



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا محمد بوضياف
كلية الرياضيات والاعلام الالي

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur Et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF

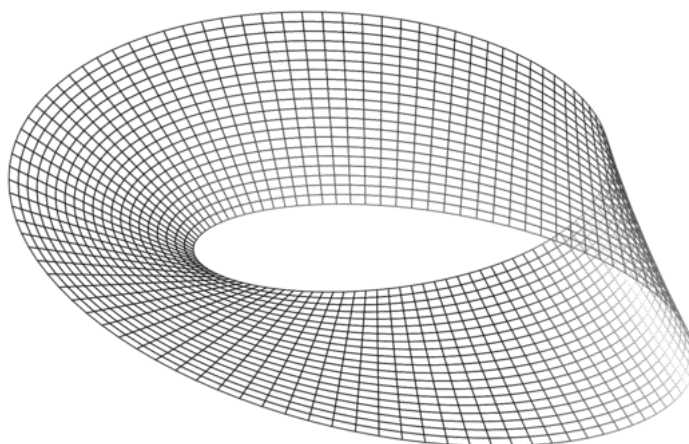
Faculté des Mathématiques et Informatique

Département : Mathématique

Deuxième année
Licence Mathématiques

Polycopié de cours :

**Topologie pour la deuxième année
licence mathématiques : Cours et
Exercices corrigés**



Domaine :

Filière :

Spécialité :

Auteur :

Mathématiques - Informatique

Mathématiques

Mathématiques

Dr. BENKAMRA Zohra

Topologie en deuxième année licence mathématiques : Cours et Exercices corrigés

Université des sciences et technologies d'Oran Mohamed Boudiaf

Faculté des mathématiques et informatique

Département de mathématiques

Auteur du polycopié: BENKAMRA Zohra

Table des matières

Préface	5
Chapitre 1. Notions fondamentales de topologie	7
1.1. Introduction	7
1.2. Définitions générales	7
1.3. Fermeture et points d'accumulation	10
1.4. Séparation - limites et suites convergentes	12
1.5. Continuité et équivalence en topologie	14
Chapitre 2. Espaces métriques	17
2.1. Diamètres, borné, boules, sphères	18
2.2. Topologie métrique dans un espace métrique	19
2.3. Suites de Cauchy et espaces complets	20
2.4. Limites et continuité dans les espaces métriques	22
2.5. Théorème du point fixe	23
Chapitre 3. Les espaces compacts	25
3.1. Parties compactes d'un espace topologique	27
3.2. Fonctions continues sur un compact	28
3.3. Produit d'espaces compacts	29
Chapitre 4. Les espaces connexes	31
4.1. Espaces et parties connexes	31
4.2. Connexité et fonctions continues	32
4.3. Union et composantes connexes	33
4.4. Connexité par arc	34
4.5. Homotopies - Espaces simplement connexes	34
Chapitre 5. Introduction aux espaces vectoriels normés	37
5.1. Norme et structure vectorielle topologique	37
5.2. Norme produit et compatibilité avec la structure linéaire	38
5.3. Applications linéaires continues sur les e.v.n (s)	39
5.4. Introduction aux espaces de Banach	39
Les Travaux dirigés	41
Travaux dirigés <i>Fiche 1</i> : Espaces topologiques	41
Correction Travaux dirigés <i>Fiche 1</i> : Espaces topologiques	43
Travaux dirigés <i>Fiche 2</i> : Espaces topologiques	46
Correction Travaux dirigés <i>Fiche 2</i> : Espaces topologiques	48
Travaux dirigés <i>Fiche 3</i> : Homéomorphismes et invariants topologiques	53
Correction Travaux dirigés <i>Fiche 3</i> : Homéomorphismes et invariants topologiques	55
Travaux dirigés <i>Fiche 4</i> : Espaces métriques - espaces complets	59
Correction Travaux dirigés <i>Fiche 4</i> : Espaces métriques - espaces complets	60
Correction Travaux dirigés <i>Fiche 5</i> : Espaces compacts	64
Travaux dirigés <i>Fiche 6</i> : Espaces connexes	68

Correction Travaux dirigés <i>Fiche 6</i> : Espaces connexes	69
Travaux dirigés <i>Fiche 7</i> : Espaces vectoriels normés	72
Bibliographie	73

Préface

Ce polycopié est destiné aux étudiants de deuxième année licence mathématiques conformément au programme officiel du canevas 2015. Le volume horaire pouvant être alloué à son contenu peut être arrondi à un semestre à raison de trois heures de cours et trois heures de travaux dirigés par semaine. Les prérequis pour son contenu se limitent à une bonne maîtrise des notions d'analyse et d'algèbre de la première année du socle commun du domaine mathématiques et informatique. Plus particulièrement, une bonne maîtrise de la notion de limite des suites réelles ainsi que celle de continuité des fonctions dans $\mathbb{R}$ aidera beaucoup un lecteur voulant apprendre et assimiler les bases de la topologie, que ce soit à travers ce modeste polycopié ou en lisant d'autres supports ou livres dans la matière.

Le premier chapitre est dédié aux notions fondamentales de topologie qui vont permettre à l'étudiant(e) une transition douce entre les notions de topologie usuelle sur $\mathbb{R}$ déjà acquises en première année en analyse réelle et celles de topologie dans un espace abstrait et tout ce qui vient avec en termes de voisinage, ouverts, fermés, limites et continuité. Ceci le conduira à la fin de ce chapitre à découvrir la notion d'invariance topologique par le biais des applications bi-continues appelées aussi homéomorphismes.

Le deuxième chapitre constitue une rationalisation des notions abstraites introduites au chapitre précédent en utilisant la distance « ou métrique » ce qui donne à l'étudiant une vision plus géométrique aux ouverts et fermés, à la convergence, la continuité, la complétude, etc. À la fin de ce chapitre consacré aux espaces métriques, une application est présentée sous sa forme la plus simple qui sert à la résolution des équations de type $f(x) = x$. Il s'agit du théorème du point fixe qui est très utile en analyse fonctionnelle, équations différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles linéaires ou non linéaires.

Au troisième chapitre vient la notion de compacité qui constitue la base de toute l'analyse moderne. Elle peut être introduite aussitôt après celles de limite et de fonction continue. Une telle notion permet alors de définir des espaces topologiques qui ont les propriétés très semblables à celles que possède un intervalle (ou plus généralement une partie) fermé(e) borné(e) de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$. La compacité en topologie apporte ainsi une notion de finitude topologique.

Le quatrième chapitre est réservé à la notion de connexité qui est une autre propriété topologique importante dans beaucoup de résultats en analyse mathématique tels que les accroissements finis, théorèmes de Rolle, des valeurs intermédiaires, en optimisation et dans pas mal d'autres domaines des mathématiques. En français, le mot connexe veut dire « en un seul morceau ou tenant ». Quelques notions d'homotopie « déformation continue » sont introduites au lecteur intéressé par la topologie algébrique à la fin de ce chapitre.

Le cinquième et dernier chapitre peut être considéré comme supplémentaire par rapport au nouveau programme de la licence à partir de 2018 mais néanmoins il demeure très recommandé pour les étudiants qui veulent acquérir une bonne introduction dans la matière de troisième licence intitulée « espaces vectoriels normés » appelée aussi autrefois « analyse hilbertienne » dans l'ancien programme. Ce chapitre couvre une bonne introduction à la structure vectorielle topologique lorsque celle-ci est induite par une norme. Il s'agit d'un cas particulier des espaces métriques où on peut introduire les applications linéaires qui sont à la base de l'analyse fonctionnelle linéaire. On introduit aussi la notion d'espace de Banach et nous donnons certains exemples fondamentaux.

Une série de fiches de travaux dirigés avec corrigés parfois détaillés parfois non est présentée à la fin. Il est fortement conseillé à l'étudiant de proposer ses propres réponses, pourquoi pas de meilleures réponses que celles proposées ici, avant de regarder les corrigés qui suivent chaque fiche.

Finalement, une liste de références bibliographiques est proposée. Ces dernières sont choisies parmi les meilleures plus ou moins récentes lectures sur la topologie que l'étudiant pourra consulter à volonté et indépendamment du contenu modeste de ce polycopié. Notamment, la majorité de ces livres sont en anglais et là aussi je recommande fortement et vivement l'étudiant à lire l'anglais en même temps que les

mathématiques s'il veut frapper à la porte de la recherche car cette dernière parle actuellement l'anglais scientifique en toute majorité internationale.

Chapitre 1

Notions fondamentales de topologie

1.1. Introduction

TOPOLOGIE est un mot grec composé de deux mots TOPO : lieu ou espace et LOGIE : science. Ainsi la **topologie** est la science qui étudie certaines propriétés de l'espace. Elle permet d'étendre les notions fondamentales d'ouvert, fermé, bord, limite, voisinage, continuité, convergence, connexité, compacité, etc... de certains espaces de dimension finies tels que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$ à d'autres espaces plus généraux comme ceux qu'on rencontre en analyse fonctionnelle (espaces des fonctions) ou en physique par exemple (espaces des distributions) ou bien encore à des espaces plus abstraits telles que les structures algébriques (groupes, anneaux, corps, etc....).

1.2. Définitions générales

DÉFINITION 1 (Topologie sur un espace X). Soit X un ensemble. On appelle **topologie** sur X et on note $\mathcal{T}$ une famille de parties de X ($\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$) appelées **ouverts** de X qui vérifie les axiomes de Hausdorff suivants :

- (O₁) : $\emptyset$ et X sont des ouverts (c.a.d, des éléments de $\mathcal{T}$)
- (O₂) : Toute réunion **quelconque** d'ouverts est un ouvert.
- (O₃) : Toute intersection **finie** d'ouverts est un ouvert.

Si $\mathcal{T}$ est une topologie sur X , le couple $(X, \mathcal{T})$ est appelé **espace topologique**. Les éléments de $\mathcal{T}$ sont les **ouverts** de cette topologie et leurs **complémentaires** dans X sont appelés les **fermés** pour la topologie $\mathcal{T}$. Pour tout espace topologique $(X, \mathcal{T})$, $\emptyset$ et X sont des ouverts et fermés à la fois.

Exemples :

- (1) $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ est la **plus petite** topologie (au sens de l'inclusion) qui peut être définie sur X . On l'appelle topologie **grossière** (car elle ne voit que X comme ouvert, l'ensemble vide $\emptyset$ n'a pas beaucoup d'intérêt comme ouvert).
- (2) $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ est la **plus grande** topologie (au sens de l'inclusion) qui peut être définie sur X . On l'appelle topologie **discrète** (car toutes les parties de X sont des ouverts y compris les singletons).
- (3) Si $X = \emptyset$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$ est la seule topologie sur X .
- (4) Si $X = \{x\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{x\}\}$ est l'unique topologie sur X .
- (5) Si $\text{Card}(X) \geq 2$ alors si A est une partie de X ($A \subset X$), alors $\mathcal{T} = \{\emptyset, A, X\}$ est une topologie sur X .

EXERCICE (La topologie co-finie). X un ensemble et

$$\mathcal{FIN}(X) = \{A \subset X / \text{Card}(A) < \infty\}.$$

On définit la famille d'ensembles $\mathcal{T}$ par

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{A^C\}_{A \in \mathcal{FIN}(X)}\}.$$

Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie sur X . (On l'appelle topologie co-finie sur X).

EXERCICE. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Montrer que les fermés de $\mathcal{T}$ vérifient les propriétés suivantes :

(F₁) : $\emptyset$ et X sont des fermés

(F₂) : Toute réunion **finie** de fermés est un fermé.

(F₃) : Toute intersection **quelconque** de fermés est un fermé.

DÉFINITION 2 (Comparaison de topologies). X un ensemble, $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ deux topologies sur X . On dit que $\mathcal{T}$ est moins fine que $\mathcal{T}'$ si $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$.

Exemples :

- (1) La topologie grossière sur X est la **moins** fine (plus petite) topologie sur X . La topologie discrète est donc la **plus** fine.
- (2) Deux topologies ne sont pas forcément comparables : ex.

$$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}, \quad \mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{b\}, \{b, c\}\}$$

DÉFINITION 3 (Topologie engendrée). Soit Σ une famille de parties de X . La topologie engendrée par Σ , notée $\mathcal{T}(\Sigma)$ est la plus petite topologie contenant Σ .

PROPOSITION 4. $\mathcal{T}(\Sigma)$ est l'intersection de toutes les topologies qui contiennent Σ .

REMARQUE. Noter que l'intersection de topologies est une topologie alors que la réunion ne l'est pas (par exemple $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ de l'exemple précédent sont des topologies alors que $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ ne l'est pas).

PREUVE DE LA PROPOSITION. Évidente par définition même, □

THÉORÈME 5. X un ensemble et Σ famille de parties de X . Alors

$$\mathcal{T}(\Sigma) = \{\emptyset, X, A \mid A \text{ est union quelconque d'intersections finies d'éléments de } \Sigma\}.$$

DÉMONSTRATION. Exercice. □

Exemple :

Σ la collection de tous les intervalles ouverts de la droite réelle $(a, b) = \{x, a < x < b\}$, alors la topologie engendrée par Σ est appelée la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$. Un ouvert serait alors union quelconque d'intersection finies d'intervalles ouverts de la forme (a, b) .

DÉFINITION 6 (Base de topologie). Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Une base de $\mathcal{T}$ est une partie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{T}$ telle que tout ouvert de $\mathcal{T}$ est union d'ouverts de $\mathcal{B}$.

PROPOSITION 7. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Une partie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{T}$ est une base de la topologie $\mathcal{T}$ si et seulement si pour tout ouvert U de $\mathcal{T}$ et pour tout $x \in U$, il existe un ouvert B de la base $\mathcal{B}$ tel que $x \in B \subset U$.

DÉMONSTRATION. $\Rightarrow$) $\mathcal{B}$ base de $\mathcal{T}$ et $U \in \mathcal{T}$. Alors $U = \bigcup_{i \in I} B_i$, $B_i \in \mathcal{B}$. D'où, pour tout $x \in U$, il existe i_0 tel que $x \in B_{i_0} \subset U$

$\Leftarrow$) Réciproquement : pour tout $U \in \mathcal{T}$, pour tout $x \in U$, il existe $B_x \in \mathcal{B}$, tel que $x \in B_x \subset U$, et donc $U = \bigcup_{x \in U} B_x$ □

Exemples :

- (1) $\mathcal{B}$ la collection de tous les intervalles ouverts de la droite réelle $(a, b) = \{x, a < x < b\}$, alors $\mathcal{B}$ est une base de la topologie **usuelle** sur $\mathbb{R}$ dans laquelle un sous-ensemble U serait ouvert si pour tout $x \in U$, il existe un intervalle ouvert (a, b) qui contient x et tel que $x \in (a, b) \subset U$.

- (2) $\mathcal{B}$ la collection de tous les disques ouverts (intérieurs des cercles) du plan $\mathbb{R}^2$. Alors $\mathcal{B}$ est une base topologie dans laquelle un sous-ensemble U serait ouvert si pour tout $x \in U$, il existe un disque ouvert B qui contient x et tel que $x \in B \subset U$.
- (3) De même, $\mathcal{B}'$ la collection de tous les rectangles ouverts (dont les côtés sont parallèles aux axes) du plan $\mathbb{R}^2$. Alors $\mathcal{B}'$ est une base topologie dans laquelle un sous-ensemble U serait ouvert si pour tout $x \in U$, il existe un rectangle ouvert B qui contient x et tel que $x \in B \subset U$.
- (4) X un ensemble. La collection de tous les singletons x de X est une base de la topologie discrète $\mathcal{P}(X)$.

DÉFINITION 8 (Topologie induite et sous-espace topologique). Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et soit A une partie de X . On note

$$\mathcal{T}_A = \{U \cap A, U \in \mathcal{T}\} := \mathcal{T} \cap A$$

la trace de $\mathcal{T}$ sur A . Alors $\mathcal{T}_A$ hérite les propriétés (O_1) , (O_2) et (O_3) par construction et donc c'est une topologie appelée topologie **induite** par $\mathcal{T}$ sur A (ou encore Trace de $\mathcal{T}$ sur A). Le couple $(A, \mathcal{T}_A)$ est ainsi appelé sous-espace topologique de $(X, \mathcal{T})$.

Exemple :

$A = \mathbb{Z}$ est un sous-ensemble de la droite réelle $\mathbb{R}$. La topologie induite par la topologie de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{Z}$ est la topologie discrète car les singletons $\{n\}$ sont ouverts. En effet, $\{n\} =]n-1, n+1[\cap \mathbb{Z}$. Donc $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}} = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$.

Les deux propositions suivantes sont simples à démontrer et leurs preuves laissées en exercices.

PROPOSITION 9. Si $\mathcal{B}$ est une base de l'espace topologique $(X, \mathcal{T})$ et A une partie de X , alors la trace de $\mathcal{B}$ sur A , $\mathcal{B}_A = \{U \cap A, U \in \mathcal{B}\}$ est une base du sous-espace topologique $(A, \mathcal{T}_A)$.

PROPOSITION 10 (Propriété de transitivité). Soit Y un sous-espace de X . Si Y est ouvert dans X et A est ouvert dans Y alors A est ouvert dans X .

DÉFINITION 11 (La topologie produit). Soient X et Y deux espaces topologiques. La topologie **produit** sur $X \times Y$ est la topologie qui a pour base $\mathcal{B}$ la collection de tous les ensembles de la forme $U \times V$, où U est un ouvert de X et V ouvert de Y .

EXERCICE. Dans la définition ci-dessus, montrer que $\mathcal{B}$ est bien une base de topologie.

THÉORÈME 12. Si $\mathcal{B}$ est une base pour la topologie de X et $\mathcal{C}$ est une base de la topologie de Y alors la collection

$$\mathcal{D} = \{B \times C \mid B \in \mathcal{B} \text{ et } C \in \mathcal{C}\}$$

est une base de la topologie produit $X \times Y$.

REMARQUE. Noter que la collection $\mathcal{B}$ n'est pas une topologie sur $X \times Y$. Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, la réunion de deux rectangles ouverts est un ouvert mais elle n'est pas toujours un rectangle (c.a.d, produit de deux intervalles qui forment les éléments de la base de topologie de $\mathbb{R}$).

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. Soit W un ouvert de $X \times Y$ et (x, y) un couple élément de W . Alors par définition, (x, y) est contenu dans un ensemble de la forme $U \times V$, où U est un ouvert de X et V ouvert de Y , et on a $(x, y) \in U \times V \subset W$. Donc, $x \in U$ ouvert de X , et comme $\mathcal{B}$ est une base de topologie de X alors il existe un ouvert B de $\mathcal{B}$ tel que $x \in B \subset U$. De même pour $y \in V$ ouvert de Y , et $\mathcal{C}$ base de topologie de Y alors il existe un ouvert C de $\mathcal{C}$ tel que $y \in C \subset V$. On conclut que $(x, y) \in B \times C \subset U \times V \subset W$, et $B \times C$ élément de $\mathcal{D}$, d'où $\mathcal{D}$ est une base de la topologie produit $X \times Y$. $\square$

Exemple standard de topologie produit :

La topologie usuelle de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a pour base la collection $\mathcal{D}$ de tous les rectangles ouverts de la forme $(a, b) \times (c, d)$, puisque la collection de tous les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ forment une base de la topologie usuelle de $\mathbb{R}$. Bien-sûr cette construction peut se généraliser à $\mathbb{R}^n$.

1.3. Fermeture et points d'accumulation

Rappelons que dans un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ un ensemble F est dit fermé si son complémentaire $F^C = X - F$ est ouvert. Il faut noter que « être fermé » n'est pas la négation d' « être » ouvert. Un ensemble peut être ouvert et fermé à la fois (ex. la topologie discrète) et aussi il existe des ensembles qui ne sont ni ouverts ni fermés (ex. l'intervalle $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle). La notion de fermé est donc complémentaire avec celle d'ouvert et on peut très bien définir la topologie en spécifiant ses fermés au lieu de ses ouverts. Cependant, il faut être plus prudent lorsqu'on utilise cette notion de « fermé » dans les sous-espaces topologiques.

DÉFINITION 13 (Fermé dans un sous-espace). Si Y sous-espace topologique de X , A une partie de Y alors on dit que A est fermé dans Y si son complémentaire dans Y , $(Y - A)$ est ouvert dans Y .

THÉORÈME 14. *Soit Y un sous-espace topologique de X . Alors une partie A de Y est fermée dans Y ssi A est l'intersection d'un fermé de X avec Y .*

DÉMONSTRATION. Soit $A = F \cap Y$, avec F fermé dans X . Alors, $X - F$ est ouvert dans X de telle sorte que $Y - F = (X - F) \cap Y$ est ouvert dans Y , d'où F est fermé dans Y . Réciproquement, supposons A fermé dans Y , alors $Y - A$ est ouvert dans Y et par définition de la topologie induite il existe O ouvert de X tel que $Y - A = O \cap Y$. Ainsi, $X - O$ est fermé dans X et on a $A = Y \cap (X - O)$. $\square$

COROLLAIRE 15. *Soit Y un sous-espace topologique de X . Si A est fermé dans Y et Y est fermé dans X alors A est fermé dans X .*

DÉMONSTRATION. La preuve est une conséquence du théorème précédent. $\square$

DÉFINITION 16 (Fermeture et intérieur d'un ensemble). A une partie d'un espace topologique X .

- L'intérieur de A (noté $Int_X(A)$ ou $\overset{\circ}{A}$) est l'union de tous les ouverts contenus dans A . L'extérieur de A (noté $Ext_X(A)$) est l'intérieur de son complémentaire, $Ext_X(A) = \overset{\circ}{X - A}$.

- L'adhérence ou fermeture de A (noté $\overline{A}^X$ ou $\overline{A}$) est l'intersection de tous les fermés qui contiennent A .

PROPOSITION 17. *A une partie d'un espace topologique X . $\overset{\circ}{A}$ le plus grand ouvert contenu dans A , $\overline{A}$ est le plus petit fermé qui contient A , et on a $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A}$.*

DÉMONSTRATION. Évidente.

REMARQUE 18. Noter que si A est ouvert alors $A = \overset{\circ}{A}$ et si A est fermé alors $A = \overline{A}$. Aussi, il faut être prudent avec les sous-espaces car si $Y \subset X$, et $A \subset Y$ alors $\overline{A}^Y$ n'est pas égal en général à $\overline{A}$. ($\overline{A}$ désignera toujours la fermeture de A dans le grand espace).

$\square$

PROPOSITION 19. *A une partie d'un sous-espace Y d'un espace topologique X . Alors, $\overline{A}^Y = \overline{A} \cap Y$.*

DÉMONSTRATION. $\overline{A}$ est fermé dans X donc $\overline{A} \cap Y$ est fermé dans Y et contient A , donc d'après la proposition précédente on a $A \subset \overline{A}^Y \subset \overline{A} \cap Y$. D'autre part, $\overline{A}^Y$ est fermé dans Y donc il existe un fermé C de X tel que $\overline{A}^Y = C \cap Y \subset C$. Donc C est un fermé de X qui contient A , alors $\overline{A} \subset C$, d'où $\overline{A} \cap Y \subset C \cap Y = \overline{A}^Y$, et la preuve est finie. $\square$

Nous allons maintenant redéfinir la fermeture d'un ensemble en utilisant les bases de topologie.

THÉORÈME 20 (Définition de l'adhérence). *Soit A une partie d'un espace topologique X .*

(a) - *Alors, $x \in \overline{A}$ ssi « tout ouvert de X qui contient x » rencontre A .*

(b) - *Si $\mathcal{B}$ est une base de la topologie sur X , alors $x \in \overline{A}$ ssi « tout ouvert B de la base $\mathcal{B}$ qui contient x » rencontre A .*

DÉMONSTRATION. Pour (a), on va utiliser la **contraposée** de l'équivalence, c.a.d, on montre « non $P \Leftrightarrow$ non Q » au lieu de « $P \Leftrightarrow Q$ ». $\square$

(a) - Si $x \notin \overline{A}$ alors $X - \overline{A}$ est un ouvert qui contient x et $(X - \overline{A}) \cap A = \emptyset$. Réciproquement, supposons qu'il existe dans X un ouvert U qui contient x et tel que $U \cap A = \emptyset$. Alors $X - U$ est fermé et $A \subset X - U$, d'où $\overline{A} \subset X - U$ et par conséquent $x \notin \overline{A}$ car $x \in U$.

(b) - Ce point est en fait une conséquence de (a) puisque tout B dans $\mathcal{B}$ est ouvert de X et tout ouvert de X contient un élément B de $\mathcal{B}$.

REMARQUE 21 (Définition de voisinage). Les mathématiciens utilisent souvent dans leur terminologie la notion de « **voisinage** ». L'expression « **tout ouvert de X qui contient x** » est remplacée alors par « **tout voisinage de x** ». Un voisinage $V(x)$ (respectivement $V(A)$) d'un élément x (respectivement d'une partie $A \subset X$) est par définition une **partie** V de X pour laquelle il existe un ouvert U de X telle que $x \in U \subset V$ (respectivement $A \subset U \subset V$). On note $\mathcal{V}(x)$ (respectivement $\mathcal{V}(A)$) **l'ensemble de tous les voisinages** de x (respectivement de A).

Une autre expression du théorème précédent qui utilise la notion de « **voisinage** » est la suivante :

COROLLAIRE 22. *Soit A une partie d'un espace topologique X . Alors, $x \in \overline{A}$ ssi « **tout voisinage de x** » rencontre A .*

Exemples :

1 - Dans $\mathbb{R}$, la fermeture de $A = (0, 1]$ est $\overline{A} = [0, 1]$. C'est le plus petit fermé qui contient A . Pour $x = 0 \in \overline{A}$, car tout voisinage de 0 rencontre A . Si $x \notin [0, 1]$ alors x admet toujours un voisinage disjoint de A .

2 - $Y = (0, +\infty)$, alors dans $\mathbb{R}$, on a $\overline{Y} = [0, +\infty)$. $B = (0, 1)$, alors dans $\mathbb{R}$ on a $\overline{B} = [0, 1]$ mais dans le sous-espace Y , on a $\overline{B}^Y = \overline{B} \cap Y = (0, 1]$.

DÉFINITION 23 (Points limites ou points d'accumulation). A une partie d'un espace topologique X et $x \in X$. On dit que x est un point limite ou point d'accumulation de A si tout voisinage de x rencontre A en un point autre que x , c.a.d, pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, il existe $y \in X$ tel que $y \neq x$ et $y \in A \cap V$. Dans le cas contraire, on dit que x est un point isolé.

REMARQUE 24. Un point d'accumulation de A peut ne pas être dans A . En d'autres termes, un point d'accumulation de A est un élément de $\overline{A - \{x\}}$, de sorte que tout point d'accumulation est un point adhérent, la réciproque est fausse.

Exemples :

1 - Le cas d'une suite, par exemple $B = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{Z}_+\}$, alors $\overline{B} = B \cup \{0\}$, noter ici que 0 est la limite de la suite $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{Z}_+}$. On a 0 est un point d'accumulation de B car tout voisinage de 0 contient au moins un élément $\frac{1}{n}$ de B pour n assez grand.

2 - Dans $\{0\} \cup [1, 2]$, seul 0 est isolé.

3 - Dans $B \cup \{0\}$ seul 0 est non isolé (c'est un point d'accumulation cf.-1-).

4 - Dans un espace discret, tous les points sont isolés.

THÉORÈME 25. *A une partie d'un espace topologique X ; on note A' l'ensemble de ses points d'accumulation, alors $\overline{A} = A \cup A'$. (A' est appelé ensemble dérivé de A)*

DÉMONSTRATION. On a $A' \subset \overline{A}$ et $A \subset \overline{A}$ d'où $A' \cup A \subset \overline{A}$. Pour l'autre inclusion, si $x \in \overline{A}$, alors on a deux cas : (i) - Si $x \in A$ alors $x \in A \cup A'$. (ii) - si $x \in \overline{A} - A$, alors tout voisinage $V \in \mathcal{V}(x)$ rencontre A , donc $V \cap A$ contient un élément $y \neq x$ car $x \notin A$, d'où, $x \in A'$ et par conséquent $\overline{A} \subset A \cup A'$. $\square$

Nous avons maintenant un corollaire qui caractérise la fermeture à l'aide des points limites.

COROLLAIRE 26. *A une partie d'un espace topologique X . Alors A est fermée ssi A contient tous ses points limites, c.a.d, $A' \subset A$.*

DÉMONSTRATION. A est une partie fermée ssi $A = \overline{A}$. D'après le théorème précédent, $A = A \cup A'$, ce qui est équivalent à dire $A' \subset A$. La preuve est finie. $\square$

DÉFINITION 27 (Densité et séparabilité). - A une partie d'un espace topologique X . On dit que A est **dense** dans X si $\overline{A} = X$.

- X est dit **séparable** s'il contient une partie **dense** et **dénombrable**.

Exemple : $\mathbb{R}$ est séparable car $\mathbb{Q}$ est une partie dense et dénombrable de $\mathbb{R}$.

PROPOSITION 28. *A une partie d'un espace topologique X , alors A est dense dans X **ssi** tout ouvert **non vide** de X rencontre A .*

DÉMONSTRATION. Conséquence directe de la définition de $\overline{A}$ et le fait que $\overline{A} = X$. $\square$

1.4. Séparation - limites et suites convergentes

La notion de **séparation** est liée à l'unicité de la limite d'une suite convergente, c'est à dire qu'on puisse isoler les singletons du point de vue topologique.

DÉFINITION 29 (Suites convergentes). X un espace topologique et $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ une suite d'éléments de X . On dit que la suite $(x_n)_n$ **converge** dans X vers un élément $x \in X$ (et on note $x_n \rightarrow x$) si pour tout voisinage $V \in \mathcal{V}(x)$, il existe un entier $n_0 \geq 0$ tel que $x_n \in V$ pour tout $n \geq n_0$.

Noter que dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^N$) la limite d'une suite convergente est **unique**. Par contre, si on pose $X = \{a, b, c\}$ et on le munit de la topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$ alors la suite « **constante** » $(x_n) = (b)$ **converge vers trois points différents a, b , ou c** . Pour éviter ce genre de situation, le mathématicien **Felix Hausdorff** a introduit la notion de séparation comme suit :

DÉFINITION 30 (Espace séparé). X un espace topologique est dit « espace de Hausdorff » ou « **espace séparé** » si pour tous $x_1, x_2 \in X$ tels que $x_1 \neq x_2$, ils existent deux voisinages $V_1 \in \mathcal{V}(x_1)$ et $V_2 \in \mathcal{V}(x_2)$ qui séparent x_1 et x_2 , c.a.d, tels que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Exemple : $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^N$) sont séparés. Par contre, $X = \{a, b, c\}$ muni de la topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$ ne l'est pas car $x_1 = a$ et $x_2 = c$ ne peuvent pas être séparés par deux voisinages disjoints.

Le théorème suivant caractérise la fermeture des singletons et sa relation avec la séparation.

THÉORÈME 31. *Toute partie finie d'un espace séparé X est fermée dans X .*

DÉMONSTRATION. Il est clair qu'il suffit de montrer que les singletons sont fermés dans X , car toute partie finie $A \subset X$ sera réunion finie de fermés, $A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$. Soit alors $x \in X$ séparé et supposons que $\{x\}$ n'est pas fermé. Alors $\{x\} \neq \overline{\{x\}}$, d'où $\{x\}' \neq \emptyset$ et donc $\{x\}$ admet un point d'accumulation $y \neq x$. Ainsi, tout voisinage $V \in \mathcal{V}(y)$ rencontre $\{x\}$, et par conséquent rencontre tout voisinage de x , ce qui est contradictoire avec X séparé. Donc $\{x\}$ est fermé dans X . $\square$

Le théorème suivant caractérise l'unicité de la limite d'une suite convergente dans un espace séparé.

THÉORÈME 32. *Dans un espace séparé X , toute suite converge vers au plus une limite.*

DÉMONSTRATION. Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de X convergente vers deux limites $l_1 \neq l_2$ dans X . Comme X est séparé alors ils existent deux voisinages $V_1 \in \mathcal{V}(l_1)$ et $V_2 \in \mathcal{V}(l_2)$ qui séparent l_1 et l_2 , c.a.d, tels que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Or la convergence de $(x_n)_n$ vers l_1 (respectivement l_2) implique l'existence d'un rang n_1 (respectivement n_2) tel que $x_n \in V_1$ (respectivement $x_n \in V_2$) pour tout $n \geq n_1$ (respectivement $n \geq n_2$). D'où à partir du rang maximal $n_0 = \max(n_1, n_2)$, on aura $x_n \in V_1 \cap V_2$ ce qui est absurde avec $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. $\square$

Nous allons nous intéresser maintenant à une notion plus faible que celle de limite d'une suite.

DÉFINITION 33 (Valeur d'adhérence d'une suite). X un espace topologique et $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ une suite d'éléments de X . On dit que $l \in X$ est une **valeur d'adhérence** de $(x_n)_n$ si pour tout voisinage $V \in \mathcal{V}(l)$, pour tout entier $n_0 \geq 0$, il existe $n \geq n_0$ tel que $x_n \in V$.

Exemples :

1 - $x_n = (-1)^n$, ne converge pas dans $\mathbb{R}$ mais admet deux valeurs d'adhérence $l_1 = -1$ et $l_2 = +1$, car pour tout voisinage $V = (1 - \epsilon, 1 + \epsilon) \in \mathcal{V}(1)$, pour tout entier $n_0 \geq 0$, il existe $n = 2n_0 \geq n_0$ tel que $x_n = 1 \in V$. Le même raisonnement est valable pour -1 avec $2n_0 + 1$.

2 - Il est clair que toute limite l d'une suite convergente est une valeur d'adhérence de cette suite. La réciproque est fausse.

DÉFINITION 34 (Sous-suite ou suite extraite). $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ deux suites de X . On dit que $(y_k)_k$ est une sous-suite (ou suite extraite) de $(x_n)_n$ s'il existe une application croissante $k \mapsto n_k$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $y_k = x_{n_k}$ pour tout k .

Exemple : $x_n = \sin(n\frac{\pi}{6})$, $n_k = 2k$, $y_k = x_{2k} = \sin(k\frac{\pi}{3})$.

DÉFINITION 35 (Base de voisinages). Une base de voisinage de l est une partie $\mathcal{B}(l)$ de $\mathcal{V}(l)$ telle que tout voisinage de l contient au moins un élément de $\mathcal{B}(l)$. Si de plus $\mathcal{B}(l)$ est dénombrable, on dit que l admet une base dénombrable de voisinage.

Exemple : Dans $\mathbb{R}$, tout réel l admet une base de voisinages dénombrable $\mathcal{B}(l) = \{V_n = (l - \frac{1}{n}, l + \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

PROPOSITION 36. $(x_n)_n$ une suite d'un espace topologique X et $l \in X$ une valeur d'adhérence de $(x_n)_n$. Si l admet une base dénombrable de voisinages $(V_k)_k$, alors il existe $(y_k)_k$ suite extraite de $(x_n)_n$ qui converge vers l .

DÉMONSTRATION. Soit $W_k = V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_k$ voisinage de l , (noter que W_k est une suite décroissante d'ensembles au sens de $\subset$). Alors,

- pour W_1 et $n_0 = 1$, il existe $n_1 \geq n_0$ tel que $x_{n_1} \in W_1$,
- pour W_2 et $n_0 = n_1 + 1$, il existe $n_2 \geq n_0$ tel que $x_{n_2} \in W_2$,
- .
- .
- .
- pour W_k et $n_0 = n_{k-1} + 1$, il existe $n_k \geq n_0$ tel que $x_{n_k} \in W_k$.

On définit alors $(y_k) = (x_{n_k})$ suite extraite de (x_n) , et on montre que (y_k) converge vers l . En effet, soit $V \in \mathcal{V}(l)$, par hypothèse de base de voisinage de l il existe k_0 tel que $V_{k_0} \subset V$, donc pour $k \geq k_0$, $y_k = x_{n_k} \in W_k \subset W_{k_0} \subset V_{k_0} \subset V$, d'où $y_k \rightarrow l$ dans X . $\square$

1.5. Continuité et équivalence en topologie

Rappelons la définition qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en un point $x_0 \in \mathbb{R}$ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x \in (x_0 - \eta, x_0 + \eta) \implies f(x) \in (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon),$$

ou bien encore

$$f((x_0 - \eta, x_0 + \eta)) \subset (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$$

ce qui veut dire aussi que ,

$$x \in (x_0 - \eta, x_0 + \eta) \implies x \in f^{-1}((f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)),$$

où encore

$$(x_0 - \eta, x_0 + \eta) \subset f^{-1}((f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)),$$

ce qui veut dire encore que pour tout **voisinage** $(f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$ de $f(x_0)$, son image réciproque $f^{-1}((f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon))$ est un **voisinage** de x_0 .

DÉFINITION 37 (Continuité). X et Y deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ une fonction définie en x_0 .

On dit que f est continue en un point $x_0 \in X$ si pour tout voisinage $W \in \mathcal{V}(f(x_0))$, $f^{-1}(W) \in \mathcal{V}(x_0)$, ou bien de manière équivalente si pour tout voisinage $W \in \mathcal{V}(f(x_0))$, il existe $V \in \mathcal{V}(x_0)$, tel que $f(V) \subset W$. On dit que f est globalement continue (ou continue) si elle est continue en tout point $x \in X$.

DÉFINITION 38 (Continuité séquentielle). X et Y deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ une fonction définie en x_0 .

On dit que f est **séquentiellement** continue en $x_0 \in X$, si pour toute suite (x_n) de X qui converge vers x_0 alors la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(x_0)$ dans Y .

PROPOSITION 39. *La continuité implique la continuité séquentielle. La réciproque est fausse.*

DÉMONSTRATION. $f : X \rightarrow Y$ une fonction continue en x_0 et $x_n \rightarrow x_0$, alors pour tout voisinage $W \in \mathcal{V}(f(x_0))$, $f^{-1}(W)$ est un voisinage de x_0 , donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$, tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $x_n \in f^{-1}(W)$ d'où $f(x_n) \in W$ et par conséquent $f(x_n)$ converge vers $f(x_0)$. Pour la réciproque voir TD. $\square$

PROPOSITION 40 (Continuité globale). X et Y deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ une fonction. Alors les propositions suivantes sont équivalentes.

- (i) $f : X \rightarrow Y$ continue.
- (ii) L'image réciproque par f de tout ouvert de Y est un ouvert de X .
- (iii) L'image réciproque par f de tout fermé de Y est un fermé de X .

DÉMONSTRATION. On montre l'implication circulaire :

(i) $\implies$ (ii) : Soit W ouvert de Y , montrons que $f^{-1}(W) = \{x \in X / f(x) \in W\}$ est ouvert dans X . Si $x \in f^{-1}(W)$ alors $f(x) \in W$ et W voisinage de $f(x)$. Comme f est continue en x alors il existe V_x voisinage ouvert de x tel que $f(V_x) \subset W$ d'où $f^{-1}(W)$ est ouvert dans X .

(ii) $\implies$ (iii) : Soit F fermé de Y , montrons que $f^{-1}(F) = \{x \in X / f(x) \in F\}$ fermé de X . Alors, F^c est ouvert de Y et $f^{-1}(F^c) = (f^{-1}(F))^c$ est ouvert de X et par conséquent $f^{-1}(F)$ est fermé de X .

(iii) $\implies$ (i) : Soit $x_0 \in X$ et W voisinage (ouvert) de $f(x_0)$ dans Y , montrons que $f^{-1}(W) = \{x \in X / f(x) \in W\}$ est voisinage de x_0 dans X . On a $f(x_0) \notin W^c$ et W^c fermé de Y , donc $f^{-1}(W^c)$ est fermé de X et $x_0 \notin f^{-1}(W^c) = (f^{-1}(W))^c$, d'où $x_0 \in f^{-1}(W)$ qui est ouvert donc c'est voisinage de x_0 , et par conséquent f continue en x_0 quelconque dans X . $\square$

PROPOSITION 41. X, Y et Z trois espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ deux fonctions. Alors :

- (a) - Si x_0 isolé dans X alors f continue en x_0 .
- (b) - f continue en $x_0 \in X$ et g continue en $y_0 = f(x_0) \in Y$ alors $h = g \circ f : X \rightarrow Z$ est continue en x_0 .
- (c) - f continue et Y séparé alors $f^{-1}(\{y\})$ est fermé de X pour tout $y \in Y$.
- (d) - f continue sur X **ssi** pour toute partie $A \subset X$, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

DÉMONSTRATION. (a) - x_0 isolé alors $V = \{x_0\}$ voisinage de x_0 et donc pour tout $W \in \mathcal{V}(f(x_0))$ il existe $V = \{x_0\} \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $f(V) \subset W$ d'où f est continue en x_0 .

(b) - g continue en $y_0 = f(x_0)$, et $g(y_0) = h(x_0)$, donc pour tout $\Omega \in \mathcal{V}(h(x_0))$, il existe $W \in \mathcal{V}(y_0)$, tel que $g(W) \subset \Omega$. Comme f est continue en x_0 et W voisinage de $y_0 = f(x_0)$ alors il existe $V \in \mathcal{V}(x_0)$, tel que $f(V) \subset W$. D'où, $h(V) = g(f(V)) \subset g(W) \subset \Omega$ et par conséquent $g \circ f$ est continue en x_0 .

(c) - évidente car Y séparé implique $\{y\}$ fermé.

(d) **Rappelons** d'abord qu'on a en général $f(f^{-1}(B)) \subset B$ (avec égalité si f surjective) et $C \subset f^{-1}(f(C))$ (avec égalité si f injective).

$\Rightarrow$) $A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ fermé car f continue donc $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$, on applique f des deux côtés et on trouve $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

$\Leftarrow$) Soit W fermé de Y , alors $f^{-1}(W) \subset X$ et $f(\overline{f^{-1}(W)}) \subset \overline{f(f^{-1}(W))} \subset \overline{W} = W$, donc on applique l'image réciproque des deux côtés, on obtient $\overline{f^{-1}(W)} \subset f^{-1}(W)$ donc $f^{-1}(W)$ est fermé et d'après (iii) de la proposition (40) f est continue. $\square$

DÉFINITION 42 (Recouvrement). X ensemble et $B \subset X$. Un recouvrement de B est une famille de parties de X , $(A_i)_{i \in I}$ telle que $B \subset \bigcup_{i \in I} A_i$. Le recouvrement est dit fini /resp. dénombrable si I est fini /resp. dénombrable. Il est dit ouvert /resp. fermé si tous les A_i sont ouverts /resp. fermés de X .

PROPOSITION 43 (Principe de recollement). X et Y deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ application. Soit $(A_i)_{i \in I}$ un recouvrement de X et notons $f_i = f|_{A_i}$ la restriction de f à A_i . ($f_i : A_i \rightarrow Y$) :

- (a) - On suppose le recouvrement $(A_i)_{i \in I}$ **ouvert** et tous les f_i continues, alors f est continue.
- (b) - On suppose le recouvrement $(A_i)_{i \in I}$ **fermé et fini** et que tous les f_i continues, alors f est continue.

DÉMONSTRATION. On a $X = \bigcup_{i \in I} A_i$,

(a) - Soit W ouvert de Y , alors

$$f^{-1}(W) = \bigcup_{i \in I} (f^{-1}(W) \cap A_i) = \bigcup_{i \in I} (f_i^{-1}(W))$$

et comme les $f_i : A_i \rightarrow Y$ sont continues alors les $f_i^{-1}(W)$ sont des ouverts de A_i (ouverts de X) donc les $f_i^{-1}(W)$ sont des ouverts de X et leur réunion quelconque $\bigcup_{i \in I} (f_i^{-1}(W))$ l'est aussi dans X , d'où $f : X \rightarrow Y$ est continue.

(b) - Soit F fermé de Y , alors

$$f^{-1}(F) = \bigcup_{i \in I}^{finie} (f^{-1}(F) \cap A_i) = \bigcup_{i \in I}^{finie} (f_i^{-1}(F))$$

et comme les $f_i : A_i \rightarrow Y$ sont continues alors les $f_i^{-1}(F)$ sont des fermés de A_i (fermés de X) donc les $f_i^{-1}(F)$ sont des fermés de X et leur réunion **finie** $\bigcup_{i \in I}^{finie} (f_i^{-1}(F))$ l'est aussi dans X , d'où $f : X \rightarrow Y$ est continue. $\square$

REMARQUE 44. Les images directes n'ont pas les mêmes propriétés que les images réciproques pour les fonctions continues. Par exemples, (a) - $f(x) = x^2$, est continue mais $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$ n'est pas ouvert, (b) - $f(x) = \arctan(x)$, $f(\mathbb{R})$ n'est pas fermé.

DÉFINITION 45 (Application ouverte/ fermée). X et Y deux espaces topologiques. $f : X \rightarrow Y$ est dite ouverte (resp. fermée), si l'image **directe** par f de tout ouvert (resp. fermé) de X est un ouvert (resp. fermé) de Y .

DÉFINITION 46 (Homéomorphisme). X et Y deux espaces topologiques. On dit que $f : X \rightarrow Y$ réalise un **homéomorphisme** si f est **bijective** et **bi-continue** (c.a.d, f et f^{-1} sont continues).

REMARQUE 47. si f est bijective continue elle n'est pas nécessairement bi-continue. Par exemple, $i : (X, \mathcal{T}_d) \rightarrow (X, \mathcal{T}_g)$ l'application identité de X , muni la topologie discrète $\mathcal{T}_d$ comme espace de départ et la topologie grossière $\mathcal{T}_g$ comme espace d'arrivée. Alors i est bijective continue mais son inverse $i : (X, \mathcal{T}_g) \rightarrow (X, \mathcal{T}_d)$ n'est pas continue (sauf si X contient au plus un élément).

PROPOSITION 48. X et Y deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ une bijection continue. Alors on a équivalence entre :

- (i) - f est ouverte
- (ii) - f est fermée
- (iii) - f est un homéomorphisme

DÉMONSTRATION. (i) $\implies$ (ii) : W fermé de X , alors W^c ouvert de X et $f(W)^c = f(W^c)$ ouvert dans Y car f ouverte, d'où $f(W)$ fermé de Y , donc f fermée.

(ii) $\implies$ (iii) : Il suffit de montrer que $g = f^{-1}$ est continue. En effet, soit C fermé de Y , et montrons que $g^{-1}(C)$ est fermé de X . Or, on a $g^{-1}(C) = f(C)$ est fermé car f fermée.

(iii) $\implies$ (i) : Soit W ouvert de X , alors $f(W) = g^{-1}(W)$ est ouvert de Y car $g = f^{-1}$ est continue (f homéomorphisme). $\square$

EXERCICE. Dans l'exemple précédent, montrer que si X et Y sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$ (muni de la topologie usuelle) alors f^{-1} devient automatiquement continue.

DÉFINITION 49 (Propriété topologique). Une propriété P est dite topologique (ou invariant topologique) si elle est invariante par homéomorphisme.

Exemples :

- $X = (-1, 1)$, $f(x) = \tan(\frac{\pi x}{2})$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est un homéomorphisme, mais X et $\mathbb{R}$ n'ont pas la même longueur. La distance n'est donc pas une propriété topologique. De même pour le caractère « être borné ».

- La convergence des suites est une propriété topologique, car si $f : X \rightarrow Y$ est un homéomorphisme et $x_n \rightarrow x$ alors $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

- La propriété d'être suite de Cauchy n'est pas topologique car, $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = 1/x$, est un homéomorphisme, $(x_n) = (\frac{1}{n})$ est de Cauchy mais $f(x_n) = n$ ne l'est pas dans $(0, +\infty)$.

Espaces métriques

On a vu au chapitre précédent que « la distance n'est pas une propriété topologique », cependant nous allons voir que cette notion peut engendrer une topologie appelée topologie métrique, et les espaces muni de ce type de topologie sont des espaces topologiques particulier appelés espaces métriques.

DÉFINITION 50 (Métrique). Soit X un espace non vide, une métrique (ou distance) sur X est une application $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, qui vérifie les axiomes suivants : pour tous $x, y, z \in X$,

$(M_1) : d(x, y) \geq 0$ et $d(x, x) = 0$, (positivité)

$(M_2) : d(x, y) = d(y, x)$, (symétrie)

$(M_3) : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, (Inégalité triangulaire)

$(M_4) : \text{si } x \neq y \text{ alors } d(x, y) \neq 0$, (séparation)

$d(x, y)$ se lit distance de x à y .

Exemples :

- Dans $\mathbb{R}$, la valeur absolue définit la distance usuelle $d(a, b) = |a - b|$ qui est une métrique sur $\mathbb{R}$.

- Dans $\mathbb{R}^2$, la distance usuelle ou euclidienne est définie par , si $a = (a_1, a_2)$ et $b = (b_1, b_2)$ sont deux points du plan, alors

$$d_2(a, b) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2},$$

et il existe d'autres distances telles que

$$\begin{aligned} d_1(a, b) &= |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|, \\ d_\infty(a, b) &= \sup \{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}. \end{aligned}$$

- La métrique triviale sur un ensemble X non vide est

$$d(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{si } a = b, \\ 1 & \text{si } a \neq b. \end{cases}$$

- $X = \mathcal{C}[0, 1]$ l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, peut être muni de la distance

$$d_2(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

qui représente l'aire entre les deux courbes de f et g , ou encore

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x, y \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|,$$

qui représente l'écart maximal entre les deux courbes.

2.1. Diamètres, borné, boules, sphères

DÉFINITION 51 (proposition). Soit d une métrique sur un espace non vide X .

- Si $x \in X$ et $A \subset X$ alors la distance de x à A est

$$d(x, A) = \inf \{d(x, y) / y \in A\},$$

(noter que si $x \in A$, alors $d(x, A) = 0$).

- Si $B \subset X$, alors la distance entre A et B est

$$d(A, B) = \inf \{d(x, y) / x \in A, y \in B\},$$

(et noter que si $A \cap B \neq \emptyset$ alors $d(A, B) = 0$).

- Le **diamètre** de A (non vide) est

$$d(A) = \sup \{d(x, y) / x, y \in A\},$$

- Si $d(A) < +\infty$ on dit que A est **borné**, sinon A est **non borné** (noter là aussi que si A est fini alors $d(A) < \infty$ et A est borné).

Pour l'ensemble vide on adopte les conventions suivantes :

$$d(x, \emptyset) = +\infty, \quad d(A, \emptyset) = d(\emptyset, A) = +\infty, \quad d(\emptyset) = -\infty.$$

Exemple : Si d^* métrique triviale sur X (non vide) alors pour tout $x \in X$ et $A, B \subset X$,

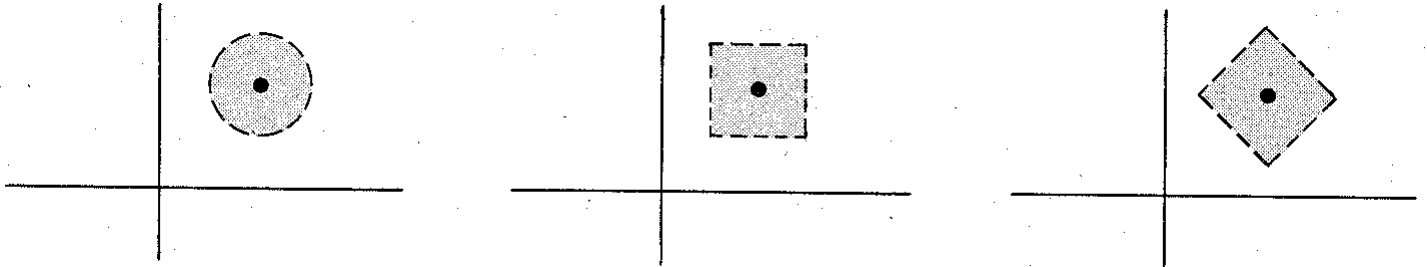
$$d^*(x, A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \notin A \\ 0 & \text{si } x \in A \end{cases}, \quad d^*(A, B) = \begin{cases} 1 & \text{si } A \cap B = \emptyset \\ 0 & \text{si } A \cap B \neq \emptyset \end{cases},$$

par exemple, dans $\mathbb{R}$, si $A = [0, 1)$, $B = (1, 2]$, alors $d^*(A, B) = 1$, alors que si $d(x, y) = |x - y|$ est la métrique usuelle sur $\mathbb{R}$, on a $d(A, B) = 0$.

DÉFINITION 52 (Boules ouvertes, fermées, sphères). (X, d) un espace métrique, $x \in X$ et $r > 0$. On appelle boule ouverte (resp. fermée) / resp. sphère de centre x et de rayon r , et on note $B_d(x, r)$ ou simplement $B(x, r)$ (resp. $\overline{B}(x, r)$) / resp. $\partial B(x, r)$ ou encore $S(x, r)$, les ensembles suivants,

$$\begin{aligned} B(x, r) &= \{y \in X / d(x, y) < r\} \\ \overline{B}(x, r) &= \{y \in X / d(x, y) \leq r\} \\ S(x, r) &= \{y \in X / d(x, y) = r\} \end{aligned}$$

Exemple : Dans $\mathbb{R}$ muni de la métrique usuelle, $B(x, r)$ est l'intervalle ouvert $(x - r, x + r)$. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la métrique euclidienne d_2 , $B(x, r)$ est le disque ouvert centré en x et de rayon r , alors que muni de d_1 ou d_∞ on obtient un losange ou un carré.



LEMME 53. d une métrique sur X et $x \in X$. Si $B(x, r)$ boule ouverte centrée en x et de rayon $r > 0$, alors pour tout $y \in B(x, r)$ il existe $\rho > 0$ telle que $B(x, \rho) \subset B(y, r)$.

DÉMONSTRATION. Voir TD.

□

2.2. Topologie métrique dans un espace métrique

Noter que le dernier lemme explique que les boules ouvertes ont les mêmes propriétés que les ouverts d'une base de topologie et non pas les ouverts d'une topologie car l'union ou l'intersection par exemple de deux boules n'est pas nécessairement une boule. En effet, on a le lemme suivant qui va nous permettre de construire la topologie métrique. Pour la preuve voir TD.

LEMME 54. *d une métrique sur X . Soient B_1 et B_2 deux boules ouvertes et $x \in B_1 \cap B_2$, alors il existe $\rho > 0$ telle que $B(x, \rho) \subset B_1 \cap B_2$.*

Une conséquence directe de ce lemme est le théorème suivant :

THÉORÈME 55 (Définition). *La collection des boules ouvertes dans un espace métrique (X, d) forme une base de topologie sur X appelée la topologie métrique sur X (ou topologie induite par la métrique d) et l'espace métrique (X, d) sera sous-entendu un espace topologique muni de la topologie métrique induite par d .*

Ainsi, tous les concepts définis dans les espaces topologiques seront réutilisés dans le contexte des espaces métriques qui sont en fait des cas particuliers de ces espaces. Parmi leur propriétés relatives à la métrique, nous avons :

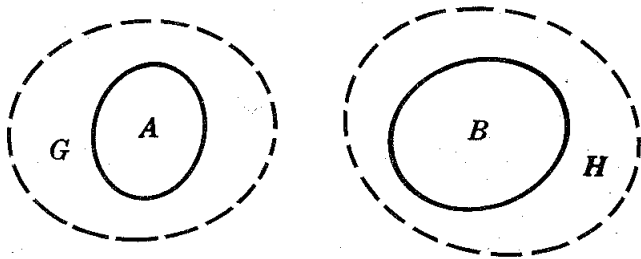
PROPOSITION 56 (Propriétés liées à la métrique). *(X, d) un espace métrique, $x \in X$, A et B deux parties de X , alors :*

1 - x admet une base dénombrable de voisinages, à savoir la famille de boules ouvertes $\{B(x, \frac{1}{n})\}_{n \in \mathbb{N}^*}$.

2 - $x \in \overline{A}$ **ssi** $d(x, A) = 0$.

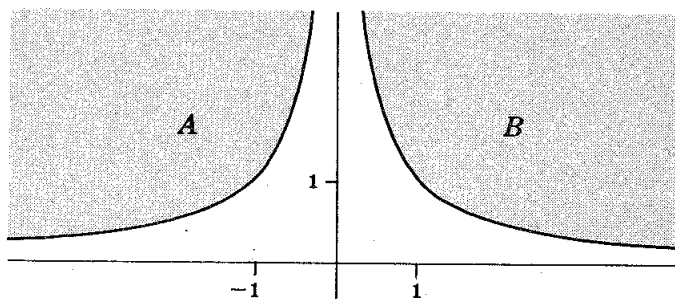
3 - Si A est fini alors A est fermé.

4 - **Séparation** : si A et B sont fermés et disjoints $A \cap B = \emptyset$, alors ils existent deux ouverts G et H disjoints $G \cap H = \emptyset$ tels que $A \subset G$ et $B \subset H$.



REMARQUE 57. Noter que le quatrième point de séparation dans cette dernière proposition n'est pas une raison de croire que la distance entre deux fermés disjoints doit être strictement positive, car dans l'exemple suivant, A et B sont bien fermés et disjoints dans $\mathbb{R}^2$ muni de la distance euclidienne, mais $d(A, B) = 0$. (voir les graphes de $y = \pm \frac{1}{x}$). De même, $C = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_-$ est fermé et $d(A, C) = d(B, C) = 0$.

$$A = \{(x, y) : xy \geq -1, x < 0\}, \quad B = \{(x, y) : xy \geq 1, x > 0\}.$$



DÉFINITION 58 (Métriques équivalentes). d_1 et d_2 deux métriques sur X , on dit que d_1 et d_2 sont équivalentes ssi elles engendrent la même topologie sur X . En d'autres termes, les topologies induites sur (X, d_1) et (X, d_2) sont équivalentes.

Par exemple, d_1 , d_2 et d_∞ sont des métriques équivalentes sur $\mathbb{R}^2$. On peut montrer que l'équivalence entre les métriques d'un même espace X est une relation d'équivalence.

PROPOSITION 59. d_1 et d_2 deux métriques sur X , alors d_1 et d_2 sont équivalentes **ssi** il existent deux constantes $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$ telles que pour tous $x, y \in X$,

$$c_1 d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq c_2 d_2(x, y).$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que toute boule ouverte pour d_1 contient une boule ouverte pour d_2 et vice-versa. $\square$

2.3. Suites de Cauchy et espaces complets

DÉFINITION 60 (Proposition). (X, d) un espace métrique et (x_n) suite de X . Alors, (x_n) converge vers $x \in X$ ssi pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \geq 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$: $d(x_n, x) < \epsilon$.

DÉFINITION 61 (Suite de Cauchy). (X, d) un espace métrique et (x_n) suite de X . On dit que (x_n) est une suite Cauchy relativement à la métrique d dans X si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \geq 0$ tel que pour tout $p, q \geq n_0$: $d(x_p, x_q) < \epsilon$.

PROPOSITION 62. Dans un espace métrique toute suite de Cauchy est bornée.

DÉMONSTRATION. (x_n) est une suite Cauchy. Soit $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \geq 0$ tel que pour tout $p, q \geq n_0$: $d(x_p, x_q) < \epsilon$. Alors,

si $j \leq n_0 + 1$,

$$d(x_1, x_j) \leq \sum_{i=1}^{j-1} d(x_i, x_{i+1}) \leq \sum_{i=1}^{n_0} d(x_i, x_{i+1})$$

et si $j > n_0 + 1$,

$$d(x_1, x_j) \leq d(x_1, x_{n_0+1}) + d(x_{n_0+1}, x_j) \leq \sum_{i=1}^{n_0} d(x_i, x_{i+1}) + \epsilon,$$

donc si on pose $r = \sum_{i=1}^{n_0} d(x_i, x_{i+1}) + \epsilon$ alors pour tout $j \geq 1$, $d(x_1, x_j) \leq r$, d'où $x_n \in B(x_1, r)$, donc (x_n) est bornée. $\square$

LEMME 63. Soit $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ application strictement croissante alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\phi(n) \geq n$.

DÉMONSTRATION. Par récurrence : on a $\phi(0) \geq 0$, supposons $\phi(n) \geq n$ et montrons $\phi(n+1) \geq n+1$. En effet, dans $\mathbb{N}$, $\phi(n+1) > \phi(n)$ donc

$$\phi(n+1) \geq \phi(n) + 1 \geq n + 1.$$

$\square$

PROPOSITION 64. Dans un espace métrique toute suite de Cauchy qui admet une sous-suite convergente est convergente vers la même limite.

DÉMONSTRATION. (x_n) est une suite Cauchy. Soit $\epsilon > 0$, il existe $n_1 \geq 0$ tel que pour tout $p, q \geq n_1$: $d(x_p, x_q) < \epsilon$.

Soit $n \rightarrow \phi(n)$ strictement croissante et $y_n = x_{\phi(n)}$ sous-suite de (x_n) telle que $y_n \rightarrow y \in X$. Alors, pour $\epsilon/2 > 0$, il existe $n_2 \geq 0$, tel que pour tout $n \geq n_2$,

$$d(y_n, y) = d(x_{\phi(n)}, y) < \epsilon/2$$

Posons $n_0 = \max(n_1, n_2)$ alors pour $n > n_0$, on a $\phi(n) \geq n > n_0$ (d'après le lemme précédent), et on a

$$\begin{aligned} d(x_n, y) &\leq d(x_n, x_{\phi(n)}) + d(x_{\phi(n)}, y) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

donc $x_n \rightarrow y$. □

PROPOSITION 65. *Dans un espace métrique toute suite convergente est de Cauchy.*

DÉMONSTRATION. Supposons $x_n \rightarrow l$. Soit $\epsilon/2 > 0$, il existe $n_0 \geq 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$: $d(x_n, l) < \epsilon/2$. D'où, pour tous $p, q \geq n_0$,

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, l) + d(l, x_q) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

donc (x_n) est de Cauchy. □

REMARQUE 66. La réciproque de cette proposition est fausse. En effet, dans $\mathbb{Q}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $r_n \in \mathbb{Q}$, tel que $\sqrt{2} < r_n < \sqrt{2} + \frac{1}{n}$ et (r_n) est de Cauchy $\mathbb{R}$ donc aussi dans $\mathbb{Q}$ mais elle ne converge pas dans $\mathbb{Q}$ car sa limite dans $\mathbb{R}$ est $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. On dira plus tard que $\mathbb{Q}$ n'est pas complet.

DÉFINITION 67 (Espace métrique complet). Un espace métrique (X, d) est complet si toute suite de Cauchy dans X est convergente dans X .

Exemple : $\mathbb{R}$ muni de la métrique usuelle est complet, $\mathbb{Q}$ ne l'est pas (cf. Remarque. 66)

DÉFINITION 68. Une partie non vide d'un espace métrique (X, d) est complète si le sous-espace métrique (A, d) est complet.

PROPOSITION 69 (Théorème des fermés emboîtés). *Un espace métrique (X, d) est complet ssi l'intersection d'une suite décroissante (F_n) de fermés et bornés de (X, d) dont les diamètres tendent tous vers 0 a une intersection non vide.*

DÉMONSTRATION. Voir TD. □

LEMME 70. (X, d) espace métrique, et $A \subset X$, alors,

- (i) - $x \in \overline{A}$ (resp. A') **ssi** il existe une suite d'éléments de A (resp. différents de x) qui converge vers x .
- (ii) - x est une valeur d'adhérence d'une suite (x_n) **ssi** il existe une sous-suite de (x_n) qui converge vers x .
- (iii) - A est fermé **ssi** il contient les limites de toutes ses suites convergentes.

DÉMONSTRATION. à faire en TD. □

PROPOSITION 71. (a) - Toute partie complète d'un espace métrique est fermée. (b) - Toute partie fermée d'un espace métrique complet est une partie complète.

DÉMONSTRATION. (a) - Soit $A \subset X$, A complète et $x \in \overline{A}$ alors d'après le lemme précédent il existe une suite $(x_n)_n \subset A$ telle que $x_n \rightarrow x \in X$, donc x est de Cauchy dans X donc aussi dans A donc (x_n) converge vers une limite $l \in A$, comme (X, d) est séparé alors la limite est unique donc $x = l \in A$, d'où $\overline{A} \subset A$ et A est donc fermée. (b) - Soit A fermée dans (X, d) espace complet. Si (a_n) est une suite de Cauchy dans A alors (a_n) converge dans X vers $a \in \overline{A} = A$ car A fermé donc (a_n) converge dans A vers $a \in A$ ce qui implique A partie complète. □

2.4. Limites et continuité dans les espaces métriques

Rappelons que la notion de limite dans un espace topologique est telle que si $f : X \rightarrow Y$ est une **fonction** et $x_0 \in X$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in Y$ ssi pour tout voisinage $V \in \mathcal{V}_Y(l)$, il existe un voisinage $U \in \mathcal{V}_X(x_0)$, tel que $f(U - \{x_0\}) \subset V$. Noter qu'on pris $U - \{x_0\}$ pour exprimer que f peut ne pas être définie en x_0 . Si f est définie en x_0 et si $l = f(x_0)$ alors f sera dite continue en x_0 . On va exprimer ceci à l'aide de la métrique comme suit :

DÉFINITION 72 (Proposition). Soit $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$, alors f est continue en $a \in X$ ssi

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 / f(B_d(a, \eta)) \subset B_{d'}(f(a), \epsilon),$$

ce qui est aussi équivalent à

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 / d(x, a) < \eta \implies d'(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

DÉFINITION 73 (Proposition). Soit $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$, alors f est continue sur X si elle est continue en tout point $y \in X$.

- f est dite une isométrie de (X, d) vers (Y, d') si

$$\forall x, y \in X, d(x, y) = d'(f(x), f(y)),$$

si de plus f est bijective, on parlera d'isométrie sur Y ou homéomorphisme isométrique.

- f est dite uniformément continue sur X si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall x, y \in X : d(x, y) < \eta \implies d'(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

- Toute isométrie est injective.

- La composée de deux isométries (resp. uniformément continues) est une isométrie (resp. uniformément continue).

- Toute isométrie est uniformément continue.

- Toute application uniformément continue est continue mais la réciproque est fausse.

Par exemple, on peut montrer que si A est une partie d'un espace métrique (X, d) , alors pour tous $x, y \in X$,

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y),$$

et on conclut que l'application $x \mapsto d(x, A) \in \mathbb{R}$ est uniformément continue mais elle n'est pas une isométrie.

PROPOSITION 74. $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ une application, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) - f continue en $a \in E$.

(ii) - f séquentiellement continue en $a \in X$.

DÉMONSTRATION. $\Leftarrow$) supposons que pour toute suite (x_n) de X , si $x_n \rightarrow a$ alors $f(x_n) \rightarrow f(a)$ et supposons par l'absurde que f n'est pas continue en a . Alors, il existe $\epsilon > 0$, tel que pour tout $\eta > 0$, il existe $x_{(\eta)} \in X$ tel que $d(x_{(\eta)}, a) < \eta$ et $d(f(x_{(\eta)}), f(a)) \geq \epsilon$. En particulier, pour $\eta = 1/n$, donc il existe $x_{(n)}$ tel que $d(x_{(n)}, a) < 1/n$ et $d(f(x_{(n)}), f(a)) \geq \epsilon > 0$ donc $x_{(n)} \rightarrow a$ mais $f(x_{(n)})$ ne converge pas vers $f(a)$, ce qui est absurde.

$\Rightarrow$) Noter que la réciproque est déjà démontrée dans la cas des espaces topologiques lorsque la limite $f(a)$ admet une base de voisinage dénombrable ce qui est les cas dans les espaces métriques, à savoir la famille $B_{d'}(f(a), \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}^*$, donc f continue implique f séquentiellement continue.

En effet, soit $x_n \rightarrow a$, donc

$$\forall \eta > 0, \exists N \in \mathbb{N}, / \forall n \geq N : d(x_n, a) < \eta,$$

et si f continue en a alors

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, / d(x_n, a) < \eta \implies d'(f(x_n), f(a)) < \epsilon,$$

d'où $d'(f(x_n), f(a)) < \epsilon$ est vérifiée pour tout $n \geq N$ et donc $f(x_n) \rightarrow f(a)$. $\square$

2.5. Théorème du point fixe

Le théorème du point fixe concerne le problème d'existence des solutions de l'équation de type $f(x) = x$ et il existe plusieurs versions de ce théorème. Nous verrons ici la version la plus simple dans le cas des espaces métriques complets.

DÉFINITION 75 (Fonction Lipschitzienne). On dit que $f : (X, d) \rightarrow (Y; d')$ k -Lipschitzienne ou Lipschitzienne de rapport $k \in \mathbb{R}_+$ sur X si

$$\forall x, y \in X, \quad d'(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

Si $f : (X, d) \rightarrow (X; d)$ est λ -Lipschitzienne de rapport $\lambda < 1$ sur X on dira que la fonction f est contractante sur X .

DÉFINITION 76. Par exemple, l'application $x \mapsto d(x, A) \in \mathbb{R}$ est Lipschitzienne de rapport $k = 1$ sur X (cf. exemple précédent).

PROPOSITION 77. *Toute fonction Lipschitzienne sur X est uniformément continue sur X .*

DÉMONSTRATION. Si f Lipschitzienne de rapport $k \in \mathbb{R}_+$ sur X , alors pour tout $\epsilon > 0$, on choisit $\eta = \epsilon/k$ et on a

$$d(x, y) < \eta \implies d'(f(x), f(y)) \leq kd(x, y) < \epsilon.$$

Exemples :

- Sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \arctan(x)$ est Lipschitzienne de rapport 1 sur $\mathbb{R}$, en effet le théorème des accroissements finis permet de trouver c (qui dépend de $x, y \in \mathbb{R}$) tel que

$$|\arctan(x) - \arctan(y)| = \frac{1}{1+c^2}|x-y| \leq |x-y|.$$

Comme $\frac{1}{1+c^2} < 1$ alors $x \mapsto \arctan(x)$ est contractante.

- Toute fonction continue, dérivable de dérivée uniformément bornée est Lipschitzienne.

- Sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue et donc n'est pas Lipschitzienne, car

$$|x^2 - y^2| = |x+y||x-y|$$

et $|x+y|$ peut être très grand. $\square$

THÉORÈME 78 (du point fixe). *Si f est une application contractante de rapport λ sur un espace métrique (X, d) complet alors l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $x = l$ appelée point fixe de f . En outre, pour tout $x \in X$, la suite $(x_n)_n = (f^n(x))_n$ (où $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$) converge vers l et elle vérifie :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d(f^n(x), l) \leq \lambda^n d(x, l).$$

DÉMONSTRATION. Soit $x \in X$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a par récurrence

$$d(f^n(x), f^{n+1}(x)) \leq \lambda d(f^{n-1}(x), f^n(x)) \leq \dots \leq \lambda^n d(x, f(x)),$$

d'où, pour tout p, q tels que $q > p$ on a

$$\begin{aligned} d(f^p(x), f^q(x)) &\leq \sum_{k=p}^{q-1} d(f^k(x), f^{k+1}(x)) \leq \sum_{k=p}^{q-1} \lambda^k d(x, f(x)), \\ &\leq d(x, f(x)) \frac{\lambda^p (1 - \lambda^{q-p})}{1 - \lambda} \leq d(x, f(x)) \frac{\lambda^p}{1 - \lambda}, \end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$, comme $0 \leq \lambda < 1$, $d(x, f(x)) \frac{\lambda^p}{1 - \lambda} \rightarrow 0$ quand $p \rightarrow +\infty$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$d(x, f(x)) \frac{\lambda^N}{1 - \lambda} \leq \epsilon,$$

d'où, pour tous $p, q \geq N$, $d(f^p(x), f^q(x)) \leq \epsilon$, on conclut que $(f^n(x))_n$ est de Cauchy dans X complet donc elle converge vers une limite $l \in X$.

f est Lipschitzienne, donc elle est continue donc $f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) \rightarrow f(l)$ mais $(f^{n+1}(x))_n$ est la même suite $(f^n(x))_n$ donc $f(l) = l$ car la limite est unique.

Si maintenant l et l' sont deux points fixes de f , alors $f(l) = l$ et $f(l') = l'$, et on a

$$d(l, l') = d(f(l), f(l')) \leq \lambda d(l, l')$$

avec $\lambda < 1$ donc $d(l, l') = 0$ ce qui implique $l = l'$.

Finalement, on peut montrer la dernière inégalité par récurrence. On a pour $n = 1$,

$$d(f(x), l) = d(f(x), f(l)) \leq \lambda d(x, l),$$

donc si c'est vrai jusqu'à l'ordre n , montrons que c'est encore vrai pour $n + 1$, en effet

$$\begin{aligned} d(f^{n+1}(x), l) &= d(f(f^n(x)), f(l)) \leq \lambda d(f^n(x), l), \\ &\leq \lambda^{n+1} d(x, l), \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Les espaces compacts

Tous les espaces considérés dans ce chapitre seront supposés séparés sauf mention contraire. La notion de compacité est liée à la généralisation de la propriété d'être fermé et borné dans un espace de dimension finie. Par exemple dans $\mathbb{R}$, on a le théorème de Heine-Borel (ou Borel-Lebesgue) suivant :

THÉORÈME 79 (de Heine-Borel). *Soit $A = [a, b]$ intervalle **fermé borné** de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{R} = (O_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de A , c.a.d, $A \subset \bigcup_{i \in I} O_i$, alors il existe un sous-recouvrement fini de $\mathcal{R}$ qui recouvre A , soit $O_{i_1}, \dots, O_{i_n}$, tel que $A \subset O_{i_1} \cup \dots \cup O_{i_n}$.*

DÉMONSTRATION. Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, on définit $S_x = [a, b] \cap (-\infty, x]$ et soit

$$B = \{x / S_x \text{ admet un sous-recouvrement fini extrait de } \mathcal{R}\},$$

alors $S_a = \{a\}$ et $a \in B$ (évident), d'où B est non vide. Soit $m = \sup B \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, alors, si $m \in [a, b]$, puisque $\mathcal{R}$ est un recouvrement ouvert de $[a, b]$ alors il existe $O_0 \in \mathcal{R}$ tel que $m \in O_0$, et comme O_0 ouvert alors il existe un intervalle $[x_1, x_2] \subset O_0$ tel que

$$x_1 < m < x_2$$

or $x_1 < m$ et $m = \sup B$ alors il existe $x'_1 \in B$ tel que

$$x_1 \leq x'_1 < m < x_2$$

et donc $S_{x'_1}$ admet un sous-recouvrement fini extrait de $\mathcal{R}$, c.a.d, $O_1, \dots, O_k$ tel que

$$S_{x'_1} \subset O_1 \cup \dots \cup O_k$$

mais alors, $O_0, O_1, \dots, O_k$ recouvre S_{x_2} puisque $[x_1, x_2] \subset O_0$ et donc $x_2 \in B$ ce qui est contradictoire avec $m < x_2$. $\square$

On conclut alors que $m \notin [a, b]$, donc comme $a \in B$ alors $m > b$ et comme $m = \sup B$ alors il existe $x'_2 \in B$ tel que

$$b \leq x'_2 < m,$$

d'où $S_{x'_2} = S_b = [a, b]$ admet donc un sous recouvrement fini extrait de $\mathcal{R}$, ce qui achève la preuve.

REMARQUE 80. Nous avons vu que « fermé » est une propriété topologique alors que « borné » ne l'est pas. Dans ce chapitre, nous allons voir comment ces deux propriétés prises ensemble « fermé-borné » formeront dans $\mathbb{R}$ une seule propriété « topologique » qui sera appelée « la compacité ».

DÉFINITION 81. Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ (resp. un sous-espace $A \subset X$) est dit **compact** si de tout recouvrement ouvert de X (resp. de A) on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Exemples :

(i) - Toute partie finie $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est compacte. En effet si $\mathcal{R} = (O_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de A , c.a.d, $A \subset \bigcup_{i \in I} O_i$, alors pour tout $a_k \in A$ il existe $i_k \in I$ tel que $a_k \in O_{i_k}$, alors $A \subset \bigcup_{k=1}^n O_{i_k}$ et donc A est compacte.

(ii) - Dans $\mathbb{R}$, l'intervalle $(0, 1)$ n'est pas compact car $(0, 1) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n})$ et on ne peut enlever aucun ouvert de ce recouvrement qui n'admet donc pas de sous-recouvrement fini.

(iii) - $\mathbb{R}$ n'est pas compact car $\mathcal{R} = ((n-1, n+1))_{n \in \mathbb{Z}}$ est un recouvrement ouvert de $\mathbb{R}$ qui n'admet pas de sous-recouvrement fini.

PROPOSITION 82. $f : X \rightarrow Y$ continue, A partie compacte de X alors $f(A)$ est une partie compacte de Y .

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{R} = (O_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de $f(A)$, alors $f(A) \subset \bigcup_{i \in I} O_i$, d'où

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} O_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(O_i)$$

donc $(f^{-1}(O_i))_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert (car f continue) de A compacte donc il existe J fini, tel que $A \subset \bigcup_{i \in J} f^{-1}(O_i)$ donc

$$f(A) \subset \bigcup_{i \in J_{\text{fini}}} f(f^{-1}(O_i)) \subset \bigcup_{i \in J_{\text{fini}}} O_i$$

et on conclut que $f(A)$ est compact. $\square$

PROPOSITION 83. A sous ensemble de $(X, \mathcal{T})$ espace topologique compact alors A est une partie compacte de X **ssi** l'espace topologique $(A, \mathcal{T}_A)$ est compact.

DÉMONSTRATION. $\Leftarrow$) si $\mathcal{R} = (O_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de A dans X alors $\mathcal{R}_A = (O_i \cap A)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de A par des ouverts de $(A, \mathcal{T}_A)$ qui est compact donc il existe J fini tel que

$$A \subset \bigcup_{i \in J_{\text{fini}}} O_i \cap A \subset \bigcup_{i \in J_{\text{fini}}} O_i$$

d'où A est une partie compacte de $(X, \mathcal{T})$.

$\Rightarrow$) supposons A une partie compacte de $(X, \mathcal{T})$ et montrons que $(A, \mathcal{T}_A)$ est compact. Soit $\mathcal{R}_A = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de A dans $(A, \mathcal{T}_A)$, alors $A = \bigcup_{i \in I} U_i$, et pour tout $i \in I$, il existe un ouvert O_i de $(X, \mathcal{T})$ tel que $U_i = A \cap O_i$, d'où

$$A = \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} O_i \cap A \subset \bigcup_{i \in I} O_i$$

donc il existe $J \subset I$, J fini, tel que $A \subset \bigcup_{i \in J_{\text{fini}}} O_i$ donc

$$A = \left(\bigcup_{i \in J_{\text{fini}}} O_i \right) \cap A = \bigcup_{i \in J_{\text{fini}}} O_i \cap A = \bigcup_{i \in J_{\text{fini}}} U_i$$

d'où l'espace topologique $(A, \mathcal{T}_A)$ est compact. $\square$

LEMME 84. On a équivalence entre :

(i) - X compact

(ii) - Pour toute famille $(F_i)_{i \in I}$ de fermés de X telle que $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$, il existe $J \subset I$, J fini, tel que $\bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset$.

DÉMONSTRATION. (i) $\Rightarrow$ (ii) : Posons $U_i = F_i^c$ alors $\mathcal{R} = (U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de X compact donc il existe $J \subset I$, J fini, tel que $X = \bigcup_{i \in J_{\text{fini}}} U_i$ donc

$$\emptyset = \left(\bigcup_{i \in J_{\text{fini}}} U_i \right)^c = \bigcap_{i \in J_{\text{fini}}} F_i$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) $\mathcal{R} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ alors

$$\emptyset = \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right)^c = \bigcap_{i \in I} F_i$$

donc il existe $J \subset I$, J fini, tel que $\bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset$, et en passant au complémentaire on obtient $X = \bigcup_{i \in J_{\text{fini}}} U_i$ d'où X compact. $\square$

PROPOSITION 85. *Soit X compact et soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de fermés de X ayant la propriété de l'intersection finie, c.a.d., $\bigcap_{i \in J} F_i \neq \emptyset$, pour tout $J \subset I$, J fini, alors les F_i ont une intersection non vide $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$.*

DÉMONSTRATION. Évidente, il s'agit de la contraposée de (ii) du Lemme précédent. $\square$

COROLLAIRE 86 (Les fermés emboîtés). *Soit $(F_n)_{n \geq 1}$ une suite décroissante de fermés non vides de X compact alors $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.*

DÉMONSTRATION. Conséquence de la proposition précédente. En effet, $(F_n)_{n \geq 1}$ suite décroissante de fermés non vides possède la propriété de l'intersection finie car $\bigcap_{i \in J} F_i = F_p \neq \emptyset$ avec $p = \min J$. $\square$

THÉORÈME 87. *Soit $(x_n)_n$ une suite de points d'un espace compacte X . Alors, $(x_n)_n$ admet au moins une valeur d'adhérence l dans X , et si l est unique alors (x_n) converge vers l .*

Pour démontrer ce théorème on a besoin du lemme suivant :

LEMME 88. *Soit A l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_n$, alors $A = \bigcap_{n \geq 1} F_n$ où $F_n = \overline{\{x_n, x_{n+1}, \dots\}}$.*

DÉMONSTRATION. $A \subset \bigcap_{n \geq 1} F_n$ - Soit $l \in A$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $V \in \mathcal{V}(l)$ quelconque, alors il existe $n_1 \geq n$ tel que $x_{n_1} \in V$ donc

$$V \cap \{x_n, x_{n+1}, \dots\} \neq \emptyset$$

donc $l \in \overline{\{x_n, x_{n+1}, \dots\}} = F_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors $l \in \bigcap_{n \geq 1} F_n$.

$A \supset \bigcap_{n \geq 1} F_n$ - Soit $l \in \bigcap_{n \geq 1} F_n$ donc

$$l \in F_n = \overline{\{x_n, x_{n+1}, \dots\}}$$

pour tout $n \geq 1$, d'où pour tout $V \in \mathcal{V}(l)$, $V \cap \{x_n, x_{n+1}, \dots\} \neq \emptyset$, c.a.d, il existe $n_1 \geq n$ tel que $x_{n_1} \in V$ donc l est valeur d'adhérence de $(x_n)_n$ c.a.d; $l \in A$. $\square$

PREUVE DU THÉORÈME 87. D'après le Lemme précédent, l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_n$ est $A = \bigcap_{n \geq 1} F_n$ où $F_n = \overline{\{x_n, x_{n+1}, \dots\}}$, donc d'après le Corolaire 86 $A = \bigcap_{n \geq 1} F_n \neq \emptyset$. $\square$

3.1. Parties compactes d'un espace topologique

Exemples

- (1) Les parties finies d'un espace topologique sont compactes.
- (2) $A = \{x_n, n \geq 1\} \cup \{l\}$ où l est la limite de la suite (x_n) , A est compacte car si $(U_i)_{i \in I}$ recouvrement ouvert de A , $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ donc il existe $i_0 \in I$ tel que $l \in U_{i_0}$, et il existe n_0 tel que $x_n \in U_{i_0}$ pour tout $n \geq n_0$, d'autre part ils existent $i_1, \dots, i_{n_0-1} \in I$ tels que

$$x_1 \in U_{i_1}, \dots, x_{n_0-1} \in U_{i_{n_0-1}}$$

donc A compact car

$$A \subset U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_{n_0-1}}$$

THÉORÈME 89. *Soit A une partie d'un espace topologique X (séparé) alors A compact implique A fermé. La réciproque est vraie si X est compact.*

DÉMONSTRATION. A compact, montrons que A^c est ouvert. Soit $y \in A^c$ alors pour tout $x \in A$ ils existent $U_x \in \mathcal{V}(x)$ et $V_x \in \mathcal{V}(y)$ tels que $U_x \cap V_x = \emptyset$, donc $A \subset \bigcup_{x \in A} U_x$ et puisque A compact il existe $x_1, \dots, x_n$ tel que $A \subset \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$, donc $U = \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$ est un voisinage de y et on a $y \in U \subset A^c$ donc A^c ouvert.

Soit X compact et montrons la réciproque A fermé implique A compact :

Soit $(U_i)_{i \in I}$ recouvrement ouvert de A fermé donc $(U_i \cup A^c)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de X compact alors il existe J fini, $J \subset I$, tel que

$$X = \bigcup_{i \in J} (U_i \cup A^c) = \left(\bigcup_{i \in J} U_i \right) \cup A^c$$

donc $A \subset \bigcup_{i \in J} U_i$ et J fini alors A est compact. $\square$

PROPOSITION 90. (a) - Toute intersection de parties compacte est compacte. (b) - Toute union **finie** de parties compacte est compacte.

DÉMONSTRATION. (a) - la preuve est une conséquence du théorème précédent. (b) - la preuve est directe car tout recouvrement de $A \cup B$ recouvre A et recouvre B . Contre exemple pour l'union infinie, $\mathbb{R} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\}$ n'est pas compact alors que $\{x\}$ l'est pour tout $x \in \mathbb{R}$. $\square$

DÉFINITION 91 (Partie relativement compacte). Une partie A de X est dite relativement compacte si $\overline{A}$ est compact.

THÉORÈME 92 (Heine-Borel). Soit A une partie de $\mathbb{R}$, alors A est relativement compacte **ssi** A est borné.

DÉMONSTRATION. $\implies$) $\overline{A}$ compact et $\overline{A} \subset \bigcup_{a \in \overline{A}} (a-1, a+1)$ donc il existe B fini, $B \subset \overline{A}$, tel que $\overline{A} \subset \bigcup_{a \in B} (a-1, a+1)$ donc $d(\overline{A}) \leq 2 \text{Card}(B)$ fini donc $\overline{A}$ borné alors A est borné car $A \subset \overline{A}$.

$\impliedby$) A borné donc il existe $I = [a, b]$ fermé tel que $A \subset I$ donc $\overline{A} \subset I$ et I compact d'après le Théorème 79 alors $\overline{A}$ compact car il est fermé dans I compact (d'après Théorème 89). $\square$

3.2. Fonctions continues sur un compact

On a déjà vu que la compacité est une propriété topologique, c.a.d, l'image d'un compact par une fonction continue est compact. On a plus, la compacité est généralement un argument pour assurer la bi-continuité dans le cas des bijections.

THÉORÈME 93. Soit X compact et $f : X \rightarrow Y$ une bijection continue, alors f est bi-continue (c.a.d, un homéomorphisme).

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que f est fermée. Soit A fermé de X compact donc A est compact d'où $f(A)$ est compact de Y donc $f(A)$ est fermé de Y . $\square$

THÉORÈME 94. Soit X compact et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ continue alors f est bornée et elle atteint ses bornes inf et sup.

DÉMONSTRATION. $f(X)$ est compact de $\mathbb{R}$ donc fermé borné donc f est bornée. D'autre part, on sait par définition que $m = \inf f(X)$ et $M = \sup f(X)$ sont adhérents à $f(X)$ et comme $f(X)$ est fermé dans $\mathbb{R}$ car compact alors $m, M \in f(X)$ d'où ils existent x_1 et x_2 dans X tels que $m = f(x_1)$ et $M = f(x_2)$. $\square$

REMARQUE 95. Noter que ce théorème s'applique en particulier au cas où $X = [a, b]$ fermé borné de $\mathbb{R}$ donc compact.

THÉORÈME 96 (de Heine). *Soient (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques et f une application continue de X dans Y , si X est compact alors f est uniformément continue.*

DÉMONSTRATION. Supposons que f n'est pas uniformément continue, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $n > 0$, il existe $x_n, y_n \in X$ tels que, $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ et $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon$. Puisque X est compact alors on peut extraire des suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux sous-suites convergentes $x_{n_k} \rightarrow l$ et $y_{n_k} \rightarrow l'$. Comme $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ alors $l = l'$, mais puisque f est continue alors $f(x_n) \rightarrow f(l)$ et $f(y_n) \rightarrow f(l)$ donc $d'(f(x_n), f(y_n)) \rightarrow 0$ ce qui est contradictoire avec $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon > 0$. $\square$

3.3. Produit d'espaces compacts

Le but de cette section est de voir que les parties compactes de $\mathbb{R}^n$ sont exactement les parties fermées bornées.

PROPOSITION 97. *X et Y deux espaces non vides alors l'espace produit $X \times Y$ est compact **ssi** X et Y sont des espaces compacts.*

DÉMONSTRATION. $\Rightarrow$) Soit $X \times Y$ compact, comme les projections canoniques $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$ et $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$ sont continues et surjectives alors X et Y sont compacts.

$\Leftarrow$) réciproquement, supposons X et Y compacts et soit $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de $X \times Y = \bigcup_{i \in I} O_i$, donc pour tout $(x, y) \in X \times Y$ il existe $i_{(x,y)} \in I$ tel que $(x, y) \in O_{i_{(x,y)}}$ ouvert alors ils existent $U_{(x,y)}$ ouvert de X et $V_{(x,y)}$ ouvert de Y tels que

$$(x, y) \in U_{(x,y)} \times V_{(x,y)} \subset O_{i_{(x,y)}}.$$

On a alors pour chaque x fixé dans X , $Y \subset \bigcup_{y \in Y} V_{(x,y)}$ et comme Y compact alors on peut extraire un sous recouvrement fini $Y \subset \bigcup_{y \in B_x} V_{(x,y)}$ avec $B_x \subset Y$, B_x fini. Posons alors $U_x = \bigcap_{y \in B_x} U_{(x,y)}$ alors U_x est un ouvert qui contient x et tel que

$$(x, y) \in U_x \times V_{(x,y)} \subset O_{i_{(x,y)}}.$$

Comme $X \subset \bigcup_{x \in X} U_x$ est compact alors on extraire un sous recouvrement fini $X \subset \bigcup_{x \in A} U_x$, $A \subset X$, A fini, et en conséquence,

$$X \times Y \subset \bigcup_{x \in A, y \in B_x} U_x \times V_{(x,y)} \subset \underbrace{\bigcup_{x \in A, y \in B_x} O_{i_{(x,y)}}}_{\text{union finie}}$$

d'où $X \times Y$ est compact. $\square$

Il découle alors les deux corollaires suivants.

COROLLAIRE 98. *Les parties compactes de $\mathbb{R}^n$ sont exactement les parties fermées bornées.*

DÉMONSTRATION. Elle découle directement de la proposition précédente puisque les compacts de $\mathbb{R}$ sont les parties fermées bornées (cf. théorème de Heine - Borel). $\square$

Une généralisation de la proposition 97 est donnée par le théorème suivant.

THÉORÈME 99 (de Tychonoff). *Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques non vides, alors $X = \prod_{i \in I} X_i$ est compact **ssi** tous les X_i sont compacts.*

DÉMONSTRATION. A admettre. $\square$

La connexité est une autre propriété topologique importante dans beaucoup de résultats en analyse mathématique tels que les accroissements finis, théorèmes de Rolle, des valeurs intermédiaires, en optimisation et dans pas mal d'autres domaines des mathématiques. En français, le mot connexe veut dire « en un seul morceau ».

Les espaces connexes

4.1. Espaces et parties connexes

DÉFINITION 100. Un espace topologique X est non connexe s'ils existent deux ouverts disjoints G et H non vides de X tels que $X = G \cup H$. Dans le cas contraire X est dit connexe, c.a.d, si pour tous ouverts disjoints G et H de X tels que $X = G \cup H$ alors nécessairement $G = \emptyset$, ou $H = \emptyset$.

DÉFINITION 101. Une partie A d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est connexe si le sous-espace topologique $(A, \mathcal{T}_A)$ est connexe.

PROPOSITION 102. Une partie A d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est non connexe **ssi** ils existent deux ouverts disjoints non vides G et H de X tels que $A \cap G \neq \emptyset$ et $A \cap H \neq \emptyset$ et $A \subset G \cup H$.

DÉMONSTRATION. En exercice. □

Exemples :

Tout intervalle de $\mathbb{R}$ est connexe, $\mathbb{R} - \{0\}$ ne l'est pas car il est union de $(-\infty, 0)$ et $(0, +\infty)$.

THÉORÈME 103. Soit $f : X \rightarrow Y$ continue et X connexe, alors $f(X)$ est une partie connexe de Y .

DÉMONSTRATION. Supposons que $f(X)$ n'est pas connexe, alors ils existent deux ouverts disjoints non vides G et H de Y tels que $f(X) \cap G \neq \emptyset$, $f(X) \cap H \neq \emptyset$ et $f(X) \subset G \cup H$. Mais f continue alors $f^{-1}(G)$ et $f^{-1}(H)$ sont des ouverts de X , et on a $X \cap f^{-1}(G) \neq \emptyset$, $X \cap f^{-1}(H) \neq \emptyset$ donc $f^{-1}(G)$ et $f^{-1}(H)$ sont non vides, et $f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H) = f^{-1}(G \cap H) = \emptyset$ donc ils sont disjoints et on a

$$X = f^{-1}(f(X)) \subset f^{-1}(G \cup H) = f^{-1}(G) \cup f^{-1}(H)$$

donc $X = f^{-1}(G) \cup f^{-1}(H)$ est non connexe ce qui est contradictoire. □

On conclut immédiatement d'après ce théorème que la connexité est une propriété topologique.

PROPOSITION 104. Soit X un espace topologique, on a équivalence des propriétés suivantes :

- (i) X est un espace connexe
- (ii) X n'est pas union de deux fermés non vides et disjoints.
- (iii) Dans X , les seules parties ouvertes et fermées à la fois sont X et $\emptyset$.

DÉMONSTRATION. Montrons (non (i) $\iff$ non (ii)) : X non connexe **ssi** ils existent deux ouverts G et H de X tels que

$$X = G \cup H, G \neq \emptyset, H \neq \emptyset, G \cap H = \emptyset$$

ou encore, en passant au complémentaire, il est équivalent de dire

$$\emptyset = G^c \cap H^c, H^c \supset G \neq \emptyset, G^c \supset H \neq \emptyset, G^c \cup H^c = X$$

c'est à dire « non (ii) ».

Montrons maintenant ((ii) $\iff$ (iii)) :

$\implies$) si A partie ouverte et fermée de X alors A^c est ouvert et fermé et $X = A \cup A^c$, comme X est connexe alors A est soit X soit $\emptyset$.

$\Leftarrow$) Réciproquement, montrons la contraposée (non (ii) $\Rightarrow$ non (iii)) : si $X = G \cup H$ avec G et H ouverts disjoints non vides alors $G^c = H$ et $H^c = G$ sont ouverts et fermés à la fois et on a $H \neq X$ car $G \neq \emptyset$ et vice-versa. $\square$

THÉORÈME 105 (Exemple fondamental dans $\mathbb{R}$). *Soit $A \subset \mathbb{R}$, alors A est connexe **ssi** A est un intervalle. En particulier $\mathbb{R}$ est connexe.*

DÉMONSTRATION. $\Rightarrow$) supposons A connexe dans $\mathbb{R}$, alors si A n'est pas un intervalle, il existe $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x, y \in A$, $x < z < y$ et $z \notin A$. Posons $G = (-\infty, z)$ et $H = (z, +\infty)$, alors $A \subset G \cup H$, $A \cap G \neq \emptyset$, $A \cap H \neq \emptyset$, ce qui contredit le fait que A est une partie connexe de $\mathbb{R}$.

$\Leftarrow$) Réciproquement : Supposons que A est un intervalle et A non connexe, alors ils existent deux ouverts non vides G et H de $\mathbb{R}$ tels que $G \cap H = \emptyset$, $A \cap G \neq \emptyset$ et $A \cap H \neq \emptyset$ et $A \subset G \cup H$. Soient $x \in A \cap G$ et $y \in A \cap H$ et supposons $x < y$, alors puisque A est un intervalle, $[x, y] \subset A$, donc $[x, y] \subset G \cup H$, soit $B = [x, y] \cap G$ et $x_0 = \sup B < +\infty$ car B est une partie bornée non vide de $\mathbb{R}$, alors $x_0 \in \overline{B} \subset [x, y]$. On distingue alors deux cas : $x_0 \in B$ ou $x_0 \notin B$ (i.e. point d'accumulation),

- si $x_0 \in B$, alors $x_0 < y$ car $y \in H$ et $H \cap G = \emptyset$, et comme G est un ouvert de $\mathbb{R}$, il existe $\epsilon > 0$, tel que $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset G$, alors il existe $z > x_0$ (prendre $z = x_0 + \min(\frac{\epsilon}{2}, \frac{y-x_0}{2})$) et on aura $z \in B$ ce qui est impossible.

- si $x_0 \notin B$, alors $x_0 \in [x, y] \cap H$, et il existe $\epsilon > 0$, tel que $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset H$ car H ouvert de $\mathbb{R}$, et par définition du sup il existe $z \in B$, tel que $x_0 - \epsilon < z \leq x_0$, donc $z \in B \cap H$ ce qui aussi impossible car $G \cap H = \emptyset$.

On conclut alors que A est connexe. $\square$

4.2. Connexité et fonctions continues

Nous avons vu que l'image d'un connexe par une application continue est connexe et que dans $\mathbb{R}$ les connexes sont les intervalles, ils en découlent alors :

COROLLAIRE 106 (Théorème de la valeur intermédiaire). *Soit X connexe et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ continue, alors $f(X)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.*

Ce corollaire nous dit que $f(X)$ coïncide avec l'intervalle d'extrémités (finies ou infinies) $m = \inf_X f$ et $M = \sup_X f$, donc f prend toutes les valeurs intermédiaires entre m et M .

COROLLAIRE 107. *Si X est connexe et compact et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est continue alors $f(X)$ est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$.*

Ce corollaire nous dit que $f(X)$ coïncide avec l'intervalle fermé borné d'extrémités (finies) $m = \min_X f$ et $M = \max_X f$, donc $f(X) = [m, M]$.

PROPOSITION 108. *Soit X espace topologique. Alors, X est connexe **ssi** toute application continue de X dans $\{0, 1\}$ (muni de la topologie induite par $\mathbb{R}$) est **constante**.*

DÉMONSTRATION. Supposons X connexe. Alors $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\{1\})$ sont des ouverts disjoints et non vides de X et on a

$$X = f^{-1}(\{0\}) \cup f^{-1}(\{1\})$$

d'où $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$ ou $f^{-1}(\{1\}) = \emptyset$ alors f est constante.

Réciproquement, ou par contraposée, supposons X non connexe, alors ils existent deux ouverts G et H de X tels que

$$X = G \cup H, \quad G \neq \emptyset, \quad H \neq \emptyset, \quad G \cap H = \emptyset,$$

soit $f = \mathbb{I}_G$ la fonction indicatrice de G alors f n'est pas constante et elle est continue car $f^{-1}(\{0\}) = H$ et $f^{-1}(\{1\}) = G$ sont des ouverts de X . $\square$

THÉORÈME 109. Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques non vides, alors $X = \prod_{i \in I} X_i$ est connexe **ssi** tous les X_i sont connexe.

DÉMONSTRATION. Il est clair que si X est connexe alors tous les $X_i = \pi_i(X)$ sont connexes car les projection canoniques π_i sont continues. La réciproque de ce théorème est à admettre. $\square$

COROLLAIRE 110. $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ munis de la topologie usuelle sont connexes.

4.3. Union et composantes connexes

La notion de composante connexe est liée au fait que l'union d'ensembles connexes n'est pas nécessairement connexe, à moins qu'ils soient connectés d'une certaine façon qui puisse assurer la connexité de l'union.

PROPOSITION 111. Soient A et B deux parties connexes de X . Si $A \cap B \neq \emptyset$, alors $A \cup B$ est connexe.

DÉMONSTRATION. Supposons que $A \cup B$ est non connexe alors ils existent des ouverts G et H de X tels que $G \cap H = \emptyset$,

$$(A \cup B) \cap G \neq \emptyset, (A \cup B) \cap H \neq \emptyset, A \cup B \subset G \cup H$$

alors $A \subset G \cup H$ et A connexe alors ou bien $A \subset G$ ou bien $A \subset H$. De même pour B , et puisque $A \cap B \neq \emptyset$, alors ou bien A et B sont inclus dans G ou bien dans H , c'est à dire $A \cup B \subset G$ ou bien $A \cup B \subset H$, donc $A \cup B$ connexe, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. $\square$

De manière analogue, on peut démontrer le théorème suivant qui nous servira à définir la notion de composante connexe.

THÉORÈME 112. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties connexes de X . S'il existe $\alpha \in I$ tel que $A_\alpha \cap A_i \neq \emptyset$ pour tout $i \in I$, alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe.

DÉFINITION 113 (Composante connexe). Soit X espace topologique et $x \in X$. On appelle composante de x et on note C_x le plus grand connexe de X contenant x ,

$$C_x = \bigcup_{C \text{ (connexe)} \ni x} C$$

Exemples :

- Si X est connexe alors X a une seule composante connexe $C = X$.

- Soit la topologie suivante sur $X = \{a, b, c, d, e\}$,

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$

alors les composantes connexes de X sont

$$C_a = \{a\}, C_b = C_c = C_d = C_e = \{b, c, d, e\}$$

THÉORÈME 114. Soit un espace topologique X , alors les composantes connexes forment une partition de X , i.e., sont disjointes et leur union est égale à X .

DÉMONSTRATION. considérer le relation binaire dans X définie par $x \mathcal{R} y$ ssi « il existe C connexe de X tel que $x, y \in C$ », alors on peut facilement montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et que la classe d'équivalence de $x \in X$ est sa composante connexe C_x . On conclut alors que

$$X = \bigcup_{\bar{x} \in X/\mathcal{R}} C_{\bar{x}}$$

où $X/\mathcal{R}$ est le quotient de X par $\mathcal{R}$. $\square$

4.4. Connexité par arc

La connexité par arc est un cas particulier de la connexité, et elle est liée à la notion de chemin continu.

DÉFINITION 115 (Chemin). Soit X espace topologique et $x, y \in X$. On appelle chemin dans X (ou arc) reliant x à y toute application $\phi : [0, 1] \rightarrow X$ continue et vérifiant $\phi(0) = x$ (x est appelé origine) et $\phi(1) = y$ (y est l'extrémité).

Exemples :

- pour tout $x \in X$, l'application constante $e_x : [0, 1] \rightarrow X$, $e_x(s) = x$ pour tout $s \in [0, 1]$ est continue et elle est appelée chemin constant en x .
- Si $\phi : [0, 1] \rightarrow X$ est un chemin continu reliant x à x , c.a.d, $\phi(0) = \phi(1) = x$, on dit que ϕ est un chemin fermé (ou lacet) en x .
- Si $\phi : [0, 1] \rightarrow X$ est un chemin continu reliant x à y alors $\hat{\phi} : [0, 1] \rightarrow X$, $\hat{\phi}(s) = \phi(1 - s)$ est un chemin continu reliant y à x .
- Si $\phi : [0, 1] \rightarrow X$ est un chemin continu reliant x à y et $\psi : [0, 1] \rightarrow X$ est un chemin continu reliant y à z alors $\phi * \psi : [0, 1] \rightarrow X$ défini par

$$\phi * \psi(s) = \begin{cases} \phi(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \psi(2s - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

est un chemin continu reliant x à z .

DÉFINITION 116. Un espace topologique X est dit connexe par arc si pour tous $x, y \in X$, il existe un chemin dans X reliant x à y .

PROPOSITION 117. Si X est connexe par arc alors X est connexe. La réciproque n'est pas toujours vraie.

DÉMONSTRATION. Soit $x \in X$, x fixé, alors pour tout $y \in X$, il existe un chemin $\phi_y : [0, 1] \rightarrow X$ continu reliant x à y , avec $\phi_y(1) = y$, d'où $y \in \phi_y([0, 1]) = A_y$ et A_y est connexe dans X car $[0, 1]$ connexe, et on pour tout $y \in X$, $A_x \cap A_y \neq \emptyset$, alors $X = \bigcup_{y \in X} A_y$ est connexe.

La réciproque : à faire en TD. □

La réciproque de cette proposition est vraie dans certains cas, voir théorème suivant utile en analyse complexe et dont la preuve est admise.

THÉORÈME 118. Dans $\mathbb{R}^2$, si A est une partie ouverte et connexe alors A est connexe par arc.

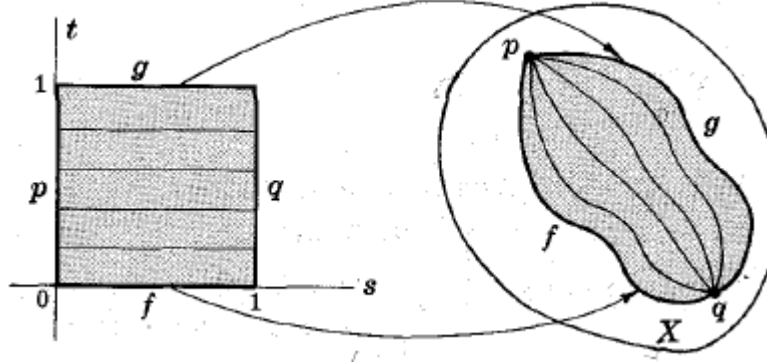
4.5. Homotopies - Espaces simplement connexes

La notion d'homotopie veut dire en topologie équivalence par déformation continue et elle est utilisée pour classer certaines propriétés topologiques.



DÉFINITION 119 (Proposition). Soient f et g deux chemins continus reliant les mêmes points p à q . Une homotopie (ou déformation continue) de f à g est une application continue $H : [0, 1]^2 \rightarrow X$ vérifiant, pour tout $(s, t) \in [0, 1]^2$,

$$\begin{cases} H(s, 0) = f(s), & H(0, t) = p \\ H(s, 1) = g(s), & H(1, t) = q \end{cases}$$



comme dans la figure.

On dit que f et g sont homotopes et on écrit $f \simeq g$. On peut vérifier facilement que $\simeq$ est une relation d'équivalence.

DÉMONSTRATION. - $H : [0, 1]^2 \rightarrow X$ telle que pour tout $(s, t) \in [0, 1]^2$, $H(s, t) = f(s)$ est une homotopie du chemin f à lui même, d'où $f \simeq f$.

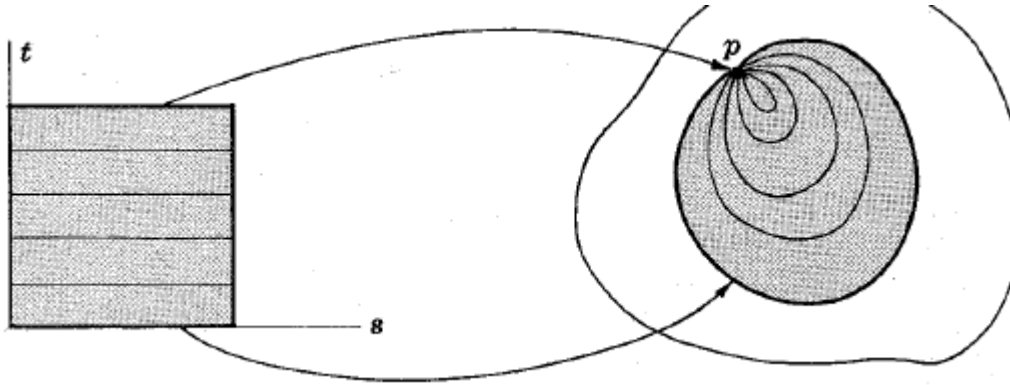
- Soit $f \simeq g$, si $H : [0, 1]^2 \rightarrow X$ une homotopie de f à g alors $\hat{H} : [0, 1]^2 \rightarrow X$ définie par $\hat{H}(s, t) = H(s, 1 - t)$ est une homotopie de g à f , d'où $g \simeq f$.

- Soient $f \simeq g$ et $g \simeq h$, si $F : [0, 1]^2 \rightarrow X$ une homotopie de f à g et $G : [0, 1]^2 \rightarrow X$ une homotopie de g à h , alors

$$H(s, t) = \begin{cases} F(s, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(s, 2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

est une homotopie de f à h , donc $f \simeq h$. □

DÉFINITION 120 (Chemin contractible). Un chemin fermé $\phi : [0, 1] \rightarrow X$ est dit **contractible** à un point s'il est homotope au chemin constant.

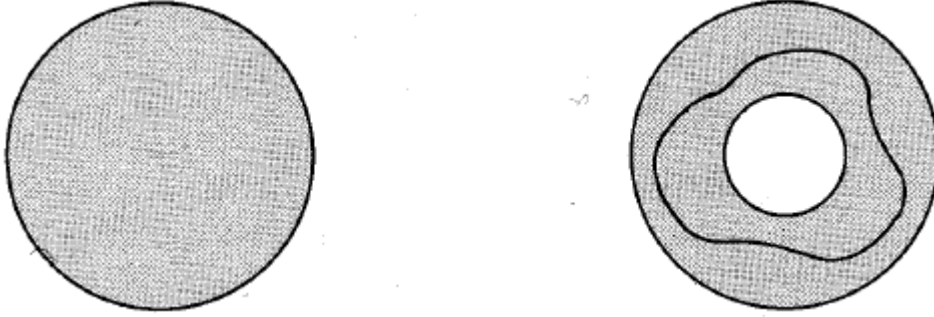


DÉFINITION 121. Un espace topologique X est dit **simplement connexe** ssi tout chemin fermé dans X est contractible à un point de X .

Exemples :

On dit en général domaine simplement connexe pour exprimer qu'il n'y a pas de trous dans ce domaine.

- Un disque de $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{C}$) est simplement connexe, alors qu'un anneau ne l'est pas.



Noter qu'un anneau de $\mathbb{R}^2$ est connexe, il est connexe par arc mais il n'est pas **simplement** connexe.

Introduction aux espaces vectoriels normés

Dans ce cours on donnera quelques principaux résultats sur les espaces vectoriels normés qui serviront comme introduction au cours d'analyse hilbertienne de L3 de mathématiques. A noter que la nouveauté principale par rapport à ce qui a été vu dans les espaces métriques est la structure vectorielle qui permet en fait de ramener l'étude de plusieurs propriétés topologiques par translation au voisinage de zéro.

5.1. Norme et structure vectorielle topologique

DÉFINITION 122. Soit V un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Une norme sur V est une application $x \in V \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}$ vérifiant

- (i) - $\|x\| > 0$ si $x \neq 0$ (positivité)
- (ii) - $\forall x \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \|\lambda.x\| = |\lambda|. \|x\|$ (homogénéité)
- (iii) - $\forall x, y \in V, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Inégalité triangulaire)

Si on munit V d'une norme $\| \cdot \|$, $(V, \| \cdot \|)$ est appelé espace vectoriel normé (e.v.n) ou espace normé tout court.

PROPOSITION 123 (Définition). Soit $(V, \| \cdot \|)$ un e.v.n. L'application $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, d(x, y) = \|x - y\|$ est une distance sur V appelée métrique associée à la norme $\| \cdot \|$, et la structure topologique métrique (V, d) induit alors une structure vectorielle topologique sur l'e.v.n $(V, \| \cdot \|)$. On retrouve alors les notions de boules ouvertes ou fermées suivantes, si $x \in V$ et $r \geq 0$,

$$B(x, r) = \{y \in V, \|y - x\| < r\}, \quad \overline{B}(x, r) = \{y \in V, \|y - x\| \leq r\}$$

On rappelle que si V espace vectoriel, $x \in V$ et $A \subset V$ alors $x + A = \{x + a, a \in A\}$. On peut alors montrer la proposition importante suivante, qui exprime le fait que tout système de voisinages dans V peut être ramené à un système de voisinages de 0 par simple translation. Ce résultat sera d'une importance capitale lorsque étudie les applications linéaires dans les e.v.n.

PROPOSITION 124. Soit $(V, \| \cdot \|)$ un e.v.n., $x \in V$ et $r \geq 0$, alors $B(x, r) = x + B(0, r)$ et $\overline{B}(x, r) = x + \overline{B}(0, r)$

PROPOSITION 125. On dira que deux normes $\| \cdot \|_1$ et $\| \cdot \|_2$ sur V sont équivalentes **ssi** les distances associées sont équivalentes, i.e., il existe deux constantes $c, c^* > 0$ tels que pour tout $x \in V$, $c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c^*\|x\|_1$.

De même, on déduit pour la convergence des suites le résultat suivant.

PROPOSITION 126. Soit $(V, \| \cdot \|)$ un e.v.n., $x \in V$ et $(x_n)_n$ une suite de vecteurs de V , alors $(x_n)_n$ converge vers x dans V **ssi** la suite $(x_n - x)_n$ converge vers 0 le vecteur nul de V , i.e., $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$ dans $\mathbb{R}$, et on note $x_n \rightarrow x$ dans V .

5.2. Norme produit et compatibilité avec la structure linéaire

Soient $(V, || \cdot ||_V)$ et $(W, || \cdot ||_W)$ deux espaces normés sur un même corps $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

PROPOSITION 127 (Définition). *On appelle espace normé produit $(V \times W, || \cdot ||_{V \times W})$ l'espace vectoriel $V \times W$ muni des opérations linéaires usuelles, pour tous $x, x' \in V$, $y, y' \in W$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,*

$$\begin{aligned}(x, y) + (x', y') &= (x + x', y + y') \in V \times W, \\ \lambda(x, y) &= (\lambda x, \lambda y) \in V \times W,\end{aligned}$$

et de la norme produit $|| \cdot ||_{V \times W}$ définie par

$$||(x, y)||_{V \times W} = \max(||x||_V, ||y||_W)$$

PROPOSITION 128. *Dans un e.v.n produit $V \times W$ on peut montrer que les trois normes suivantes sont équivalentes.*

$$||(x, y)||_\infty = \max(||x||_V, ||y||_W), \quad ||(x, y)||_1 = ||x||_V + ||y||_W, \quad ||(x, y)||_2 = \sqrt{||x||_V^2 + ||y||_W^2}$$

PROPOSITION 129. *Il est clair que la définition ci-dessus est compatible avec la structure produit, c'est à dire les projections canoniques*

$$\begin{aligned}\pi_V &: (V \times W, || \cdot ||_{V \times W}) \rightarrow (V, || \cdot ||_V), \quad \pi_V(x, y) = x \\ \pi_W &: (V \times W, || \cdot ||_{V \times W}) \rightarrow (W, || \cdot ||_W), \quad \pi_W(x, y) = y\end{aligned}$$

sont naturellement continues. On en déduit alors pour les suites que $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$ dans $V \times W$ ssi $x_n \rightarrow x$ dans V et $y_n \rightarrow y$ dans W .

La compatibilité de la topologie avec la structure linéaire exige la continuité des opérations algébriques élémentaires qui est un résultat fondamental dans la pratique des e.v.n (s). Dans la suite on va considérer les e.v.n (s) produits $V \times V$ et $\mathbb{K} \times V$ où $\mathbb{K}$ est le corps muni de la norme $| \cdot |$ (valeur absolue si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et module si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

THÉORÈME 130. *Les applications*

- (i) - $(x, y) \mapsto x + y$ de $V \times V$ dans V ,
- (ii) - $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ de $\mathbb{K} \times V$ dans V ,
- (iii) - $x \mapsto ||x||$ de V dans $\mathbb{R}$

sont continues

DÉMONSTRATION. Utiliser les suites.

Par exemple, pour (i), si $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$ dans $V \times V$ alors $||(x_n - x, y_n - y)||_{V \times W} \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}||x_n + y_n - (x + y)||_V &\leq ||x_n - x||_V + ||y_n - y||_V \\ &\leq 2 \max(||x_n - x||_V, ||y_n - y||_V) \\ &\leq 2 \quad ||(x_n - x, y_n - y)||_{V \times W} \rightarrow 0\end{aligned}$$

d'où $x_n + y_n \rightarrow x + y$ dans V . □

THÉORÈME 131 (Fondamental). *Dans un espace de dimension fini, toutes les normes sont équivalentes.*

DÉMONSTRATION. Il est clair que si V est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension d alors V est algébriquement isomorphe à $\mathbb{K}^d$ or dans $\mathbb{K}$ toutes les normes sont équivalentes à $| \cdot |$ d'où toutes les normes dans V sont équivalentes à la norme produit associée à $| \cdot |$. □

REMARQUE 132. Le théorème précédent sert surtout sous sa forme contraposée, c'est à dire s'il existe sur V deux normes non équivalentes alors V est de dimension infinie.

5.3. Applications linéaires continues sur les e.v.n (s)

DÉFINITION 133. Soient V et W deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Une application $f : V \rightarrow W$ est dite linéaire si

$$\forall x, y \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y),$$

si $W = \mathbb{K}$ alors f est dite forme linéaire sur V .

THÉORÈME 134. Soient V et W deux e.v.n (s) sur $\mathbb{K}$, et soit $f : V \rightarrow W$ une application linéaire, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) - f est continue sur V , (i.e., continue en tout point $x \in V$),
- (ii) - f est continue en $x = 0 \in V$,
- (iii) - f est bornée sur la boule fermée unité de V , i.e., il existe $c > 0$, pour tout $x \in V$, $\|x\|_V \leq 1 \implies \|f(x)\|_W \leq c$,
- (iv) - il existe $c > 0$, pour tout $x \in V$, $\|f(x)\|_W \leq c\|x\|_V$.

DÉMONSTRATION. à faire en exercice. □

DÉFINITION 135 (Proposition). Soient V et W deux e.v.n (s) sur $\mathbb{K}$, et soit $f : V \rightarrow W$ une application linéaire, on appelle norme de f (assujettie aux normes $\|\cdot\|_V$ et $\|\cdot\|_W$) la plus petite constante (majorante) c qui apparaît dans (iii) du théorème précédent, on note alors ce nombre

$$\|f\| = \sup_{\|x\|_V \leq 1} \|f(x)\|_W,$$

on remarquera qu'il est tel que

$$\forall x \in V, \|f(x)\|_W \leq \|f\| \cdot \|x\|_V$$

et qu'on a aussi (à faire en exercice)

$$\|f\| = \sup_{\|x\|_V = 1} \|f(x)\|_W.$$

PROPOSITION 136. L'application $f \mapsto \|f\|$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{L}(V, W)$ des applications linéaires de $(V, \|\cdot\|_V)$ dans $(W, \|\cdot\|_W)$.

DÉFINITION 137 (Dual). L'espace $\mathcal{L}(V, \mathbb{K})$ des formes linéaires continues sur V muni de la norme $\|\cdot\|$ assujettie à $\|\cdot\|_V$ et $|\cdot|$ est appelé le dual de V et il est noté généralement V^* .

5.4. Introduction aux espaces de Banach

DÉFINITION 138. Un espace de Banach est un e.v.n complet, i.e., un e.v.n où toute suite de Cauchy est convergente.

Exemple : L'espace des scalaires $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ est un espace de Banach.

THÉORÈME 139. Soient $(V_1, \|\cdot\|_1), (V_2, \|\cdot\|_2), \dots, (V_n, \|\cdot\|_n)$ des espaces de Banach (sur le même corps $\mathbb{K}$), alors l'espace normé produit $V = V_1 \times \dots \times V_n$ muni de la norme produit $\|(x_1, \dots, x_n)\| = \max_{1 \leq k \leq n} \|x_k\|_k$ est un espace de Banach.

COROLLAIRE 140. L'espace $\mathbb{K}^d$ ($d \in \mathbb{N}^*$) muni de la norme produit est un Banach. Plus généralement, tout e.v.n de dimension finie est un espace de Banach.

THÉORÈME 141. Soient V un e.v.n et W un Banach, alors $\mathcal{L}(V, W)$ muni de la norme assujettie $\|\cdot\|$ est un Banach.

DÉMONSTRATION. A faire en exercice □

THÉORÈME 142. Si $(V, || ||)$ est un Banach, toute série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ de vecteurs de V qui est normalement convergente (i.e., telle que $\sum_{n=1}^{+\infty} ||x_n|| < +\infty$) est convergente dans V (i.e., il existe $s \in V$ tel que la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=1}^n x_k \rightarrow s$ dans V , on écrit alors $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s$).

Exemples d'espaces de Banach :

- (1) Les e.v.n de dimension finie sont des espaces de Banach.
- (2) Le dual $V^* = \mathcal{L}(V, \mathbb{K})$ d'un espace normé (quelconque) est un espace de Banach.
- (3) L'espace vectoriel $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$) des fonctions f continues sur $[a, b]$ ($a < b$) compact à valeurs réelles (resp. complexes) muni de la norme de la convergence uniforme $||f||_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ est un espace de Banach, alors que muni d'une autre norme telles que par exemples $||f||_1 = \int_a^b |f(x)| dx$ ou encore $||f||_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$.

- (4) Soit $p \geq 1$ réel et $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites numériques $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Le sous-espace des suites de puissance p -ième sommable,

$$l^p = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \sum_{i=0}^{+\infty} |x_i|^p < +\infty \right\}$$

muni de la norme

$$||x||_p = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

est un espace de Banach.

- (5) Le sous-espace l^∞ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites numériques $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ bornées (i.e., telles que $\sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| < \infty$) muni de la norme

$$||x||_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|$$

est un espace de Banach.

- (6) Un autre exemple important qui sera étudié dans le cours Mesure & Intégration de L3 est le suivant. Soit $p \geq 1$ réel. L'espace vectoriel des classes de fonctions boréliennes $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ (resp. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$) telles que $|f|^p$ est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue, muni de la norme

$$||f||_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ resp. } (||f||_p = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}})$$

est un espace de Banach qu'on note $L^p([a, b])$ (resp. $L^p(\mathbb{R})$).

Les Travaux dirigés

Travaux dirigés *Fiche 1* : Espaces topologiques

EXERCICE (1). Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Montrer que les fermés de $\mathcal{T}$ vérifient les propriétés suivantes :

(F₁) : $\emptyset$ et X sont des fermés

(F₂) : Toute réunion **finie** de fermés est un fermé.

(F₃) : Toute intersection **quelconque** de fermés est un fermé.

EXERCICE (2). $X = \{a, b, c, d, e\}$ et

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_1 &= \{\emptyset, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}, \\ \mathcal{T}_2 &= \{\emptyset, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}, \\ \mathcal{T}_3 &= \{\emptyset, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, d, e\}\}.\end{aligned}$$

Pour chacune des familles d'ensembles ci-dessus, dire celles qui sont des topologies sur X et celle qui ne le sont pas. (Justifier).

EXERCICE (3). Soient $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux topologies sur X . Montrer que $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ est aussi une topologie sur X . Généraliser ce résultat à une intersection quelconque de topologies sur X .

EXERCICE (4). $X = \{a, b, c\}$ et $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$, $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{b\}\}$. Montrer que $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sont deux topologies sur X mais leur union $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ ne l'est pas. Dans ce cas, quelle est la topologie engendrée par $\mathcal{T}$?

EXERCICE (5). On considère $Y = [-1, 1]$ comme sous-espace de $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle. Dire si les ensembles suivants sont (ouverts / fermés) dans $\mathbb{R}$? dans Y ?

$$\begin{aligned}A &= \{x \mid \tfrac{1}{2} < |x| < 1\}, \\ B &= \{x \mid \tfrac{1}{2} < |x| \leq 1\}, \\ C &= \{x \mid \tfrac{1}{2} \leq |x| < 1\}, \\ D &= \{x \mid \tfrac{1}{2} \leq |x| \leq 1\}, \\ E &= \{x \mid 0 < |x| < 1, \text{ et } \tfrac{1}{x} \notin \mathbb{Z}_+\}.\end{aligned}$$

Si $Y = [0, 1) \cup \{2\}$ sous-espace topologique de $\mathbb{R}$, dire si les ensembles $[0, 1)$ et $\{2\}$ sont (ouverts / fermés) dans $\mathbb{R}$? dans Y ?

EXERCICE (6). On considère la famille dénombrable $\mathcal{C} = \{(a, b) \mid a < b, a \text{ et } b \text{ rationnels}\}$. Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de la topologie usuelle de $\mathbb{R}$. Même question pour la topologie produit dans $\mathbb{R}^2$ avec $\mathcal{C}^2 = \{(a, b) \times (c, d) \mid a < b, c < d, a, b, c \text{ et } d \text{ rationnels}\}$.

EXERCICE (7). Soit X un ensemble muni de $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ la topologie engendrée par une collection de sous-ensembles $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de la topologie $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ ssi :

(1) pour tout $x \in X$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que B contient x ,

(2) pour tous $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ et pour tout $x \in B_1 \cap B_2$, il existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

EXERCICE (8). Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de topologies $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$, respectivement, sur X , montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\mathcal{T}$ est moins fine que $\mathcal{T}'$,
- (ii) pour tout $x \in X$, et pour tout $B \in \mathcal{B}$ tel que B contient x , il existe $B' \in \mathcal{B}'$ tel que $x \in B' \subset B$.

Application : $\mathcal{B}$ la collection de tous les disques ouverts (intérieurs des cercles) du plan $\mathbb{R}^2$. $\mathcal{B}'$ la collection de tous les rectangles ouverts (dont les côtés sont parallèles aux axes) du plan $\mathbb{R}^2$. Comparer les topologies engendrées par les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Conclure.

Correction Travaux dirigés Fiche 1 : Espaces topologiques

EXERCICE (1). Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Rappeler que les fermés de $\mathcal{T}$ sont les complémentaires d'ouverts.

(F₁) : $\emptyset$ et X sont des fermés car $\emptyset$ et X sont ouverts et sont complémentaires entre eux.

(F₂) : $\left(\bigcup_{finie} F_i\right)^C = \bigcap_{finie} F_i^C$ ouvert car les F_i^C ouverts donc $\bigcup_{finie} F_i$ est fermé.

(F₃) : $\left(\bigcap_{qqe} F_i\right)^C = \bigcap_{qqe} F_i^C$ ouvert car les F_i^C ouverts donc $\bigcap_{qqe} F_i$ est fermé.

EXERCICE (2). $X = \{a, b, c, d, e\}$ et

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_1 &= \{\emptyset, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}, \\ \mathcal{T}_2 &= \{\emptyset, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}, \\ \mathcal{T}_3 &= \{\emptyset, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, d, e\}\}.\end{aligned}$$

- $\mathcal{T}_1$ contient $\emptyset, X$ et toute union quelconque ou intersection finie de ses ouverts est ouverte, donc c'est une topologie.

- Pour $\mathcal{T}_2$, on a $\{a\} \cup \{b, c, d\} = \{a, b, c, d\} \notin \mathcal{T}_2$, donc $\mathcal{T}_2$ n'est pas une topologie.

- Pour $\mathcal{T}_3$, $\{c, d\} \cap \{a, b, d, e\} = \{d\} \notin \mathcal{T}_3$, donc ce n'est pas une topologie.

EXERCICE (3). Soient $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux topologies sur X . $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ est une topologie car :

(O₁) : $\emptyset$ et X sont dans $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ donc aussi dans $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$.

(O₂) : $(O_i)_i$ famille d'ouverts de $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$. $\bigcap_{qqe} O_i$ est donc ouvert dans $\mathcal{T}_1$ et dans $\mathcal{T}_2$ donc aussi dans $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$.

(O₃) : $(O_i)_i$ famille d'ouverts de $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$. $\bigcup_{finie} O_i$ est donc ouvert dans $\mathcal{T}_1$ et dans $\mathcal{T}_2$ donc aussi dans $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$.

La généralisation à une intersection quelconque de topologies sur X est similaire.

EXERCICE (4). $X = \{a, b, c\}$ et $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$, $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{b\}\}$.

On peut remarquer que $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sont les topologies sur X engendrées par $\{a\}$ et b respectivement.

L'union $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}\}$ ne l'est pas car $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \notin \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$.

Dans ce cas, la topologie engendrée par $\mathcal{T}$ peut être obtenue en rajoutant à $\mathcal{T}$ l'ouvert manquant, à savoir $\{a, b\}$. On obtient $\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ qui est bien la topologie la moins fine contenant $\mathcal{T}$.

EXERCICE (5). On considère $Y = [-1, 1]$ comme sous-espace de $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle.

A/ - On a $A = \{x \mid \frac{1}{2} < |x| < 1\} = (-1, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$, donc A est ouvert dans $\mathbb{R}$ et dans Y car A est une partie de Y .

$A^C = (-\infty, -1] \cup [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \cup (1, +\infty)$ et il n'y a pas d'ouvert $(\frac{1}{2} - \epsilon, \frac{1}{2} + \epsilon)$ inclus dans A^C , donc A^C n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$ d'où A n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$.

D'autre part, A n'est pas fermé dans Y car Y est fermé dans $\mathbb{R}$ (sinon A serait fermé dans $\mathbb{R}$ ce qui est faux)

B/ - $B = [-1, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$, donc B n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$ car il n'y a pas d'ouvert par exemple de la forme $(1 - \epsilon, 1 + \epsilon)$ inclus dans B . Par contre B est ouvert dans Y car $B = [(-2, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 2)] \cap Y$. D'autre part, le complémentaire de B dans Y est $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ qui est fermé dans $\mathbb{R}$ donc aussi dans Y , d'où

B est ouvert dans Y . Finalement, B n'est pas fermé dans Y car sinon il serait fermé de $\mathbb{R}$ puisque Y est fermé dans $\mathbb{R}$.

C/ - $C =]-1, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1[$ et il est clair qu'il n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$. Il n'est pas ouvert dans Y car il n'y a pas dans Y un ouvert de la forme $(\frac{1}{2} - \epsilon, \frac{1}{2} + \epsilon)$ inclus dans C . En outre, il n'est pas fermé dans Y car sinon il serait fermé dans $\mathbb{R}$ (puisque Y est fermé dans $\mathbb{R}$ et $C \subset Y$) chose qui n'est pas vraie.

D/ - De même $D = [-1, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1]$ est fermé dans $\mathbb{R}$, donc aussi dans Y . Il n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$ pour la même raison que B ne l'est pas. Il n'est pas ouvert dans Y car $Y - D =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ n'est pas fermé dans Y . Cependant il est fermé dans Y car $Y - D =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ est ouvert dans Y puisqu'il est ouvert dans $\mathbb{R}$.

E/ - On peut vérifier que

$$E =]-1, 0[\cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right[\right),$$

d'où E est ouvert dans $\mathbb{R}$ donc ouvert aussi dans Y . Il n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$ car son complémentaire dans $\mathbb{R}$

$$E^C =]-\infty, -1] \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left\{ \frac{1}{n} \right\} \right) \cup [1, +\infty[$$

n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$, car il n'y a pas d'ouvert par exemple de la forme $(1 - \epsilon, 1 + \epsilon)$ inclus dans E^C . D'autre part, puisque Y est fermé dans $\mathbb{R}$, alors E ne peut être fermé dans Y car sinon il le serait aussi dans $\mathbb{R}$ ce qui n'est pas vrai.

Soit $Y = [0, 1) \cup \{2\}$ sous-espace topologique de $\mathbb{R}$, noter que Y n'est ni ouvert ni fermé de $\mathbb{R}$.

Il est clair que dans $\mathbb{R}$, $\{2\}$ est fermé et n'est pas ouvert. $[0, 1)$ n'est ni fermé ni ouvert.

Comme $[0, 1)$ et $\{2\}$ sont complémentaires dans Y , alors dans Y l'ouverture (respectivement non ouverture) de l'un entraîne la fermeture (respectivement non fermeture) de l'autre. Or $\{2\} = (-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}) \cap Y$ est ouvert dans Y , d'où $[0, 1)$ est fermé dans Y . D'autre part donc $\{2\}$ est fermé dans Y et par conséquent $[0, 1)$ est ouvert dans Y . Donc $[0, 1)$ et $\{2\}$ sont des ouverts et fermés à la fois dans Y .

EXERCICE (6). On considère la famille dénombrable $\mathcal{C} = \{(a, b) \mid a < b, a \text{ et } b \text{ rationnels}\}$.

On sait que $\mathcal{C}' = \{(c, d) \mid c < d, c \text{ et } d \text{ réels}\}$ est une base de la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$. Pour que $\mathcal{C}$ forme une base de cette topologie, il suffit de montrer que pour tout intervalle (c, d) de $\mathcal{C}'$ et pour tout $x \in (c, d)$, il existe a et b rationnels tels que $x \in (a, b) \subset (c, d)$. Soit $c < x < d$, alors par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ (voir définition de cette densité en première année L1 analyse 1), ils existent deux rationnels a et b tels que $c < a < x < b < d$, d'où la preuve est achevée.

Même raisonnement que précédemment pour la topologie produit dans $\mathbb{R}^2$ avec

$$\mathcal{C}^2 = \{(a, b) \times (c, d) \mid a < b, c < d, a, b, c \text{ et } d \text{ rationnels}\},$$

en se basant uniquement sur la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

EXERCICE (7). Soit X un ensemble muni de $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ la topologie engendrée par une collection de sous-ensembles $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$.

$\Rightarrow$) Soit $\mathcal{B}$ est une base de la topologie $\mathcal{T}(\mathcal{B})$:

(1) Comme X est ouvert de $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ alors $X = \bigcup_i B_i$ (les B_i éléments de $\mathcal{B}$) donc pour tout $x \in X$, il existe i , tel que $x \in B_i \in \mathcal{B}$.

(2) Soient $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ et soit $x \in B_1 \cap B_2$, comme $B_1 \cap B_2$ est ouvert il existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

$\Leftarrow$) réciproquement, supposons (1) et (2) et montrons que $\mathcal{B}$ est une base de la topologie $\mathcal{T}(\mathcal{B})$. Soit U ouvert de $\mathcal{T}(\mathcal{B})$, alors

$$U = \bigcup_{\text{qque}_i \text{ finie}/j} \bigcap B_{ij}$$

(les B_{ij} éléments de $\mathcal{B}$), d'où pour tout $x \in U$, il existe i tel que $x \in \bigcap_{\text{finie}/j} B_{ij}$, ainsi la propriété (2) montre qu'il existe B dans $\mathcal{B}$ tel que $x \in B \subset \bigcap_{\text{finie}/j} B_{ij}$ d'où $x \in B \subset U$, et par conséquent $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{T}(\mathcal{B})$.

EXERCICE (8). Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de topologies $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$, respectivement, sur X , montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Soit U un ouvert de $\mathcal{T}$ et soit $x \in U$. Comme $\mathcal{B}$ est une base qui engendre $\mathcal{T}$ alors il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subset U$. La propriété (ii) montre qu'il existe $B' \in \mathcal{B}'$ tel que $x \in B' \subset B$. D'où, $x \in B' \subset B \subset U$ et on conclut que U est ouvert de $\mathcal{T}'$. Donc $\mathcal{T}$ est moins fine que $\mathcal{T}'$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) : Soit $x \in X$ et soit $B \in \mathcal{B}$ tel que B contient x , alors comme B est ouvert de $\mathcal{T}$ qui est moins fine que $\mathcal{T}'$ alors B est ouvert de $\mathcal{T}'$. D'où il existe $B' \in \mathcal{B}'$ tel que $x \in B' \subset B$ car $\mathcal{T}'$ est engendrée par la base $\mathcal{B}'$.

Application : $\mathcal{B}$ la collection de tous les disques ouverts (intérieurs des cercles) du plan $\mathbb{R}^2$. $\mathcal{B}'$ la collection de tous les rectangles ouverts (dont les côtés sont parallèles aux axes) du plan $\mathbb{R}^2$. Comme chaque disque ouvert peut contenir un rectangle ouvert dans $\mathbb{R}^2$ et vice-versa alors les topologies engendrées par les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont identiques (ou équivalentes).

Travaux dirigés *Fiche 2* : Espaces topologiques

EXERCICE (1). Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. A , B et A_α des parties de X .

1 - Montrer que :

a) - Si $A \subset B$ alors $\overline{A} \subset \overline{B}$. b) - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. c) - $\overline{\bigcup_\alpha A_\alpha} \supset \bigcup_\alpha \overline{A_\alpha}$, donner un exemple où $\overline{\bigcup_\alpha A_\alpha} \neq \bigcup_\alpha \overline{A_\alpha}$.

2 - Montrer que si B est ouvert et $A \cap B = \emptyset$ alors $\overline{A} \cap B = \emptyset$ mais qu'on n'a pas nécessairement $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$.

3 - Montrer que la formule $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ n'est pas vraie en général. Quelle inclusion a-t-on ?

4 - Quelle relation a-t-on entre $\overline{A - B}$ et $\overline{A} - \overline{B}$?

EXERCICE (2). 1 - Soient X et Y deux espaces topologiques, $A \subset X$ et $B \subset Y$. Montrer que dans l'espace produit $X \times Y$, on a $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$, et $\overbrace{A \times B}^\circ = \overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{B}$.

2 - Déterminer l'adhérence et l'intérieur des ensembles suivants :

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x < 1, y = 0\}$; $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0\}$; $\{\frac{1}{n}/n \geq 1\}$; le cercle unité de $\mathbb{R}^2$.

EXERCICE (3). Si A est une partie de l'espace topologique X , on pose $\alpha(A) = \overset{\circ}{\overline{A}}$ et $\beta(A) = \overline{\overset{\circ}{A}}$.

1 - Montrer que α et β sont des applications croissantes pour l'inclusion de $\mathcal{P}(X)$ dans lui-même.

2 - Montrer que si A est ouvert, $A \subset \alpha(A)$ et si A est fermé, $\beta(A) \subset A$. En déduire que $\alpha^2 = \alpha$ et $\beta^2 = \beta$.

3 - Construire A dans $\mathbb{R}$ tel que les cinq ensembles : A , $\overline{A}$, $\overset{\circ}{A}$, $\alpha(A)$ et $\beta(A)$ soient tous distincts.

EXERCICE (4). Dans un espace topologique, on définit la frontière d'une partie A par $\partial A = \overline{A} - \overset{\circ}{A}$. Montrer que :

0 - $\left(\overset{\circ}{A}\right)^c = \overline{A^c}$

1 - $\partial A = \partial(A^c)$ et que $(\partial A = A) \iff A$ est fermé d'intérieur vide.

2 - $\partial\left(\overset{\circ}{A}\right)$ et $\partial(\overline{A})$ sont toutes deux incluses dans ∂A , et donner un exemple d'inclusion stricte pour chacune.

3 - $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$, et que l'inclusion peut être stricte ; montrer qu'il y a égalité lorsque $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$ (établir $\overbrace{A \cup B}^\circ \subset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$).

4 - $\overbrace{A \cup B}^\circ = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ lorsque $\partial A \cap \partial B = \emptyset$. (raisonner par l'absurde).

5 - $\overset{\circ}{A} \cap \partial A = \emptyset$ et $\overline{A} = \overset{\circ}{A} \cup \partial A$.

6 - $\partial A = \emptyset \iff A$ est fermé et ouvert à la fois.

EXERCICE (5). On considère $Y = (0, 1)$ comme sous-espace de $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle. Déterminer l'adhérence, l'intérieur, l'extérieur, la frontière dans $\mathbb{R}$ (puis dans Y) de : $A = \{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}$, $B = (0, \frac{1}{2}]$, $C = (0, \frac{1}{2}] \cup \{\frac{3}{4}\}$, $D = \{\frac{1}{n+1} | n \in \mathbb{N}^*\}$.

EXERCICE (6). On se place dans $\mathbb{R}$. Montrer que :

- 1 - Si $B = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{Z}_+\}$, alors $\overline{B} = B \cup \{0\}$.
- 2 - Dans $\{0\} \cup [1, 2]$, seul 0 est isolé.
- 3 - Dans $B \cup \{0\}$ seul 0 est non isolé (c'est un point d'accumulation).
- 4 - Dans un espace discret, tous les points sont isolés.
- 5 - $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Même question avec $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

EXERCICE (7). Soit X un espace topologique et D un sous ensemble dense dans X .

- 1 - Montrer qu'il est aussi équivalent de dire :
 - (i) - Le complémentaire de D est d'intérieur vide, **ou** , (ii) - Si $D \subset F$ et F fermé alors $F = X$.
- 2 - Montrer qu'un ensemble A de X rencontre toute partie dense dans X **ssi** A est d'intérieur non vide.
- 3 - Soit E et G deux ouverts denses dans X ; montrer que $E \cap G$ est encore dense dans X .
- 4 - Montrer que $\{\sqrt{n} - E(\sqrt{n}) | n \in \mathbb{N}^*\}$ est dense dans $[0, 1]$, $E(x)$ est la partie entière de x .

EXERCICE (8). 1 - Dans $\mathbb{R}$, le sous-espace $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ est-il séparé ? séparable ?

2 - $X = \{a, b, c\}$ muni de la topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$, est-il séparé ?

3 - Montrer qu'un sous-espace d'un espace séparé (respectivement séparable) est séparé (respectivement séparable).

4 - Montrer que le produit de deux espaces séparés (respectivement séparables) est séparé (respectivement séparable).

5 - Montrer que l'espace X est séparé **ssi** sa **diagonale** $\Delta = \{(x, x) \in X \times X\}$ est fermé dans $X \times X$.

EXERCICE (9 - exclu de cette fiche de TD). 1 - Trouver des valeurs d'adhérence de la suite :

$$0, 1, 0, 1/2, 1, 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1, \dots, 0, 1/2^k, 2/2^k, \dots, (2^k - 1)/2^k, 1, 0, \dots$$

2 - Soit (x_n) une suite d'un espace topologique X séparé ; on note A l'ensemble $\{x_1, x_2, \dots\}$.

a - Toute valeur d'adhérence a de la suite est un point de $\overline{A}$: donner un exemple où a est un point isolé de A ; un exemple où a est un point d'accumulation dans A ; un exemple où a est un point d'accumulation dans $\overline{A} - A$.

b - Montrer que tout point d'accumulation de A est valeur d'adhérence de la suite.

EXERCICE (10 - exclu de cette fiche de TD). 1 supposons qu'on puisse identifier $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$. Proposer une base de topologie usuelle sur $\mathbb{C}$. Cette topologie est-elle séparée ? séparable ?

Soit $z_0 = \rho e^{i\theta_0}$, on note $[z_0 \rightarrow)$ la demi-droite $\{\rho e^{i\theta_0} | \rho \geq \rho_0\}$. On déclare **ouvert** toute réunion (éventuellement vide) de telles demi-droites.

2 - Montrer qu'on a ainsi défini sur $\mathbb{C}$ une topologie $\mathcal{T}$ non séparée.

3 - Montrer que l'adhérence du point $\{z_0\}$ pour cette topologie est $[0, z_0]$.

4 - En déduire que les fermés de $\mathcal{T}$ sont les ensembles **étoilés** par rapport à 0 (A est dit "étoilé par rapport à 0" si, pour tout $z \in A$, le segment $[0, z]$ est encore dans A).

Correction Travaux dirigés *Fiche 2* : Espaces topologiques

EXERCICE (1). Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. A, B et A_α des parties de X .

1 -

a) - $A \subset B$ alors $A \subset B \subset \overline{B}$, donc $\overline{B}$ fermé qui contient A , d'où $\overline{A} \subset \overline{B}$.

b) - $\overline{A \cup B}$ fermé qui contient A donc $\overline{A}$ et contient B donc $\overline{B}$ alors il contient $A \cup B$, d'où $\overline{A \cup B} \subset \overline{A \cup B}$. L'autre inclusion est évidente car $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ et $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$, d'où $\overline{A \cup B} \subset \overline{A \cup B}$.

c) - On a pour tout α , $\overline{\bigcup_\alpha A_\alpha} \supset \overline{A_\alpha}$, d'où $\overline{\bigcup_\alpha A_\alpha} \supset \bigcup_\alpha \overline{A_\alpha}$. Pour le contre-exemple $\overline{\bigcup_\alpha A_\alpha} \neq \bigcup_\alpha \overline{A_\alpha}$, il faut chercher un cas où $\bigcup_\alpha \overline{A_\alpha}$ n'est pas fermé! En effet, dans $\mathbb{R}$, $A_n = \overline{A_n} = [\frac{1}{n}, 1]$, $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\bigcup_n \overline{A_n} = (0, 1]$ est différent de $\overline{\bigcup_n A_n} = [0, 1]$.

2 - Soit B est ouvert et $A \cap B = \emptyset$ alors $A \subset B^c$ qui est fermé donc $\overline{A} \subset B^c$ d'où $\overline{A} \cap B = \emptyset$. On n'a pas nécessairement $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$, par exemple, dans $\mathbb{R}$, $A = \{0\}$ et $B = (0, 1)$ et $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\} \neq \emptyset$.

3 - Comme exemple dans $\mathbb{R}$, $A = (0, 1)$, $B = (1, 2)$, $\overline{A \cap B} = \emptyset$ et $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$. Donc l'inclusion qu'on doit avoir est $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$, en effet : $A \cap B \subset \overline{A \cap B}$ qui est fermé donc il contient $\overline{A \cap B}$.

4 - Soit $x \in \overline{A - B} = \overline{A \cap B^c}$, alors pour tout voisinage $V \in \mathcal{V}(x)$, $V \cap A \neq \emptyset$, et comme B^c est ouvert alors $V \cap B^c$ est un voisinage de x , d'où $V \cap B^c \cap A \neq \emptyset$, c.a.d, $V \cap (A - B) \neq \emptyset$, or $A - B \subset A - B$, d'où $V \cap (A - B) \neq \emptyset$ et comme $V \in \mathcal{V}(x)$ quelconque alors $x \in \overline{A - B}$, on conclut que $\overline{A - B} \subset \overline{A - B}$. En général, on n'a pas l'autre inclusion (en particulier si $\overline{A - B}$ n'est pas fermé), en effet, $A = (0, 1)$, $B = (0, \frac{1}{2})$, $\overline{A - B} = (\frac{1}{2}, 1]$ et $\overline{A} - \overline{B} = [\frac{1}{2}, 1] \not\subset \overline{A - B}$.

EXERCICE (2). 1 - 1.1) - L'inclusion $\overline{A \times B} \subset \overline{A} \times \overline{B}$ est évidente car $\overline{A \times B}$ fermé qui contient $A \times B$ donc contient $\overline{A \times B}$. Montrons l'autre inclusion par l'absurde. Supposons qu'il existe $(x, y) \in \overline{A \times B}$ tel que $(x, y) \notin \overline{A} \times \overline{B}$, alors $x \notin \overline{A}$ d'où il existe $V_x \in \mathcal{V}(x)$ voisinage de x dans X tel que $V_x \cap A = \emptyset$, et $y \notin \overline{B}$ d'où il existe $V_y \in \mathcal{V}(y)$ voisinage de y dans Y tel que $V_y \cap B = \emptyset$. Donc, $W = V_x \times V_y$ est un voisinage de (x, y) dans $X \times Y$ et on a $W \cap (A \times B) = \emptyset$, ce qui est contradictoire avec $(x, y) \in \overline{A \times B}$. Ainsi $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

- 1.2) - De même $\overline{\overline{A} \times \overline{B}} \supset \overline{\overline{A} \times \overline{B}}$ est évidente car $\overline{\overline{A} \times \overline{B}}$ ouvert contenu dans $A \times B$ donc dans le plus grand $\overline{A \times B}$. Pour l'autre inclusion, soit $(x, y) \in \overline{\overline{A} \times \overline{B}}$ alors il existe un ouvert W voisinage de (x, y) dans $X \times Y$ tel que $W \subset \overline{\overline{A} \times \overline{B}} \subset A \times B$, d'où il existe un ouvert $U_x \times U_y$ de la base de topologie produit tel que

$$(x, y) \in U_x \times U_y \subset W \subset \overline{\overline{A} \times \overline{B}} \subset A \times B,$$

d'où $x \in U_x \subset A$ et U_x ouvert donc $U_x \subset \overset{\circ}{A}$, et $y \in U_y \subset B$ et U_y ouvert donc $U_y \subset \overset{\circ}{B}$. Ainsi

$$(x, y) \in U_x \times U_y \subset \overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{B},$$

et par conséquent $\overline{\overline{A} \times \overline{B}} \subset \overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{B}$, d'où l'égalité.

2 - Déterminer l'adhérence et l'intérieur des ensembles suivants :

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x < 1, y = 0\} = (0, 1) \times \{0\}$, d'où

$$\overline{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x < 1, y = 0\}} = [0, 1] \times \{0\}$$

$$\overset{\circ}{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x < 1, y = 0\}} = (0, 1) \times \emptyset = \emptyset$$

$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0\} = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$, d'où

$$\overline{\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0\}} = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$$

$$\widehat{\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0\}} = \mathbb{R}^2 \times \emptyset = \emptyset$$

$\overline{\{\frac{1}{n}/n \geq 1\}} = \{\frac{1}{n}/n \geq 1\} \cup \{0\}$ car 0 est l'unique point d'accumulation.

$\widehat{\{\frac{1}{n}/n \geq 1\}} = \emptyset$, car $\{\frac{1}{n}/n \geq 1\}$ est dénombrable. En effet, supposons qu'il existe $x \in \widehat{\{\frac{1}{n}/n \geq 1\}}$ alors il existe un voisinage de x de la forme $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset \widehat{\{\frac{1}{n}/n \geq 1\}}$ ce qui est absurde car $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ n'est pas dénombrable.

Le cercle unité de $\mathbb{R}^2$: (se faire aider par un graphe) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$,

C est fermé car son complémentaire

$$C^c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 > 1\}$$

est ouvert comme union de deux ouverts, d'où $\overline{C} = C$.

De même, l'intérieur de C est vide $\overset{\circ}{C} = \emptyset$ car s'il existe $z_0 = (x_0, y_0) \in \overset{\circ}{C}$ alors il existe un disque ouvert de rayon $r > 0$, et centré en z_0 ,

$$B(z_0, r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}$$

et tel que $B(z_0, r) \subset \overset{\circ}{C} \subset C$, ce qui est impossible, donc $\overset{\circ}{C} = \emptyset$.

EXERCICE (3). Si A est une partie de l'espace topologique X , on pose $\alpha(A) = \overline{\overset{\circ}{A}}$ et $\beta(A) = \overline{\overset{\circ}{\overline{A}}}$.

1 - Si $A \subset B$ alors $\overline{A} \subset \overline{B}$ resp. $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ et ensuite $\alpha(A) = \overline{\overset{\circ}{A}} \subset \overline{\overset{\circ}{B}} = \alpha(B)$ resp. $\beta(A) = \overline{\overset{\circ}{\overline{A}}} \subset \overline{\overset{\circ}{\overline{B}}} = \beta(B)$ d'où α et β sont des applications croissantes pour l'inclusion de $\mathcal{P}(X)$ dans lui même.

2 - (i) - Si A est ouvert alors $A = \overset{\circ}{A}$, alors on a $A \subset \overline{A}$, d'où $\overset{\circ}{A} \subset \overline{\overset{\circ}{A}}$ donc $A \subset \alpha(A)$.

- (ii) - Si A est fermé alors $A = \overline{A}$, et on a $\overset{\circ}{A} \subset A$, d'où $\overline{\overset{\circ}{A}} \subset \overline{A} = A$, donc $\beta(A) \subset A$.

On a

$$\alpha^2(A) = \alpha(\alpha(A)) = \alpha(\overline{\overset{\circ}{A}}) \supset \overline{\overset{\circ}{A}},$$

car $\overline{\overset{\circ}{A}}$ est ouvert, d'où $\alpha^2(A) \supset \alpha(A)$. D'autre part,

$$\alpha^2(A) = \overline{\beta(\overline{A})} \subset \beta(\overline{A}) \subset \overline{A}$$

car $\overline{A}$ fermé, et $\alpha^2(A)$ ouvert contenu dans $\overline{A}$, donc $\alpha^2(A) \subset \overline{\overset{\circ}{A}} = \alpha(A)$, d'où on a l'égalité $\alpha^2(A) = \alpha(A)$.

De même,

$$\beta^2(A) = \beta(\beta(A)) = \beta(\overline{\overset{\circ}{A}}) \subset \overline{\overset{\circ}{A}},$$

car $\overline{\overset{\circ}{A}}$ est fermé, donc $\beta^2(A) \subset \beta(A)$. D'autre part,

$$\beta^2(A) = \overline{\alpha(\overset{\circ}{A})} \supset \alpha(\overset{\circ}{A}) \supset \overset{\circ}{A},$$

car $\overset{\circ}{A}$ est ouvert, et comme $\beta^2(A)$ fermé qui contient $\overset{\circ}{A}$ alors $\beta^2(A) \supset \overline{\overset{\circ}{A}} = \beta(A)$, donc on l'égalité $\beta^2(A) = \beta(A)$.

3 - A titre d'exemple (il faut d'abord que A ne soit ni ouvert ni fermé), soit $A = (-2, -1) \cup (-1, 0] \cup \{\frac{1}{n}/n \geq 1\}$:

$\bar{A} = [-2, 0] \cup \{\frac{1}{n}/n \geq 1\}$, $\mathring{A} = (-2, -1) \cup (-1, 0)$, $\alpha(A) = \bar{\mathring{A}} = (-2, 0)$ et $\beta(A) = \bar{\mathring{A}} = [-2, 0]$ sont tous distincts.

EXERCICE (4). Dans un espace topologique, on définit la frontière d'une partie A par $\partial A = \bar{A} - \mathring{A}$.

0 - $A^c \subset (\mathring{A})^c$ et $(\mathring{A})^c$ fermé d'où $\bar{A}^c \subset (\mathring{A})^c$. Réciproquement, $A^c \subset \bar{A}^c$ donc $(\bar{A}^c)^c \subset A$ et $(\bar{A}^c)^c$ ouvert alors $(\bar{A}^c)^c \subset \mathring{A}$, d'où $(\mathring{A})^c \subset \bar{A}^c$, donc on a égalité. $(\mathring{A})^c = \bar{A}^c$.

1 - On a d'après la question précédente $\partial A = \bar{A} - \mathring{A} = \partial A = \bar{A} \cap \bar{A}^c$, d'où par symétrie $\partial A = \bar{A}^c \cap \bar{A} = \partial(A^c)$,

On a ensuite $(\partial A = A) \Rightarrow \bar{A} \cap \bar{A}^c = A$ donc A est fermé donc $\bar{A} = A$ et $\partial A = \bar{A} - \mathring{A} = \bar{A} \Rightarrow \mathring{A} = \emptyset$ car $\mathring{A} \subset \bar{A}$. Réciproquement, si A est fermé alors $A = \bar{A}$ et s'il est d'intérieur vide alors $\mathring{A} = \emptyset$, donc $A = \bar{A} - \mathring{A} = \partial A$.

2 - On a

$$\partial(\mathring{A}) = \bar{\mathring{A}} \cap \overline{(\mathring{A})^c} \subset \bar{A} \cap \bar{A}^c = \partial A$$

et comme $\overline{(\mathring{A})^c} \subset \bar{A}^c$, alors on a

$$\partial(\bar{A}) = \bar{\bar{A}} \cap \overline{(\bar{A})^c} = \bar{A} \cap \overline{(\bar{A})^c} \subset \bar{A} \cap \bar{A}^c = \partial A$$

Comme exemples d'inclusions strictes :

- Si A est d'intérieur vide, par exemple $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$ dans $\mathbb{R}$, et on a $\partial \mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} - \mathring{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. On a $\partial \mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset \subsetneq \partial \mathbb{Q}$ et comme $\overline{\mathbb{R}} = \mathring{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$, alors $\partial \overline{\mathbb{Q}} = \partial \mathbb{R} = \emptyset \subsetneq \partial \mathbb{Q}$.

3 - On a , (à l'aide de $\overline{A^c \cap B^c} \subsetneq \bar{A}^c \cap \bar{B}^c$, $\subsetneq$ désigne l'inclusion avec possibilité d'être **stricte**) ;

$$\begin{aligned} \partial(A \cup B) &= \overline{A \cup B} \cap \overline{(A \cup B)^c} \\ &= (\bar{A} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}^c \cap \bar{B}^c \\ &\subsetneq (\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (\bar{A}^c \cap \bar{B}^c) \\ &\subsetneq (\underbrace{\bar{A} \cap \bar{A}^c}_{\emptyset} \cap \bar{B}^c) \cup (\underbrace{\bar{B} \cap \bar{B}^c}_{\emptyset} \cap \bar{A}^c) \\ &\subsetneq (\partial A \cap \bar{B}^c) \cup (\partial B \cap \bar{A}^c) \subsetneq \partial A \cup \partial B \end{aligned}$$

d'où $\partial(A \cup B) \subsetneq \partial A \cup \partial B$,

Pour l'égalité, si on établit que $\overbrace{A \cup B}^{\circ} \subset \mathring{A} \cup \mathring{B}$ alors on aura

$$\begin{aligned} \partial(A \cup B) &= \overline{A \cup B} - \overbrace{A \cup B}^{\circ} \\ &= (\bar{A} \cup \bar{B}) - \overbrace{A \cup B}^{\circ} \\ &\supset (\bar{A} \cup \bar{B}) - (\mathring{A} \cup \mathring{B}) \end{aligned}$$

et si $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$, on a puisque $\mathring{A} \subset \bar{A}$ et $\mathring{B} \subset \bar{B}$, $\mathring{A} \cap \mathring{B} = \emptyset$ et donc on aura $\partial(A \cup B) \supset \partial A \cup \partial B$, car

$$(\bar{A} \cup \bar{B}) - (\mathring{A} \cup \mathring{B}) = (\bar{A} - \mathring{A}) \cup (\bar{B} - \mathring{B}) = \partial A \cup \partial B.$$

Il suffit alors d'établir $\overbrace{A \cup B}^{\circ} \subset \mathring{A} \cup \mathring{B}$, sous l'hypothèse $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$. En effet, si $\overbrace{A \cup B}^{\circ} = \emptyset$ alors l'inclusion est vérifiée, sinon, soit $x \in \overbrace{A \cup B}^{\circ}$ alors il existe un ouvert $U \in \mathcal{V}(x)$ tel que $x \in U \subset A \cup B$, et on a par hypothèse, deux cas possibles :

- $x \in A$ alors par hypothèse $x \in \overline{B}^c$ qui est un ouvert donc $x \in U_1 = U \cap \overline{B}^c$ et

$$U \cap \overline{B}^c \subset (A \cup B) \cap \overline{B}^c \subset A \cap \overline{B}^c \subset A$$

donc U_1 ouvert inclus dans A donc dans $\overset{\circ}{A}$, donc $x \in \overset{\circ}{A}$.

- $x \in B$, alors le même raisonnement nous mène à $x \in \overset{\circ}{B}$.

D'où dans les deux cas $x \in \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ et par conséquent $\overset{\circ}{A \cup B} \subset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$.

4 - L'inclusion qui est toujours vérifiée est $\overset{\circ}{A \cup B} \supset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$. Montrons que $\overset{\circ}{A \cup B} \subset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ lorsque $\partial A \cap \partial B = \emptyset$. Par l'absurde, supposons qu'il existe $x \in \overset{\circ}{A \cup B}$ et $x \notin \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$, alors $x \notin \overset{\circ}{A}$ et $x \notin \overset{\circ}{B}$.

Soit $V \in \mathcal{V}(x)$, alors $U = V \cap \overset{\circ}{A \cup B}$ est un voisinage de x inclus dans $A \cup B$. Donc, U ne peut être inclus dans A car $x \notin \overset{\circ}{A}$, et U ne peut être inclus dans B car $x \notin \overset{\circ}{B}$. Comme $U \subset A \cup B$ alors on a nécessairement $U \cap A \neq \emptyset$ et $U \cap B \neq \emptyset$, d'où $V \cap A \neq \emptyset$ et $V \cap B \neq \emptyset$, et puisque $V \in \mathcal{V}(x)$ quelconque, alors $x \in \overline{A}$ et $x \in \overline{B}$. Or $x \notin \overset{\circ}{A}$ et $x \notin \overset{\circ}{B}$, alors $x \in \overline{A} - \overset{\circ}{A} = \partial A$ et $x \in \overline{B} - \overset{\circ}{B} = \partial B$ d'où $x \in \partial A \cap \partial B$, ce qui est absurde.

5 - $\overset{\circ}{A} \cap \partial A = \emptyset$ et $\overline{A} = \overset{\circ}{A} \cup \partial A$. (les deux sont évidentes d'après la définition de ∂A)

6 - $\partial A = \emptyset \iff A$ est fermé et ouvert à la fois. (découle directement de la question 5-, car $\overline{A} = \overset{\circ}{A}$ est aussi équivalente à A ouvert et fermé, puisque $\overline{A} \supset A \supset \overset{\circ}{A}$).

EXERCICE (5). On considère $Y = (0, 1)$ comme sous-espace de $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle. Déterminer l'adhérence, l'intérieur, l'extérieur, la frontière dans $\mathbb{R}$ (puis dans Y) de :

- $A = \{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}$, $\overline{A} = A$ (fermé), $\overline{A}^Y = \overline{A} \cap Y = A$, $\overset{\circ}{A} = \emptyset$ (fini), $\overset{\circ}{A}^Y = \overset{\circ}{A} \cap Y = \emptyset$, $Ext(A) = \overset{\circ}{A^c} = A^c$ (ouvert), $Ext_Y(A) = \overset{\circ}{A^c} \cap Y = A^c \cap Y = Y - A$, $\partial(A) = \overline{A} - \overset{\circ}{A} = A$, $\partial^Y(A) = \overline{A}^Y - \overset{\circ}{A}^Y = A$.

- $B = (0, \frac{1}{2}]$, $\overline{B} = [0, \frac{1}{2}]$, $\overline{B}^Y = \overline{B} \cap Y = (0, \frac{1}{2}]$, $\overset{\circ}{B} = (0, \frac{1}{2})$, $\overset{\circ}{B}^Y = \overset{\circ}{B} \cap Y = (0, \frac{1}{2})$, $Ext(B) = \overset{\circ}{B^c} = (-\infty, 0) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$ $Ext_Y(B) = \overset{\circ}{B^c} \cap Y = (\frac{1}{2}, 1)$, $\partial(B) = \overline{B} - \overset{\circ}{B} = \{0, \frac{1}{2}\}$, $\partial^Y(B) = \overline{B}^Y - \overset{\circ}{B}^Y = \{\frac{1}{2}\}$.

- $C = (0, \frac{1}{2}] \cup \{\frac{3}{4}\}$, $\overline{C} = [0, \frac{1}{2}] \cup \{\frac{3}{4}\}$, $\overline{C}^Y = \overline{C} \cap Y = C$, $\overset{\circ}{C} = (0, \frac{1}{2})$, $\overset{\circ}{C}^Y = \overset{\circ}{C} \cap Y = (0, \frac{1}{2})$,

$$Ext(C) = \overset{\circ}{C^c} = (-\infty, 0) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \cup (\frac{3}{4}, +\infty)$$

$Ext_Y(C) = \overset{\circ}{C^c} \cap Y = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \cup (\frac{3}{4}, 1)$, $\partial(C) = \overline{C} - \overset{\circ}{C} = \{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}$, $\partial^Y(C) = \overline{C}^Y - \overset{\circ}{C}^Y = \{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}$.

- $D = \{\frac{1}{n+1} | n \in \mathbb{N}^*\}$, $\overline{D} = D \cup \{0\}$, $\overline{D}^Y = \overline{D} \cap Y = D$, $\overset{\circ}{D} = \emptyset$ (dénombrable), $\overset{\circ}{D}^Y = \overset{\circ}{D} \cap Y = \emptyset$, $Ext(D) = \overset{\circ}{D^c} = \overline{D}^c$ $Ext_Y(D) = \overset{\circ}{D^c} \cap Y = \overline{D}^c \cap Y$, $\partial(D) = \overline{D} - \overset{\circ}{D} = \overline{D}$, $\partial^Y(D) = \overline{D}^Y - \overset{\circ}{D}^Y = D$.

EXERCICE (6 (déjà vu en cours)). On se place dans $\mathbb{R}$. Montrer que :

1 - Si $B = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{Z}_+\}$, alors $\overline{B} = B \cup \{0\}$.

2 - Dans $\{0\} \cup [1, 2]$, seul 0 est isolé.

3 - Dans $B \cup \{0\}$ seul 0 est non isolé (c'est un point d'accumulation).

4 - Dans un espace discret, tous les points sont isolés.

5 - $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Même question avec $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

EXERCICE (7). Soit X un espace topologique et D un sous ensemble dense dans X .

1 - Montrer qu'il est aussi équivalent de dire :

(i) - On a $\overset{\circ}{D^c} = \overline{D^c} = X^c = \emptyset$,

(ii) - Si $D \subset F$ et F fermé alors $X = \overline{D} \subset \overline{F} = F \subset X$, d'où $F = X$.

2 - $\implies$) A une partie de X qui rencontre toute partie dense dans X alors pour tout $D \subset X$ tel que $\overline{D} = X$, $A \cap D \neq \emptyset$, donc pour $D = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{A^c}$ (on peut montrer aisément que D est dense dans X), $\left(\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{A^c}\right) \cap A \neq \emptyset$, c.a.d, $\overset{\circ}{A} \cup \emptyset \neq \emptyset$, d'où $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$.

$\Leftarrow$) Réciproquement, si $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$ et D dense dans X , comme $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$ alors il existe $x \in \overset{\circ}{A} \subset X$ donc $\overset{\circ}{A}$ est un voisinage ouvert de $x \in X = \overline{D}$, d'où $\overset{\circ}{A} \cap D \neq \emptyset$.

3 - E et G deux ouverts denses dans X ; alors pour tout $x \in X$ et pour tout voisinage $V \in \mathcal{V}(x)$, $V \cap E \neq \emptyset$ et E ouvert donc il existe $y \in V \cap E \subset X$, tel que $V \cap E \in \mathcal{V}(y)$, et comme G est dense dans X donc $V \cap E \cap G \neq \emptyset$, d'où $E \cap G$ est dense dans X .

EXERCICE (8). 1 - Dans $\mathbb{R}$, le sous-espace $A = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ est séparé car $\mathbb{R}$ l'est aussi (voir question 3-)

2 - $X = \{a, b, c\}$ muni de la topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$, X n'est pas séparé car a et b ne peuvent pas être séparés par deux voisinages disjoints.

3 - Montrons qu'un sous-espace A d'un espace séparé X est séparé : En effet, si $x \neq y$ sont deux points de $A \subset X$ alors ils existent deux ouverts $U_x \in \mathcal{V}(x)$ et $U_y \in \mathcal{V}(y)$ tels que $U_x \cap U_y = \emptyset$. Alors, $V_x = U_x \cap A \in \mathcal{V}_A(x)$ (resp. $V_y = U_y \cap A \in \mathcal{V}_A(y)$) sont deux voisinages ouverts de x (resp. y dans A et $V_x \cap V_y = \emptyset$), d'où A est séparé.

4 - (a)- Montrons que le produit de deux espaces séparés est séparé. $X \times Y$ espace produit et (x_1, y_1) , (x_2, y_2) deux points distincts alors $x_1 \neq x_2$ ou $y_1 \neq y_2$. Supposons $x_1 \neq x_2$, comme X est séparé, il existent deux ouverts $U_1 \in \mathcal{V}_X(x_1)$ et $U_2 \in \mathcal{V}_X(x_2)$ tels que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Comme Y est ouvert alors c'est un voisinage de y_1 et y_2 et on a

$$W_1 = U_1 \times Y \in \mathcal{V}_{X \times Y}(x_1, y_1), \quad W_2 = U_2 \times Y \in \mathcal{V}_{X \times Y}(x_2, y_2),$$

et $W_1 \cap W_2 = \emptyset$, d'où $X \times Y$ est séparé.

-(b)- Montrons que le produit de deux espaces séparables est séparable. Soit P (resp. Q) une partie dénombrable et dense X (resp. Y). Alors $P \times Q$ est une partie dénombrable dans $X \times Y$ et on a d'après l'exercice (2) $\overline{P \times Q} = \overline{P} \times \overline{Q} = X \times Y$ d'où $P \times Q$ est dense dans $X \times Y$ et donc $X \times Y$ est séparable.

5 - $\implies$) X est séparé alors $X \times X$ est séparé, $\Delta^c = \{(x, y) \in X \times X / x \neq y\}$ donc pour tout $(x, y) \in \Delta^c$ ils existent deux ouverts $U_x \in \mathcal{V}_X(x)$ et $U_y \in \mathcal{V}_X(y)$ tels que $U_x \cap U_y = \emptyset$. Alors $U_x \times U_y \in \mathcal{V}_{X \times Y}(x, y)$ et $U_x \times U_y \subset \Delta^c$ donc Δ^c est ouvert dans $X \times Y$ et par conséquent Δ est fermé.

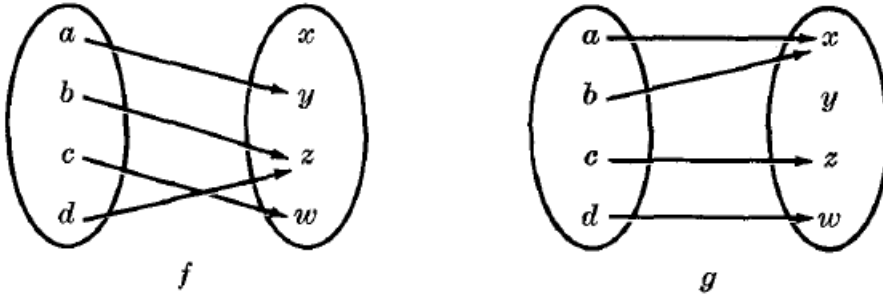
$\Leftarrow$) la réciproque est simple car si Δ est fermé alors Δ^c est ouvert et donc pour tout $(x, y) \in \Delta^c$ il existe un ouvert $W_{(x,y)} \in \mathcal{V}_{X \times Y}(x, y)$ tel que $W_{(x,y)} \subset \Delta^c$. Si $\mathcal{B}$ est une base de topologie de X alors ils existent dans $\mathcal{B}$ deux ouverts $U_x \in \mathcal{V}_X(x)$ et $U_y \in \mathcal{V}_X(y)$ tels que

$$U_x \times U_y \subset W_{(x,y)} \subset \Delta^c$$

et on conclut que $U_x \cap U_y = \emptyset$ car $U_x \times U_y \subset \Delta^c$, d'où X est séparé.

Travaux dirigés *Fiche 3* : Homéomorphismes et invariants topologiques

EXERCICE (1). On munit $X = \{a, b, c, d\}$ de la topologie $\mathcal{T}_X = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ et $Y = \{x, y, z, w\}$ de la topologie $\mathcal{T}_Y = \{Y, \emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}, \{y, z, w\}\}$. On considère les deux applications $f : X \rightarrow Y$ et $g : X \rightarrow Y$ définies par les diagrammes suivants.



- 1- Étudier la continuité de chacune des fonctions f et g au point a .
- 2- Étudier la continuité globale de ces deux fonctions.
- 3- f et g sont-elles des applications ouvertes ? fermée ? Justifier.
- 4- f et g sont-elles des homéomorphismes ?

EXERCICE (2). On considère les topologies usuelles de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^2$). Montrer que :

- 1- La projection canonique $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\pi(x, y) = x$, est continue.
- 2- La fonction $f(x) = |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- 3- L'indicatrice de $\mathbb{R}_+$ (définie par $\mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(x) = 1$ si $x > 0$ et 0 sinon) est continue partout sauf en 0.
- 4- La fonction $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ n'est pas séquentiellement continue en 0.

EXERCICE (3). X et Y deux espaces topologiques.

- 1- Montrer que si la topologie de X est discrète alors toute application $f : X \rightarrow Y$ est continue quelque soit la topologie sur Y .
- 2- Montrer que si $f : X \rightarrow Y$ est constante alors f est continue quelques soient les topologies sur X ou Y .
- 3- Montrer que la relation X « est homéomorphe à » Y est une relation d'équivalence. (On dit aussi X est topologiquement équivalent à Y).
- 4- Donner deux exemples triviaux d'invariants topologiques.

EXERCICE (4). $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux topologies sur X .

- 1- Montrer que l'identité $i : (X, \mathcal{T}_1) \rightarrow (X, \mathcal{T}_2)$ est continue **ssi** $\mathcal{T}_1$ est plus fine que $\mathcal{T}_2$.
- 2- Montrer que si $f : (X, \mathcal{T}_1) \rightarrow (X, \mathcal{T}_2)$ n'est pas continue alors pour toutes topologies $\mathcal{T}_1^*$ moins fine que $\mathcal{T}_1$, et $\mathcal{T}_2^*$ plus fine que $\mathcal{T}_2$, $f : (X, \mathcal{T}_1^*) \rightarrow (X, \mathcal{T}_2^*)$ n'est pas continue aussi.

On suppose maintenant $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux topologies sur X et Y respectivement :

- 3- Montrer que si A est un sous-espace topologique de X et $f|_A : A \rightarrow Y$ la restriction de $f : X \rightarrow Y$ alors f continue implique $f|_A$ est continue.

- 4- Montrer que $f : X \rightarrow Y$ est continue **ssi** pour toute partie $A \subset Y$, $f^{-1}(\overset{\circ}{A}) \subset \overbrace{f^{-1}(A)}^{\circ}$.

EXERCICE (5). X et Y deux espaces topologiques et E, F deux sous-espaces de X , avec $X = E \cup F$, et $f : E \rightarrow Y$, $g : F \rightarrow Y$ deux applications continues telles que $f = g$ sur $E \cap F$, et on pose

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in E \\ g(x) & \text{si } x \in F \end{cases}$$

- 1- Montrer que $h : X \rightarrow Y$ est une application.
- 2- Donner un exemple dans lequel h n'est pas continue.
- 3 - Montrer que si E et F sont ouverts alors h est continue.
- 4- Montrer que si E et F sont fermés alors h est continue.

EXERCICE (6). 1- Montrer que la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2$, n'est pas ouverte.

2- Montrer que la fonction $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est continue mais elle n'est ni ouverte ni fermée.

3- Montrer que dans $\mathbb{R}$, l'intervalle fermé $[a, b]$ est homéomorphe à l'intervalle fermé $[0, 1]$.

EXERCICE (7). Parmi les propriétés suivantes quelles sont celles qui sont des propriétés (ou invariants) topologiques et celles qui ne le sont pas, en justifiant chaque réponse.

(i)- point d'accumulation, (ii)- adhérence, (iii)- intérieur, (iv)- extérieur, (v)- borné, (vi)- frontière, (vii)- voisinage, (viii)- densité

EXERCICE (8). Un espace topologique X est dit **non connexe** s'il est union de deux ouverts non vides et disjoints, c.a.d, s'ils existent G et H ouverts non vides tels que $X = G \cup H$ et $G \cap H = \emptyset$. Dans le cas contraire, l'espace topologique X est dit **connexe**. Montrer que la propriété « **connexe** » est une propriété topologique. (il suffit de le montrer pour la propriété « **non connexe** »).

EXERCICE (9). Un espace topologique X est dit **compact** si de tout recouvrement ouvert de X , on peut extraire un sous-recouvrement fini, en d'autres termes, si $X \subset \bigcup_{i \in I} O_i$, les O_i ouverts, alors il existe $i_1, i_2, \dots, i_n$ des indices dans I , tels que $X \subset O_1 \cup O_2 \cup \dots \cup O_n$. Montrer que la propriété « **compact** » est une propriété topologique.

EXERCICE ((**Problème**)). $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique.

1- Montrer que si $\mathcal{T}$ est la topologie grossière, alors toute suite (x_n) de X converge vers tout élément $x \in X$.

2- Montrer que si $\mathcal{T}$ est la topologie discrète, alors une suite (x_n) de X converge vers un élément $x \in X$ ssi (x_n) est constante égale à x à partir d'un certain rang, c.a.d.,

$$(x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_{n_0}, x, x, x, \dots).$$

On suppose maintenant que $X = \mathbb{R}$ et $\mathcal{T}$ est la topologie co-dénombrable, c.a.d., les ouverts de $\mathbb{R}$ sont $\emptyset, \mathbb{R}$, ou les complémentaires des parties dénombrables de $\mathbb{R}$

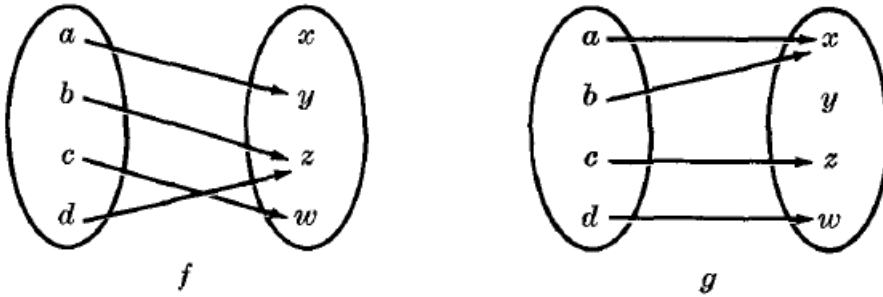
3- Montrer qu'une suite (x_n) de $\mathbb{R}$ converge pour $\mathcal{T}$ vers un élément $x \in \mathbb{R}$ ssi (x_n) est constante égale à x à partir d'un certain rang.

4- Montrer que toute fonction $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ est **séquentiellement continue** quelque soit l'espace topologique $(Y, \mathcal{T}')$.

5- On pose $Y = \mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle $\mathcal{U}$. Montrer que l'identité $i : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{U})$, $i(x) = x$, **n'est pas continue**. Conclure par rapport à la question (4-).

Correction Travaux dirigés *Fiche 3* : Homéomorphismes et invariants topologiques

EXERCICE (1). On munit $X = \{a, b, c, d\}$ de la topologie $\mathcal{T}_X = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ et $Y = \{x, y, z, w\}$ de la topologie $\mathcal{T}_Y = \{Y, \emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}, \{y, z, w\}\}$. On considère les deux applications $f : X \rightarrow Y$ et $g : X \rightarrow Y$ définies par les diagrammes suivants.



1- Pour f , $f(a) = y$ et les voisinages de y dans $\mathcal{T}_Y$ sont Y , $\{y\}$, $\{x, y\}$, $\{y, z, w\}$ et on a $f^{-1}(\{y\}) = \{a\}$ ouvert de $\mathcal{T}_X$, $f^{-1}(\{x, y\}) = \{a\}$ ouvert de $\mathcal{T}_X$, $f^{-1}(\{y, z, w\}) = \{a, b, c, d\} = X$ ouvert de $\mathcal{T}_X$ donc f est continue en a .

Pour g , $g(a) = x$ et les voisinages de x dans $\mathcal{T}_Y$ sont Y , $\{x\}$, $\{x, y\}$ et on a $g^{-1}(\{x\}) = \{a, b\}$ ouvert de $\mathcal{T}_X$, $g^{-1}(\{x, y\}) = \{a, b\}$ ouvert de $\mathcal{T}_X$ donc g est continue en a .

2- Voir le tableau ci-dessous :

V ouvert de Y	$f^{-1}(V)$	$g^{-1}(V)$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{x\}$	$\emptyset$	$\{a, b\}$
$\{y\}$	$\{a\}$	$\emptyset$
$\{x, y\}$	$\{a\}$	$\{a, b\}$
$\{y, z, w\}$	X	$\{c, d\}$
Y	X	X

et on conclut que f est globalement continue car pour tout ouvert V de Y , $f^{-1}(V)$ est ouvert de X , par contre g n'est pas globalement continue car

$$g^{-1}(\{y, z, w\}) = \{c, d\} \notin \mathcal{T}_X$$

n'est pas ouvert.

3- On a $\{b\}$ ouvert de X mais $f(\{b\}) = \{z\} \notin \mathcal{T}_Y$ donc f n'est pas ouverte, ensuite $\{d\} = \{a, b, c\}^c$ est fermé de X mais $f(\{d\}) = \{z\}$ n'est pas fermé var $\{z\}^c = \{x, y, w\} \notin \mathcal{T}_Y$ donc f n'est pas fermée.

Pour g , on a de même, $\{a, b, c\}$ ouvert de X mais $g(\{a, b, c\}) = \{x, z\} \notin \mathcal{T}_Y$ donc g n'est pas ouverte, et ensuite $\{d\}$ est fermé de X mais $g(\{d\}) = \{w\}$ n'est pas fermé var $\{w\}^c = \{x, y, z\} \notin \mathcal{T}_Y$ donc g n'est pas fermée.

4- **Non** car elles ne sont pas bijectives.

EXERCICE (2). On considère les topologies usuelles de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^2$).

1- $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\pi(x, y) = x$, la topologie $\mathbb{R}$ est engendrée par la base formée des intervalles (a, b) et on a $\pi^{-1}((a, b)) = (a, b) \times \mathbb{R}$ ouvert de $\mathbb{R}^2$ d'où π est continue.

2- $f(x) = |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$. Si (a, b) est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ alors on a

$$f^{-1}((a, b)) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } a < b \leq 0 \\ (-b, b) & \text{si } a < 0 < b \\ (-b, -a) \cup (a, b) & \text{si } 0 \leq a < b \end{cases}$$

d'où $f^{-1}((a, b))$ est ouvert dans tous les cas alors f est continue.

3- L'indicatrice de $\mathbb{R}_+$ (définie par $\mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(x) = 1$ si $x > 0$ et 0 sinon) est continue partout sauf en 0. On a $\mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}$ est constante 1 (donc continue) sur $F = (0, +\infty)$ ouvert et elle est constante 0 sur $E = (-\infty, 0)$ ouvert donc par le principe de recollement $\mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}$ est continue sur $E \cup G = \mathbb{R} - \{0\}$. En 0 on a $f(0) = 0$ et elle n'est pas continue car pour $\epsilon > 0$ assez petit ($\epsilon < 1$), on a $\mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}^{-1}((-\epsilon, \epsilon)) = (-\infty, 0]$ n'est pas ouvert.

4- La fonction $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ n'est pas séquentiellement continue en 0. On choisit la suite $x_n = \frac{2}{(2n+1)\pi} \rightarrow 0$ mais

$$f(x_n) = \sin \frac{(2n+1)\pi}{2} = 1$$

ne converge pas vers $f(0) = 0$.

EXERCICE (3). X et Y deux espaces topologiques.

1- Si X est discret et $f : X \rightarrow Y$ pour tout ouvert V de Y , $f^{-1}(V)$ est une partie de X donc ouverte donc f est continue.

2- Soit $f : X \rightarrow Y$ constante alors $f(x) = c \in Y$. Soit V un ouvert de Y , alors ou bien $c \in V$ et on a $f^{-1}(V) = X$ ouvert, ou bien $c \notin V$ et dans ce cas on a $f^{-1}(V) = \emptyset$ ouvert aussi et donc f est continue.

3- Triviale.

4- Les ouverts et les fermés.

EXERCICE (4). $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux topologies sur X .

1- L'identité $i : (X, \mathcal{T}_1) \rightarrow (X, \mathcal{T}_2)$ est continue ssi pour tout ouvert V de $\mathcal{T}_2$, $i^{-1}(V) = V$ est ouvert de $\mathcal{T}_1$, i.e., $\mathcal{T}_1$ est plus fine que $\mathcal{T}_2$.

2- $f : (X, \mathcal{T}_1) \rightarrow (X, \mathcal{T}_2)$ n'est pas continue alors il existe $V \in \mathcal{T}_2$, tel que $f^{-1}(V) \notin \mathcal{T}_1$, si $\mathcal{T}_2^*$ plus fine que $\mathcal{T}_2$ alors $V \in \mathcal{T}_2^*$, et si $\mathcal{T}_1^*$ moins fine que $\mathcal{T}_1$ alors $f^{-1}(V) \notin \mathcal{T}_1$ implique $f^{-1}(V) \notin \mathcal{T}_1^*$, d'où $f : (X, \mathcal{T}_1^*) \rightarrow (X, \mathcal{T}_2^*)$ n'est pas continue aussi.

On suppose maintenant $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux topologies sur X et Y respectivement :

3- Soit V ouvert de $\mathcal{T}_2$, alors

$$\begin{aligned} f_{|A}^{-1}(V) &= \{x \in A / f(x) \in V\} \\ &= A \cap f^{-1}(V) \end{aligned}$$

ouvert de $\mathcal{T}_{1A}$ car $f^{-1}(V)$ ouvert de $\mathcal{T}_1$ car f continue.

4- Soit $f : X \rightarrow Y$ continue et $A \subset Y$, alors $f^{-1}(\overset{\circ}{A})$ est ouvert de X car $\overset{\circ}{A}$ est ouvert de Y et on a $f^{-1}(\overset{\circ}{A}) \subset f^{-1}(A)$ car $\overset{\circ}{A} \subset A$ d'où $f^{-1}(\overset{\circ}{A}) \subset \overbrace{f^{-1}(A)}^{\circ}$ car $\overbrace{f^{-1}(A)}^{\circ}$ est le plus grand ouvert qui contient $f^{-1}(A)$.

Réciproquement, supposons que pour tout $A \subset Y$, $f^{-1}(\overset{\circ}{A}) \subset \overbrace{f^{-1}(A)}^{\circ}$, et soit V ouvert de Y alors

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(\overset{\circ}{V}) \subset \overbrace{f^{-1}(V)}^{\circ} \subset f^{-1}(V)$$

d'où $f^{-1}(V) = \overbrace{f^{-1}(V)}^{\circ}$ ouvert donc f est continue.

EXERCICE (5). X et Y deux espaces topologiques et E, F deux sous-espaces de X , avec $X = E \cup F$, et $f : E \rightarrow Y$, $g : F \rightarrow Y$ deux applications continues telles que $f = g$ sur $E \cap F$, et on pose

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in E \\ g(x) & \text{si } x \in F \end{cases}$$

1- $h : X \rightarrow Y$ est une application (évident car $f = g$ sur $E \cap F$)

2- **Exemple dans lequel h n'est pas continue** : On choisit $Y = \mathbb{R}$ et on munit X de la topologie

$$\mathcal{T}_X = \{\emptyset, X, E \cap F, (E \cap F)^c\}$$

ensuite on choisit f et g constantes par morceau comme suit :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in E \cap F \\ -1 & \text{si } x \in E - F \end{cases} \text{ et } g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in E \cap F \\ +1 & \text{si } x \in F - E \end{cases}$$

alors $\mathcal{T}_E = \{\emptyset, E, E - F, E \cap F\}$ et $\mathcal{T}_F = \{\emptyset, F, F - E, E \cap F\}$ et on a $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : F \rightarrow \mathbb{R}$ vérifient $f = g$ sur $E \cap F$, et elles sont continues grâce au principe de recollement car $f|_{E-F} \equiv -1$ constante (continue), $f|_{E \cap F} \equiv 0$ constante (continue), $E - F$ et $E \cap F$ sont ouverts de $\mathcal{T}_E$ donc f est continue sur $(E - F) \cup (E \cap F) = E$, et de même pour g . Cependant, si on pose

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in E \\ g(x) & \text{si } x \in F \end{cases}$$

alors

$$h^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\right) = g^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\right) = F - E$$

et $F - E$ n'est pas ouvert de $\mathcal{T}_X$ donc $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas continue. (On peut utiliser pour cet exemple un graphe sur $X = \mathbb{R}, E = (-\infty, 1)$ et $F = (0, +\infty)$)

3 - Montrer que si E et F sont ouverts alors h est continue. (suivre le même raisonnement que celui du cours « principe de recollement »)

4 - Montrer que si E et F sont fermés alors h est continue. (suivre le même raisonnement que celui du cours « principe de recollement »)

EXERCICE (6). 1- $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2$, n'est pas ouverte car $g((-1, 1)) = [0, 1)$ non ouvert.

2- $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est continue car composée de deux fonctions continues. Elle n'est pas fermée car $[\frac{2}{\pi}, +\infty)$ est fermé dans $(0, +\infty)$ mais $f([\frac{2}{\pi}, +\infty)) = (0, 1]$ n'est pas fermé. De même, elle n'est pas ouverte car $f((0, +\infty)) = [-1, 1]$ n'est pas ouvert.

3- Dans $\mathbb{R}$, l'intervalle fermé $[a, b]$ est homéomorphe à l'intervalle fermé $[0, 1]$, en effet il suffit de prendre l'application affine

$$\begin{aligned} f & : [0, 1] \rightarrow [a, b] \\ x & \mapsto f(x) = (b - a)x + a \end{aligned}$$

qui est un homéomorphisme (à vérifier).

EXERCICE (7). Parmi les propriétés suivantes quelles sont celles qui sont des propriétés (ou invariants) topologiques et celles qui ne le sont pas, en justifiant chaque réponse.

(i)- point d'accumulation de X , $x \in \overline{X - \{x\}}$ donc

$$f(x) \in f\left(\overline{X - \{x\}}\right) \underset{\text{car } f \text{ continue}}{\subset} \overline{f(X - \{x\})} \underset{\text{car } f \text{ bijective}}{=} \overline{Y - \{f(x)\}}$$

donc $f(x)$ point d'accumulation de Y .

Pour le reste, suivre la même démarche.

- (ii)- adhérence (si $x \in \overline{A}$ alors $f(x) \in \overline{f(A)}$ déjà vu)
- (iii)- intérieur (si $x \in \overset{\circ}{A}$ alors $f(x) \in \overset{\circ}{f(A)}$ déjà vu),
- (iv)- extérieur (oui),
- (v)- borné (non, déjà vu)
- (vi)- frontière (oui), (vii)- voisinage (oui), (viii)- densité (oui)

Travaux dirigés Fiche 4 : Espaces métriques - espaces complets

EXERCICE (1). Les applications suivantes définies sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sont-elles des distances sur $\mathbb{R}$?

$$d_1(x, y) = (x - y)^2, \quad d_2(x, y) = \sqrt{|x - y|}, \quad d_3(x, y) = |x - 2y|$$

EXERCICE (2). Soit d une métrique sur X , on définit d_1 et d_2 sur $X \times X$ par

$$d_1(x, y) = \inf(1, d(x, y)), \quad d_2(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

Montrer que d_1 et d_2 sont des distances sur X . d_1 et d_2 sont-elles équivalentes ?

EXERCICE (3). Dans $\mathbb{R}^2$, on pose $d(x, y) = 0$ si $x = y$ et $d(x, y) = |x| + |y|$ si $x \neq y$.

1 - Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}$.

2 - On munit alors $\mathbb{R}$ de cette distance.

a - Déterminer toutes les boules ouvertes et fermées $B(x, r)$, $\overline{B}(x, r)$.

b - Montrer que $\{0\}$ est fermé non ouvert et pour tout $x \neq 0$, $\{x\}$ est ouvert et fermé.

c - Montrer que toute boule ouverte est fermée.

d - Comparer $B(2, 3)$, $\overline{B}(2, 3)$, $\overline{B(2, 3)}$ et $\overbrace{\overline{B}(2, 3)}^{\circ}$.

f - Que peut-on dire d'une suite qui converge vers 1 dans $(\mathbb{R}, d)$.

EXERCICE (4). Montrer que $X = \mathcal{C}[0, 1]$, l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, peut être muni des distances suivantes

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx, \quad d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|.$$

et comparer les topologies induites.

EXERCICE (5). Soit d une métrique sur X , $A \subset X$ et $x \in X$. Montrer que :

1 - si $B(x, r)$ boule ouverte centrée en x et de rayon $r > 0$, alors pour tout $y \in B(x, r)$ il existe $\rho > 0$ telle que $B(y, \rho) \subset B(x, r)$.

2 - Si A est fini alors A est fermé.

3 - $x \in \overline{A}$ ssi $d(x, A) = 0$.

4 - si A est fermé $x \notin A$, alors il existe un ouvert G tel que $A \subset G$ et $x \notin G$.

5 - $x \in \overline{A}$ (resp. A') ssi il existe une suite d'éléments de A (resp. différents de x) qui converge vers x .

6 - x est une valeur d'adhérence d'une suite (x_n) ssi il existe une sous-suite de (x_n) qui converge vers x .

7 - A est fermé ssi il contient les limites de toutes ses suites convergentes.

8 - (X, d) est complet ssi l'intersection d'une suite décroissante (F_n) de fermés et bornés non vides de (X, d) dont les diamètres tendent tous vers 0 a une intersection non vide.

9 - l'application $x \mapsto d(x, A) \in \mathbb{R}$ est Lipschitzienne de rapport $k = 1$ sur X .

EXERCICE (6). On définit sur $X = (0, +\infty)$ la distance $\delta(x, y) = |\log x - \log y|$.

1 - Vérifier que δ est bien une distance et montrer que (X, δ) est complet alors que $(X, ||\cdot||)$ ne l'est pas.

2 - Soit $f : X \rightarrow X$ de classe C^1 , vérifiant pour tout $x \in X$, $|f'(x)| \leq kf(x)$ avec $k \in (0, 1)$ fixé. Montrer que f admet un unique point fixe dans X .

Correction Travaux dirigés Fiche 4 : Espaces métriques - espaces complets

EXERCICE (1). Les applications suivantes définies sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sont-elles des distances sur $\mathbb{R}$?

$$d_1(x, y) = (x - y)^2, \quad d_2(x, y) = \sqrt{|x - y|}, \quad d_3(x, y) = |x - 2y|$$

(d1) - $d_1(x, 0) + d_1(0, y) = x^2 + y^2$ n'est pas toujours supérieur ou égale à $d_1(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy$, il suffit de prendre $xy < 0$ donc d_1 ne vérifie pas l'inégalité triangulaire donc ce n'est pas une distance.

(d2) - vérifions juste l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} d_2(x, y) &= \sqrt{|x - z + z - y|} \leq \sqrt{|x - z| + |z - y|} \\ &\leq \sqrt{|x - z|} + \sqrt{|z - y|} = d_2(x, z) + d_2(z, y) \end{aligned}$$

car les autres axiomes sont vérifiés, donc oui d_2 est une distance. (on peut facilement vérifier que $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ pour tous a, b réels positifs)

(d3) - non car $d_3(2, 1) = 0$ et $2 \neq 1$.

EXERCICE (2). Soit d une métrique sur X , on définit d_1 et d_2 sur $X \times X$ par

$$d_1(x, y) = \inf(1, d(x, y)), \quad d_2(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

- d_1 et d_2 sont des distances sur X (facile à vérifier).

- d_1 et d_2 sont équivalentes s'ils existent deux constantes $c, c' > 0$ tels que $cd_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq c'd_2(x, y)$ pour tous $x, y \in X$. Une de ces deux inégalités est triviale $d_2(x, y) \leq d_1(x, y)$ avec $c = 1$. Pour l'autre inégalité montrons par exemple que $d_1(x, y) \leq 2d_2(x, y)$. En effet, si $d(x, y) \geq 1$ alors on peut facilement montrer que

$$d_1(x, y) = 1 \leq \frac{2d(x, y)}{1 + d(x, y)} = 2d_2(x, y),$$

d'autre part, si $0 \leq d(x, y) < 1$ alors on peut aussi vérifier que

$$d_1(x, y) = d(x, y) \leq \frac{2d(x, y)}{1 + d(x, y)} = 2d_2(x, y),$$

d'où, pour tout $x, y \in X$, on a

$$d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq 2d_2(x, y),$$

et on conclut que d_1 et d_2 sont équivalentes.

EXERCICE (3). Dans $\mathbb{R}^2$, on pose $d(x, y) = 0$ si $x = y$ et $d(x, y) = |x| + |y|$ si $x \neq y$.

1 - d est une distance sur $\mathbb{R}$. (facile à vérifier)

2 - On munit alors $\mathbb{R}$ de cette distance.

a - Les boules ouvertes

$$\begin{aligned} B(x, r) &= \{y \in \mathbb{R}, |x| + |y| < r\} \cup \{x\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}, |y| < r - |x|\} \cup \{x\} \\ &= \begin{cases} \{x\} & \text{si } r \leq |x| \\ (-r + |x|, r - |x|) \cup \{x\} & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

et les boules fermées

$$\begin{aligned}\overline{B}(x, r) &= \{y \in \mathbb{R}, |x| + |y| \leq r\} \cup \{x\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}, |y| \leq r - |x|\} \cup \{x\} \\ &= \begin{cases} \{x\} & \text{si } r < |x| \\ [-r + |x|, r - |x|] \cup \{x\} & \text{sinon} \end{cases}\end{aligned}$$

b - $\{0\}$ est fermé car $\{0\} = \overline{B}(0, 0)$, il est non ouvert car sinon il existerait une boule ouverte $B(0, r) \subset \{0\}$, or $B(0, r) = (-r, r)$ ce qui est absurde. Soit maintenant $x \neq 0$, alors $\{x\} = \overline{B}(x, 0) = B(x, 0)$ donc fermé et ouvert.

c - Soit $B(x, r)$ boule ouverte, alors si $r \leq |x|$, $B(x, r) = \{x\}$ fermé (voir b-). Supposons alors $r > |x|$ et soit $y \in \overline{B}(x, r)$ alors pour tout $\epsilon = \frac{1}{n} > 0$, il existe $z_n \in B(x, r)$ tel que $d(y, z_n) < \frac{1}{n}$, i.e. la suite $z_n \rightarrow y$, donc si $y \notin B(x, r)$ alors $y \neq 0$ d'une part, et $y \neq z_n$ donc

$$d(y, z_n) = |y| + |z_n| \rightarrow 0$$

d'où $y = 0$ (car $z_n \rightarrow y$), ce qui est impossible, donc $y \in B(x, r)$. On conclut que $\overline{B}(x, r) \subset B(x, r)$ donc fermé.

$$d - B(2, 3) = \overline{B(2, 3)} = (-1, 1) \cup \{2\},$$

$$\overline{B}(2, 3) = [-1, 1] \cup \{2\},$$

$\overline{\overline{B}(2, 3)} = \overline{B}(2, 3)$ car $\overline{B}(2, 3)$ est ouvert puisque $\overline{B}(2, 3) = B(2, 3) \cup \{1\} \cup \{-1\}$ et $\{1\}$ et $\{-1\}$ sont ouverts d'après question b-.

f - Une suite qui converge vers 1 dans $(\mathbb{R}, d)$ doit être stationnaire ($= 1$) à partir d'un certain rang car sinon $d(x_n, 1) = |x_n| + 1$ ne peut pas converger vers 0.

EXERCICE (4). $X = \mathcal{C}[0, 1]$, l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, peut être muni des distances suivantes

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx, \quad d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|.$$

En effet, il suffit de vérifier que d_1 et d_∞ sont bien des distances (à faire).

On a ensuite, pour tous $f, g \in \mathcal{C}[0, 1]$,

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \leq \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)| \int_0^1 dx = d_\infty(f, g)$$

donc toute boule ouverte $B_1(f, \epsilon)$ contient une boule ouverte $B_\infty(f, \epsilon)$. (on peut conclure jusque là que la topologie induite par d_1 est **moins fine** que celle induite par d_∞)

Ce pendant, l'autre inégalité n'est pas assurée car ils existent des suites de fonctions convergentes pour d_1 et non convergentes pour d_2 (topologie de la convergence uniforme). Considérons pour cela le rapport

$$\frac{d_\infty(f, 0)}{d_1(f, 0)} = \frac{\sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|}{\int_0^1 |f(x)| dx}$$

et montrons qu'il ne peut pas être borné uniformément par rapport à $f \in \mathcal{C}[0, 1]$. En effet, soit pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n(x) = \begin{cases} n(1 - nx) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } x > \frac{1}{n} \end{cases}$$

alors $\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)| = n$ et $\int_0^1 |f(x)| dx = \frac{1}{2}$ (faire un graphe) de telle sorte que

$$\frac{d_\infty(f, 0)}{d_1(f, 0)} = 2n$$

donc il n'existe pas une constante $c > 0$ telle que pour tous $f, g \in X = \mathcal{C}[0, 1]$

$$d_\infty(f, g) \leq c d_1(f, g)$$

et on conclut que d_1 et d_∞ ne sont pas équivalentes.

EXERCICE (5). Soit d une métrique sur X , $A \subset X$ et $x \in X$. Montrer que :

1 - si $B(x, r)$ boule ouverte centrée en x et de rayon $r > 0$, alors pour tout $y \in B(x, r)$ il existe $\rho > 0$ telle que $B(y, \rho) \subset B(x, r)$.

En effet, $\rho = r - d(x, y) > 0$ vérifie $B(y, \rho) \subset B(x, r)$, car si $d(z, y) < r - d(x, y)$ alors

$$d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < r$$

2 - A fini alors $A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$ et $\{x\}$ fermé dans un espace métrique (car séparé) donc A est fermé comme union finie de fermé. (On peut aussi répondre directement en disant que dans un espace métrique donc séparé toute partie finie est fermé).

3 - $x \in \overline{A} \iff \forall \epsilon > 0, \exists y \in A : d(x, y) < \epsilon$ ce qui est équivalent à $\forall \epsilon > 0 : \inf_{y \in A} d(x, y) < \epsilon$ ou encore $\inf_{y \in A} d(x, y) = 0$, i.e. $d(x, A) = 0$.

4 - si A est fermé alors $A = \overline{A}$ donc $x \notin A = \overline{A}$ alors $d(x, A) = \rho > 0$. On pose $G^c = \overline{B}(x, \frac{\rho}{2})$ fermé alors G ouvert, $A \subset G$ et $x \notin G$ (faire un graphe). En effet, si $y \in A$ alors $d(x, y) \geq \rho > \rho/2$ donc $y \notin G^c = \overline{B}(x, \frac{\rho}{2})$ alors $y \in G$.

5 - $x \in \overline{A}$ (resp. A') ssi il existe une suite d'éléments de A (resp. différents de x) qui converge vers x . En effet,

$$x \in \overline{A} \text{ (resp. } A') \iff \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A, \text{ (resp. } B(x, \frac{1}{n}) \cap (A - \{x\}))$$

6 - x est une valeur d'adhérence d'une suite (x_n) ssi il existe une sous-suite de (x_n) qui converge vers x . (déjà vu dans le cas des espaces topologiques où x admet une base dénombrable de voisinages ouverts, donc dans un espace métrique il suffit de choisir $(B(x, \frac{1}{n}))_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour cette base).

7 - A est fermé et $(x_n)_n$ suite de A telle que $x_n \rightarrow x \in X$ alors $x \in \overline{A} = A$. Réciproquement, supposons que A contienne les limites de toutes ces suites convergentes et que A n'est pas fermé alors il existe $x \in \overline{A}$ tel que $x \notin A$, d'où d'après question 5- il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x , ce qui est contradictoire l'hypothèse et $x \notin A$.

8 - Soit (X, d) espace complet et soit $(F_n)_{n \geq 1}$ une suite décroissante de fermés et bornés non vides de (X, d) tels que $d(F_n) \rightarrow 0$, alors pour tout n , soit $x_n \in F_n$, et on a

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq N : d(F_n) < \epsilon$$

donc

$$\forall p > q \geq N : x_p, x_q \in F_q \subset F_p \text{ et } d(x_p, x_q) \leq d(F_q) < \epsilon$$

d'où la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy dans X complet alors il existe $x \in X$ tel que $x_n \rightarrow x$, alors pour tout $k \geq 1$, la sous-suite $(x_n)_{n \geq k} \in F_k$ et $x_n \rightarrow x$ donc $x \in \overline{F_k} = F_k$, d'où $x \in \bigcap_{k \geq 1} F_k$.

Réciproquement, supposons la propriété des fermés vérifiée et soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy alors $(x_n)_n$ est bornée, soit alors $F_n = \overline{\{x_n, x_{n+1}, \dots\}}$ alors $(F_n)_n$ suite décroissante de fermés bornés non vides et on a

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0, \quad \exists n_0, \quad \forall p, q \geq n_0 : d(x_p, x_q) < \epsilon \\ \implies d(F_n) < \epsilon, \quad \forall n \geq n_0 \\ \implies d(F_n) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

soit alors $x \in \bigcap_n F_n \neq \emptyset$, donc

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq N : d(F_n) < \epsilon \\ \implies \forall n \geq N : d(x, x_n) \leq d(F_n) < \epsilon \\ \implies x_n \rightarrow x \end{aligned}$$

d'où X est complet.

9 - Soient $x, y \in X$

$$\begin{aligned} d(x, A) &= \inf_{z \in A} d(x, z) \\ &\leq \inf_{z \in A} (d(x, y) + d(y, z)) \\ &\leq d(x, y) + \inf_{z \in A} d(y, z) = d(x, y) + d(y, A) \end{aligned}$$

et de la même manière, en changeant les rôles de x et y on obtient l'autre $d(y, A) \leq d(x, y) + d(x, A)$, d'où

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$$

et l'application $x \mapsto d(x, A) \in \mathbb{R}$ est donc lipschitzienne de rapport $k = 1$.

EXERCICE (6). On définit sur $X = (0, +\infty)$ la distance $\delta(x, y) = |\log x - \log y|$.

1 - δ est une distance sur X (facile à vérifier).

Montrons que (X, δ) est complet. Soit $(x_n)_n$ suite de Cauchy dans X , alors

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq n_0 : |\log x_p - \log y_q| < \epsilon$$

alors $(\log x_n)_n$ est de Cauchy dans $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ complet donc elle converge vers $l \in \mathbb{R}$ d'où $x_n = e^{\log x_n} \rightarrow e^l \in (X, | \cdot |)$ c'est à dire $|x_n - e^l| \rightarrow 0$ ou encore $\delta(x_n, e^l) \rightarrow 0$ donc $x_n \rightarrow e^l$ alors (X, δ) est complet.

Cependant $(X, | \cdot |)$ n'est pas complet car X n'est pas fermé dans $(\mathbb{R}, | \cdot |)$, (ou encore parce que $x_n = \frac{1}{n}$ est de Cauchy mais ne converge pas dans $(X, | \cdot |)$).

2 - Soit $f : X \rightarrow X$ de classe C^1 , vérifiant pour tout $x \in X$, $|f'(x)| \leq kf(x)$ avec $k \in (0, 1)$ fixé, on a pour tout $t \in (0, +\infty)$,

$$\begin{aligned} t|f'(t)| &\leq kf(t) \\ \implies -\frac{k}{t} &\leq \frac{f'(t)}{f(t)} \leq \frac{k}{t}, \quad \text{car } f(x) > 0 \\ \implies -\int_y^x \frac{k}{t} dt &\leq \int_y^x \frac{f'(t)}{f(t)} dt \leq \int_y^x \frac{k}{t} dt, \quad \text{pour tous } x, y \in (0, +\infty) \\ \implies \delta(f(x), f(y)) &= k\delta(x, y) \end{aligned}$$

donc $f : (X, \delta) \rightarrow (X, \delta)$ k -lipschitzienne de rapport $k < 1$ et (X, δ) complet alors d'après le théorème du point fixe (voir cours dans le cas des espaces complets) f admet un unique point fixe dans X .

Correction Travaux dirigés *Fiche 5* : Espaces compacts

EXERCICE (1). En utilisant la définition (par les recouvrements) de la compacité :

(1) - $\mathbb{R} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} (x-1, x+1)$ n'a pas de sous-recouvrement ouvert fini, donc non compact

$[0, +\infty) = \bigcup_{x \geq 0} [x, x+1)$ n'a pas de sous-recouvrement ouvert fini, donc non compact

et $(0, 1) = \bigcup_{n \geq 1} (\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n})$ n'a pas de sous-recouvrement ouvert fini, , donc non compact.

(2) - Lesquels des ensembles suivants sont des parties compactes dans X ?

(i) - $A = \mathbb{Q}$ dans $X = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \subset \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} (x-1, x+1)$ n'a pas de sous-recouvrement ouvert fini, donc $\mathbb{Q}$ n'est une partie compacte de $\mathbb{R}$ (N.B : ici on utilise seulement le caractère non borné de $\mathbb{Q}$),

(ii) - $A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$ dans $X = \mathbb{R}$, $A \subset \bigcup_{n \geq 1} (\frac{1}{n}, \frac{3}{2})$ n'a pas de sous-recouvrement ouvert fini, , donc n'est une partie compacte de $\mathbb{R}$.

(iii) - $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ dans $X = \mathbb{R}$, $A \subset \bigcup_{n \geq 1} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2n}, \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2n} \right]^c$ n'a pas de sous-recouvrement ouvert fini, , donc n'est une partie compacte de $\mathbb{R}$, (N.B : maintenant on utilise le caractère non fermé de $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$),

(iv) - $X = \mathbb{R}$ muni de la topologie discrète alors tout singleton est ouvert,

$A = [a, b]$, $B = \mathbb{R}, C$ ensemble infini, sont tous non compacts (voir question suivante)

(3) - si X est discret alors toute partie finie est compacte, car si $A \subset X$ est une partie finie et $A \subset \bigcup_{i \in I} O_i$ alors pour tout $x \in A$, il existe $i_x \in I$ tel que $x \in O_{i_x}$ d'où

$$A \subset \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \underbrace{\bigcup_{x \in A} O_{i_x}}_{\text{finie}}$$

donc A compact.

Réciproquement, soit A compact dans X discret, alors $A \subset \bigcup_{x \in A} \{x\}$ est un recouvrement ouvert de A alors il existe B fini , $B \subset A$, tel que $A \subset \bigcup_{x \in B} \{x\} = B$, d'où $A = B$ fini.

EXERCICE (2). Soit X un espace compact, on sait que toute suite $(x_n)_n$ de X admet au moins une valeur d'adhérence $l \in X$, montrons que si l est unique alors $x_n \rightarrow l$.

Si (x_n) ne converge pas vers l alors il existe $U \in \mathcal{V}(l)$ tel que pour tout $k \geq 1$, il existe $x_{n_k} \notin U$, ainsi on peut extraire une sous-suite (x_{n_k}) avec pour tout k , $(x_{n_k}) \in U^c = F$ fermé dans X compact donc F est compact d'où (x_{n_k}) admet au moins une valeur d'adhérence $l' \in F$, alors l' est aussi valeur d'adhérence de (x_n) et $l' \neq l$ car $l' \in U^c$ ce qui est contradictoire avec l unique.

EXERCICE (3). Soit X un espace métrique, montrer que X est compact **ssi** toute suite de X admet une sous-suite convergente.

$\Rightarrow$) On sait que dans un compact, toute suite (x_n) admet au moins une valeur d'adhérence l et dans un espace métrique l admet une base dénombrable de voisinages donc (x_n) admet une sous-suite convergente vers l .

$\Leftarrow$) Soit X espace métrique (donc il est séparé) et supposons que toute suite admet une sous-suite convergente. Soit $X \subset \bigcup_{i \in I} O_i$ recouvrement ouvert de X .

Montrons d'abord qu'il existe $r > 0$, tel que toute boule ouverte $B(x, r)$ est contenue dans l'un des O_i (ce résultat est connu sous le nom de lemme de Lebesgue). En effet, supposons le contraire, c.a.d, pour tout $r > 0$, il existe $x_r \in X$, tel que $B(x_r, r)$ n'est pas incluse dans O_i pour tout $i \in I$.

$$\forall r = \frac{1}{n} > 0, \exists x_n \in X, B(x_n, \frac{1}{n}) \cap O_i^c \neq \emptyset \forall i \in I,$$

On extrait alors une sous-suite convergente (x_{n_k}) de (x_n) et soit l sa limite, alors il existe $i \in I$ tel que $l \in O_i$, soit alors $r > 0$ tel que $B(l, r) \subset O_i$, mais $x_{n_k} \rightarrow l$, soit n_k tel que $\frac{1}{n_k} < \frac{r}{2}$ et $d(l, x_{n_k}) < \frac{r}{2}$, alors pour tout $y \in B(x_{n_k}, \frac{1}{n_k})$,

$$d(l, y) \leq d(l, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, y) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

d'où

$$B(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}) \subset B(l, r) \subset O_i$$

ce qui est contradictoire avec l'hypothèse $B(x_n, \frac{1}{n}) \cap O_i^c \neq \emptyset \forall i \in I$.

Revenons à la preuve de compacité de X . Supposons que $X \subset \bigcup_{i \in I} O_i$ n'admet pas de sous-recouvrement fini, alors $X \subset \bigcup_{x \in X} B(x, r)$ n'a pas non plus de sous recouvrement fini, alors pour tout sous ensemble $A_n = \{y_1, \dots, y_n\}$ fini de X , il existe $x_n \in X$, tel que $x_n \notin \bigcup_{i=1}^n B(y_i, r)$, c.a.d, $d(x_n, y_i) > r$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. On construit ainsi une suite par récurrence en posant :

$A_{n+1} = A_n \cup \{x_n\}$ fini de X , il existe $x_{n+1} \in X$, tel que $d(x_{n+1}, y_i) > r$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et $d(x_{n+1}, x_n) > r > 0$, donc (x_n) est une suite qui n'admet pas de sous suite convergente car sinon on aura $0 < r \leq \lim d(x_{n_k+1}, x_{n_k}) = 0$ ce qui est absurde, donc X est compact.

EXERCICE (4). (Voir les grandes lignes de la preuve dans le cours)

EXERCICE (5). Soit (X, d) un espace métrique.

(1) - Soit K une partie compacte de X , on a

$$d(K) = \sup_{x, y \in K} d(x, y)$$

et l'application $d : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $K \times K$ compact alors elle atteint ses bornes, en particulier ils existent $a, b \in K$ tels que $d(a, b) = d(K)$.

(2) - Soient K, L deux parties compactes disjointes de X , montrons qu'il existe $\delta > 0$ tel que $d(x, y) \geq \delta$ pour tous $x \in K$ et $y \in L$. Supposons le contraire, alors on peut trouver deux suites (x_n) dans K et (y_n) dans L telles que $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Mais K et L sont des espaces métriques compacts alors on peut extraire deux sous-suites (x_{n_k}) dans K et (y_{n_k}) dans L telles que $x_{n_k} \rightarrow x \in K$ et $y_{n_k} \rightarrow y \in L$, on conclut alors en passant à la limite dans $d(x_{n_k}, y_{n_k}) < \frac{1}{n_k}$ que $d(x, y) = 0$ d'où $x = y$ ce qui est contradictoire avec $K \cap L = \emptyset$, d'où la preuve.

EXERCICE (6). Soit (X_i, d_i) , $i = 1, \dots, n$, des espaces métriques et on note $X = \prod_{i=1}^n X_i$ muni de la distance naturelle $d = \sqrt{\sum_i d_i^2}$ l'espace produit et $\pi_i : X \rightarrow X_i$ les projections canoniques pour $i = 1, \dots, n$.

(1) - Continuité de $\pi_i : (X, d) \rightarrow (X_i, d_i)$? On a, pour tous $x, y \in X$, avec $x_i = \pi_i(x)$ et $y_i = \pi_i(y)$,

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_i d_i^2(x_i, y_i)} \geq d_i(x_i, y_i)$$

Soit $\epsilon > 0$, il suffit de prendre $\eta = \epsilon > 0$ et on a pour tous $x, y \in X$,

$$d(x, y) < \eta \implies d_i(\pi_i(x), \pi_i(y)) < \epsilon,$$

donc les π_i sont continues pour les métriques spécifiées (remarquer qu'elles sont même lipschitziennes et aussi uniformément continues).

(2) - Montrons que $A \subset X$ est compact **ssi** A est fermé dans X et toutes ses projections $\pi_i(A)$ sont compactes dans X_i .

$\implies$) Si A est compact dans X alors A est fermé et puisque les π_i sont continues alors tous les $\pi_i(A)$ sont compactes dans X_i .

$\impliedby$) Soit A fermé tel que toutes ses projections $\pi_i(A)$ sont compactes dans X_i , alors $\prod_i \pi_i(A)$ est compact dans X et A est une partie fermée dans un compact car $A \subset \prod_i \pi_i(A)$ donc A est compacte.

EXERCICE (7). Soit f une application de X dans Y , espaces métriques et $G = \{(x, f(x)), x \in X\}$ le graphe de f .

Supposons f est continue. Alors G est fermé s'il contient les limites de toutes ses suites convergentes. En effet soit (u_n) suite convergente de G , alors il existe (x_n) suite de X telle que $u_n = (x_n, f(x_n))$, et comme les projections canoniques sont continues alors $x_n \rightarrow x \in X$ et $f(x_n) \rightarrow f(x) \in Y$ car f continue, d'où

$$u_n = (x_n, f(x_n)) \rightarrow (x, f(x)) \in G$$

donc G est fermé.

Réciproquement, si Y est compact et G est fermé, alors soit $x_n \rightarrow x \in X$ et montrons que $f(x_n) \rightarrow f(x)$ (pour déduire que f est séquentiellement continue donc continue car les espaces sont métriques). On a $(f(x_n))_n$ est une suite de Y espace métrique compact alors il existe une sous-suite (x_{n_k}) de (x_n) telle que $f(x_{n_k}) \rightarrow y \in Y$. Or, $x_n \rightarrow x \in X$ alors $x_{n_k} \rightarrow x \in X$ et donc

$$u_n = (x_{n_k}, f(x_{n_k})) \rightarrow (x, y)$$

et $(x, y) \in G$ car G fermé, d'où $y = f(x)$. Enfin, comme $y = f(x)$ est une valeur d'adhérence unique de la suite $(f(x_n))$ alors c'est toute la suite $(f(x_n))$ qui converge vers $f(x)$ d'où f est séquentiellement continue donc continue.

EXERCICE (8). Soit f une application continue de X dans X , espace métrique compact et vérifiant

$$\forall (x, y) \in X^2, x \neq y \implies d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

(1) - Le but est de montrer le résultat que f admet un unique point fixe $p \in X$:

(a) - Soient l et l' deux points fixes de f tels que $l \neq l'$, alors

$$d(f(l), f(l')) = d(l, l') < d(l, l'),$$

absurde, d'où f admet **au plus** un point fixe.

(b) - Montrons par récurrence que les ensembles $X_n = f^n(X)$, $n \in \mathbb{N}$, forment une suite décroissante de compacts de X . En effet, $X_0 = X$ est compact, et $X_1 = f(X) \subset X = X_0$, supposons X_n compact et $X_n \subset X_{n-1}$, alors $X_{n+1} = f(X_n)$ est compact car f est continue, et on a $f(X_n) \subset f(X_{n-1})$ c.a.d, $X_{n+1} \subset X_n$, d'où la récurrence.

Enfin, comme les X_n forment une suite décroissante de compacts donc fermés, non vides de X , alors d'après le théorème des fermés emboîtés dans un compact, $Y = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n \neq \emptyset$.

(c) - On a

$$f(Y) = f\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n\right) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f(X_n) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_{n+1} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n$$

car $X_0 = X$, d'où $f(Y) \subset Y$.

D'autre part, pour montrer $Y \subset f(Y)$ il suffit de montrer que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f(X_n) \subset f\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n\right),$$

en effet, si $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f(X_n)$ alors pour tout $n \geq 0$, il existe $x_n \in X_n$ tel que $y = f(x_n)$, c.a.d,

$$y = f(x_0) = f(x_1) = \cdots = f(x_n) = \cdots$$

donc pour tout $p \geq 0$, $(x_n)_{n \geq p}$ est une suite de X_p compact donc elle admet une sous-suite $(x_{\phi(n)})_{n \geq p}$ convergente vers $l_p \in X_p$, d'où comme f est continue alors $f(x_{\phi(n)}) \rightarrow f(l_p) = y$ donc $y \in f(X_p)$ pour tout $p \geq 0$, alors $y \in \bigcap_{p \in \mathbb{N}} f(X_p)$. On conclut alors que $Y = f(Y)$.

Supposons que $d(Y) = d(f(Y)) > 0$, Y est une intersection de compacts alors Y est compact,

$$d(Y) = d(f(Y)) = \sup_{y_1, y_2 \in f(Y)} d(y_1, y_2)$$

et comme l'application d est continue sur $f(Y) \times f(Y)$ compact alors le sup est atteint et il existe $a, b \in Y$ tel que $d(f(Y)) = d(f(a), f(b)) > 0$ et donc

$$d(Y) = d(f(Y)) = d(f(a), f(b)) < d(a, b) \leq d(Y)$$

ce qui donne une contradiction ($d(Y) < d(Y)$), alors on conclut que $d(Y) = 0$ ($= d(f(Y))$).

(d) - Comme $d(Y) = 0$ alors Y est un singleton, c.a.d, il existe $p \in X$ tel que $Y = \{p\}$, d'où $p = f(p)$ car $Y = f(Y)$, et d'après (a) le point fixe p est unique.

Soit $x_0 \in X$, montrons que la suite $x_n = f^n(x_0)$ converge vers p . Alors, comme (x_n) suite de X compact, on peut extraire une sous-suite (x_{n_k}) telle que $x_{n_k} \rightarrow l \in X$. Montrons que $l \in Y$. En effet, supposons le contraire, i.e., il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que $l \notin X_N$, d'où X_N^c est un voisinage ouvert de l , et comme l est valeur d'adhérence de la suite (x_n) alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $n' \geq n$ tel que $x_{n'} \in X_N^c$ ce qui est absurde car d'une part on a $x_n \in X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et d'autre part pour $n = N$ il existe $n' \geq n$ tel que $x_{n'} \in X_N^c \subset X_{n'}^c$ car la suite des ensembles ouverts $(X_n^c)_n$ est croissante. D'où, on conclut que $l \in Y = \{p\}$ alors $l = p$ et comme p est unique alors c'est toute la suite (x_n) qui converge vers $l = p$, et ceci indépendamment du choix de $x_0 \in X$.

(2) - Ce résultat est-il encore vrai si l'on suppose X seulement fermé? Non, parce-que la compacité est utilisée de manière essentielle dans la question (1-c) qui est la clé de l'existence du point fixe. En effet, soit par exemple une application

$$f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty), \quad f(x) = \sqrt{1 + x^2}$$

on a pour tout $x, y \in [0, +\infty)$, si $x \neq y$, d'après le T.A.F, il existe $c \in (x, y)$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f'(c)| |x - y| \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + c^2}} |x - y| < |x - y| \end{aligned}$$

$X = [0, +\infty)$ est fermé mais f n'a pas de point fixe.

Travaux dirigés *Fiche 6 : Espaces connexes*

EXERCICE (1). Soit $X = \{a, b, c, d, e\}$, muni de la topologie

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\},$$

montrer que X n'est pas connexe alors que $A = \{b, d, e\}$ est une partie connexe de X .

EXERCICE (2). Soit X un espace topologique et $A \subset X$.

1 - Montrer que A est connexe **ssi** pour tous ouverts U et V vérifiant $A \subset U \cup V$, et $A \cap U \cap V = \emptyset$, on a $A \subset U$ ou $A \subset V$.

2 - Montrer que si A est connexe alors $\overline{A}$ est connexe.

EXERCICE (3). On va démontrer à l'aide de la connexité les résultats suivants :

(1^{er} résultat) - « $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et injective $\implies f$ est strictement monotone »

Pour cela, considérer l'application $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x, y) = f(x) - f(y)$, et

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > y\},$$

montrer que $F(C)$ est connexe de $\mathbb{R}$ et déduire le résultat.

(2^e résultat) - « $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(a)f(b) < 0$ alors il existe $c \in (a, b)$ tel que $f(c) = 0$ »

EXERCICE (4). A et B deux parties de X . On suppose B connexe et que $B \cap A$ et $B \cap A^c$ sont non vides, montrer que B coupe la frontière de A .

EXERCICE (5). A une partie de X espace topologique connexe. On suppose $A \neq \emptyset$ et $A \neq X$, montrer que $\partial A \neq \emptyset$.

EXERCICE (6). On admet que si X est union disjointe de parties ouvertes non vides et connexes ω_i , alors les ω_i sont les composantes connexes de X . Trouver les composantes connexes du complémentaire des parties suivantes :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y^2 - x = 0\}; \quad \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 0 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$$

Quelles sont les composantes connexes d'un espace discret ?

EXERCICE (7). Dans $\mathbb{R}^2$, on considère l'ensemble $A = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) ; x > 0\}$.

1 - Montrer que A est une partie connexe et connexe par arc de $\mathbb{R}^2$.

2 - Déterminer $\overline{A}$ est justifier que $\overline{A}$ est connexe.

3 - Expliquer graphiquement pourquoi $\overline{A}$ n'est pas connexe par arc.

EXERCICE (8). Dans $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{C}$), donner des exemples de domaines connexes ou connexes par arc qui ne sont pas simplement connexes.

- Montrer que « simplement connexe » est une propriété topologique.

- Montrer qu'un espace X muni de la topologie grossière est à la fois connexe, connexe par arc et simplement connexe.

Correction Travaux dirigés *Fiche 6 : Espaces connexes*

EXERCICE (1). Soit $X = \{a, b, c, d, e\}$, muni de la topologie

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\},$$

- X n'est pas connexe car $X = \{a\} \cup \{b, c, d, e\}$ union de deux ouverts non vides et disjoints,

- $A = \{b, d, e\}$ est une partie connexe de X , car A n'est pas union de deux ouverts non vides et disjoints (voir les ouverts dans $\mathcal{T}$).

EXERCICE (2). Soit X un espace topologique et $A \subset X$.

1 - Montrons que A est connexe **ssi** pour tous ouverts U et V vérifiant $A \subset U \cup V$, et $A \cap U \cap V = \emptyset$, on a $A \subset U$ ou $A \subset V$.

Supposons A non connexe, alors il existe deux ouverts non vides **disjoints** U et V tels que $A \subset U \cup V$ avec $A \cap U \neq \emptyset$ et $A \cap V \neq \emptyset$ d'où A ne peut être inclus dans U entièrement ni dans V tout entier car $A \cap U \neq \emptyset$ et $A \cap V \neq \emptyset$.

Réciproquement, supposons qu'il existe deux ouverts U et V vérifiant $A \subset U \cup V$, et $A \cap U \cap V = \emptyset$, mais A ne peut être inclus dans U entièrement ni dans V tout entier, alors $G = A \cap U \neq \emptyset$ et $F = A \cap V \neq \emptyset$ sont deux ouverts non vides de A tels que $G \cap F = \emptyset$ et $A = G \cup F$, d'où le sous-espace A n'est pas connexe, ou encore la partie A n'est pas connexe dans X .

2 - Montrons que si A est connexe alors $\overline{A}$ est connexe.

Par la contraposée, supposons $\overline{A}$ non connexe, c'est à dire qu'il existe deux ouverts non vides et disjoints U et V vérifiant $\overline{A} \subset U \cup V$, et $\overline{A} \cap U \neq \emptyset$ et $\overline{A} \cap V \neq \emptyset$, donc par définition de l'adhérence $A \cap U \neq \emptyset$ et $A \cap V \neq \emptyset$, et on a $A \subset \overline{A} \subset U \cup V$ donc A est non connexe.

EXERCICE (3). On va démontrer à l'aide de la connexité les résultats suivants :

(1^{er} résultat) - « $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et injective $\implies f$ est strictement monotone »

Pour cela, considérer l'application $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x, y) = f(x) - f(y)$, et

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > y\},$$

montrer que $F(C)$ est connexe de $\mathbb{R}$ et déduire le résultat.

Soit R la rotation d'angle $\pi/4$, on peut voir que $C = R(C')$ avec $C' = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_-$ le demi-plan inférieur qui est connexe car produit de deux connexes $\mathbb{R}$ et l'intervalle $(-\infty, 0)$, comme R est une application continue alors C est un connexe de $\mathbb{R}^2$. Ensuite, comme f est continue alors F l'est aussi et donc $F(C)$ est un connexe de $\mathbb{R}$ d'où c'est un intervalle de $\mathbb{R}$. D'autre part, puisque f est injective, alors F ne peut s'annuler sur C donc $F(C)$ ne contient pas 0 et comme c'est un intervalle alors ou bien $F(C) \subset (0, +\infty)$ ou bien $F(C) \subset (-\infty, 0)$ ce qui veut dire que f est strictement monotone.

(2^e résultat) - « $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(a)f(b) < 0$ alors il existe $c \in (a, b)$ tel que $f(c) = 0$ »

Supposons $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ alors $[a, b]$ connexe et f continue implique $f([a, b])$ connexe de $\mathbb{R}$ donc intervalle de $\mathbb{R}$ qui contient $[f(a), f(b)] \ni 0$ donc il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$, et $c \neq a$ et aussi $c \neq b$ car $f(a)$ et $f(b)$ sont supposés non nuls.

EXERCICE (4). A et B deux parties de X . On suppose B connexe et que $B \cap A$ et $B \cap A^c$ sont non vides, montrons que B coupe la frontière de A .

Supposons que $B \cap \partial A = \emptyset = B \cap \overline{A} \cap \overline{A^c}$ alors $G = B \cap \overline{A}$ et $F = B \cap \overline{A^c}$ sont deux fermés de B disjoints et non vides car $B \cap A$ et $B \cap A^c$ sont non vides, et tels que $B = G \cup F$ ce qui contredit le fait que B est connexe.

EXERCICE (5). A une partie de X espace topologique connexe. On suppose $A \neq \emptyset$ et $A \neq X$, montrons que $\partial A \neq \emptyset$.

En fait, c'est l'exercice 4 avec $B = X$. En effet, X coupe la frontière de A veut dire $\partial A \neq \emptyset$.

EXERCICE (6). On admet que si X est union disjointe de parties ouvertes non vides et connexes ω_i , alors les ω_i sont les composantes connexes de X . Trouver les composantes connexes du complémentaire des parties suivantes : (faire un dessin pour chaque cas),

$$\begin{aligned} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y^2 - x = 0\}^c &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y^2 - x < 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y^2 - x > 0\} \\ \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 0 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}^c &= \{(0, 0, 0)\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 > 1\} \\ S^{1c} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}^c &= \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\} \cup \{z \in \mathbb{C}, |z| > 1\} \end{aligned}$$

Quelles sont les composantes connexes d'un espace discret ? Réponse : les singletons, $X = \bigcup_{x \in X} \{x\}$

EXERCICE (7). Dans $\mathbb{R}^2$, on considère l'ensemble $A = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) ; x > 0\}$.

1 - A est une partie connexe et connexe par arc de $\mathbb{R}^2$ car c'est l'image d'un intervalle $I = (0, +\infty)$ de $\mathbb{R}$ par l'application continue $x \mapsto (x, \sin(\frac{1}{x}))$ de I dans $\mathbb{R}^2$ et I est connexe et connexe par arc.

2 - Déterminer $\bar{A}$ est justifier que $\bar{A}$ est connexe.

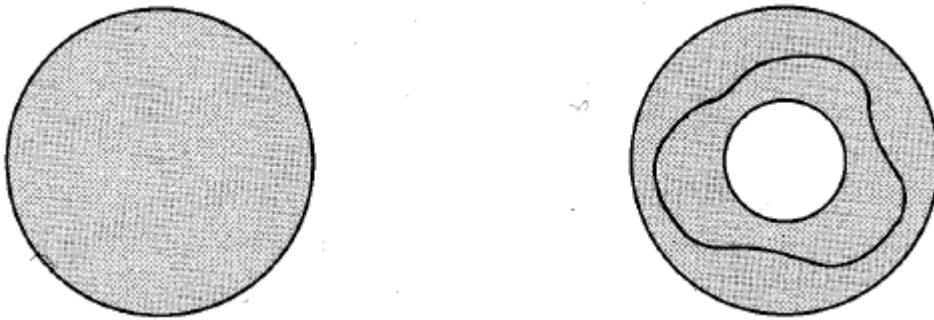
On peut montrer que $\bar{A} = A \cup B$ où $B = \{(0, y) ; |y| \leq 1\}$, et pour cela il suffit de montrer que tout point de B est un point d'accumulation de A , en effet, pour tout $y \in [-1, 1]$, on peut écrire $y = \sin \theta$, considérons alors la suite $u_n = (\frac{1}{\theta + 2n\pi}, y)$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in A$ et $u_n \rightarrow (0, y) \in B$.

$\bar{A}$ est connexe parce que A est connexe comme image d'un connexe par une application continue, en effet $A = f((0, +\infty))$, avec $f(x) = (x, \sin(\frac{1}{x}))$.

3 - Expliquer graphiquement pourquoi $\bar{A}$ n'est pas connexe par arc.

EXERCICE (8). Dans $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{C}$), donner des exemples de domaines connexes ou connexes par arc qui ne sont pas simplement connexes.

Les boules (ouvertes ou fermées) de $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{C}$), sont connexes, connexes par arc et simplement connexes.



Par contre, les couronnes dans $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{C}$), pour $r > 0$,

$$C_{x,r,R} = \{y \in \mathbb{R}^2 / r \leq \|y - x\| \leq R\}, \quad C_{z_0,r,R} = \{z \in \mathbb{C} / r \leq \|z - z_0\| \leq R\},$$

sont connexes et connexes par arc mais ne sont pas simplement connexes.

- Montrons que « simplement connexe » est une propriété topologique.

Soit X espace simplement connexe homéomorphe à Y et soit $\psi : [0, 1] \rightarrow Y$ un chemin quelconque fermé en $y \in Y$, alors si $F : X \rightarrow Y$ est l'homéomorphisme entre X et Y alors $x = F^{-1}(y) \in X$ et le chemin $\phi = F^{-1} \circ \psi : [0, 1] \rightarrow X$ est un chemin fermé en $x \in X$, comme X est simplement connexe alors ϕ est retractible en un point, c.a.d, homotope au chemin constant $\phi \simeq e_x$, alors on peut montrer

que $\psi = F \circ \phi$ est homotope à $F \circ e_x = e_y$ chemin constant en $y \in Y$. En effet, soit $H : [0, 1]^2 \rightarrow X$ l'homotopie $\phi \simeq e_x$, vérifiant, pour tout $(s, t) \in [0, 1]^2$,

$$\begin{cases} H(s, 0) = \phi(s), & H(0, t) = x \\ H(s, 1) = e_x(s) = x, & H(1, t) = x \end{cases}$$

alors $G = F \circ H : [0, 1]^2 \rightarrow Y$ est continue et vérifie pour tout $(s, t) \in [0, 1]^2$,

$$\begin{cases} G(s, 0) = F \circ \phi(s) = \psi(s), & G(0, t) = y \\ G(s, 1) = F(x) = y = e_y(s), & G(1, t) = y \end{cases}$$

donc G est une homotopie dans Y entre ψ le chemin fermé en y et e_y le chemin constant en y , on conclut alors que tout chemin fermé en $y \in Y$ est contractible donc Y est simplement connexe. Par conséquent « simplement connexe » est une propriété topologique car elle est conservée par homéomorphisme.

- Montrons qu'un espace X muni de la topologie grossière est à la fois connexe, connexe par arc et simplement connexe.

Si X est grossier alors les seuls ouverts de X sont $\emptyset$ et X donc il est impossible d'avoir $X = U \cup V$ union d'ouverts **disjoints non vides**, d'où X doit être connexe. Soient $a, b \in X$ et considérons le chemin $f : [0, 1] \rightarrow X$ tel que $f(s) = a$ pour tout $s \in [0, 1)$ et $f(1) = b$ alors f est continu (car X est grossier) donc a et b peuvent être reliés par un chemin continu dans X , alors X est connexe par arc.

Le même raisonnement s'applique pour simplement connexe, en effet soit $f : [0, 1] \rightarrow X$ un chemin quelconque fermé en $x \in X$ et considérons l'application $H : [0, 1]^2 \rightarrow X$ vérifiant, pour tout $(s, t) \in [0, 1]^2$,

$$\begin{cases} H(s, 0) = f(s), & H(0, t) = x \\ H(s, 1) = e_x(s) = x, & H(1, t) = x \end{cases}$$

alors de même H est continue car X est grossier donc H est une homotopie et $f \simeq e_x$ d'où X est simplement connexe.

Travaux dirigés *Fiche 7* : Espaces vectoriels normés

EXERCICE (1). $N : (x, y) \mapsto |5x + 3y|$ est-elle une norme de $\mathbb{R}^2$? On considère les trois normes définies sur $\mathbb{R}^2$ par : $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \|x\|_1 = |x_1| + |x_2|, \|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2}, \|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|)$. Représenter graphiquement les boules unités de chacune d'entre elles. Peut-on comparer ces trois normes ? Ecrire les définitions des distances d_1, d_2 et d_∞ associées à chacune d'entre elles.

EXERCICE (2). Soit E l'espace vectoriel des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, définies et continues sur $[-1, 1]$.

1. Montrer que les trois applications suivantes sont des normes sur E :

$$f \mapsto \|f\|_1 = \int_{-1}^1 |f(x)| dx, \quad f \mapsto \|f\|_2 = \left(\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{x \in [-1, 1]} |f(x)|,$$

2. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ suivante :

$$f_n = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [-1, -\frac{1}{n}] \\ nx & \text{si } x \in (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \\ 1 & \text{si } x \in (\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

La suite (f_n) est-elle de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_1)$? $(E, \|\cdot\|_2)$? $(E, \|\cdot\|_\infty)$? Conclure pour quelle norme E est-il un espace de Banach ?

EXERCICE (3). Soit E l'espace vectoriel des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, définies, continues et dérivables sur $[0, 1]$ et vérifiant $f(0) = 0$. On définit sur cet espace les deux normes suivantes : $N_1(f) = \|f\|_\infty$ et $N_2(f) = \|f'\|_\infty$.

1. Montrer que $N_1(f) \leq N_2(f)$. En déduire que l'application identique de (E, N_2) vers (E, N_1) est continue.

2. A l'aide de la suite de fonctions $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$, montrer que l'application identique de (E, N_1) vers (E, N_2) n'est pas continue.

EXERCICE (4). Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux e.v.n (s). Soit L une application linéaire de E dans F .

1. Montrer que L est continue en 0 si et seulement si elle est continue en tout point de E .

2. On suppose qu'il existe une constante $K > 0$ telle que : $\|L(x)\|_F \leq K\|x\|_E, \forall x \in E$. Montrer que L est continue.

3. Dans la suite, on suppose que L est continue et on pose $\|L\| = \sup_{\|x\|_E=1} \|L(x)\|_F$.

(a) Supposons que $\|L\| = +\infty$. Montrer qu'alors il existe une suite (x_n) dans E telle que $\|x_n\|_E = 1$ pour tout n et telle que $\|L(x_n)\|_F$ tend vers $+\infty$. En déduire qu'il existe une suite y_n tendant vers 0 et telle que $\|L(y_n)\|_E = 1$.

(b) En déduire que $\|L\| \in \mathbb{R}_+$ et que pour tout $x \in E$ on a $\|L(x)\|_F \leq \|L\| \cdot \|x\|_E$.

EXERCICE (5). Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $x \in E$ et A un compact de E . Montrer que la distance de x à A est atteinte, c'est-à-dire qu'il existe $a \in A$ tel que $\inf_{y \in A} \|y - x\| = \|a - x\|$.

EXERCICE (6). Les e.v.n de dimension finie sont des espaces de Banach. Déduire que le dual $V^* = \mathcal{L}(V, \mathbb{K})$ d'un espace normé (quelconque) est un espace de Banach.

Bibliographie

- [1] M.A. ARMSTRONG. *Basic Topology*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1997. ISBN : 9780387908397.
- [2] G. CHOQUET. *Cours de topologie : espaces topologiques et espaces métriques, fonctions numériques, espaces vectoriels topologiques*. Les cours de référence. Dunod, 2000. ISBN : 9782100052585.
- [3] R.M. D. SONDAZ et É. CÉPADUÈS. *Espaces Topologiques, Métriques, Normés : Introduction À La Topologie*. Bien Maîtriser les Mathématiques. Cépaduès-éditions, 2008. ISBN : 9782854288667.
- [4] J. DIXMIER. *Topologie générale*. Mathématiques (Presses Universitaires de France). Presses Universitaires de France, 1981. ISBN : 9782130366478.
- [5] S. LIPSCHUTZ. *Schaums Outline of General Topology*. McGraw-Hill Education, 2011. ISBN : 9780071763479.
- [6] M.H. MORTAD. *Introductory Topology : Exercises And Solutions (Second Edition)*. World Scientific Publishing Company, 2016. ISBN : 9789813146952.
- [7] J.R. MUNKRES. *Topology*. Featured Titles for Topology. Prentice Hall, Incorporated, 2000. ISBN : 9780131816299.
- [8] H. QUEFFÉLEC. *Topologie : cours et exercices corrigés*. Sciences sup. Dunod, 2020. ISBN : 9782100811786.
- [9] J.P. RAMIS et al. *Mathématiques : tout-en-un pour la licence 2*. Mathématiques : tout-en-un pour la licence. Dunod, 2014. ISBN : 9782100710218.
- [10] W. RUDIN et G. AULIAC. *Principes d'analyse mathématique : cours et exercices*. Sciences sup. Dunod, 2021. ISBN : 9782100826995.
- [11] T.B. SINGH. *Introduction to Topology*. Springer Singapore, 2019. ISBN : 9789811369544.
- [12] L.A. STEEN et J.A. SEEBACH. *Counterexamples in Topology*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2013. ISBN : 9780486319292.
- [13] L.A. STEEN et J.A. SEEBACH. *COUNTEREXAMPLES IN TOPOLOGY. VON LYNN ARTHUR STEEN UND J. ARTHUR SEEBACH*. HOLT, RINEHART UND WINSTON, 1970.
- [14] L. TODJIHOUNDE et É. CÉPADUÈS. *Topologie Élémentaire, 2E Édition*. Cépaduès éditions, 2013. ISBN : 9782364930483.
- [15] S. WILLARD. *General Topology*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2012. ISBN : 9780486131788.