x-2)^3 - 4(x-6)^3] \end{cases}$$

4)



$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ \theta_0 = 0 \\ tg\alpha = \frac{2}{5} \end{cases}$$

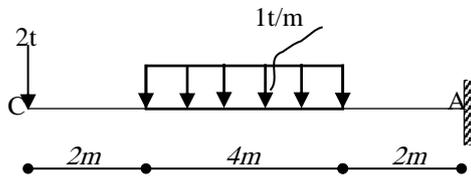
$$EIy(x) = \left[ \frac{26,67x^2}{2} - \frac{6x^3}{6} - \frac{2(x-5)^4}{24} + \frac{2}{5}x^5 - \frac{2}{5} \frac{(x-5)^5}{120} \right]$$

$$\begin{cases} y(x) = \frac{1}{300EI} [4000,5x^2 - 300x^3 - 25(x-5)^4 + 2x^5 - 2(x-5)^5] \\ \theta(x) = \frac{1}{300EI} [8000,4x - 900x^2 - 100(x-5)^3 + 10x^4 - 10(x-5)^4] \end{cases}$$

**Exercice 5 :** Méthode de la poutre conjuguée.

Calculer la flèche et la rotation au point C de la poutre suivante :

On donne  $EI = 2 \times 10^6 \text{ daN.cm}^2$



**Solution :**

- *Calcul des réactions :*

$$\begin{cases} \Sigma F_{/y} = 0 \\ \Sigma M_{/A} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_A = 6t \\ M_A = 32t.m \end{cases}$$

- *Diagramme des moments fléchissant :*

**Section I :  $0 \leq x \leq 2m$**

$$M_1(x) = -2x$$

*Valeurs aux bornes :*

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow M_1 = 0 \\ x = 2m \rightarrow M_1 = -4t.m \end{cases}$$

**Section II :  $2 \leq x \leq 6m$**

$$M_2(x) = -2x - \frac{1(x-2)^2}{2}$$

*Valeurs aux bornes :*

$$\begin{cases} x = 2m \rightarrow M_2 = -4t.m \\ x = 5m \rightarrow M_2 = -20t.m \end{cases}$$

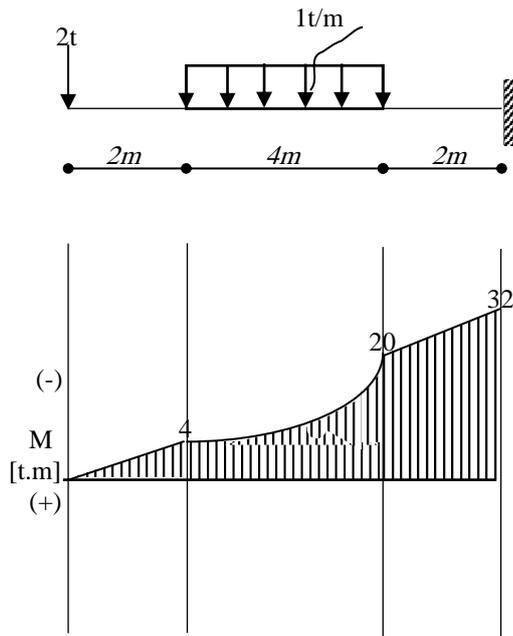
$$\frac{dM_2}{dx} = 0 \Rightarrow -2 - x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1m < 0$$

**Section III :  $0 \leq x \leq 2m$**

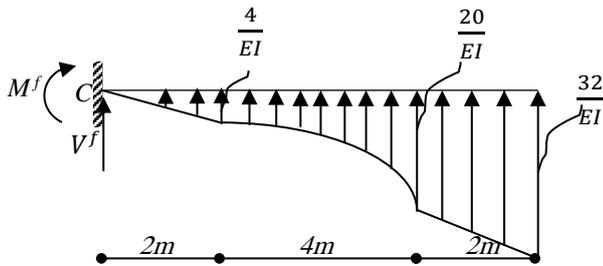
$$M_3(x) = 6x - 32$$

*Valeurs aux bornes :*

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow M_3 = -32t.m \\ x = 2m \rightarrow M_3 = -20t.m \end{cases}$$



**Poutre conjuguée :**



**Rappels :**

- L'effort tranchant de la poutre fictive représente la rotation de la poutre réelle.
- Le moment fléchissant de la poutre fictive représente la flèche de la poutre réelle.
- Calcul des réactions de la poutre fictive :

$$\begin{cases} \Sigma F_{/y} = 0 \\ \Sigma M_{/C} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

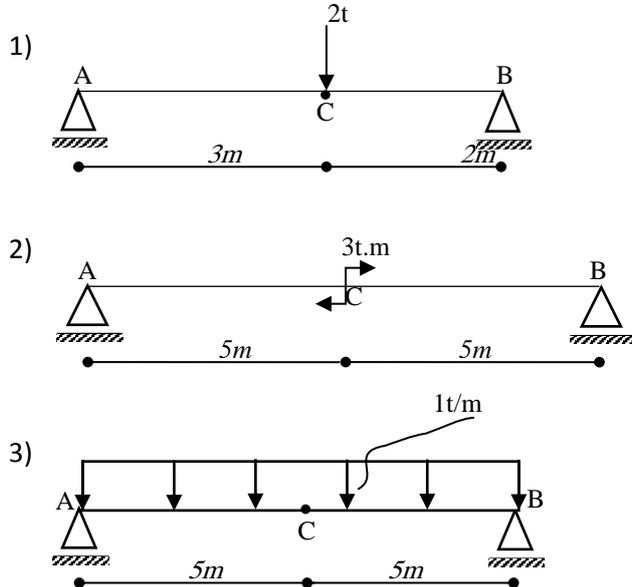
$$\begin{cases} V^f = -\frac{1}{EI} \left[ \frac{4 \times 2}{2} + (4 \times 4) + \frac{1}{3} ((20 - 4) \times 4) + \frac{(32 - 20) \times 2}{2} + (20 \times 2) \right] \\ M_c^f = \frac{1}{EI} \left[ \left( \frac{4 \times 2}{2} \right) \left( \frac{4}{3} \right) + (4 \times 4)(4) + \frac{1}{3} ((20 - 4) \times 4) \left( \frac{3 \times 4}{2} + 2 \right) \right. \\ \left. + \left( \frac{(32 - 20) \times 2}{2} \right) \left( \frac{4}{3} + 6 \right) + (20 \times 2)(7) \right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_c = V^f = -4,67 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \\ v_c = M_c^f = 608 \text{ mm} \end{cases}$$

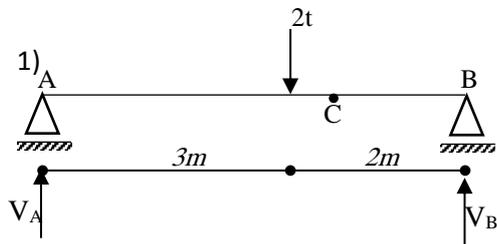
**Exercice 6 :** Méthode de la poutre conjuguée.

Calculer la flèche au point C et la rotation aux points A et B des poutres suivantes :

On donne  $EI = 2 \times 10^6 \text{ daN.cm}^2$ .



**Solution :**



- Calcul des réactions :

$$\begin{cases} \sum F_{/y} = 0 \\ \sum M_{/A} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_A = 0,8t \\ V_B = 1,2t.m \end{cases}$$

- Diagramme des moments fléchissant :

**Section I :  $0 \leq x \leq 3m$**

$$M_{f1}(x) = 0,8x$$

Valeurs aux bornes :

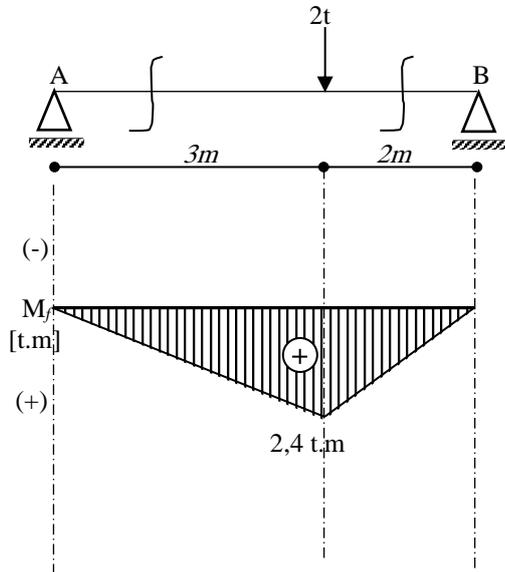
$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow M_{f1} = 0 \\ x = 3m \rightarrow M_{f1} = 2,4t.m \end{cases}$$

**Section II :  $0 \leq x \leq 2m$**

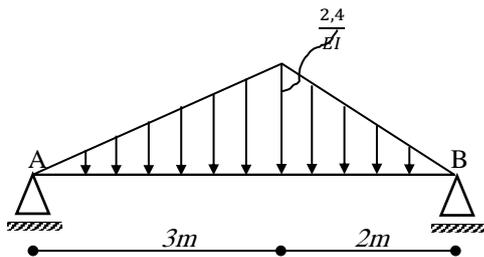
$$M_2(x) = 1,2x$$

Valeurs aux bornes :

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow M_{f_2} = 0 \\ x = 3m \rightarrow M_{f_2} = 2,4t.m \end{cases}$$



Poutre conjuguée :



$$\begin{cases} \Sigma F_{/y} = 0 \\ \Sigma M_{/A} = 0 \\ \Sigma M_{/B} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_A^f + V_B^f = \frac{2,4}{EI} \cdot \frac{5}{2} = \frac{6}{EI} \\ 5V_B^f = \left[ \left( \frac{2,4}{EI} \cdot \frac{2}{2} \right) \left( 3 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right) + \left( \frac{2,4}{EI} \cdot \frac{3}{2} \right) \left( \frac{2}{3} \cdot 3 \right) \right] \\ 5V_A^f = \left[ \left( \frac{2,4}{EI} \cdot \frac{2}{2} \right) \left( \frac{2}{3} \cdot 2 \right) + \left( \frac{2,4}{EI} \cdot \frac{3}{2} \right) \left( 2 + \frac{1}{3} \cdot 3 \right) \right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta_B = -V_B^f = -\frac{3,2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^6} \text{ [rad]} \\ \theta_A = V_A^f = \frac{2,8 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^6} \text{ [rad]} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta_A = 0,0014 \text{ [rad]} \\ \theta_B = -0,0016 \text{ [rad]} \end{cases}$$

$$v_C = M_C^f = \left[ \overbrace{\left( \frac{2,8}{EI} \right) \times 3}^{M_{V_{A/C}^f}} \right] - \left[ \overbrace{\left( \frac{2,4}{EI} \cdot \frac{3}{2} \right) \left( \frac{1}{3} \cdot 3 \right)}^{M_{charge/C}} \right] = \frac{4,8 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^6}$$

$v_C = 0,24cm.$

2)

- Calcul des réactions :

$$\begin{cases} \Sigma F_{/y} = 0 \\ \Sigma M_{/A} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_A = -0,3t \\ V_B = +0,3t \end{cases}$$

- Diagramme des moments fléchissant :

**Section I :  $0 \leq x \leq 5m$**

$$M_{f1}(x) = -0,3x$$

Valeurs aux bornes :

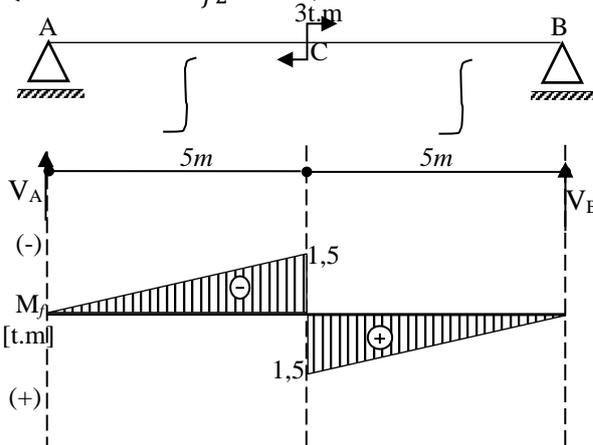
$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow M_{f1} = 0 \\ x = 5m \rightarrow M_{f1} = -1,5t \cdot m \end{cases}$$

**Section II :  $0 \leq x \leq 5m$**

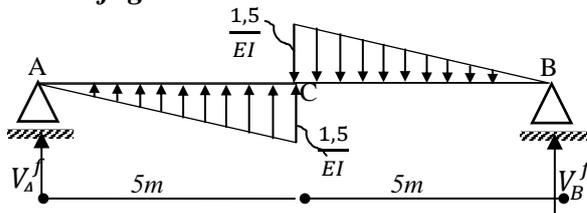
$$M_2(x) = 0,3x$$

Valeurs aux bornes :

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow M_{f2} = 0 \\ x = 5m \rightarrow M_{f2} = +1,5t \cdot m \end{cases}$$



**Poutre conjuguée :**



$$\begin{cases} \Sigma F_{/y} = 0 \\ \Sigma M_{/A} = 0 \\ \Sigma M_{/B} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_A^f + V_B^f = \left(\frac{1,5}{EI} \cdot 5\right) - \left(\frac{1,5}{EI} \cdot 5\right) = 0 \\ 10V_B^f = \left[\left(\frac{1,5}{EI} \cdot 5\right)\left(5 + \frac{1}{3} \cdot 5\right) - \left(\frac{1,5}{EI} \cdot 5\right)\left(\frac{2}{3} \cdot 5\right)\right] \\ 10V_A^f = \left[\left(\frac{1,5}{EI} \cdot 5\right)\left(\frac{2}{3} \cdot 5\right) - \left(\frac{1,5}{EI} \cdot 5\right)\left(5 + \frac{1}{3} \cdot 5\right)\right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_B^f = +\frac{1,25 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^6} \\ V_A^f = -\frac{1,25 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta_A = V_A^f = -6,25 \cdot 10^{-4} \text{ [rad]} \\ \theta_B = -V_B^f = +6,25 \cdot 10^{-4} \text{ [rad]} \end{cases}$$

$$v_C = M_C^f = \left[ \overbrace{-\left(\frac{1,25}{EI} \times 5\right)}^{M_{V_{A/C}^f}} \right] + \left[ \overbrace{\left(\frac{1,5}{EI} \cdot 5\right)\left(\frac{1}{3} \cdot 5\right)}^{M_{charge/C}} \right] = 0$$

$$v_C = 0.$$

3)

- *Calcul des réactions :*

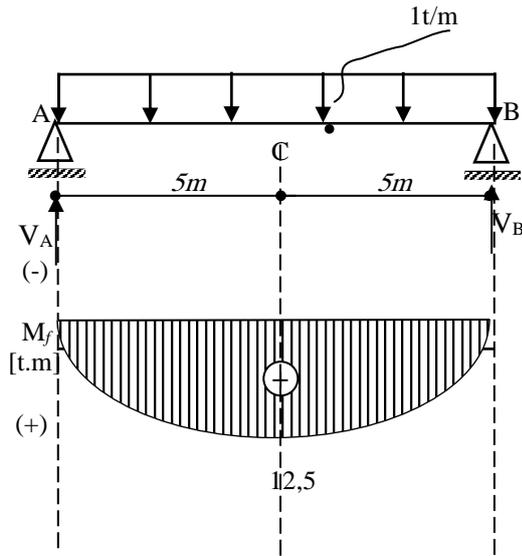
$$V_A = V_B = \frac{ql}{2} = 5t$$

- *Diagramme des moments fléchissant :*

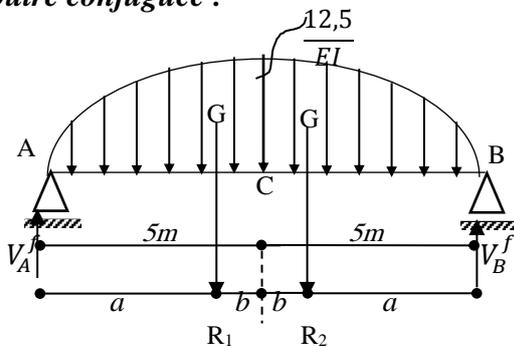
$$M_f(0) = 0$$

$$M_f(l) = 0$$

$$M_{fmax} = \frac{ql^2}{8} = 12,5t \cdot m$$



**Poutre conjuguée :**



$a$  : distance du centre de gravité G jusqu'au point A (ou B).

$b$  : distance entre le centre de gravité et le point C.

$R_1$  : résultante des forces de la demi parabole située à gauche du point C.

$R_2$  : résultante des forces de la demi parabole située à droite du point C.

Par symétrie,  $R_1=R_2$ =aire de la demi parabole.

$$* \text{ Aire d'une demi parabole } = \frac{2}{3}h \cdot \frac{l}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{12,5}{EI} \cdot 5 = \frac{41,67}{EI}$$

$$R_1 = R_2 = \frac{41,67}{EI}$$

$$* a = \frac{5}{8}l = \frac{5}{8} \cdot 5 = 3,125m$$

$$* b = \frac{3}{8}l = \frac{3}{8} \cdot 5 = 1,875m$$

$$\text{Par symétrie, } V_A^f = V_B^f = \frac{R_1 + R_2}{2} = \frac{41,67}{EI}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \theta_A = V_A^f &= \frac{41,67 \cdot 10^3}{EI} = 0,021 \text{ rad} \\ \theta_B = -V_B^f &= -0,021 \text{ rad} \end{aligned} \right.$$

$$v_C = M_C^f = 5V_A^f - R_1 \cdot b = (5 \times 0,021) - (0,021 \times 1,875)$$

$$v_C = 0,065 \text{ cm.}$$

## **FLEXION DEVIEE**

**VI.1/ Définition :**

Une poutre travaille en flexion déviée si, au lieu d'avoir un moment de flexion  $M_f$  se réduisant à une seule composante  $M_{fz}$  (donc par rapport à OZ), ce moment est réduit à deux composantes  $M_y$  et  $M_z$  avec deux efforts tranchants  $T_y$  et  $T_z$  :

Flexion déviée = flexion plane/xoy + flexion plane/xoz.

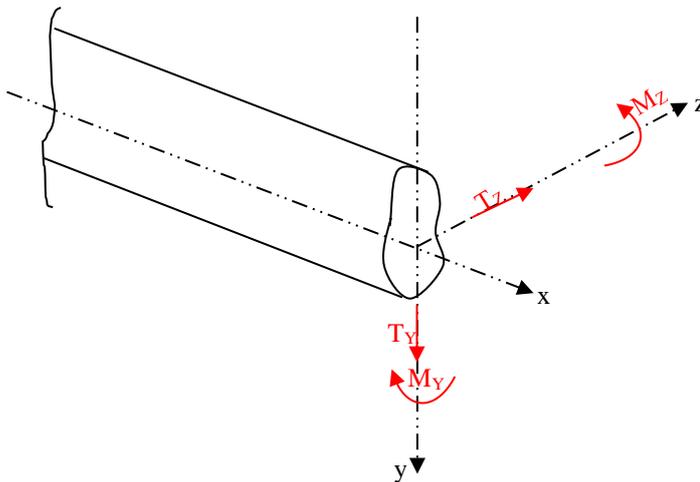


Figure VI.1 [2].

**N.B :** xoy et xoz sont les plans principaux de la poutre.

Dans le cas de la flexion simple, on distingue deux cas de chargement :

**1<sup>er</sup> cas :** les forces extérieures appartiennent au même plan de charges qui ne coïncide pas avec l'un des plans principaux d'inertie (voir figure VII.2).

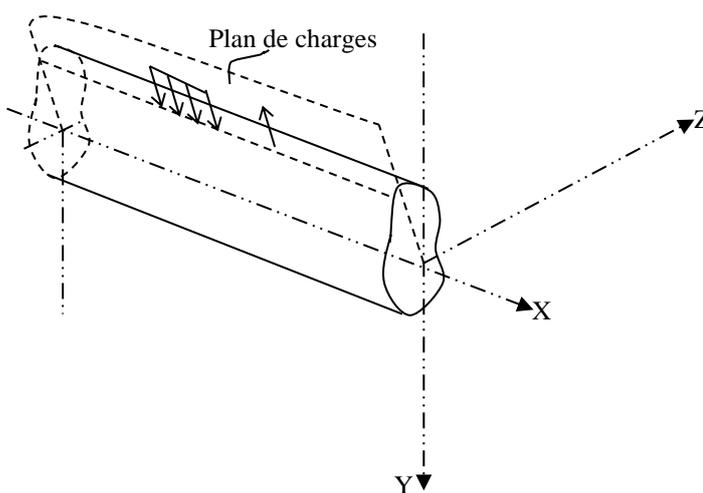
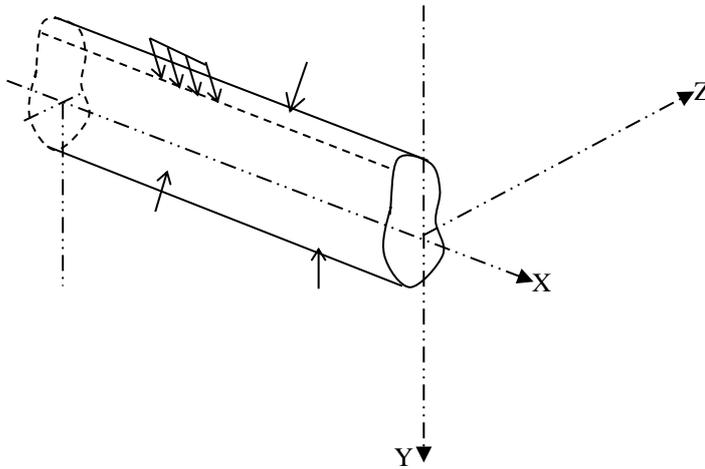


Figure VI.2 [2]

**2<sup>ème</sup> cas :** les forces extérieures sont appliquées dans différents plan de charges (voir figure VII.3).



**Figure VI.3 [2]**

L'étude de la flexion déviée revient à décomposer les sollicitations en deux flexions planes suivant les plans principaux.

### **VI.2/ Contraintes :**

Les efforts tranchants  $T_Y$  et  $T_Z$  provoquent des contraintes tangentielles  $[\tau_x]$ .

Les moments  $M_Y$  et  $M_Z$  provoquent des contraintes normales  $[\sigma_x]$  dans une section droite de la barre.

Le calcul des contraintes normales se fera à la base des hypothèses suivantes :

- 1) Le déplacement d'un point provoqué par le moment de flexion est normal à la section.
- 2) Une section plane avant déformation reste plane après déformation.

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} Z + \frac{M_z}{I_z} Y$$

$I_Y$  et  $I_Z$  : Moments d'inertie principaux centraux de la section droite.

$M_Y$  et  $M_Z$  : Composantes de  $M$  appliqués dans le plan YOZ.

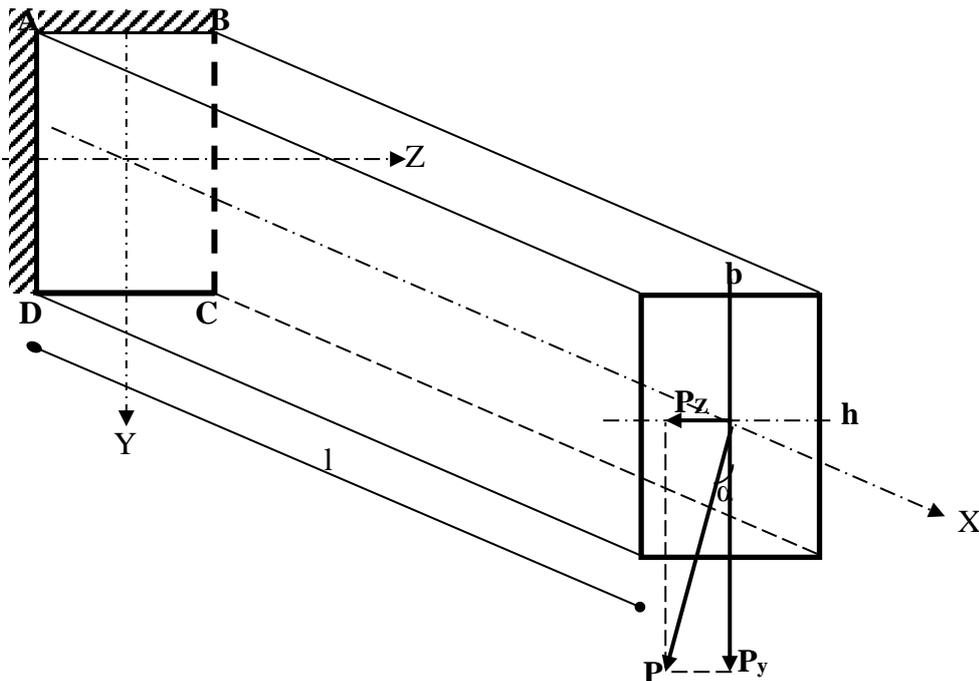
Le signe de  $\sigma_x$  est fonction, d'une part, des coordonnées et d'autre part des signes des moments fléchissants ( $M_Y$  et  $M_Z$ ).

Cette dernière relation met en relief le fait que la contrainte normale est une fonction linéaire de  $Y$  et de  $Z$ .

### **VI.3/ Diagrammes des contraintes normales-Axe neutre :**

Proposons-nous d'établir le diagramme des contraintes normales dans la section d'encastrement ainsi que la position de l'axe neutre d'une poutre en console chargée à son extrémité par une charge  $P$ .

$\alpha=30^\circ$ ,  $l=1,00\text{m}$ ,  $b=10\text{cm}$ ,  $h=15\text{cm}$ .



a) *Contraintes normales :*

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} Z + \frac{M_z}{I_z} Y$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{15(10)^3}{12} = 1250 \text{ cm}^4$$

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{10(15)^3}{12} = 2812,5 \text{ cm}^4$$

$$M_y = P_z \cdot L = P \cdot \sin \alpha \cdot L = P \cdot \sin 30^\circ \cdot 100 = 50P \text{ Kg.cm.}$$

$$M_z = -P_y \cdot L = -P \cdot \cos \alpha \cdot L = -P \cdot \cos 30^\circ \cdot 100 = -86,6P \text{ Kg.cm.}$$

**Remarque:**  $M_z$  est négatif car il provoque la compression dans le quadrant positif de la section.

**N. B:**  $M_r = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$ : moment résultant

*Coordonnées des 4 points de la section d'encastrement:*

$$A \begin{cases} y = -\frac{h}{2} = -\frac{15}{2} = -7,5 \text{ cm} \\ z = -\frac{b}{2} = -\frac{10}{2} = -5 \text{ cm} \end{cases}$$

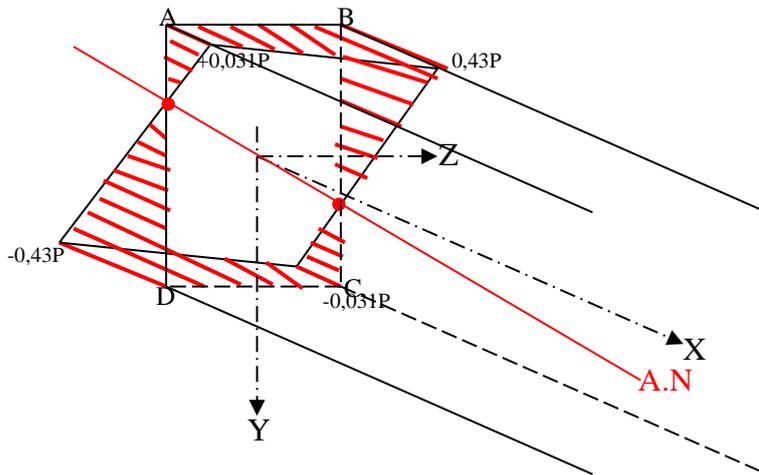
$$B \begin{cases} y = -\frac{h}{2} = -\frac{15}{2} = -7,5 \text{ cm} \\ z = +\frac{b}{2} = +\frac{10}{2} = +5 \text{ cm} \end{cases}$$

$$C \begin{cases} y = +\frac{h}{2} = +\frac{15}{2} = +7,5 \text{ cm} \\ z = +\frac{b}{2} = +\frac{10}{2} = +5 \text{ cm} \end{cases}$$

$$D \begin{cases} y = +\frac{h}{2} = +\frac{15}{2} = +7,5\text{cm} \\ z = -\frac{b}{2} = -\frac{10}{2} = -5\text{cm} \end{cases}$$

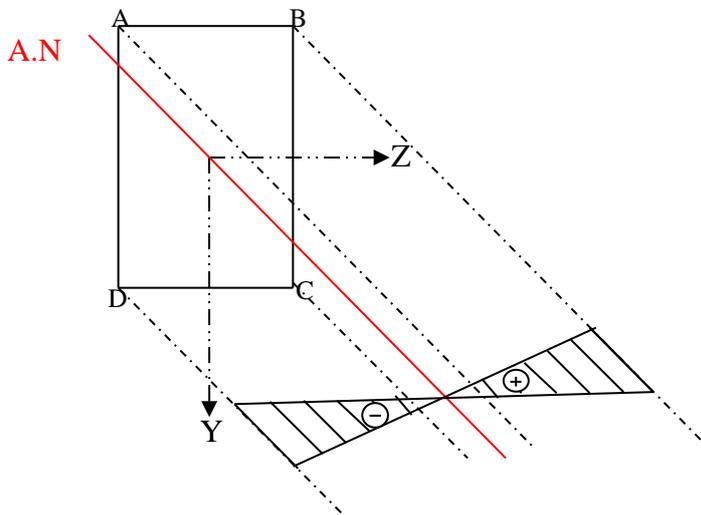
$$\begin{cases} \sigma_{xA} = \frac{50P}{1250}(-5) - \frac{86,6P}{2812,5}(-7,5) = 0,031P \text{ [bars]} \\ \sigma_{xB} = \frac{50P}{1250}(+5) - \frac{86,6P}{2812,5}(-7,5) = 0,43P \text{ [bars]} \\ \sigma_{xC} = \frac{50P}{1250}(+5) - \frac{86,6P}{2812,5}(+7,5) = -0,031P \text{ [bars]} \\ \sigma_{xD} = \frac{50P}{1250}(-5) - \frac{86,6P}{2812,5}(+7,5) = -0,43P \text{ [bars]} \end{cases}$$

Diagramme des contraintes de la section d'encastrement :



**Remarque :**

Il est commode de représenter le diagramme des contraintes normales sous la forme de sa projection sur le plan perpendiculaire à l'axe neutre :



**b) Axe neutre :**

L'axe neutre est l'axe pour lequel les contraintes sont nulles dans la section. Son équation s'établit de la sorte :

$$\frac{M_y}{I_y} Z_0 + \frac{M_z}{I_z} Y_0 = 0$$

$$Z_0 = -\frac{M_z}{M_y} \cdot \frac{I_y}{I_z} \cdot Y_0 = \frac{-86,6P}{50P} \cdot \frac{1250}{2812,5} Y_0 = 0,77Y_0$$

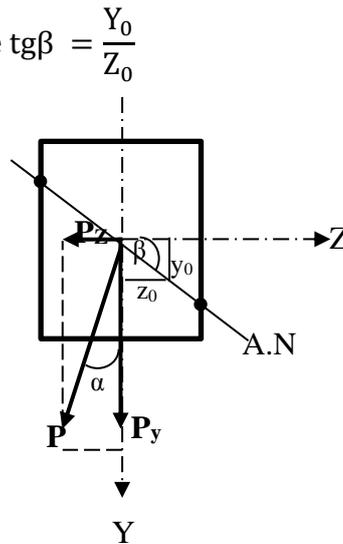
$$\begin{cases} y_0 = -7,5\text{cm} \rightarrow Z_0 = 5,77\text{ cm} \\ y_0 = +7,5\text{cm} \rightarrow Z_0 = -5,77\text{ cm} \end{cases}$$

Ou encore par le coefficient angulaire  $\text{tg}\beta = \frac{Y_0}{Z_0}$

$$\text{tg}\beta = \frac{Y_0}{Z_0} = -\frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{I_z}{I_y}$$

$$\text{tg}\beta = -\frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{I_z}{I_y} = -\frac{M_y \cdot \sin\alpha}{M_z \cdot \cos\alpha} \frac{I_z}{I_y}$$

$$\text{tg}\beta = -\text{tg}\alpha \frac{I_z}{I_y}$$



**VI.4/ Calcul à la résistance :**

$$\sigma_{x_{max}}^+ = \left| \frac{M_{y_{max}}}{I_y} Z_{max} + \frac{M_{z_{max}}}{I_z} Y_{max} \right| \leq [\sigma^+]$$

$$\sigma_{x_{max}}^- = - \left| \frac{M_{y_{max}}}{I_y} Z_{max} + \frac{M_{z_{max}}}{I_z} Y_{max} \right| \leq [\sigma^-]$$

Prenons l'exemple d'une section rectangulaire :

$$I_y = \frac{hb^3}{12}$$

$$I_z = \frac{bh^3}{12}$$

$$z_{max} = \pm \frac{b}{2}$$

$$y_{max} = \pm \frac{h}{2}$$

$$\sigma_{x_{max}}^+ = \left| \frac{12M_y}{hb^3} \left(\frac{b}{2}\right) + \frac{12M_z}{bh^3} \left(\frac{h}{2}\right) \right| \leq [\sigma^+]$$

$$\begin{cases} \sigma_{x_{max}}^+ = \left| \frac{6M_y}{hb^2} + \frac{6M_z}{bh^2} \right| \leq [\sigma^+] \\ \sigma_{x_{max}}^- = - \left| \frac{6M_y}{hb^2} + \frac{6M_z}{bh^2} \right| \leq [\sigma^-] \end{cases}$$

La symétrie des sections  $\Rightarrow [\sigma_x^+] = [\sigma_x^-]$ : égalité en module.

Si  $[\sigma_x^+] \neq [\sigma_x^-]$ , on doit prendre comme  $[\sigma]$  dans la formule  $\min[|\sigma_x^+|, |\sigma_x^-|]$ .

### **VI.5/ Calcul des déplacements :**

Dans le cas de la flexion déviée, les déplacements (verticaux et angulaires) sont définis comme suit :

- Déplacement vertical (flèche) :  

$$v = \sqrt{(v^{xoy})^2 + (v^{xoz})^2}$$
- Déplacement angulaire (rotation) :

$$\theta = \sqrt{(\theta^{xoy})^2 + (\theta^{xoz})^2}$$

$v^{xoy}$  et  $\theta^{xoy}$  sont, respectivement, la flèche et la rotation dans le plan xoy.

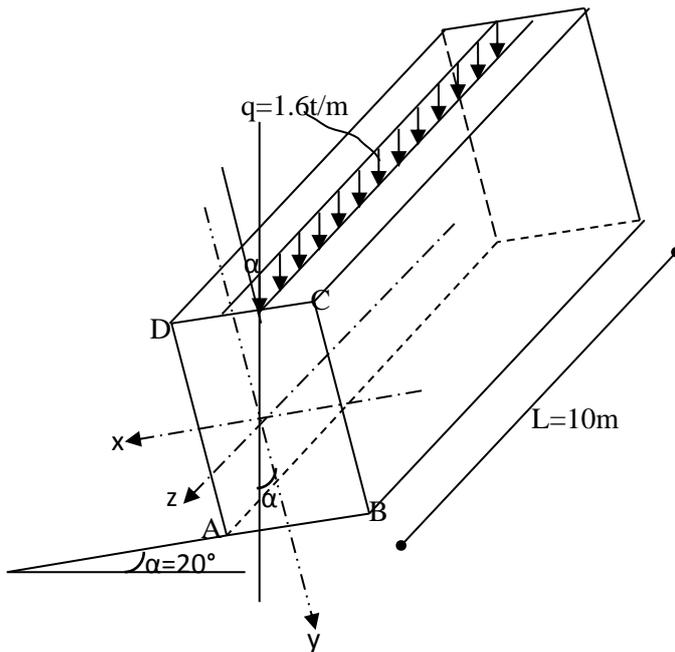
$v^{xoz}$  et  $\theta^{xoz}$  sont, respectivement, la flèche et la rotation dans le plan xoz.

**N.B :** les méthodes de calcul des déplacements évoquées dans le chapitre V, restent valables dans le cas de la flexion déviée.

**EXERCICES****Exercice 1 :**

Soit une poutre de section rectangulaire, de dimensions (25x30)cm<sup>2</sup> et de longueur 10m, reposant sur deux appuis simples placés à ses extrémités et supportant une charge uniformément répartie de 1,6t/m.

Déterminer la contrainte maximale de flexion.



*Solution :*

$$\sigma = \sigma_x + \sigma_y = \frac{M_y}{I_y} X + \frac{M_x}{I_x} Y$$

$M_y$  et  $M_x$  sont les composantes du moment résultant sollicitant la section la plus sollicitée c'est-à-dire la section où la contrainte  $\sigma$  est maximale :

La section où le moment est maximal se trouve à  $L/2$ .

$$M_{\text{résultant}} = \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{ql^2}{8}$$

$$\rightarrow M_r = \frac{1,6(10)^2}{8} = 20t \cdot m$$

$$\begin{cases} M_y = M_r \cdot \sin\alpha = 20 \cdot \sin 20^\circ = 6,84t \cdot m \\ M_x = M_r \cdot \cos\alpha = 20 \cdot \cos 20^\circ = 18,79t \cdot m \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{25(30)^3}{12} = 56250 \text{ cm}^4 \\ I_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{30(25)^3}{12} = 39062,5 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

Les contraintes sont maximales en A et C :

$$A \begin{pmatrix} x = +12,5\text{cm} \\ y = +15\text{cm} \end{pmatrix} \rightarrow \text{traction} \quad C \begin{pmatrix} x = -12,5\text{cm} \\ y = -15\text{cm} \end{pmatrix} \rightarrow \text{compression}$$

$$\sigma_{\max_A} = \frac{6,84 \cdot 10^5}{39062,4} (+12,5) + \frac{18,79 \cdot 10^5}{56250} (+15)$$

$$\rightarrow \sigma_{\max_A} \approx 720 \text{ bars}$$

$$\sigma_{\max_B} = \frac{6,84 \cdot 10^5}{39062,4} (-12,5) + \frac{18,79 \cdot 10^5}{56250} (-15)$$

$$\rightarrow \sigma_{\max_B} \approx -720 \text{ bars}$$

### Exercice 2:

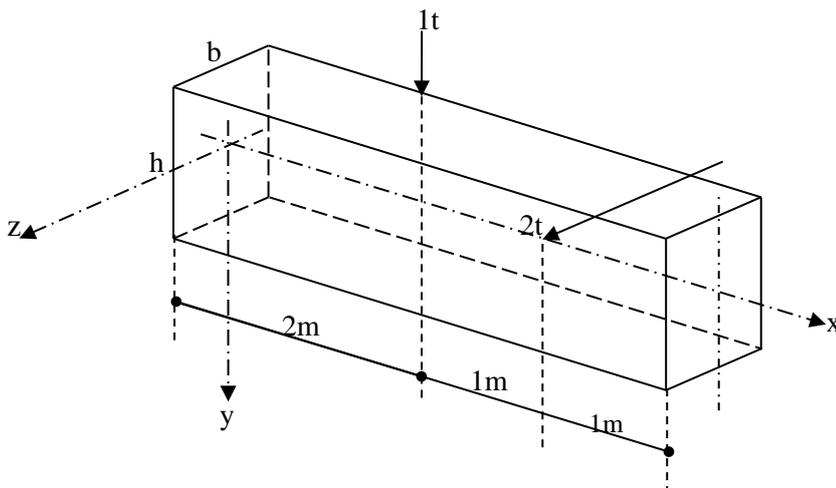
Déterminer les dimensions d'une section rectangulaire d'une poutre simplement appuyée et soumise à une force  $P = 1t$  dans le plan  $xoy$  et  $P = 2t$  dans le plan  $xoz$ .

La contrainte maximale de flexion est de l'ordre de :

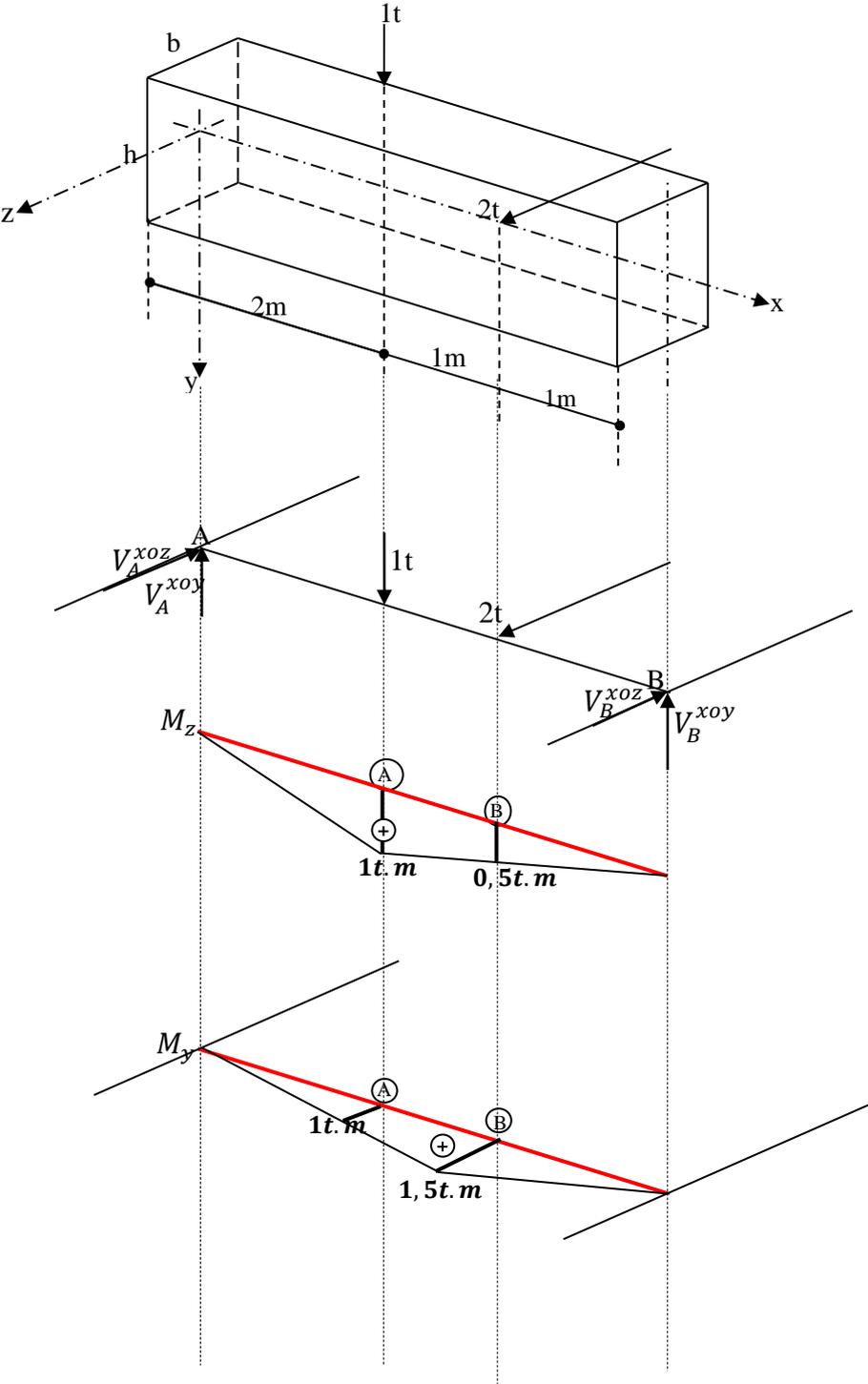
$$[\sigma] = 2000 \text{ kg/cm}^2 \text{ en traction.}$$

$$[\sigma] = 1500 \text{ kg/cm}^2 \text{ en compression.}$$

On donne  $h = 1,5b$ .



Solution :



1) Calcul des moments

- *Plan xoy:*

Par symétrie,  $V_A^{xoy} = V_B^{xoy} = \frac{1}{2} = 0,5t$

$0 \leq x \leq 2m :$

$$M_{z(x)} = V_A^{xoy} \cdot x$$

$$\rightarrow M_{z(x)} = 0,5 \cdot x$$

Valeurs aux bornes:

$$x = 0 \rightarrow M_z = 0$$

$$x = 2m \rightarrow M_z = 1t \cdot m$$

$0 \leq x \leq 2m :$

$$M_{z(x)} = V_B^{xoy} \cdot x$$

$$\rightarrow M_z = 0,5 \cdot x$$

Valeurs aux bornes:

$$x = 0 \rightarrow M_z = 0$$

$$x = 2m \rightarrow M_z = 1t \cdot m$$

- *Plan xoz :*

$$\sum F_i = 0 \Rightarrow V_A^{xoz} + V_B^{xoz} = 2t$$

$$\sum M_{/A} = 0 \Rightarrow 4V_B^{xoz} - 2(3) = 0$$

$$\boxed{V_B^{xoz} = 1,5t}$$

$$\sum M_{/B} = 0 \Rightarrow 4V_A^{xoz} - 2(1) = 0$$

$$\boxed{V_A^{xoz} = 0,5P}$$

$0 \leq x \leq 1m :$

$$M_{y(x)} = V_B^{xoz} \cdot x = 1,5x$$

Valeurs aux bornes:

$$x = 0 \rightarrow M_y = 0$$

$$x = 1m \rightarrow M_y = 1,5t \cdot m$$

$0 \leq x \leq 3m :$

$$M_{y(x)} = V_A^{xoz} \cdot x = 0,5x$$

Valeurs aux bornes:

$$x = 0 \rightarrow M_y = 0$$

$$x = 3m \rightarrow M_y = 1,5 t \cdot m$$

2) Dimensionnement de la section :

Les sections dangereuses sont A-A et B-B.

$$A - A: \begin{cases} M_y = 1t \cdot m \\ M_z = 1t \cdot m \end{cases}$$

$$B - B: \begin{cases} M_y = 1,5t \cdot m \\ M_z = 0,5t \cdot m \end{cases}$$

$$\sigma_{x_{max}} = \left| \frac{6M_y}{hb^2} + \frac{6M_z}{bh^2} \right| \leq \bar{\sigma}$$

Section A-A :

$$\sigma_{max} = \frac{6 \times 1 \cdot 10^5}{hb^2} + \frac{6 \times 1 \cdot 10^5}{bh^2} \leq 1500kg/cm^2$$

avec  $h = 1,5b$

$$\sigma_{max} = \frac{6 \times 1 \cdot 10^5}{1,5b^3} + \frac{6 \times 1 \cdot 10^5}{2,25b^3} = \frac{666\,666,67}{b^3} \leq 1500 \text{ kg/cm}^2$$

$$\rightarrow b_1 \geq \sqrt[3]{\frac{666\,666,67}{1500}} = 7,63 \text{ cm}$$

Section B-B :

$$\sigma_{max} = \frac{6 \times 1 \cdot 10^5}{hb^2} + \frac{6 \times 1 \cdot 10^5}{bh^2} \leq 1500 \text{ kg/cm}^2$$

avec  $h = 1,5b$

$$\sigma_{max} = \frac{6 \times 1,5 \cdot 10^5}{1,5b^3} + \frac{6 \times 0,5 \cdot 10^5}{2,25b^3} = \frac{733333,33}{b^3} \leq 1500 \text{ kg/cm}^2$$

$$\rightarrow b_2 \geq \sqrt[3]{\frac{733333,33}{1500}} = 7,87 \text{ cm}$$

Soit  $b \geq \max(b_1; b_2) = 7,87 \text{ cm}$

On prend  $b = 10 \text{ cm}$

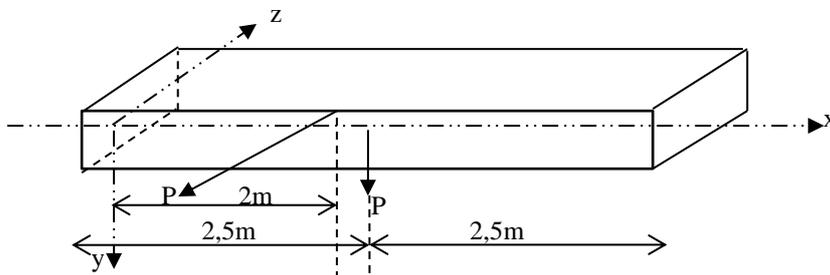
$h = 15 \text{ cm}$

### Exercice 3:

Soit une poutre doublement appuyée et chargée par  $P[t]$  dans les deux plans  $xoy$  et  $xoz$ .

- Tracer le diagramme des efforts internes.
- Précisez les positions des sections dangereuses.
- Déterminer la force maximale ( $P_{max}$ ) ayant comme valeur de contrainte maximale.

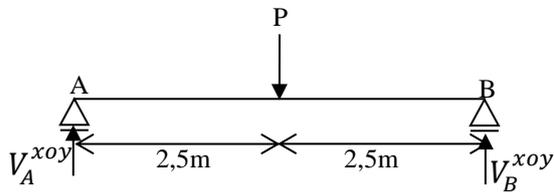
$[\bar{\sigma}] = 2000 \text{ kg/cm}^2$ .



*Solution :*

1) Diagrammes de M et T :

**Plan xoy :**



Par symétrie,  $V_A^{xoy} = V_B^{xoy} = \frac{P}{2} = 0,5P$

**$0 \leq x \leq 2,5m :$**

$$M_{z(x)} = V_A^{xoy} \cdot x$$

$$\rightarrow M_{z(x)} = 0,5P \cdot x$$

*Valeurs aux bornes:*

$$x = 0 \rightarrow M_z = 0$$

$$x = 2,5m \rightarrow M_z = 1,25P$$

$$T_y = V_A^{xoy} = 0,5P$$

**$0 \leq x \leq 2,5m :$**

$$M_z = V_B^{xoy} \cdot x$$

$$\rightarrow M_z = 0,5P \cdot x$$

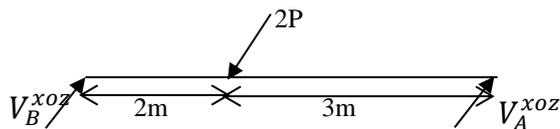
*Valeurs aux bornes:*

$$x = 0 \rightarrow M_z = 0$$

$$x = 2,5m \rightarrow M_z = 1,25P$$

$$T_y = -V_B^{xoy} = -0,5P$$

**Plan xoz :**



$$\sum F_v = 0 \Rightarrow V_A^{xoz} + V_B^{xoz} = 2P$$

$$\sum M/A = 0 \Rightarrow 5V_B^{xoz} - 2P(2) = 0$$

$$\boxed{V_B^{xoz} = 0,8P}$$

$$\sum M/B = 0 \Rightarrow 5V_A^{xoz} - 2P(3) = 0$$

$$V_A^{xoz} = 1,2P$$

$0 \leq x \leq 2m :$

$$M_{y(x)} = V_A^{xoz} \cdot x = 1,2P \cdot x$$

Valeurs aux bornes:

$$x = 0 \rightarrow M_y = 0$$

$$x = 2m \rightarrow M_y = 2,4P$$

$$T_z = V_A^{xoy} = 1,2P$$

$0 \leq x \leq 3m :$

$$M_z = V_B^{xoz} \cdot x = 0,8P \cdot x$$

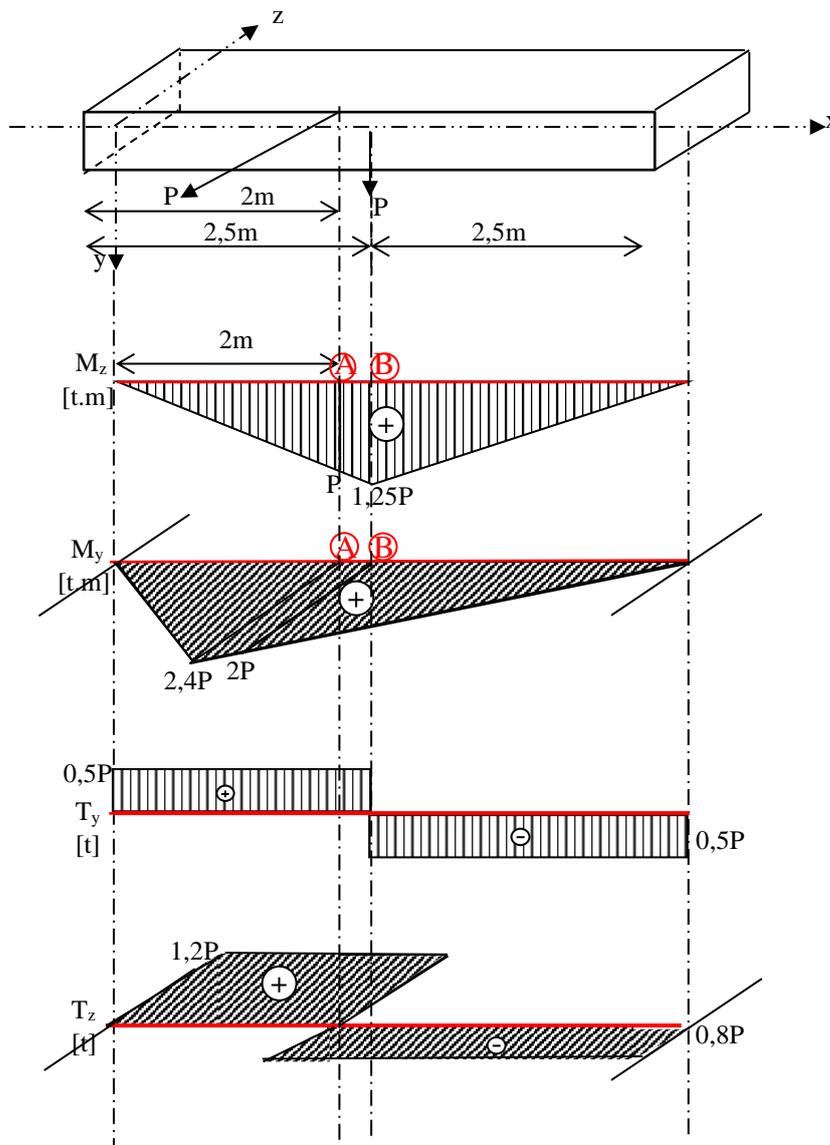
Valeurs aux bornes:

$$x = 0 \rightarrow M_z = 0$$

$$x = 3m \rightarrow M_z = 2,4P$$

$$T_z = -V_B^{xoy} = -0,8P$$

**Diagrammes:**



2) Position des sections dangereuses :

Les sections dangereuses se trouvent là où le moment fléchissant est maximum.

D'après les diagrammes des moments fléchissant dans les deux plans, nous avons deux sections dangereuses : section A-A et section B-B.

$$\text{Section A - A } (x = 2m) : \begin{cases} M_z(2) = P \\ M_y(2) = 2,4P \end{cases}$$

$$\text{Section B - B } (x = 2,5m) : \begin{cases} M_z(2,5) = 1,25P \\ M_y(2,5) = 2P \end{cases}$$

3) Calcul de  $P_{max}$  :

Les sections dangereuses sont A-A et B-B.

$$A - A : \begin{cases} M_y = 2,4P[t.m] \\ M_z = P[t.m] \end{cases} \qquad B - B : \begin{cases} M_y = 2P[t.m] \\ M_z = 1,25P[t.m] \end{cases}$$

$$\sigma_{x_{max}} = \left| \frac{6M_y}{hb^2} + \frac{6M_z}{bh^2} \right| \leq \sigma_{adm}$$

Section A-A :

$$\sigma_{x_{max}} = \frac{6 \times 2,4P \cdot 10^5}{20(10)^2} + \frac{6 \times P \cdot 10^5}{10(20)^2} \leq 2000kg/cm^2$$

$$\Rightarrow \boxed{P \leq 870 kg}$$

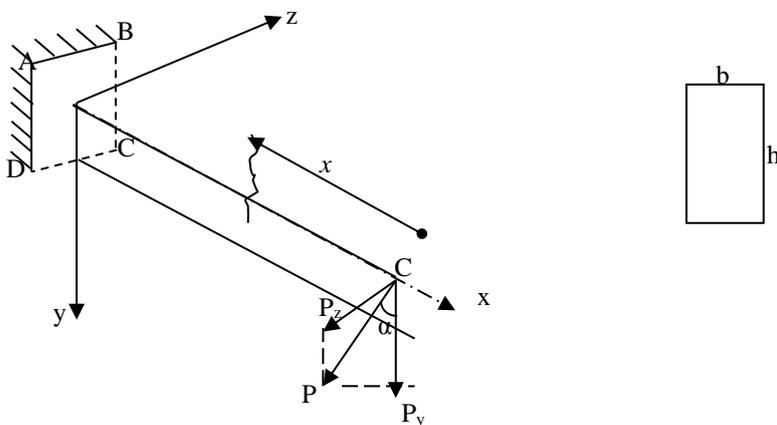
Section B-B :

$$\sigma_{x_{max}} = \frac{6 \times 2P \cdot 10^5}{20(10)^2} + \frac{6 \times 1,25P \cdot 10^5}{10(20)^2} \leq 2000kg/cm^2$$

$$\Rightarrow \boxed{P \leq 787,5 kg}$$

$$\boxed{\text{Soit } P = 787kg}$$

**Exercice 4 :** Soit la poutre représentée par la figure suivante :



- Déterminer les dimensions de la section de la poutre.
- Tracer le diagramme des contraintes normales.
- Calculer la flèche et la rotation à l'extrémité libre de la poutre (point C).

Données :

$$[\sigma_x^+] = [\sigma_x^-] = 120 \text{ kg/cm}^2.$$

$$b=2h ; P=1t ; \alpha =40^\circ ; l=1,00 \text{ m}$$

$$E = 12000 \text{ MPa.}$$

*Solution :*

1) Dimensionnement de la section de la poutre :

$$\begin{cases} P_y = P \cdot \cos \alpha = 1 \cdot 10^3 \cdot \cos 40^\circ = 766,04 \text{ kg} \\ P_z = P \cdot \sin \alpha = 1 \cdot 10^3 \cdot \sin 40^\circ = 642,8 \text{ kg} \end{cases}$$

**Plan xoy :**

$$T_y = P_y = 766,04 \text{ kg.}$$

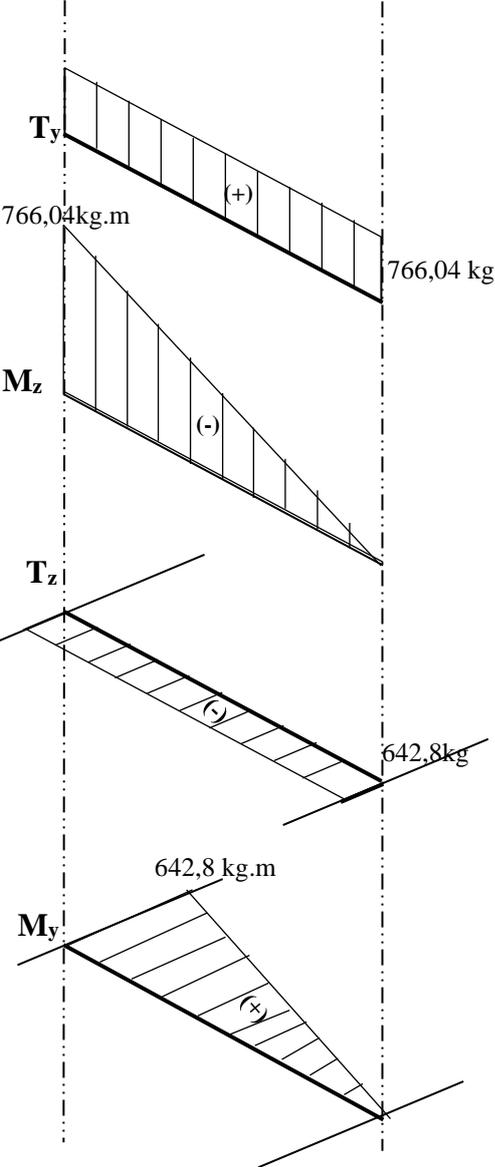
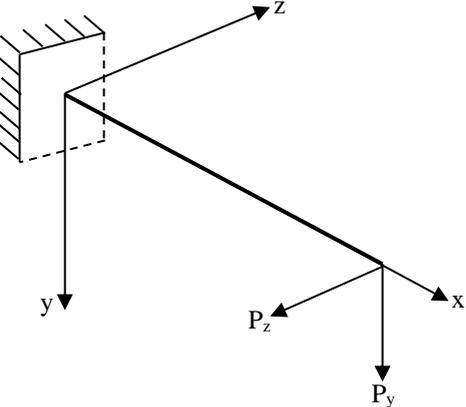
$$M_z = -P_y \cdot x = -766,04x \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow M_z = 0 \\ x = 1 \text{ m} \rightarrow M_z = -766,04 \text{ kg.m} \end{cases}$$

**Plan xoz :**

$$T_z = P_z = 642,8 \text{ kg.}$$

$$M_y = P_z \cdot x = 642,8x \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow M_y = 0 \\ x = 1 \text{ m} \rightarrow M_y = 642,8 \text{ kg.m} \end{cases}$$

*Diagrammes des efforts internes :*



*Interprétation des diagrammes:*

La section dangereuse est celle qui se trouve au niveau de l'encastrement ( $x=l$ ).

$$\begin{cases} M_z = -766,04 \text{ kg.m} \\ M_y = 642,8 \text{ kg.m} \\ T_z = 642,8 \text{ kg} \\ T_y = 766,04 \text{ kg} \end{cases}$$

La section étant rectangulaire :

$$\sigma_{x_{max}}^+ = \left| \frac{6M_y}{hb^2} + \frac{6M_z}{bh^2} \right| \leq [\sigma^+]$$

Avec  $b=2h$

$$\rightarrow \sigma_{x_{max}} = \frac{6M_y}{4h^3} + \frac{6M_z}{2h^3} \leq \sigma_{adm}$$

$$\rightarrow \sigma_{x_{max}} = \frac{3 \times 642,8 \times 10^2}{2h^3} + \frac{3 \times 766,04 \times 10^2}{h^3}$$

$$\rightarrow \sigma_{x_{max}} = \frac{3262,32 \cdot 10^2}{h^3} \leq 120 \text{ kg/cm}^2$$

$$h \geq \sqrt[3]{\frac{3262,32 \cdot 10^2}{120}} = 13,95 \text{ kg/cm}^2$$

soit  $h = 15 \text{ cm}$  et  $b = 7,5 \text{ cm}$ .

2) Diagramme des contraintes normales :

a) *Coordonnées des 4 points de la section d'encastrement:*

$$A \begin{cases} y = -\frac{h}{2} = -\frac{15}{2} = -7,5 \text{ cm} \\ z = -\frac{b}{2} = -\frac{7,5}{2} = -3,75 \text{ cm} \end{cases}$$

$$B \begin{cases} y = -\frac{h}{2} = -\frac{15}{2} = -7,5 \text{ cm} \\ z = +\frac{b}{2} = +\frac{7,5}{2} = +3,75 \text{ cm} \end{cases}$$

$$C \begin{cases} y = +\frac{h}{2} = +\frac{15}{2} = +7,5 \text{ cm} \\ z = +\frac{b}{2} = +\frac{7,5}{2} = +3,75 \text{ cm} \end{cases}$$

$$D \begin{cases} y = +\frac{h}{2} = +\frac{15}{2} = +7,5\text{cm} \\ z = -\frac{b}{2} = -\frac{7,5}{2} = -3,75\text{cm} \end{cases}$$

b) Calcul des contraintes dans la section dangereuse :

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} Z + \frac{M_z}{I_z} Y$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{15(7,5)^3}{12} = 527,34\text{cm}^4$$

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{7,5(10)^3}{12} = 625\text{cm}^4$$

$$\begin{cases} \sigma_{xA} = \frac{642,8}{527,34}(-3,75) - \frac{766,04}{625}(-7,5) = 4,62 \text{ bars} \\ \sigma_{xB} = \frac{642,8}{527,34}(+3,75) - \frac{766,04}{625}(-7,5) = 13,76 \text{ bars} \\ \sigma_{xC} = \frac{642,8}{527,34}(+3,75) - \frac{766,04}{625}(+7,5) = -4,62 \text{ bars} \\ \sigma_{xD} = \frac{642,8}{527,34}(-3,75) - \frac{766,04}{625}(+7,5) = -13,76 \text{ bars} \end{cases}$$

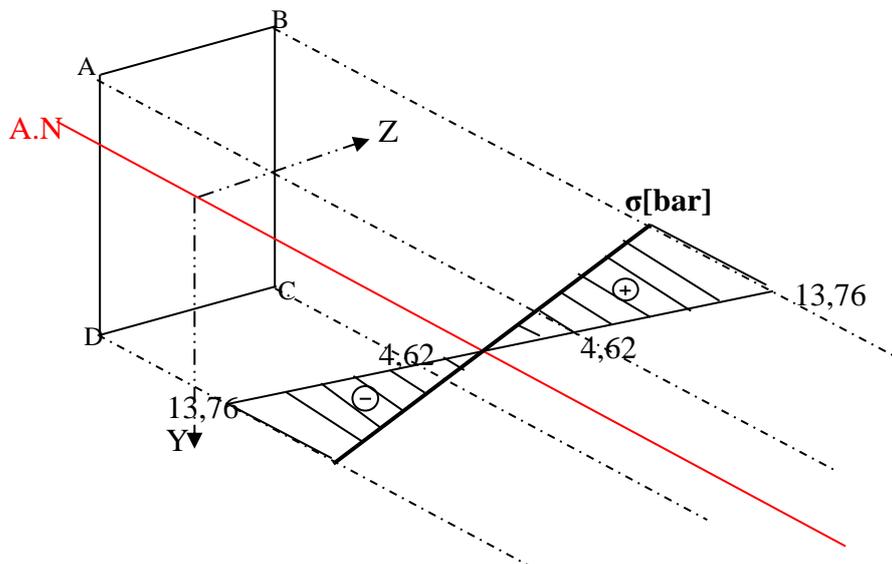
c) Position de l'axe neutre :

$$\frac{M_y}{I_y} Z_0 + \frac{M_z}{I_z} Y_0 = 0$$

$$Y_0 = -\frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{I_z}{I_y} \cdot Z_0 = \frac{642,8}{-766,04} \cdot \frac{625}{527,34} Z_0 = -1 \cdot Z_0$$

$$\begin{cases} Z_0 = -3,75\text{cm} \rightarrow Z_0 = 3,75 \text{ cm} \\ Z_0 = +3,75\text{cm} \rightarrow Z_0 = -3,75 \text{ cm} \end{cases}$$

d) Diagramme des contraintes de la section d'encastrement :



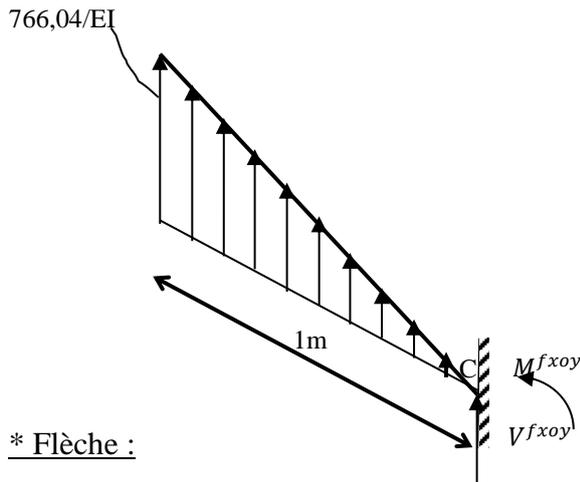
3) Calcul des déplacements :

$$\begin{cases} v_C = \sqrt{(v_C^{xoy})^2 + (v_C^{xoz})^2} : \text{flèche} \\ \theta_C = \sqrt{(\theta_C^{xoy})^2 + (\theta_C^{xoz})^2} : \text{Rotation} \end{cases}$$

On va utiliser les trois méthodes évoquées dans le chapitre V :

a) **Poutre conjuguée :**

Plan xoy :



\* Flèche :

$$v_C^{xoy} = M^{f^{xoy}} = \sum M_{/C} = \left( \frac{766,04 \cdot 10^2}{EI_z} \times \frac{1 \cdot 10^2}{2} \right) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 10^2 \right)$$

Avec  $E = 12000 \text{ MPa} = 1,2 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$ .

$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{7,5(15)^3}{12} = 2\,109,375 \text{ cm}^4$$

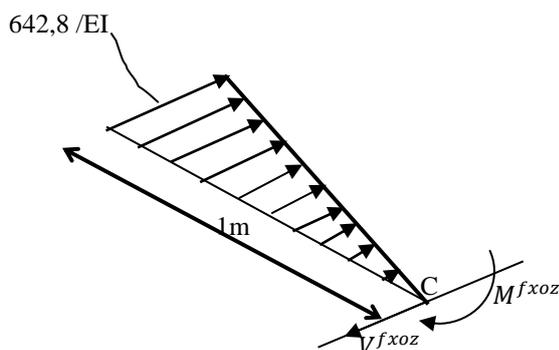
$$\rightarrow v_C^{xoy} = 0,01 \text{ cm}$$

\* Rotation :

$$\theta_C^{xoy} = -V^{f^{xoy}} = - \left( - \frac{766,04 \cdot 10^2}{EI_z} \times \frac{1 \cdot 10^2}{2} \right)$$

$$\rightarrow \theta_C^{xoy} = 1,51 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$$

Plan xoz :



\* Flèche :

$$v_C^{xoz} = M^{fxoz} = \sum M/c = \left( -\frac{642,8 \cdot 10^2}{EI_y} \times \frac{1 \cdot 10^2}{2} \right) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 10^2 \right)$$

$$E = 1,2 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2.$$

$$I_y = \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{15(7,5)^3}{12} = 527,34 \text{ cm}^4$$

$$\rightarrow v_C^{xoz} = -8,46 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$$

\* Rotation :

$$\theta_C^{xoy} = V^{fxoz} = \left( -\frac{642,8 \cdot 10^2}{EI_y} \times \frac{1 \cdot 10^2}{2} \right)$$

$$\rightarrow \theta_C^{xoy} = 1,26 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$$

Finalement la flèche et la rotation au point C sont égales à :

$$\begin{cases} v_C = \sqrt{(1 \cdot 10^{-2})^2 + (-8,46 \cdot 10^{-3})^2} \\ \theta_C = \sqrt{(1,51 \cdot 10^{-2})^2 + (1,26 \cdot 10^{-2})^2} \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{cases} v_C = 1,31 \cdot 10^{-2} \text{ cm} \\ \theta_C = 1,97 \cdot 10^{-2} \text{ rad} \end{cases}}$$

**b) Méthode de l'intégration de l'équation de la ligne élastique :**

*Plan xoy :*

\* Flèche :

$$M_z(x) = -766,04x \text{ (moment de flexion suivant le plan xoy)}$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M_z(x)}{EI_z} = \frac{766,04x}{EI_z}$$

$$\theta(x) = \frac{dv}{dx} = \int \frac{766,04x}{EI_z} dx$$

$$\theta(x) = \frac{383,02 \cdot x^2}{EI_z} + C_1$$

$$\rightarrow v(x) = \frac{127,67 \cdot x^3}{EI_z} + C_1x + C_2$$

Déterminons les constantes d'intégration à partir des conditions aux limites :

$$x = 100 \text{ cm} \rightarrow \begin{cases} \theta(100) = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{383,02 \cdot 10^2}{EI} \\ v(100) = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{255,34 \cdot 10^2}{EI} \end{cases}$$

donc finalement les expressions de  $\theta(x)$  et  $v(x)$  s'écrivent sous la forme :

$$\theta(x) = \frac{383,02 \cdot x^2}{EI_z} - \frac{383,02 \cdot 10^2}{EI}$$

$$v(x) = \frac{127,67 \cdot x^3}{EI_z} - \frac{383,02}{EI}x + \frac{255,34 \cdot 10^2}{EI}$$

$$\begin{cases} \theta_C^{xoy} = \theta(0) = -1,51 \cdot 10^{-2} \text{ rad} \\ v_C^{xoy} = v(0) = 1 \cdot 10^{-2} \text{ cm} \end{cases}$$

Plan xoz :

\* Flèche :

$M_y(x) = 642,8x$  (moment de flexion suivant le plan xoz)

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M_z(x)}{EI_z} = -\frac{642,8x}{EI_z}$$

$$\theta(x) = \frac{dv}{dx} = \int -\frac{642,8x}{EI_z} dx$$

$$\theta(x) = -\frac{321,4x^2}{EI_z} + C_1$$

$$\rightarrow v(x) = -\frac{107,13x^3}{EI_z} + C_1x + C_2$$

$$x = 100\text{cm} \rightarrow \begin{cases} \theta(100) = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{321,4 \cdot 10^2}{EI} \\ v(100) = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{214,27 \cdot 10^2}{EI} \end{cases}$$

donc finalement les expressions de  $\theta(x)$  et  $v(x)$  s'écrivent sous la forme :

$$\theta(x) = -\frac{321,4x^2}{EI_z} + \frac{321,4 \cdot 10^2}{EI}$$

$$v(x) = -\frac{107,13x^3}{EI_z} + \frac{321,4 \cdot 10^2}{EI}x - \frac{214,27 \cdot 10^2}{EI}$$

$$\begin{cases} \theta_C^{xoy} = \theta(0) = 1,26 \cdot 10^{-2} \text{ rad} \\ v_C^{xoy} = v(0) = 8,46 \cdot 10^{-3} \text{ cm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_C = \sqrt{(1 \cdot 10^{-2})^2 + (8,46 \cdot 10^{-3})^2} \\ \theta_C = \sqrt{(-1,51 \cdot 10^{-2})^2 + (1,26 \cdot 10^{-2})^2} \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{cases} v_C = 1,31 \cdot 10^{-2} \text{ cm} \\ \theta_C = 1,97 \cdot 10^{-2} \text{ rad} \end{cases}}$$

a) **Méthode des paramètres initiaux :**

Plan xoy :

\* Flèche :

$V_y = P_y = 766,04 \text{ kg}$  (réaction verticale au niveau de l'encastrement)

$M = 766,04 \text{ kg.m}$  (moment d'encastrement)

$M_z(x) = -766,04 + 766,04x$

$$* EI_x y''(x) = 766,04 - 766,04x$$

$$* EI_x \theta(x) = EI\theta_0 + 766,04x - 766,04 \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$* EI_x v(x) = EIv_0 + EI\theta_0 \cdot x + 766,04 \cdot \frac{x^2}{2} - 766,04 \cdot \frac{x^3}{6}$$

Au niveau de l'encastrement, nous avons:  $\begin{cases} v_0 = 0 \\ \theta_0 = 0 \end{cases}$

donc finalement les expressions de  $\theta(x)$  et  $v(x)$  s'écrivent sous la forme :

$$\theta(x) = \frac{766,04x}{EI_z} - \frac{383,02 \cdot x^2}{EI_z}$$

$$v(x) = \frac{383,02 \cdot x^2}{EI_z} - \frac{127,67x^3}{EI_z}$$

$$\begin{cases} \theta_C^{xoy} = \theta(100cm) = 1,51 \cdot 10^{-2} \text{ rad} \\ v_C^{xoy} = v(100cm) = 1 \cdot 10^{-2} \text{ cm} \end{cases}$$

Plan  $xoz$  :

\* Flèche :

$$V_z = P_z = 642,8 \text{ kg (réaction verticale au niveau de l'encastrement)}$$

$$M = 642,8 \text{ kg.m (moment d'encastrement)}$$

$$M_y(x) = -642,8 + 642,8 x$$

$$* EI_x y''(x) = 642,8 - 642,8 x$$

$$* EI_x \theta(x) = EI\theta_0 + 642,8 x - 642,8 \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$* EI_x v(x) = EIv_0 + EI\theta_0 \cdot x + 642,8 \cdot \frac{x^2}{2} - 642,8 \cdot \frac{x^3}{6}$$

Au niveau de l'encastrement, nous avons:  $\begin{cases} v_0 = 0 \\ \theta_0 = 0 \end{cases}$

donc finalement les expressions de  $\theta(x)$  et  $v(x)$  s'écrivent sous la forme :

$$\theta(x) = \frac{642,8 x}{EI_z} - \frac{321,4 \cdot x^2}{EI_z}$$

$$v(x) = \frac{321,4x^2}{EI_z} - \frac{107,13x^3}{EI_z}$$

$$\begin{cases} \theta_C^{xoy} = \theta(100cm) = 1,26 \cdot 10^{-2} \text{ rad} \\ v_C^{xoy} = v(100cm) = 8,46 \cdot 10^{-3} \text{ cm} \end{cases}$$

$$v_C = \sqrt{(1 \cdot 10^{-2})^2 + (8,46 \cdot 10^{-3})^2}$$

$$\theta_C = \sqrt{(1,51 \cdot 10^{-2})^2 + (1,26 \cdot 10^{-2})^2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} v_C = 1,31 \cdot 10^{-2} \text{ cm} \\ \theta_C = 1,97 \cdot 10^{-2} \text{ rad} \end{cases}$$

## **TREILLIS ISOSTATIQUES**

**VII.1/ Définition :**

On appelle treillis toute structure formée par un assemblage de pièces rectilignes articulées entre-elles et formant des triangles juxtaposés (figures V.1).

- Les pièces rectilignes s'appellent **barres**.
- Les sommets des triangles formés par les barres s'appellent **nœuds**. Ces derniers sont constitués par des articulations ou rotules.

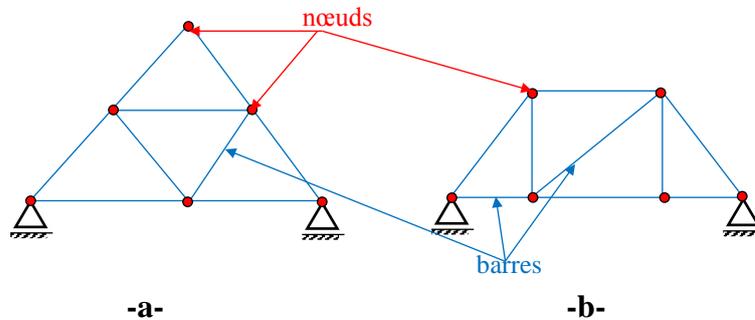


Figure VII.1

**VII.2/ Hypothèses de calcul :**

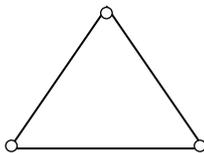
- 1- Les forces extérieures sont axiales (traction ou compression) et appliquées aux nœuds seulement.
- 2- Le poids propre des barres est négligeable par rapport aux forces extérieures.
- 3- Les barres constituant le treillis sont considérées comme rigides et indéformables.
- 4- Les barres sont articulées entre-elles sans frottement aux nœuds.
- 5- Les liaisons des barres sont des articulations parfaites.

**VII.3/ Treillis isostatiques :**

- a) **Intérieurement :** on dit qu'un treillis est isostatique intérieurement si le nombre de barres est égale à deux fois le nombre de nœuds moins trois. Soit,  $b = 2n - 3$ .

**Démonstration :**

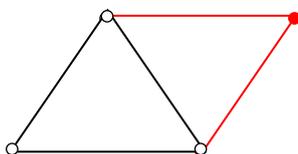
- 1- On construit un premier triangle avec trois barres articulées ;



$$b=3$$

$$n=3$$

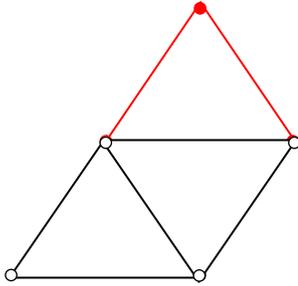
- 2- On agrandit le premier système par juxtaposition d'un autre triangle, on obtient alors :



$$b=3+2=5$$

$$n=3+1=4$$

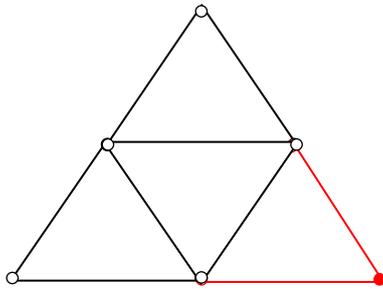
3- On ajoute un autre triangle aux deux autres triangles, on obtient alors :



$$b=5+2=7$$

$$n=4+1=5$$

4- En agrandissant encore le système avec l'ajout d'un autre triangle, on obtient :



$$b=7+2=9$$

$$n=5+1=6$$

On constate qu'à chaque fois qu'on ajoute un triangle, on ajoute deux barres et un nœud.

De manière générale, si on ajoute  $x$  triangle(s), on ajoute  $x$  nœud(s) et  $2x$  barres.

donc:

$$\mathbf{n = 3 + x \dots V.1}$$

$n$  : nombre de nœuds du système complet.

$3$  : nombre de nœuds du 1<sup>er</sup> triangle.

$x$  : nombre de nœud(s) ou triangle(s) ajouté(s).

$$\mathbf{b = 3 + 2x \dots V.2}$$

$b$  : nombre de barres du système complet.

$3$  : nombre de barres du 1<sup>er</sup> triangle.

$x$  : nombre de nœuds (ou triangles) ajoutés.

On soustrait de l'équation V.2, 2 fois l'équation V.1 et ce pour éliminer les  $x$ , ce qui donne :

$$b-2n = 3+2x-2.3-2x$$

$$\rightarrow b = 2n-3$$

- b) **Extérieurement** : un treillis est isostatique extérieurement, si le nombre d'inconnues (réactions aux appuis) est égale au nombre d'équations.

$$n_{eq} = n_i.$$

#### **VII.4/ Calcul des efforts internes dans les barres :**

Le calcul des efforts internes dans les barres d'un treillis peut se faire selon deux méthodes :

- 1- Méthode d'isolement des nœuds (méthode analytique).
- 2- Méthode de Ritter, appelée méthode des sections (méthode analytique).
- 3- Méthode de CREMONA (méthode graphique).

Les méthodes graphiques sont de moins en moins utilisées donc nous allons nous intéresser uniquement aux deux premières méthodes.

##### **VII.4.1/ Méthode des nœuds :**

Cette méthode consiste à calculer les efforts internes dans chaque nœud en appliquant les équations universelles de l'équilibre statique. Le nœud considéré est isolé du système et soumis à l'action simultanée des efforts internes et des forces extérieures (y compris les réactions d'appuis).

**N.B : on commence toujours par le nœud ayant le minimum d'inconnues (au plus 2 inconnues puisque nous disposons uniquement de deux équations d'équilibre).**

**Généralement c'est le nœud d'extrémité ou d'appui du treillis qui a le moins d'inconnues.**

##### **VII.4.2/ Méthode des sections (méthode de Ritter):**

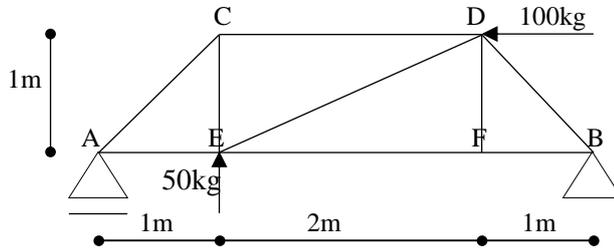
Cette méthode consiste à faire une section qui divise le treillis en deux parties et qui coupe les barres dont on souhaite calculer les efforts, puis appliquer les équations d'équilibre statique sur une des deux parties pour calculer les efforts inconnus en tenant compte des forces extérieures appliquées, y compris les réactions.

La section doit compter trois barres d'efforts inconnus (car on a 3 équations d'équilibre statique) sinon prévoir une autre section afin de réduire le nombre d'inconnus.

**EXERCICES**

**Exercice 1 :**

En utilisant la méthode des nœuds, calculer les efforts dans les barres du treillis suivant :



**Solution :**

**a) Vérification de l'isostatisme du système :**

**\* Intérieurement :**

$$b = 2n - 3$$

$$b = 9 \text{ (barres AC, CD, DB, BF, FD, FE, EA, EC, ED).}$$

$$n = 6 \text{ (nœuds A, B, C, D, E, F)}$$

$$2n - 3 = 2(6) - 3 = 9 = b \rightarrow \text{le treillis est isostatique intérieurement.}$$

**\* Extérieurement :**

$$\left. \begin{aligned} n_{eq} &= n_i \\ n_{eq} &= 3 \text{ (}\sum F_x=0, \sum F_y=0, \sum M=0\text{)}. \\ n_i &= 3 \text{ (}V_A, V_B, H_B\text{)}. \end{aligned} \right\} \text{Le système est isostatique extérieurement}$$

**b) Calcul des réactions :**

$$\sum F_{/x} = 0 \Rightarrow H_B = 100 \text{ kg}$$

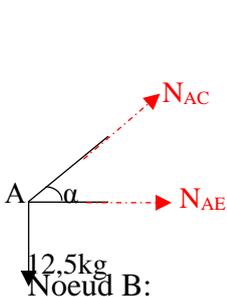
$$\sum F_{/y} = 0 \Rightarrow V_A + V_B = -50 \text{ kg}$$

$$\sum M_{/A} = 0 \Rightarrow 4V_B = -(50 \times 1) - (100 \times 1) \Rightarrow V_B = -37,5 \text{ kg}$$

$$\sum M_{/B} = 0 \Rightarrow 4V_A = -(50 \times 3) + (100 \times 1) \Rightarrow V_A = -12,5 \text{ kg}$$

**c) Calcul des efforts:**

**Noeud A:**



$$tg\alpha = \frac{1}{1} \rightarrow \alpha = 45^\circ$$

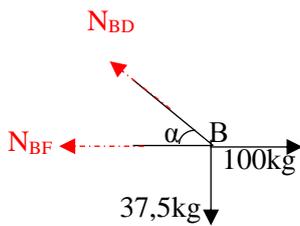
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{AC} \cdot \sin\alpha - 12,5 = 0 \Rightarrow$$

$$N_{AC} = 17,67 \text{ kg (traction)}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_{AE} + N_{AC} \cdot \cos\alpha = 0 \Rightarrow N_{AE} = -N_{AC} \cos\alpha$$

$$\Rightarrow N_{AE} = -12,5 \text{ kg (compression)}$$





$$\text{tg } \alpha = \frac{1}{1} \rightarrow \alpha = 45^\circ$$

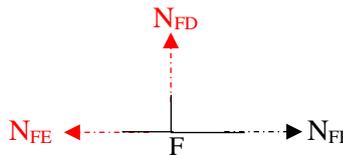
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{BD} \sin \alpha = 37,5 \Rightarrow$$

$$N_{BD} = 53,03 \text{ kg (traction)}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_{BF} + N_{BD} \cos \alpha = 100 \Rightarrow N_{BF} = -N_{BD} \cos \alpha + 100$$

$$\Rightarrow N_{BF} = 62,5 \text{ kg (traction)}$$

Noeud F:



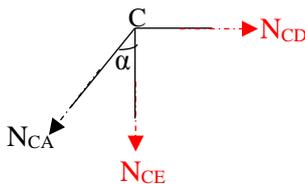
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow$$

$$N_{FD} = 0$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_{FE} = N_{FB}$$

$$N_{FE} = 62,5 \text{ kg (traction)}$$

Noeud C:



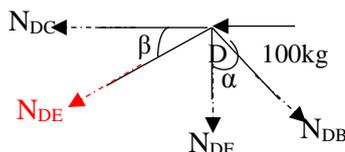
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{CA} \cos \alpha + N_{CE} = 0 \Rightarrow N_{CE} = -N_{CA} \cos \alpha$$

$$N_{CE} = -12,5 \text{ kg (compression)}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_{CD} - N_{CA} \sin \alpha = 0 \Rightarrow N_{CD} = N_{CA} \sin \alpha$$

$$\Rightarrow N_{CD} = 12,5 \text{ kg (traction)}$$

Noeud D:



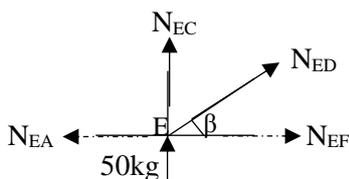
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_{DB} \cdot \sin \alpha - 100 - N_{DC} - N_{DE} \cdot \cos \beta = 0$$

$$\Rightarrow N_{DE} = -83,85 \text{ kg (compression)}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{DE} \cdot \sin \beta + N_{DB} \cdot \cos \alpha + N_{DF}$$

$$N_{DE} = -83,85 \text{ kg (compression)}$$

Noeud E: au niveau de ce noeud, tous les efforts sont déjà calculés, donc on va s'en servir pour vérifier les résultats obtenus.



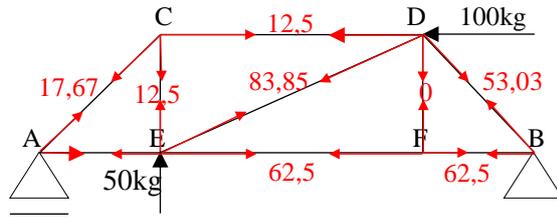
$$\sum F_x = N_{ED} \cos \beta + N_{EF} - N_{EA} = -83,85 \cos \beta + 62,5$$

$$+12,5 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{ED} \sin \beta + N_{EC} + 50 = -83,85 \sin \beta - 12,5$$

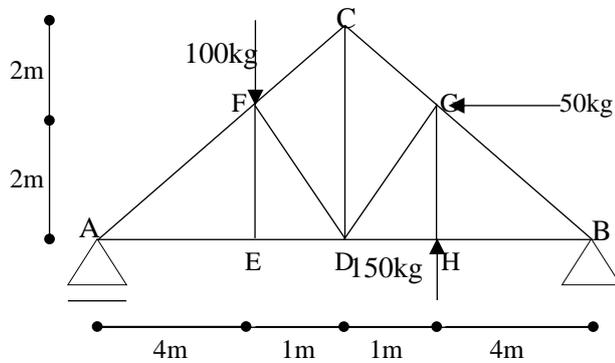
$$+50 = 0$$

Récapitulatif :



**Exercice 2 :**

Soit le treillis ci-dessous. On demande de calculer les efforts dans les barres  $N_{CD}$  et  $N_{CJ}$  par la méthode des sections.



***Solution :***

**a) Vérification de l'isostatisme du système :**

\* Intérieurement :

$$b = 2n - 3$$

$$b = 13$$

$$n = 8 \text{ (noeuds A, B, C, D, E, F)}$$

$$2n - 3 = 2(8) - 3 = 13 = b \rightarrow \text{le treillis est isostatique intérieurement.}$$

\* Extérieurement :

$$n_{eq} = n_i.$$

$$n_{eq} = 3 \text{ (}\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum M = 0\text{)}.$$

$$n_i = 3 \text{ (}V_A, V_B, H_B\text{)}.$$

} Le système est isostatique extérieurement

**b) Calcul des réactions :**

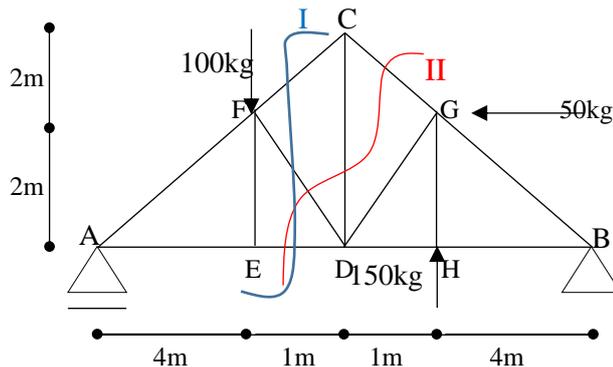
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_B = 50 \text{ kg}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 10V_B = -(50 \times 2) - (150 \times 6) + (100 \times 4) \Rightarrow V_B = -60 \text{ kg}$$

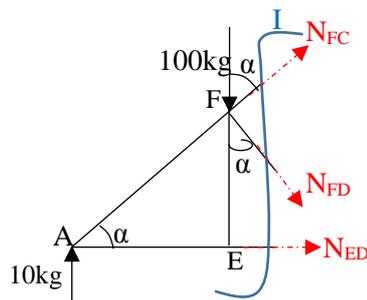
$$\sum M_{/B} = 0 \Rightarrow 10V_A = (50 \times 2) - (150 \times 4) + (100 \times 6) \Rightarrow V_A = 10 \text{ kg}$$

### c) Calcul des efforts :

La section qui fait apparaître les efforts  $N_{CD}$  et  $N_{CJ}$  est la section II, cependant, cette section coupe 4 barres d'efforts inconnus, donc, afin de réduire le nombre de ces inconnus, on ajoute une autre section qui doit couper au moins une de ces 4 barres, c'est la section I. Cette section coupe 3 barres dont 2 apparaissent dans la section II (barres FD et ED), ainsi, on réduit le nombre d'inconnus de 4 à 2 seulement.



\* Section I : cette section coupe 3 barres d'efforts inconnus (FC, FD, ED).



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 26,56^\circ$$

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow 2N_{ED} = 10 \times 4 \Rightarrow N_{ED} = 20 \text{ kg}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_{FC} \sin \alpha + N_{FD} \sin \alpha + N_{ED} = 0$$

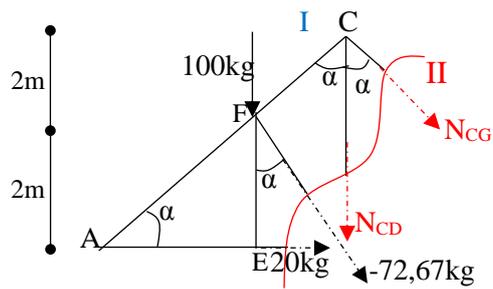
$$\Rightarrow N_{FC} \sin \alpha + N_{FD} \sin \alpha = -20 \Rightarrow N_{FC} = -N_{FD} - \frac{20}{\sin \alpha}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{FC} \cos \alpha - N_{FD} \cos \alpha = 100 - 10 \Rightarrow -\frac{20}{\sin \alpha} \cos \alpha - 2N_{FD} \cos \alpha = 90$$

$$N_{FD} = -72,67 \text{ kg (compression)}$$

$$\rightarrow N_{FC} = 72,67 - \frac{20}{\sin \alpha} = 28 \text{ kg (traction)}$$

\* Section II :



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_{CG} \sin \alpha = 72,67 \cdot \sin \alpha - 20$$

$$\Rightarrow N_{CG} = 28 \text{ kg (traction)}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{CD} + N_{CG} \cos \alpha - 72,67 \cdot \cos \alpha + 100 - 10 = 0$$

$$\Rightarrow N_{CD} = -28 \cos \alpha + 72,67 \cdot \cos \alpha - 90$$

$$\Rightarrow N_{CD} = -50 \text{ kg (compression)}$$

## **PORTIQUES PLANS ISOSTATIQUES**

**VIII.1/ Introduction :**

On appelle portique plan, tout système constitué d'éléments verticaux appelés *poteaux* et d'éléments horizontaux appelés *poutres* ou *traverses* reliés entre eux par des nœuds relativement rigides (voir figure VIII.1).

Dans ce chapitre, nous nous intéressons uniquement à l'analyse des portiques plans isostatiques. Un portique est dit isostatique, si les trois équations d'équilibre statique sont suffisantes pour déterminer les réactions d'appuis ainsi que les efforts internes (M, N, T).

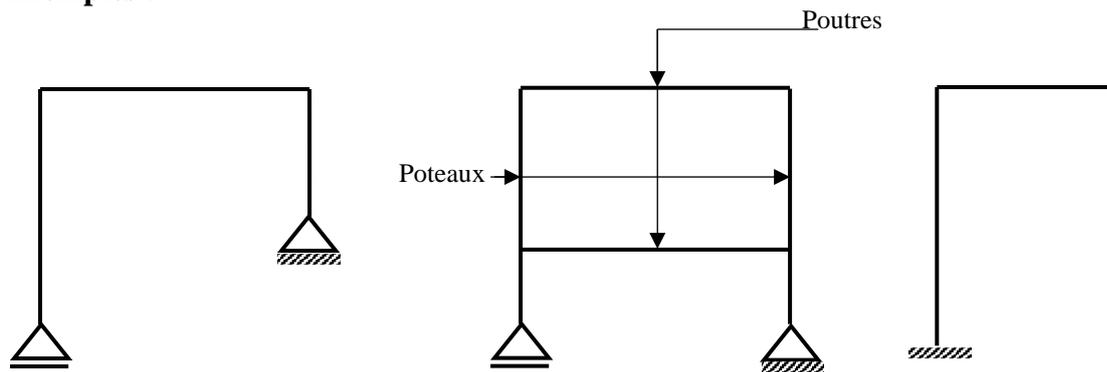
**Exemples :**

Figure VIII.1

**VIII.2/ Degré d'hyperstaticité :**

On appelle système hyperstatique, les systèmes pour lesquels les facteurs de force agissant dans leurs éléments ne peuvent pas être déterminés à partir uniquement des équations d'équilibre d'un corps solide (nombre d'inconnues supérieur au nombre d'équations d'équilibre). De tels systèmes comportent plus de liaisons qu'il n'en faut pour leur équilibre.

Ces liaisons sont appelées *surabondantes ou supplémentaires* et elles peuvent être *extérieures* et/ou *intérieures*.

- a) **Liaisons surabondantes extérieures :** ces liaisons sont liées au nombre de réactions d'appuis ; dans ce cas on parle d'*hyperstaticité externe*.
- b) **Liaisons surabondantes intérieures :** ces liaisons sont liées au nombre d'efforts internes qui apparaissent en ouvrant les contours fermés du système; dans ce cas on parle d'*hyperstaticité interne*.

Le degré d'hyperstaticité peut être déterminé suivant deux méthodes :

**VIII.2.a/ Méthode d'élimination des liaisons surabondantes :**

Cette méthode consiste à éliminer les liaisons surabondantes afin de transformer le système en un système isostatique. Donc le degré d'hyperstaticité n'est autre que le nombre de liaisons surabondantes. Celui-ci peut être déterminé suivant la formule suivante :

$$d = n_i - n_{eq} \text{ où :}$$

$d$  : degré d'hyperstaticité ;

$n_i$  : nombre d'inconnues ;

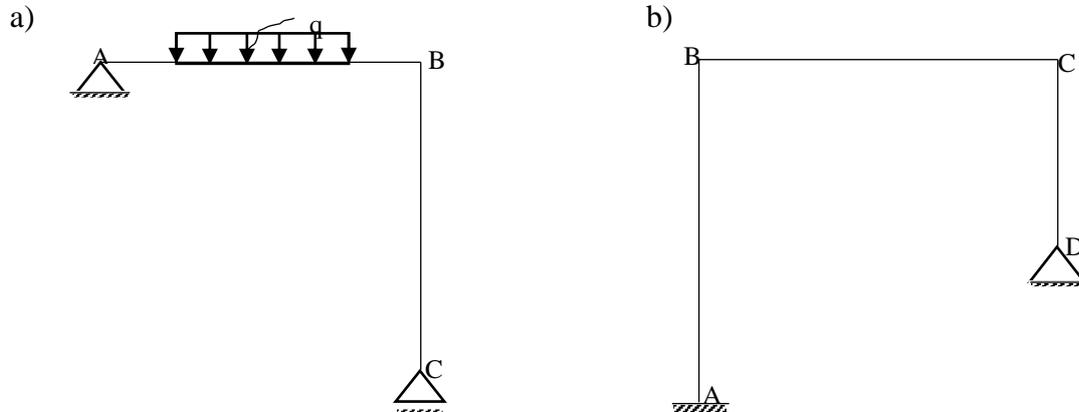
$n_{eq}$  : nombre d'équations d'équilibre statique.

**Remarques :**

- Si le degré d'hyperstaticité est nul c'est-à-dire, le nombre d'équations d'équilibre est égale au nombre d'inconnues, le système est *isostatique*.
- Si le degré d'hyperstaticité est supérieur à 0, c'est-à-dire le nombre d'inconnues est supérieur au nombre d'équations ; le système est *hyperstatique extérieurement*.

**Exemple :**

Déterminons le degré d'hyperstaticité des systèmes suivants :



**Figure VIII.2**

**Figure VIII.2.a :**

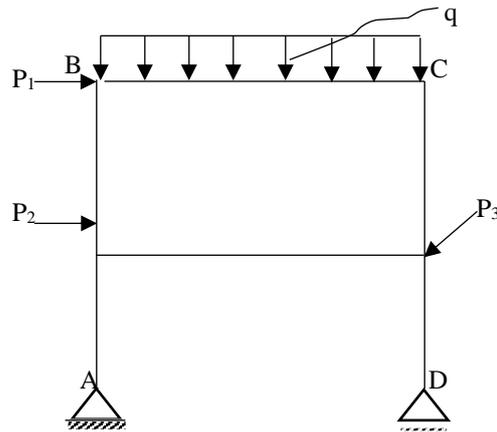
Le portique de cette figure possède 3 inconnues (2 réactions au niveau de l'appui A et 1 réaction au niveau de l'appui C) donc le degré d'hyperstaticité est égal à :  $d = 3 - 3 = 0$  ; ce système est donc, isostatique.

**Figure VIII.2.b :**

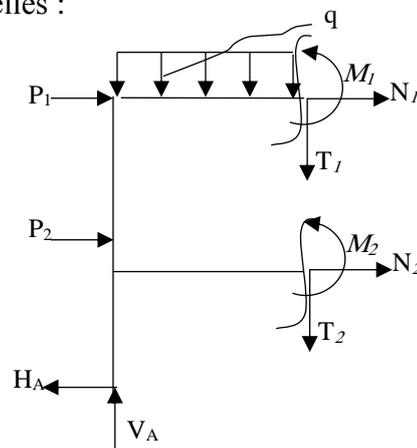
Le portique de cette figure possède 5 inconnues (3 réactions au niveau de l'appui A et 2 réactions au niveau de l'appui D) donc le degré d'hyperstaticité est égal à :  $d = 5 - 3 = 2$  ; ce système est donc, hyperstatique à 2 degrés.

**VIII.2.b/ Méthode des contours fermés :**

Déterminons le degré d'hyperstaticité du portique suivant :

**Figure VIII.3**

Il est clair que les réactions des appuis A et D ( $V_A$ ,  $H_A$  et  $V_D$ ) peuvent être déterminées aisément à l'aide des trois équations d'équilibre statique. Coupons le portique en deux parties et considérons l'équilibre de chacune d'elles :



En coupant le portique, on remarque que nous avons 6 efforts internes inconnus qui ne peuvent être déterminés à partir des équations d'équilibre statique. Donc ce portique constitue un système hyperstatique d'ordre 3 ( $d=3$ ) car chaque contour fermé (non articulé) est hyperstatique à 3 degrés.

D'une manière générale, le degré d'hyperstaticité d'un système plan peut être déterminé suivant la formule suivante :

$$d = 3c - a - 2s \text{ où :}$$

$d$  : degré d'hyperstaticité ;

$c$  : nombre de contours du système ;

$a$  : nombre d'appuis doubles ;

$s$  : nombre d'appuis simples

En appliquant cette formule, on obtient pour cet exemple :

$$d = (3 \times 2) - 1 - (2 \times 1) = 3$$

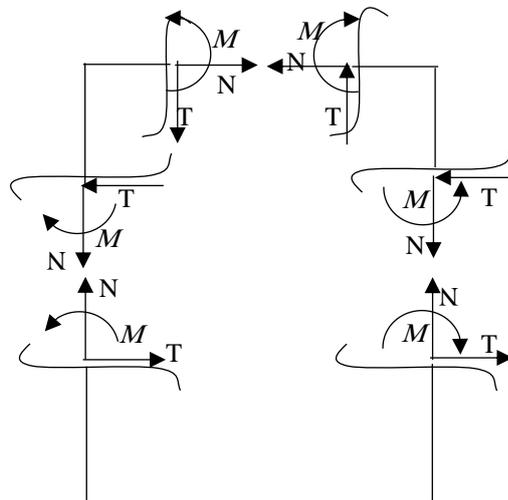
Pour l'exemple VIII.2.a, on obtient :

$$d = (3 \times 1) - 1 - (2 \times 1) = 0$$

Pour l'exemple VIII.2.B, on obtient :

$$d = (3 \times 1) - 1 - (2 \times 0) = 2$$

### VIII.3/ Convention de signe :



### VIII.4/ Détermination des efforts internes :

Les efforts internes, dans le cas de portiques plans isostatiques, sont déterminés à l'aide de la méthode des sections.

#### Exemple :

On se propose de calculer les efforts internes ( $M$ ,  $N$ ,  $T$ ) agissant dans les éléments du portique de la figure VIII.4.

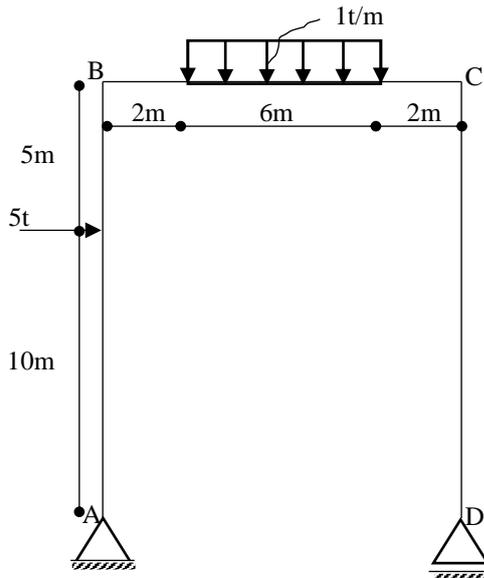


Figure VIII.4

**Solution :**

**1- Degré d'hyperstaticité :**

$$d = 3c - a - 2s = (3 \times 1) - 1 - (2 \times 1) = 0$$

$d=0 \Rightarrow$  le système est isostatique.

**2- Calcul des réactions :**

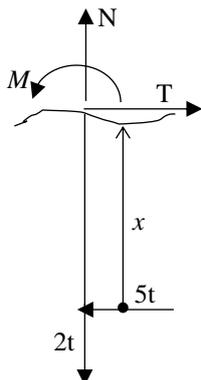
$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = 5t \\ V_A + V_D = 1 \times 6 = 6t \\ 10V_D - (1 \times 6) \left(\frac{6}{2} + 2\right) - (5 \times 10) = 0 \\ 10V_A - (5 \times 10) - (1 \times 6) \left(\frac{6}{2} + 2\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} H_D = 5t \\ V_A = -2t \\ V_D = 8t \end{cases}$$

**3- Calcul des efforts internes (M, N et T) :**

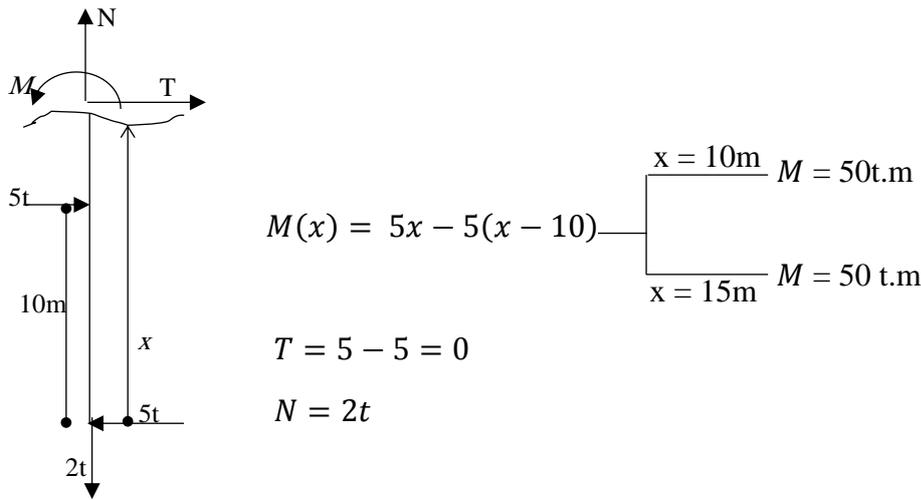
Travée AB :

- Section I :  $0 \leq x \leq 10m$



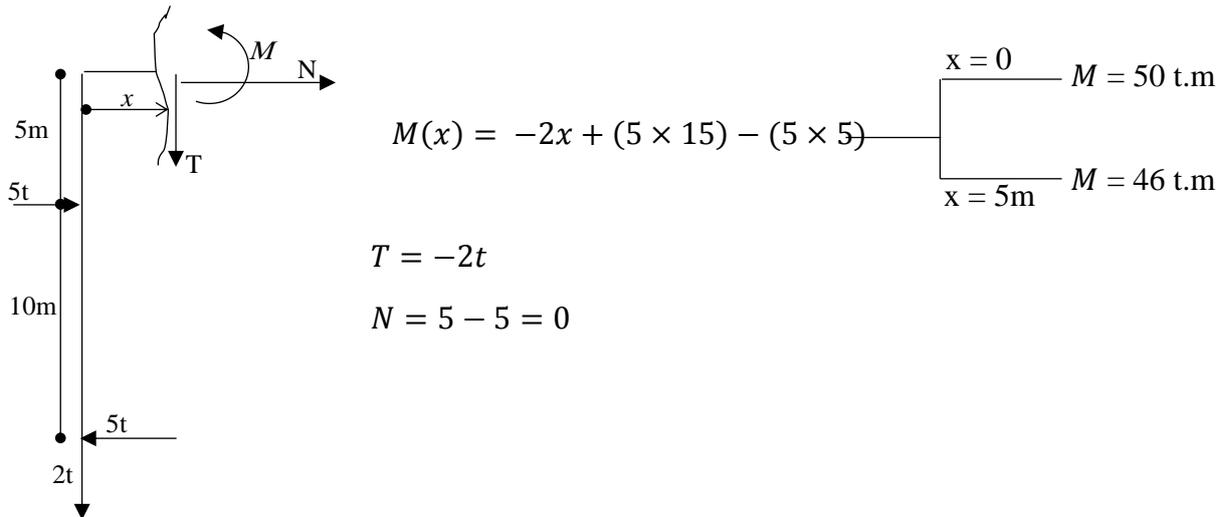
$$\begin{aligned} M(x) &= 5x \\ T &= 5t \\ N &= 2t \end{aligned} \quad \begin{cases} x = 0 & M = 0 \\ x = 10m & M = 50 \text{ t.m} \end{cases}$$

- Section II :  $10m \leq x \leq 15m$

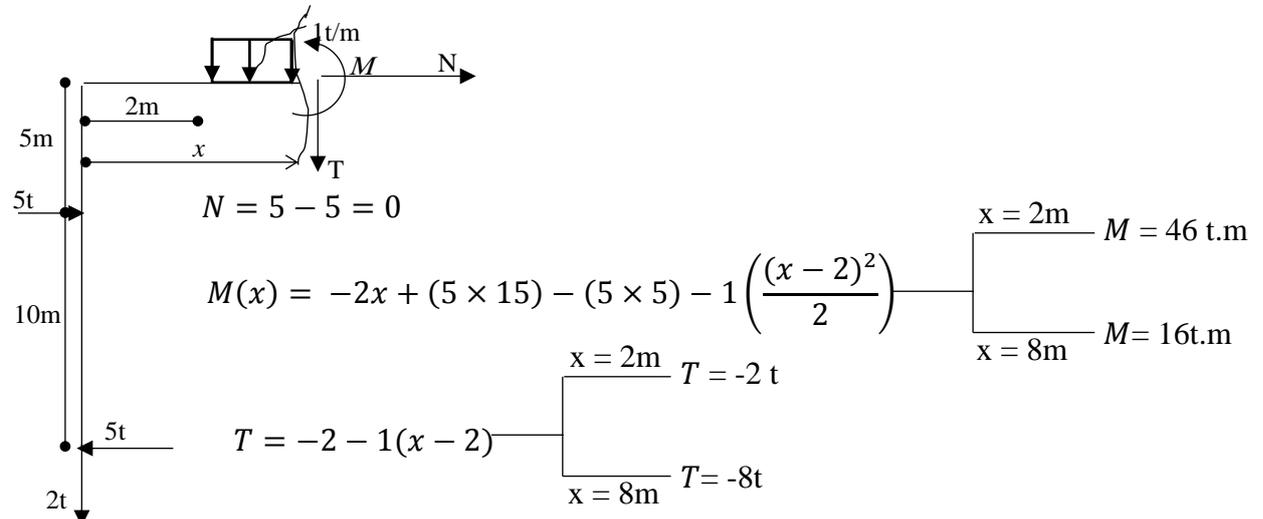


Travée BC :

- Section I :  $0 \leq x \leq 2m$



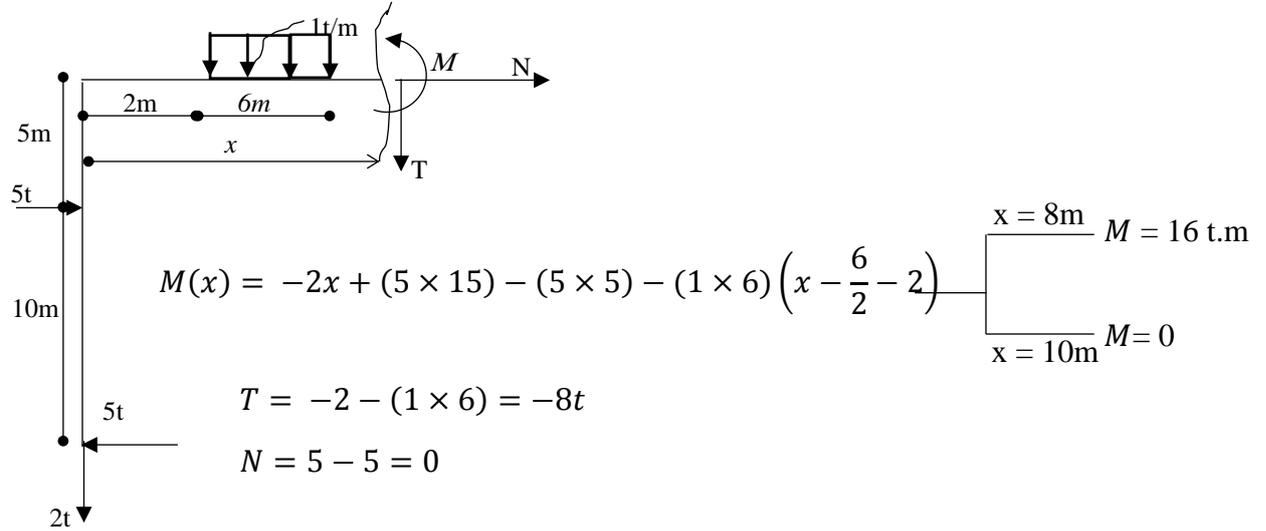
- Section II :  $2m \leq x \leq 8m$



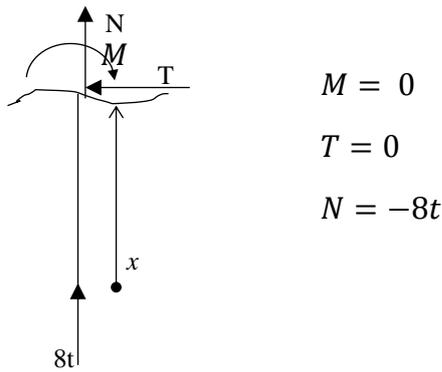
Calcul de  $M_{max}$  :

$$\frac{dM}{dx} = 0 \Rightarrow -x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2m < 0$$

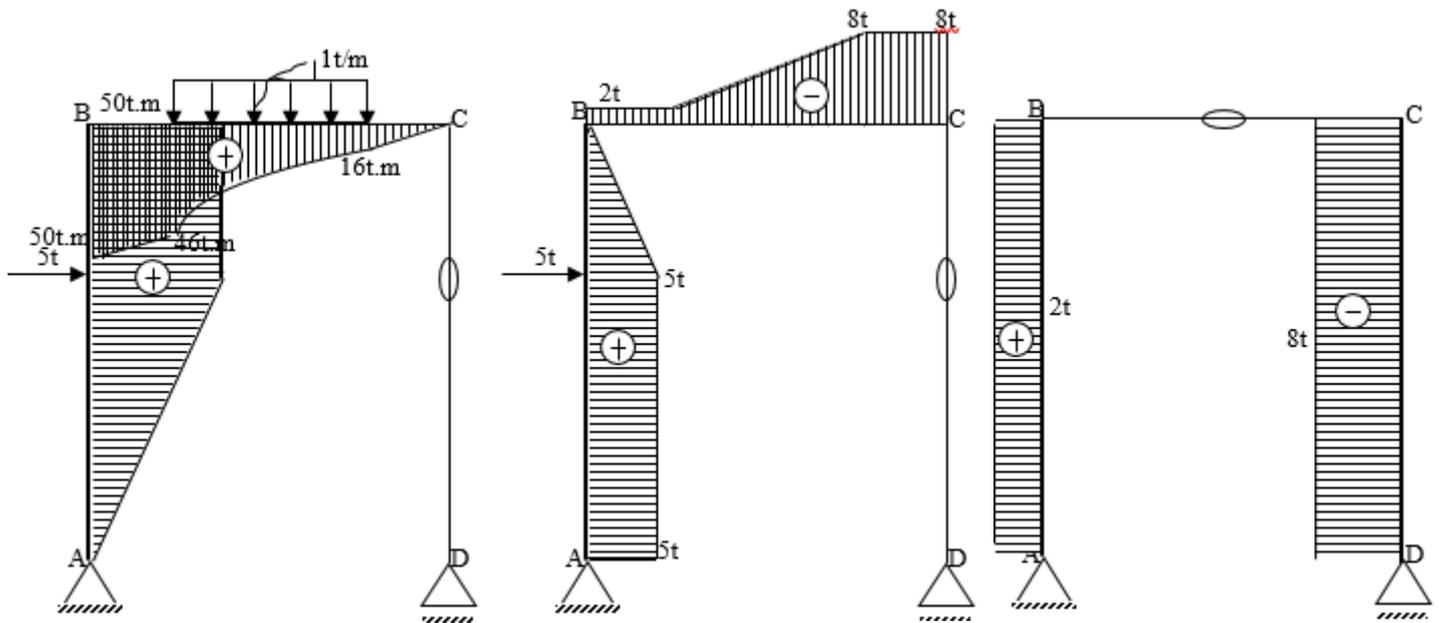
- Section III :  $8m \leq x \leq 10m$



Travée CD :  $0 \leq x \leq 5m$



**4- Diagrammes :**



*Moment fléchissant*

*Effort tranchant*

*Effort normal*

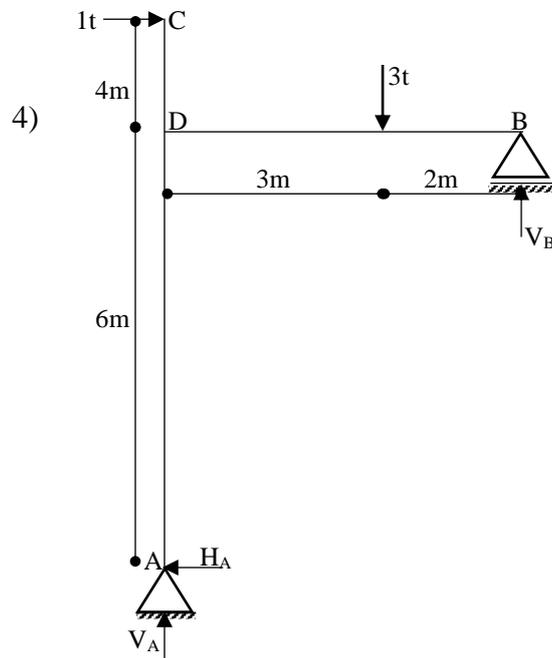
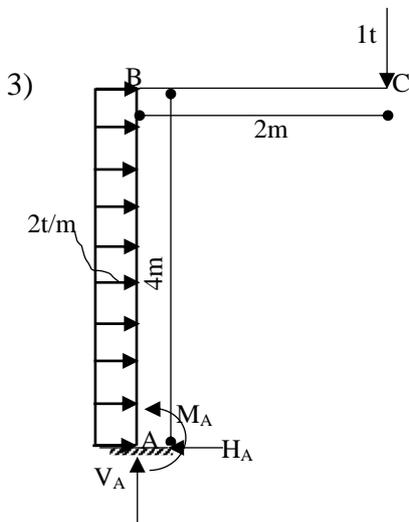
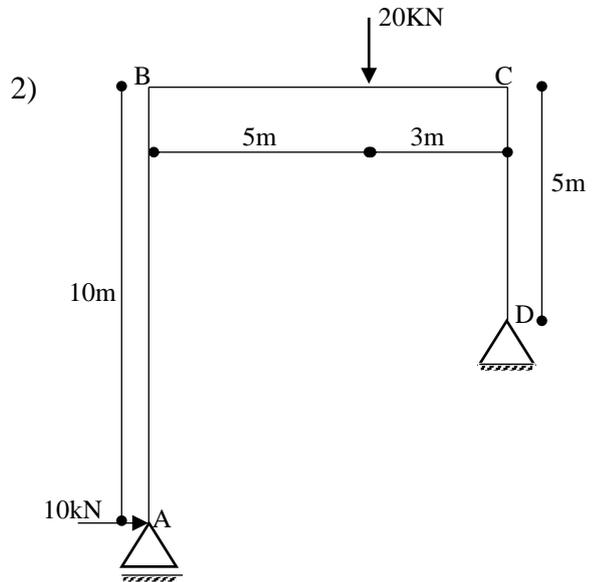
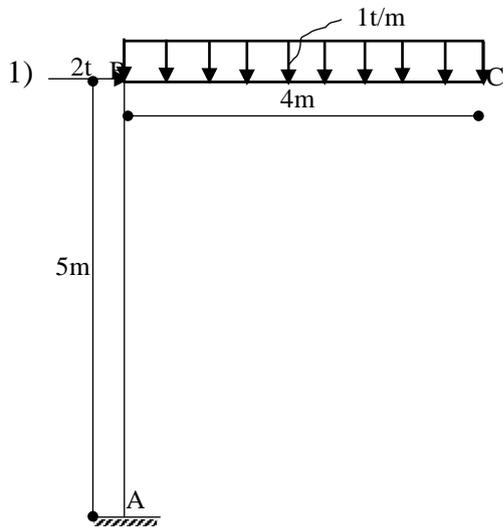
**5- Sollicitations maximales :**

D'après les diagrammes de M, N et T, on a :

$$\begin{cases} M_{max} = 50 \text{ t.m} \\ T_{max} = 8t \\ N_{max} = 8t \end{cases}$$

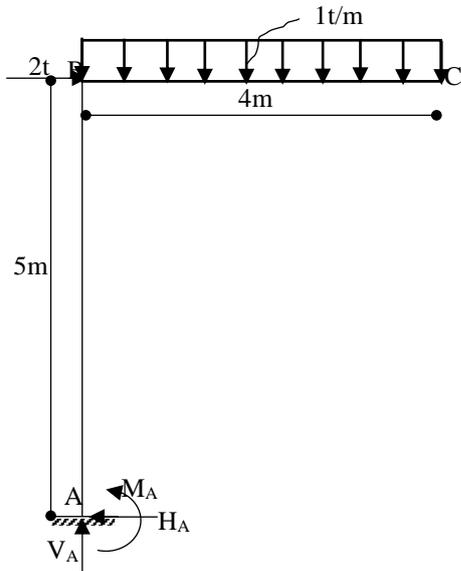
**EXERCICES**

Tracer les diagrammes des moments fléchissant, efforts tranchants et efforts normaux des portiques représentés par les figures ci-dessous :



**Solution :**

1)



**Degré d'hyperstaticité :**

$d = n_{eq} - n_i = 3 - 3 = 0 \rightarrow$  le système est isostatique.

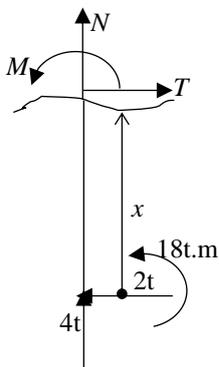
**Calcul des réactions :**

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A - 2t = 0 \\ V_A - (1 \times 4) = 0 \\ M_A - (2 \times 5) - (1 \times 4) \left(\frac{4}{2}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = 2t \\ V_A = 4t \\ M_A = 18 \text{ t.m} \end{cases}$$

**Diagrammes de M, N et T :**

a) Calcul de M, N, T:

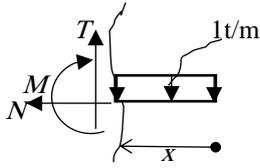
Travée AB :  $0 \leq x \leq 5m$



$$\begin{aligned} M(x) &= 2x - 18 \\ T &= 2t \\ N &= -4t \end{aligned}$$

$x = 0$	$M = -18 \text{ t.m}$
$x = 5m$	$M = -8 \text{ t.m}$

Travée BC :  $0 \leq x \leq 4m$

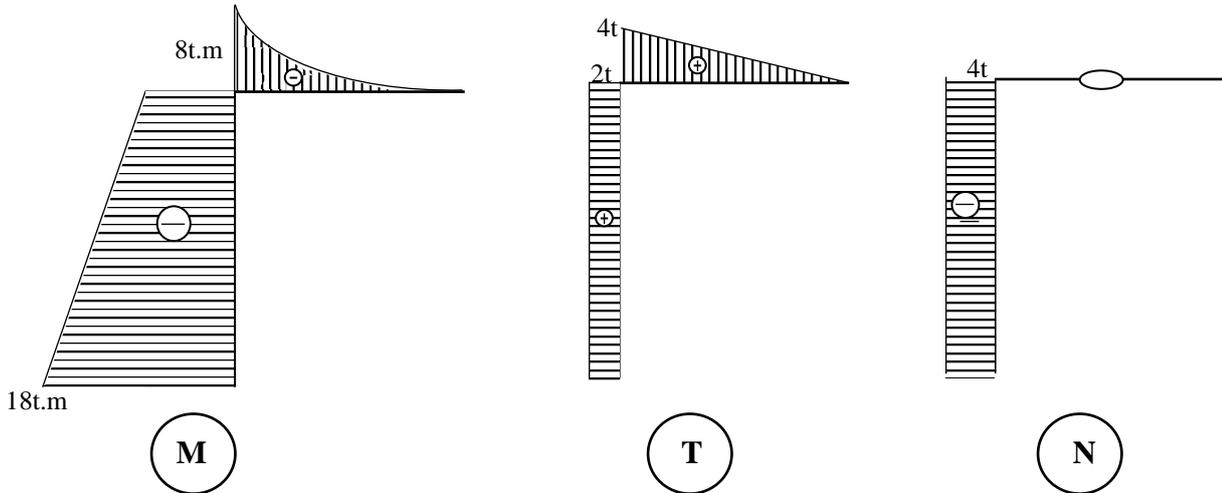


$$M(x) = -\frac{x^2}{2} \begin{cases} x=0 & M=0 \\ x=4m & M=-8t.m \end{cases}$$

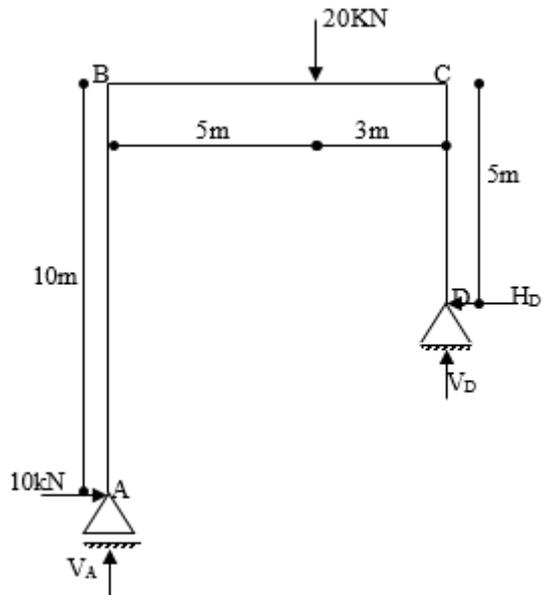
$$T(x) = 1 \cdot x \begin{cases} x=0 & T=0 \\ x=4m & T=4t \end{cases}$$

$$N = 0$$

b) Diagrammes :



2)



**Calcul des réactions :**

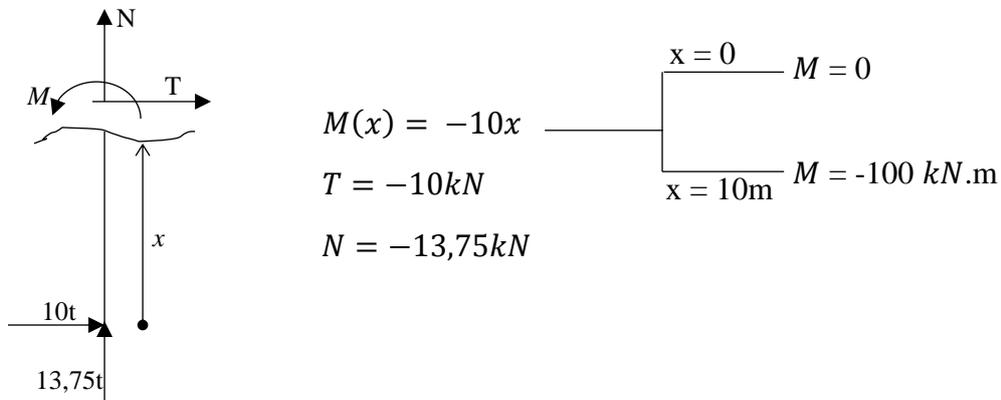
$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_D = 10kN \\ V_A + V_D = 20kN \\ 8V_D - (20 \times 5) + H_D(10 - 5) = 0 \\ 8V_A - (10 \times 5) - (20 \times 3) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} H_D = 10kN \\ V_A = 13,75kN \\ V_D = 6,25kN \end{cases}$$

**Diagrammes de M, N et T :**

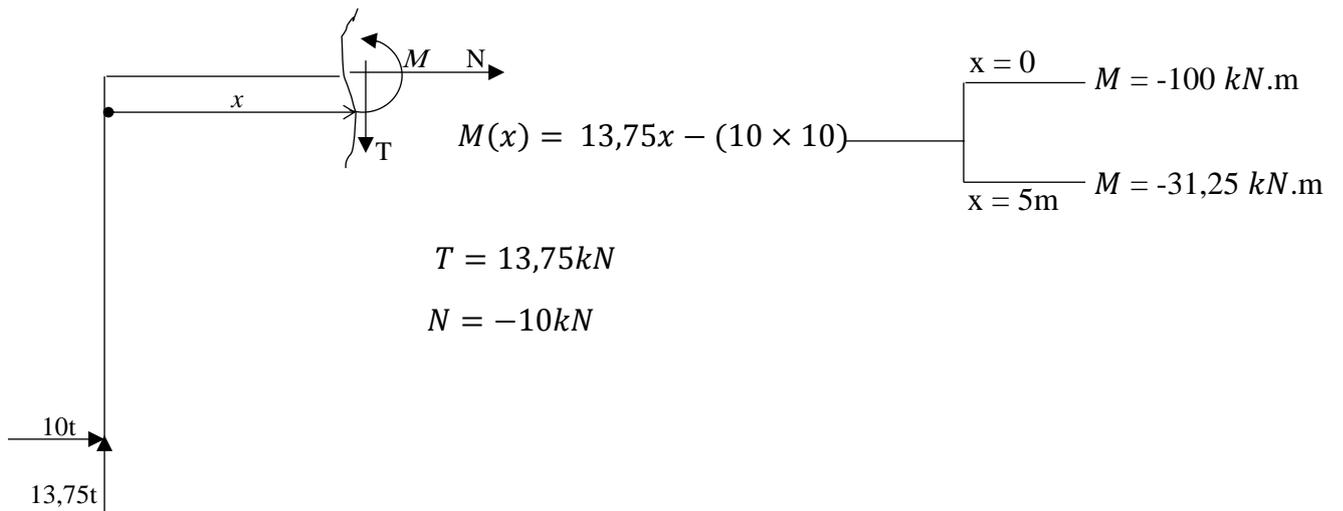
**a) Calcul de M, N, T:**

Travée AB :  $0 \leq x \leq 10m$

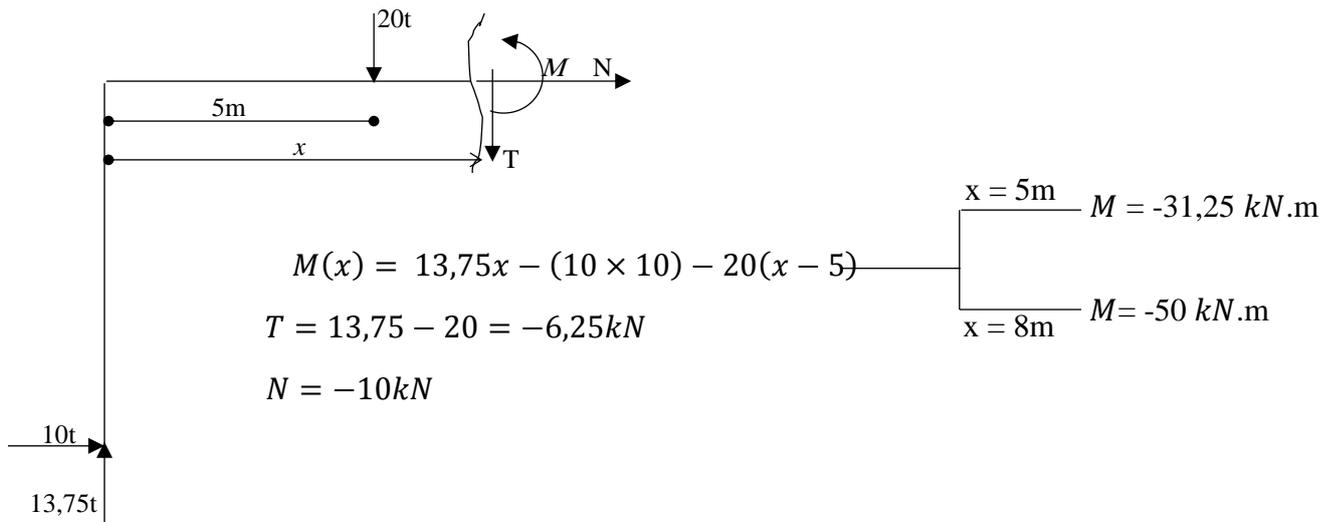


Travée BC :

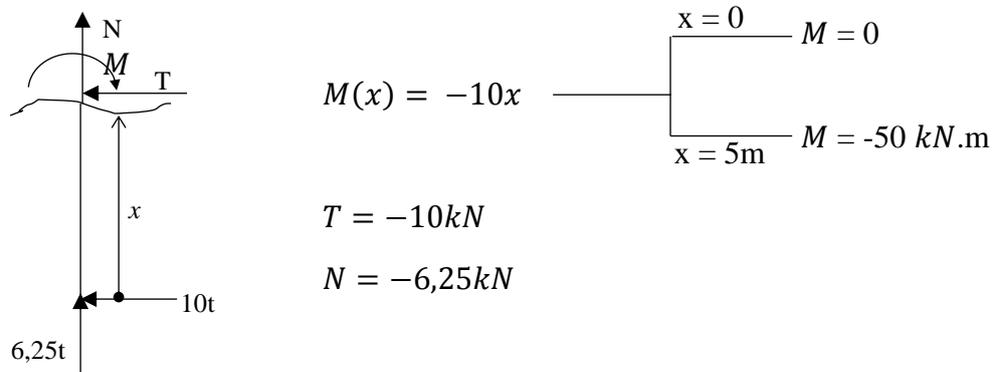
- Section I :  $0 \leq x \leq 5m$



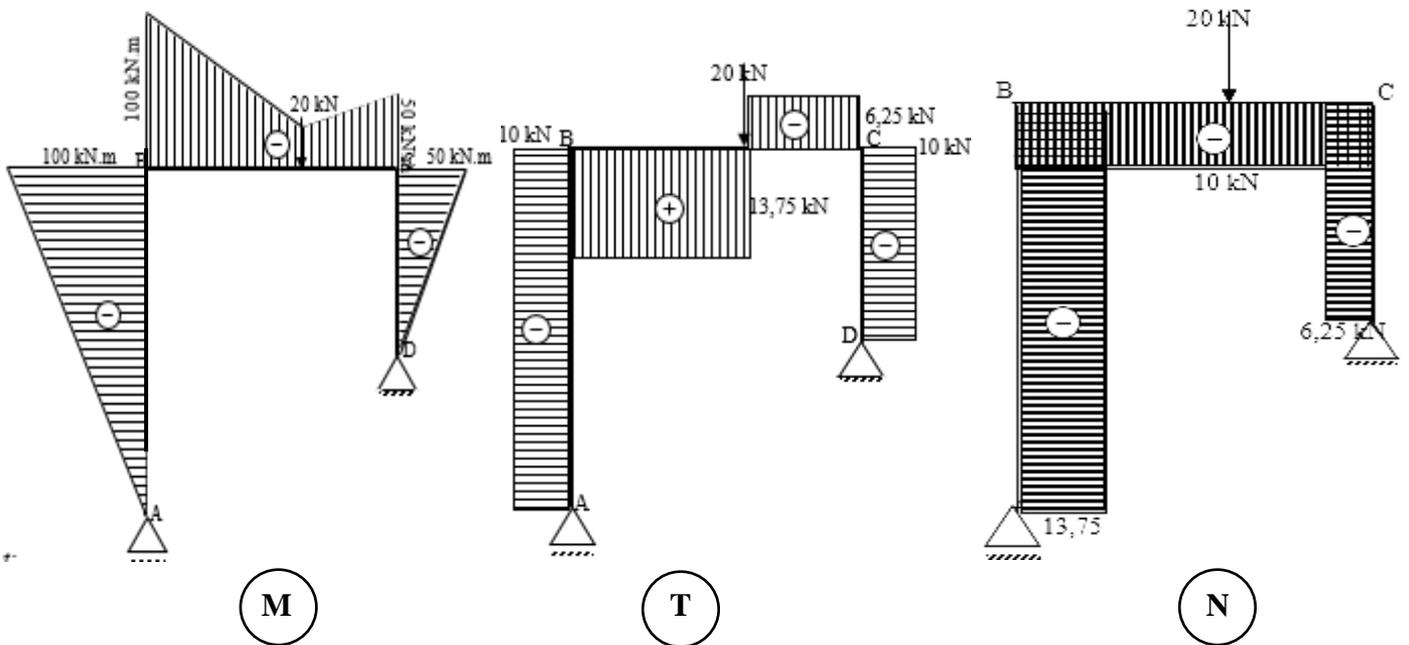
- Section II :  $5m \leq x \leq 8m$



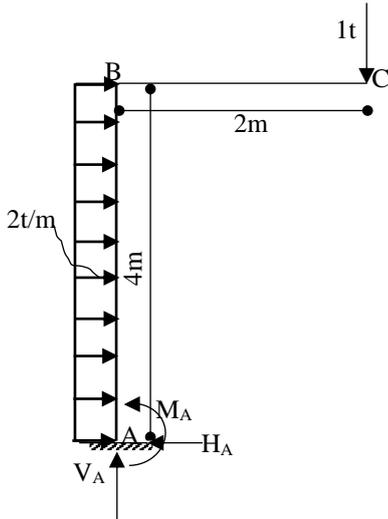
Travée CD :  $0 \leq x \leq 5m$



b) Diagrammes :



3)



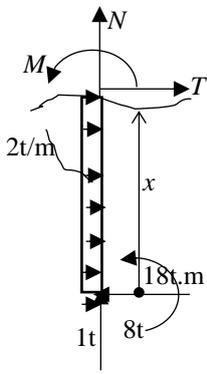
**Calcul des réactions :**

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A - 2 \times 4 = 0 \\ V_A - 1 = 0 \\ M_A - (1 \times 2) - (2 \times 4) \left(\frac{4}{2}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = 8t \\ V_A = 1t \\ M_A = 18t.m \end{cases}$$

**Diagrammes de M, N et T :**

a) **Calcul de M, N, T:**

Travée AB :  $0 \leq x \leq 4m$

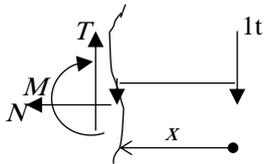


$$M(x) = 8x - 18 - 2 \frac{x^2}{2} \quad \begin{cases} x=0 & M = -18 \text{ t.m} \\ x=4m & M = -2 \text{ t.m} \end{cases}$$

$$T = 8 - 2x \quad \begin{cases} x=0 & M = 8 \text{ t} \\ x=4m & M = 0 \end{cases}$$

$$N = -4t$$

Travée BC :  $0 \leq x \leq 2m$

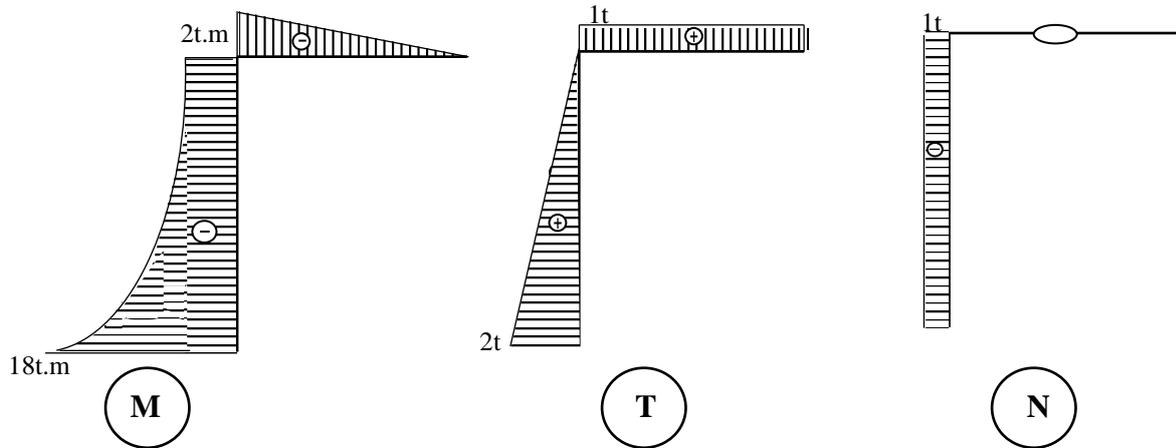


$$M(x) = -x \quad \begin{cases} x=0 & M = 0 \\ x=2m & M = -2t.m \end{cases}$$

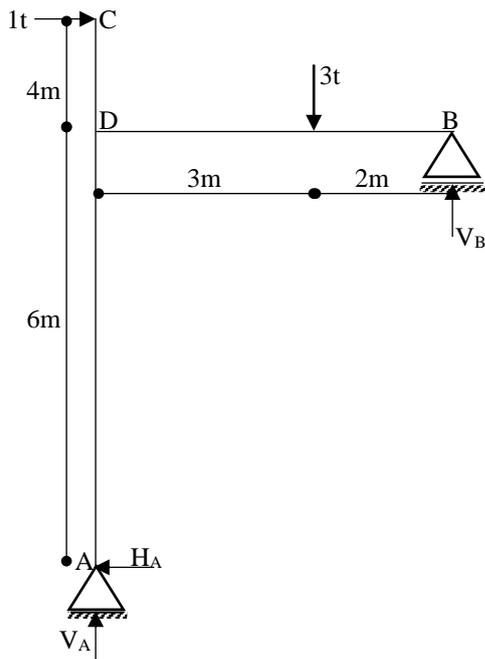
$$T(x) = 1t$$

$$N = 0$$

**b) Diagrammes :**



**4)**



**Calcul des réactions :**

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = 1t \\ V_A + V_B = 3t \\ 5V_B - (3 \times 3) - (1 \times 10) = 0 \\ 5V_A + (1 \times 6) + (1 \times 4) - (3 \times 2) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

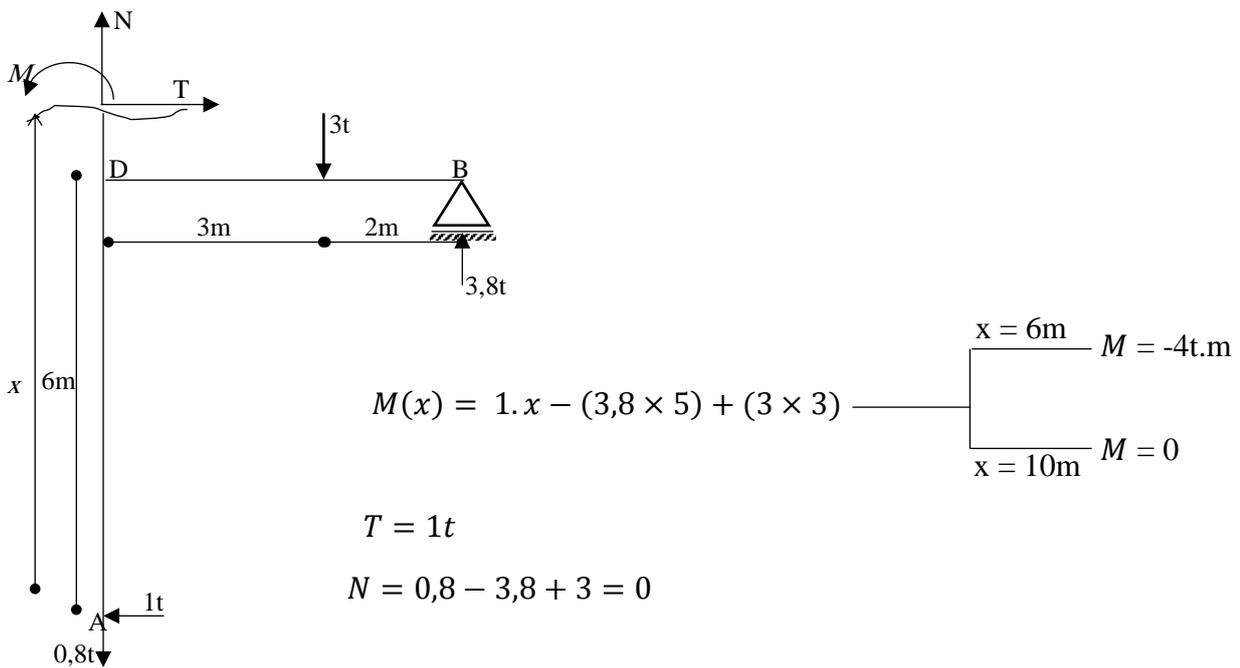
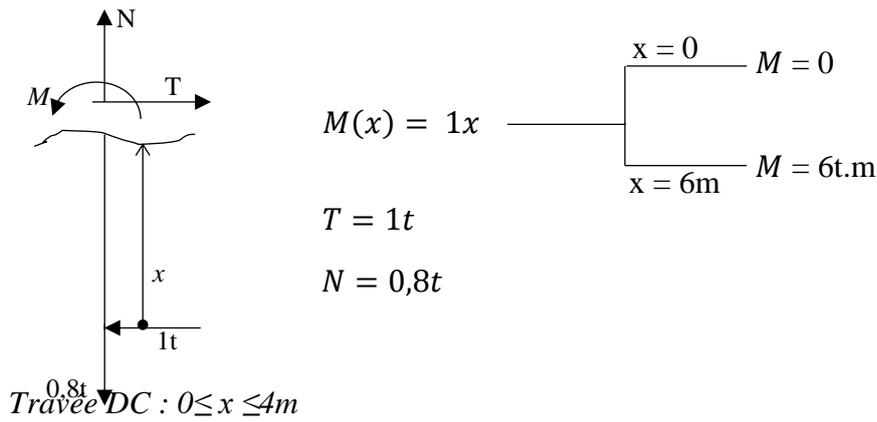
$$\begin{cases} H_D = 1t \\ V_A = -0,8t \\ V_B = 3,8t \end{cases}$$

Le signe (-) de la réaction  $V_A$  indique que le sens réel de celle-ci est contraire à celui choisi arbitrairement et ayant servi au calcul.

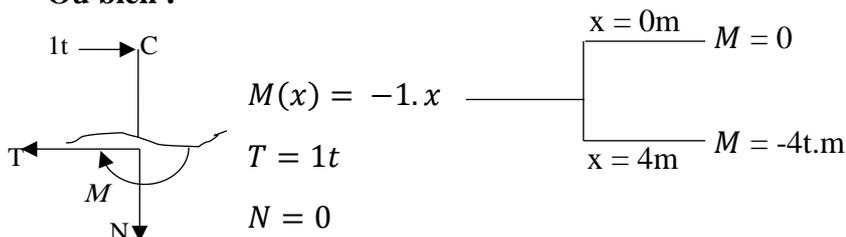
**Diagrammes de  $M$ ,  $N$  et  $T$  :**

**a) Calcul de  $M$ ,  $N$ ,  $T$ :**

Travée AD :  $0 \leq x \leq 6m$

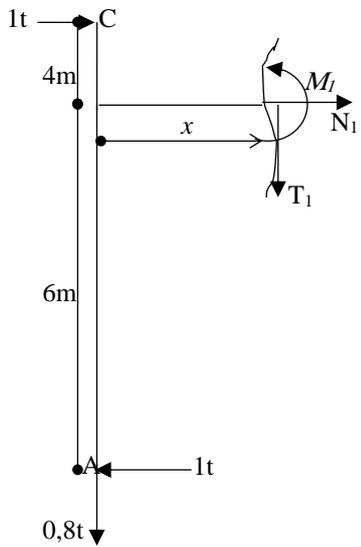


**Ou bien :**



Travée DB :

- Section I :  $0 \leq x \leq 3m$

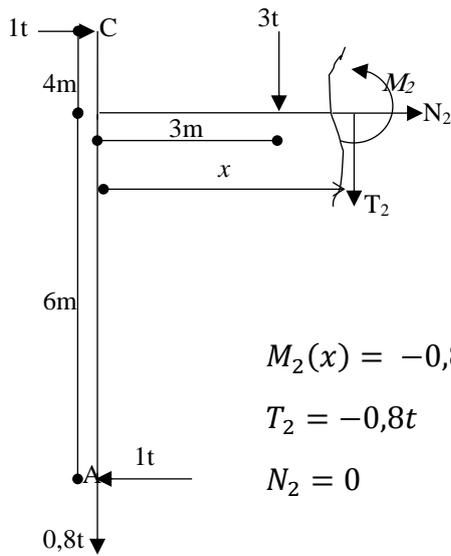


$$M_1(x) = -0,8x + (1 \times 6) + (1 \times 4) \begin{cases} x = 0 & M_1 = 10t.m \\ x = 3m & M_1 = 7,6t.m \end{cases}$$

$$T_1 = -0,8t$$

$$N_1 = 0$$

Section II :  $3m \leq x \leq 5m$



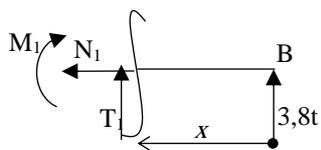
$$M_2(x) = -0,8x + (1 \times 6) + (1 \times 4) - 3(x - 3) \begin{cases} x = 3m & M_2 = 7,6t.m \\ x = 5m & M_2 = 0 \end{cases}$$

$$T_2 = -0,8t$$

$$N_2 = 0$$

Ou bien :

- Section I :  $0 \leq x \leq 2m$

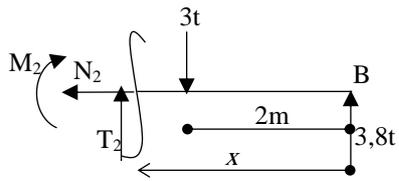


$$M_1(x) = 3,8x \begin{cases} x = 0 & M_1 = 0 \\ x = 2m & M_1 = 7,6t.m \end{cases}$$

$$T_1 = -3,8t$$

$$N_1 = 0$$

- Section II :  $2 \leq x \leq 5m$

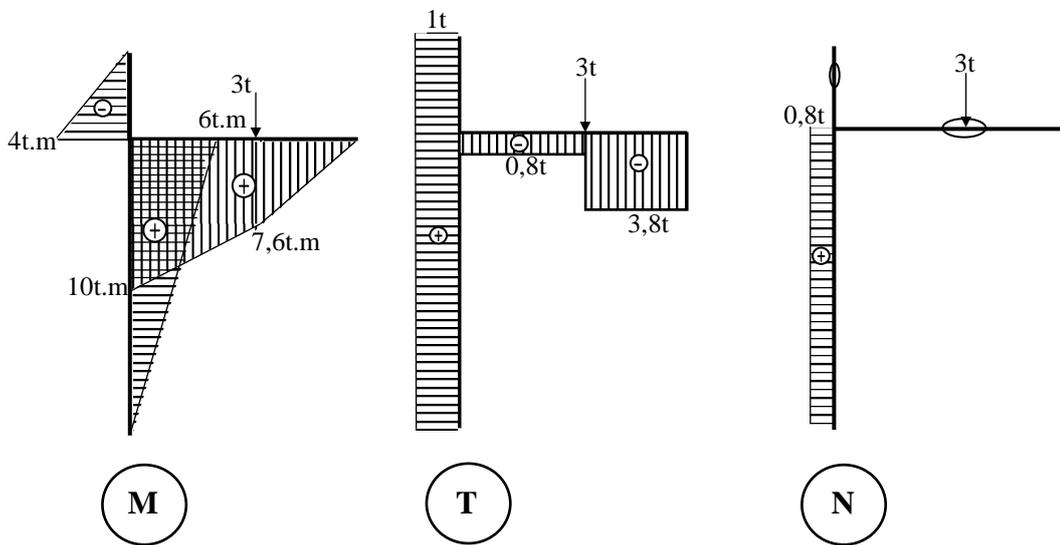


$$M_2(x) = 3,8x - 3(x - 2) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 2m \quad M_2 = 7,6t.m \\ x = 5m \quad M_2 = 0 \end{array} \right.$$

$$T_2 = 3 - 3,8 = -0,8t$$

$$N_2 = 0$$

b) Diagrammes :



## **REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES**

## Références bibliographiques

- 1- G.PISSARENKI, A. Yakovlev, V. Matvéev. Aide mémoire de résistance des matériaux. Edition Mir-Moscou1975. Traduit du russe par M.SEGASAYO-Edidtions Mir 1979.
- 2- NASH W. A. Résistance des matériaux. Cours et problèmes, série Schaum. 2<sup>ème</sup> édition,1994.
- 3- A.ANISSIMOV ; USTHB -Ecole Nationale Polytechnique. Calcul des barres dans les cas de sollicitation composée (Partie 1 de RDM II). Office des Publocations Universitaire Alger-1982.
- 4- S.BENSSADA, D.FELIACHI. Essais mécaniques. Office des publications universitaires 2008. Edition : 2.05.4569, ISBN : 9961.0.0756.5.