



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية وزارة
التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا محمد بوضياف



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed Boudiaf

Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

Polycopié de cours :

Résistance des matériaux Cours et exercices corrigés

Présenté par :

Mr. LEBBAL Habib

Destiné aux étudiants :

2^{ème} année licence en génie mécanique



Année 2021/2022

Introduction

Ce polycopié de cours intitulé « Résistance des Matériaux », s'adresse aux étudiants de deuxième année LMD en Génie Mécanique. Il est rédigé de manière simplifiée et beaucoup d'exemples sont introduits après avoir donné des notions afin que l'étudiant puisse assimiler le contenu du cours et ait une vision claire de son application dans la vie courante.

Le polycopié comporte cinq chapitres, est considéré comme document de travail dans la spécialité de mécanique de construction. Il est destiné de prime abord aux étudiants de licence 2ème année LMD dont l'intitulé du module même (en S4). Il peut être aussi un aide mémoire pour les étudiants en génie maritime et métallurgie en L2. Il contient cinq chapitres de cours et des exercices résolus à la fin de chaque chapitre. Le premier chapitre traite la traction et la compression simple. Dans le second chapitre on aborde le cisaillement simple. Il s'agit de la torsion et les caractéristiques géométriques des sections planes, respectivement aux chapitres 3 et 4. Enfin le dernier chapitre est consacré au flexion.

Table des Matières

Chapitre 1 : Traction et compression simple

1.1 Diagramme traction	1
1.2. Grandeurs conventionnelles	2
1.3. Traction et compression simple	2
1.3.1. Définition de traction (compression)	2
1.3.2. Détermination des efforts normaux	3
1.3.3. Détermination des contraintes	4
1.3.4. Allongement en traction	5
1.3.5. Diagrammes des efforts normaux, contraintes et allongements	6
1.3.6. Coefficient de Poisson	7
1.3.7. Condition de résistance à la traction (compression)	7
1.4. Exercices corrigés	8

Chapitre 2 : Cisaillement

2.1. Exemple de corps sollicité au cisaillement ou au glissement transversal	21
2.2. Essai de cisaillement	21
2.3. Etude des déformations en cisaillement	22
2.4. Etude de la contrainte en cisaillement	23
2.5. Condition de résistance au cisaillement	23
2.6. Cas de la liaison par rivet ou par boulon	23
2.7. Etude de la pression superficielle	24
2.8. Condition de résistance au cisaillement	25
2.9. Exercices corrigées	25

Chapitre 3 : Torsion

3.1. Torsion uniforme d'un arbre circulaire	46
3.2. Contrainte de torsion	46
3.3. Principe	46
3.4. Etude des déformations	48

3.5. Etude des contraintes	48
3.6. Relation entre contrainte et moment de torsion	49
3.7. Conditions de résistance	50
3.7.1. Contrainte de torsion admissible	50
3.7.2. Angle de torsion admissible	50
3.8. Cas général	50
3.9. Exercices corrigées	51

Chapitre 4 : Caractéristiques géométriques des sections planes

4.1. Définition	59
4.2. Moment statique	59
4.3. Centre de gravité d'une section plane	60
4.4. Moment d'inertie, rayon de giration d'une section plane	62
4.5. Moment polaire d'une section plane	62
4.6. Théorème de Huygens	63
4.7. Exercices corrigées	64

Chapitre 5 : Flexion simple

5.1 Définition	70
5.2 Hypothèses sur la flexion des poutres	70
5.2.1 Hypothèses sur le corps	70
5.2.2 Hypothèses sur les forces	71
5.2.3 Hypothèses sur les déformations	71
5.3 Effort de tranchant moment de flexion	71
5.3.1 Effort de tranchant	71
5.3.2 Signe effort de tranchant	71
5.4 Moment de flexion	73
5.4.1 Signe moment de flexion	73
5.5 Relation entre M, T et l'intensité de la charge	75
5.6 Contraintes normales et choix des dimensions de sections droites	76
5.7 Vérification de la résistance	77
5.8 Déformation des poutres en flexion	78

5.8.1 Ligne d'influence des déformations et flèche	78
5.8.2 Angle de flexion θ	79
5.8.3 Flèche de la poutre f_x	79
5.9. Exercices corrigés	80
Références	

Chapitre 1 : Traction et compression simple

1.1 Diagramme traction

L'essai de traction consiste à exercer une force de traction croissante sur un barreau prismatique ou cylindrique de longueur et de section connus et à mesurer l'évolution de cette en fonction de l'allongement de l'éprouvette jusqu'à sa rupture (figure 1.1).

La contrainte-déformation (ou courbe de traction. Figure 1.2) fait apparaître un domaine élastique 'Oa' d'où la loi de proportionnalité ou la de Hooke $\sigma = E * \varepsilon$ (σ : contrainte, ε : déformation). Dans lequel les déformations sont réversibles et proportionnelles à la contrainte et un domaine plastique 'ac' dans lequel les déformations sont permanente. De 'a' à 'b', la section reste pratiquement constante tandis qu'au point 'b' apparait une striction dans la section et par conséquent la contrainte chute jusqu'au point 'c' à la rupture.

La courbe force -déplacement obtenue est transformé en force par unité de surface de la section et le déplacement par unité de longueur pour obtenue diagramme contrainte-déformation.

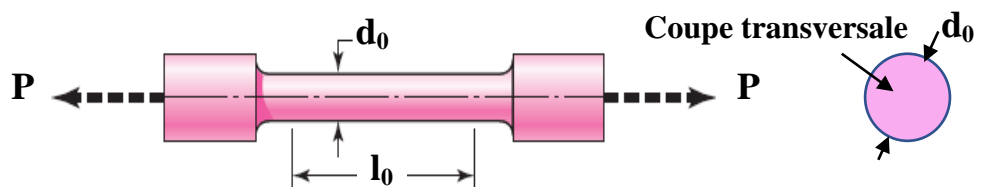


Figure 1.1 : Essai de traction

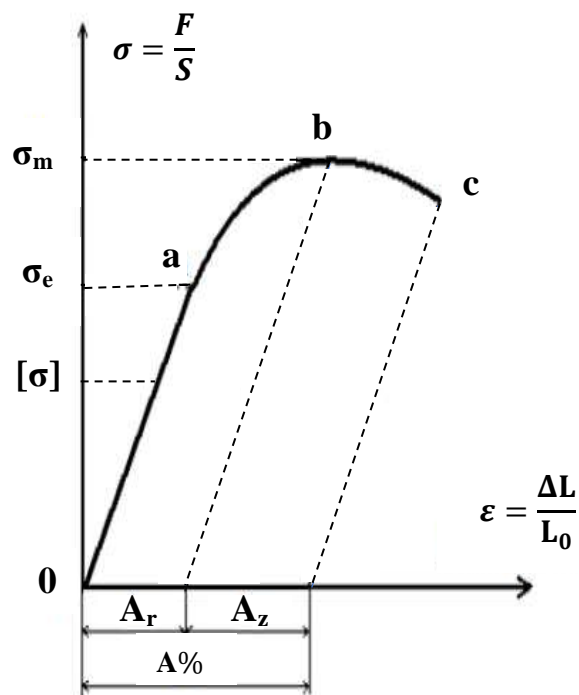


Figure 1.2 : Courbe conventionnelle de traction

σ : contrainte.

ε : déformation.

σ_u : contrainte ultime à la section.

σ_e : limite élastique.

$[\sigma]$: contrainte admissible égale à $\frac{\sigma_e}{n_s}$ où n_s coefficient de sécurité.

S : section.

L_0 : longueur initiale.

1.2. Grandeurs conventionnelles

L'allongement pour-cent après rupture A est l'allongement rémanent de la longueur entre repères après rupture L_U-L_0 . Exprimé en pourcentage de la longueur initiale entre repères L_0

$$A = 100 \frac{L_U - L_0}{L_0} \quad (1.1)$$

La striction est la réduction localisée des dimensions transversales de l'éprouvette se produisant au cours de l'essai. La section après rupture S_u est l'aire de la section minimale après reconstitution de l'éprouvette. Le coefficient de striction Z est le rapport de la variation ultime de section transversale S_0-S_U produite par l'essai à la section initiale S_0 .

$$Z = 100 \frac{S_0 - S_U}{S_0} \quad (1.2)$$

La résistance à la traction σ_m est la charge unitaire qui correspond à la charge maximale supportée par l'éprouvette.

$$\sigma_m = \frac{F_m}{S_0} \quad (1.3)$$

La charge unitaire à la limite d'élasticité s'appelle aussi, par abréviation, limite d'élasticité σ_e

Elle correspond à la charge F_e pour laquelle :

$$\sigma_e = \frac{F_e}{S_0} \quad (1.4)$$

1.3. Traction et compression simple

1.3.1. Définition de traction (compression)

Une barre est soumise à la traction (compression) lorsqu'elle soumise à deux forces opposées. Qui tendent à l'allonger.

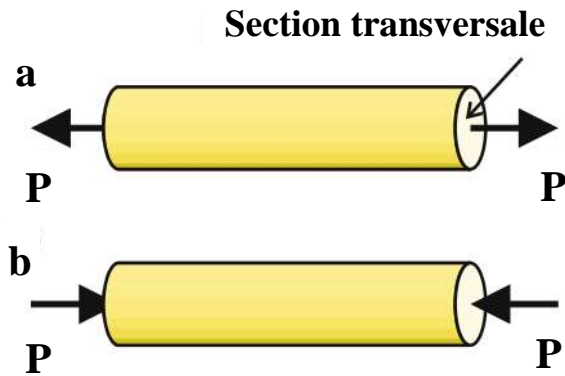


Figure 1.3 : a) poutre en traction, b) poutre en compression

1.3.2. Détermination des efforts normaux

Considérant le cas de la traction et de la compression axiale (centrale) lorsque les forces extérieures agissent suivant l'axe de barre.

La barre en équilibre statique $\rightarrow \sum F = 0$

$$R + 3F - 6F = 0 \rightarrow R = 3F$$

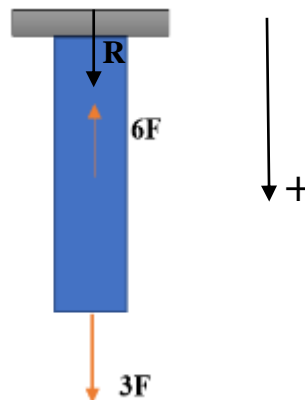
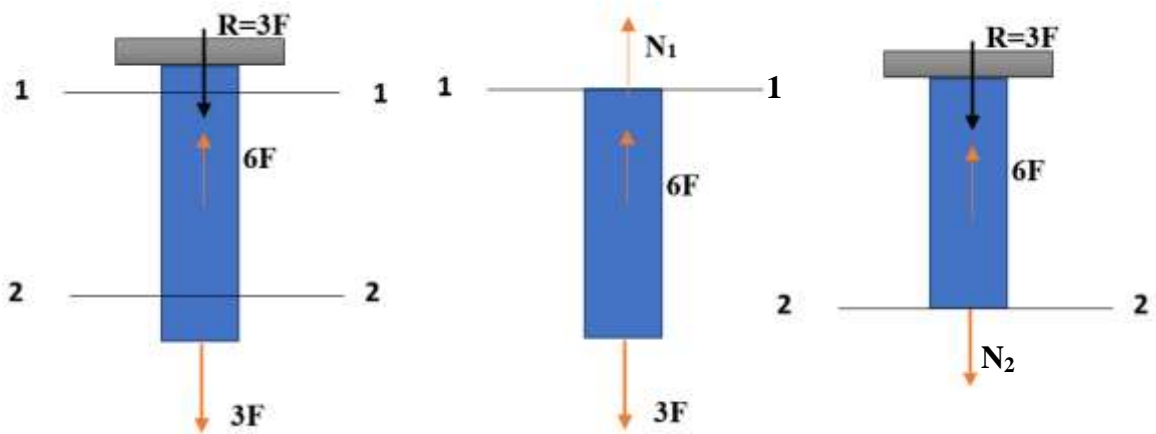


Figure 1.3 : Détermination des efforts normaux

Pour déterminer les efforts intérieurs (force longitudinale ou normales) appliquant la méthode des sections. Réalisent une coupe, par exemple suivant 1-1, et examinons l'équilibre de la partie découpée. Remplaçant l'action du tranchant supérieur rejeté sur le tranchant inférieur par une force normale que nous orienterons au préalable à partir de la section. C'est à dire supposons qu'il s'agisse de la traction. Composons l'équation d'équilibre. Projétons toutes les forces subies par la partie inférieure sur la direction parallèle à l'axe de la barre et annulant la somme des forces projetées selon la loi de l'équilibre statique, on obtient :

$$N_1 + 6F - 3F + 0$$

$$N_1 = -3F$$



Le signe moins montre que la direction de la force N_1 doit être inversée, c'est-à-dire que la force normale réalise non pas la traction, comme nous l'avons supposé, mais la compression. Trouvons d'une façon analogue la force qui agit dans la section 2-2 : $N_2 = 3F$ (traction). Convenons que la force normale qui correspond à la traction est positive.

1.3.3. Détermination des contraintes

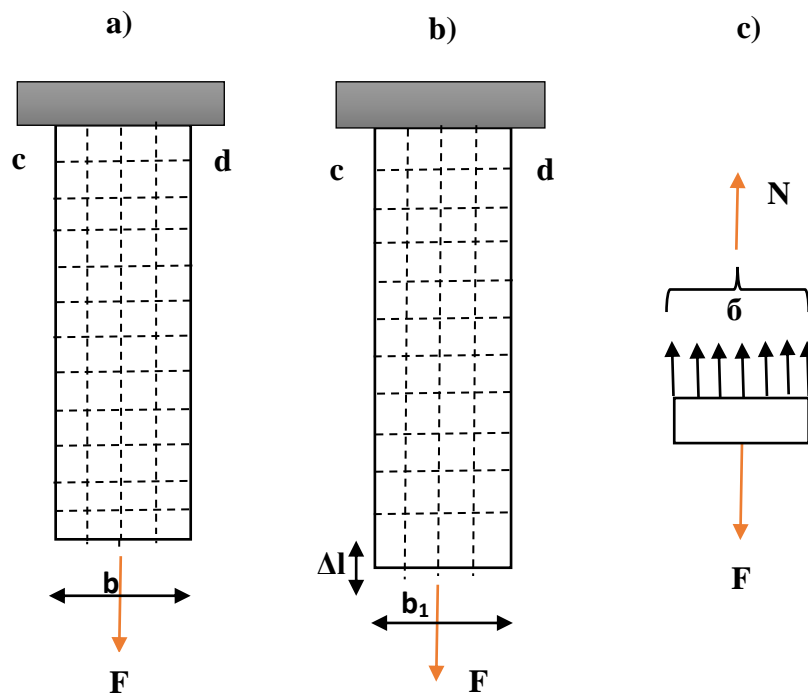


Figure 1.4 : Détermination des contraintes

Si à la surface d'une barre(pièce) prismatique on porte un réseau de lignes parallèles et perpendiculaire à l'axe et si on soumet la barre à la traction , on peut établir après la déformation que les lignes du réseau restent réciproquement perpendiculaire sauf en un petit secteur au voisinage du point d'application de la force que pour le moment nous éliminons de l'analyse, mais les distances entre les lignes changent (figure 1.4.b).toutes les lignes

horizontales ,par exemple cd, se déplacent en bas tout en restant horizontales et droites. On peut supposer qu'il en sera de même à l'intérieur de la barre, c'est -à-dire que ses sections droites planes et normales à son axe avant la déformation restent telles après la déformation. Cette hypothèse importante s'appelle hypothèse des sections planes ou d'hypothèse Bernoulli. Les formules qu'elle permet d'établir sont confirmées par les expériences.

Cette allure des déformations permet de considérer que les sections droites d'une barre sont sollicitées seulement par les contraintes normales réparties uniformément dans la section, alors que les contraintes tangentielles sont nulles.

La force longitudinale N dans la section droite est la résultante des contraintes normales.

$$N = \int_A \sigma \, dA \quad (1.5)$$

Etant donné que $\sigma = \text{const}$, la formule entraîne

$$N = \sigma A \quad (1.6)$$

D'où

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (1.7)$$

Dans le cas particulier lorsque la barre subit la force extérieure L 'équation d'équilibre implique $N = F$. On obtient la forme partielle de la formule de la traction.

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (1.8)$$

Ces formules sont également valables pour la compression, à cette différence que les contraintes de compression sont considérées comme négative.

1.3.4. Allongement en traction

On considère une barre de longueur l et de section S encadrée en A et en traction sous l'action d'une force F en B (schéma dessous).

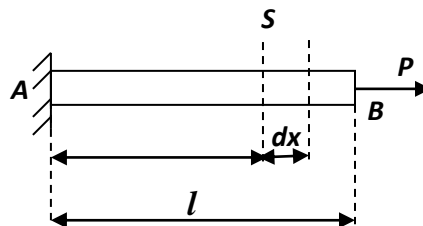


Figure 1.5 : Allongement d'une poutre

La contrainte de traction est :

$$\sigma = \frac{N}{S} = \frac{P}{S} \quad (1.9)$$

La loi de Hooke :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (1.10)$$

La variable interne est comprise dans l'intervalle $0 \leq x \leq l$

Dans la portion dx l'allongement relatif :

$$\varepsilon = \frac{\Delta(dx)}{dx} \quad (1.11)$$

(1.18), (1.19) et (1.20) donnent :

$$\frac{N}{S} = E \frac{\Delta(dx)}{dx} \rightarrow \Delta(dx) = \frac{N}{ES} dx \rightarrow \Delta l = \int_A^B \frac{N}{ES} dx \quad (1.12)$$

Finalement :

$$\Delta l = \int_A^B \frac{N}{ES} dx = \int_0^l \frac{\sigma}{E} dx = \begin{cases} 0 & \text{au point A} \\ \frac{\sigma}{E} x & \text{en un point intermédiaire entre A et B} \\ \frac{\sigma}{E} l & \text{au point B} \end{cases}$$

Si on plus la barre est soumise à une variation thermique Δt , l'allongement est calculé par la méthode de superposition en ajoutant à l'allongement dû au chargement mécanique l'allongement dû à la dilatation thermique :

$$\Delta l = \frac{\sigma}{E} l + \alpha \Delta t \quad (1.13)$$

α : coefficient de dilatation thermique linéaire du matériau.

1.3.5. Diagrammes des efforts normaux, contraintes et allongements

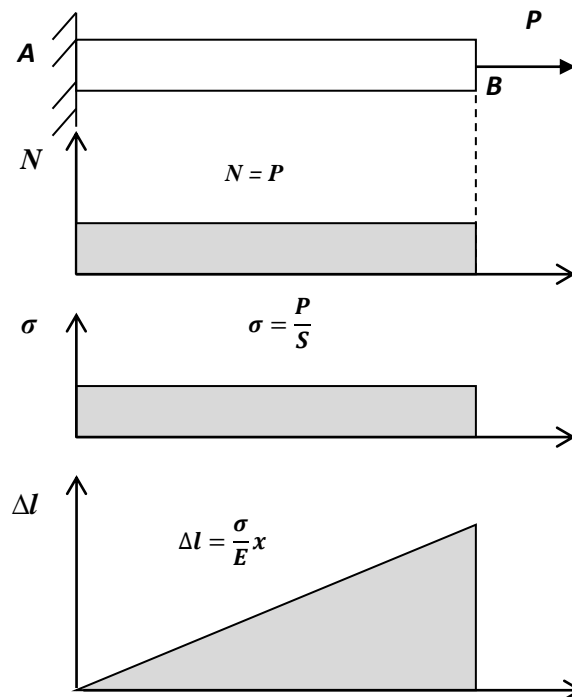


Figure 1.6 : Diagrammes des efforts normaux, contraintes et allongements

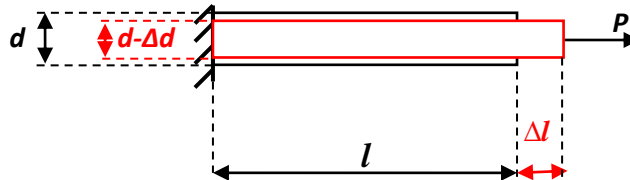
1.3.6. Coefficient de Poisson

Le coefficient de Poisson est une propriété du matériau qui caractérise la conservation du volume (la longueur s'allonge de Δl et le diamètre diminue de Δd), il est exprimé par :

$$\vartheta = \frac{\varepsilon_{\text{transversale}}}{\varepsilon_{\text{longitudinale}}} \quad (1.14)$$

avec : $\varepsilon_{\text{transversale}} = -\frac{\Delta d}{d}$ (1.15)

et : $\varepsilon_{\text{longitudinale}} = \frac{\Delta l}{l}$ (1.16)



$$\text{Finalement : } \vartheta = -\frac{\Delta d}{d} \frac{l}{\Delta l} = -\frac{\Delta d}{d} \frac{\Delta l}{l} \quad (1.17)$$

Pour les matériaux de construction à comportement élastique $\vartheta = 0.25 \div 0.3$

1.3.7. Condition de résistance à la traction (compression)

Pour qu'une pièce sollicitée à traction (compression) résiste en toute sécurité, il faut que la contrainte soit inférieure ou égale à la contrainte admissible choisie entre 0 et σ_e selon le coefficient de sécurité $n_s=1.75$ à 5

$$[\sigma] = \frac{\sigma_e}{n_s} \quad (1.18)$$

En traction : $\sigma_t \leq [\sigma_t]$

En compression : $\sigma_c \leq [\sigma_c]$

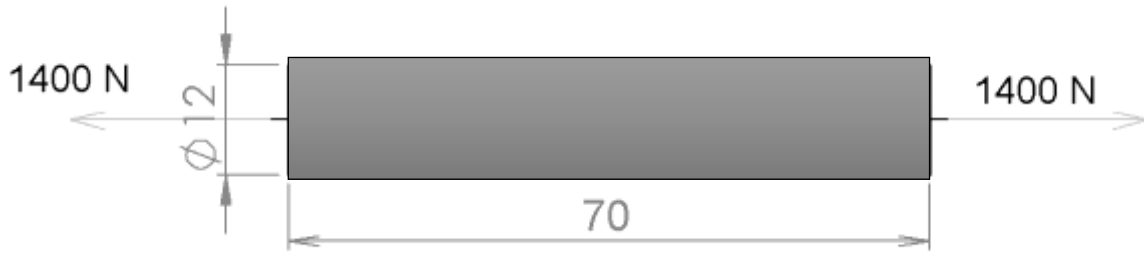
Exemple

Un arbre mécanique en acier (faiblement allié) de diamètre de 12 mm et de longueur de 70 mm est soumis à un effort de traction de 1400 N.

La résistance élastique en traction de matériau $\sigma_e= 500$ MPa.

Le coefficient de sécurité est : $n = 7$.

Vérifier que cet arbre résiste à cette force dans des conditions de sécurité satisfaisantes.



Solution

La condition de résistance d'une pièce en traction

$$\sigma_c \leq [\sigma_c]$$

$$\sigma_c = \frac{N}{S}$$

$$\sigma_c = \frac{1400}{\pi \cdot 6^2} = 12.38 \text{ MPa}$$

$$[\sigma_c] = \frac{\sigma_e}{N_s}$$

N_s : coefficient de sécurité = 5

$$[\sigma_c] = \frac{500}{5} = 100 \text{ MPa}$$

On a donc :

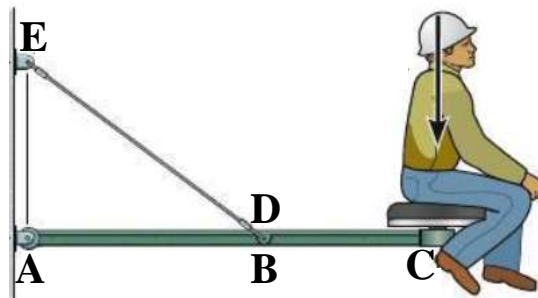
12,38 MPa \leq 100 MPa la condition de la résistance est satisfaite donc cet arbre résiste.

1.4. Exercices corrigés

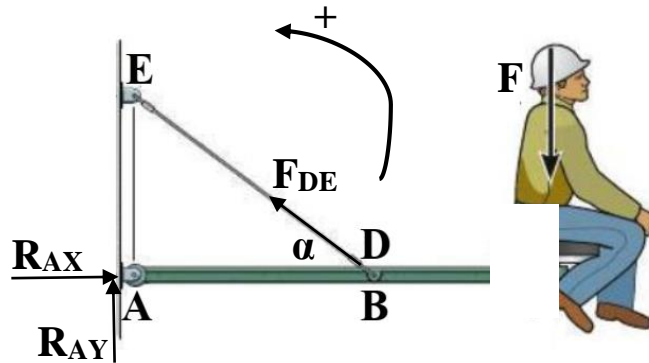
Exercice 1

Le fil a un diamètre de 6 mm et est fabriqué à partir d'un acier. Si un homme de 85 kg est assis sur le siège C, déterminez le allongement du fil DE.

On donne : AB=700 mm, BC=500 mm, AE=500 mm, E=200 MPa.



Solution



$$\sum M/A = 0$$

$$F_{DE} \cdot \sin \alpha \cdot AB - m \cdot g \cdot AC = 0$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AE}{AB} = \frac{500}{700} = 0.714$$

$$\alpha = 35^\circ$$

$$F_{DE} \cdot \sin(35) \cdot 0.7 - 85 \cdot 9.81 \cdot 1.2 = 0$$

$$F_{DE} = 2460 \text{ N}$$

$$\sigma_{DE} = \frac{F_{DE}}{S_{DE}}$$

$$\sigma_{DE} = \frac{F_{DE}}{\frac{\pi}{4} \cdot d^2}$$

$$\sigma_{DE} = \frac{2460}{\frac{\pi}{4} \cdot 6^2}$$

$$\sigma_{DE} = 87.04 \text{ MP}$$

On a la loi de Hook

$$\sigma_{DE} = E \cdot \varepsilon_{DE}$$

Avec :

$$\varepsilon_{DE} = \frac{\delta_{DE}}{L_{DE}}$$

$$\varepsilon_{DE} = \frac{\sigma_{DE}}{E} = \frac{87.04 \cdot 10^6}{200 \cdot 10^9}$$

$$\varepsilon_{DE} = 0.0004352$$

$$L_{DE} = \sqrt{700^2 + 500^2}$$

$$L_{DE} = 860 \text{ mm}$$

Donc :

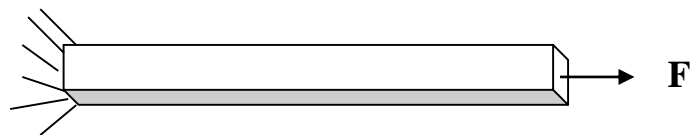
$$\delta_{DE} = L_{DE} * \varepsilon_{DE}$$

$$\delta_{DE} = 860 * 0.0004352$$

$$\delta_{DE} = 0.3742 \text{ mm}$$

Exercice 2

Une barre de dimension 40*30*50000 et soumise à force de traction F=120 kN



a-déterminer la contrainte de traction et déduire les conditions de résistance sachant que $[\sigma]=144 \text{ MPa}$.

b-calculer l'allongement si $E=2.1*10^5 \text{ MPa}$.

Solution :

a-Condition de résistance :

$$\sigma \leq [\sigma]$$

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{120*10^3}{30*40} = 100 \text{ MPa}$$

$$\sigma = 100 \text{ MPa} \text{ et } [\sigma]=144 \text{ MPa}$$

Donc la condition de résistance est satisfaite.

b-calcul l'allongement :

$$\sigma = E * \varepsilon = E * \frac{\Delta L}{L}$$

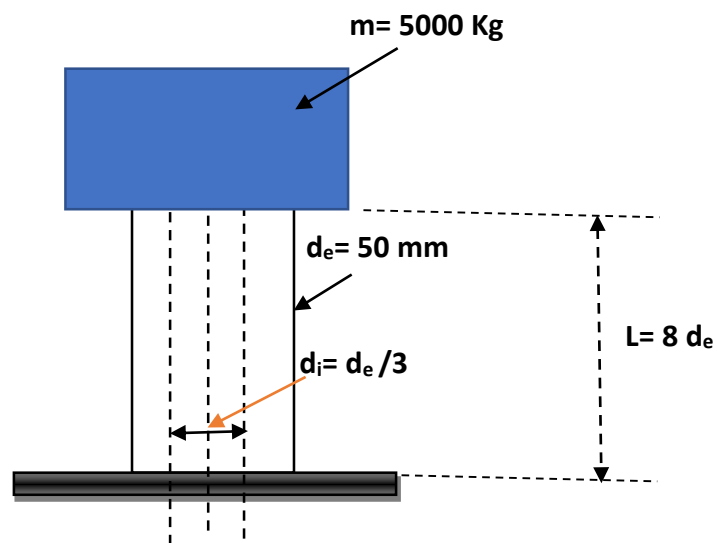
$$\text{Alors : } \Delta L = \sigma * \frac{L}{E} = 100 * \frac{5000}{2.1^5} = 2.4 \text{ mm}$$

$$\Delta L = 2.4 \text{ mm}$$

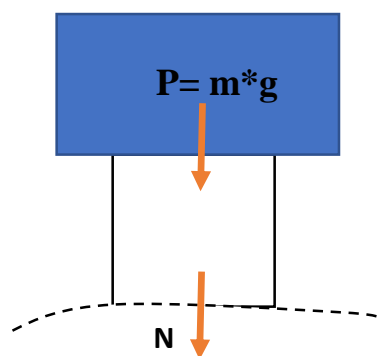
Exercice 3

Une barre d'acier en forme de tube ($E = 2.1 \cdot 10^5$ MPa) est en compression sous la masse indiquée dans le schéma ci-dessous, calculer :

- a- L'effort normale N .
- b- La section droite du tube.
- c- La contrainte de compression.
- d- Le rétrécissement maximale Δl_{\max} .

**Solution**

a- l'effort normale N

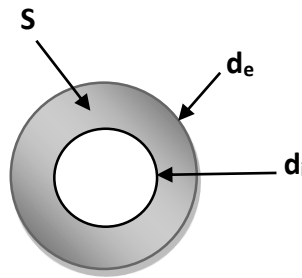


$$\sum F = 0 \rightarrow N + P = 0$$

$$N = -P = -m g = -5000 \cdot 9.81$$

$$N = -49050 \text{ N}$$

b-section droite



$$S = \frac{\pi d_e^2}{4} - \frac{\pi d_i^2}{4} = \frac{\pi}{4} [d_e^2 - d_i^2]$$

$$S = \frac{\pi}{4} [d_e^2 - (d_e/3)^2]$$

$$S = \frac{8 \pi d_e^2}{4 * 9} = \frac{2 \pi 50^2}{9}$$

$$S = 1744.44 \text{ mm}^2$$

c-la contrainte de compression

$$\sigma_c = \frac{N}{S} = \frac{-49050}{1744.44} = -28.12 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = -28.12 \text{ MPa}$$

$$\sigma_c = -28.12 \text{ MPa}$$

d-Le rétrécissement maximale Δl_{\max}

$$\Delta l = \frac{N X}{E S}$$

Pour $X = 0 \longrightarrow \Delta l = 0$

Pour $X = L = 8 d_e$

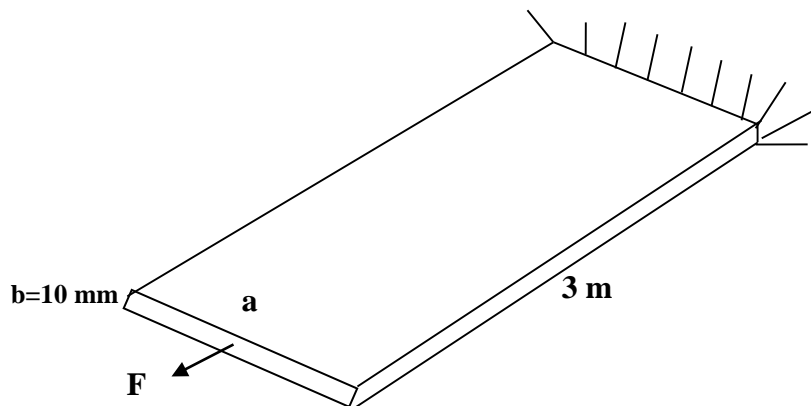
$$\Delta l_{\max} = \frac{N X}{E S}$$

$$\Delta l_{\max} = \frac{49050 * (8 * 50)}{2.1 * 10^5 * 1744.44}$$

$$\Delta l_{\max} = -0.053 \text{ mm}$$

Exercice 4 :

Une barre en fer plat de 3 m de longueur et 10d'épaisseur est soumise à un effort de traction de 80 kN.



Déterminer sa largeur pour que son allongement ne dépasse pas 2 mm.

$E=2.1 \cdot 10^5$ MPa et $[\sigma]=144$ MPa.

Solution :

On a :

$$\sigma = E * \varepsilon = E * \frac{\Delta L}{L}$$

$$\Delta L_{\max} = 2 \text{ mm} \longrightarrow \sigma_{\max} = E * \frac{\Delta L_{\max}}{L} = 2.1 * 10^5 * \frac{2}{3000}$$

$$\sigma_{\max} = 140 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\max} = 140 \text{ MPa} < [\sigma] = 144 \text{ MPa}$$

La condition de résistance satisfaite.

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{S_{\min}} = \frac{F}{a_{\min} * b}$$

Donc :

$$a_{\min} = \frac{F}{\sigma_{\max} * b} = \frac{80 * 10^3}{10 * 140} = 57 \text{ mm}$$

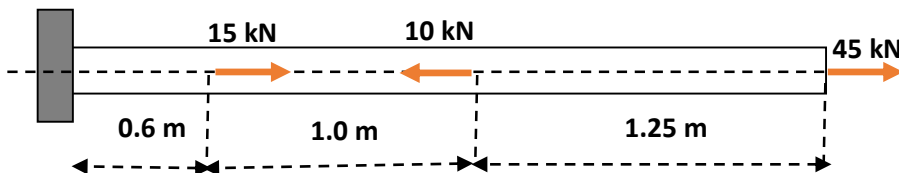
La section normalisée $b=10$ et $a=60$ donc $(10 * 60)$.

Exercice 5

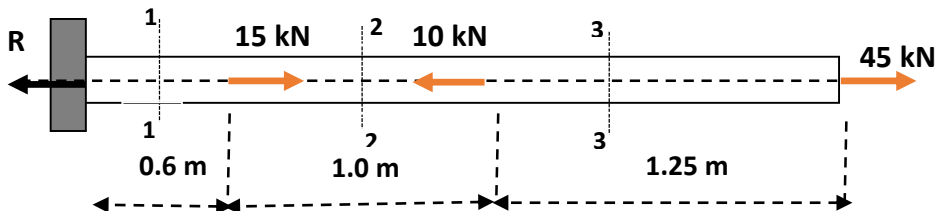
Une barre en acier de section $S=500 \text{ mm}^2$ est soumise à des forces axiales.

-Tracer les diagrammes des efforts normaux, des contraintes et des allongements.

Le modules de Young $E=2.0 \cdot 10^5$ MPa.



Solution



$$\sum F = 0$$

$$R - 15 + 10 - 45 = 0$$

$$R = 60 \text{ kN}$$

Section 1-1

$$0 \leq X_1 \leq 0.6 \text{ m}$$

-L'effort normale

$$R - N_1 = 0$$

$$N_1 = R = 60 \text{ kN}$$

-La contrainte normale

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{S} = \frac{60 * 1000}{500} = 120 \text{ MPa}$$

$$\sigma_1 = 120 \text{ MPa}$$

-L'allongement

$$\Delta l_1 = \frac{\sigma_1 X_1}{E}$$

$$\Delta l_1 = \frac{120 X_1}{2 * 10^5}$$

$$\text{Pour } X_1 = 0 \quad \longrightarrow \quad \Delta l_1 = 0$$

$$\text{Pour } X_1 = 0.6 \text{ m}$$

$$\Delta l_1 = \frac{120 * 0.6 * 1000}{2 * 10^5} = 0.36 \text{ mm}$$

$$\Delta l_1 = 0.36 \text{ mm}$$

Section 2-2

$$0 \leq X_2 \leq 1.0 \text{ m}$$

-L'effort normale

$$R - 15 - N_2 = 0$$

$$N_2 = 60 - 15 = 45 \text{ kN}$$

-La contrainte normale

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{S} = \frac{45 * 1000}{500} = 90 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 90 \text{ MPa}$$

-L'allongement

$$\Delta l_2 = \frac{\sigma_2 X_2}{E}$$

$$\Delta l_1 = \frac{90 X_1}{2 * 10^5}$$

$$\text{Pour } X_2 = 0 \quad \longrightarrow \quad \Delta l_2 = \Delta l_1 = 0.36 \text{ mm}$$

$$\text{Pour } X_2 = 1 \text{ m}$$

$$\Delta l_2 = \Delta l_1 + \frac{90 * 1 * 1000}{2 * 10^5} = 0.36 + 0.45 = 0.81 \text{ mm}$$

$$\Delta l_2 = 0.81 \text{ mm}$$

Section 3-3

$$0 \leq X_3 \leq 1.25 \text{ m}$$

-L'effort normale

$$R - 15 + 10 - N_3 = 0$$

$$N_3 = 60 - 15 + 10 = 55 \text{ Kn}$$

-La contrainte normale

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{S} = \frac{55 * 1000}{500} = 110 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = 100 \text{ MPa}$$

L'allongement

$$\Delta l_3 = \frac{\sigma_3 X_3}{E}$$

$$\Delta l_3 = \frac{110 X_3}{2 * 10^5}$$

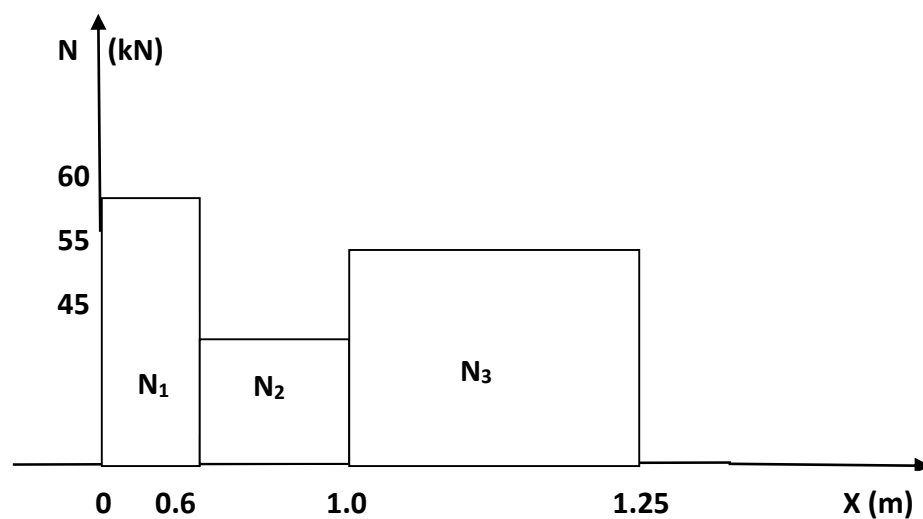
Pour $X_3 = 0 \longrightarrow \Delta l_3 = \Delta l_2 = 0.81 \text{ mm}$

Pour $X_3 = 1.25 \text{ m}$

$$\Delta l_3 = \Delta l_2 + \frac{110 * 1.25 * 1000}{2 * 10^5} = 0.81 + 0,6875 = 1,4975 \text{ mm}$$

$$\Delta l_3 = 1,4975 \text{ mm}$$

Diagrammes des efforts normaux

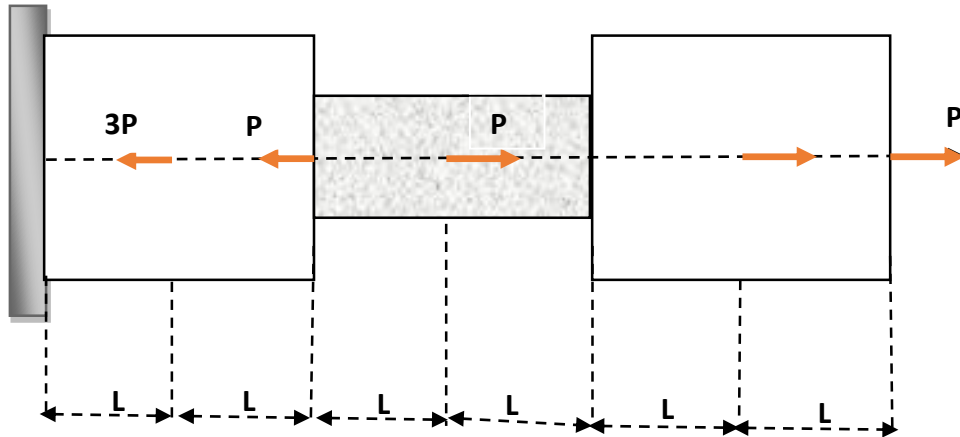


Exercice 6

Soit une barre en acier de diamètre $2d$ dans laquelle est intercalée une barre en cuivre de diamètre d . Elle est exposé à un système de chargement axiale.

Tracer les diagrammes des efforts normaux, des contraintes et des allongements.

$E_{\text{acier}} = 2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $E_{\text{cuivre}} = 1.2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $L = 0.5 \text{ m}$, $d = 20 \text{ mm}$, $P = 10 \text{ kN}$.

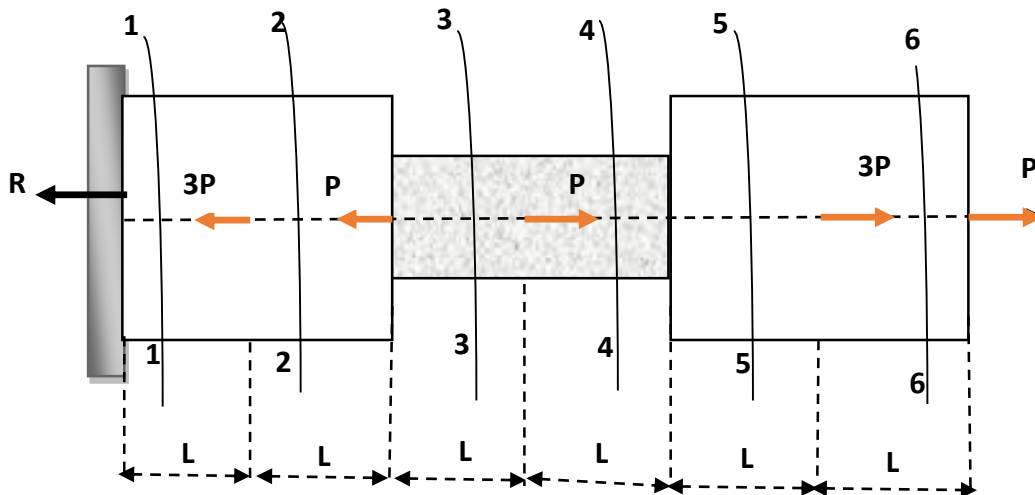


Solution

$$\sum F = 0$$

$$R + 3P + P - P - 3P - P = 0$$

$$R = P = 10 \text{ kN}$$



Section 2-2

$$0 \leq X_2 \leq L$$

L'effort normale

$$N_2 - R - 3P = 0$$

$$N_2 = 3P + R = 4P$$

La contrainte normale

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{S_2} = \frac{4P}{S_2} = \frac{4 * 10 * 1000}{\pi \left(\frac{2d}{2}\right)^2} = \frac{40000}{\pi 20^2}$$

$\sigma_2 = 31.84 \text{ MPa}$

L'allongement

$$\Delta l_2 = \Delta l_1 + \frac{\sigma_2 X_2}{E_A}$$

$$\Delta l_2 = \Delta l_1 + \frac{31.84 X_2}{2.1 * 10^5}$$

Pour $X_1 = 0 \dots\dots\dots \Delta l_2 = \Delta l_1 = 0.0189 \text{ mm}$

Pour $X_1 = L = 0.5 \text{ m}$

$$\Delta l_2 = 0.0189 + 0.0758 = 0.094 \text{ mm}$$

$\Delta l_2 = 0.094 \text{ mm}$

Section 3-3

$$0 \leq X_3 \leq L$$

L'effort normale

$$R + 3P + P - N_3 = 0$$

$$N_3 = P + 3P + P = 5P$$

La contrainte normale

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{S_3} = \frac{5P}{S_3} = \frac{5 * 10 * 1000}{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{50000}{\pi 10^2}$$

$$\sigma_3 = 159.23 \text{ MPa}$$

L'allongement

$$\Delta l_3 = \Delta l_2 + \frac{\sigma_3 X_3}{E_C}$$

$$\Delta l_3 = \Delta l_2 + \frac{159.23 X_3}{1.2 * 10^5}$$

Pour $X_3 = 0 \dots\dots\dots \Delta l_3 = \Delta l_2 = 0.094 \text{ mm}$

Pour $X_3 = L = 0.5 \text{ m}$

$$\Delta l_3 = 0.094 + 0.06634 = 0.757 \text{ mm}$$

$$\Delta l_2 = 0.757 \text{ mm}$$

Section 4-4

$$0 \leq X_4 \leq L$$

L'effort normale

$$N_4 + P - P - 3P - R = 0$$

$$N_4 = 4P$$

La contrainte normale

$$\sigma_4 = \frac{N_4}{S_4} = \frac{4P}{S_4} = \frac{4 * 10 * 1000}{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{40000}{\pi 10^2}$$

$$\sigma_4 = 127.38 \text{ MPa}$$

L'allongement

$$\Delta l_4 = \Delta l_3 + \frac{\sigma_4 X_4}{E_C}$$

$$\Delta l_3 = \Delta l_2 + \frac{127.38 X_4}{1.2 * 10^5}$$

Pour $X_4 = 0$ $\Delta l_4 = \Delta l_3 = 0.757 \text{ mm}$

Pour $X_4 = L = 0.5 \text{ m}$

$$\Delta l_4 = 0.757 + 0.53 = 1.287 \text{ mm}$$

$$\Delta l_4 = 1.287 \text{ mm}$$

Section 5-5

$$0 \leq X_5 \leq L$$

L'effort normale

$$N_5 + P - P - 3P - R = 0$$

$$N_5 = 4P$$

La contrainte normale

$$\sigma_5 = \frac{N_5}{S_5} = \frac{4P}{S_5} = \frac{4 * 10 * 1000}{\pi \left(\frac{2d}{2}\right)^2} = \frac{40000}{\pi 20^2}$$

$$\sigma_5 = 31.84 \text{ MPa}$$

L'allongement

$$\Delta l_5 = \Delta l_4 + \frac{\sigma_5 X_5}{E_A}$$

$$\Delta l_5 = \Delta l_4 + \frac{31.84 X_5}{2.1 * 10^5}$$

Pour $X_5 = 0$ $\Delta l_5 = \Delta l_4 = 1.287 \text{ mm}$

Pour $X_5 = L = 0.5 \text{ m}$

$$\Delta l_5 = 1.287 + 0.075 = 1.362 \text{ mm}$$

$$\Delta l_5 = 1.362 \text{ mm}$$

Section 6-6

$$0 \leq X_6 \leq L$$

L'effort normale

$$N_6 + 3P + P - P - 3P - P = 0$$

$$N_5 = P$$

La contrainte normale

$$\sigma_6 = \frac{N_6}{S_6} = \frac{4P}{S_5} = \frac{10 * 1000}{\pi 20^2} = \frac{10000}{\pi 20^2}$$

$$\sigma_5 = 7.96 \text{ MPa}$$

L'allongement

$$\Delta l_6 = \Delta l_5 + \frac{\sigma_6 X_6}{E_A}$$

$$\Delta l_6 = \Delta l_5 + \frac{7.96 X_6}{2.1 * 10^5}$$

Pour $X_6 = 0$ $\Delta l_6 = \Delta l_5 = 1.362 \text{ mm}$

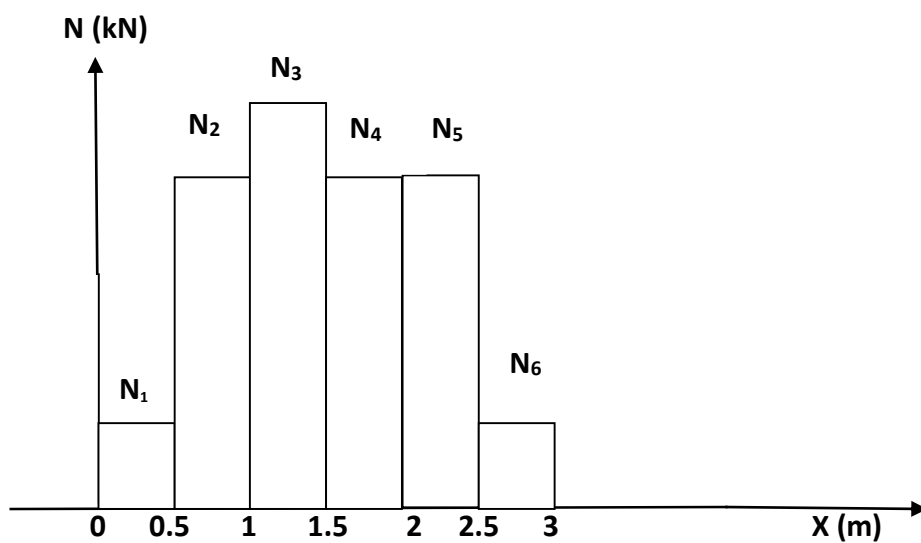
Pour $X_6 = L = 0.5 \text{ m}$

$$\Delta l_6 = 1.362 + 0.023 = 1.385 \text{ mm}$$

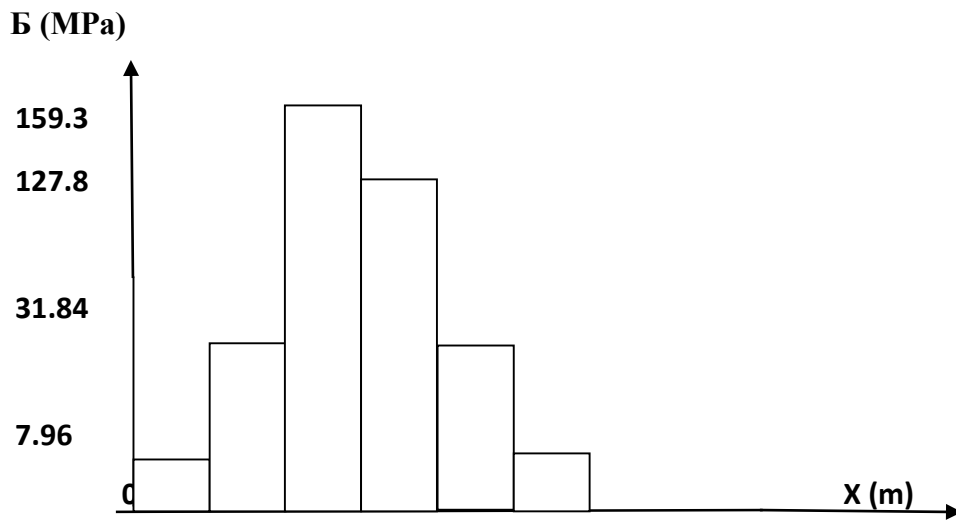
$$\Delta l_5 = 1.385 \text{ mm}$$

Les diagrammes

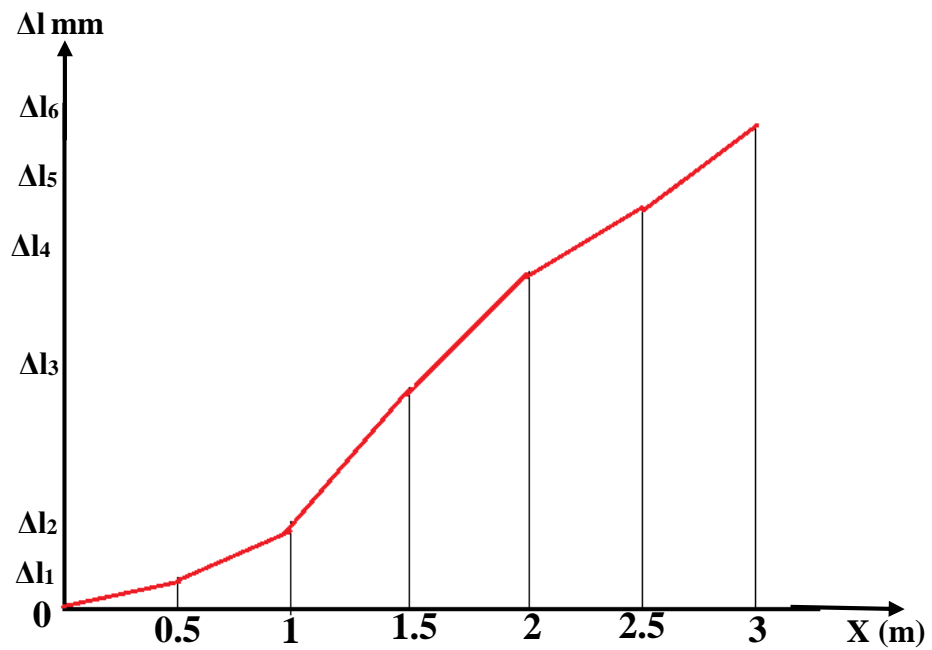
a-diagramme des efforts normaux



b-diagramme des contraintes



c-diagramme des allongements



Chapitre 2 : Cisaillement

2.1. Exemple de corps sollicité au cisaillement ou au glissement transversal

Lorsqu'on cisaille une tôle (figure 2.1), celle-ci s'écrase en partie sous la poussée des lames, puis elle se sépare en deux tronçons qui glissent l'un par rapport à l'autre dans le plan ab .

Comme le talon des lames porte nécessairement sur la tôle, en dehors de la section de cisaillement, il est pratiquement impossible d'appliquer les efforts tranchants F et F' rigoureusement dans le plan de cette section. Le phénomène de cisaillement s'accompagne donc d'écrasement et de flexion.

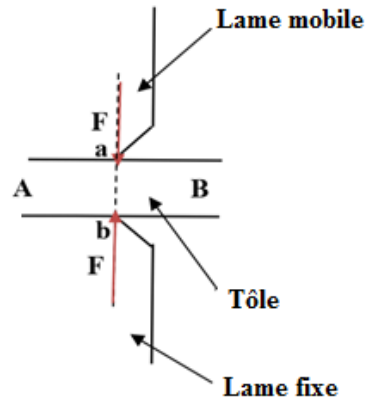


Figure 2.1 : Cisaillement d'une tôle

2.2. Essai de cisaillement

La sollicitation de cisaillement pur est un cas très particulier de la résistance des matériaux car elle est impossible à réaliser expérimentalement. D'autre part le cisaillement simple concerne une section de la poutre et non la poutre entière.

Les essais et résultats qui suivent permettent toutefois de rendre compte des actions tangentielles dans une section droite de la poutre et serviront ainsi dans le calcul de pièces soumises au cisaillement.

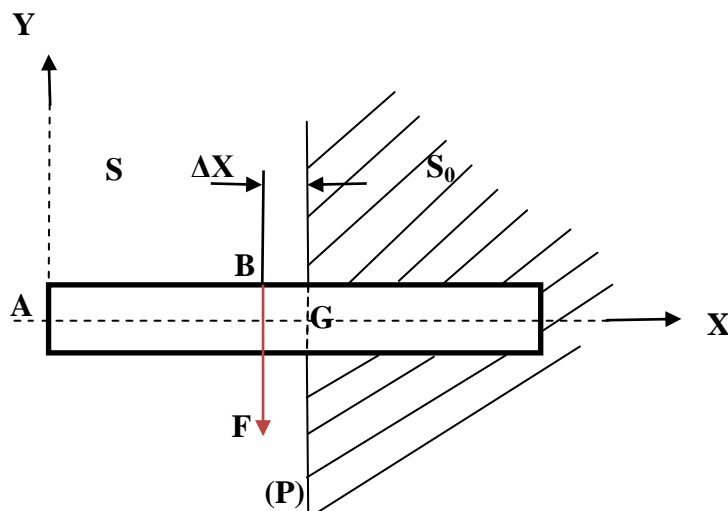


Figure 2.2 : Pièce sollicitée au cisaillement

Considérons une poutre (E) parfaitement encastree et appliquons-lui un effort de cisaillement F uniformément réparti dans le plan (P) de la section droite (S) distante de Δx du plan (S_0) d'encastrement.

On se rapproche des conditions de cisaillement réel, à condition de vérifier que Δx est très petit. Lorsque Δx tend vers 0, on retrouve alors le cas du cisaillement pur.

2.3. Etude des déformations en cisaillement

Si on trace la variation du glissement Δy en fonction de l'effort F, on obtient la courbe représentée dans la figure 2.3 et 2.4, ayant une zone de déformations élastiques (OA) et une zone de déformations permanentes (ABC).

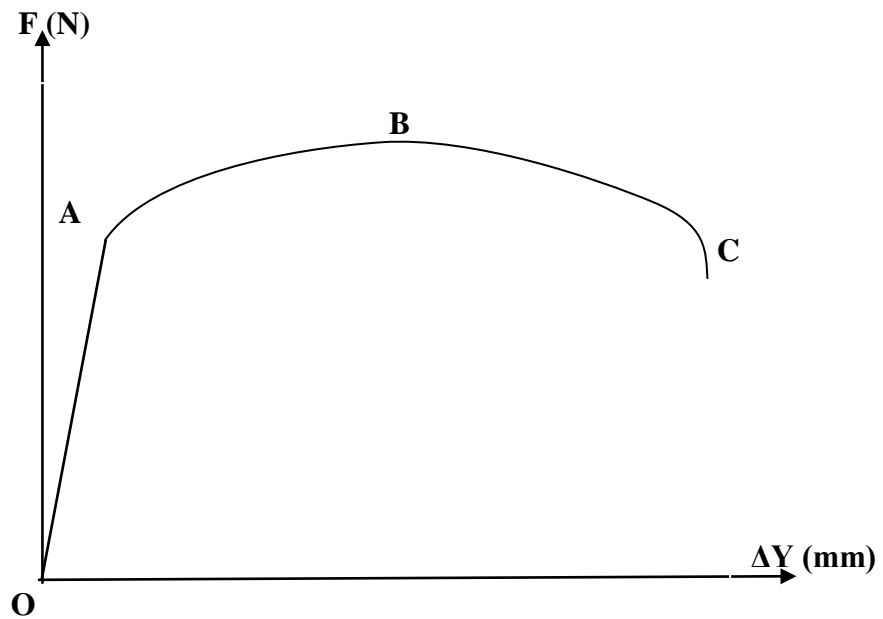


Figure 2.3 : Courbe $F=f(\Delta y)$

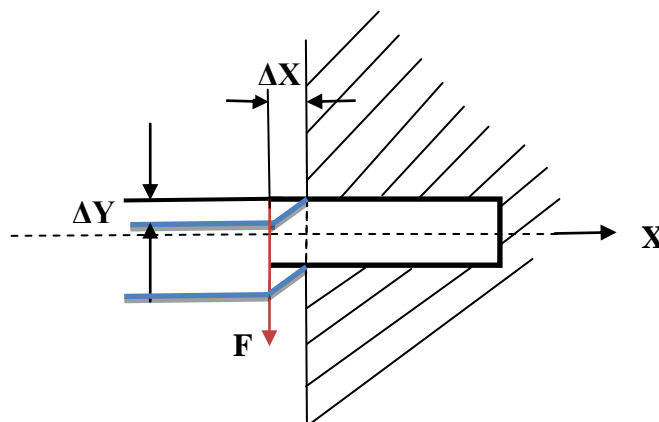


Figure 2.4 : Glissement transversal Δy

La section S cisailée se déplace dans son plan. Ce déplacement est un glissement. Il est défini par un angle de glissement γ défini par $\text{tg } \gamma = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

La déformation γ appelée glissement relatif ou déviation (sans unité) reste faible dans le domaine élastique ($\gamma = \frac{\Delta y}{\Delta x}$), d'où $\text{tgy} \simeq \gamma = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

En déformation élastique, la contrainte de cisaillement τ varie linéairement en fonction de l'angle de glissement γ , en introduisant le module de Coulomb G on obtient :

$$\tau_c = G \gamma \quad (2.1)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.2)$$

ν : étant le coefficient de Poisson

2.4. Etude de la contrainte en cisaillement

Chaque élément de surface ΔS supporte un effort de cisaillement ΔF contenu dans le plan (S). Il y a répartition uniforme des contraintes dans la section droite, d'où :

$$\tau_c = \frac{T}{S} \quad (2.3)$$

La contrainte de cisaillement τ_c est supposée constante dans la section.

Avec :

τ_c : contrainte tangentielle en MPa ou N/mm^2

T: effort tranchant en N

S : aire de la section droite cisailée en mm^2

2.5. Condition de résistance au cisaillement

Pour des raisons de sécurité, la contrainte tangentielle τ_c doit rester inférieure à une valeur limite appelée contrainte admissible de cisaillement $[\tau_c]$ (ou τ_{cadm}).

$$[\tau_c] = \frac{\tau_e}{n_s} \quad (2.4)$$

τ_e : limite élastique en cisaillement et n_s : coefficient de sécurité ;

La condition de résistance s'écrit alors : $\tau_c \leq [\tau_c]$

2.6. Cas de la liaison par rivets ou par boulons

Lorsque l'on calcule au cisaillement une goupille (rivet), on suppose que la distribution des forces extérieures agissant sur le boulon d'une part, et la distribution des contraintes tangentielles dans la section d'autre part, se réalise de manière telle qu'elles soient réparties uniformément dans l'aire de la section de cisaillement.

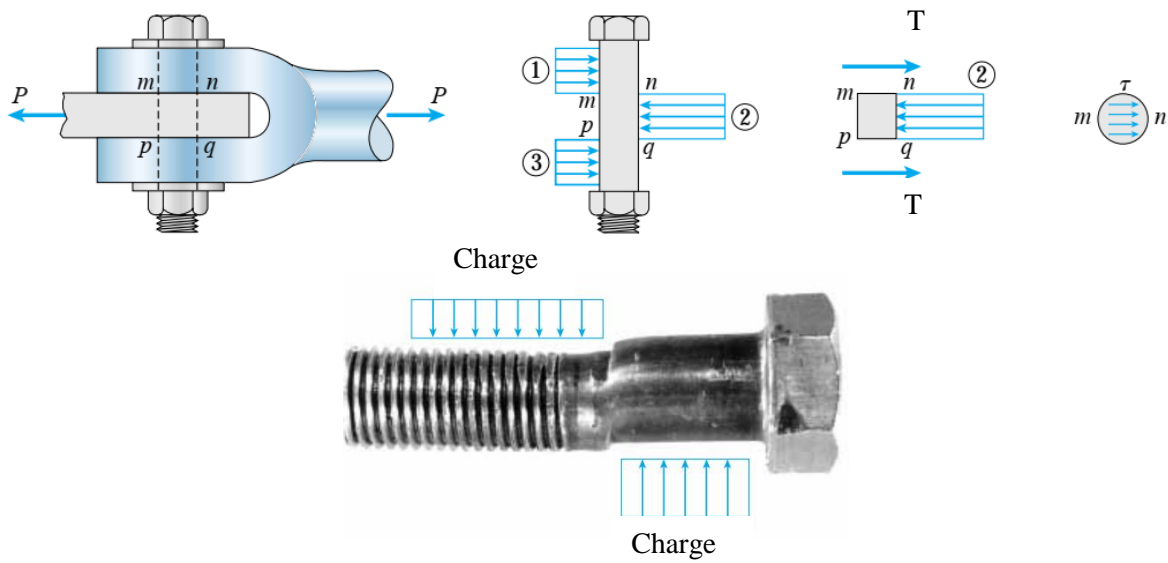


Figure 2.5 : Cisaillement dans le boulon.

La contrainte de cisaillement dans le boulon (rivet ou goupille) de section S_c s'écrit :

$$\tau_c = \frac{F}{S_c} \tag{2.5}$$

Pour n sections cisailées :

$$\tau_c = \frac{F}{n S_c} \tag{2.6}$$

Avec $S_c = \frac{\pi d^2}{4}$

2.7. Etude de la pression superficielle

Dans l'assemblage, il convient, pour être explicite, de vérifier si les pressions qui naissent entre les goupilles (rivets) et l'acier des plaques ou des tôles qui les entourent ne dépassent pas une valeur telle que les trous dans les plaques ou les tôles s'ovalisent sous cette pression, ou que l'acier des goupilles (rivets) s'écrase pour la même cause.

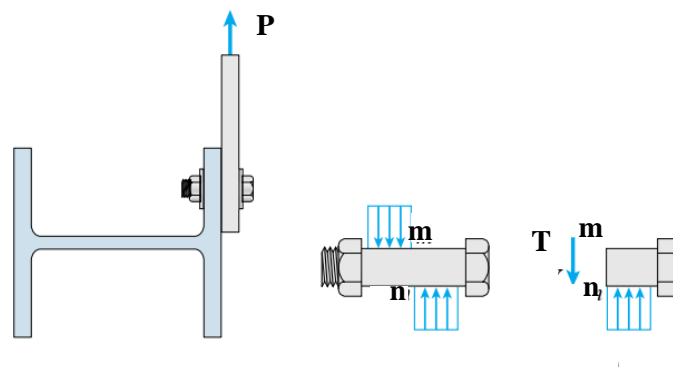


Figure 2.6: Pression superficielle.

Cette pression superficielle est notée σ_b et s'écrit :

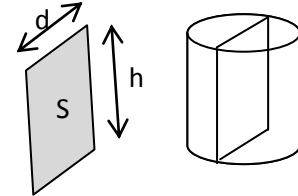
$$\sigma_b = \frac{F}{S_b} \quad (2.7)$$

S_b : aire de la projection de la demi-surface latérale du rivet qui est un rectangle $S_b = h.d$

h et d : hauteur et diamètre du rivet.

Pour n rivets :

$$\sigma_b = \frac{F}{nS_b}$$



2.8. Condition de résistance au cisaillement

Pour qu'une pièce résiste en toute sécurité au cisaillement ; il faut que la contrainte tangentielle soit au plus égale à la résistance pratique au cisaillement R_{pg} :

$$\frac{T}{S} \leq R_{pg} \quad (2.8)$$

D'après les résultats de l'essai de cisaillement, R_{pg} peut s'exprimer en fonction de R_p (résistance pratique à la traction), par exemple :

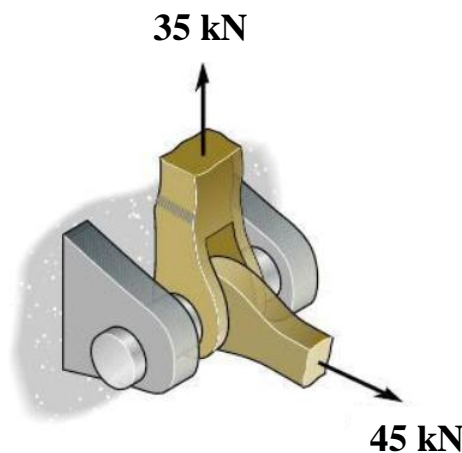
$$R_{pg} = \frac{R_p}{2} \quad \text{pour les aciers doux et mi-doux.}$$

$$R_{pg} = R_p \quad \text{pour les aciers très durs et pour la fonte.}$$

2.9. Exercices corrigés

Exercice 1

Déterminer la contrainte de cisaillement maximale dans la goupille. On donne le diamètre de la goupille $d=35\text{mm}$.



Solution

Calcul la résultante de la force dans la goupille :

$$F = \sqrt{35^2 + 45^2}$$

$$F = \sqrt{35^2 + 45^2}$$

$$F = 57 \text{ kN}$$

Dans ce cas, nous avons double cisaillement

$$T = \frac{F}{2}$$

$$T = 37.5 \text{ kN}$$

$$S = \frac{\pi}{4} * (35)^2$$

$$S = 961.6 \text{ mm}^2$$

La contrainte de cisaillement

$$\tau_c = \frac{T}{S}$$

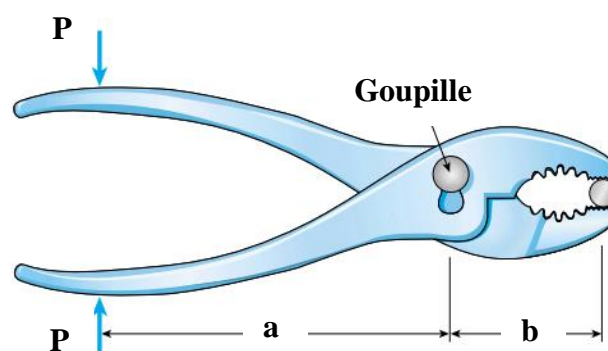
$$\tau_c = \frac{37.5 * 10^3}{961.6}$$

$$\tau_c = 39 \text{ MPa}$$

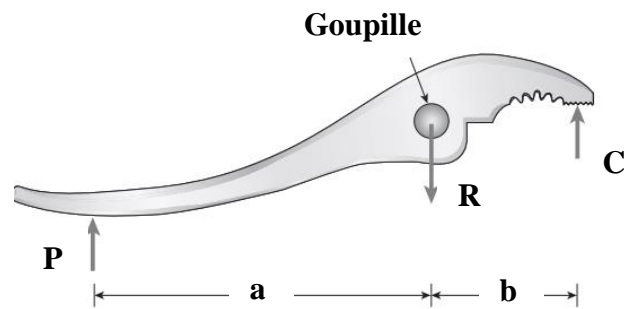
Exercice 2

Quelle est la valeur maximale de la force du serrage dans C dans les mâchoires de la pince illustrée sur la figure si $a=76 \text{ mm}$, $b=25.5$, et la contrainte de cisaillement ultime dans La goupille ($d=5 \text{ mm}$) est de 345 MPa ?

Quelle est la valeur maximale admissible de la charge P qui doit être maintenue si un coefficient de sécurité est de $3,0$ par rapport à la rupture de la goupille ?



Solution



F :force de serrage

R :la réaction dans la goupille

$$a=76 \text{ mm}$$

$$b=25.5 \text{ mm}$$

$$d=5 \text{ mm}$$

$$\sum M_{/Goupille} = 0$$

$$C \cdot b - P \cdot a = 0$$

$$C - \frac{P \cdot a}{b} = 0$$

$$C = \frac{P \cdot a}{b}$$

$$\sum F_{\text{Vert}} = 0$$

$$P + C - R = 0$$

$$R = P + C$$

$$R = P \cdot \left(1 + \frac{a}{b}\right) = C \cdot \left(1 + \frac{b}{a}\right)$$

T : l'effort tranchant dans la goupille

$$T=R$$

$$C = \frac{T}{1 + \frac{b}{a}}$$

et

$$P = \frac{T}{1 + \frac{a}{b}}$$

La force de serrage maximum

$$\tau_{\text{ulti}} = \frac{T_{\text{ulti}}}{S_{\text{goupille}}}$$

$$T_{\text{ulti}} = \tau_{\text{ulti}} * S_{\text{goupille}}$$

$$T_{\text{ulti}} = 345 * \frac{\pi}{4} * (5)^2$$

$$T_{\text{ulti}} = 6770.62 \text{ N}$$

$$C_{\text{ulti}} = \frac{T_{\text{ulti}}}{1 + \frac{b}{a}} = \frac{6770.62}{1 + \frac{25.5}{76}}$$

$$C_{\text{ulti}} = 5071.62 \text{ N}$$

La force de serrage ultime

$$P_{\text{ulti}} = \frac{T_{\text{ulti}}}{1 + \frac{a}{b}} = \frac{6770.62}{1 + \frac{76}{25.5}}$$

$$P_{\text{ulti}} = 1701.16 \text{ N}$$

Donc la force de serrage admissible

$$P_{\text{adm}} = \frac{P_{\text{adm}}}{n_s} = \frac{1701.16}{3}$$

$$P_{\text{adm}} = 567.05 \text{ N}$$

Exercice 3

La roue de support d'un échafaudage est maintenue en place sur le pied à l'aide d'une goupille de 6 mm de diamètre comme illustré. Si la roue est soumise à une force normale de 5 kN, déterminez la contrainte de cisaillement.



Solution

$$F = 5 \text{ kN}$$

Nous avons un double cisaillement (deux section)

$$T = \frac{F}{2}$$

$$T = 2.5 \text{ kN}$$

$$S = \frac{\pi}{4} * (0.006)^2$$

$$S = 0.028 * 10^{-3} \text{ mm}^2$$

La contrainte de cisaillement :

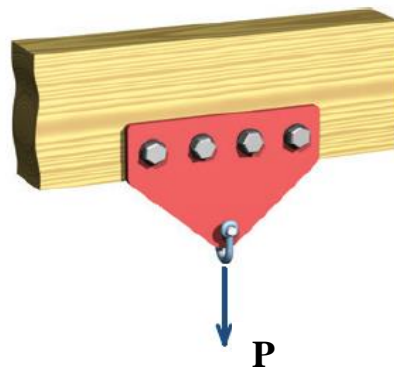
$$\tau_c = \frac{T}{S}$$

$$\tau = \frac{2.5 * 10^3}{0.028 * 10^{-3}}$$

$$\tau = 89.28 \text{ MPa}$$

Exercice 4

Dans la Figure ci-dessus déterminez la contrainte de cisaillement dans des boulons de diamètre 10 mm si la charge appliquée est $P=10 \text{ kN}$.



Solution

La force appliquée pour chaque boulon :

$$P_{\text{boulon}} = \frac{P}{4} = \frac{10}{4} = 2.5 \text{ kN}$$

$$S_{\text{boulon}} = \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{\pi}{4} 10^2 = 78.5 \text{ mm}^2$$

la contrainte de cisaillement dans chaque boulon :

$$\tau = \frac{P_{\text{boulon}}}{S_{\text{boulon}}}$$

$$\tau = \frac{2.5 * 10^3}{78.5}$$

$$\tau = 31.84 \text{ MPa}$$

Exercice 5

Deux barres chargées en traction par une force $F = 70 \text{ kN}$ sont assemblées en utilisant deux plaques rectangulaires et quatre boulons.

Déterminer le diamètre des boulons d'un joint boulonné, si la contrainte limite de cisaillement est 400 MPa et le facteur de sécurité utilisé est 3.



Solution

Le diamètre des boulons (d)

On a :

$$\tau_{ad} = \frac{P}{S}$$

on a aussi

$$\tau_{ad} = \frac{\tau_l}{n}$$

Avec ;

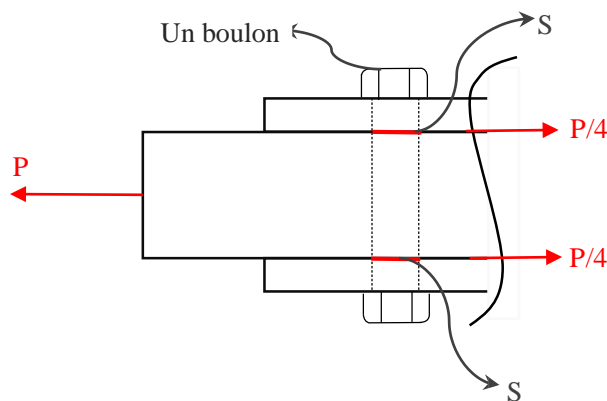
τ_{ad} : Contrainte de cisaillement admissible.

τ_l : Contrainte de cisaillement limite.

n_s : coefficient de sécurité.

$$\frac{\tau_l}{n_s} = \frac{F}{S}$$

Il est à noter que de chaque côté de la section, il y a quatre surfaces qui résistent à la force de traction P (car il y a deux boulons dans lesquels chaque boulon a deux surfaces qui résistent à une force de P/4) "voir la figure ci-dessous"



Donc :

$$\frac{\tau_l}{n_s} = \frac{P}{4 * S}$$

$$\frac{\tau_l}{n_s} = \frac{P}{4 * \frac{\pi * d^2}{4}}$$

$$\frac{\tau_l}{n_s} = \frac{P}{\pi * d^2}$$

$$d = \sqrt{\frac{P * n}{\pi * \tau_l}}$$

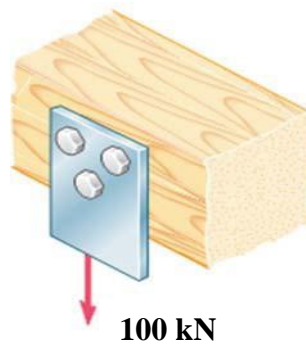
$$d = \sqrt{\frac{70000 * 3}{3.14 * 400}}$$

$$d = 12.93 \text{ mm}$$

Exercice 6

Une plaque est fixée à une poutre en bois par l'intermédiaire de trois vis en acier.

Calculer la surface de chaque vis si la plaque doit supporter une charge de 100 kN, que la contrainte ultime de cisaillement de l'acier est 380 MPa, et que le coefficient de sécurité utilisé est 3.5.



Solution

On a :

$$\tau_{ad} = \frac{P}{S}$$

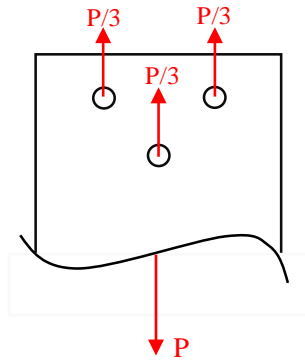
On a aussi :

$$\tau_{ad} = \frac{\tau_l}{n}$$

Donc :

$$\frac{\tau_l}{n_s} = \frac{F}{S}$$

Il est à noter que, il y a trois surfaces qui résistent à la force de traction P (car il y a trois vis dans lesquels chaque vis supporte une charge de P/3).



Donc :

$$\frac{\tau_1}{n_s} = \frac{F}{3 * S}$$

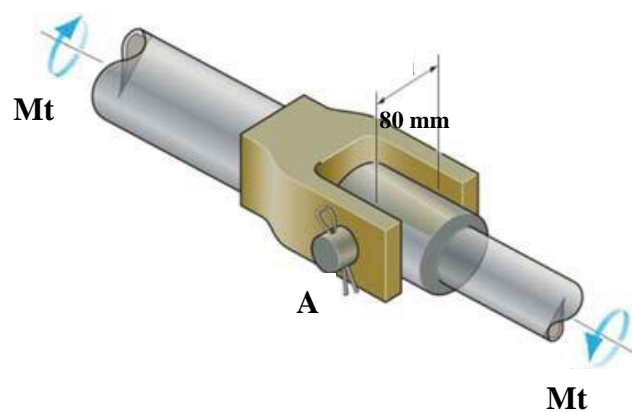
$$S = \frac{F * n_s}{3 * \tau_1}$$

$$S = \frac{100000 * 3.5}{3 * 380}$$

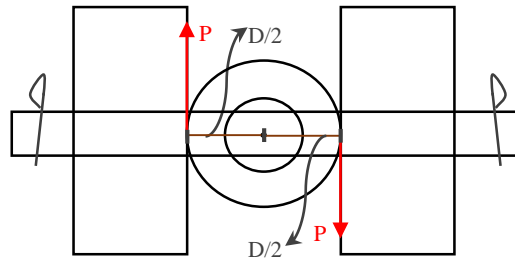
S= 307.01 mm²

Exercice 7

Déterminer le diamètre minimal de la tige A si sa contrainte limite de cisaillement est 170 MPa. Le couple de torsion Mt=4 kN.m. Utiliser un coefficient de sécurité égal à 3.5.



Solution



On a :

$$M_t = P * \frac{D}{2} + P * \frac{D}{2}$$

$$M_t = P * D$$

Donc :

$$P = \frac{M_t}{D}$$

$$P = \frac{4 * 1000}{80 * 10^{-3}}$$

$$P = 50 \text{ kN}$$

Le diamètre minimal :

on a :

$$\tau_{ad} \geq \frac{P}{S}$$

on a aussi :

$$\tau_{ad} = \frac{\tau_1}{n_s}$$

$$\frac{\tau_1}{n_s} \geq \frac{P}{S}$$

Il est à noter que, il y a deux surfaces qui résistent au couple de torsion M_t .

$$\frac{\tau_1}{n_s} \geq \frac{P}{2 * S}$$

$$\frac{\tau_1}{n_s} \geq \frac{P}{2 * \frac{\pi * d^2}{4}}$$

$$\frac{\tau_1}{n_s} \geq \frac{P}{\frac{\pi * d^2}{2}}$$

$$d \geq \sqrt{\frac{P * n_s}{\frac{\pi * \tau_1}{2}}}$$

$$d \geq \sqrt{\frac{P * n_s * 2}{\pi * \tau_1}}$$

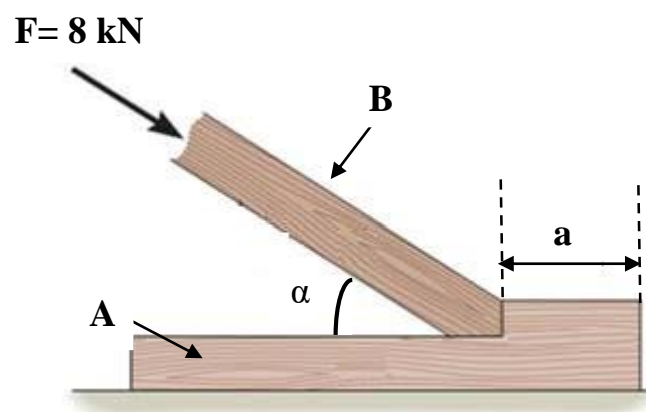
$$d \geq \sqrt{\frac{50 * 1000 * 3.5 * 2}{3.14 * 170}}$$

$$d \geq 25.60 \text{ mm}$$

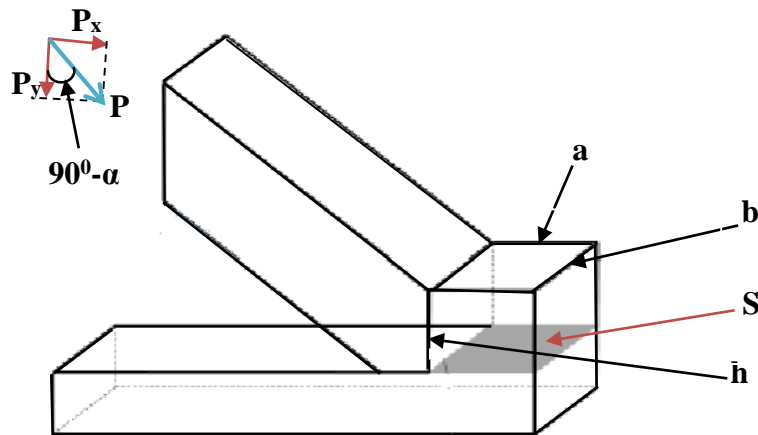
Exercice 8

La barre B est soumise à une force de compression de 8 kN. Les deux barres A et B sont fabriquées en bois, déterminer la valeur minimale de a pour que la contrainte de cisaillement ne dépasse pas 0.045 MPa.

Déterminer la hauteur minimale de l'épaulement pour une contrainte de compression de 0.08 MPa. Prendre la largeur de A et B égale à 140 mm et $\alpha = 37^\circ$.



Solution



$$P_x = P * \sin(90 - \alpha) = P * \sin(53^\circ)$$

$$P_x = 8 * \sin(53^\circ)$$

$$P_x = 6.4 \text{ kN}$$

la valeur minimale de a

on a :

$$\tau \geq \frac{P_x}{S}$$

$$\tau \geq \frac{P_x}{a * b}$$

Donc :

$$a \geq \frac{P_x}{\tau * b}$$

$$a \geq \frac{6.4 * 1000}{80 * 1000 * 0.14}$$

$$\mathbf{a \geq 0.598 \text{ m}}$$

La hauteur minimale de h :

$$\sigma = \frac{P_x}{S}$$

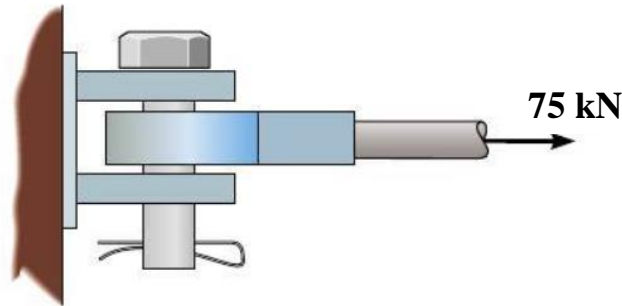
$$\sigma = \frac{P_x}{h * b}$$

$$h = \frac{6.4 * 1000}{0.14 * 80 * 1000}$$

$$\mathbf{h = 0.57 \text{ m}}$$

Exercice 9

La goupille est constituée d'un matériau présentant une contrainte de rupture de cisaillement de $\tau = 90$ MPa. Déterminer le diamètre minimum de la goupille en mm si le facteur de sécurité $n = 2$.

**Solution**

$$\sum F_x = 0$$

$$75 - 2T = 0$$

$$T = 37.5 \text{ kN}$$

$$\tau_{\text{adm}} = \frac{\tau}{n_s} = \frac{90}{2}$$

$$\tau_{\text{adm}} = 45 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\text{adm}} = \frac{T}{S}$$

$$45 * 10^6 = \frac{37.5 * 10^3}{\frac{\pi}{4} d^2}$$

$$\mathbf{d = 0.032581 \text{ m} = 32.58 \text{ mm}}$$

Donc on prend $d=33$ mm

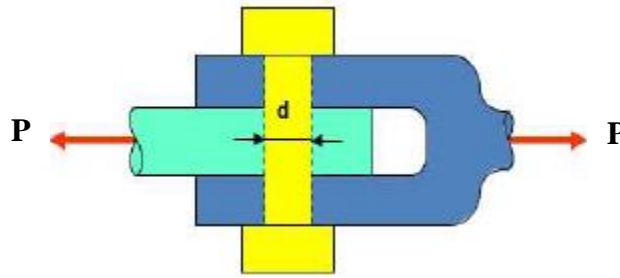
Exercice 10

Soit la figure ci-dessus, l'axe doit supporter un effort de cisaillement de 13kN.

Calculer :

- 1/ Calculer le diamètre minimal.
- 2/ Calculer la contrainte de cisaillement.
- 3/ Calculer la déformation angulaire.

La contrainte de cisaillement admissible est 175 MPa ,le module d'élasticité transversale $G = 90000$ MPa et le coefficient de sécurité $n_s = 2.5$.



Solution

1-Calcul le diamètre minimal

$$\frac{\tau_l}{n_s} \geq \frac{P}{2 * S}$$

Avec :

$$S = \frac{\pi * d^2}{4}$$

$$d \geq \sqrt{\frac{P * n_s * 4}{2 * \pi * \tau_l}}$$

$$d \geq \sqrt{\frac{13 * 1000 * 2.5 * 4}{2 * 3.14 * 175}}$$

$$d \geq 10.87 \text{ mm}$$

2-Calcul la contrainte de cisaillement

$$\tau_a = \frac{P}{2 * S}$$

$$\tau_a = \frac{P}{2 * \frac{\pi * d^2}{4}}$$

$$\tau_a = \frac{P}{\frac{\pi * d^2}{2}}$$

$$\tau_a = \frac{13000}{\frac{\pi * 10.87^2}{2}}$$

$$\tau_a = 70.07 \text{ MPa}$$

3-Calcul la déformation angulaire

$$\tau_a = G * \delta_a$$

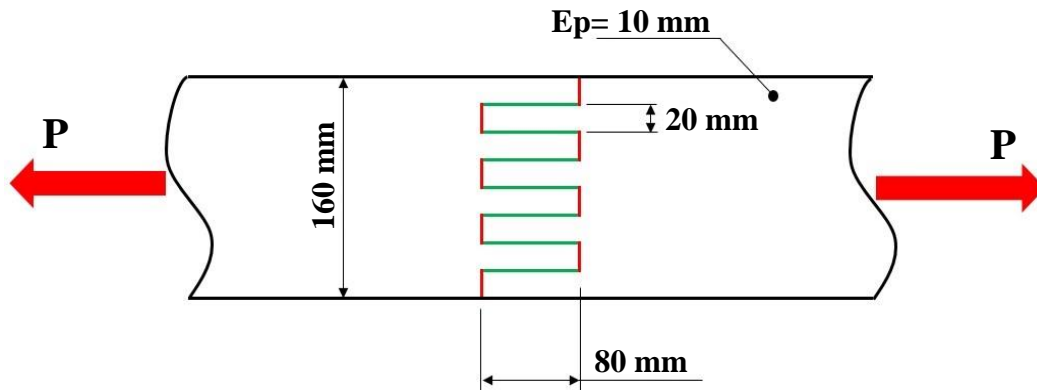
$$\delta_a = \frac{\tau_a}{G}$$

$$\delta_a = \frac{70.07}{90000}$$

$$\delta_a = 7.78 * 10^{-4} \text{ rad}$$

Exercice 11

Calculer la contrainte de cisaillement et de traction sachant que $P = 5.5 \text{ kN}$.



Solution

Traction en rouge

$$\sigma = \frac{N}{S_t}$$

Avec :

$$N = \frac{P}{8}$$

$$\sigma = \frac{P}{8 * S_t}$$

$$\sigma = \frac{5.5 * 1000}{8 * 20 * 10}$$

$$\sigma = 3.43 \text{ MPa}$$

Cisaillement en vert

$$\tau = \frac{T}{S_c}$$

Avec :

$$T = \frac{P}{7}$$

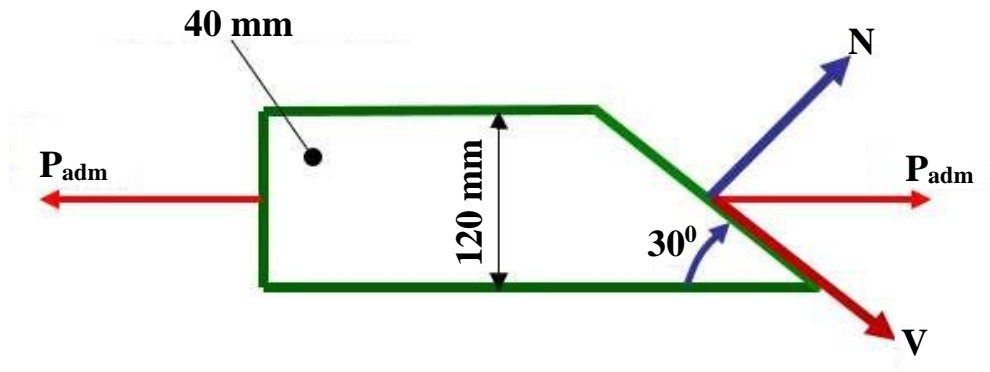
$$\tau = \frac{P}{7 * S_c}$$

$$\sigma = \frac{5.5 * 1000}{7 * 80 * 10}$$

$$\sigma = 0.98 \text{ MPa}$$

Exercice 12

Calculer P_{adm} , sachant que $\sigma_{adm} = 3 \text{ MPa}$ et $\tau_{adm} = 2 \text{ MPa}$



Solution

Traction :

$$\sigma_{adm} \geq \frac{N}{S}$$

Avec :

$$N = P_{adm} * \sin 30$$

$$S = \frac{40 * 120}{\sin 30}$$

$$\sigma_{adm} \geq \frac{P_{adm} * \sin 30}{\frac{40 * 120}{\sin 30}}$$

$$P_{adm} \leq \sigma_{adm} * \frac{40 * 120}{\sin 30 * \sin 30}$$

$$P_{adm} \leq 3 * \frac{40 * 120}{\sin 30 * \sin 30}$$

$$P_{adm} \leq 57.6 \text{ kN}$$

Cisaillement

$$\tau_{adm} \geq \frac{T}{S}$$

Avec :

$$T = P_{adm} * \cos 30$$

$$S = \frac{40 * 120}{\sin 30}$$

$$\tau_{adm} \geq \frac{P_{adm} * \cos 30}{\frac{40 * 120}{\sin 30}}$$

$$P_{adm} \leq \tau_{adm} * \frac{40 * 120}{\sin 30 * \cos 30}$$

$$P_{adm} \leq 2 * \frac{40 * 120}{\sin 30 * \cos 30}$$

$$P_{adm} \leq 22.32 \text{ kN}$$

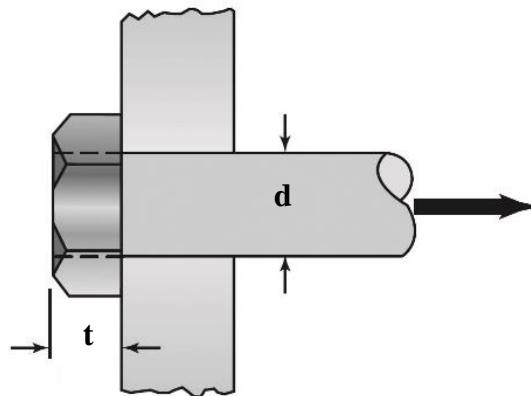
La valeur admissible à ne pas dépasser sera donc 22,32 kN.

Exercice 13

Un boulon de diamètre $d= 14 \text{ mm}$ passe par un trou d'une plaque comme le montre la figure ci-dessous. La tête s'appuie directement contre cette plaque. Chaque côté de l'hexagonale a la longueur $r=12 \text{ mm}$ En outre l'épaisseur de tête du boulon $t=7 \text{ mm}$ et la force de traction F dans le boulon est de 5.5 kN .

Déterminer :

- 1-la contrainte moyenne σ_b entre la tête de l'hexagonale du boulon et la plaque.
- 2-la contrainte de cisaillement moyenne τ_b dans la tête du boulon et la plaque.

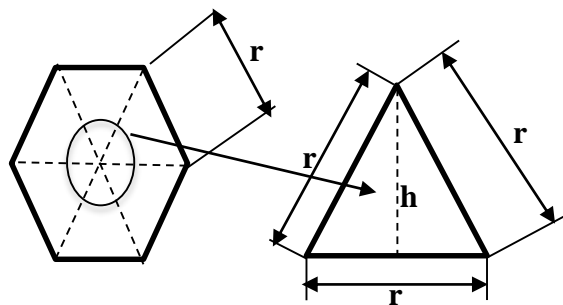


Solution

1-la contrainte moyenne σ_b entre la tête de l'hexagonale du boulon et la plaque

$$S_{Hex} = 6 * S_{Tri}$$

$$S_{Tri} = \frac{1}{2} * r * h$$



$$r^2 = h^2 + \frac{r^2}{4}$$

Donc :

$$h = \frac{\sqrt{3} * r}{2}$$

$$S_{\text{Tri}} = \frac{\sqrt{3} * r^2}{4}$$

$$\sigma_b = \frac{F}{S_b}$$

Avec :

$$S_b = S_{\text{Hex}} - \frac{\pi * d^2}{4}$$

$$S_b = 6 * \frac{\sqrt{3} * r^2}{4} - \frac{\pi * d^2}{4}$$

$$S_b = 6 * \frac{\sqrt{3} * 12^2}{4} - \frac{\pi * 14^2}{4}$$

$$S_b = 222.26 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_b = \frac{F}{S_b} = \frac{5.5 * 1000}{222.26}$$

$$\sigma_b = 24.74 \text{ MPa}$$

2-la contrainte de cisaillement moyenne τ_b dans la tête du boulon et la plaque

$$\tau_m = \frac{F}{S_s}$$

Avec :

$$S_s = \pi * d * t$$

$$\tau_m = \frac{F}{\pi * d * t}$$

$$\tau_m = \frac{5.5 * 1000}{\pi * 14 * 7}$$

$$\tau_m = 17.87 \text{ MPa}$$

Exercice 14

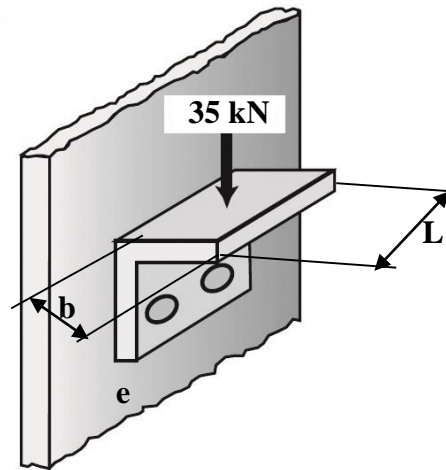
Une tôle de forme équerre d'une épaisseur $e=12$ mm est fixé par deux boulons de 16 mm de diamètre pour chacun. Une charge concentrée de 35 kN agit sur la face supérieure de cette tôle. Cette face supérieure possède une longueur $L=160$ mm et une largeur $b=70$ mm.

Déterminer :

1-La pression sur la face supérieure.

2-la contrainte moyenne $\bar{\sigma}_b$ entre la tôle et les boulons.

3-la contrainte moyenne de cisaillement τ_m dans les boulons.



Solution :

1-La pression sur la face supérieure

$$P = \frac{F}{S}$$

Avec :

$$S = L * b$$

$$P = \frac{F}{L * b}$$

$$P = \frac{35 * 1000}{160 * 70}$$

$$P = 3.125 \text{ MPa}$$

2- la contrainte moyenne $\bar{\sigma}_b$ entre la tôle et les boulons

$$\bar{\sigma}_b = \frac{F}{S_t}$$

avec : $S_t = d * e$

$$\bar{\sigma}_b = \frac{F}{d * e}$$

$$\bar{\sigma}_b = \frac{35 * 1000}{16 * 12}$$

$$\bar{\sigma}_b = 182.29 \text{ MPa}$$

3-La contrainte moyenne de cisaillement τ_m dans les boulons

$$\tau_b = \frac{F}{S_s}$$

avec : $S_s = 2 * \frac{\pi * d^2}{4}$

$$\tau_b = \frac{35 \cdot 1000}{2 \cdot \frac{\pi \cdot 16^2}{4}}$$

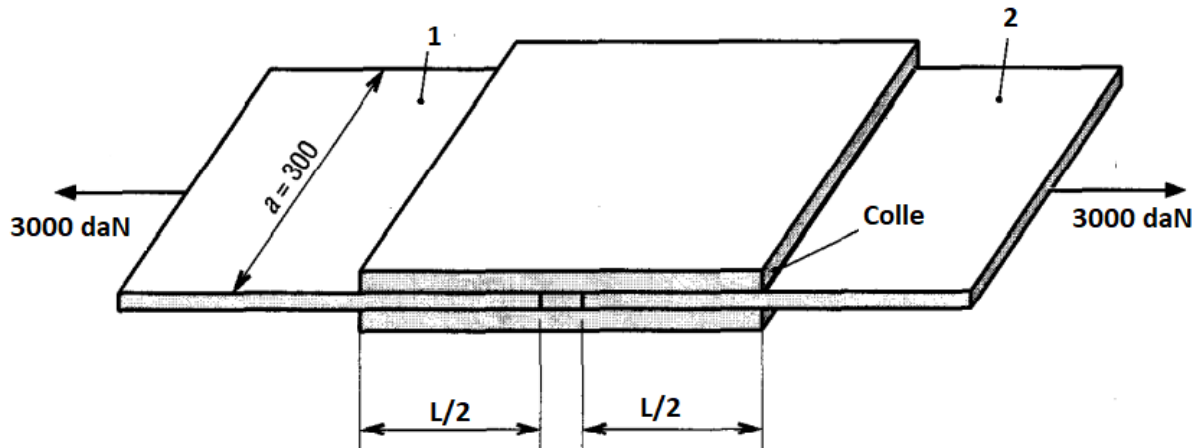
$$\tau_b = 87.08 \text{ MPa}$$

Exercice 15

Les feuilles de plastique 1 et 2 sont collées comme indique la figure proposée.

La contrainte de cisaillement admissible dans le joint collé est de $8 \text{ daN} \cdot \text{cm}^{-2}$.

Quelle est la longueur L nécessaire si l'ensemble supporte un effort de traction F de 3000 daN .



Solution

La condition de résistance

$$\sigma_c \leq [\sigma_c]$$

$$\frac{F}{S} \leq [\sigma_c]$$

$$s = 300 \cdot \frac{L}{2}$$

$$s = 150 \cdot L$$

$$\frac{F}{150 \cdot L} \leq [\sigma_c]$$

$$L \geq \frac{F}{[\sigma_c] \cdot 150}$$

$$L \geq \frac{3000}{8 \cdot 10^{-2} \cdot 150}$$

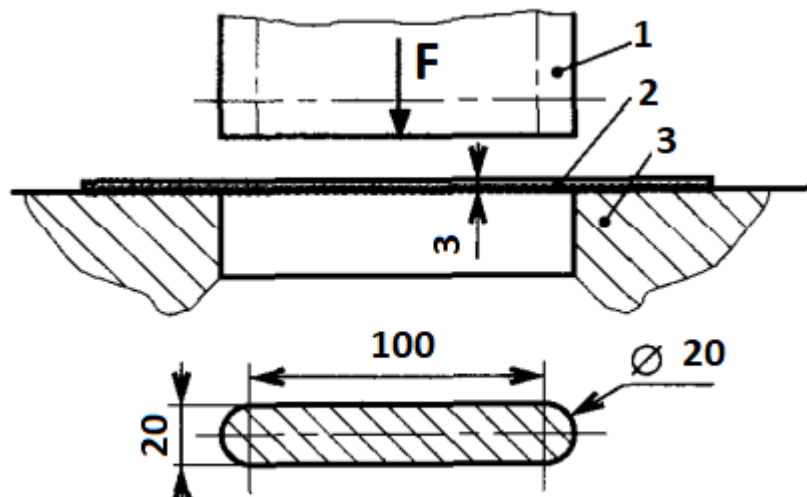
$$L \geq 205 \text{ MM}$$

Exercice 16

Un poinçon 1 réalise un troublong dans une tôle de 3 mm d'épaisseur (2).

a) Si la contrainte admissible de cisaillement du matériau de la tôle est de $25 \text{ daN} \cdot \text{mm}^{-2}$, déterminer l'effort F nécessaire au poinçonnage.

b) Endéduire la contrainte de compression dans le poinçon.

**Solution****La condition de résistance**

$$\sigma \leq [\sigma]$$

$$\frac{F}{S} \leq [\sigma]$$

$$F \leq [\sigma] * S$$

$$S = \left(2 * \pi * \frac{D}{2} + 200 \right) * e$$

$$S = \left(2 * \pi * \frac{20}{2} + 200 \right) * 3$$

$$S = 788,4 \text{ mm}^2$$

$$F \leq 25 * 788,4$$

$$F \leq 19\,710 \text{ daN}$$

La contrainte de compression

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

$$S = \pi * \frac{D^2}{4} + 100 * 20$$

$$S = 2\,314 \text{mm}^2$$

$$\sigma = \frac{19\,710}{2\,314}$$

$$\sigma = 8.51 \text{daN} * \text{mm}^{-2}$$

Chapitre 3 : Torsion

4.1. Torsion uniforme d'un arbre circulaire

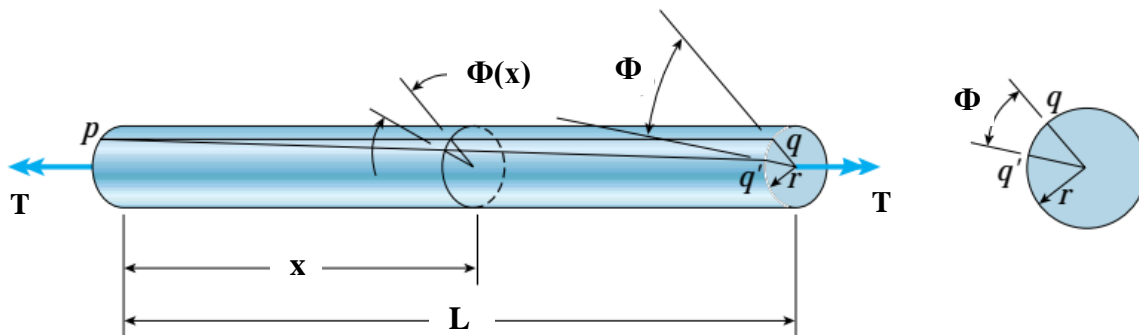


Figure 4.1 : Torsion uniforme d'un arbre circulaire.

Considérons une barre de longueur L , encastée à une extrémité, l'autre extrémité étant libre. Traçons un rayon sur la section droite de l'extrémité libre, en petites déformations, on suppose que ce rayon reste rectiligne, il tourne d'un angle Φ . On suppose que la déformation soit homogène, l'angle avec lequel tourne une section droite quelconque dépend de manière linéaire de la distance à l'encastrement. On définit le taux de rotation, ou angle unitaire de torsion θ par :

$$\theta = \frac{\varphi}{L} \quad (4.1)$$

θ : radian par mètre (rad/m).

4.2. Contrainte de torsion

Selon la théorie d'Euler-Bernoulli, si l'on reste en petites déformations, le moment de torsion M_t et la contrainte de cisaillement τ sont proportionnelles par la distance r par rapport à l'axe de torsion :

$$\tau(r) = \frac{M_t}{I_p} r \quad (4.2)$$

Où

M_t : est le moment de torsion.

I_p : est le moment quadratique polaire.

4.3. Principe

Une éprouvette cylindrique de révolution est encastée à son extrémité (S_1) de centre de gravité G_1 . On applique à l'extrémité droite sur la section (S_2) de centre gravité G_2 une action mécanique modélisée en G_2 par un moment de torsion M_{G_2} .

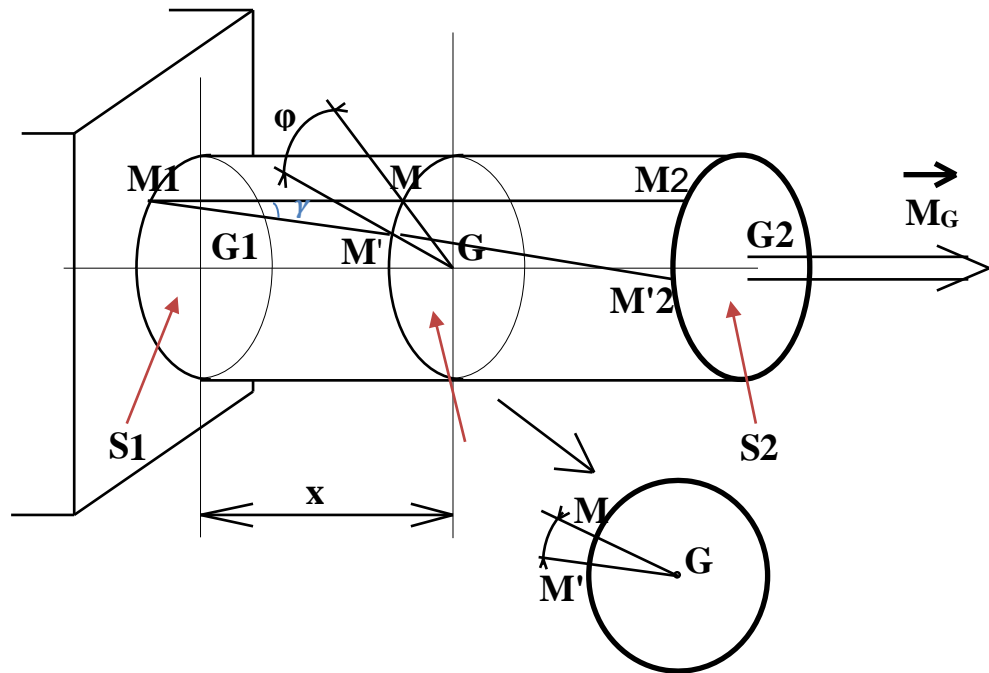


Figure 4.2: Illustration de l'essai de torsion simple.

Le déplacement d'une section droite (S) est uniquement une rotation d'un angle φ autour de son axe. Cette rotation est proportionnelle à sa distance x par rapport à (S1).

On obtient une courbe illustrée dans la figure 4.3 semblable à celle de l'essai de traction :

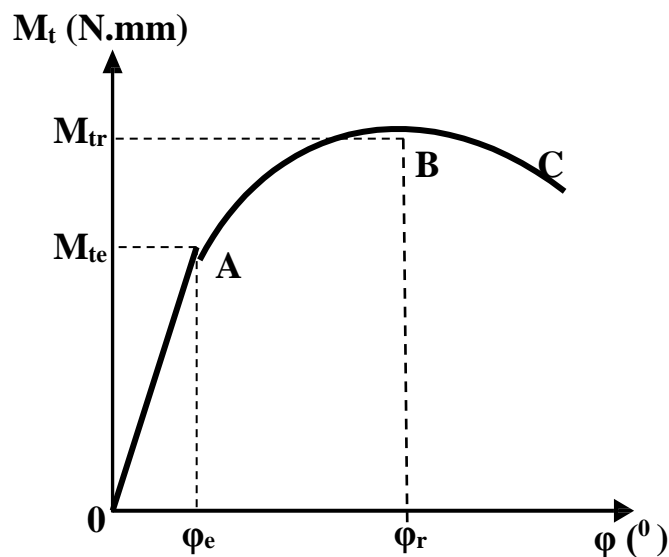


Figure 4.3 : Courbe $M_t = f(\varphi)$

Elle comprend une zone de déformations élastiques où l'angle de torsion φ est proportionnel au moment de torsion. A partir du point A les déformations croissent rapidement jusqu'à rupture de l'éprouvette au point C.

4.4. Etude des déformations

L'essai montre que toute section plane et normale à l'axe du cylindre, reste plane et normale à l'axe et que la distance relative entre deux sections reste sensiblement constante. Toutes les fibres se déforment donc suivant une hélice, sauf la ligne moyenne (l'axe) qui reste droite.

On constate que le rapport $\theta = \frac{\varphi}{x}$ reste toujours constant. Ce rapport est appelé angle unitaire de torsion [rad /mm].

φ = angle de rotation de la section S en rad.

x = distance séparant une section (S) à la section de référence(S₁) en mm.

4.5. Etude des contraintes

On considère une section (S) à une distance x de (S₁). Après déformation, le point M (Figure 4.2) situé à une distance ρ du centre G se déplace en M', la génératrice M₁M subit alors une déviation γ comparable à celle observée dans l'étude du cisaillement simple et devient M₁M'.

La distance relative entre deux sections reste constante au cours de la déformation, donc l'allongement Δx = 0, alors on peut écrire que la déformation longitudinale ε_x = 0, on admet donc que la composante normale est nulle.

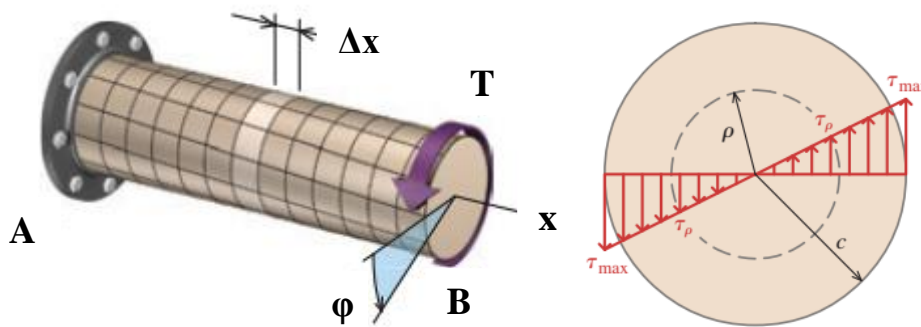


Figure 4.4: Répartition des contraintes au niveau de la section.

La loi de Hooke pour les contraintes tangentielles s'exprime donc par : $\tau = G \cdot \gamma$ où G est le module d'élasticité transversale ou module de Coulomb.

Dans le triangle M₁MM' avec γ très petit,

$$\text{tg}\gamma \approx \gamma = \frac{MM'}{M_1M} = \frac{MM'}{x} = \frac{\varphi \rho}{x} \tag{4.3}$$

On aura :

$$\gamma = \frac{\varphi}{x} \rho = \theta \cdot \rho \tag{4.4}$$

La contrainte tangentielle s'écrit alors : $\tau = G.\theta.\rho$

τ : contrainte tangentielle de torsion (en MPa)

ρ : distance du point M à la ligne neutre ou axe de la pièce qui ne subit aucun effort (en mm)

θ : angle unitaire (en rad/ mm)

G : module d'élasticité transversale ou module de Coulomb (en MPa)

Remarque :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.5)$$

Pour les aciers, $\nu = 0,3 \Rightarrow G \approx 0,4E$

Pour le point M situé sur la périphérie de la surface du solide tel que $\rho = R$ (Rayon), τ atteint la valeur $\tau_{\max} = G.\theta.R$

4.6. Relation entre contrainte et moment de torsion

En un point M de la section, la distance $GM = \rho$, la contrainte de torsion est $\tau_M = G.\theta.\rho$, par conséquent la force tangentielle dF agissant sur l'élément dS de la section S à cette distance est $dF = \tau_M.dS$ et le moment de torsion qui est égal au produit vectoriel de la distance par la force est :

$$M_t = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge d\overrightarrow{F} = \int_S \rho. \tau_M dS = \int_S \rho. G. \theta. \rho. dS = G. \theta. \int_S \rho^2 dS = G. \theta. I_p$$

$$I_p = \int_S \rho^2 dS \quad (4.6)$$

Le moment quadratique polaire de la section S par rapport à son centre de gravité G, I_p dépend de la forme et des dimensions de cette section.

La relation entre le moment et la déformation (équation de déformation) est:

$$M_t = G.\theta.I_p \quad (4.7)$$

Il en découle que : $\tau_M = \frac{M_t}{I_p} \rho$ ou $\tau_M = \frac{M_t}{\frac{I_p}{\rho}}$

La contrainte maximale de torsion est obtenue pour $\rho = \frac{d}{2}$

La contrainte de torsion maximale est :

$$\tau_{\max} = \frac{M_t d}{I_p 2} = \frac{M_t}{W_t} \quad (4.8)$$

Où $W_t = \frac{I_p}{d/2}$ est le module de torsion.

Les unités des grandeurs sont comme suit : M_t [N mm]; θ [rad/mm]; G [MPa] et I_p [mm⁴]

4.7. Conditions de résistance

Les conditions de résistances sont liées aux valeurs limites des propriétés mécaniques du matériau et du service que doit assurer la barre en torsion.

4.7.1. Contrainte de torsion admissible

La contrainte de torsion admissible $[\tau_t]$ est le rapport de la limite d'élasticité en torsion τ_e par le coefficient de sécurité n :

$$[\tau_t] = \frac{\tau_e}{n} \quad (4.9)$$

La condition de résistance en termes de contraintes : $\tau_t \leq [\tau_t]$

4.7.2. Angle de torsion admissible

D'une manière similaire, le calcul des dimensions des arbres de transmission ou barres de torsion se fait plus par une condition de déformation qu'une condition de résistance en contrainte. En effet pour assurer une transmission rigide et éviter les vibrations, l'angle de torsion φ ne doit pas dépasser pendant le service, une valeur limite admissible $[\varphi]$. D'où la condition de rigidité d'une pièce en en torsion :

$$\varphi \leq [\varphi]$$

3.8. Cas général

Soit une barre en torsion composée de n matériaux (G_i), n diamètres (d_i) et n longueurs (L_i) variables et soumises à des moments de torsion M_{ti} .

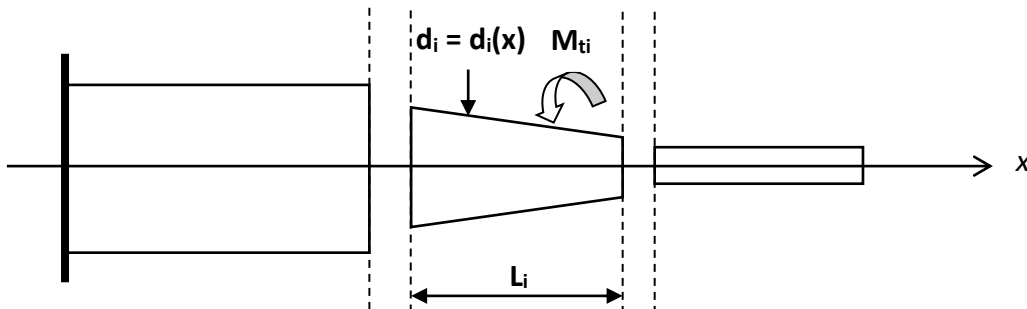


Figure 3.5: Une barre en torsion composée de n matériaux.

$$\theta = \sum_i^n \int_0^{L_i} \frac{M_{t_i}}{G_i I_{p_i}} dx \quad (3.10)$$

Ou :

$$\varphi = \sum_i^n \int_0^{L_i} \frac{M_{t_i} x_i}{G_i I_{p_i}} dx \quad (3.11)$$

Les grandeurs sous l'intégrale peuvent être constantes ou dépendant de x.

Dans certains dimensionnements des barres en torsion, il est nécessaire de satisfaire les deux conditions simultanément :

$$\begin{cases} \tau_t \leq [\tau_t] \\ \varphi \leq [\varphi] \end{cases}$$

Exemple

Calcul du diamètre d d'une barre cylindrique en torsion de longueur L soumise à un moment de torsion M_t :

$$W_t = \frac{I_p}{\frac{d}{2}} = \frac{\frac{\pi d^4}{32}}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^3}{16} \Rightarrow \tau_t = \frac{M_t}{\frac{\pi d^3}{16}} \leq [\tau_t]$$

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} \Rightarrow \varphi = \frac{M_t L}{G I_p} = \frac{32 M_t L}{G \pi d^4} \leq [\varphi]$$

Donc

$$\begin{cases} d_\tau \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_t}{\pi [\tau_t]}} \\ d_\varphi \geq \sqrt[4]{\frac{32 M_t L}{\pi G [\varphi]}} \end{cases}$$

La plus grande des deux valeurs du diamètre satisfait les deux conditions de résistance.

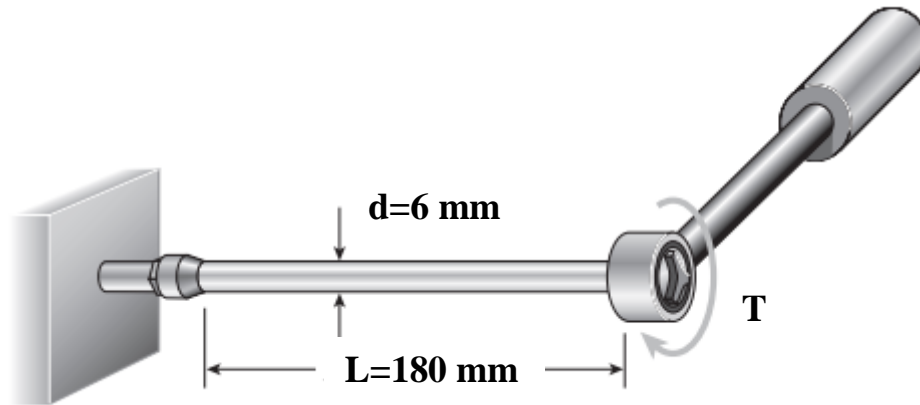
$$d = \text{Max}\{d_\tau, d_\varphi\}$$

3.9. Exercices corrigées

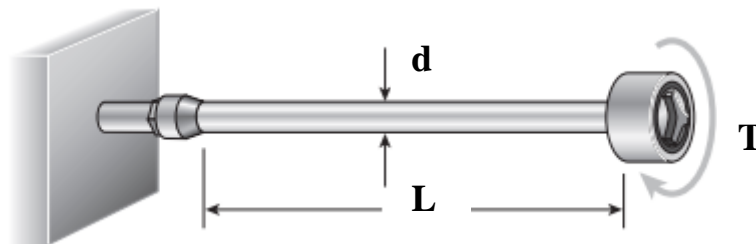
Exercice 1

L'arbre en acier d'une clé à douille a un diamètre de 6 mm et une longueur de 200 mm (voir figure). Si la contrainte admissible en cisaillement est de 60 MPa, quelle est le couple maximal admissible T_{max} pouvant être exercé sur la clé ?

De quel angle (en degrés) l'arbre se tordra-t-il sous l'action du couple maximum ? (Supposons $G=78 \text{ GPa}$).



Solution

Calcul T_{\max}

$$\tau_{\max} = \frac{16T}{\pi d^3}$$

$$T_{\max} = \frac{\pi d^3 \tau_{\max}}{16}$$

$$T_{\max} = \frac{\pi (6)^3 60}{16}$$

$$T_{\max} = 2543.4 \text{ N}\cdot\text{mm}$$

Calcul angle θ (en degrés)

$$\varphi = \frac{T_{\max} L}{G I_P}$$

$$I_P = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi (6)^4}{32}$$

$$I_P = 127.17 \text{ mm}^4$$

Donc :

$$\varphi = \frac{2543.4 * 180}{78 * 127.17} = 0.04609 \text{ rad}$$

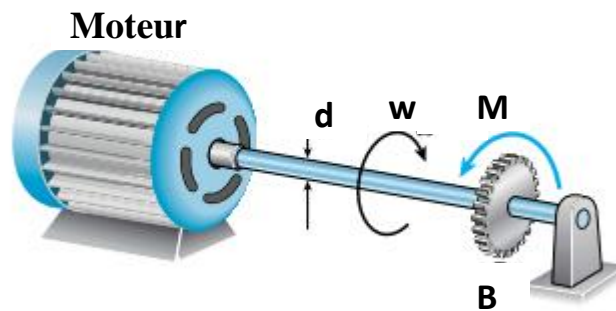
$$\varphi = 2.64^{\circ}$$

Exercice 2

Un moteur entraînant un arbre circulaire en acier transmet 29.42 kW à un engrenage en B. La contrainte de cisaillement admissible dans l'acier est de 41.37MPa.

1- Quel est le diamètre d requis de l'arbre s'il fonctionne à 500 tr/min ?

2-Calculer l'angle de torsion Θ si $G=0.8 \cdot 10^5 \text{MPa}$?



1-Le diamètre d requis de l'arbre s'il fonctionne à 500 tr/min

Connaître la puissance et la vitesse de rotation de la moteur, nous pouvons trouver le couple M agissant sur l'arbre.

$$M_t = \frac{P}{\omega} = \frac{P}{\frac{2\pi N}{60}} = \frac{30 P}{\pi N} = \frac{30 * 29.42 * 10^3}{3.14 * 5000} = 56.21 \text{ N.m}$$

$$M_t = 56.21 * 10^3 \text{ N.mm}$$

La contrainte de cisaillement maximale dans l'arbre peut être obtenue à partir de la formule de torsion :

$$\tau = \frac{16M_t}{\pi d^3} \leq [\tau]$$

$$d^3 \geq \frac{16M_t}{\pi[\tau]} = \frac{16 * 65.21 * 10^3}{\pi * 41.37} = 8031.91$$

$$d \geq \sqrt[3]{8031.19}$$

$$d \geq 18.5 \text{ mm}$$

$$d = 20 \text{ mm}$$

2-Calcul l'angle de torsion Θ

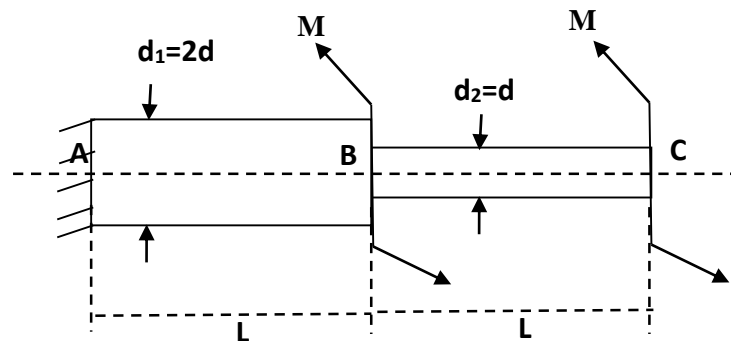
$$\theta = \frac{M_t}{GI_P} = \frac{65.21 * 10^3}{0.8 * 10^5 * \frac{\pi * 20^4}{32}} = 5.19 * 10^{-5} \text{ rad/m}$$

Exercice 3

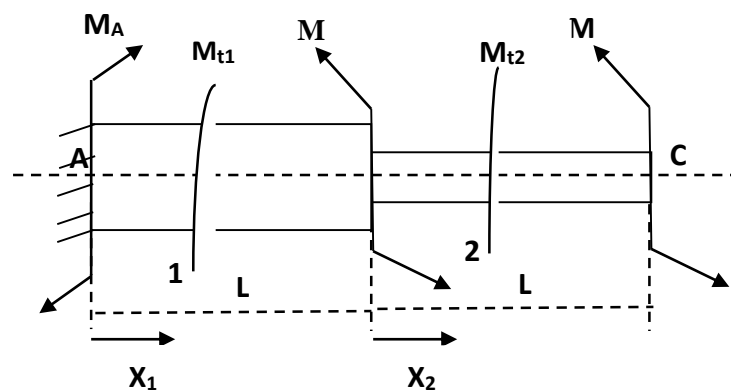
Dans la barre de torsion dans le schéma ci-dessous, calculer :

1-Le rapport des contraintes de torsion τ_2 / τ_1 .

2-L'angle de torsion maximale φ_{\max} .



Solution



Poutre en équilibre :

$$\sum M_{/A} = 0$$

$$M_A - M - M = 0$$

$$M_A = 2M$$

Section 1-1

$$0 \leq x_1 \leq L$$

$$M_{t1} = M_A = 2M$$

$$\tau_1 = \frac{M_{t1}}{W_{t1}} = \frac{2M}{\pi d_1^3 / 16} = \frac{2M}{\pi (2d)^2 / 16}$$

Donc :

$$\tau_1 = \frac{4M}{\pi d^3}$$

Calcul l'angle de torsion

$$\varphi_1 = \frac{M_{t1} X_1}{G_1 I_{O1}} = \frac{M_{t1} X_1}{(2G)\pi \frac{(2d)^4}{32}}$$

$$X_1=0 \dots\dots\dots\varphi_A = 0$$

$$X_1=L \dots\dots\dots\varphi_B = \frac{M_{t1} L}{G I_{O1}} = \frac{2M L}{G \pi \frac{(2d)^4}{32}}$$

$$\varphi_B = \frac{4M L}{\pi G d^4}$$

Section 2-2

$$0 \leq X_2 \leq L$$

$$M_{t2} = M_A - M = M$$

$$\tau_2 = \frac{M_{t2}}{W_{t2}} = \frac{M}{\pi d_2^3 / 16} = \frac{16M}{\pi d^3}$$

Donc :

$$\tau_2 = \frac{16M}{\pi d^3}$$

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{\frac{16M}{\pi d^3}}{\frac{4M}{\pi d^3}} = 4$$

Calcul l'angle de torsion

$$\varphi_2 = \varphi_B + \frac{M_{t2} X_2}{G I_{O2}}$$

$$X_2=0 \dots\dots\dots\varphi_2 = \varphi_B$$

$$X_2=L \dots\dots\dots\varphi_C = \frac{M_{t2} L}{G I_{O2}} = \frac{2M L}{G \pi \frac{d_2^4}{32}}$$

$$\varphi_2 = \varphi_{max} = \varphi_B + \frac{32 M L}{\pi G d^4} = \frac{32 M L}{\pi G d^4} + \frac{4M L}{\pi G d^4}$$

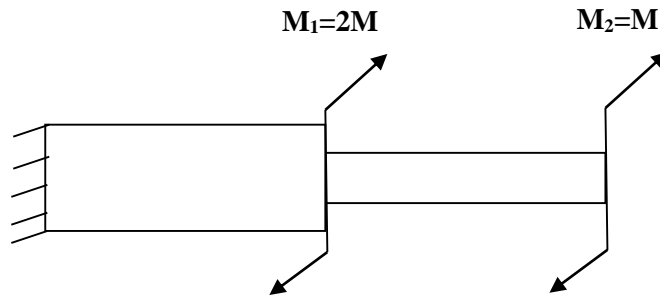
$$\varphi_{max} = \frac{36M L}{\pi G d^4}$$

Exercice 4

Une barre composée de deux matériaux ($G_1=2G, G_2=2G$) et deux sections ($d_1=2d, L_1=L, d_2=d, L_2=L$) est soumise à la torsion comme indique sur la figure .

Calculer la contrainte de torsion dans chaque section et l'angle de torsion total.

Tracer les diagrammes des moments, des contraintes et de l'angle de torsion.



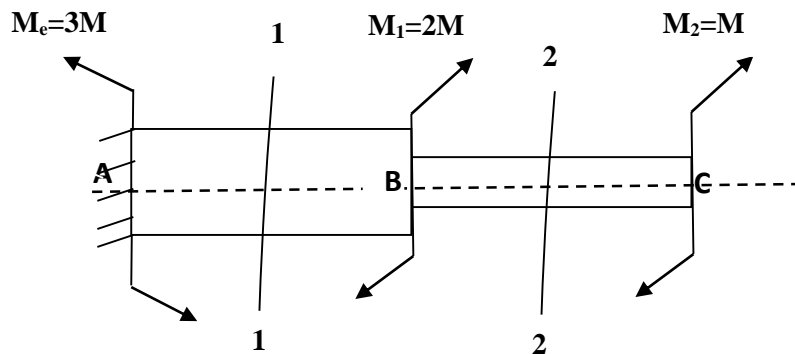
Solution :

Poutre en équilibre :

$$\sum M_{/A} = 0$$

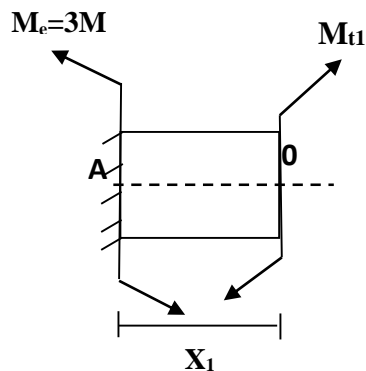
$$M_e - M_1 - M_2 = 0$$

$$M_e = 3M$$



Section 1-1

$$0 \leq X_1 \leq L$$



$$\sum M_{/0} = 0$$

$$M_e - M_{t1} = 0$$

$$M_{t1} = 3M$$

$$\tau_1 = \frac{M_{t1}}{W_{t1}} = \frac{3M}{\pi d_1^3 / 16}$$

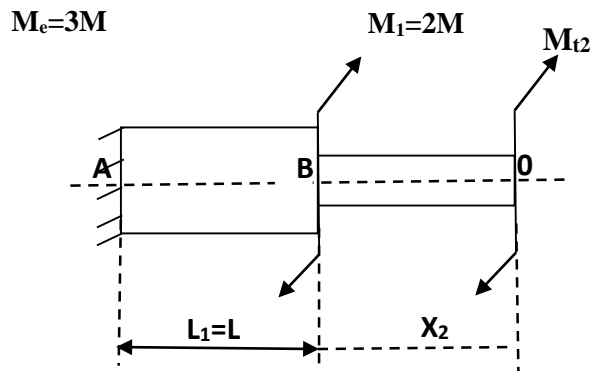
Donc :

$$\tau_1 = \frac{6M}{\pi d^3}$$

Calcul l'angle de torsion

$$\varphi_1 = \frac{M_{t1} X_1}{G_1 I_{O1}} = \frac{M_{t1} X_1}{(2G)\pi \frac{(2d)^4}{32}} \text{Section 2-2}$$

$$0 \leq X \leq L_2$$



$$\sum M_{/0} = 0$$

$$M_{t2} = M_e - M_1 = 3M - 2M$$

$$M_{t2} = M$$

$$\tau_2 = \frac{M_{t2}}{W_{t2}} = \frac{M}{\pi d_2^3 / 16}$$

Donc :

$$\tau_2 = \frac{16M}{\pi d^3}$$

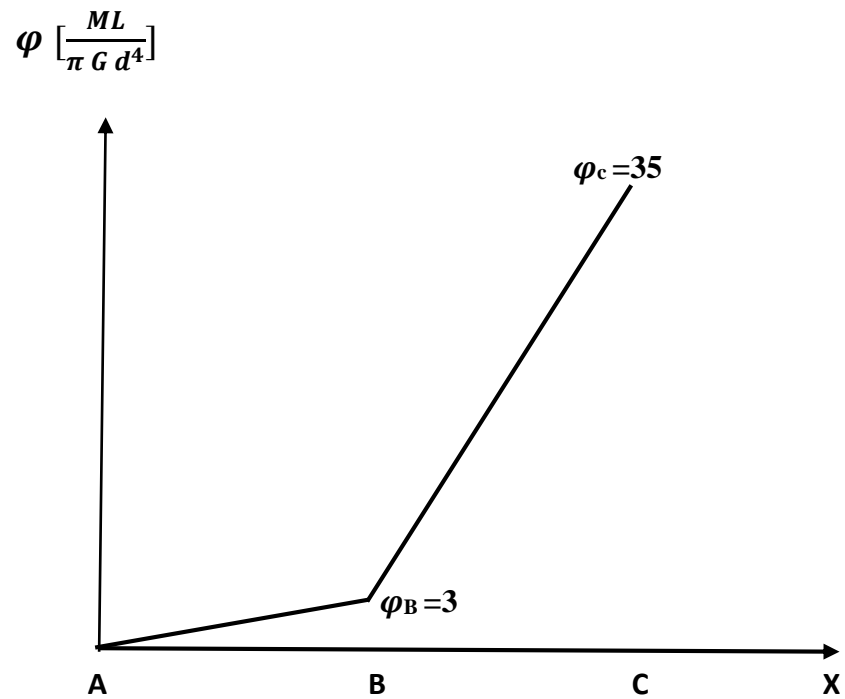
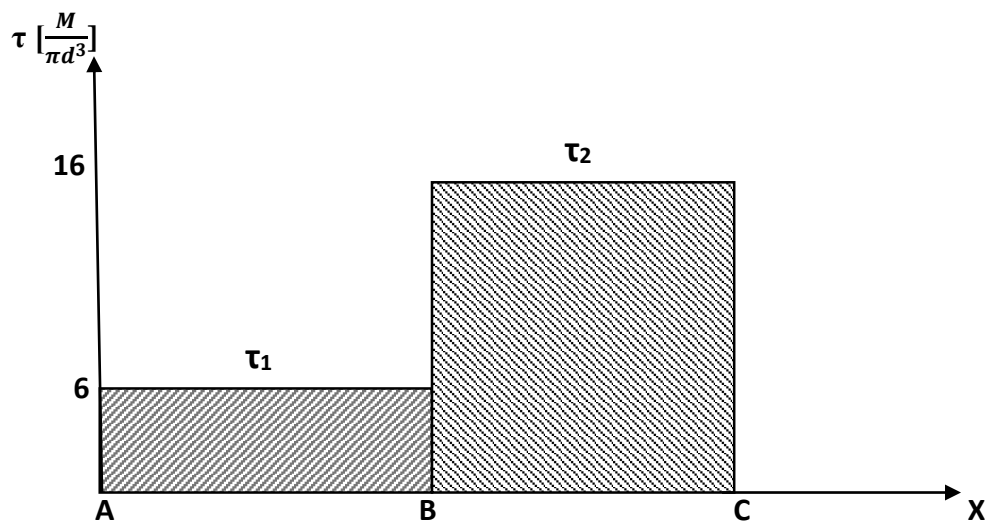
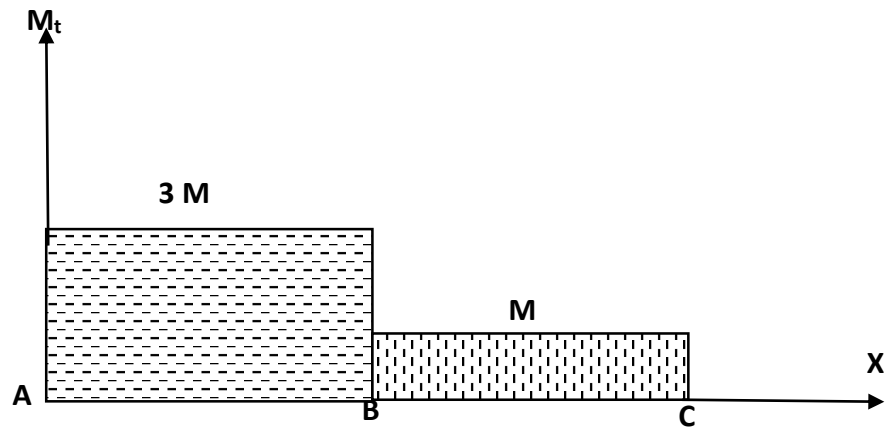
Calcul l'angle de torsion

$$\varphi_2 = \varphi_B + \frac{M_{t2} X_2}{G_2 I_{O2}} = \varphi_B + \frac{M_{t2} X_2}{G \pi \frac{(d_1)^3}{32}}$$

$$\varphi_2 = \varphi_B + \frac{M L}{G \pi \frac{d^4}{32}} = \varphi_B + \frac{32M X_2}{G \pi d^4}$$

$$X_2=0, \varphi_2 = \varphi_B = \frac{3ML}{G \pi d^4}$$

$$X_2=L, \varphi_2 = \varphi_C = \frac{3ML}{G \pi d^4} + \frac{32ML}{G \pi d^4} = \frac{35ML}{G \pi d^4} = \varphi_{\max}$$



Chapitre 4 : Caractéristiques géométriques des sections planes

4.1. Définition

La notion de moment d'inertie présente un grand intérêt sur le plan de la véritable histoire de la mécanique et sur celui de la philosophie et de ses principes. C'est en 1673 que Huygens, dans la solution du problème du centre d'oscillation du pendule composé (livre : Traité du Pendule), fit apparaître pour la première fois une quantité de la forme. C'est en 1810-1811 que cette quantité intervint pour la première fois sous le nom de moment d'inertie, et d'une manière officielle et systématique, dans l'enseignement de la Mécanique des solides indéformables.

Concernant la signification physique, le moment d'inertie est une grandeur qui caractérise la géométrie des masses d'un solide, c'est-à-dire la répartition de la matière en son sein. Il quantifie également la résistance à une mise en rotation de ce solide (ou plus généralement à une accélération angulaire).

4.2. Moment statique

En résistance des matériaux, le moment statique est une grandeur physique qui caractérise la géométrie d'une section et se définit par rapport à un axe. Il intervient notamment dans le calcul des contraintes de cisaillement. Il a la dimension d'un volume (m^3 dans le Système international d'unités).

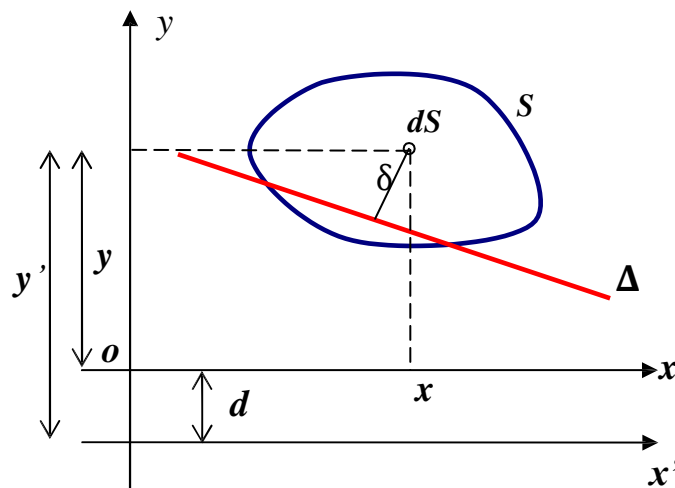


Figure 4.1: Moment statique d'une section S

Le moment statique d'une section S par rapport à l'axe Ox se définit comme :

$$S_x = \iint_S y \, dx \, dy \quad (4.1)$$

De même, par rapport à l'axe Oy :

$$S_y = \iint_S x \, dx \, dy \quad (4.2)$$

On montre que le moment statique S_Δ d'une section de densité homogène, par rapport à un axe Δ , est égal au produit de l'aire A de cette section par la distance d de son centre de gravité C_g à l'axe.

$$S_\Delta = d(C_g, \Delta) \cdot A \quad (4.3)$$

Un corollaire important est que le moment statique d'une section de densité homogène, par rapport à un axe passant par son centre de gravité, est nul.

Remarque:

1. Le moment statique est homogène à un volume. Il s'exprime en $\text{mm}^3, \text{cm}^3 \dots$ etc.
2. Le moment statique d'une section S par rapport à un axe quelconque passant par son centre de gravité est nul.
3. Le moment statique d'une section par rapport à un axe de symétrie est nul, puis que cet axe passe par son centre de gravité.

4.3. Centre de gravité d'une section plane

Le centre de gravité G d'une section est le point tel que le moment statique de la section par rapport à n'importe quel axe passant par ce point est nul. On peut dire que le moment statique d'une section est égal au produit de l'aire de la section par la distance entre son centre de gravité G et l'axe.

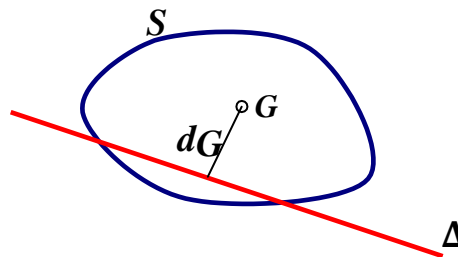


Figure 4.2: Centre de gravité d'une section plane

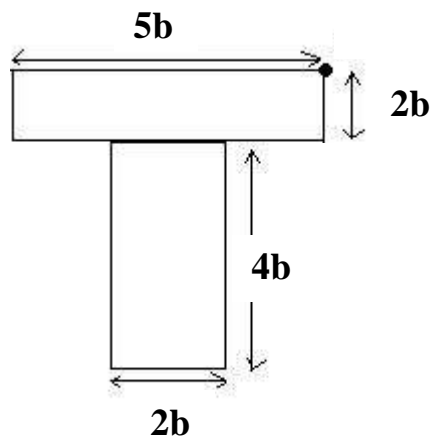
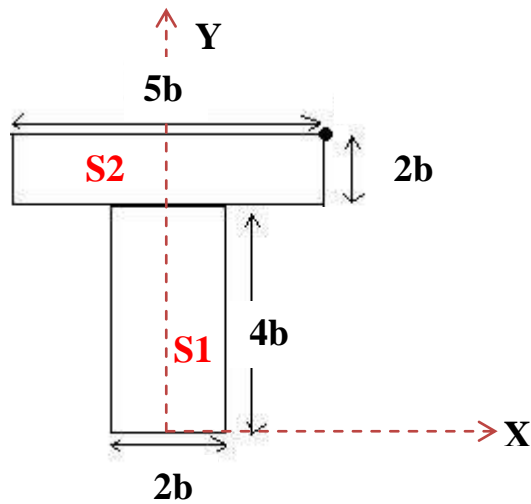
D'une manière générale pour une surface S composée de plusieurs surfaces les coordonnées du centre de gravité sont données par les équations suivantes:

$$XG = \frac{\sum_{i=1}^n x_i S_i}{\sum S_i} \quad (4.5)$$

$$Y_G = \frac{\sum_{i=1}^n y_i S_i}{\sum S_i} \quad (4.6)$$

Exemple :

Calculer en fonction de b le centre de gravité de la section droite en T

**Solution :**

$$x_G = 0$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^n y_i S_i}{\sum S_i}$$

$$S_1 = 2b * 4b$$

$$S_1 = 8b^2$$

$$S_2 = 5b * 2b$$

$$S_1 = 10b^2$$

$$y_1 = \frac{4b}{2} = 2b$$

$$y_2 = 4b + b = 5b$$

$$y_G = \frac{2b * 8b^2 + 5b * 10b^2}{8b^2 + 10b^2}$$

$$y_G = \frac{11b}{3}$$

4.4. Moment d'inertie, rayon de giration d'une section plane

Le moment d'inertie I_Δ de la section S par rapport à Δ est défini par l'intégrale:

$$I_\Delta = \iint_S \delta^2 dS \quad (4.7)$$

Le rayon de giration de la section S par rapport à Δ est donné par la relation:

$$r = \sqrt{\frac{I_\Delta}{S}} \quad (4.8)$$

Pour les axes x et y, nous avons:

$$I_x = \iint_S y^2 dS \quad (4.9)$$

$$I_y = \iint_S x^2 dS \quad (4.10)$$

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{S}} \quad (4.11)$$

$$r_y = \sqrt{\frac{I_y}{S}} \quad (4.12)$$

4.5. Moment polaire d'une section plane

Le moment d'inertie polaire d'une section par rapport à tout point de cette section est égal à la somme des moments d'inertie par rapport à deux axes perpendiculaires passant par ce point.

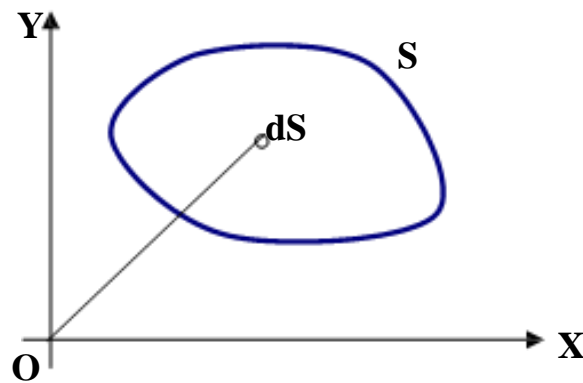


Figure 4.3: Moment polaire d'une section plane

Le moment d'inertie polaire d'une section S par rapport au point O est donné par l'intégrale :

$$I_z = \iint_S r^2 dS \tag{4.13}$$

$$I_z = \iint_S (x^2 + y^2) dS = I_x + I_y \tag{4.14}$$

4.6. Théorème de Huygens

Le moment quadratique d'une surface plane par rapport à un axe de son plan est égal au moment quadratique par rapport à l'axe parallèle passant par le centre de gravité, augmenté du produit de l'air de la surface par le carré de la distance entre les deux axes.

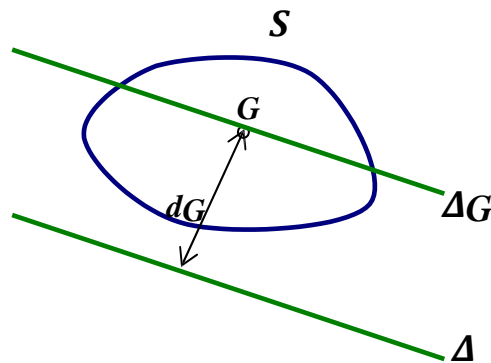


Figure 4.4 : Moment quadratique d'une surface plane par rapport à un axe

$$I_z = I_{\Delta G} + dG^2 S \tag{4.15}$$

Remarque :

Pour une surface composé le moment d'inertie I_z est donné par la formule suivant :

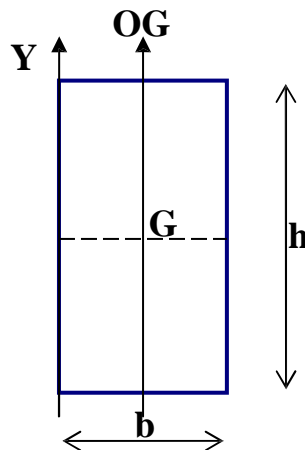
$$I_z = \sum_{i=1}^n [I_{Gi} + (y_i - y_G)^2 * S_i] \tag{4.16}$$

4.7. Exercices corrigés

Exercice 1

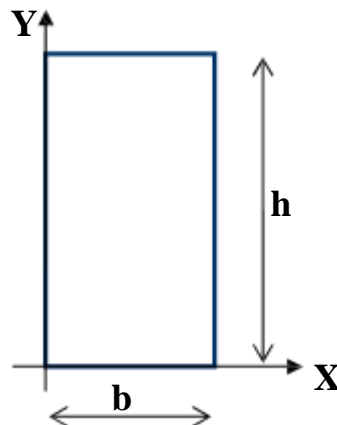
Soit une section de largeur b et de hauteur h . Calculer le moment statique et le moment d'inertie de cette section par rapport aux deux axes suivants :

- Un axe vertical (Y) passant par le côté gauche de la section.
- Un axe vertical (YG) passant par le centre de gravité de la section.



Solution

Un axe vertical (y) passant par le côté gauche de la section :

Calcul le moment statique S_y

$$S_y = \iint_S x \, dx \, dy$$

$$S_y = \int_0^b \left(\int_0^h dy \right) x \, dx$$

$$S_y = \int_0^b h x \, dx$$

$$S_y = h \frac{b^2}{2}$$

De même :

$$S_x = b \frac{h^2}{2}$$

Calcul le moment d'inertie I_y

$$I_y = \iint_S x^2 \, dS$$

$$I_y = \int_0^b \left(\int_0^h dy \right) x^2 dx$$

$$I_y = \int_0^b h x^2 \, dx = \frac{hb^3}{3}$$

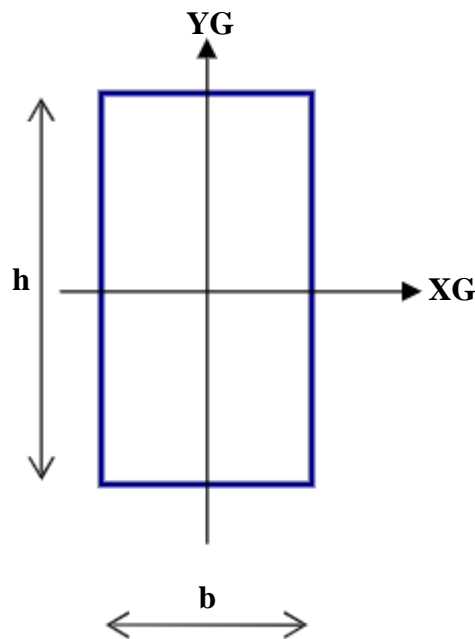
$$I_y = \frac{hb^3}{3}$$

De même :

$$I_x = \frac{bh^3}{3}$$

Un axe vertical (YG) passant par le centre de gravité de la section

Calcul S_{YG} et I_{YG}



$$S_{YG} = \iint_S x \, dx \, dy$$

$$S_{YG} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dy \right) x \, dx$$

$$S_{YG} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} h \, x \, dx = \frac{h}{2} \left(\frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} \right) = 0$$

$$I_{YG} = \iint_S x^2 \, dS$$

$$I_{YG} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dy \right) x^2 \, dx$$

$$I_{YG} = h \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2 \, dx = \frac{h}{3} \left(\frac{b^3}{8} + \frac{b^3}{8} \right) = \frac{hb^3}{12}$$

$$\mathbf{I_{YG} = \frac{hb^3}{12}}$$

De même :

$$I_{XG} = \iint_S y^2 \, dS$$

$$I_{XG} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dx \right) y^2 \, dy$$

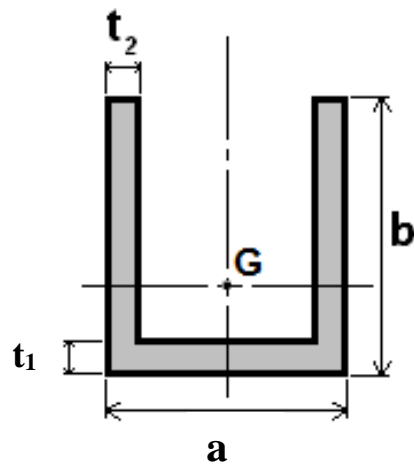
$$I_{XG} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \, b \, dy$$

$$I_{XG} = \frac{b}{3} \left(\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8} \right) = \frac{bh^3}{12}$$

$$\mathbf{I_{XG} = \frac{bh^3}{12}}$$

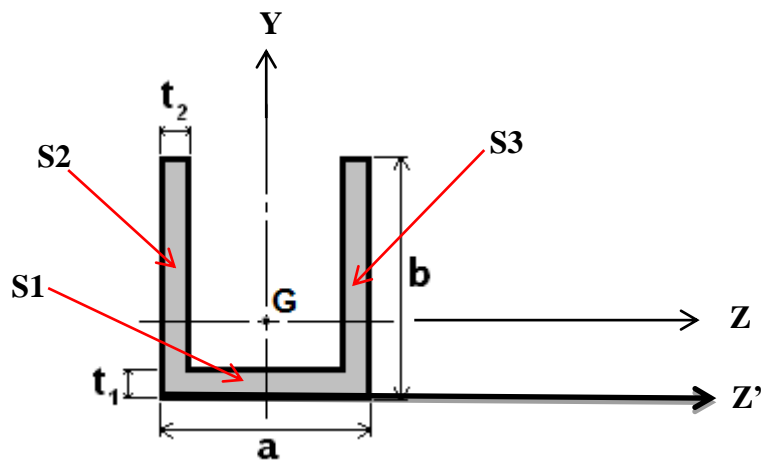
Exercice 2

Déterminer le moment d'inertie I_z de la section suivante :



A.N : $t_1 = t_2 = 5 \text{ mm}$, $a = b = 25 \text{ mm}$

Solution



$$S1 = t_1 * a$$

$$S1 = 5 * 25 = 125 \text{ mm}^2$$

$$y_1 = \frac{t_1}{2} = 2.5 \text{ mm}$$

$$I_1 = \frac{25 * 5^3}{12}$$

$$I_1 = 260.42 \text{ mm}^4$$

$$S_2 = S_3 = t_2 * b$$

$$S_2 = S_3 = 20 * 5 = 100 \text{ mm}^2$$

$$y_2 = y_3 = 15 \text{ mm}$$

$$I_2 = I_3 = \frac{5 * 20^3}{12}$$

$$I_2 = I_3 = 3333.33 \text{ mm}^4$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^3 x_i S_i}{\sum S_i}$$

$$y_G = \frac{125 * 2.5 + 100 * 15 + 100 * 15}{125 + 100 + 100}$$

$$y_G = 10.2 \text{ mm}$$

$$I_Z = \sum_{i=1}^3 (I_{Gi} + (y_i - y_G)^2 S_i)$$

$$I_Z = (I_1 + (y_1 - y_G)^2 * S_1) + (I_2 + (y_2 - y_G)^2 * S_2) + (I_3 + (y_3 - y_G)^2 * S_3)$$

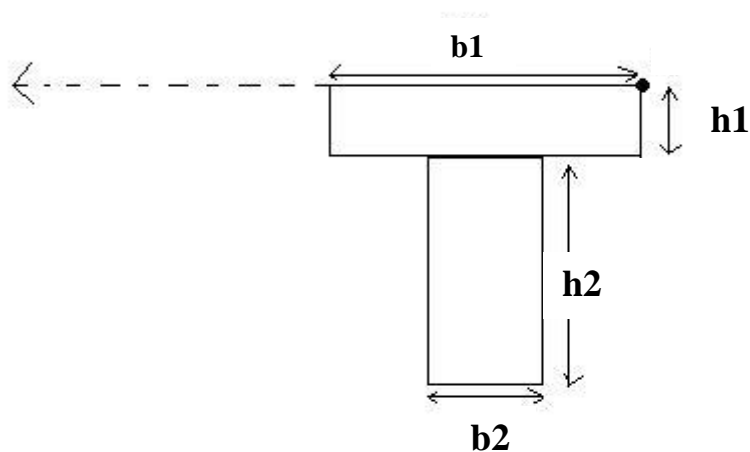
$$I_Z = (260.42 + (2.5 - 10.2)^2 * 125) + (2 * (3333.33 + (15 - 10.2)^2 * 100))$$

$$I_Z = 18946.33 \text{ mm}^4$$

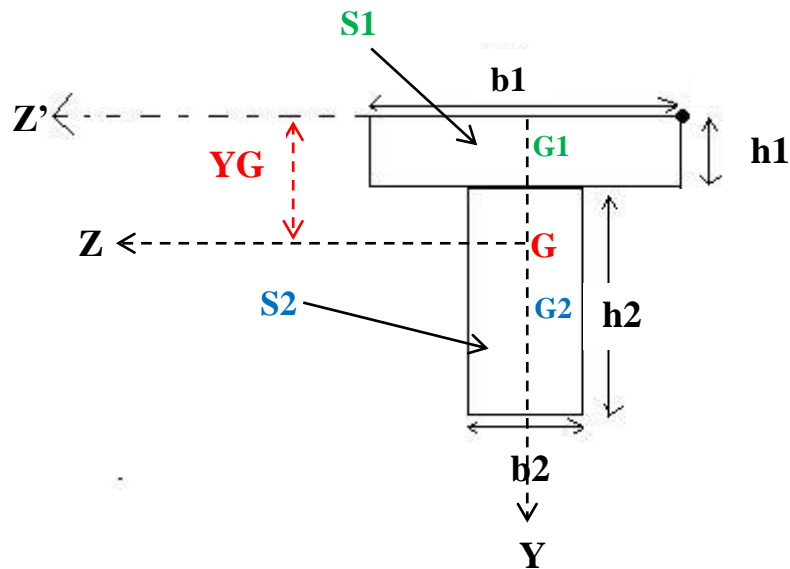
Exercice 3

Déterminer le moment d'inertie I_Z de la section de la forme en T sachant que :

$h_1 = b_2 = 10 \text{ mm}$ et $h_2 = b_1 = 100 \text{ mm}$.



Solution



$$S_1 = h_1 * b_1$$

$$S_1 = 10 * 100 = 1000 \text{ mm}^2$$

$$y_1 = \frac{h_1}{2} = 5 \text{ mm}$$

$$I_1 = \frac{b_1 * h_1^3}{12} = \frac{100 * 10^3}{12}$$

$$I_1 = 8333.33 \text{ mm}^4$$

$$S_2 = b_2 * h_2$$

$$S_2 = 10 * 100 = 1000 \text{ mm}^2$$

$$y_2 = h_1 + \frac{h_2}{2} = 10 + 50 = 60 \text{ mm}$$

$$I_2 = \frac{b_2 * h_2^3}{12} = \frac{10 * 100^3}{12}$$

$$I_2 = 833333.33 \text{ mm}^4$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^2 x_i S_i}{\sum S_i}$$

$$y_G = \frac{1000 * 5 + 1000 * 60}{1000 + 1000}$$

$$y_G = 32.5 \text{ mm}$$

$$I_z = \sum_{i=1}^2 [I_{Gi} + (y_i - y_G)^2 S_i]$$

$$I_z = [I_1 + (y_1 - y_G)^2 * S_1] + [I_2 + (y_2 - y_G)^2 * S_2]$$

$$I_z = [8333.33 + (5 - 32.5)^2 * 1000] + [833333.33 + (60 - 32.5)^2 * 1000]$$

$$I_z = 2\,354\,166,66 \text{ mm}^4$$

Chapitre 5 : Flexion simple

5.1 Définition

Une poutre est sollicitée en flexion lorsqu'on a dans toute section droite des éléments de réduction du tenseur des efforts de cohésion réduits à :

$$\vec{N} = \overline{M_{GT}} = \vec{0} \text{ et } \overline{M_{GF}} \neq \vec{0} \text{ et éventuellement } \vec{T} = \vec{0}$$

5.2 Hypothèses sur la flexion des poutres

La poutre repose sur deux appuis simples ou soit encastrée à une extrémité. La poutre de poids négligeable supporte les charges et se déforme.

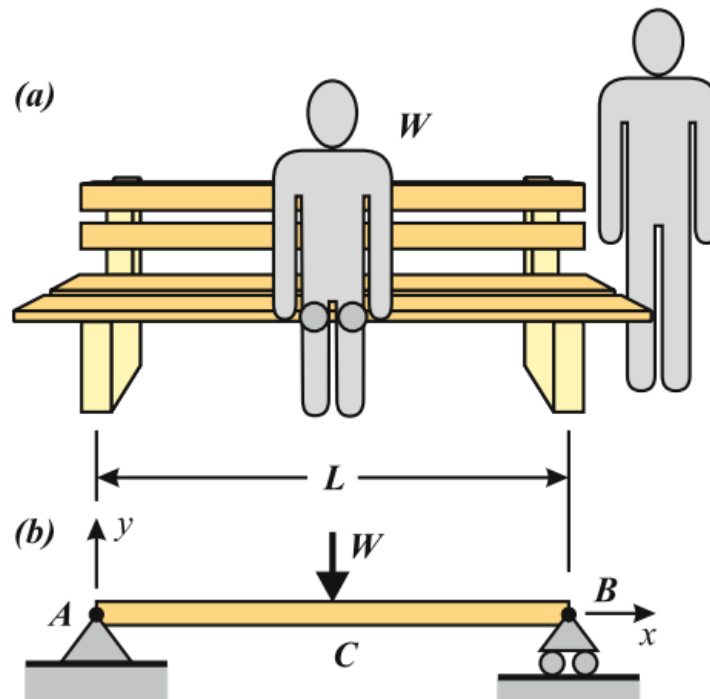


Figure 5.1 : (a) Une personne assise sur un banc de parc. (b) Le système modélisé comme une poutre simplement appuyée sous un charge concentrée W .

5.2.1 Hypothèses sur le corps

- La poutre est un solide engendré par translation d'une surface plane dont le centre de gravité G décrit un axe rectiligne XX' .
- La poutre est rectiligne et de section droite constante. La poutre admet un plan de symétrie longitudinale. Elle est formée de fibres jointives parallèles à l'axe XX' .

5.2.2 Hypothèses sur les forces

- Les forces extérieures agissent dans le plan symétrie longitudinal.
- Elles sont appelées plus communément charges et sont perpendiculaires à l'axe XX' et assimilées à des charges localisées.

5.2.3 Hypothèses sur les déformations

- Les déformations sont élastiques et petites pour ne pas modifier les intensités des forces ni leurs distances respectives.
- Les sections droites demeurent planes et sont perpendiculaires à l'axe XX' après déformation.
- Toute fibre contenue dans un plan parallèle au plan de symétrie demeure dans ce plan pendant la déformation. C'est pourquoi la flexion est dite plane.



5.3 Effort de tranchant et moment de flexion

5.3.1 Effort de tranchant

On appelle effort tranchant la somme algébrique des projections sur le plan de section des forces extérieures situées d'un même côté de la section. Il est égal, par définition à la somme algébrique de toutes les forces situées à gauche de la section.

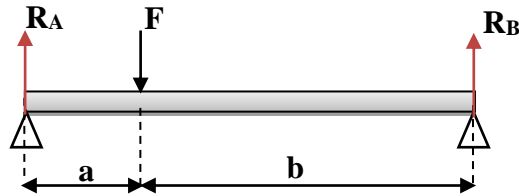
5.3.2 Signe effort de tranchant

L'effort tranchant associé est positif : s'il tend à faire tourner T le petit élément dans le sens des aiguilles d'une montre.

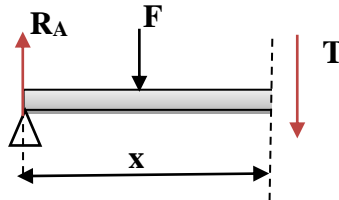
Signes	Effort de tranchant
<p>Signe positif</p> <p>+</p>	 <p>Sens dextrorsum (Sens de rotation des aiguilles d'une montre)</p>
<p>Signes négatifs</p> <p>-</p>	 <p>Sens sinistrorsum</p>

Exemple

Une poutre sur deux appuis de niveau supporte une charge concentrée. Déterminer les efforts de tranchants d'une poutre.



Solution



$$\sum M/B = 0 \rightarrow F \cdot b - R_A(a + b) = 0$$

$$R_A = \frac{F \cdot b}{(a + b)}$$

Nous avons :

$$T = R_A - F$$

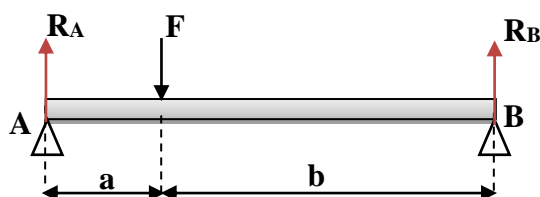
Efforts tranchants :

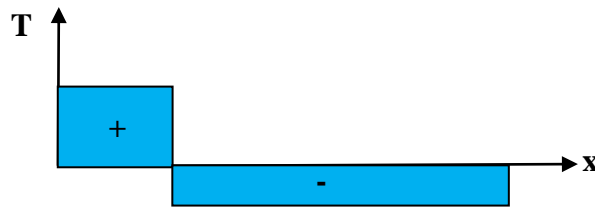
Si $0 \leq x \leq a$

$$T = \frac{F \cdot b}{(a + b)}$$

Si $a \leq x \leq a + b$

Diagrammes des efforts tranchants:





5.4 Moment de flexion

Nous appelons moment de flexion la somme algébrique des moments par rapport à l'axe neutre de la section des forces extérieures situées d'un même côté de la section.

$$M_f = \sum_{i=1}^n (F_i x_i + M_i) \tag{5.1}$$

5.4.1 Signe moment de flexion

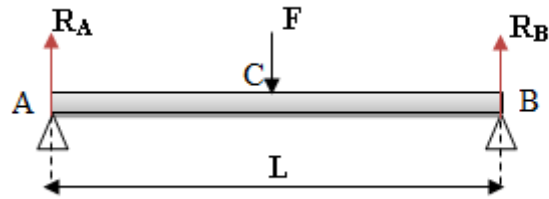
Le moment fléchissant est positif : s'il tend à mettre en traction les fibres inférieures longitudinales de la poutre.

Signes	Moment de flexion
<p>Signe positif +</p>	<p>Axe neutre</p> <p>Les fibres situées au-dessus d'axe neutre de la poutre sont comprimés par le moment de flexion</p>
<p>Signe négatif -</p>	<p>Axe neutre</p> <p>Les fibres situées au-dessous de l'axe neutre de la poutre sont comprimés par le moment de flexion</p>

Remarque : la flexion pure est une flexion à laquelle n'est pas associé le cisaillement.

Exemple

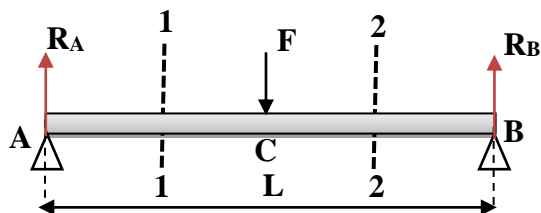
Déterminer les moments de fléchissant dans la poutre soumise à une charge concentrée située en son milieu.



Solution

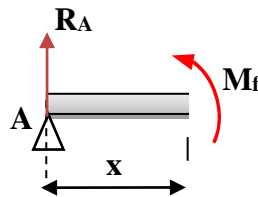
F est au milieu de la poutre donc par raison de symétrie :

$$R_A = R_B = \frac{F}{2}$$



Section 1-1

$$0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$



La poutre est en équilibre

$$\sum M/o = 0$$

$$M_f - R_A x = 0$$

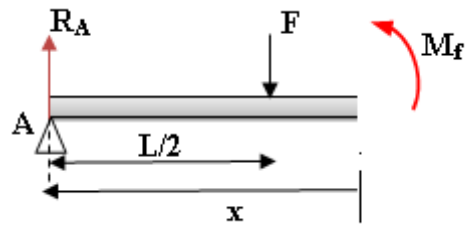
$$M_f = R_A x = \frac{F}{2} \cdot x$$

Pour $x = 0 \rightarrow M_{fA} = 0$

Pour $x = L/2 \rightarrow M_{fC} = \frac{FL}{4}$

Section 2-2

$$\frac{L}{2} \leq x \leq L$$

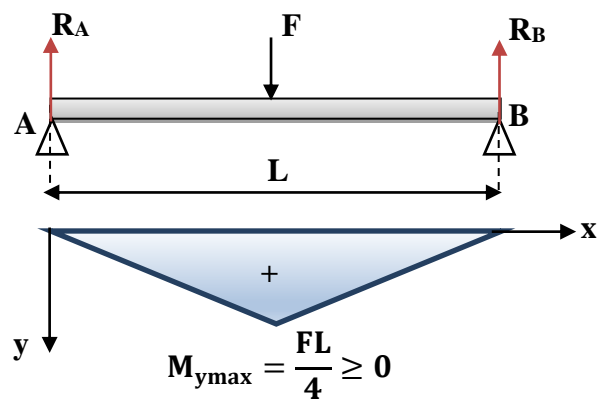


$$M_f = R_A x - F \left(x - \frac{L}{2}\right)$$

$$M_f = \frac{F}{2} x - F \left(x - \frac{L}{2}\right)$$

$$\text{Pour } x = L/2 \rightarrow M_{fc} = \frac{FL}{4}$$

$$\text{Pour } x = L \rightarrow M_{fB} = 0$$



5.5 Relation entre M, T et l'intensité de la charge

Supposons qu'on sollicite une poutre par une charge uniformément répartie "q".

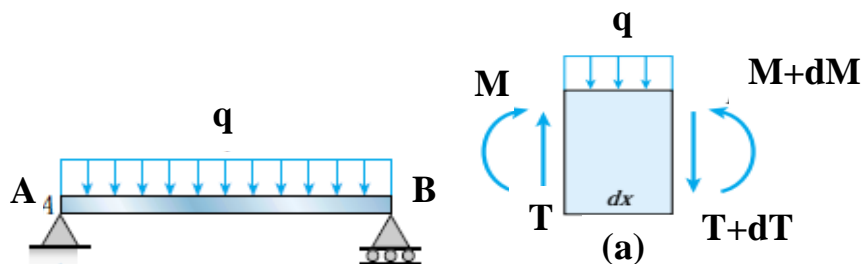


Figure 5.2: Poutre sollicitée par une charge répartie.

$$\sum F_i = 0$$

$$T - T - dT - qdx = 0$$

$$q = -\frac{dT}{dx} \quad (5.2)$$

$$\sum M/c = 0$$

$$M - M - dM + (T + dT) \cdot dx - q \cdot \frac{(dx)^2}{2} = 0$$

$$-dM + (T + dT) \cdot dx - q \cdot \frac{(dx)^2}{2} = 0$$

Sachant que : $dT \cdot dx \rightarrow 0$ et que $q \cdot \frac{(dx)^2}{2} \rightarrow 0$ (quantité très petite, négligeable)

Alors :

$$-dM + T \cdot dx = 0$$

$$T = \frac{dM}{dx} \quad (5.3)$$

$$q = -\frac{d^2M}{dx^2}$$

Si la charge q est une charge constante, l'effort tranchant est linéaire.

$$q = -\frac{dT}{dx} = \text{cste}$$

$$dT = -q \cdot dx$$

Alors :

$$T = -q \cdot x + c \quad c = \text{cste} \quad (5.4)$$

5.6 Contraintes normales et choix des dimensions de sections droites

Le moment fléchissant M_{fz} correspondant à la flexion. Du fait de l'hypothèse de Bernoulli (les sections droites restent perpendiculaires à la courbe moyenne) :

- La fibre neutre à un allongement nul ;
- Les fibres à l'extérieur de la courbure sont étirées ;
- Les fibres à l'intérieur de la courbure sont comprimées.

La contrainte varie de manière linéaire :

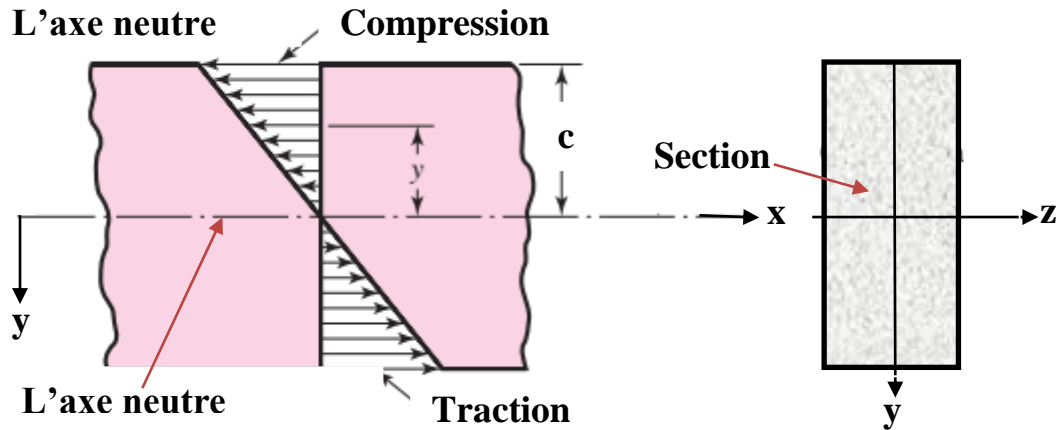


Figure 5.3 : Variation de la contrainte normale en fonction de la distance à l'axe neutre

$$\sigma_{xx} = \frac{M}{I_z} \times y \tag{5.5}$$

Avec :

M : moment fléchissant dans la section droite considérée.

I_z : moment d'inertie de la section par rapport à l'axe z.

y: distance du point considéré à l'axe neutre.

5.7 Vérification de la résistance

Pour une flexion simple, la condition de la résistance s'écrit :

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{I_z} \times y \leq [\sigma] \tag{5.6}$$

Avec :

M : moment fléchissant

I_z : moment d'inertie

On devra aussi vérifier que :

$$\tau_{\max} = \frac{T \times S}{I \times b} \leq [\tau] \tag{5.7}$$

Avec:

T : effort tranchant

S: moment statique de l'aire située soit au-dessous soit au-dessus de la couche considérée

τ : contrainte tangentielle de cisaillement

b : largeur de la section dans la couche considérée

5.8 Déformation des poutres en flexion

5.8.1 Ligne d'influence des déformations et flèche

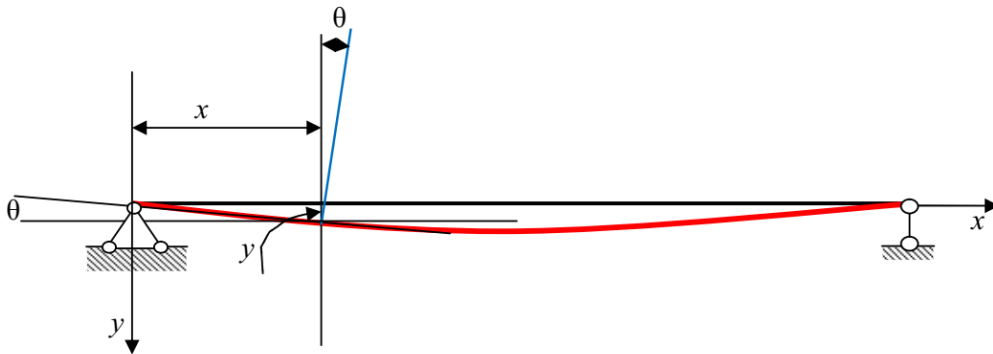


Figure 5.4 : Ligne d'influence de flexion.

Une poutre supporte les charges et se déforme en flexion. La ligne neutre de la poutre déformée lors de l'application des charges est appelée ligne d'influence de flexion. Si l'équation $y=f(x)$ est connue. Il est alors possible de calculer la flèche en chaque point d'abscisse x , l'expression de la courbure en tout point de la ligne élastique est :

Soit un élément de poutre de longueur dx

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M_f}{E I_{Gz}} \quad (5.8)$$

Avec :

$$\mathbf{tg\theta} = \frac{dy}{dx} = \mathbf{y'} \quad (5.9)$$

Or, α petit (courbure faible) implique $d\theta \approx dy'$, donc $\frac{d\theta}{dx} = \frac{dy'}{dx} = \mathbf{y''}$. En définitive, nous obtenons :

$$\mathbf{y''} = \frac{M_f}{E I_{Gz}} \quad \text{ou} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_f}{E I} \quad (5.10)$$

Pour une charge uniformément répartie $q(x)$ nous avons :

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{q(x)}{E I} \quad \text{ou} \quad \frac{d^2M_f}{dx^2} = -\frac{q(x)}{E I} \quad (5.11)$$

L'angle de rotation par flexion est égal :

$$\theta = \operatorname{tg}\theta = \frac{dy}{dx} \quad (5.12)$$

La flèche de la flexion est calculée par :

$$\begin{aligned} y'' = \frac{M_f}{EI} \rightarrow y' &= \int \frac{M_f}{EI} dx + C_1 \\ y &= \int \left[\int \frac{M_f}{EI} dx \right] + C_1 + C_2 \end{aligned} \quad (5.13)$$

Les constantes d'intégration C_1 et C_2 sont déterminées par les conditions aux limites.

5.8.2 Angle de flexion θ

La pente de la tangente à la ligne élastique la dérivée première de y (ou une première intégration de y'') :

$$\begin{aligned} y'_x &= -f'_x(x) \\ y'_x &= \operatorname{tg}\theta \end{aligned} \quad (5.14)$$

L'angle de flexion représente le déplacement en rotation par la flexion :

$$\theta = \operatorname{tg}\theta \quad (5.15)$$

5.8.3 Flèche de la poutre f_x

Une deuxième intégration donne l'équation de la courbe, déformation de l'axe de la poutre :

$$y_x = -f_x(x) \quad (5.16)$$

Nous obtenons la formule de la flèche :

$$f_x = \iint \left[\frac{M_f}{EI_{Gz}} dx \right] + D \quad (5.17)$$

Avec :

E : module d'élasticité longitudinale en MPa.

I_{Gz} : moment d'inertie de la section.

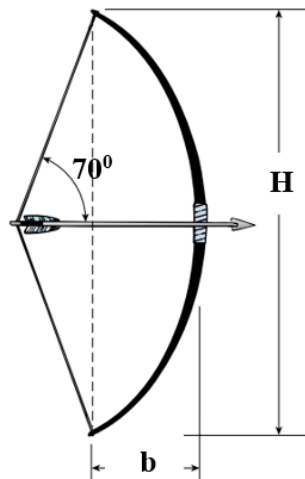
M_f : moment de flexion.

θ : angle de flexion (déplacement en rotation de la poutre par la flexion).

5.9. Exercices corrigés

Exercice 1

Un archer applique une traction de 150 N sur la corde de l'arc pleinement tendu montré sur la figure. Déterminer le moment de flexion au milieu de l'arc.



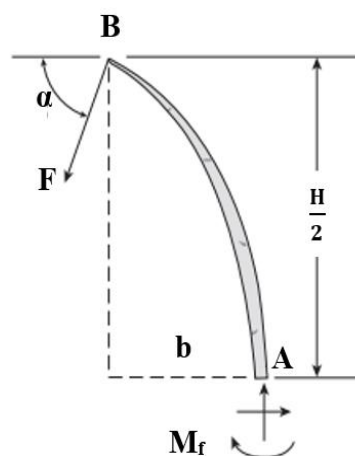
Solution

$$H = 1450 \text{ mm}$$

$$B = 400 \text{ mm}$$

$$F = 150 \text{ N}$$

$$\alpha = 70^\circ$$



$$\sum M/A = 0$$

$$F(\cos \alpha) \frac{H}{2} + F(\sin \alpha)b - M_f = 0$$

$$M_f = F[(\cos \alpha) \frac{H}{2} + (\sin \alpha)b]$$

A.N :

$$H=1450 \text{ mm}, b= 400 \text{ mm}, F=150 \text{ N}, \alpha=70^\circ$$

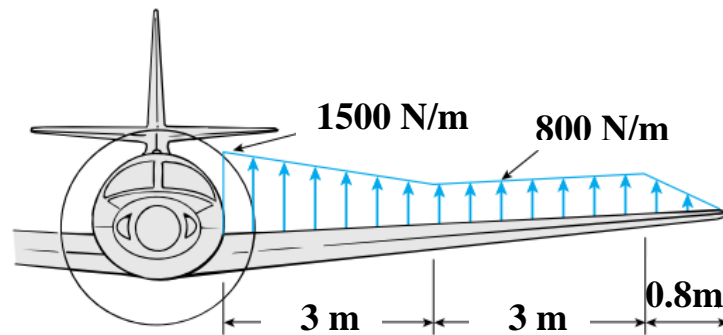
$$M_f = 150[(\cos 70) \frac{1450}{2} + (\sin 70)400]$$

$$M_f = 93.57 \text{ N.mm}$$

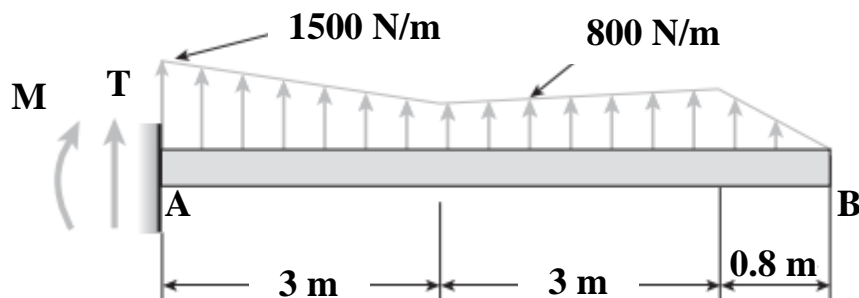
Exercice 2

La charge répartie agissant sur l'aile d'un petit avion à la variation idéalisée montré dans la figure.

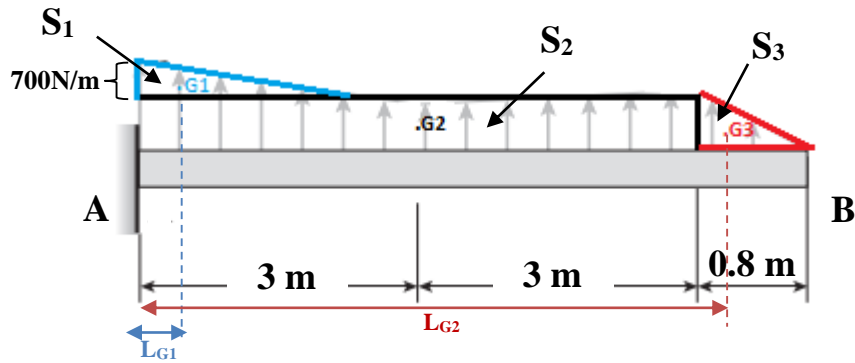
Calculer l'effort tranchant T et le moment fléchissant M à l'extrémité intérieure de l'aile.



Solution



la surface répartie est décomposée en 3 surfaces comme suit :



$$L_{G1} = \frac{1}{3} * 3 = 1\text{m}$$

$$L_{G2} = 3\text{m}$$

$$L_{G3} = 6 + \frac{1}{3} * 0.8 = 6.26\text{m}$$

L'effort tranchant

$$\sum F_{\text{vert}} = 0$$

$$T + \frac{1}{2}(700 * 3) + (800 * 6) + \frac{1}{2}(800 * 0.8) = 0$$

$$T = -6.17\text{kN}$$

Le moins signifie que l'effort de tranchant est appliqué dans le sens contraire.

Le moment fléchissant

$$\sum M/A = 0$$

$$-M + S_1 * L_{G1} + S_2 * L_{G2} + S_3 * L_{G3} = 0$$

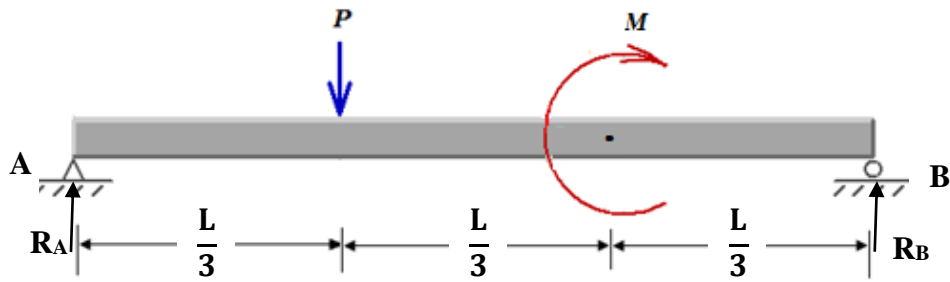
$$-M + \frac{1}{2} * (700 * 3) * 1 + 800 * 6 * 3 + \frac{1}{2} * 700 * 0.8 * 6.26 = 0$$

$$M = 17.2 \text{ kN.m}$$

Exercice 3

Selon la figure, une poutre de longueur **L** simplement appuyée aux deux extrémités A et B est soumise à une charge concentrée **P** à $x = L/3$ du point A et un moment $M_0 = PL/4$ à $x = L/3$ du point B.

Tracer les diagrammes des efforts tranchants et des moments fléchissant.



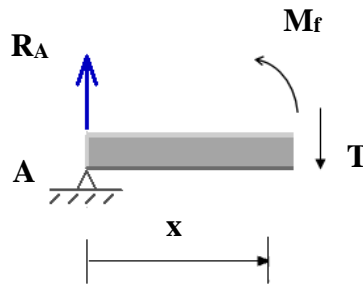
Solution

$$\sum M/B = 0 \rightarrow R_A \cdot L - \frac{2PL}{3} + \frac{PL}{4} = 0 \rightarrow R_A = \frac{5P}{12}$$

$$\sum M/A = 0 \rightarrow R_B \cdot L - \frac{PL}{4} - \frac{PL}{3} = 0 \rightarrow R_B = \frac{7P}{12}$$

Section 1

$$0 \leq x \leq \frac{L}{3}$$



$$Q = R_A = \frac{5P}{12}$$

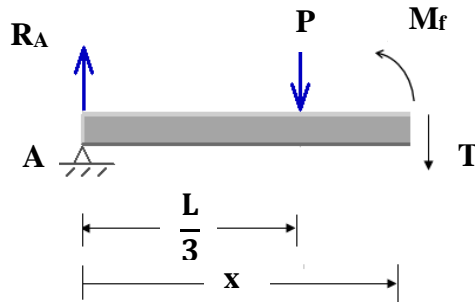
$$M_f = R_A x = \frac{5P}{12} \cdot x = 0$$

$$\text{Pour } x = 0 \rightarrow M_f = 0$$

$$\text{Pour } x = L/3 \rightarrow M_f = \frac{5PL}{36}$$

Section 2

$$L/3 \leq x \leq 2L/3$$



$$Q + P - R_A = 0$$

$$Q = -P + R_A = -\frac{7P}{12}$$

$$M_f - R_A x + P \left(x - \frac{L}{3} \right) = 0$$

$$M_f = \frac{5P}{12} x - P \left(x - \frac{L}{3} \right) = 0$$

$$\text{Pour } x = L/3 \rightarrow M_f = \frac{5PL}{36}$$

$$\text{Pour } x = \frac{2L}{3} \rightarrow M_f = \frac{-2PL}{36}$$

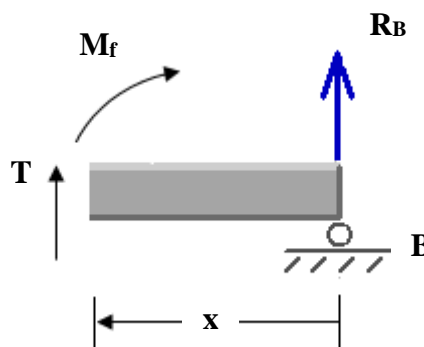
M_f Change de signe et passe par 0

$$\text{pour } x_0: M_f(x_0) = 0$$

$$M_f(x_0) = \frac{5P}{12} x - P \left(x - \frac{L}{3} \right) = 0 \rightarrow x_0 = \frac{4L}{7}$$

Section 3

$$0 \leq x \leq L/3$$



$$T + R_B = 0$$

$$T = -R_B = \frac{-7P}{12}$$

$$M_f - R_B x = 0$$

$$M_f = \frac{7P}{12} x = 0$$

$$\text{Pour } x = 0 \rightarrow M_f = 0$$

$$\text{Pour } x = \frac{L}{3} \rightarrow M_f = \frac{7PL}{36}$$

Diagramme des efforts tranchants

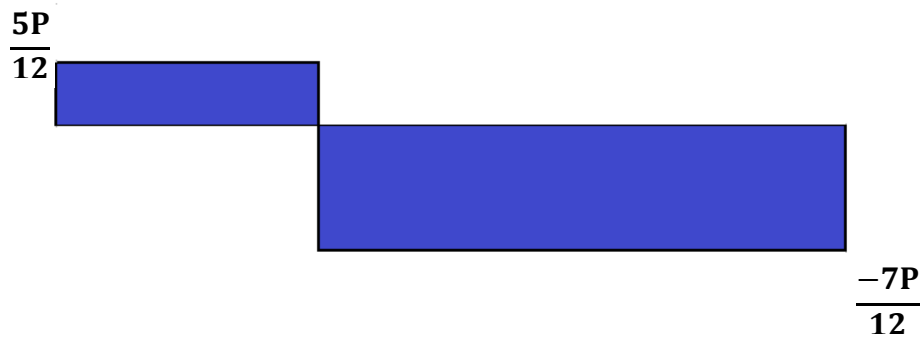
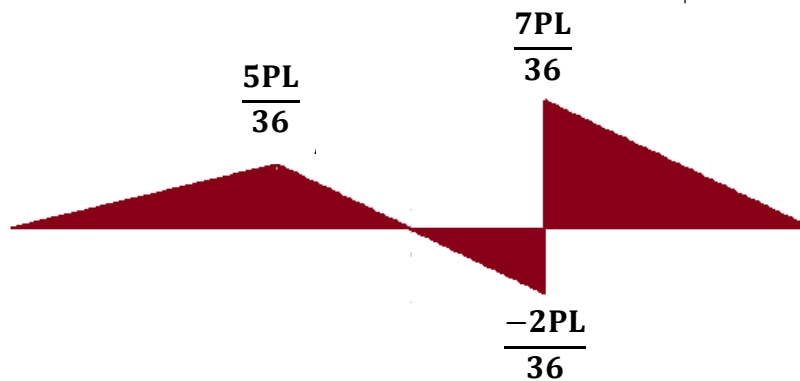


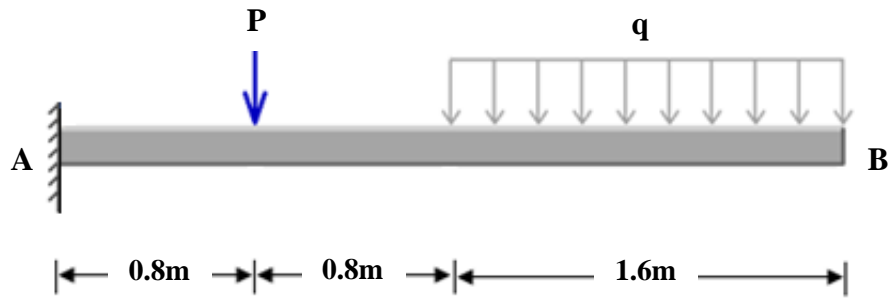
Diagramme des moments fléchissant



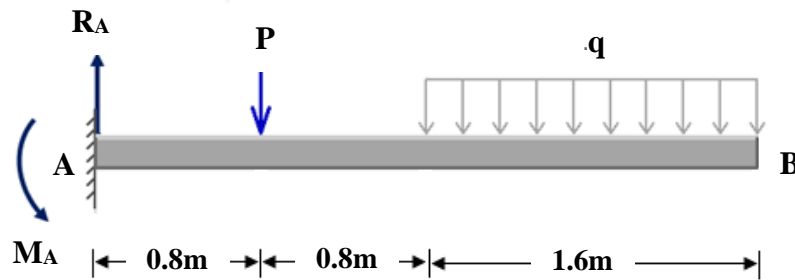
Exercice 4

Soit une poutre encastree-libre representee par la figure, cette poutre est soumise a une charge concentree $P=3 \text{ kN}$ a $x=0.8\text{m}$ de l'extremite encastree et une charge uniformement repartie $q=1 \text{ kN/m}$ sur une distance de 1.6 m du point B.

Tracer les diagrammes des efforts tranchants et des moments fléchissant.



Solution



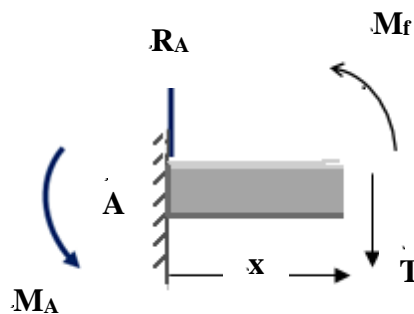
$$\sum F = 0 \rightarrow R_A - P - \frac{qL}{2} = 0$$

$$R_A = P + \frac{qL}{2} = 3 + 1 \times 1.6 = 4.6 \text{ kN}$$

$$\sum M/A = 0 \rightarrow M_A - P \times 0.8 - (q \times 1.6) \times 2.4 = 0 \rightarrow M_A = 6.24 \text{ kN.m}$$

Section 1

$$0 \leq x \leq 0.8 \text{ m}$$



$$T = R_A = 4.6 \text{ kN}$$

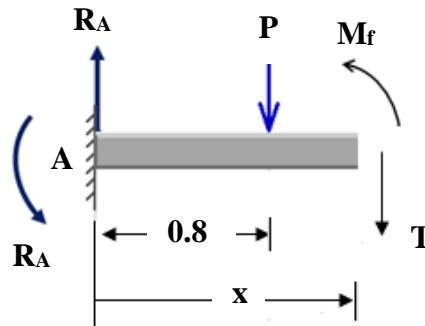
$$M_f = R_A x - M_A$$

$$\text{Pour } x = 0 \rightarrow M_{fA} = 0 \rightarrow M_{fA} = -M_A = -6.24 \text{ kN.m}$$

$$\text{Pour } x = 0.8 \rightarrow M_{fB} = -2.56 \text{ kN.m}$$

Section 2

$$0.8 \leq x \leq 1.6 \text{ m}$$



$$T = R_A - P = 1.6 \text{ kN}$$

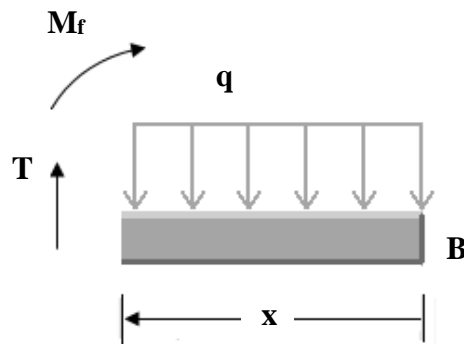
$$M_f = R_A x - P(x - 0.8) - M_A$$

$$\text{Pour } x = 0.8 \rightarrow M_{fB} = -2.56 \text{ kN.m}$$

$$\text{Pour } x = 1.6 \rightarrow M_{fC} = -1.28 \text{ kN.m}$$

Section 3

$$0 \leq x \leq 1.6 \text{ m}$$



$$T - qx = 0$$

$$\text{Pour } x = 0 \rightarrow Q = 0$$

$$\text{Pour } x = 1.6 \rightarrow Q = 1.6 - 1.6 \text{ kN}$$

$$M_f = -\frac{qx^2}{2}$$

$$\text{Pour } x = 0 \rightarrow M_{fB} = 0$$

$$\text{Pour } x = \frac{L}{2} \rightarrow M_{fC} = -\frac{qL^2}{8} = -1.28 \text{ kN.m}$$

Diagramme des efforts tranchants

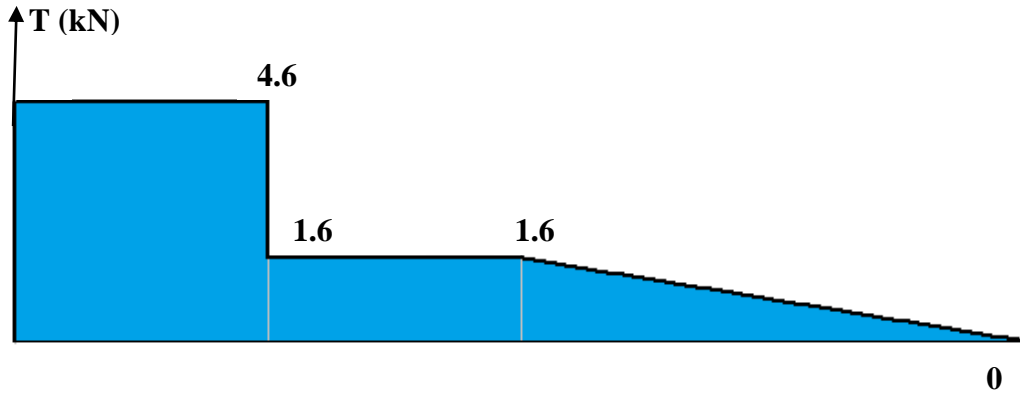
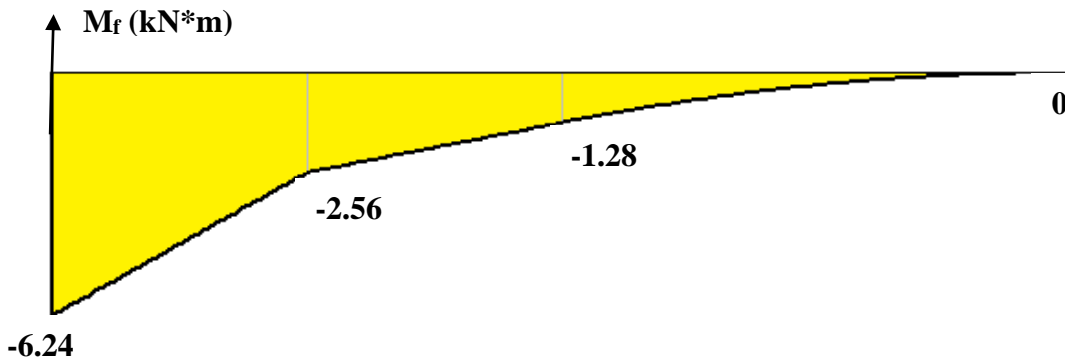


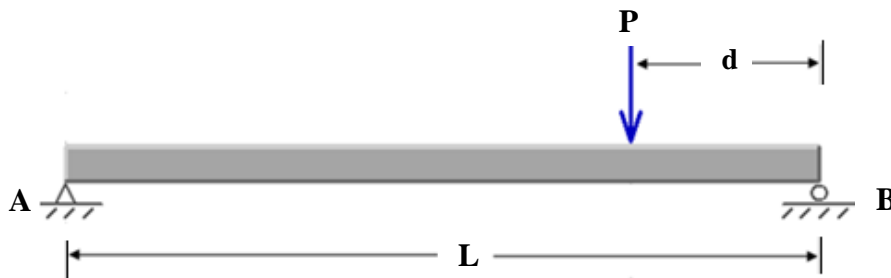
Diagramme des moments fléchissant



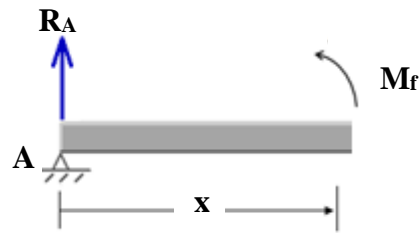
Exercice 5

Déterminer la contrainte maximale de traction σ_{max}^t et la contrainte maximale de compression σ_{max}^c dues à la charge P agissant sur une poutre simplement appuyée aux points A et B.

On donne : $P=5.4$ kN, $L=3$ m, $d=1.2$ m, $b=75$ mm, $t=25$ mm, $h=100$ mm et $h_1=75$ mm.



Solution



$$\sum M/B = 0 \rightarrow R_A = \frac{Pd}{L} = \frac{5.4 \times 1.2}{3} = 2.16 \text{ kN}$$

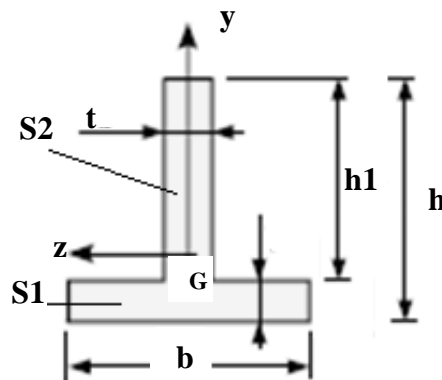
$$M_f = R_A \cdot x$$

$$\text{Pour } x = 0 \rightarrow M_f = 0$$

$$\text{Pour } x = L - r \rightarrow M_f = R_A(L - d)$$

$$M_{f_{\max}} = 2.16(3 - 1.2) = 3.888 \text{ kN} \cdot \text{mm} = 3888 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

Position du centre de gravité de la section :



$$I_z = \sum_{i=1}^2 [I_{Gi} + (y_{Gi} - y_G)^2 S_i]$$

$$I_z = [I_{G1} + (y_{G1} - y_G)^2 S_1] + [I_{G2} + (y_{G2} - y_G)^2 S_2] = 3.32 \cdot 10^6 \text{ mm}^2$$

$$I_{G1} = \frac{75 \cdot 25^3}{12} \quad \text{et} \quad I_{G2} = \frac{25 \cdot 75^3}{12}$$

$$y_{G1} = 37.5 \text{ mm} \quad \text{et} \quad y_{G2} = 62.5 \text{ mm}$$

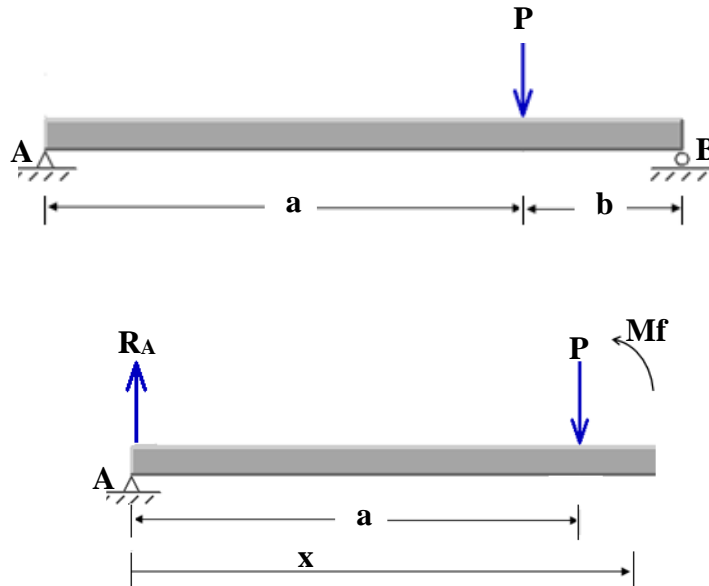
$$\sigma_{\max}^t = \frac{M_{\max}}{I_G} y_{G1} = 43.91 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\max}^c = -\frac{M_{\max}}{I_G} y_{G2} = -73.19 \text{ MPa}$$

Exercice 6

Une poutre de longueur L est simplement appuyée aux points A et B. Cette poutre est soumise à une charge concentrée P à la distance a de l'appui A

Déterminer la flèche au point d'application de la charge.



$$R_A = P \frac{b}{L}$$

$$M_f = P \cdot \frac{b}{L} = R_A \cdot x - P(x - a)$$

$$EIy'' = EI \frac{d^2y}{dx^2} = -M_f = P \cdot \frac{b}{L} = -R_A \cdot x + P(x - a)$$

$$EIy' = EI \frac{dy}{dx} = -R_A \cdot \frac{x^2}{2} + P \frac{(x - a)^2}{2} + C_1$$

$$EIy = -R_A \cdot \frac{x^3}{6} + P \frac{(x - a)^3}{6} + C_1x + C_2$$

Conditions aux limites :

Pour $x = 0$, $y_A = 0 \rightarrow C_2 = 0$

Pour $x = L$, $y_B = 0 \rightarrow -R_A \cdot \frac{L^3}{6} + P \frac{(L-a)^3}{6} + C_1L = -R_A \cdot \frac{L^3}{6} + P \frac{b^3}{6} + C_1L = 0$

Donc :

$$C_1 = \frac{Pb}{6L}(L^2 - b^2) \text{ et avec } L=a+b, C_1 = \frac{Pb}{6L}(a^2 + 2ab)$$

L'expression de la déformée est :

$$y = \frac{1}{EI} \left(-\frac{Pb}{L} \cdot \frac{x^3}{6} + P \frac{(x - a)^3}{6} + \frac{Pb}{6L}(a^2 + 2ab)x \right)$$

Au point d'application de la charge au point C ($x_C = a$) :

$$y_c = \frac{1}{EI} \left(-\frac{Pb}{L} \cdot \frac{a^3}{6} + \frac{Pb}{6L} (a^2 + 2ab)a \right) = \frac{Pba}{6EIL} (-a^3 + (a^2 + 2ab)) = \frac{2Pb^2a^2}{6EIL}$$

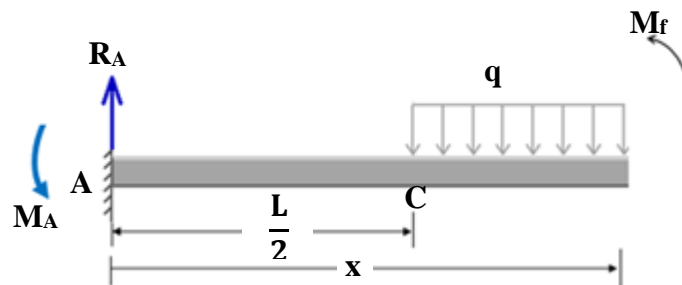
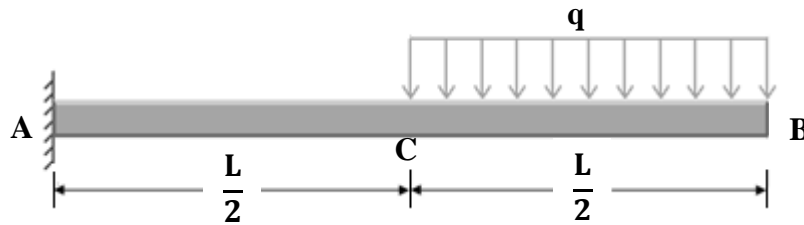
$$y_c = \frac{Pa^2b^2}{3EIL}$$

Exercice 7

Soit une poutre en porte-à-faux de longueur L est soumise à une charge uniformément répartie q sur le tronçon BC (figure 2).

Déterminer l'expression générale de la flèche.

Déterminer la flèche maximale au point B.



Calcul des réactions

$$\sum F = 0 \rightarrow R_A = \frac{qL}{2}$$

$$\sum M/A = 0 \rightarrow M_A = \frac{3qL^2}{8}$$

$$M_f = R_A \cdot x - q \frac{\left(x - \frac{L}{2}\right)^2}{2} - M_A$$

$$EIy'' = EI \frac{d^2y}{dx^2} = -M_f = -R_A \cdot x + q \frac{\left(x - \frac{L}{2}\right)^2}{2} + R_A \cdot x - q \frac{\left(x - \frac{L}{2}\right)^2}{2} - M_A$$

$$EIy' = EI \frac{dy}{dx} = -R_A \cdot \frac{x^2}{2} + q \frac{\left(x - \frac{L}{2}\right)^3}{6} + R_A \cdot x - q \frac{\left(x - \frac{L}{2}\right)^2}{2} - M_A \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$EIy = -R_A \cdot \frac{x^3}{6} + P \frac{(x - a)^4}{24} + M_A \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

Conditions aux limites :

Pour $x_A = 0, y'_A = 0 \rightarrow C_1 = 0$

Pour $x_A = 0, y_A = 0 \rightarrow C_2 = 0$

L'expression de la flèche est :

$$y = \frac{1}{EI} \left[+q \frac{\left(x - \frac{L}{2}\right)^4}{24} - \frac{qL}{2} \cdot \frac{x^3}{6} + \frac{3qL^2}{8} \frac{x^2}{2} \right] = \frac{q}{48EI} \left[2 \left(x - \frac{L}{2}\right)^4 - 4Lx^3 + 9L^2x^2 \right]$$

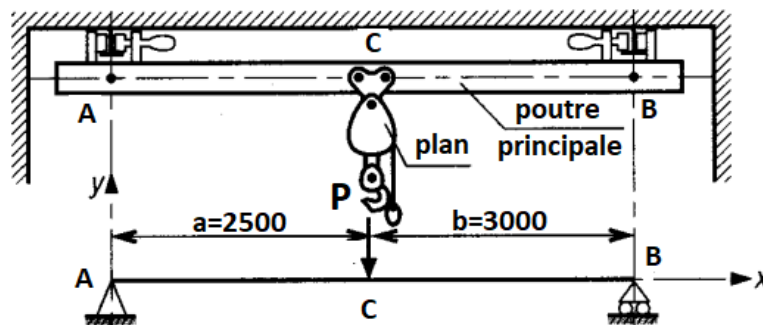
Au point B ($x_B = L$), la flèche est maximale :

$$y_B = \frac{41qL^4}{384EI}$$

Exercice 8

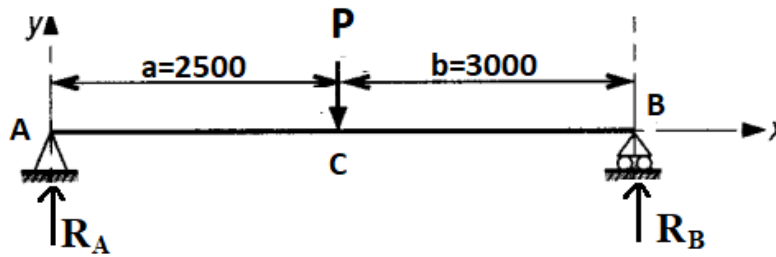
Le pont roulant propose se compose d'une poutre principale (profilé IPE), d'un palan mobile entre A et B soulevant une charge de poids P ($P = 2000 \text{ daN}$). La poutre principale est schématisée comme l'indique la figure, si $a = 2500$ et $b = 3000$.

- a) Déterminer les actions exercées par les appuis en A et B.
- b) Tracer les diagrammes des efforts tranchants T et des moments fléchissant M_f entre A et B.



Solution

Calcul les réactions



$$\sum M/B = 0$$

$$R_A * 5500 - P * 3000 = 0$$

$$R_A = 0.54P$$

$$\sum F = 0$$

$$R_A + R_B - P = 0$$

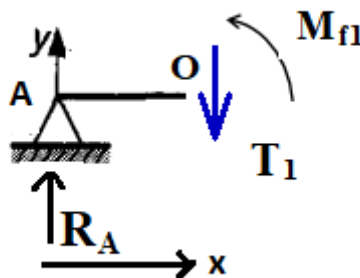
$$R_B = P - 0.54P$$

$$R_B = 0.46P$$

Calcul les efforts tranchants et les moments fléchissant

Section 1-1

$$0 \leq x \leq 2500$$



$$\sum F = 0$$

$$R_A - T_1 = 0$$

$$T_1 = 0.54P$$

$$\sum M/O = 0$$

$$M_{f1} = R_A * x$$

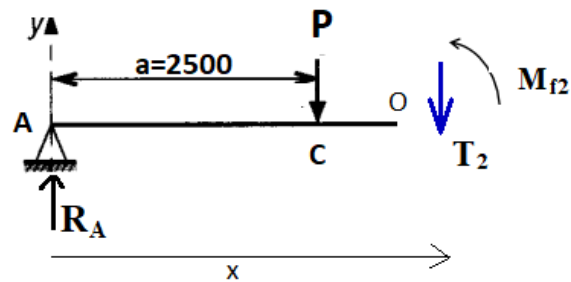
$$M_{f1} = 0.54P * x$$

$$\text{Pour } x = 0 \rightarrow M_{f1} = 0$$

$$\text{Pour } x = 2500\text{mm} \rightarrow M_{f1} = 1\,350P \text{ daN} * \text{mm}$$

Section 2-2

$$2500 \leq x \leq 5500$$



$$\sum F = 0$$

$$R_A - P - T_2 = 0$$

$$T_2 = R_A - P$$

$$T_2 = 0.54P - P$$

$$T_2 = 0.46P$$

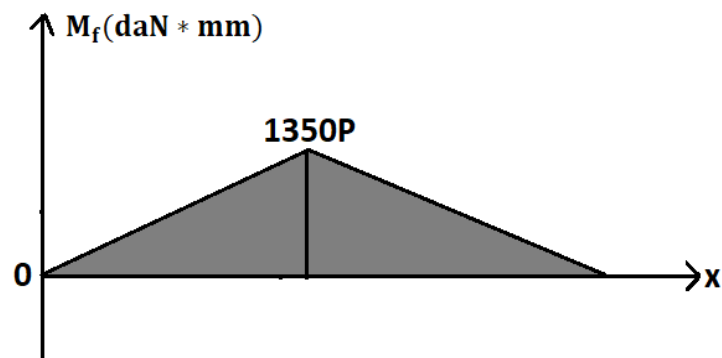
$$\sum M/O = 0$$

$$M_{f2} - R_A * x + P * (x - 2500) = 0$$

$$M_{f2} = R_A * x - P * (x - 2500)$$

Pour $x = 2500 \rightarrow M_{f2} = 1\,350P$ daN * mm

Pour $x = 5500\text{mm} \rightarrow M_{f2} = 0$

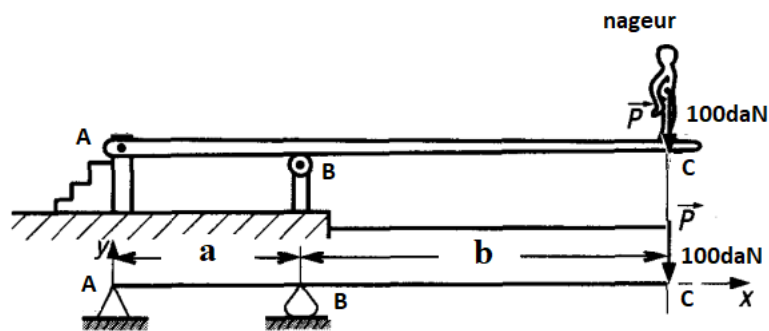


Exercice 9

La planche *ABC* du plongeur est articulée en *A* sur un socle et en appui simple en *B* sur un support fixe. Le poids de la planche est négligé.

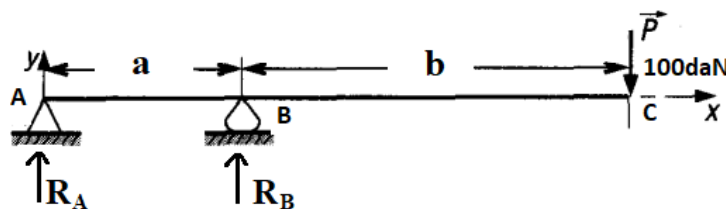
On donne : $a = 2000\text{mm}$, $b = 4000\text{mm}$, $EI = \text{constant}$.

- a) Déterminer les actions exercées par les appuis en *A* et *B*.
- b) Tracer les diagrammes des efforts tranchants et des moments fléchissant entre *A* et *C*.
- c) Calculer la flèche au point *C*.



Solution

Calcul les réactions



$$\sum M/B = 0$$

$$R_A * a + P * b = 0$$

$$R_A = -200 \text{ daN}$$

$$\sum F = 0$$

$$R_A + R_B - P = 0$$

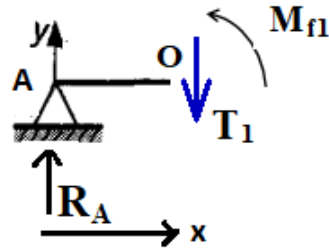
$$R_B = 200 - 1000$$

$$R_B = 100 \text{ daN}$$

Calcul les efforts tranchant et les moments fléchissant

Section 1-1

$0 \leq x \leq 2000$



$$\sum F = 0$$

$$R_A - T = 0$$

$$T_1 = -200 \text{ daN}$$

$$\sum M/O = 0$$

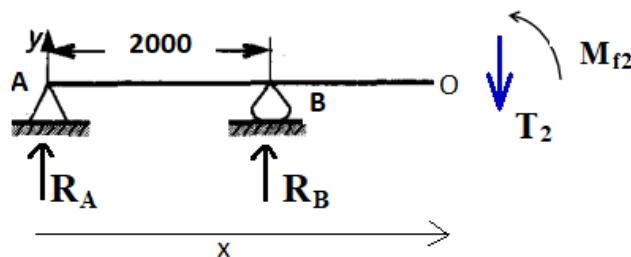
$$M_{f1} = R_A * x$$

Pour $x = 0 \rightarrow M_{f1} = 0$

Pour $x = 2000\text{mm} \rightarrow M_{f1} = -4000 \text{ N} * \text{mm}$

Section 2-2

$2000 \leq x \leq 6000$



$$\sum F = 0$$

$$R_A + R_B - T_2 = 0$$

$$T_2 = 100 \text{ daN}$$

$$\sum M/O = 0$$

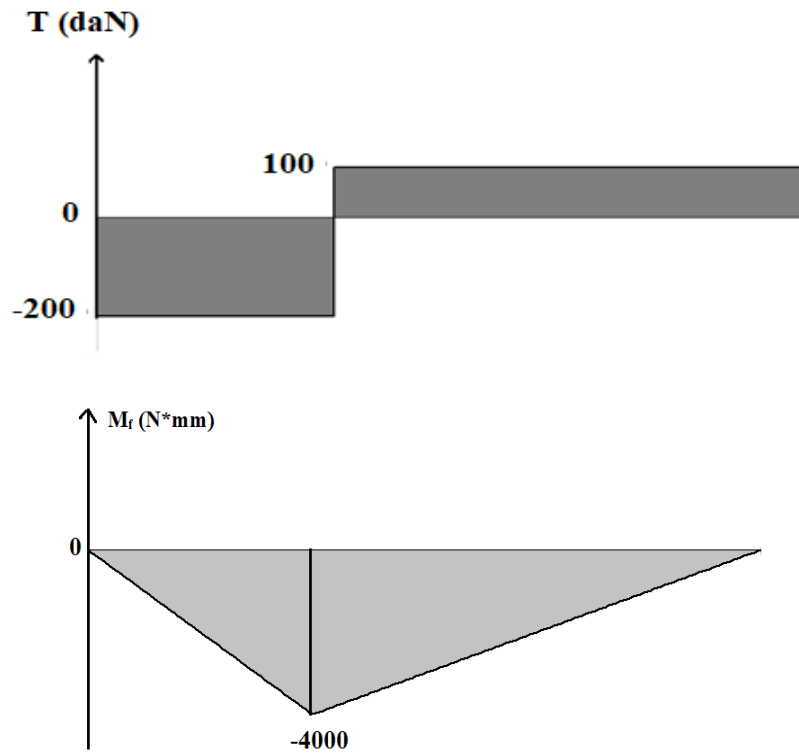
$$M_{f2} - R_A * x - R_B * (x - a) = 0$$

$$M_{f2} = R_A * x + R_B * (x - a)$$

Pour $x = 2000 \rightarrow M_{f2} = -4000 \text{ N} * \text{mm}$

Pour $x = 6000\text{mm} \rightarrow M_{f2} = 0$

Les diagrammes



Calcul la flèche au point C

$$M_f = R_A * x + R_B * (x - a)$$

$$EI * y'' = EI \frac{d^2y}{dx^2} = -M_f = -R_A * x - R_B * (x - a)$$

$$EI * y' = EI \frac{dy}{dx} = -R_A * \frac{x^2}{2} - R_B * \frac{(x - a)^2}{2} + C_1$$

$$EI * y = -R_A * \frac{x^3}{6} - R_B * \frac{(x - 2000)^3}{6} + C_1 * x + C_2$$

Conditions aux limites :

Pour $x_A = 0, y_A = 0 \rightarrow C_2 = 0$

Pour $x_B = 2000, y_B = 0$

$$C_2 = R_A * \frac{a^2}{6}$$

L'expression de la flèche est :

$$y = \frac{1}{EI} \left[-R_A * \frac{x^3}{6} - R_B * \frac{(x-a)^3}{6} + R_A * \frac{a^2}{6} * x \right]$$

Au point C ($x_C = a + b$)

$$y_c = \frac{1}{EI} \left[-R_A * \frac{(a+b)^3}{6} - R_B * \frac{(a+b-a)^3}{6} + R_A * \frac{a^2}{6} * (a+b) \right]$$

$$y_c = \frac{1}{EI} [72000 - 32000 - 8000]$$

$$y_c = \frac{\mathbf{32000}}{\mathbf{EI}}$$

Références

- [1] Timothy A. Philpot ,Mechanics Of Materials:An Integrated Learning System. Missouri University Of Science And Technology Rolla, Missouri
- [2] James M. Gere,Mechanics of Materials Sixth Edition,2004
- [3] Stephen H Crandall,Borman C Dahi ,Thomas J Lardner ,An introduction to mechanics of solids
- [4] Ferdinand P. Beer,E. Russell Johnston, Jr.,John T. Dewolf,David F. Mazurek Mechanics Of Materials, Sixth Edition,2012
- [5] Hibbeler R. C,Mechanics of Materials Ninth Edition,2014
- [6] Budynas–Nisbett,Mechanical EngineeringShigley’s Mechanical Engineering Design, Eighth Edition,2006
- [7] William A. Nash,Merle C. Potter,Strength ofMaterials Fifth Edition,2011
- [8] P.STEPINE,Résistance des matériaux édition MIR.MOSCOU,1998
- [9] R. BASQUIN,G.LEMASSON, Résistance des matériaux cours de mécanique,1988