People's Democratic Republic of Algeria
Ministry of Higher Education and Scientific Research
University of Science and Technology of Oran - Mohamed BOUDIAF
Faculty of Electrical Engineering
Vice-Dean, Postgraduate, Scientific Research and External Relations
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا محمد بوضياف
كلية الهندسة الكهربائية
نيابة عمادة الكلية لما بعد التدرج والبحث العلمي والعلاقات الخارجية

Département d'Electronique

Polycopié Pédagogique

TITRE

Théorie du Signal

Cours et Travaux –Dirigés destiné aux étudiants de :

Licence : Deuxième année licence, toutes filières confondues (Electronique, Télécommunication et Génie Biomédicale)

Auteurs : DJELLOUL MAZOUZ Lakhdar & AIT DARNA Abdelwaheb

Année Universitaire : 2024/2025

Table des matières

Introduction générale

Dans ce polycopié nous présentons un support de cours et des travaux dirigés sur la théorie du signal pour les étudiants de la deuxième année licence des trois filières (Electronique, Télécommunications et Bénie Biomédicale). La théorie du signal est un ensemble de théories mathématiques fondamentales qui sert à étudier les signaux de différents types, cette matière reste fondamentale dans la formation dans les trois domaines cités au-dessus.

Le polycopié est structuré selon le plan suivant :

Introduction générale

Partie I : Cours :

- **Chapitre 1 :** Ce chapitre est réservé à des généralités sur les signaux, il représente la base de cette matière.
- **Chapitre 2 :** Ce chapitre donne une étude détaillée sur les systèmes linéaires et invariants dans le temps (SLIT) et le produit de convolution.
- **Chapitre 3 :** Dans ce chapitre, on présente l'analyse de Fourier sur les signaux périodiques par la série de Fourier et les signaux apériodiques à énergie finie par la transformée de Fourier.
- **Chapitre 4 :** Dans ce chapitre on donne une étude bien détaillée sur la transformée de Laplace qui représente une généralisation de la Transformée de Fourier pour les signaux apériodiques à énergie infinie.
- **Chapitre 5 :** Ce chapitre est réservé pour une étude théorique détaillée sur la corrélation des signaux.
- **Conclusion générale.**

Partie II : Cette partie est réservée pour les travaux dirigés sur les différents chapitres faits au cours.

Partie I : Cours

Chapitre I : Généralités sur les signaux

I.1 Définition

-Un signal est une représentation physique de l'information, c'est l'entité physique de l'information.

-La théorie du signal est un ensemble de bases théoriques fondamentales et des techniques mathématiques particulières pour traiter et étudier les signaux.

I.2 Classification des signaux

Un signal peut être classifier selon plusieurs classes :

I.2.1 Classe morphologique

Dans cette classe le signal est classifié selon sa forme : Analogique, Echantillonné, quantifié ou numérique.

I.2.2 Classe phénoménologique

Dans cette classe, on peut constater deux cas différents : Signal déterministe et signal aléatoire.

- Un signal déterministe est un signal dont l'évolution en fonction du temps peut être parfaitement prédite par un modèle mathématique.
- Un signal aléatoire est un signal dont le comportement en fonction du temps est imprévisible.

I.2.3 Classe énergétique

Dans cette classe, le signal peut être à énergie finie, ou à puissance moyenne finie, ou ni à énergie finie ni à puissance moyenne finie.

I.2.4 Signaux pairs, signaux impairs et signaux ni pairs ni impairs

Le signal dans cette classe est classifié selon s'il est pair ou impair ou ni pair ni impair.

$$x(t)\ est\ un\ signal\ pair\ \Rightarrow\ x(t) = x(-t)$$

$$x(t)\ est\ un\ signal\ impair\ \Rightarrow\ x(t) = -x(-t)$$

I.2.5 Signaux périodiques et signaux apériodiques

Dans cette classe le signal est classifié selon s'il est périodique ou apériodique.

I.2.6 Signal causal, anti-causal et non causal

- Un signal est dit causal s'il est nul pour toute valeur négative du temps, et on écrit : $x(t) = 0 \quad si\; t < 0$
- Un signal est dit anti-causal s'il est nul pour toute valeur positive du temps, et on écrit : $x(t) = 0 \quad si\; t > 0$
- Un signal est dit non causal s'il est non nul dans la partie négative et la partie positive du temps.

I.2.7 Signal borné en amplitude

Un signal est dit borné en amplitude si : $|x(t)| \leq A\; \forall\, t\; \in\;]-\infty, +\infty[$.

I.2.8 Signal de durée finie

Un signal est dit à durée finie si : $x(t) = \begin{cases} \neq 0 & si\; t\; \in\; [a, b] \\ 0 & ailleurs \end{cases}$

I.2.9 Signal périodique

Un signal est dit périodique de période T si : $x_T(t) = x_T(t \pm kT)$, d'où k est un entier. On tient à noter que la somme de plusieurs signaux périodiques donne un signal périodique de période dite fondamentale qui est égale au plus petit multiple commun des différentes périodes des signaux périodiques qui le construise.

I.3 Signaux usuels

Dans cette partie, on va présenter quelques formes de signaux souvent utilisées dans le domaine de la théorie ou de traitement du signal.

I.3.1 Signal Rectangulaire : $(Rect)$

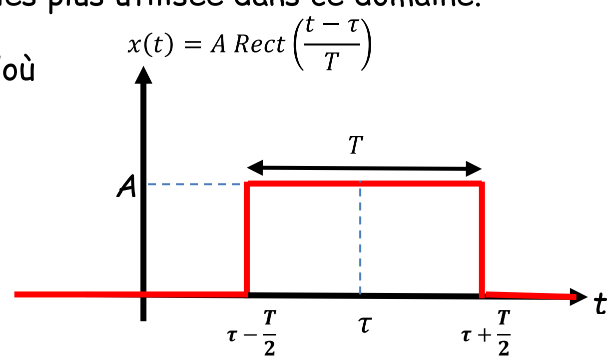
La forme rectangulaire est l'une des formes les plus utilisée dans ce domaine.

La forme générale est : $x(t) = A\, Rect\left(\frac{t-\tau}{T}\right)$, d'où

A : représente l'amplitude du signal.

τ : représente le centre du signal

T : représente la largeur du signal



I.3.2 Signal Triangulaire : (*Tri*)

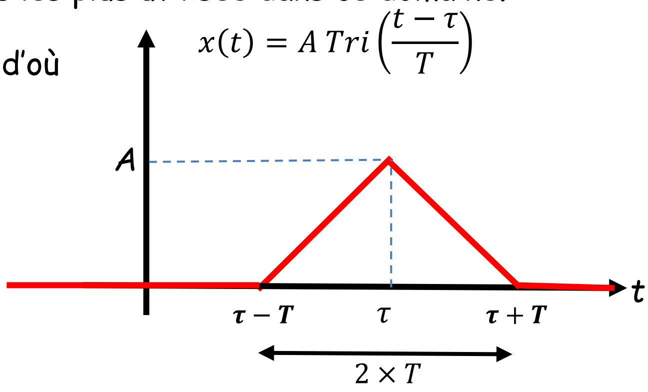
La forme Triangulaire est l'une des formes les plus utilisée dans ce domaine.

La forme générale est : $x(t) = A\,Tri\left(\frac{t-\tau}{T}\right)$, d'où

A : représente l'amplitude du signal.

τ : représente le centre du signal

T : représente-la demi largeur du signal

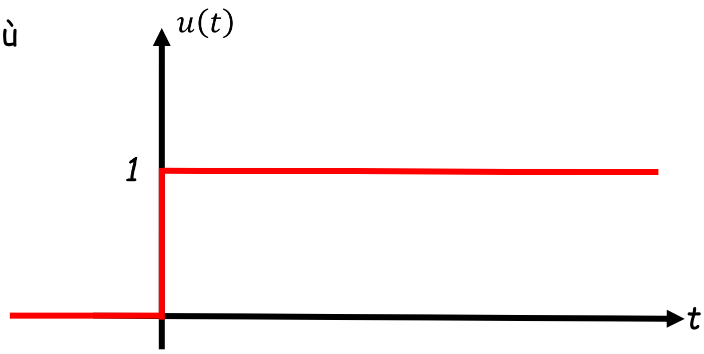


I.3.3 Signal Echelon unité : $u(t)$

Le signal Echelon unité est l'une des formes les plus utilisée dans ce domaine.

La forme générale est : $x(t) = u(t)$, d'où

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

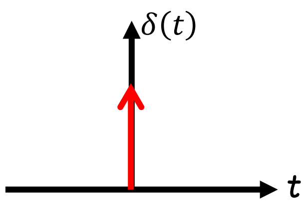


I.3.4 Impulsion de Dirac : $\delta(t)$

L'impulsion de Dirac est l'une des formes les plus utilisée dans ce domaine.

La forme générale est : $x(t) = \delta(t)$, d'où

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

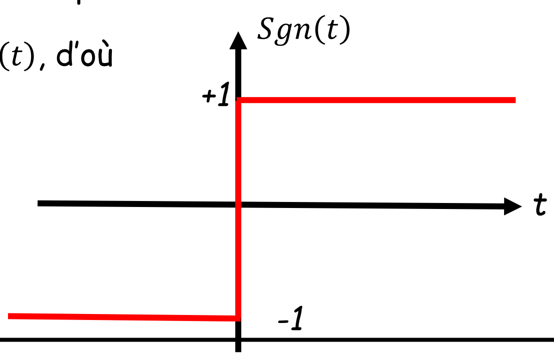


I.3.5 Signal Signe : $Sgn(t)$

La forme signe est l'une des formes les plus utilisée dans ce domaine.

La forme générale est : $x(t) = Sgn(t)$, d'où

$$Sgn(t) = \begin{cases} +1 & t \geq 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$



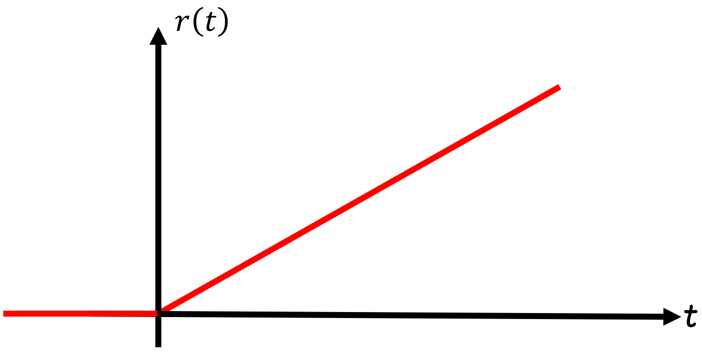
I.3.6 Signal Rampe : $r(t)$

La forme Rampe est l'une des formes les plus utilisée dans ce domaine.

La forme générale est : $x(t) = r(t)$,

d'où

$$r(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



I.4 Opération sur les signaux

On peut distinguer trois opérations en fonction du temps à effectuer sur les signaux :

I.4.1 Le décalage temporel

L'opération du décalage temporel consiste à glisser le signal dans le temps, soit vers la gauche (Avance) soit vers la droite (Retard).

La forme générale du décalage temporel est : $x(t - t_0)$

a. ***Décalage à gauche (Retard) :*** $t_0 > 0$
b. ***Décalage à droite (Avance) :*** $t_0 < 0$

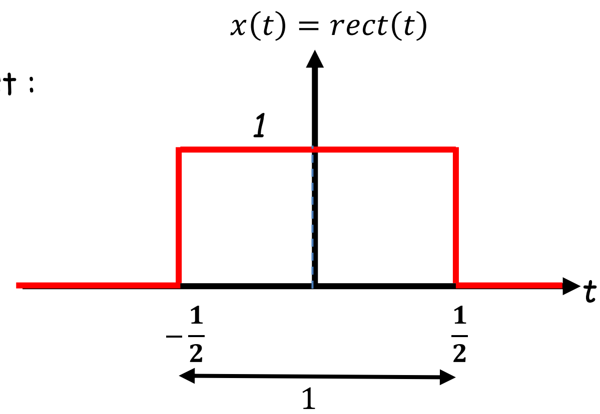
Exemple :

Soit le signal suivant : $x(t) = rect(t)$

- Donner l'expression analytique des signaux suivants et représenter les graphiquement : $x(t+3)$, et $\mathrm{x(t-2)}$

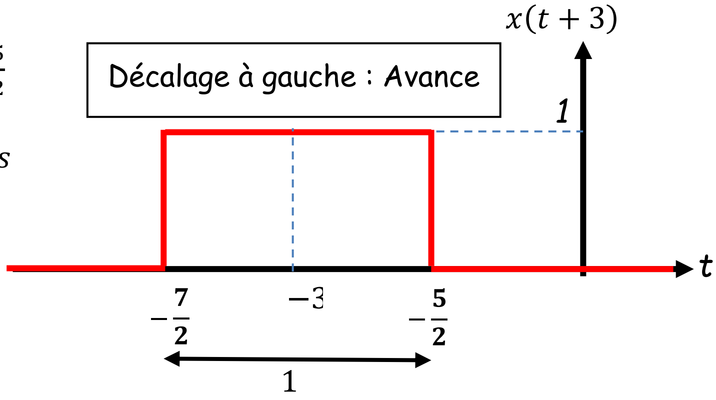
L'expression analytique du signal $x(t)$ est :

$$x(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$



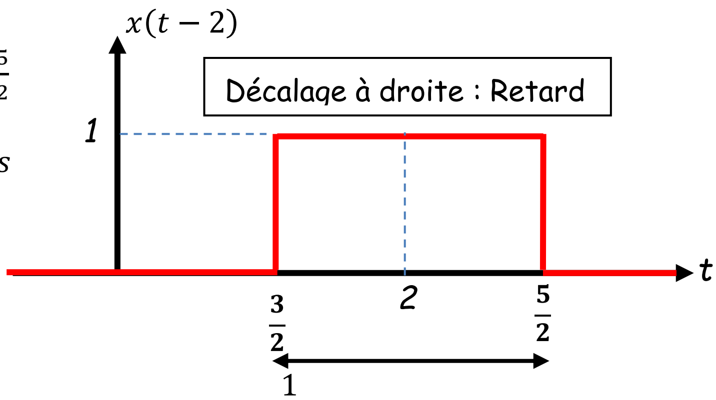
- $x(t+3) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \leq t+3 \leq \frac{1}{2} \\ 0 & ailleurs \end{cases} = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} - 3 \leq t \leq \frac{1}{2} - 3 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$

$$x(t+3) = \begin{cases} 1 & -\frac{7}{2} \leq t \leq -\frac{5}{2} \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$



- $x(t-2) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \leq t-2 \leq \frac{1}{2} \\ 0 & ailleurs \end{cases} = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} + 2 \leq t \leq \frac{1}{2} + 2 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$

$$x(t+3) = \begin{cases} 1 & \frac{3}{2} \leq t \leq \frac{5}{2} \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$



I.4.2 Le changement d'échelle

L'opération du changement d'échelle consiste à faire une compression ou une expansion sur le signal.

a. *La compression*

Cette opération consiste à compresser le signal par un facteur k de nature entière, et on écrit : $x(kt)$

b. *L'expansion*

Cette opération consiste à dilater le signal par un facteur k de nature entière, et on écrit : $x\left(\frac{t}{k}\right)$.

Exemple :

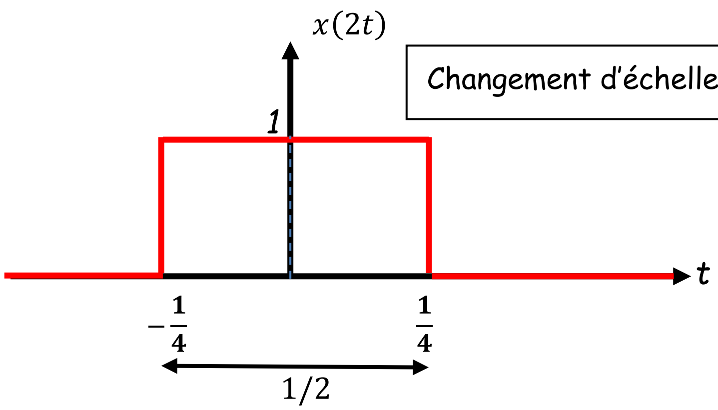
Soit le signal suivant : $x(t) = rect(t)$

- Donner l'expression analytique des signaux suivants et représenter les graphiquement : $x(2t)$, et $x\left(\frac{t}{3}\right)$

L'expression analytique du signal $x(t)$ est :

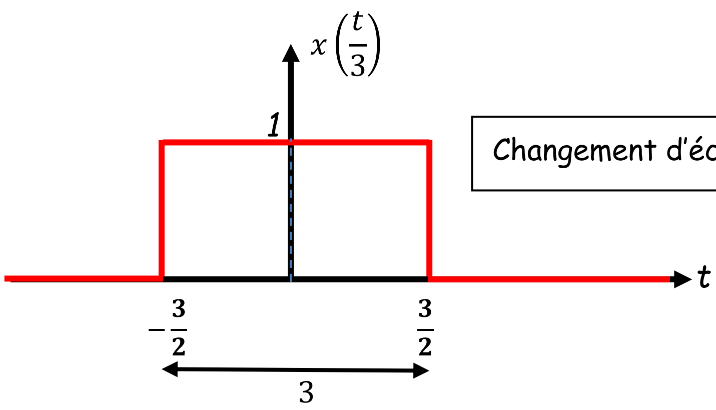
$$x(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

- $$x(2t) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \leq 2t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & ailleurs \end{cases} = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{4} \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$



Changement d'échelle : Compression

- $$x\left(\frac{t}{3}\right) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \leq \frac{t}{3} \leq \frac{1}{2} \\ 0 & ailleurs \end{cases} = \begin{cases} 1 & -\frac{3}{2} \leq t \leq \frac{3}{2} \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$



Changement d'échelle : Expansion

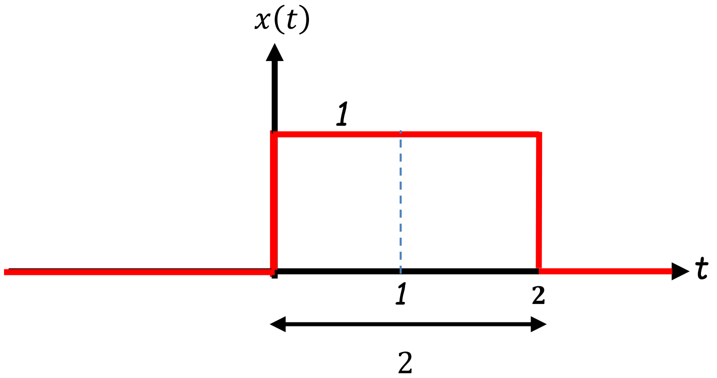
I.4.3. L'effet miroir

L'opération de l'effet miroir consiste à considérer l'axe yy' comme un axe de rotation du signal, ou bien de faire une rotation de 180° du signal par rapport à l'axe yy'.

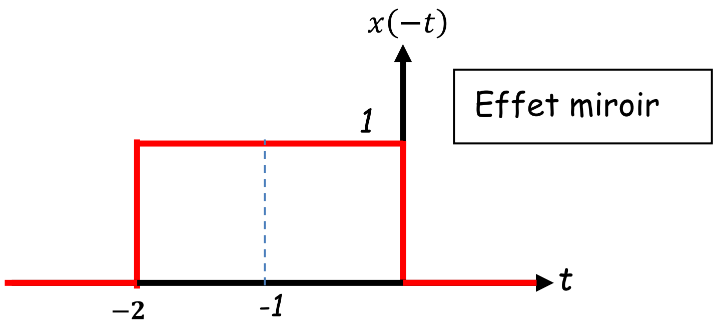
<u>Exemple :</u>

Soit le signal suivant : $x(t) = rect\left(\frac{t-1}{2}\right)$

Donner l'expression analytique du signal suivant et représenter le graphiquement : $x(-t)$



$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le 2 \\ 0 & ailleurs \end{cases} \Rightarrow x(-t) = \begin{cases} 1 & 0 \le -t \le 2 \\ 0 & ailleurs \end{cases} = \begin{cases} 1 & -2 \le t \le 0 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$



I.4.4. Regroupement des trois opérations

Dans le cas où on a plus qu'une opération à effectuer sur le même signal, il y a un ordre à suivre :

On doit commencer par le décalage, puis le changement d'échelle et on finit par l'effet miroir.

Exemple :

Soit le signal suivant :

$$\boldsymbol{x(t) = rect\left(\frac{t+1}{2}\right) + 2 \times rect\left(\frac{t}{2}\right) + 3 \times rect\left(\frac{t-1}{2}\right)}$$

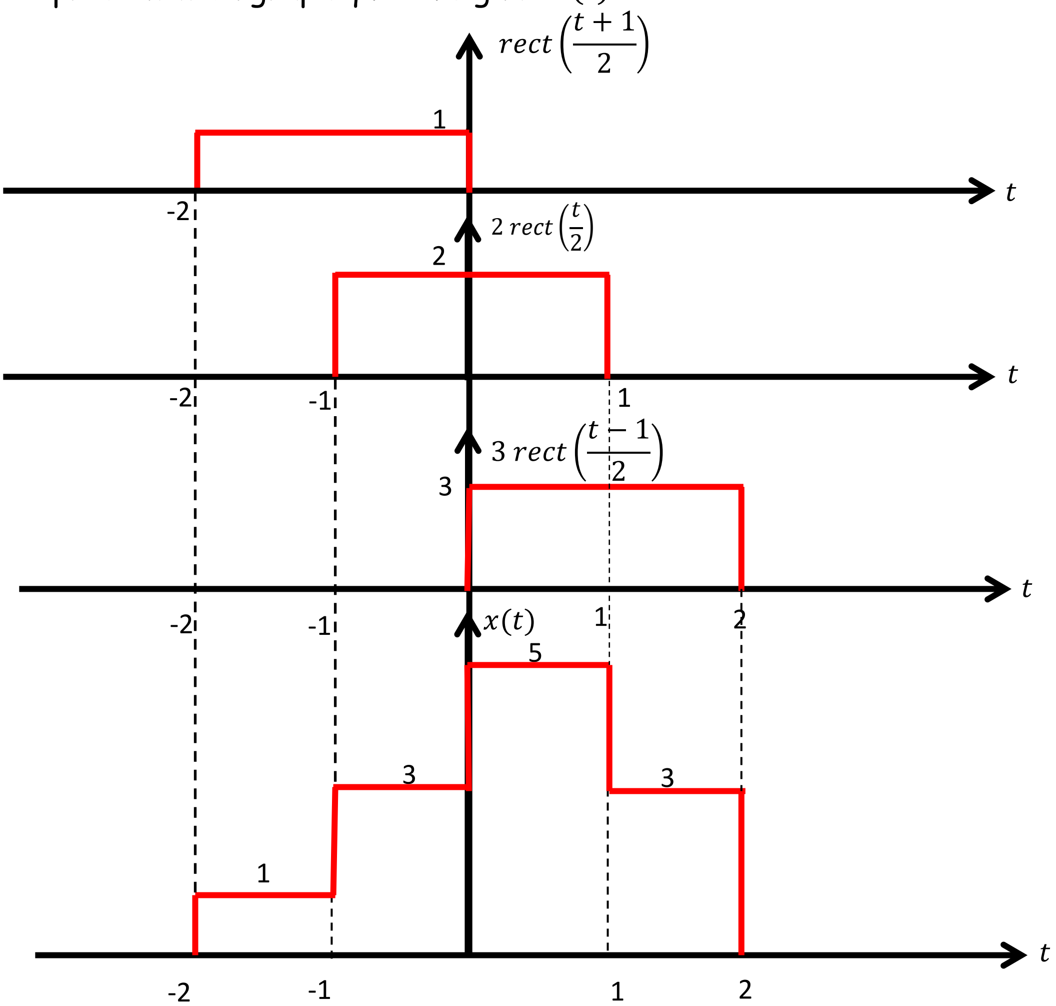
1. Donner la représentation graphique du signal $\boldsymbol{x(t)}$, quelle est son expression analytique ?
2. Donner l'expression de la dérivée du signal $\boldsymbol{x(t)}$: $\boldsymbol{x'(t) = \frac{d\,x(t)}{dt}}$, puis représenter la graphiquement.
3. Donner la représentation graphique des signaux suivants :

$\boldsymbol{x(4t+2), x\left(-\frac{t}{3}+1\right)\ u(t-4)}$, d'où $\boldsymbol{u(t)}$ est le signal échelon unité

Solution :

$$x(t) = rect\left(\frac{t+1}{2}\right) + 2\,rect\left(\frac{t}{2}\right) + 3\,rect\left(\frac{t-1}{2}\right)$$

1. Représentation graphique du signal $x(t)$

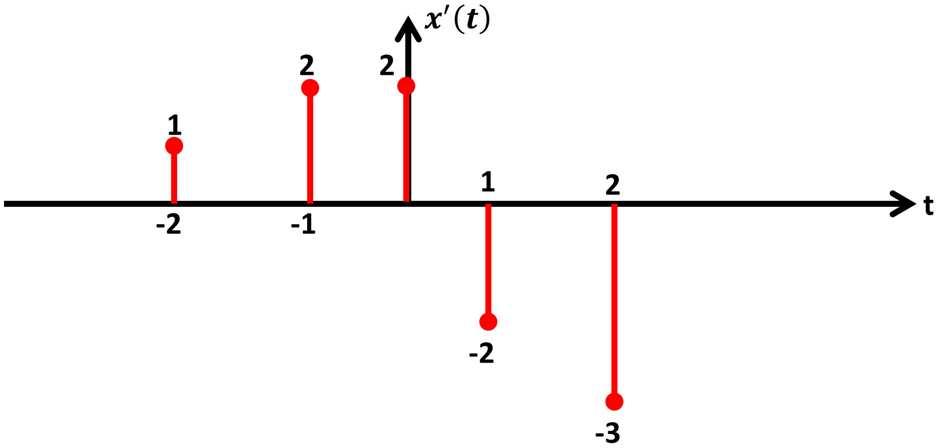


- L'expression analytique du signal $x(t)$ est :

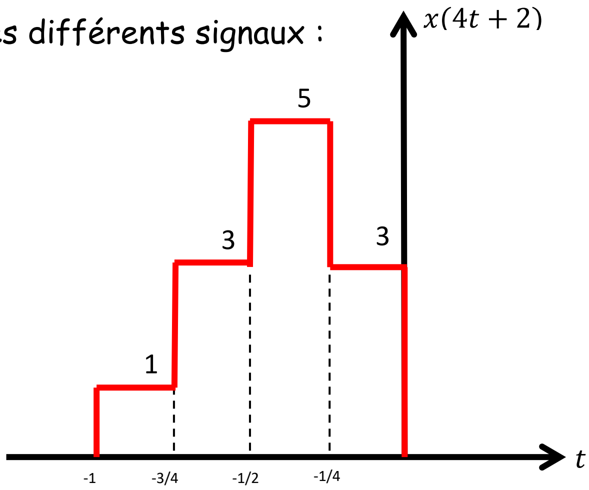
$$\boldsymbol{x(t)} = \begin{cases} \mathbf{1} & \mathbf{-2 \leq t \leq -1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1 \leq t \leq 0} \\ \mathbf{5} & \mathbf{0 \leq t \leq 1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1 \leq t \leq 2} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{ailleurs} \end{cases}$$

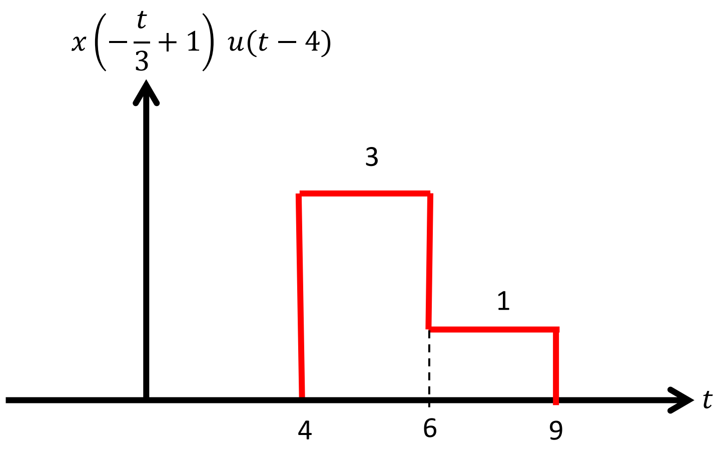
2. L'expression du signal $x'(t) = \frac{d\,x(t)}{dt}$

$$x'(t) = \frac{d\,x(t)}{dt} = \delta(t+2) + 2 \times \delta(t+1) + 2 \times \delta(t) - 2 \times \delta(t-1) - 3 \times \delta(t-2)$$



3. Représentation graphique des différents signaux :





I.5 Energie et puissance moyenne d'un signal

Théoriquement les signaux qui sont absolument sommables sont des signaux à énergie finie et à puissance moyenne nulle, tandis que les signaux périodiques sont des signaux à énergie infinie et à puissance moyenne finie, et finalement les signaux non sommables sont des signaux à énergie infinie et à puissance moyenne infinie aussi.

- Energie : $E = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$
- Puissance moyenne : $P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 \ dt$

Exemple :

- Déterminer si le signal suivant est un signal à énergie finie, à puissance moyenne finie, ou ni l'un ni l'autre.

$x(t) = A \times e^{-t}$.

$$Energie : \ E = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} A^2 \int_{-T/2}^{T/2} e^{-2t} \ dt \ = \infty$$

$$Puissance\ moyenne : \ P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-2t} \ dt \ = \infty$$

Le signal $x(t)$ est ni à énergie finie ni à puissance moyenne finie.

I.6 Partie paire et partie impaire d'un signal

Tout signal réel est construit d'une partie paire $x_P(t)$ et une partie impaire $x_I(t)$, et on note :

$$x(t) = x_P(t) + x_I(t) \tag{1}$$

On a :

$$x(-t) = x_P(-t) + x_I(-t) = x_P(t) - x_I(t) \tag{2}$$

De (1) et (2), on trouve que :

$$x_P(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} \qquad et \qquad x_I(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$$

Chapitre II : Système Linéaire et Invariant dans le Temps (SLIT) et Produit de convolution

II.1 Introduction

La linéarité et l'invariance dans le temps jouent un rôle très fondamental en théorie en traitement du signal et l'analyse des systèmes. Plusieurs phénomènes physiques peuvent être mobilisés par un système linéaire et invariant dans le temps.

Un système est une entité physique qui effectue une transformation sur le signal d'entrée, un système est représenté par le schéma bloc suivant :

$$\xrightarrow{x(t)} \boxed{T[\square]} \longrightarrow y(t) = T[x(t)]$$

Un système est toute transformation effectuée sur l'entrée, et on écrit :

$$y(t) = T[x(t)]$$

Exemple :

$$\xrightarrow{x(t)} \boxed{T[\square]} \longrightarrow y(t) = T[x(t)] = |x(t)|$$

Ce système donne la valeur absolue de l'entrée $x(t)$.

II.2 Système à temps discret et système à temps continu

II.2.1 Système à temps Discret

Un système est dit à temps discret si son signal d'entrée et son signal de sortie sont des signaux discrets.

$$\xrightarrow{x[n]} \boxed{T[\square]} \longrightarrow y[n] = T[x[n]]$$

II.2.2 Système à temps continu

Un système est dit à temps continu si son signal d'entrée et son signal de sortie sont des signaux analogiques.

$$\xrightarrow{x(t)} \boxed{T[\square]} \longrightarrow y(t) = T[x(t)]$$

II.3 Propriétés des systèmes

Un système peut être :

- Linéaire
- Invariant dans le temps
- Causal
- Stable
- Stationnaire
- Ergodique
- Inversible
- ………etc.

II.4 La linéarité des systèmes

Un système est dit linéaire s'il vérifie les deux conditions suivantes : Homogénéité et Additivité.

II.4.1 Homogénéité

Un système est dit homogène si une amplification à l'entrée conduit à la même amplification de la sortie et on écrit :

$$\xrightarrow{x(t)} \boxed{T[\square]} \longrightarrow y(t) = T[x(t)]$$

$$\xrightarrow{\alpha x(t)} \boxed{T[\square]} \longrightarrow \alpha y(t) = \alpha T[x(t)]$$

II.4.2 Additivité

Un système est dit additif si la transformation de la somme de plusieurs signaux donne la somme des transformations des différents signaux et on écrit :

$$\xrightarrow{x_1(t)} \boxed{T[\square]} \longrightarrow y_1(t) = T[x_1(t)]$$

$$\xrightarrow{x_2(t)} \boxed{T[\square]} \longrightarrow y_2(t) = T[x_2(t)]$$

<u>Additivité :</u>

$$\xrightarrow{x_1(t) + x_2(t)} \boxed{T[\square]} \longrightarrow y(t) = T[x_1(t) + x_2(t)] = y_1(t) + y_2(t)$$

II.4.3 Linéarité d'un système

On peut vérifier les deux conditions (Homogénéité et Additivité) dans la même équation, et on note :

$$\xrightarrow{x_1(t)} \boxed{T[\square]} \longrightarrow y_1(t) = T[x_1(t)]$$

$$\xrightarrow{x_2(t)} \boxed{T[\square]} \longrightarrow y_2(t) = T[x_2(t)]$$

Linéarité = Homogénéité + additivité :

$$\xrightarrow{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)} \boxed{T[\square]} \longrightarrow y(t) = T[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

Exemple : Soit le système suivant :

$$\xrightarrow{x(t)} \boxed{T[\square]} \longrightarrow y(t) = T[x(t)] = t\, x(t)$$

- Etude de la linéarité du système :

$$\xrightarrow{x_1(t)} \boxed{T[\square]} \longrightarrow y_1(t) = T[x_1(t)] = t\, x_1(t)$$

$$\xrightarrow{x_2(t)} \boxed{T[\square]} \longrightarrow y_2(t) = T[x_2(t)] = t\, x_2(t)$$

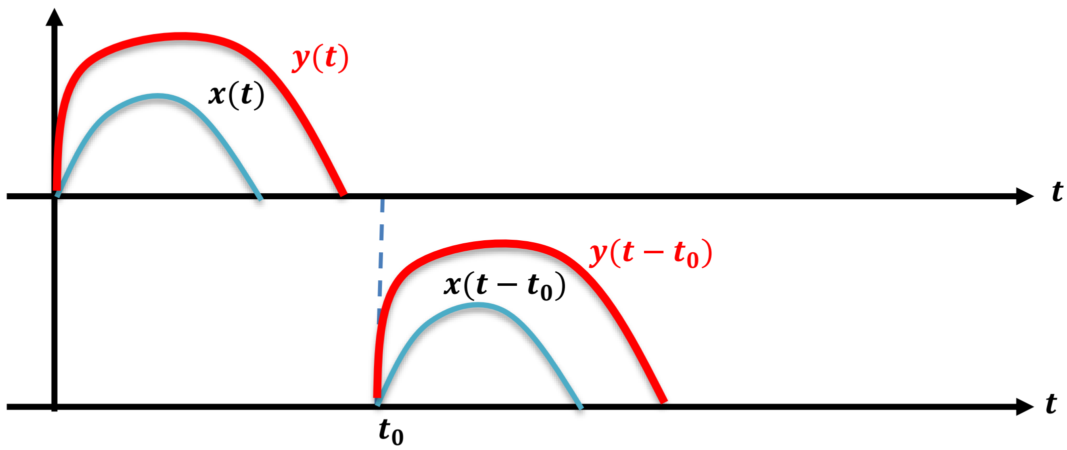
$$\xrightarrow{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)} \boxed{T[\square]} \longrightarrow y(t) = T[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] = t\ (\alpha x_1(t) + \beta x_2(t))$$

$y(t) = T[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] = t\ (\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)) = \alpha\, t\, x_1(t) + \beta\, t\, x_2(t)$

$y(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) \ \Rightarrow \ Le\ syt\grave{e}me\ est\ lin\acute{e}aire.$

II.5 L'invariance temporelle

Un système est dit Invariant dans le temps si un décalage à l'entrée provoque le même décalage à la sortie.



<u>Exemple :</u>

Soit le système suivant :

$$x(t) \longrightarrow \boxed{T[\square]} \longrightarrow y(t) = T[x(t)] = x^2(t)$$

On attaque le système par une entrée décalée $x(t-t_0)$

$$x(t-t_0) \longrightarrow \boxed{T[\square]} \longrightarrow y_s(t) = T[x(t-t_0)] = x^2(t-t_0)$$

Analytiquement :

$$y(t) = x^2(t) \Rightarrow y_A(t-t_0) = x^2(t-t_0)$$

$$y_s = y_A \quad \Rightarrow Le\ système\ est\ Invariant\ dans\ le\ temps$$

II.6 Produit de convolution

Soit un système Linéaire et Invariant dans le temps (SLIT).

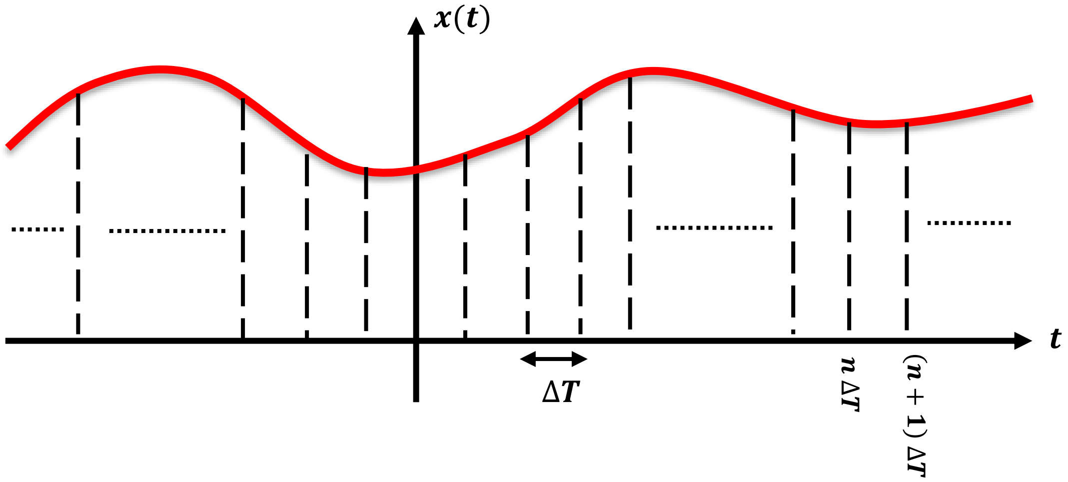
II.6.1 Réponse Impulsionnelle : $h(t)$

On appelle réponse impulsionnelle d'un SLIT la réponse du système pour une entrée qui égale à l'impulsion de Dirac, et on note :

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{L[\square]} \longrightarrow \qquad h(t) = L[\delta(t)]$$

II.6.2 Développement

Soit le signal analogique $x(t)$ représenté par la figure suivante :



Le signal $x(t)$ est sub-divisé en plusieurs segments de même largeur ΔT, donc on peut écrire que :

$$\widetilde{x(t)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\,\Delta T)\, rect\left(\frac{t - n\,\Delta T}{\Delta T}\right)$$

D'où $\widetilde{x(t)}$ représente une approximation du signal analogique $x(t)$.

On a : $x(t) = \lim\limits_{\Delta T \to 0} \widetilde{x(t)}$

Puisque le système est linéaire et invariant dans le temps, donc :

$$y(t) = L[x(t)] = L\left[\lim_{\Delta T \to 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\,\Delta T)\, rect\left(\frac{t - n\,\Delta T}{\Delta T}\right)\right]$$

$$y(t) = \lim_{\Delta T \to 0} \; L\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\,\Delta T)\, rect\left(\frac{t - n\,\Delta T}{\Delta T}\right)\right]$$

$$= \lim_{\Delta T \to 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\,\Delta T)\; L\left[\, rect\left(\frac{t - n\,\Delta T}{\Delta T}\right)\right]$$

On multiplie et on divise l'equation précedente par ΔT, on obtient :

$$y(t) = \lim_{\Delta T \to 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\,\Delta T)\; L\left[\frac{1}{\Delta T}\; rect\left(\frac{t - n\,\Delta T}{\Delta T}\right)\right] \times \Delta T$$

On a : $\lim\limits_{\Delta T \to 0} \frac{1}{\Delta T}\; rect\left(\frac{t}{\Delta T}\right) = \delta(t) \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{\Delta T \to 0} \frac{1}{\Delta T}\; rect\left(\frac{t - n\,\Delta T}{\Delta T}\right) = \delta(t - n\,\Delta T)$

Alors l'expression de $y(t)$ devient :

$$y(t) = \lim_{\Delta T \to 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\,\Delta T)\; L[\;\delta(t - n\,\Delta T)\,] \times \Delta T$$

Or : $L[\;\delta(t - n\,\Delta T)\,] = h(t - n\,\Delta T)$ et $\lim_{\Delta T \to 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty}$

On pose : $\tau = n\,\Delta T \Rightarrow d\tau = (n+1)\;\Delta T - n\,\Delta T = \;\Delta T$

Finalement et après transformation, on trouve :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\; h(t-\tau)\; d\tau$$

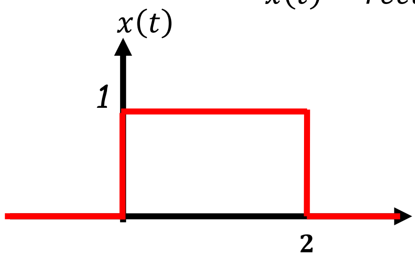
$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\; h(t-\tau)\; d\tau$ est appelé produit de convolution entre le signal d'entrée $(x(t)$ et la réponse impulsionnalle $(h(t)$ du SLIT, et on ecrit :

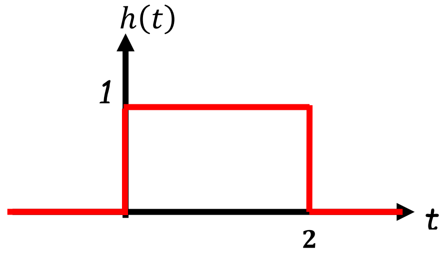
$$y(t) = \; x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\; h(t-\tau)\; d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\; x(t-\tau)\; d\tau$$

<u>Exemple :</u>

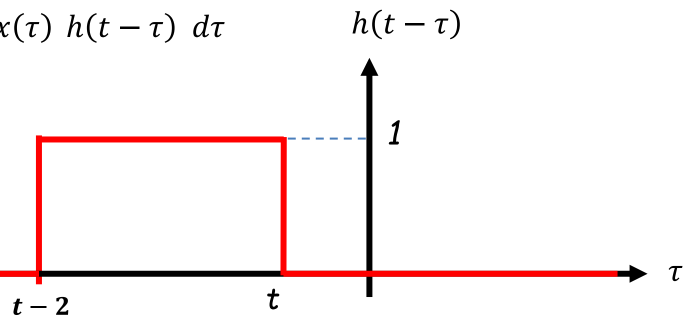
Soit le SLIT représenté par son entrée $x(t)$ et sa réponse impulsionnelle $h(t)$ comme suit :

$x(t) = rect\left(\frac{t-1}{2}\right)$ et $h(t) = x(t)$

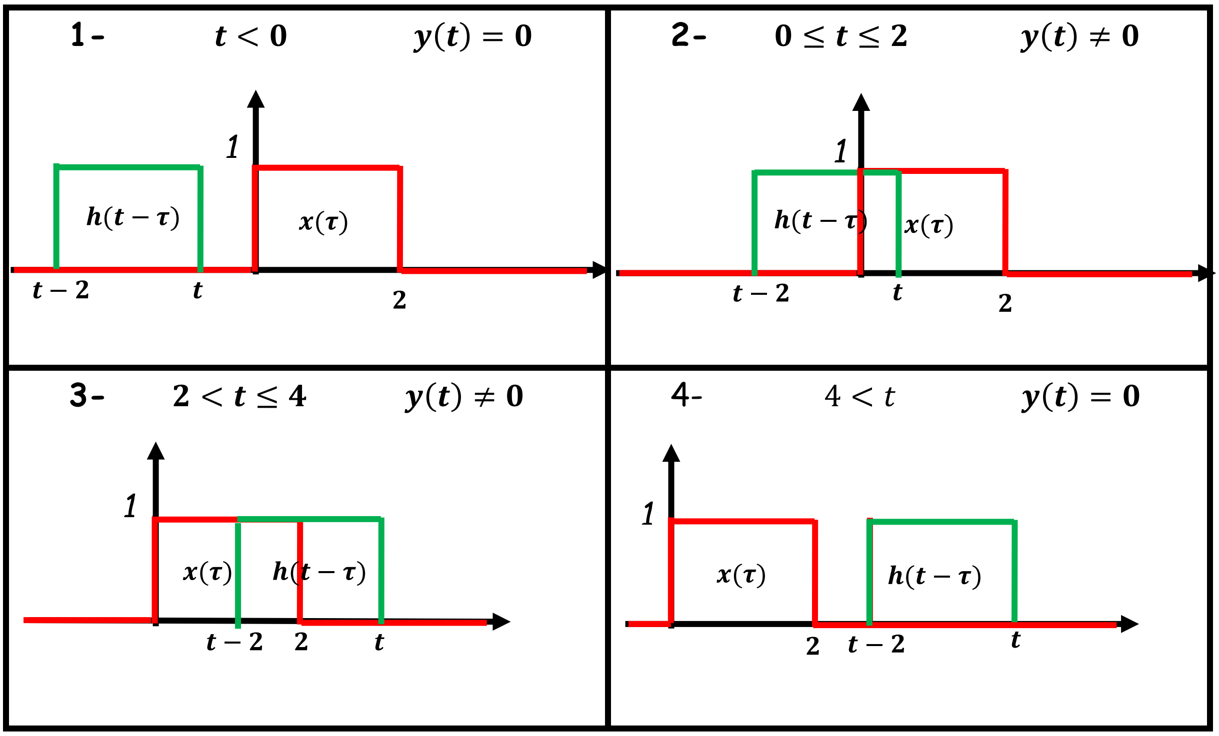




$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\; h(t-\tau)\; d\tau$$



Les différents cas de convolution :

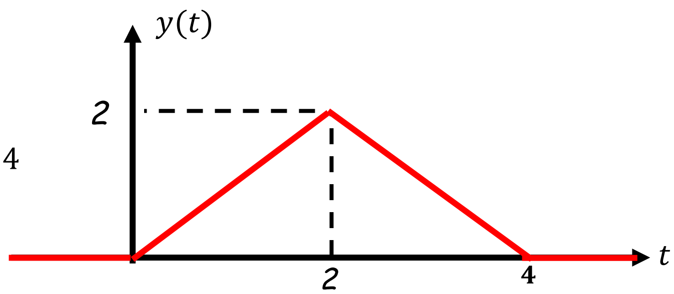


Calcul de la sortie du système : $y(t)$

- $t < 0$: $y(t) = 0$
- $0 \le t \le 2$: $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\ h(t-\tau)\ d\tau = \int_0^t (1 \times 1)\ \ d\tau = t$
- $2 < t \le 4$: $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\ h(t-\tau)\ d\tau = \int_{t-2}^{2} (1 \times 1)\ \ d\tau = 4 - t$
- $4 < t$: $y(t) = 0$

Donc

$$y(t) = \begin{cases} t & 0 \le t \le 2 \\ 4-t & 2 \le t \le 4 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$



II.6.3 Produit de Convolution discret

Soit un SLIT discret d'entrée $x[n]$ et de réponse impulsionnelle $h[n]$

Le signal d'entrée est de longueur M : $x[0] \dots \dots \dots \dots . . x[M-1]$.

La réponse impulsionnelle est de longueur N : $h[0] \dots \dots \dots \dots . . h[N-1]$.

Le signal de sortie $y[n]$ est donné par l'expression suivante :

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} x[k] \times h[n-k] = \sum_{k=0}^{n} h[k] \times x[n-k]$$

La longueur du signal de sortie est de longueur $L = M + N - 1$

Exemple :

Soit le SLIT discret représenté par son entrée $x[n]$ et sa réponse impulsionnelle $h[n]$ comme suit :

$x[n] = [2,4,3] \quad et \;\; h[n] = u[n] - u[n-3] = [1,1,1]$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} x[k] \times h[n-k]$$

La longueur du signal de sortie $y[n]$ est $L = 3 + 3 - 1 = 5$

$L = 5$, donc on doit calculer : $y[0],\; y[1],\; y[2],\; y[3], \;,\; et\; y[4]$

- $y[0] = \sum_{k=0}^{0} x[k] \times h[0-k] = x[0] \times h[0] = 2 \times 1 = 1$
- $y[1] = \sum_{k=0}^{1} x[k] \times h[1-k] = x[0] \times h[1] + x[1] \times h[0] = 2 \times 1 + 4 \times 1 = 6$
- $y[2] = \sum_{k=0}^{2} x[k] \times h[2-k] = x[0] \times h[2] + x[1] \times h[1] + x[2] \times h[0]$
  $y[2] = 2 \times 1 + 4 \times 1 + 3 \times 1 = 9$
- $y[3] = \sum_{k=0}^{3} x[k] \times h[3-k]$

$$y[3] == x[0] \times h[3] + x[1] \times h[2] + x[2] \times h[1] + x[3] \times h[0]$$

$$y[3] = 2 \times 0 + 4 \times 1 + 3 \times 1 + 0 \times 1 = 4 \times 1 + 3 \times 1 = 7$$

- $y[4] = \sum_{k=0}^{4} x[k] \times h[4-k]$

$$y[4] = x[0] \times h[4] + x[1] \times h[3] + x[2] \times h[2] + x[3] \times h[1] \; + \; x[4] \times h[0]$$

$$y[4] = 2 \times 0 + 4 \times 0 + 3 \times 1 + 0 \times 1 + 0 \times 1 = 3 \times 1 = 3$$

Finalement on trouve : $y[n] = [1,6,9,7,3]$.

Confirmation du résultat par la méthode de la somme des colonnes :

$x[n]$:	2	4	3		
$h[n]$:	1	1	1		
	2	4	3		
		2	4	3	
			2	4	3
$\boldsymbol{y[n]} =$	[**2**	**6**	**9**	**7**	**3**]

II.7 Propriétés de convolution d'un signal avec l'impulsion de Dirac

- $\boldsymbol{x(t) * \delta(t) = x(t)}$
- $\boldsymbol{x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)}$
- $\boldsymbol{x(t - t_0) * \delta(t - t_1) = x(t - t_0 - t_1)}$

Chapitre III : Analyse de Fourier (Série de Fourier et Transformée de Fourier)

Première partie : Série de Fourier

III.1 Introduction

L'analyse de Fourier occupe une place privilégiée dans la théorie et le traitement du signal.

La décomposition en série de Fourier concerne les signaux périodiques.

La série de Fourier est une représentation approximative des signaux périodiques sous forme d'une somme de sinusoïdes de fréquences multiples du signal approximé.

La décomposition d'un signal périodique en Série de Fourier est une représentation plus simple qui met en relief les caractéristiques du signal périodique dont on a besoin.

Le signal sinusoïdal est le signal périodique le plus simple à réaliser et le plus familier des signaux périodiques.

III.2 Décomposition d'un signal périodique en série de Fourier

III.2.1 Première forme de la série de Fourier (Forme trigonométrique) : SF1

N'importe quel signal peut être représenté par une base complète. L'une des base complète la plus utilisée est la base exponentielle complexe $w_n(t) = e^{j2\pi n f_0 t}$.

Soit un signal périodique $x_T(t)$ de période T et de fréquence $f_0 = \frac{1}{T}$, ce signal peut être approximé par la base exponentielle complexe par l'équation :

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \quad e^{j2\pi n f_0 t}$$

D'où $\{C_n\}_{n\epsilon]-\infty,+\infty[}$ sont les coefficients du signal $x_T(t)$ dans la base $w_n(t)$, et ils représentent le produit scalaire entre le signal périodique $x_T(t)$ et la base exponentielle complexe conjuguée $w_n^*(t)$, et on écrit :

$$C_n = \langle x_T(t),\ w_n^*(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) \quad e^{-j2\pi n f_0 t}\ dt$$

On a :

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \ e^{j2\pi n f_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{-1} C_n \ e^{j2\pi n f_0 t} + C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \ e^{j2\pi n f_0 t}$$

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \ e^{j2\pi n f_0 t} = \sum_{n=1}^{+\infty} C_{-n} \ e^{-j2\pi n f_0 t} + C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \ e^{j2\pi n f_0 t}$$

$$x_T(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(C_{-n} \ e^{-j2\pi n f_0 t} + C_n \ e^{j2\pi n f_0 t} \right)$$

On sait que :

- $e^{j2\pi n f_0 t} = \cos(2\pi n f_0 t) + j \sin(2\pi n f_0 t)$
- $e^{-j2\pi n f_0 t} = \cos(2\pi n f_0 t) - j \sin(2\pi n f_0 t)$

Donc :

$$x_T(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [\ C_{-n} \ (\cos(2\pi n f_0 t) - j \sin(2\pi n f_0 t)) + C_n \ (\cos(2\pi n f_0 t) + j \sin(2\pi n f_0 t))]$$

$$x_T(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [(\ C_{-n} + C_n) \ \cos(2\pi n f_0 t) + j \sin(2\pi n f_0 t)\ (\ C_n - C_{-n})\ ]$$

On pose :

- $a_n = C_{-n} + C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) \ \left(e^{j2\pi n f_0 t} + e^{-j2\pi n f_0 t}\right) dt$

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) \ (2\cos(2\pi n f_0 t)) \ dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) \ \cos(2\pi n f_0 t) \ dt$$

- $a_0 = 2 \times C_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) \ dt$
- $b_n = j\,(C_n - C_{-n}) = \frac{j}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) \ \left(e^{j2\pi n f_0 t} - e^{-j2\pi n f_0 t}\right) dt$

$$b_n = \frac{j}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t)\ (-2j\sin(2\pi n f_0 t))\ dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t)\ \sin(2\pi n f_0 t)\ dt$$

Finalement, on obtient :

$$x_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n\ \cos(2\pi n f_0 t) + \ b_n\ \sin(\ 2\pi n f_0 t\ )\ ] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(SF1)$$

Avec :

$$C_n = \frac{a_n - j\ b_n}{2}\ ,\ C_{-n} = \frac{a_n + j\ b_n}{2}\ \text{ et } C_0 = \frac{a_0}{2}$$

Cas Particuliers :

- $x_T(t)$ est un signal périodique pair : $x_T(t) = x_T(-t)$

$$x_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n\ \cos(2\pi n f_0 t) + \ b_n\ \sin(\ 2\pi n f_0 t\ )\ ]$$

$$x_T(-t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n\ \cos(2\pi n f_0 t) - \ b_n\ \sin(\ 2\pi n f_0 t\ )\ ]$$

$$x_T(t) = x_T(-t)\ \Rightarrow\ b_n = 0\ \ \forall\, n \geq 1$$

- $x_T(t)$ est un signal périodique impair : $x_T(t) = -x_T(-t)$

$$x_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n\ \cos(2\pi n f_0 t) + \ b_n\ \sin(\ 2\pi n f_0 t\ )\ ]$$

$$x_T(-t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n\ \cos(2\pi n f_0 t) - \ b_n\ \sin(\ 2\pi n f_0 t\ )\ ]$$

$$x_T(t) = -x_T(-t)\ \Rightarrow\ a_n = 0\ \ \forall\, n \geq 0$$

III.2.2 Deuxième forme de la série de Fourier (Forme Cosinus) : SF2

De la première forme, on a :

$$x_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n\ \cos(2\pi n f_0 t) + \ b_n\ \sin(\ 2\pi n f_0 t\ )\ ]$$

On peut écrire $x_T(t)$ sous la forme :

$$x_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \left[\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos(2\pi n f_0 t) + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sin(2\pi n f_0 t) \right]$$

$$x_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos(2\pi n f_0 t + \varphi_n)$$

D'où :

$$\cos(\varphi_n) = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \quad et \quad \sin(\varphi_n) = \frac{-b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$$

On pose :

- $A_0 = \frac{a_0}{2}$
- $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$
- $\varphi_n = Arctg\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$

Finalement on obtient :

$$x_T(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(2\pi n f_0 t + \varphi_n)$$

III.2.3 Troisième forme de la série de Fourier (Forme Exponentielle complexe) : SF3

De la représentation du signal périodique $x_T(t)$ par la base exponentielle complexe, on écrit :

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \; e^{j2\pi n f_0 t} = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(C_{-n} \; e^{-j2\pi n f_0 t} + C_n \; e^{j2\pi n f_0 t} \right)$$

Avec : $C_n = \langle x_T(t),\; w_n^*(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) \; e^{-j2\pi n f_0 t} \, dt$

- De la première forme, on a :

  $C_n = \frac{a_n - j\, b_n}{2}$, $C_{-n} = \frac{a_n + j\, b_n}{2}$ et $C_0 = \frac{a_0}{2}$

- De la deuxième forme, on a :

  $$C_0 = A_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$C_n = \frac{A_n}{2}\, e^{j\varphi_n} \; et \; C_{-n} = \frac{A_n}{2}\, e^{-j\varphi_n}$$

$$|C_n| = |C_{-n}| = \frac{A_n}{2} = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2}$$

$$Arg(C_n) = -Arg(C_{-n}) = \varphi_n = Arctg\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$$

III.3 Relation de Parseval (Série de Fourier)

Le théorème de Parseval est un concept fondamental dans le traitement du signal et l'analyse harmonique. Il affirme que pour une fonction périodique, la puissance moyenne du signal sur une période est égale à la somme des grandeurs carrées de tous ses coefficients de Fourier complexes. Ce théorème, nommé d'après Marc-Antoine Parseval, fournit un outil puissant pour analyser la distribution d'énergie dans les signaux.

https://www.jove.com/fr/science-education/v/16063/parseval-s-theorem

La relation de Parseval consiste à ce que la puissance du signal périodique $x_T(t)$ reste la même dans les trois distributions.

$$P_{Temps} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x_T(t)|^2 \, dt$$

$$P_{SF1} = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

$$P_{SF2} = (A_0)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} A_n^2$$

$$P_{SF3} = C_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} |C_n|^2 + |C_{-n}|^2$$

$Relation\ de\ Parseval :\ P_{Temps} = P_{SF1} = P_{SF2} = P_{SF3}$

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x_T(t)|^2 \, dt = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2) = (A_0)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} A_n^2$$

$$= C_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} |C_n|^2 + |C_{-n}|^2$$

Partie II : Transformée de Fourier

III.4 Introduction

La transformée de Fourier vient généraliser la décomposition en série de Fourier pour les signaux apériodiques qui vérifient des certaines conditions dites condition de DIRICHLET.

III.5 Conditions d'existence d'une transformée de Fourier d'un signal apériodique

Tous les signaux apériodiques ne possèdent pas obligatoirement une transformée de Fourier. Pour qu'un signal apériodique $x(t)$ ait une transformée de Fourier, il faut qu'il vérifie les conditions suivantes (dites conditions de ***DIRICHLET)*** :

- Le signal $x(t)$ doit être absolument sommable, et on écrit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| \ dt \ << \infty$$

- Le signal $x(t)$ doit posséder un nombre fini d'extrémums dans chaque intervalle de temps fini.
- Le signal $x(t)$ doit posséder un nombre fini de discontinuités dans chaque intervalle de temps fini.

III.6 Développement

Soit $x(t)$ un signal apériodique qui vérifie les conditions de ***DIRICHLET***, donc $x(t)$ accepte une transformée de Fourier.

D'après la philosophie de Mr Fourier un signal apériodique vérifiant les conditions de ***DIRICHLET*** peut être considéré comme un signal périodique de période qui tend vers l'infini.

On écrit :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \ \ e^{j2\pi n f_0 t}$$

$$C_n = \langle x(t), \ w_n^*(t) \rangle \ = \lim_{T\to\infty} \ \ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \ x(t) \ \ e^{-j2\pi n f_0 t} \ dt$$

Alors :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\lim_{T\to\infty} \quad \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \; e^{-j2\pi n f_0 t} \; dt \right) e^{j2\pi n f_0 t}$$

On a :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lim_{T\to\infty} \; \equiv \; \int_{-\infty}^{+\infty}$$

On pose :

$$f = n\, f_0 = \frac{n}{T} \; \Rightarrow \; df = \frac{1}{T}$$

Donc :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \; e^{-j2\pi f t} \; dt \right) e^{j2\pi f t} \; df$$

On pose :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \; e^{-j2\pi f t} \; dt$$

$X(f)$ est la transformée de Fourier du signal apériodique $x(t)$, et on écrit :
$X(f) = TF[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \; x(t) \; e^{-j2\pi f t} \; dt$

- La Transformée de Fourier Inverse est donnée par :

$$x(t) = TF^{-1}[X(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \; e^{j2\pi f t} \; df$$

III.7 Propriétés de la transformée de Fourier

III.7.1 La linéarité

La linéarité de la transformée de Fourier provient de la linéarité de l'intégrale.

Donc : $TF[\alpha\, x_1(t) \;+\; \beta\, x_2(t)] \;=\; \alpha\, TF[x_1(t)] + \beta\, TF[x_2(t)] = \alpha\, X_1(f) + \;\beta\, X_2(f)$

III.7.2 La translation (Décalage temporel)

$$TF[x(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0)\;\; e^{-j2\pi f t}\; dt$$

On pose : $t' = t - t_0 \quad \Rightarrow \quad dt' = dt$

Alors :

$$TF[x(t-t_0)] = TF[x(t')] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t')\;\; e^{-j2\pi f(t'+t_0)}\; dt'$$

$$= \;\; e^{-j2\pi f t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t')\;\; e^{-j2\pi f t'}\; dt'$$

Donc : $TF[x(t-t_0)] = \;\; e^{-j2\pi f t_0}\, X(f)$

III.7.3 Théorème de modulation (Déplacement fréquentiel)

$$TF\left[e^{-j2\pi f_0 t}\;\; x(t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f_0 t}\;\; x(t)\;\; e^{-j2\pi f t}\; dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\;\; e^{-j2\pi (f+f_0) t}\; dt$$

$$TF\left[e^{-j2\pi f_0 t}\;\; x(t)\right] = X(f+f_0)$$

III.7.4 La dérivation

$$TF\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt}\;\; e^{-j2\pi f t}\; dt$$

$$= \left[x(t)\;\; e^{-j2\pi f t}\;\right]_{-\infty}^{+\infty} + j2\pi f \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\;\; e^{-j2\pi f t}\; dt$$

Donc : $TF\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = j2\pi f\;\; X(f)$

On peut généraliser la propriété précédente par l'expression suivante :

$$TF\left[\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right] = (j2\pi f)^n\;\; X(f)$$

III.7.5 L'intégration

$$TF\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ dt\right] = ?$$

On a :

$$TF\ [x(t)] = TF\left[\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ dt\right] = \ j2\pi f \quad TF\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ dt\right]$$

Donc :

$$TF\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ dt\right] = \ \frac{1}{j2\pi f}\ \ X(f)$$

III.7.6 La symétrie (Dualité)

$$TF[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)\ \ e^{-j2\pi f t}\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)\ \ e^{j2\pi(-f)t}\ dt = x(-f)$$

$$TF^{-1}[x(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(f)\ \ e^{j2\pi f t}\ df = \int_{-\infty}^{+\infty} x(f)\ \ e^{-j2\pi f(-t)}\ df = X(-t)$$

III.7.7 Symétrie Hermitienne

$$TF[x^*(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)\ \ e^{-j2\pi f t}\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\ x(t)\ \ e^{j2\pi f t}\right)^*\ dt$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ \ e^{-j2\pi(-f)t}\ dt\right)^*$$

Donc : $TF[x^*(t)] = X^*(-f)$

III.8 Transformée de Fourier d'un signal apériodique à valeur moyenne non nulle

Soit $\boldsymbol{x(t)}$ un signal apériodique vérifiant les conditions de DIRICHLET à valeur moyenne non nulle, c'est-à-dire on peut écrire le signal $\boldsymbol{x(t)}$ sous la forme :

$$x(t) = x_0(t) + \bar{x}$$

D'où :

- $x_0(t)$ représente la partie à valeur moyenne nulle du signal $x(t)$.
- $\bar{x}$ représente la valeur moyenne du signal $x(t)$, telque :

$$\boldsymbol{\bar{x} = \lim_{T\to\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\ dt}$$

On a :

$$TF[x(t)] = TF[x_0(t) + \bar{x}] = TF[x_0(t)] + TF[\bar{x}] = \bar{x}\,\delta(f) + TF[x_0(t)]$$

III.9 Relation de Parseval (Transformée de Fourier)

La relation de *Parseval* consiste à ce que l'energie du signal apériodique reste la même dans les deux domaines : temporel et fréquentiel, et on écrit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathrm{x(t)}|^2\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathrm{X(f)}|^2\ df$$

- Démonstration :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathrm{x(t)}|^2\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ x^*(t)\ \ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f)\ \ e^{-j2\pi ft}\ \ df\right) dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathrm{x(t)}|^2\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f)\ \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ e^{-j2\pi ft}\ \ dt\right) df$$

Donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathrm{x(t)}|^2\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f)\ X(f)\ df = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathrm{X(f)}|^2\ df$$

III.10 Relation de Plancherel

La relation de Plancherel consiste à ce que la transformée de Fourier du produit de convolution entre deux signaux dans le domaine temporel représente le produit de ces deux transformées de Fourier dans le domaine fréquentiel et vice versa, et on écrit :

$$TF[x(t) * h(t)] = TF[x(t)] \ \times \ TF[h(t)] = X(f) \ \times H(f)$$

$$TF^{-1}[X(f) * H(f)] = TF^{-1}[x(t)] \ \times \ TF^{-1}[h(t)] = x(t) \ \times h(t)$$

III.11 Quelques Transformées de Fourier de quelques signaux usuels

$\boldsymbol{x(t)}$	$\boldsymbol{X(f) = TF[x(t)]}$
1	$\delta(f)$
$\boldsymbol{\delta(t)}$	1
$\boldsymbol{u(t)}$	$\frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\,\delta(f)$
$\boldsymbol{sgn(t)}$	$\frac{1}{j\pi f}$
$\boldsymbol{A\,rect\left(\frac{t}{T}\right)}$	$A \times T \times \ sinc(fT)$
$\boldsymbol{A\,Tri\left(\frac{t}{T}\right)}$	$A \times T \times \ sinc^2(fT)$
$\boldsymbol{Cos(2\pi f_0 t)}$	$\frac{1}{2}\,[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
$\boldsymbol{sin(2\pi f_0 t)}$	$\frac{1}{2j}\,[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$
$\boldsymbol{e^{-j2\pi f_0 t}}$	$\delta(f + f_0)$

Chapitre IV : Transformée de Laplace

IV.1 Introduction

La transformée de Laplace est une généralisation de la transformée de Fourier pour les signaux apériodique à énergie infinie, elle a connu une large utilisation et un grand succès dans l'analyse des signaux et la simplification des calculs mathématique telle que les équations différentielles.

IV.2 Définition

Considérons un signal réel $x(t)$, alors la transformée de la Place est t'exprimée à partir de la transformée de Fourier en passant par un changement de variable, et on écrit :

- La transformée de Fourier :

$$X(f) = TF[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \;\; e^{-j2\pi f t} \; dt$$

- La Transformée de Laplace :

On pose : $p = \sigma + j2\pi f = \sigma + j\omega$

Donc : $X(p) = TL[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \;\; e^{-pt} \; dt$

$$\xrightarrow{x(t)} \boxed{TL[\,]} \longrightarrow X(p) = TL[x(t)]$$

<u>Remarque :</u>

Dans le cas où la partie réelle de p est nulle $(\sigma = 0)$, la Transformée de Laplace devient égale à la Transformée de Fourier, et on écrit :

$$X(p) = X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \;\; e^{-j\omega t} \; dt$$

<u>Exemple :</u>

Déterminer la transformée de Laplace du signal Echelon unité.

$$X(p) = TL[u(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \;\; e^{-pt} \; dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-pt} \; dt = \frac{1}{p}$$

- Transformée de Laplace Inverse :

$$x(t) = TL^{-1}[X(p)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(p) \;\; e^{pt} \; dp$$

IV.3 Propriétés de la Transformée de Laplace

IV.3.1 La linéarité

La linéarité de la transformée de Fourier provient de la linéarité de l'intégrale.

Donc : $TL[\alpha\, x_1(t) \; + \; \beta\, x_2(t)] \; = \; \alpha\, TL[x_1(t)] + \beta\, TL[x_2(t)] = \alpha\, X_1(p) + \; \beta\, X_2(p)$

IV.3.2 La translation (Décalage temporel)

$$TF[x(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0) \;\; e^{-pt} \; dt$$

On pose : $\quad t' = t - t_0 \quad \Rightarrow \quad dt' = dt$

Alors :

$$TL[x(t-t_0)] = TL[x(t')] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') \;\; e^{-p(t'+t_0)} \; dt' = \; e^{-pt_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') \;\; e^{-pt'} \; dt'$$

Donc : $\quad TL[x(t-t_0)] = \; e^{-pt_0} \; X(p)$

IV.3.4 La dérivation

$$TL\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt} \;\; e^{-pt} \; dt = \; [x(t) \;\; e^{-pt} \;]_{-\infty}^{+\infty} + p \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \;\; e^{-pt} \; dt$$

Donc : $\quad TF\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = p \;\; X(p)$

On peut généraliser la propriété précédente par l'expression suivante :

$$TL\left[\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right] = p^n \;\; X(f)$$

- Pour les signaux causaux :

$$TL\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = \int_{0}^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt} \;\; e^{-pt} \; dt = \; [x(t) \;\; e^{-pt} \;]_{0}^{+\infty} + p \times \int_{0}^{+\infty} x(t) \;\; e^{-pt} \; dt$$

Donc :

$$TF\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = p\ \ X(p) - x(0)$$

IV.3.5 L'intégration

$$TL\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ \ dt\right] = ?$$

On a :

$$X(p) = TL\left[\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ \ dt\right] = p\ \ TL\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ \ dt\right] \ \ \Rightarrow\ TL\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ \ dt\right] = \frac{1}{p}\ \ X(p)$$

IV.3.6 Exponentielle réelle causale

$$TL[e^{-at}\ \ u(t)] = \int_{0}^{+\infty} e^{-at}\ \ \ e^{-pt}\ \ dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-pt}\ \ dt = \frac{1}{p+a} \qquad avec\ a > 0$$

<u>Remarque :</u>

En pratique, comme la Transformée de Laplace de la plupart des signaux usuels est de forme rationnelle, il suffit de les décomposer en fractions simples (pôles simples) et d'utiliser les propriétés de la TL pour déterminer l'expression du signal d'entrée $x(t)$.

$$X(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

Décomposition en des pôles simples :

$$X(p) = \frac{N(p)}{D(p)}\frac{N(p)}{(p-p_1)\times(p-p_2)\times(p-p_3)\times \dots\dots\dots\dots \times (p-p_n)}$$

Décomposition en des fractions simples :

$$X(p) = \frac{A_1}{(p-p_1)} + \frac{A_2}{(p-p_2)} + \frac{A_3}{(p-p_3)} + \cdots \dots\dots\dots . + \frac{A_n}{(p-p_n)}$$

D'où :

$$A_n = \lim_{p\to p_n}(p-p_n)\ \ \ X(p)$$

Exemple :

Soit la transformée de Laplace suivante :

$$X(p) = \frac{1}{p^2 + 3p + 2} = \frac{A_1}{(p - p_1)} + \frac{A_2}{(p - p_2)}$$

Avec :

$$A_1 = \lim_{p \to p_1} (p - p_1) \;\; X(p) \qquad \text{et} \qquad A_2 = \lim_{p \to p_2} (p - p_2) \;\; X(p)$$

On a **:** $p^2 + 3p + 2 = (p+1)\,(p+2) \;\; \Rightarrow (p_1 = -1) \;\; et \quad (p_2 = -2)$

On trouve : $A_1 = \lim_{p \to -1} (p+1) \;\; X(p) = 1$ et $A_2 = \lim_{p \to -2} (p+2) \;\; X(p) = -1$

Donc :

$$X(p) = \frac{1}{p^2 + 3p + 2} = \frac{1}{(p+1)} - \frac{1}{(p+2)}$$

Finalement :

$$x(t) = TL^{-1}[X(p)] = TL^{-1}\left[\frac{1}{(p+1)} - \frac{1}{(p+2)}\right] = TL^{-1}\left[\frac{1}{(p+1)}\right] - TL^{-1}\left[\frac{1}{(p+2)}\right]$$

$$x(t) = e^{-t}\, u(t) - \;\; e^{-2t}\, u(t)$$

IV.5 La Transformée de Laplace et les équations différentielles

La transformée de Laplace a connu une large application dans la résolution des équations différentielles, elle est considérée comme un outil très rapide et très efficace dans ce domaine.

Considérons un signal réel et causal $x(t)$, la transformée de Laplace du signal $x(t)$ est donnée par :

$$X(p) = TL[x(t)] = \int_0^{+\infty} x(t) \quad e^{-pt} \;\; dt$$

$$TL\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = \int_0^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt} \quad e^{-pt} \;\; dt = \left[x(t) \;\; e^{-pt} \;\right]_0^{+\infty} + \; p \int_0^{+\infty} x(t) \quad e^{-pt} \;\; dt$$

Donc :

$$TF\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = p \;\; X(p) - x(0)$$

Concernant la transformée e Laplace de la deuxième dérivée :

$$TL\left[\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right] = \int_0^{+\infty} \frac{d^2x(t)}{dt^2} \quad e^{-pt}\ dt = \left[\frac{dx(t)}{dt} \quad e^{-pt}\right]_0^{+\infty} + p\int_0^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt} \quad e^{-pt}\ dt$$

$$TL\left[\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right] = p\,[\,p\,X(p) - x(0)] - x'(0) = p^2\ X(p) - p\,x(0) - \ x'(0)$$

De la même manière, on détermine aussi la transformée de la troisième dérivée :

$$TL\left[\frac{d^3x(t)}{dt^3}\right] = p\,[\,p^2\ X(p) - p\,x(0) - \ x'(0)] - x''(0)$$
$$= p^3\ X(p) - p^2\,x(0) - p\,x'(0) - x''(0)$$

IV.4 quelques Transformée de Laplace de quelques signaux usuels

$\boldsymbol{Signal}$	**Transformée de Laplace**
$\boldsymbol{\delta(t)}$	1
$\boldsymbol{u(t)}$	$\frac{1}{p}$
$\boldsymbol{t \times u(t)}$	$\frac{1}{p^2}$
$\boldsymbol{e^{-at} \times u(t)}$	$\frac{1}{p+a}$
$\boldsymbol{sgn(t)}$	$\frac{2}{p}$
$\boldsymbol{\sin(\omega_0 t) \times u(t)}$	$\frac{\omega_0}{p^2+{\omega_0}^2}$
$\boldsymbol{\cos(\omega_0 t) \times u(t)}$	$\frac{p}{p^2+{\omega_0}^2}$
$\boldsymbol{A \times\ rect\left(\frac{t-\tau}{T}\right)}$	$\frac{A}{p}\left(e^{-\left(\tau-\frac{T}{2}\right)p} - e^{-\left(\tau+\frac{T}{2}\right)p}\right)$
$\boldsymbol{t^n\ u(t)}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$\boldsymbol{t^n\ e^{-at}\ \ u(t)}$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$

Chapitre V : Corrélation des signaux

V.1 Introduction

La fonction de corrélation mesure la ressemblance entre deux signaux. Physiquement, la fonction de corrélation est l'énergie mutuelle d'interaction échangée en moyenne entre les deux signaux considérés.

La fonction de corrélation est définie par trois opérations :

- Translation dans le temps (Retard)
- Multiplication
- Intégration

La fonction de corrélation est donnée par l'équation suivante :

$$C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ x^*(t-\tau)\ dt$$

Dans le cas où le signal $x(t)$ est purement réel, l'équation précédente de la corrélation vient comme suit :

$$C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ x(t-\tau)\ dt$$

Dans le cas où le signal $x(t)$ est un signal à puissance moyenne finie, l'expression de la corrélation devient :

$$C_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\ x(t-\tau)\ dt$$

Remarque :

S'il s'agit du même signal, dans ce cas-là on parle de l'auto-corrélation, et s'il s'agit de deux signaux différents $x(t)$ et $y(t)$, dans ce cas-là on parle de l'intercorrélation ou bien la corrélation, et on écrit :

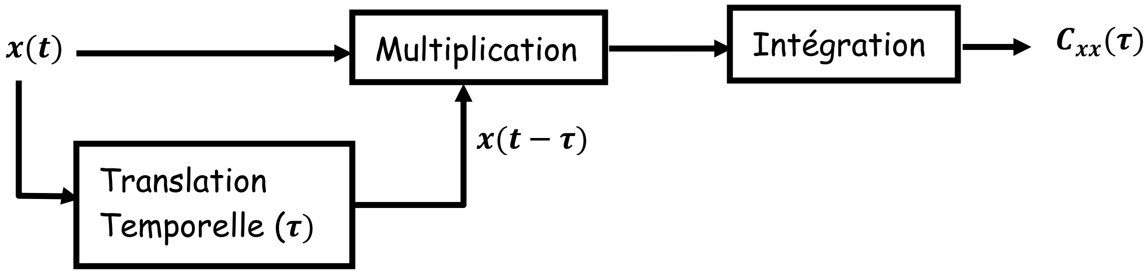
- *Auto-corrélation :*

$$C_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\ x(t-\tau)\ dt$$

- *Intercorrélation (Corrélation) :*

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\ y(t-\tau)\ dt$$

- Schéma bloc de la fonction d'auto-corrélation



V.2 Cas spéciaux

- La fonction d'auto-corrélation atteint son maximum dans le cas où $\tau = 0$, dans ce cas-là, la fonction d'auto-corrélation sera égale à l'énergie du signal, et on écrit :

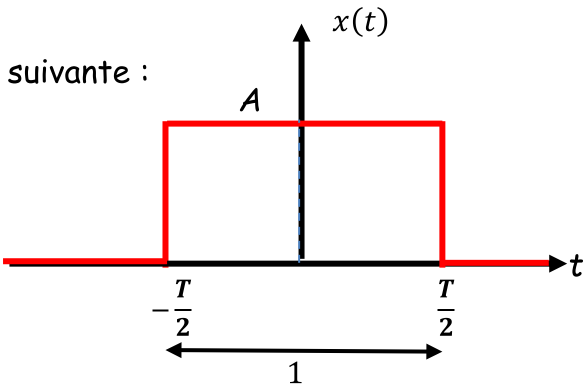
$$C_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) \quad dt$$

- Dans le cas où le signal $x(t)$ est un signal périodique de période T, la fonction d'auto-corrélation atteint son maximum à chaque fois que $\tau = kT$.

<u>Exemple :</u>

Soit le signal $x(t)$ défini par l'expression suivante :

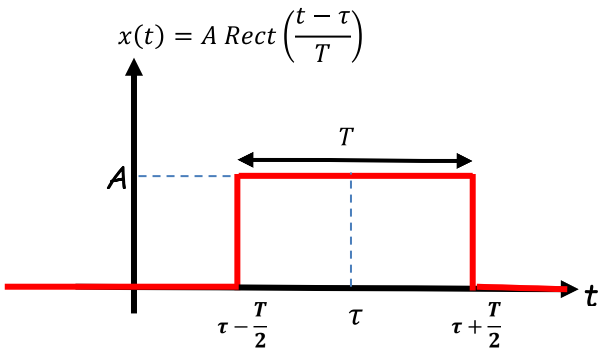
$x(t) = A\ rect\left(\frac{t}{T}\right)$



- Calculer la fonction d'auto-corrélation ?

Solution :

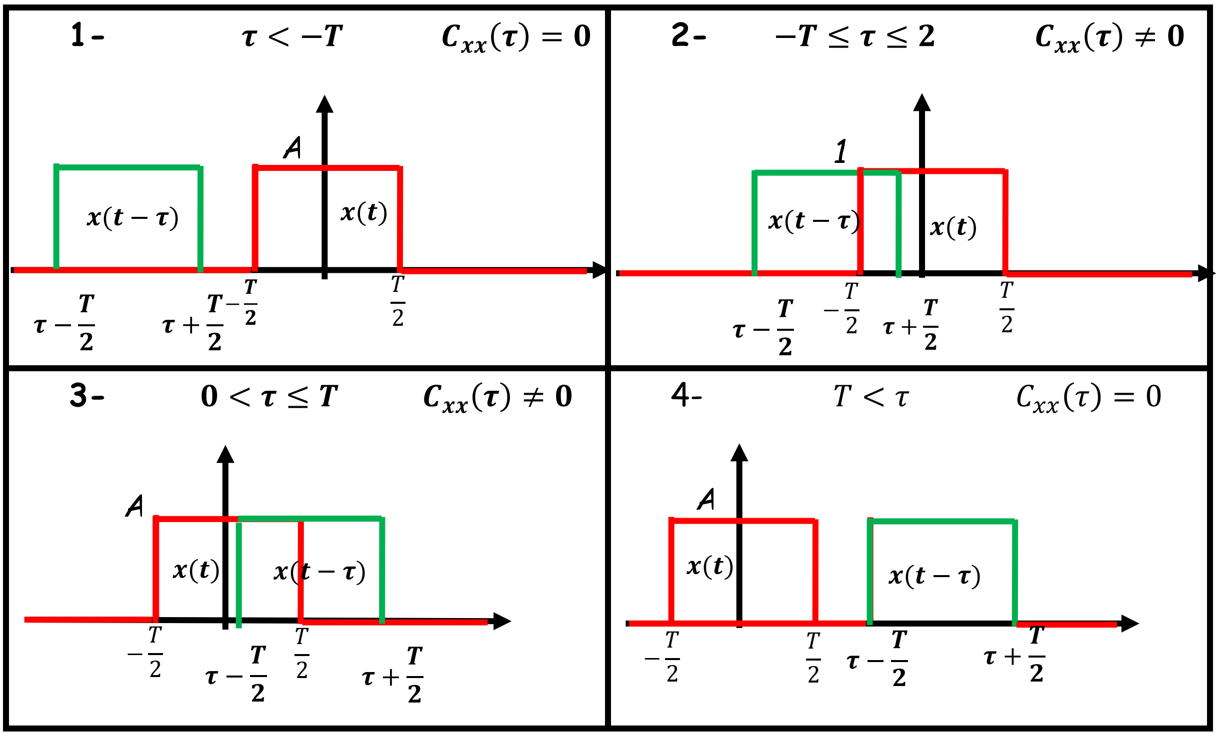
$$x(t-\tau) = A\, rect\left(\frac{t-\tau}{T}\right)$$



On a :

$$C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\; x(t-\tau)\;\; dt$$

Les différents cas de correlation :



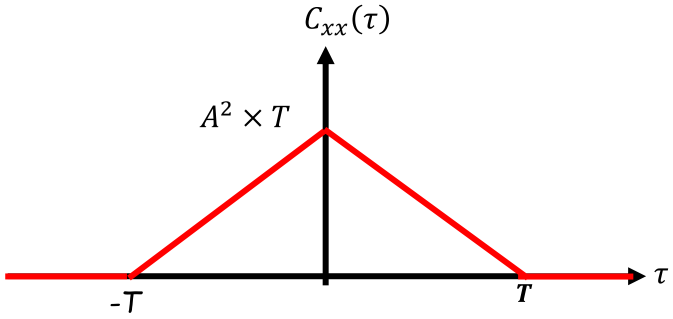
Calcul de la fonction d'auto-corrélation : $C_{xx}(\tau)$:

- $t < 0 \;:\; C_{xx}(\tau) = 0$
- $0 \leq t \leq 2 \;:\; C_{xx}(\tau) = \int_{-\frac{T}{2}}^{t}(A \times A)\;\; d\tau = A^2 \times (\tau + T)$
- $2 < t \leq 4 \;:\; C_{xx}(\tau) = \int_{\tau-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}(A \times A)\;\; d\tau = A^2 \times (T - \tau)$
- $4 < t \;:\; C_{xx}(\tau) = 0$

Donc

$$C_{xx}(\tau) = \begin{cases} A^2 \times (\tau + T) & -T \leq \tau \leq 0 \\ A^2 \times (T - \tau) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

- Représentation graphique de la fonction d'auto-corrélation $C_{xx}(\tau)$:



V.3 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient les deux signaux réels $x(t)$ et $y(t)$.

On a :

$$C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ x(t-\tau)\ \ dt\ < \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\, dt}\ \ \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t-\tau)\, dt}$$

et

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ y(t-\tau)\ \ dt\ < \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\, dt}\ \ \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t-\tau)\, dt}$$

Remarque :

Quand τ tend vers l'infini la fonction de corrélation tend vers zéro.

V.4 Principe d'un radar actif (Exemple d'application)

Le principe de radar actif consiste à transmettre ou envoyer une onde électromagnétique (Signal $x(t)$), qui sera réfléchie et reçue par un récepteur, le signal reçu est noté par $\alpha\, x(t-t_0)$, d'où α représente l'atténuation et t_0 le retard temporel.

Donc pour mesurer la ressemblance entre le signal d'émission et le signal de réception, on utilise la fonction de corrélation, et on écrit :

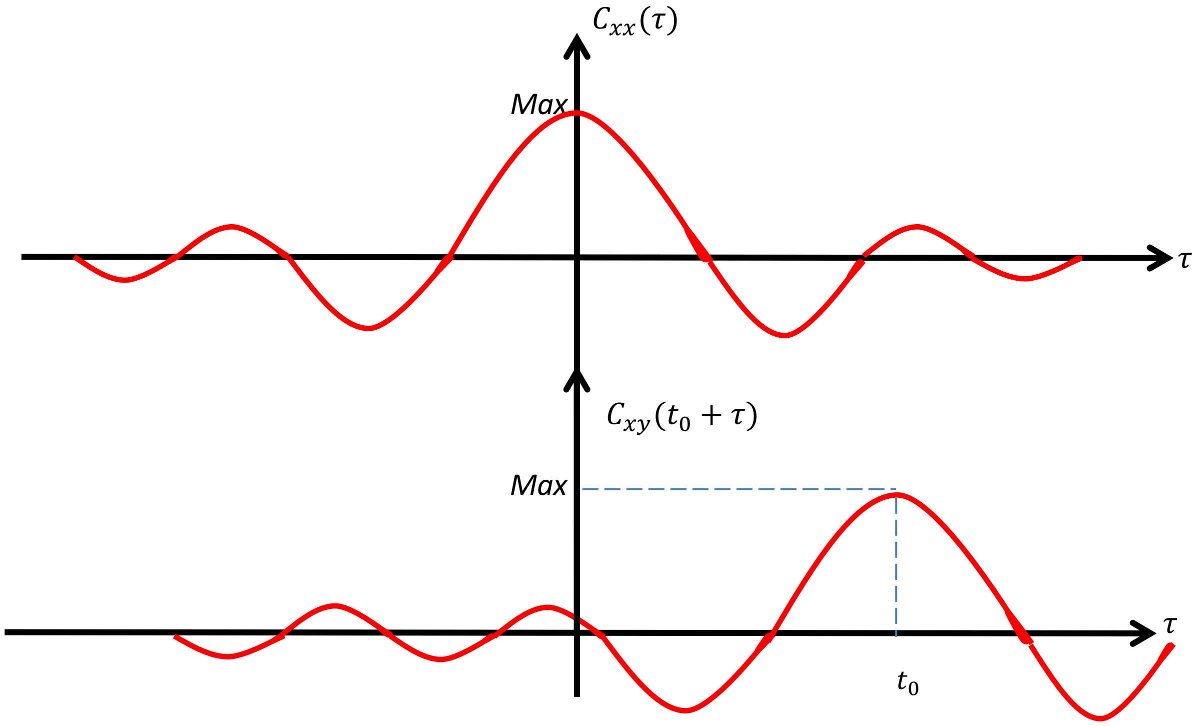
$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ y(t-\tau)\ \ dt$$

On pose : $y(t) = \alpha\, x(t-t_0)$

Donc : $C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ \left(\alpha\, x(t - t_0 - \tau)\right)\ dt$

$$C_{xy}(\tau) = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ x(t - t_0 - \tau)\ dt = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ x\big(t - (t_0 + \tau)\big)\ dt = \alpha\ C_{xy}(t_0 + \tau)$$

Si la fonction de corrélation $C_{xx}(\tau)$ atteint sa valeur maximale à $\tau = 0$, alors la fonction $C_{xy}(t_0 + \tau)$ atteint sa valeur maximale à $\tau = t_0$.



V.5 Densité Spectrale d'Energie (DSE)

La densité spectrale d'Energie notée $S_{xx}(f)$ représente la répartition fréquentielle de l'énergie d'un signal $x(t)$ à énergie finie selon les fréquences qui le compose, et on écrit :

$$S_{xx}(f) = X(f) \times X^*(f) = |X(f)|^2$$

<u>Démonstration :</u>

Soit $x(t)$ un signal à énergie finie, sa densité spectrale d'énergie est donnée par :

$$TF^{-1}[S_{xx}(f)] = TF^{-1}[|X(f)|^2] = TF^{-1}[X(f)\, X^*(f)] = TF^{-1}[X(f)] * TF^{-1}[X^*(f)]$$

On a :

$$TF^{-1}[X(f)] = x(\tau)$$

$$TF^{-1}[X^*(f)] = x^*(-\tau)$$

Donc :

$$TF^{-1}[S_{xx}(f)] = TF^{-1}[X(f)] * TF^{-1}[X^*(f)] = x(\tau) * \ x^*(-\tau)$$

$$TF^{-1}[S_{xx}(f)] = x(\tau) * \ x^*(-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \ y(t-\tau) \ \ dt = C_{xx}(\tau)]$$

V.6 Théorème de Wiener-Khinchin (W-K)

On a :

$$S_{xx}(f) = TF[C_{xx}(\tau)] \quad \text{et} \quad S_{xy}(f) = TF[C_{xy}(\tau)]$$

La densité spectrale de puissance $S_{xx}(f)$ (respectivement $S_{xy}(f)$) traduit la répartition de la puissance du signal $x(t)$ (respectivement de la puissance d'interaction des deux signaux $x(t)$ et $y(t)$) en fonction de la fréquence.

Pour les signaux à puissance moyenne finie, on définit une fonction (inter) corrélation dont la transformée de Fourier est la densité spectrale de puissance moyenne appelée DSP est notée $S_{xx}(f)$ ($S_{xy}(f)$), et on écrit :

$$S_{xx}(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ |X(f)|^2$$

L'étude de ces densités spectrales constitue le domaine de l'analyse spectrale.

V.7 Théorème de Parseval

Soient les deux signaux $x(t)$ et $y(t)$, dont les transformées de Fourier sont respectivement $X(f)$ et $Y(f)$, alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \ y^*(t) \ \ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \ Y^*(f) \ \ df$$

Démonstration :

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \ y^*(t-\tau) \ \ dt = TF^{-1}\big[S_{xy}(f)\big] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \ Y^*(f) \ e^{j2\pi f\tau} \, df$$

Donc pour $\tau = 0$, on aura :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \ y^*(t) \ \ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \ Y^*(f) \ df$$

En particulier :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ x^*(t)\ \ dt\ =\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\ X^*(f)\ \ df\ =\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2\, df$$

Conclusion générale

Dans ce polycopié, nous avons présenté un support de cours sur la théorie du signal pour les étudiants de la deuxième année licence des trois filières (Electronique, Télécommunication, et Génie Biomédicale).

Tout d'abord La théorie du signal est un ensemble de bases théoriques fondamentales et des techniques mathématiques particulières pour traiter et étudier les signaux.

La théorie du signal représente une matière fondamentale très utile pour la formation.

Une étude théorique bien détaillée sur les différents chapitres précisés dans le CANEVAS de la formation avec des travaux dirigés sur chaque chapitre a été faite afin de faciliter la tâche à l'étudiant en mettant entre ces mains un support de cours et de travaux dirigés très solide.

Bibliographie

[1] B. Picinbono, Théorie des signaux et des systèmes, 1989, 260 pages, Dunod Université. ISBN 2-04-018837-1.

[2] J.-F. BERCHER, TF, DIRAC, CONVOLUTION, ET *TUTTI QUANTI, École Supérieure d'Ingénieurs en Électrotechnique et Électronique, Octobre 2001 – version 0.2.*

[2] F. de Coulon, Théorie et traitement des signaux, Dunod, Paris, 1985.

[3] MICHAEL J. CHAPMAN DAVID P. GOODALL and NIGEL C. STEELE, Signal Processing in Electronic Communications, School of Mathematics and Information Sciences University. of Coventry First, England 1997.

[4] J. Max et J.-L. Lacoume, Méthodes et techniques de traitement du signal et application aux mesures physiques, Masson, Paris, 1996.

[5] Michael J. Roberts, Signals and Systems, *Analysis Using Transform Methods and MATLAB, Second Edition, Department of Electrical and Computer Engineering University of Tennessee, New York, NY 10020. Copyright © 2012.*

[6] J.-P. Delmas, Eléments de théorie du signal : les signaux d´déterministes, Ellipses, Paris, 1991.

Partie II : Travaux dirigés

Série de TD N°1 : Généralités sur les signaux

Exercice N°1 :

1. Soient les signaux suivants : $x(t) = rect(t),\ y(t) = tri(t)\ et\ z(t) = sgn(t)$
   2. Représenter graphiquement les signaux suivants :

$$x(t), y(t), z(t), x(t+3), y(2t-4), y\left(\frac{-t}{3}+3\right), et \quad z(-t-2).$$

2. On considère le signal suivant : $x(t) = rect(t) + 2 \times rect\left(t - \frac{1}{2}\right)$
   3. Représenter le signal $x(t)$; Calculer, puis tracer $x'(t) = \frac{d\,x(t)}{dt}$

3. Donner l'expression du signal $x(t) = A\,rect\left(\frac{t-\tau}{T}\right)$ à l'aide de deux fonctions signes ; Justifier graphiquement la solution trouvée.

Exercice N°2 :

Soit le signal discret suivant : (Rappelant que $u[n]$ est le signal Echelon unité, et $\delta[n]$ l'impulsion de Dirac).

$$x[n] = 3\delta[n+3] + 2\delta[n+2] + \delta[n+1] + \delta[n-1] + 2\delta[n-2] + 3\delta[n-3]$$

1. Tracer les signaux suivants :

$$x[n], \quad x[n-3], \quad x[2n], \quad x\left[-\frac{n}{3}+2\right], \quad x[n]\delta[n+2], \quad et\ x[n]u[n-2]$$

Exercice N°3 :

1. Déterminer si les signaux suivants sont des signaux à énergie finie, à puissance moyenne finie, ou ni l'un ni l'autre.

   $x_1(t) = e^{-t}\,u(t),\ x_2(t) = A\cos(2\pi f_0 t),\ et\ \ x_3(t) = t\,u(t).$

2. Déterminer si les signaux ci-dessous sont périodiques ou non, et donner la période fondamentale dans le cas favorable.

   $x_1(t) = \cos(4\pi t + \varphi), \quad x_2(t) = A\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right), x_3[n] = cos^2\left(\frac{\pi}{8}n\right), et\ x_4[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)$

Exercice N°4 :

1. Montrer que le produit de deux signaux pairs ou impairs donne un signal pair, et que le produit entre un signal pair et un signal impair donne un signal impair.
2. Déterminer la partie paire, et celle impaire des deux signaux suivants :

$$x_1(t) = u(t), \qquad et\ \ x_2(t) = e^{-t}\,u(t)$$

Corrigé de la série de TD N°1 : Généralités sur les signaux

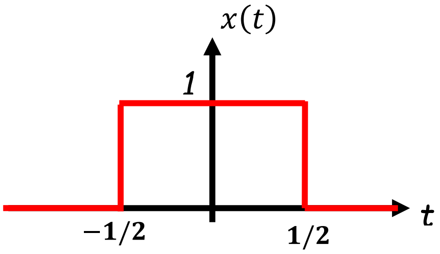
Exercice N°1 :

1. Soient les signaux suivants : $x(t) = rect(t),\ y(t) = tri(t)\ et\ z(t) = sgn(t)$
   - Représenter graphiquement les signaux suivants :

     $x(t), y(t), z(t), x(t+3), y(2t-4), y\left(\frac{-t}{3}+3\right), et\ \ z(-t-2).$

La solution :

- $x(t) = rect(t) : A = 1, \tau = 0\ et\ T = 1$



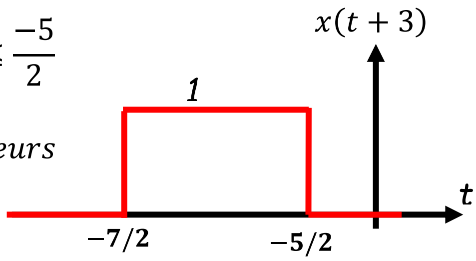
L'expression analytique du signal $x(t)$ est :

$$x(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

- $x(t+3)$

L'expression analytique du signal $x(t)$ est :

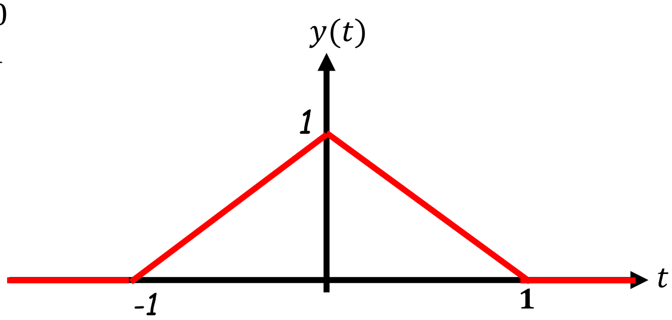
$$x({\color{red}t+3}) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \leq {\color{red}t+3} \leq \frac{1}{2} \\ 0 & ailleurs \end{cases} = \begin{cases} 1 & -\frac{7}{2} \leq t \leq \frac{-5}{2} \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$



- $y(t) = tri(t)\ : A = 1, \tau = 0\ et\ T = 1$

L'expression analytique du signal $y(t)$ est :

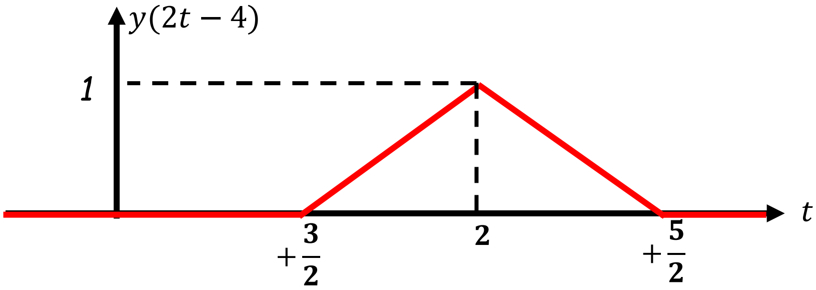
$$y(t) = \begin{cases} t+1 & -1 \leq t \leq 0 \\ -t+1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$



- $y(2t-4)$

L'expression analytique :

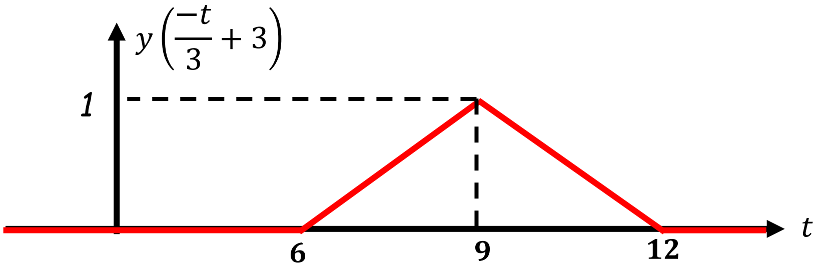
$$y(2t-4)=\begin{cases} 2t-4+1 & -1\leq 2t-4\leq 0 \\ -(2t-4)+1 & 0\leq 2t-4\leq 1 \\ 0 & ailleurs \end{cases} = \begin{cases} 2t-3 & +\frac{3}{2}\leq t\leq 2 \\ -2t+5 & 2\leq t\leq +\frac{5}{2} \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$



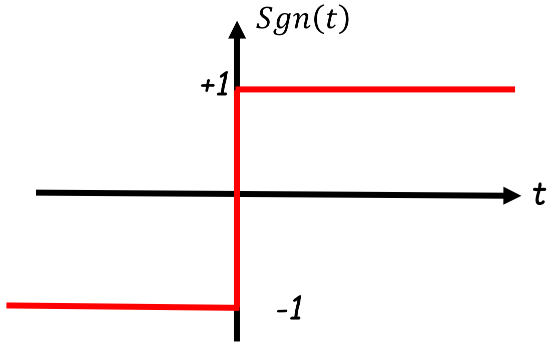
- $y\left(\frac{-t}{3}+3\right)$

L'expression analytique :

$$y\left(\frac{-t}{3}+3\right)=\begin{cases} \frac{-t}{3}+3+1 & -1\leq \frac{-t}{3}+3\leq 0 \\ -\left(\frac{-t}{3}+3\right)+1 & 0\leq \frac{-t}{3}+3\leq 1 \\ 0 & ailleurs \end{cases} = \begin{cases} \frac{t}{3}-2 & 6\leq t\leq 9 \\ \frac{-t}{3}+4 & 9\leq t\leq +\frac{5}{2} \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$



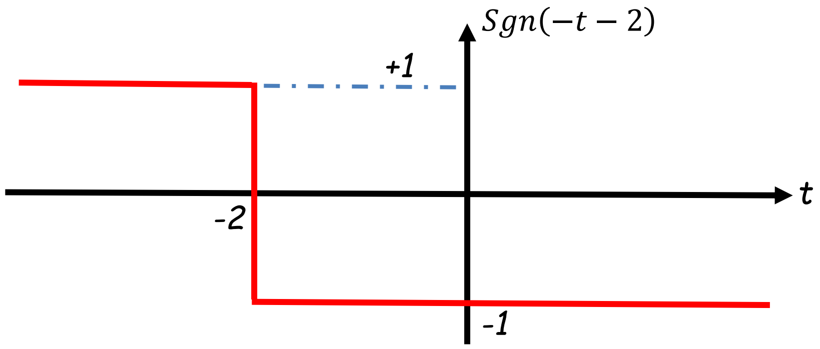
- $z(t)=sgn(t)=\begin{cases} 1 & t\geq 0 \\ -1 & t<0 \end{cases}$



- $z(-t-2)$

L'expression analytique :

$$z(-t-2) = sgn(-t-2) = \begin{cases} 1 & -t-2 \geq 0 \\ -1 & -t-2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & t \leq -2 \\ -1 & t > -2 \end{cases}$$

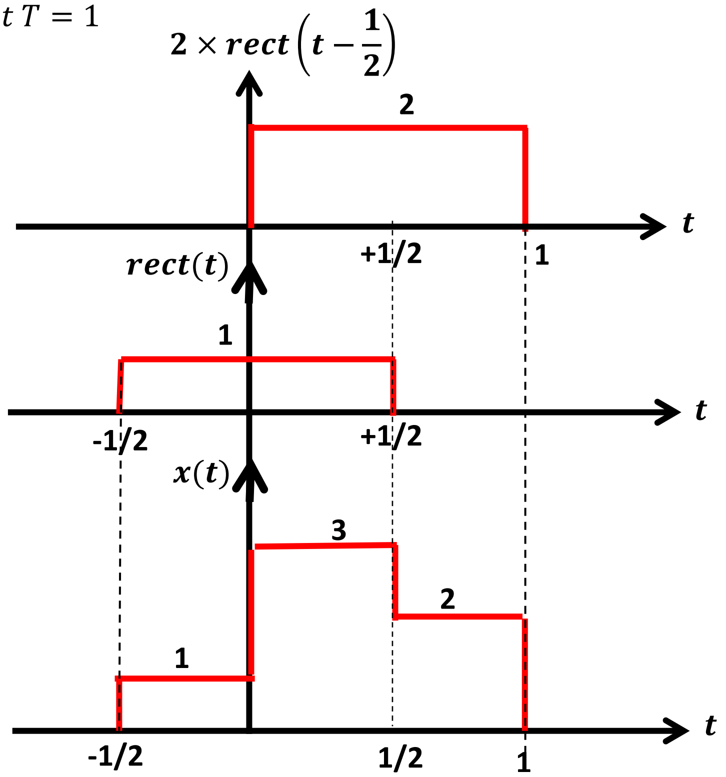


Remarque :

Dans le cas où on a plusieurs opérations à effectues sur le même signal, il y a un ordre à respecter, on doit commencer par le décalage, puis on passe au changement d'échelle (compression ou expansion), et finit par l'opération de l'effet miroir.

2. **On considère le signal suivant :** $\boldsymbol{x(t) = rect(t) + 2 \times rect\left(t - \frac{1}{2}\right)}$

- $2 \times rect\left(t - \frac{1}{2}\right)$: $A = 2, \tau = +\frac{1}{2}$ et $T = 1$
- $rect(t)$: $A = 1, \tau = 0$ et $T = 1$



Méthode analytique :

$$rect(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2} \\ 0 & ailleurs \end{cases} \quad \text{et} \quad 2 \times rect\left(t - \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 2 & 0 \le t \le 1 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

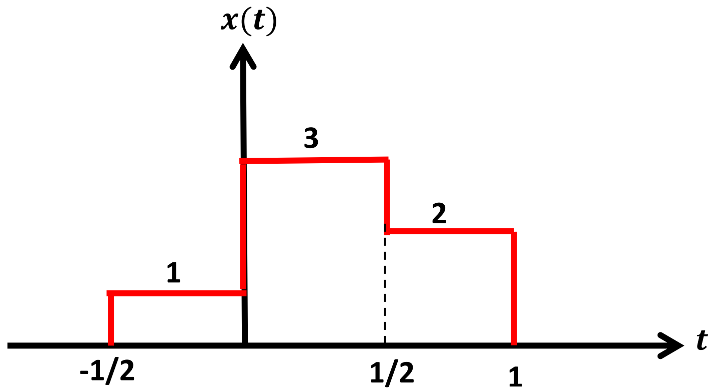
-1/2, 0 , +1/2 , 1

On obtient alors :

$$rect(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \le t \le 0 \\ 1 & 0 \le t \le +\frac{1}{2} \\ 0 & +\frac{1}{2} \le t \le 1 \\ 0 & ailleurs \end{cases} \quad \text{et} \quad 2 \times rect\left(t - \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 0 & -\frac{1}{2} \le t \le 0 \\ 2 & 0 \le t \le +\frac{1}{2} \\ 2 & +\frac{1}{2} \le t \le 1 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

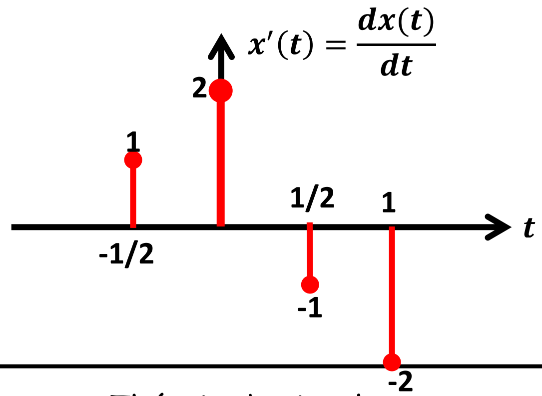
Donc :

$$x(t) = rect(t) + 2 \times rect\left(t - \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 1+0 & -\frac{1}{2} \le t \le 0 \\ 1+2 & 0 \le t \le +\frac{1}{2} \\ 0+2 & +\frac{1}{2} \le t \le 1 \\ 0+0 & ailleurs \end{cases} = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \le t \le 0 \\ 3 & 0 \le t \le +\frac{1}{2} \\ 2 & +\frac{1}{2} \le t \le 1 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

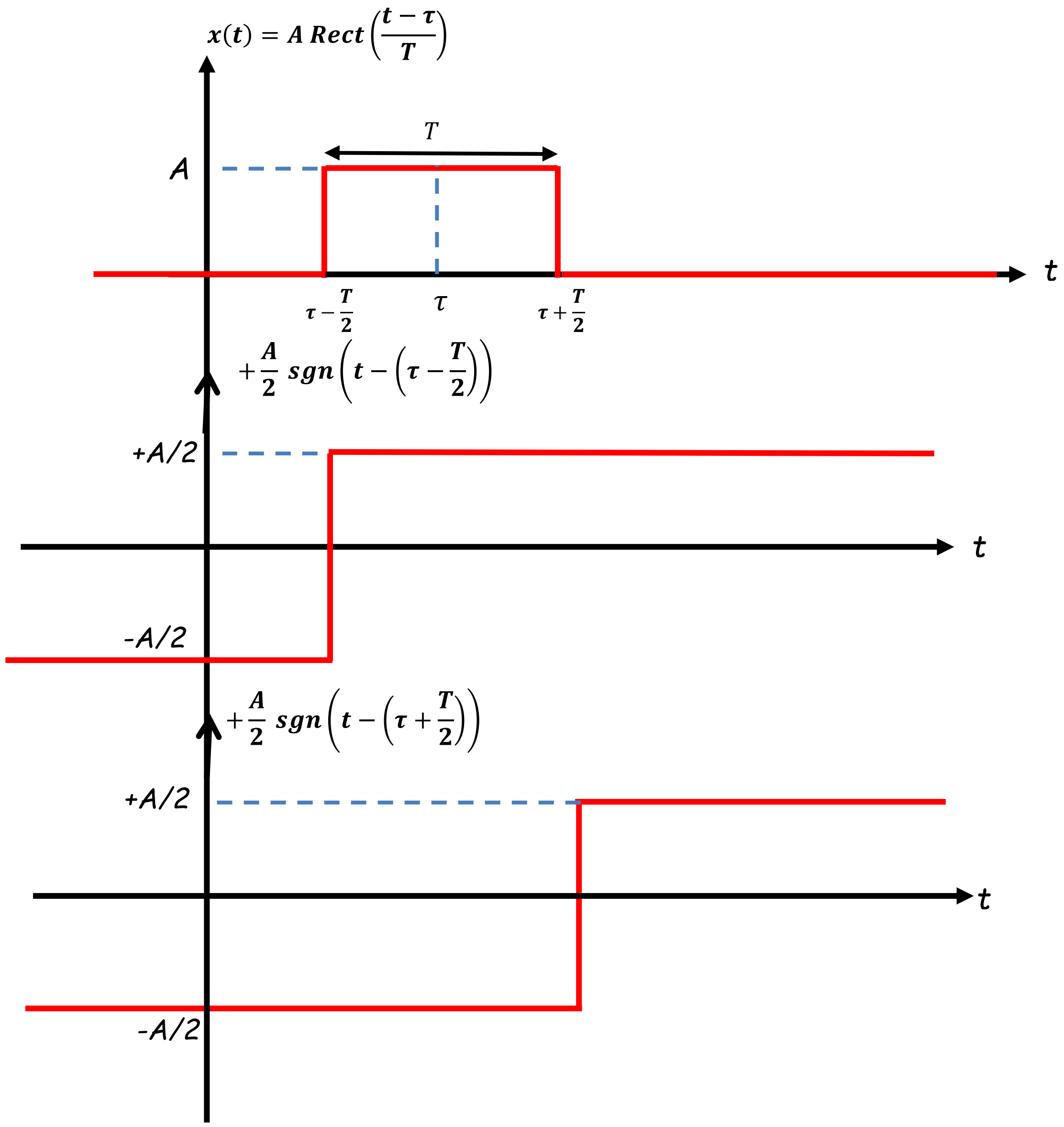


- ***La dérivée du signal $x(t)$:***

$$x'(t) = \frac{dx'(t)}{dt} = \delta\left(t + \frac{1}{2}\right) + 2 \times \delta(t) - \delta\left(t - \frac{1}{2}\right) - 2 \times \delta(t-1)$$



3. ***Représentation du signal*** $x(t) = rect\left(\frac{t-\tau}{T}\right)$ ***en fonction de deux fonctions signe :***



Donc :

$$x(t) = rect\left(\frac{t-\tau}{T}\right) = +\frac{A}{2}\,sgn\left(t-\left(\tau-\frac{T}{2}\right)\right) - \frac{A}{2}\,sgn\left(t-\left(\tau+\frac{T}{2}\right)\right)$$

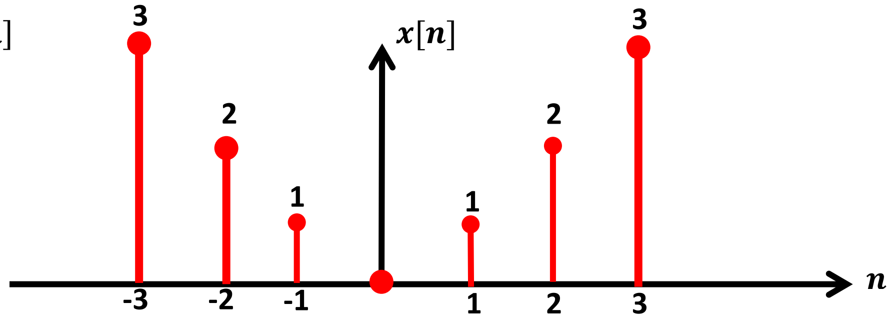
Exercice N°2 :

Soit le signal discret suivant : (Rappelant que $u[n]$ est le signal Echelon unité, et $\delta[n]$ l'impulsion de Dirac).

$$x[n] = 3\delta[n+3] + 2\delta[n+2] + \delta[n+1] + \delta[n-1] + 2\delta[n-2] + 3\delta[n-3]$$

1. Tracer les signaux suivants :

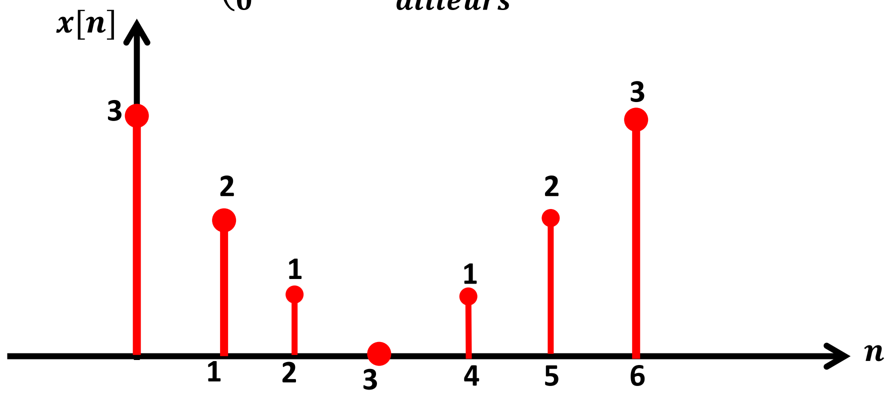
- $\boldsymbol{x[n]}$



L'expression analytique du signal $x[n]$:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & n = -1, 1 \\ 2 & n = -2, 2 \\ 3 & n = -3, 3 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

- $\boldsymbol{x[n-3]}$



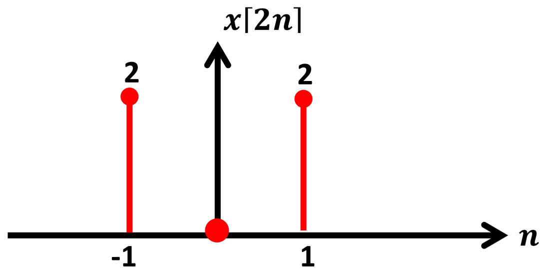
L'expression analytique du signal $x[n]$:

$$x[n-3] = \begin{cases} 1 & n-3 = -1, 1 \\ 2 & n-3 = -2, 2 \\ 3 & n-3 = -3, 3 \\ 0 & ailleurs \end{cases} = \begin{cases} 1 & n = 2, 4 \\ 2 & n = 1, 5 \\ 3 & n = 0, 6 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

- $\boldsymbol{x[2n]}$

L'expression analytique du signal $x[n]$:

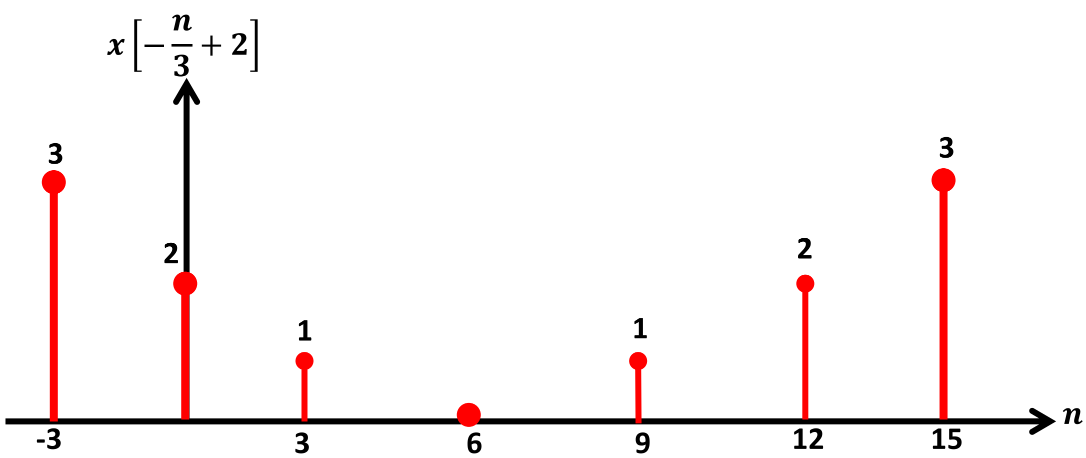
$$x[2n] = \begin{cases} 1 & 2n = -1, 1 \\ 2 & 2n = -2, 2 \\ 3 & 2n = -3, 3 \\ 0 & ailleurs \end{cases} = \begin{cases} 1 & n = \frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \\ 2 & n = -1, 1 \\ 3 & n = -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \\ 0 & ailleurs \end{cases} = \begin{cases} 2 & n = -1, 1 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$



- $x\left[-\frac{n}{3}+2\right]$

L'expression analytique du signal $x[n]$:

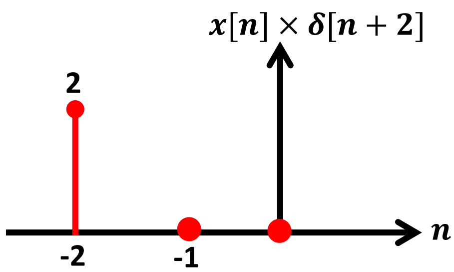
$$x\left[-\frac{n}{3}+2\right]=\begin{cases}1 & -\frac{n}{3}+2=-1,1\\ 2 & -\frac{n}{3}+2=-2,2\\ 3 & -\frac{n}{3}+2=-3,3\\ 0 & ailleurs\end{cases}=\begin{cases}1 & n=3,9\\ 2 & n=0,12\\ 3 & n=-3,15\\ 0 & ailleurs\end{cases}$$



- $x[n]\times\delta[n+2]$

<u>L'expression analytique :</u>

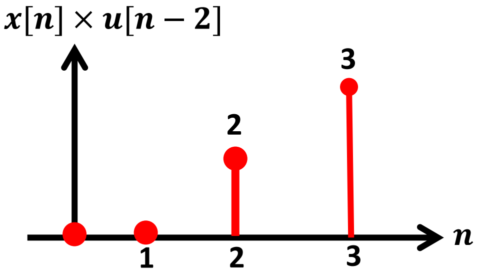
$$\delta[n+2]=\begin{cases}1 & n=-2\\ 0 & n\neq-2\end{cases}\Rightarrow x[n]\times\delta[n+2]=\begin{cases}2\times1 & n=-2\\ 0 & n\neq-2\end{cases}=\begin{cases}2 & n=-2\\ 0 & n\neq-2\end{cases}$$



- $x[n] \times u[n-2]$

L'expression analytique :

$$u[n-2] = \begin{cases} 1 & n \geq 2 \\ 0 & n < 2 \end{cases} \Rightarrow x[n] \times u[n-2] = \begin{cases} 2 \times 1 & n = 2 \\ 3 \times 1 & n = 3 \\ 0 & ailleurs \end{cases} = \begin{cases} 2 & n = 2 \\ 3 & n = 3 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$



Exercice N°3 :

3. Déterminer si les signaux suivants sont des signaux à énergie finie, à puissance moyenne finie, ou ni l'un ni l'autre.

   $x_1(t) = e^{-t}\, u(t),\ x_2(t) = A\cos(2\pi f_0 t)\,,\ et\ \ x_3(t) = t\, u(t).$

Solution :

L'Energie : $E = \lim\limits_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$

La Puissance : $P = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$

- $\boldsymbol{x_1(t) = e^{-t}\, u(t)}$

$$E = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} A^2 \int_{0}^{T/2} e^{-2t}\, dt = \frac{A^2}{2}$$

$$E = \frac{A^2}{2} \quad \Rightarrow \quad P = 0$$

- $\boldsymbol{x_2(t) = A\cos(2\pi f_0 t)}$

$$E = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} A^2 \int_{-T/2}^{T/2} \boldsymbol{\cos^2(2\pi f_0 t)}\ dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{2} \int_{-T/2}^{T/2} (1 + \boldsymbol{\cos(4\pi f_0 t)})\ dt = \infty$$

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \boldsymbol{cos^2(2\pi f_0 t)}\ dt$$

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} (1 + \boldsymbol{cos(4\pi f_0 t)})\ dt\ = \frac{A^2}{2}$$

- $\boldsymbol{x_3(t) = t\, u(t)}$.

$$E = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \int_{0}^{T/2} t^2\ dt\ = \infty$$

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{0}^{T/2} t^2\ dt\ = \infty$$

4. Déterminer si les signaux ci-dessous sont périodiques ou non, et donner la période fondamentale dans le cas favorable.

$$x_1(t) = \cos(4\pi t + \varphi)\,,\ x_2(t) = A\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right),\ x_3[n] = cos^2\left(\frac{\pi}{8}\ n\right)$$

et $x_4[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}\ n\right) cos\left(\frac{\pi}{3}\ n\right)$.

Solution :

- $x_1(t) = \cos(4\pi t + \varphi)$

Dans le cas général, un signal sinusoïdal est écrit sous la forme : $x(t) = \boldsymbol{A\ cos\ \left(\frac{2\pi}{T}\ t + \varphi\right)}$

d'où **:** A représente l'amplitude, T représente la période et φ représente la phase.

Donc pour déterminer la reiode d'un signal sinusoïdal, on s'intéresse à la pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$ qui comporte l'information de la période.

$$\cos(4\pi t + \varphi) \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 4\pi \quad \Rightarrow T = \frac{1}{2}$$

- $x_2(t) = A\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) \ \Rightarrow \ \omega = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{\pi}{3} \ \Rightarrow T_1 = 6$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \ \Rightarrow \ \omega = \frac{2\pi}{T_2} = \frac{\pi}{4} \ \Rightarrow T_2 = 8$$

La période fondamentale du signal est égale au ***Plus Petit Multiple Commun (PPMC)*** des périodes qui composent le signal, et on écrit : $\boldsymbol{T = PPMC(T_1, T_2)}$

Donc : $\boldsymbol{T = PPMC(T_1, T_2) = PPMC(6, 8) = 24}$

- $x_3[n] = cos^2\left(\frac{\pi}{8}\, n\right)$

On a :

$$cos^2\left(\frac{\pi}{8}\, n\right) = \frac{1 + cos\left(\frac{\pi}{4}\, n\right)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, cos\left(\frac{\pi}{4}\, n\right)$$

Dans le cas des signaux discrets, la période de la composante continue est égale toujours à un.

$$\frac{1}{2} \Rightarrow \quad T_1 = 1$$

$$cos\left(\frac{\pi}{4}\, n\right) \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T_2} = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow T_2 = 8$$

$$\boldsymbol{T = PPMC(T_1, T_2) = PPMC(1, 8) = 8}$$

- $x_4[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}\, n\right) cos\left(\frac{\pi}{3}\, n\right)$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\, n\right) cos\left(\frac{\pi}{3}\, n\right) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{5\pi}{6}\, n\right) + \frac{1}{2} cos\left(\frac{\pi}{6}\, n\right)$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\, n\right) \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{5\pi}{6} \quad \Rightarrow T_1 = \frac{12}{5}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\, n\right) \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T_2} = \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow T_2 = 12$$

$$\boldsymbol{T = PPMC(T_1, T_2) = PPMC\left(\frac{12}{5}, 12\right) = 12}$$

<u>Exercice N°4 :</u>

1. Montrer que le produit de deux signaux pairs ou impairs donne un signal pair, et que le produit entre un signal pair et un signal impair donne un signal impair.

Solution :

- Soient deux signaux pairs $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

Soit le signal $y(t)$ qui représente le produit entre les deux signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$, et on ecrit

$$y(t) = x_1(t) \times x_2(t) \quad \Rightarrow \quad y(-t) = x_1(-t) \times x_2(-t) = x_1(t) \times x_2(t) = \; y(t)$$

$$y(-t) = \; y(t) \; \Rightarrow \; La\; produit\; est\; pair$$

- Soient deux signaux impairs $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

Soit le signal $y(t)$ qui représente le produit entre les deux signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$, et on ecrit

$$y(t) = x_1(t) \times x_2(t) \quad \Rightarrow \quad y(-t) = x_1(-t) \times x_2(-t) = \big(-x_1(t)\big) \times \big(-x_2(t)\big) = \; y(t)$$

$$y(-t) = \; y(t) \; \Rightarrow \; La\; produit\; est\; pair$$

- Soient deux signaux tel que : $x_1(t)$ est signal pair et $x_2(t)$ est signal impair

Soit le signal $y(t)$ qui représente le produit entre les deux signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$, et on ecrit

$$y(t) = x_1(t) \times x_2(t) \quad \Rightarrow \quad y(-t) = x_1(-t) \times x_2(-t) = x_1(t) \times \left(-x_2(t)\right) = \; -y(t)$$

$$y(-t) = \; -y(t) \; \Rightarrow \; La\ produit\ est\ impair$$

2. Déterminer la partie paire, et celle impaire des deux signaux suivants :

$$x_1(t) = u(t), \qquad et \;\; x_2(t) = e^{-t}\, u(t)$$

Solution :

Tout signal réel est composé d'une partie paire et une partie impaire, et on écrit :

$$x(t) = x_p(t) + x_i(t)$$

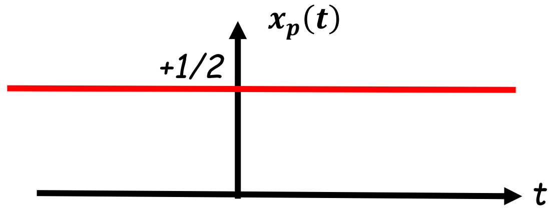
D'où :

$\boldsymbol{x_p(t)}$ représente la partie paire du signal $x(t)$ et $\boldsymbol{x_i(t)}$ représente lz partie impaire du signal $x(t)$, telles que :

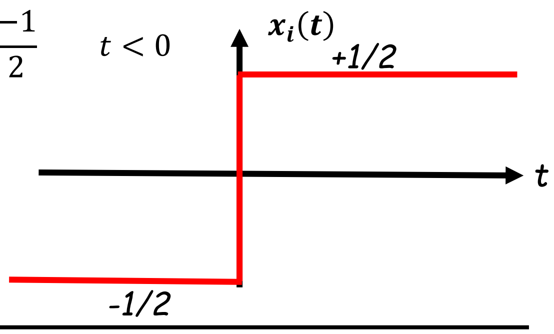
$$\boldsymbol{x_p(t)} = \frac{x(t) + x(-t)}{\mathbf{2}} \qquad \boldsymbol{et} \qquad \boldsymbol{x_i(t)} = \frac{x(t) - x(-t)}{\mathbf{2}}$$

- $x_1(t) = u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \;\; \Rightarrow \;\; x_1(-t) = u(-t) = \begin{cases} 1 & t \leq 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$

$$\boldsymbol{x_p(t)} = \frac{x_1(t) + x_1(-t)}{\mathbf{2}} = \begin{cases} \dfrac{1+0}{2} & t \geq 0 \\[2ex] \dfrac{0+1}{2} & t < 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & t \geq 0 \\[2ex] \dfrac{1}{2} & t < 0 \end{cases}$$

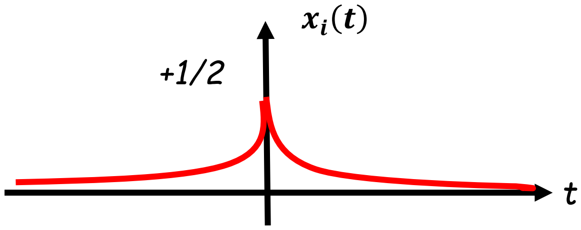


$$\boldsymbol{x_i(t)} = \frac{x_1(t) - x_1(-t)}{\mathbf{2}} = \begin{cases} \dfrac{1-0}{2} & t \geq 0 \\[2ex] \dfrac{0-1}{2} & t < 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & t \geq 0 \\[2ex] \dfrac{-1}{2} & t < 0 \end{cases}$$

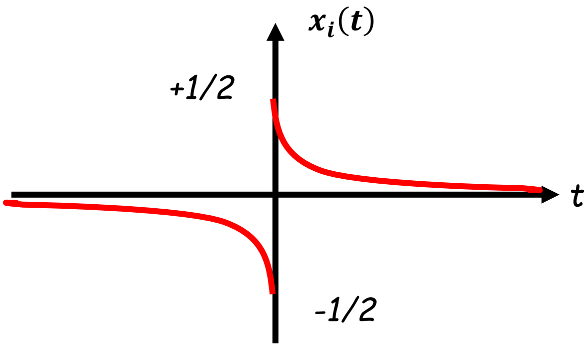


- $x_2(t) = e^{-t}\,u(t) = \begin{cases} e^{-t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \Rightarrow x_2(-t) = \begin{cases} e^{t} & t \leq 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$

$$\boldsymbol{x_p(t)} = \frac{x_2(t) + x_2(-t)}{\mathbf{2}} = \begin{cases} \dfrac{e^{-t} + 0}{2} & t \geq 0 \\[2ex] \dfrac{0 + e^{t}}{2} & t < 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\,e^{-t} & t \geq 0 \\[2ex] \dfrac{1}{2}\,e^{t} & t < 0 \end{cases}$$



$$\boldsymbol{x_i(t)} = \frac{x_2(t) - x_2(-t)}{\mathbf{2}} = \begin{cases} \dfrac{e^{-t} - 0}{2} & t \geq 0 \\[2ex] \dfrac{0 - e^{t}}{2} & t < 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\,e^{-t} & t \geq 0 \\[2ex] \dfrac{-1}{2}\,e^{t} & t < 0 \end{cases}$$



Série de TD N°2 : Systèmes Linéaires et Invariants dans le Temps (SLIT) – Produit de Convolution

Exercice N°1 :

- Etudier la linéarité et l'invariance temporelle des systèmes suivants :
  1. $y(t) = x(t) + 5$
  2. $y(t) = (t-1)\,x(t)$
  3. $y(t) = |x(t)|$

Exercice N°2 :

Soient les trois systèmes continus suivants

1. $x(t) = u(t) - u(t-2) \quad et \quad h(t) = t\,u(t)$
2. $x(t) = e^{-t}\,u(t) \quad et \quad h(t) = \begin{cases} 1-t & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$

- Calculer et représenter la sortie $y(t) = x(t) * h(t)$ de chaque système.

Rappelant que : $u(t)$ est le signal Echelon unité, $x(t)$ est l'entrée du système, $h(t)$ est la réponse impulsionnelle du système, et * signifie le produit de convolution.

Exercice N°3 :

Considérons les signaux discrets suivants :

1. $x_1[n] = \delta[n]$
2. $x_2[n] = 2\delta[n-1] - 3\delta[n+2]$
3. $x_3[n] = \delta[n-2] + \delta[n] + \delta[n+3]$
4. $x_4[n] = u[n]$

- Calculer : $y_1[n] = x_1[n] * x_2[n]$, $y_2[n] = x_2[n] * x_3[n]$, $et\; y_3[n] = x_3[n] * x_4[n]$

Exercice N°4 :

Considérons le système discret de réponse impulsionnelle $h[n] = u[n] - u[n-2]$.

- Calculer la sortie du système $y[n] = x[n] * h[n]$, sachant que : $x[n] = [1\ 2\ 3]$.

Corrigé de la série de TD N°2 : SLIT et Produit de convolution

Exercice N°1 :

- Etudier la linéarité et l'invariance temporelle des systèmes suivants :

1. $y(t) = x(t) + 5$
2. $y(t) = (t-1)\, x(t)$
3. $y(t) = |x(t)|$

Solution :

a. Etude de la linéarité

- $\boldsymbol{y(t) = x(t) + 5}$

$$x_1(t) \longrightarrow \boxed{T[\square]} \longrightarrow y_1(t) = T[x_1(t)] = x_1(t) + 5$$

$$x_2(t) \longrightarrow \boxed{T[\square]} \longrightarrow y_2(t) = T[x_2(t)] = x_2(t) + 5$$

$$\alpha\, x_1(t) + \beta\, x_2(t) \longrightarrow \boxed{T[\square]} \longrightarrow y(t) = T[\alpha\, x_1(t) + \beta\, x_2(t)] = \alpha\, x_1(t) + \beta\, x_2(t) + 5$$

Donc :

$$T[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] \neq \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) \quad \Rightarrow \textit{Le système n'est pas linéaire}$$

- $\boldsymbol{y(t) = (t-1)\, x(t)}$

$$x_1(t) \longrightarrow \boxed{T[\square]} \longrightarrow y_1(t) = T[x_1(t)] = (t-1)\, x_1(t)$$

$$x_2(t) \longrightarrow \boxed{T[\square]} \longrightarrow y_2(t) = T[x_2(t)] = (t-1)\, x_2(t)$$

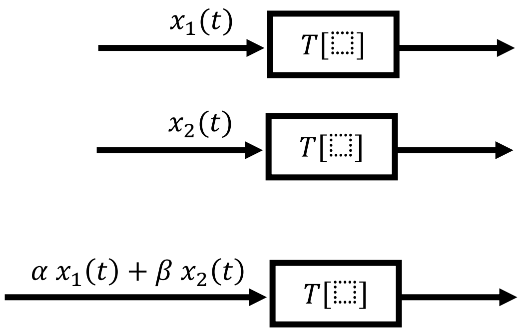
$$\alpha\, x_1(t) + \beta\, x_2(t) \longrightarrow \boxed{T[\square]} \longrightarrow y(t) = T[\alpha\, x_1(t) + \beta\, x_2(t)] = (t-1)\big(\alpha\, x_1(t) + \beta\, x_2(t)\big)$$

$$y(t) = \alpha\,(t-1)\, x_1(t) + \beta\,(t-1)\, x_2(t)$$

Donc :

$$T[\alpha\, x_1(t) + \beta\, x_2(t)] = \alpha\, y_1(t) + \beta\, y_2(t) \quad \Rightarrow \textit{Le système est linéaire}$$

- $y(t) = |x(t)|$



$$y_1(t) = T[x_1(t)] = |x_1(t)|$$

$$y_2(t) = T[x_2(t)] = |x_2(t)|$$

$$y(t) = T[\alpha\, x_1(t) + \beta\, x_2(t)] = |\alpha\, x_1(t) + \beta\, x_2(t)|$$

$$y(t) \neq \alpha|x_1(t)| + \beta\,|x_2(t)|$$

Donc :

$$T[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] \neq \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) \Rightarrow \textit{Le système n'est pas linéaire}$$

<u>Exercice N°2 :</u>

Soient les trois systèmes continus suivants

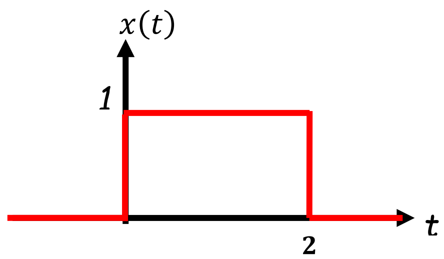
1. $x(t) = u(t) - u(t-2) \quad et \quad h(t) = t\,u(t)$
2. $x(t) = e^{-t}\,u(t) \quad et \quad h(t) = \begin{cases} 1 - t & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$

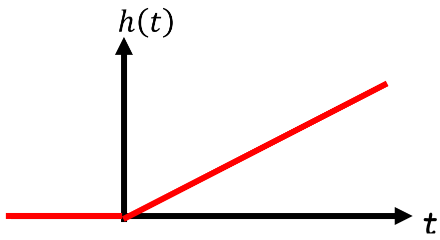
- Calcul et représenter la sortie $y(t) = x(t) * h(t)$ de chaque système.

$$x(t) = u(t) \qquad \text{et} \qquad h(t) = e^{-t}\,u(t)$$

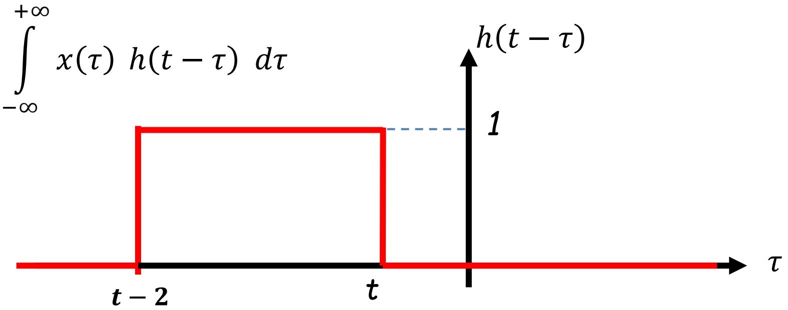
Soit le SLIT représenté par son entrée $x(t)$ et sa réponse impulsionnelle $h(t)$ comme suit :

$$x(t) = u(t) - u(t-2) \quad = rect\left(\frac{t-1}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad h(t) = t\,u(t)$$

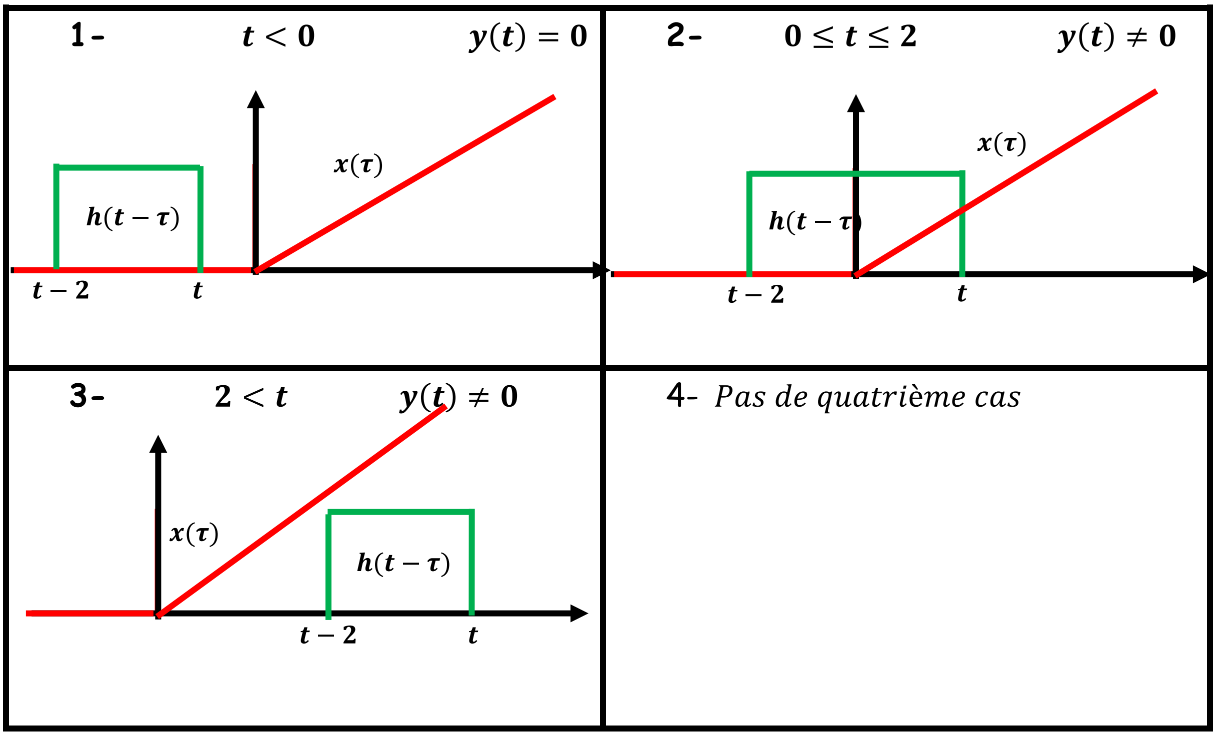




$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\; h(t-\tau)\; d\tau$$



Les différents cas de convolution :

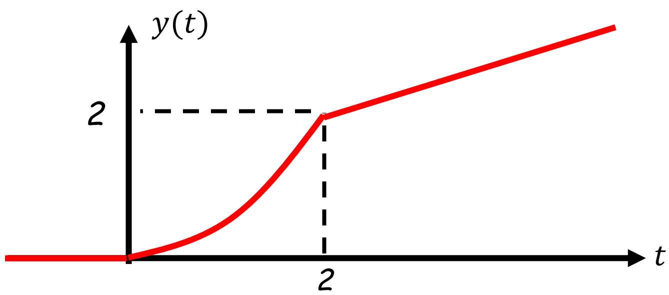


Calcul de la sortie du système $y(t)$:

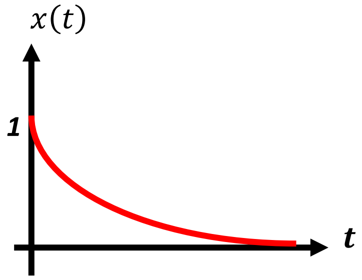
- $t < 0 \;:\; y(t) = 0$
- $0 \le t \le 2 \;:\; y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t (1 \times \tau)\, d\tau = \left.\frac{\tau^2}{2}\right|_0^t = \frac{t^2}{2}$
- $2 < t \;:\; y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{t-2}^{t} (1 \times \tau)\, d\tau = \left.\frac{\tau^2}{2}\right|_{t-2}^{t} = 2t - 2$

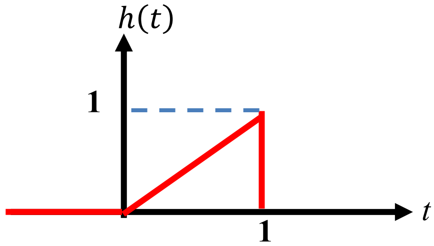
Donc

$$y(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} & 0 \le t \le 2 \\ 2t-2 & 2 \le t \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



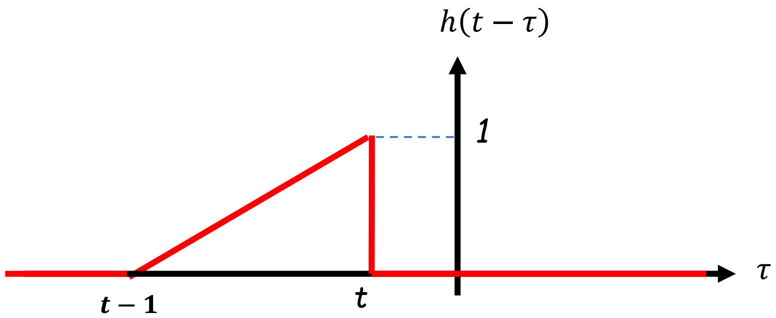
- $x(t) = e^{-t}\, u(t)$ $\quad$ et $\quad$ $h(t) = \begin{cases} 1 - t & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$





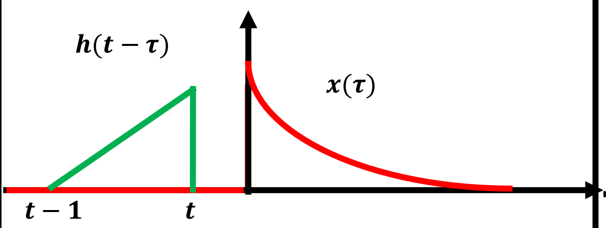
On a :

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\; h(t-\tau)\; d\tau$$

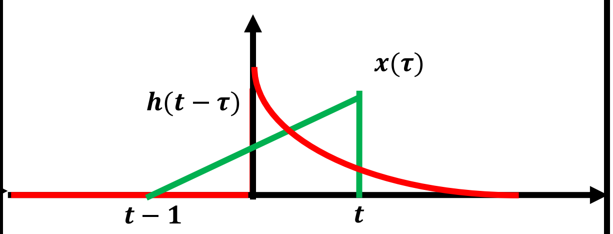


Les différents cas de convolution :

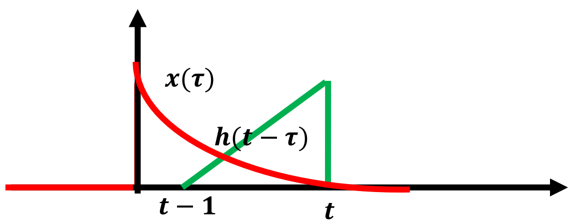
1- $\quad t < 0 \quad y(t) = 0$



2- $\quad 0 \leq t \leq 1 \quad y(t) \neq 0$



3- $\quad 1 < t \quad y(t) \neq 0$



4- *Pas de quatrième cas*

Calcul de la sortie du système $y(t)$:

- $\boldsymbol{t} < 0$: $y(t) = 0$
- $0 \leq t \leq 1$: $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\ h(t-\tau)\ d\tau = \int_{0}^{t} \left(e^{-\tau} \times (1+\tau-t)\right)\ d\tau$

$$y(t) = -2 \times e^{-t} - t + 2$$

- $1 < t$: $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\ h(t-\tau)\ d\tau = \int_{t-1}^{t} \left(e^{-\tau} \times (1+\tau-t)\right)\ d\tau$

$$y(t) = -2 \times e^{-t} + e^{-t+1}$$

Donc

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -2 \times e^{-t} - t + 2 & 0 \leq t \leq 1 \\ -2 \times e^{-t} + e^{-t+1} & 1 < t \end{cases}$$

Exercice N°3 :

Considérons les signaux discrets suivants :

5. $x_1[n] = \delta[n]$
6. $x_2[n] = 2\delta[n-1] - 3\delta[n+2]$
7. $x_3[n] = \delta[n-2] + \delta[n] + \delta[n+3]$
8. $x_4[n] = u[n]$

- Calcul de :

$y_1[n] = x_1[n] * x_2[n]$, $\quad y_2[n] = x_2[n] * x_3[n]$, $\quad et \quad y_3[n] = x_3[n] * x_4[n]$

Rappel :

$$\boldsymbol{x(t) * \delta(t) = x(t)}$$
$$\boldsymbol{x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)}$$
$$\boldsymbol{x(t-t_0) * \delta(t-t_1) = x(t-t_0-t_1)}$$

- $y_1[n] = x_1[n] * x_2[n]$

$y_1[n] = x_1[n] * x_2[n] = \delta[n] * x_2[n] = x_2[n]$

- $y_2[n] = x_2[n] * x_3[n]$

$$\begin{aligned} y_2[n] = x_2[n] * x_3[n] &= (2\delta[n-1] - 3\delta[n+2]) * x_3[n] \\ &= 2\delta[n-1] * x_3[n] - 3\delta[n+2] * x_3[n] = 2 \times x_3[n-1] - 3 \times x_3[n+2] \end{aligned}$$

- $y_3[n] = x_3[n] * x_4[n]$

$$y_3[n] = x_3[n] * x_4[n] = (\delta[n-2] + \delta[n] + \delta[n+3]) * u[n]$$
$$= \delta[n-2] * u[n] + \delta[n] * u[n] + \delta[n+3] * u[n]$$
$$= u[n-2] + u[n] + u[n+3]$$

Exercice N°4 :

Considérons le système discret de réponse impulsionnelle $h[n] = u[n] - u[n-2]$.

- Calculer la sortie du système $y[n] = x[n] * h[n]$, sachant que : $x[n] = [1\ 2\ 3]$.

Soit le SLIT discret représenté par son entrée $x[n]$ et sa réponse impulsionnelle $h[n]$ comme suit :

$x[n] = [2,4,3] \quad et\ \ h[n] = u[n] - u[n-3] = [1,1,1]$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} x[k] \times h[n-k]$$

La longueur du signal de sortie $y[n]$ est $L = 3 + 3 - 1 = 5$

Donc on doit calculer : $y[0],\ y[1],\ y[2],\ y[3],\ ,\ et\ y[4]$

- $y[0] = \sum_{k=0}^{0} x[k] \times h[0-k] = x[0] \times h[0] = 2 \times 1 = 1$
- $y[1] = \sum_{k=0}^{1} x[k] \times h[1-k] = x[0] \times h[1] + x[1] \times h[0] = 2 \times 1 + 4 \times 1 = 6$
- $y[2] = \sum_{k=0}^{2} x[k] \times h[2-k] = x[0] \times h[2] + x[1] \times h[1] + x[2] \times h[0]$
  $y[2] = 2 \times 1 + 4 \times 1 + 3 \times 1 = 9$
- $y[3] = \sum_{k=0}^{3} x[k] \times h[3-k]$

  $y[3] == x[0] \times h[3] + x[1] \times h[2] + x[2] \times h[1] + x[3] \times h[0]$

  $y[3] = 2 \times 0 + 4 \times 1 + 3 \times 1 + 0 \times 1 = 7$

- $y[4] = \sum_{k=0}^{4} x[k] \times h[4-k]$

  $y[4] = x[0] \times h[4] + x[1] \times h[3] + x[2] \times h[2] + x[3] \times h[1] + x[4] \times h[0]$

  $y[4] = 2 \times 0 + 4 \times 0 + 3 \times 1 + 0 \times 1 + 0 \times 1 = 3$

Finalement on trouve : $y[n] = [1,6,9,7,3]$.

Confirmation du résultat par la méthode de la somme des colonnes :

$x[n]$:	2	4	3		
$h[n]$:	1	1	1		
	2	4	3		
		2	4	3	
			2	4	3
$\boldsymbol{y[n]} =$ [	**2**	**6**	**9**	**7**	**3**]

Série de TD N°3 : SERIE DE FOURIER

Exercice N°1

1. Développer en série de ***FOURIER*** le signal périodique suivant : $x_{2\pi}(t) = |t| \; pour \; t \in \;]-\pi, \pi[$

1. En déduire la valeur de : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$

Exercice N°2 :

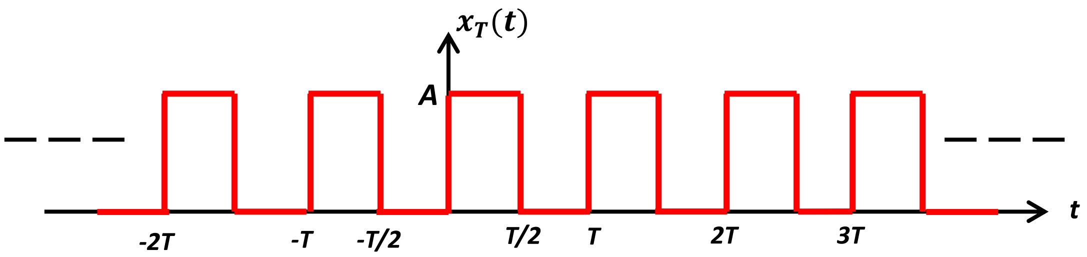
On considère le signal périodique suivant :

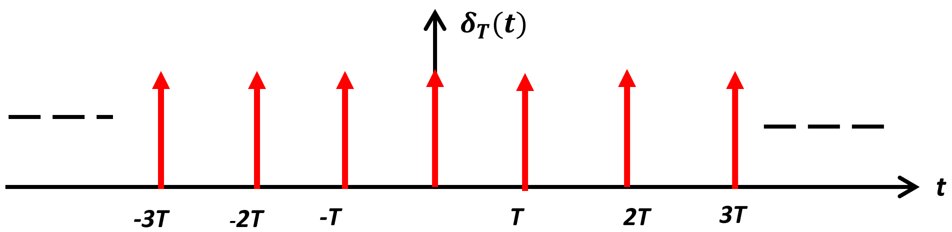
$$x_T(t) = 4 + 1.8 \; \cos\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{3}\right) + 0.8 \; \sin\left(6\pi f_0 t\right)$$

1. Décomposer le signal périodique $x_T(t)$ sous les trois formes de la série de ***FOURIER*** : Forme trigonométrique (SF1), Forme Cosinus(***SF2***), et forme Exponentielle complexe (***SF3***).
2. Donner les composantes spectrales des trois représentations : SF1 :(a_n, b_n), SF2 (A_n, φ_n), et SF3 $(|C_n|, \arg(C_n))$.
3. Représenter ses spectres (Unilatéral et bilatéral) d'amplitude et de phase.
4. Vérifier le théorème de ***Parseval pour*** les trois représentations.

Exercice N°3 :

Soit les deux signaux périodiques $x_T(t)$ et $\delta_T(t)$, représenté respectivement par les deux figures suivantes :





- Décomposer le signal périodique $\delta_T(t)$ en Séries de ***Fourier*** exponentielle complexe et trigonométrique.

Corrigé de la série de TD N°3 : Série de Fourier

Exercice N°1 :

2. Développer en série de FOURIER le signal périodique suivant :
   $x_{2\pi}(t) = |t\,|\ pour\ t \in\ ]-\pi, \pi[$

$$x_{2\pi}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi f_0 n t) + b_n \sin(2\pi f_0 n t) \qquad , \qquad \left(f_0 = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\right)$$

D'où :

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_{2\pi}(t) \quad dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_{2\pi}(t)\ \cos(2\pi f_0 n t) \quad dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_{2\pi}(t)\ \sin(2\pi f_0 n t) \quad dt$$

Calcul :

- Le signal $x_{2\pi}(t)$ est un signal pair, ce qui implique que $b_n = 0\ \forall\, n \geq 1$
- $a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_{2\pi}(t) \quad dt = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t|\ dt = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} t\ dt = \pi$
- $a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_{2\pi}(t)\ \cos(2\pi f_0 n t)\, dt = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t|\ \cos(2\pi f_0 n t)\, dt$

  $a_n = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_{0}^{\pi} t\ \cos(nt)\ dt = \dfrac{2}{n^2\ \pi}\ [\cos(n\pi) - 1]$

  Pour $n = 2k \ \Rightarrow\ a_{2k} = 0$

  Pour $n = 2k+1 \ \Rightarrow\ a_{2k+1} = \frac{-4}{(2k+1)^2\ \pi}$

Donc :

$$x_{2\pi}(t) = |t\,|\ pour\ t \in\ ]-\pi, \pi[\ = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \ \cos((2n+1)t)$$

3. En déduire la valeur de : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$

On a :

$$x_{2\pi}(0) = |0| = 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{4}{3} \times \frac{\pi^2}{8}$$

Donc : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

- En appliquant l'égalité de Parseval : $P_{temps} = P_{SF1}$

$$P_{temps} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x_T(t)|^2 \, dt = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} t^2 \, dt = \frac{\pi^2}{3}$$

$$P_{SF} = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} [(a_n)^2 + (b_n)^2] = \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = P_{temps}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{4}\right) \times \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^4}{96}$$

Exercice N°2 :

On considère le signal suivant :

$$x_T(t) = 4 + 1.8 \cos\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{3}\right) + 0.8 \sin(6\pi f_0 t)$$

1. Décomposer le signal périodique $x_T(t)$ sous les trois formes de la série de FOURIER : Forme trigonométrique (SF1), Forme Cosinus(***SF2***), et forme Exponentielle complexe (***SF3***).

- ***SF1 :***

$$x_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi f_0 n t) + b_n \sin(2\pi f_0 n t)$$

$$x_T(t) = 4 + 1.8 \cos\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{3}\right) + 0.8 \sin(6\pi f_0 t)$$

$x_T(t) = 4 + 1.8\ \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(2\pi f_0 t) - 1.8\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(2\pi f_0 t) + 0.8\ \sin(6\pi f_0 t)$

$x_T(t) = 4 + 0.9\cos(2\pi f_0 t) - 0.9\sqrt{3}\ \sin(2\pi f_0 t) + 0.8\ \sin(6\pi f_0 t)$

Par identification à la forme générale de la SF1, on trouve :

$\frac{a_0}{2} = 4\,,\ a_1 = 0.9,\ b_1 = 0.9\sqrt{3}\ , a_3 = 0,\ et\ \ b_3 = 0.8$

- ***SF2 :***

$$x_T(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(2\pi f_0 n t + \varphi_n)$$

$A_0 = \frac{a_0}{2}$, $A_n = \sqrt{((a_n)^2 + (b_n)^2)}$ $, et\ \varphi_n = arctg\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$

On a : $\sin(\alpha) = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$

$$\begin{aligned} x_T(t) &= 4 + 1.8\ \cos\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{3}\right) + 0.8\ \sin(6\pi f_0 t) \\ &= 4 + 1.8\ \cos\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{3}\right) + 0.8\ \cos\left(6\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Par identification à la 2ème forme de la SF (SF2) :

$A_0 = \frac{a_0}{2} = 4$, $A_1 = \sqrt{((a_1)^2 + (b_1)^2)} = 1.8$ $, et\ \varphi_1 = arctg\left(\frac{-b_1}{a_1}\right) = \frac{\pi}{3}$

$A_3 = \sqrt{((a_3)^2 + (b_3)^2)} = b_3 = 0.8$ $, et\ \varphi_3 = arctg\left(\frac{-b_3}{a_3}\right) = -\frac{\pi}{2}$

- ***SF3 :***

$$x_T(t) = C_0 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\ \ e^{j2\pi f_0 n t}$$

$C_0 = A_0 = \frac{a_0}{2} = 4$, $|C_n| = |C_{-n}| = \frac{A_n}{2}$ et $arg(C_n) = -arg(C_{-n}) = \varphi_n$

$$\begin{aligned} x_T(t) &= 4 + 1.8\ \cos\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{3}\right) + 0.8\ \sin(6\pi f_0 t) \\ &= 4 + 1.8\ \cos\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{3}\right) + 0.8\ \cos\left(6\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

On a : Relation de Euler : $\cos(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}$

$$x_T(t) = 4 + 1.8\cos\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{3}\right) + 0.8\cos\left(6\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x_T(t) = 4 + 1.8\,\frac{e^{j\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{3}\right)} + e^{-j\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{3}\right)}}{2} + 0.8\,\frac{e^{j\left(6\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right)} + e^{-j\left(6\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right)}}{2}$$

$$x_T(t) = 4 + 0.9\,e^{j\frac{\pi}{3}}\,e^{j2\pi f_0 t} + 0.9\,e^{-j\frac{\pi}{3}}\,e^{-j2\pi f_0 t} + 0.4\,e^{-j\frac{\pi}{2}}\,e^{j6\pi f_0 t} + 0.4\,e^{j\frac{\pi}{2}}\,e^{-j6\pi f_0 t}$$

Par identification à la forme générale de la SF3, on trouve :

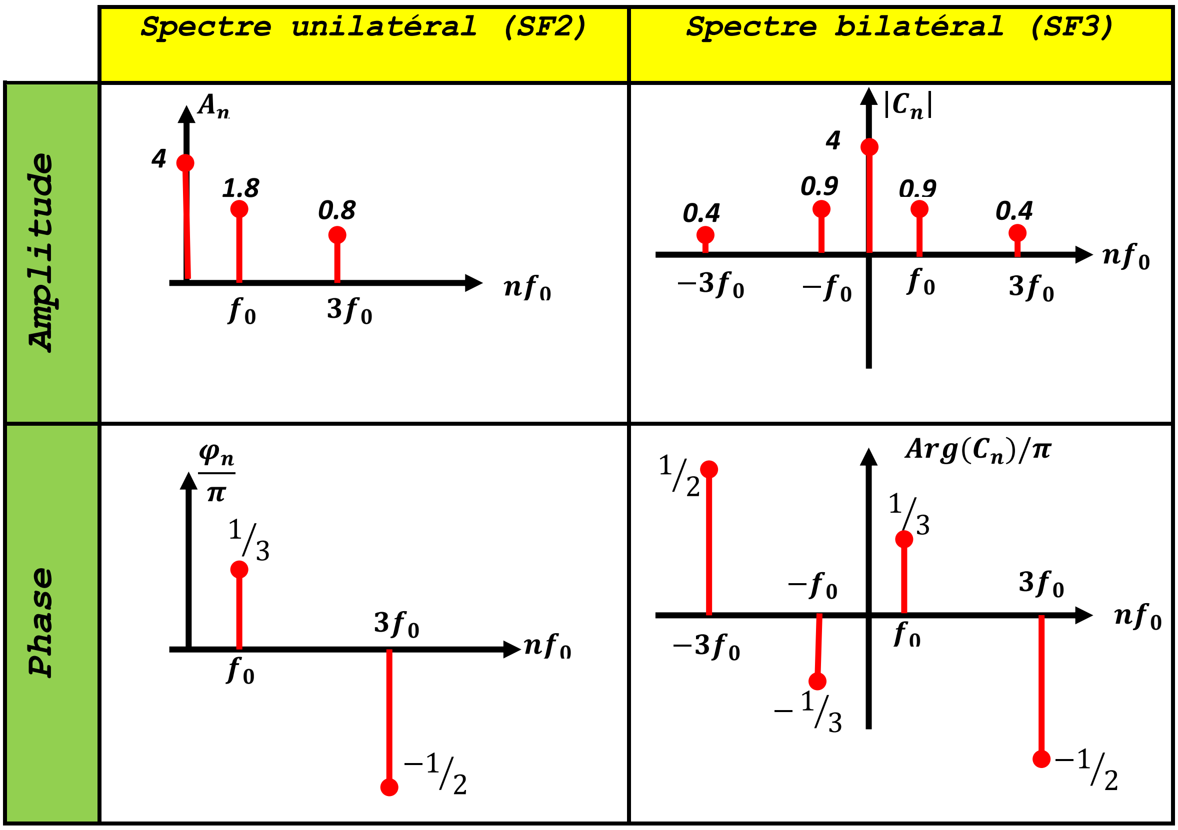
$$C_0 = A_0 = \frac{a_0}{2} = 4$$

$$C_1 = 0.9\,e^{j\frac{\pi}{3}}\ ,C_{-1} = 0.9\,e^{-j\frac{\pi}{3}}\ ,C_3 = 0.4\,e^{-j\frac{\pi}{2}}, \text{et } C_3 = 0.4\,e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow\quad |C_1| = |C_{-1}| = \frac{1.8}{2} = 0.9 \quad et \quad arg(C_1) = -arg(C_{-1}) = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow\quad |C_3| = |C_{-3}| = \frac{0.8}{2} = 0.4 \quad et \quad arg(C_3) = -arg(C_{-3}) = -\frac{\pi}{2}$$

Représentation du spectre d'amplitude et de phase (SF2 et SF3)



3. Théorème de PARSEVAL :

$$Puissance_{Temps} = Puissance_{SF1} = Puissance_{SF2} = Puissance_{SF3}$$

$$\frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x_T(t)|^2 \; dt \quad = \quad \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 + b_n^2 \quad = \quad A_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} A_n^2 \quad = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2$$

- **La Puissance dans le temps :**

Signal	*Valeur efficace*
Sinusoïdal	$V_{max}/\sqrt{2}$
Rectangulaire	$V_{max}/\sqrt{2}$
Triangulaire	$V_{max}/\sqrt{3}$
Constante	*Constante*

$$Puissance_{Temps} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x_T(t)|^2 \; dt \; = \sum_{i=0}^{N}(valeur\ efficace)_i^{\,2}$$

$$Puissance_{Temps} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x_T(t)|^2 \; dt \; = \; 4^2 + \frac{(1.8)^2}{2} + \frac{(0.8)^2}{2} = 17.94$$

- $Puissance_{SF1} \; = \; \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 + b_n^2 = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(a_1^2 + b_1^2 + a_3^2 + b_3^2\right)$

$$= (4)^2 + \frac{1}{2}\left((0.9)^2 + \left(0.9\sqrt{3}\right)^2 + (0.8)^2\right) = 17.94$$

- $Puissance_{SF2} = A_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} A_n^2$

$$= \; A_0^2 + \frac{1}{2}\left(A_1^2 + \; A_3^2\right) = (4)^2 + \; \frac{1}{2}((1.8)^2 + (0.8)^2) = 17.94$$

- $Puissance_{SF3} \; = \; \sum_{n=1}^{+\infty}|C_n|^2 = \; (C_0)^2 + (|C_1|)^2 + (|C_{-1}|)^2 + (|C_3|)^2 + (|C_{-3}|)^2$

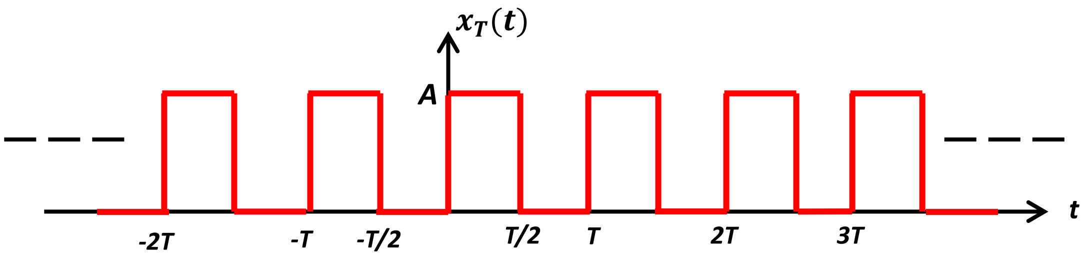
$$= (4)^2 + \; ((0.9)^2 + (0.9)^2 + (0.4)^2 + (0.4)^2) = 17.94$$

Conclusion : Relation de *PARSEVAL* vérifiée :

$$Puissance_{Temps} = Puissance_{SF1} = Puissance_{SF2} = Puissance_{SF3} = 17.94$$

Exercice N°3 :

Soit le signal périodique $x_T(t)$, représenté par la figure suivante :



SF3 : Forme Exponentielle complexe :

$$x_T(t) = C_0 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \ \mathrm{e}^{j2\pi f_0 nt}$$

D'où :

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t)\ dt = \frac{1}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} A\ dt = \frac{A}{2}$$

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t)\ \ e^{-j2\pi f_0 nt}\ dt = \frac{1}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} A\ \ e^{-j2\pi f_0 nt}\, dt = -\frac{A}{j2n\pi}\left(e^{-jn\pi} - 1\right)$$

$$C_n = -\frac{A}{j2n\pi}\ \left((-1)^{-n} - 1\right)$$

Si $n = 2k \Rightarrow C_{2k} = -\frac{A}{j4k\pi}\ (1-1)\ = 0$

Si $n = 2k+1 \Rightarrow C_{2k+1} = -\frac{A}{j2(2k+1)\pi}\ (-1-1)\ = \frac{A}{j(2k+1)\pi} = -j\frac{A}{(2k+1)\pi}$

Donc :

$$x_T(t) = C_0 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\ \ \mathrm{e}^{j2\pi f_0 nt} = \frac{A}{2} - j\ \frac{A}{\pi}\ \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)}\ e^{j2\pi f_0 (2k+1)t}$$

- Déduction de la 1ière forme (Forme trigonométrique SF1) :

On a :

SF1 :

$$x_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi f_0 nt) + b_n \sin(2\pi f_0 nt) \quad , \quad \left(f_0 = \frac{1}{T}\right)$$

$a_0 = 2 \times C_0 = A$

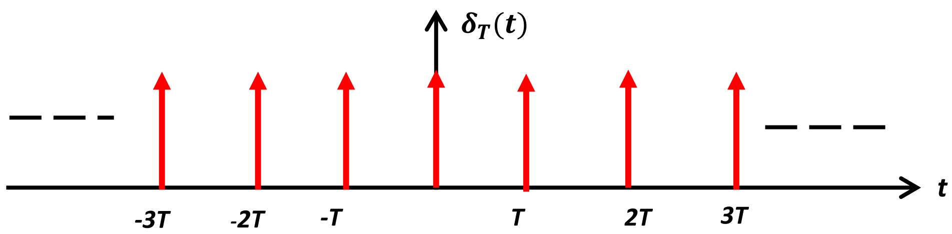
$$C_n = \frac{a_n - j\ b_n}{2} \Rightarrow \begin{cases} a_n = 2 \times Réèl[C_n] \\ b_n = (-2) \times Imaginaire[C_n] \end{cases}$$

$$C_{2k+1} = -j\frac{A}{(2k+1)\pi} \Rightarrow \begin{cases} a_{2k+1} = 2 \times Réèl[C_{2k+1}] = 0 \\ b_{2k+1} = (-2) \times Imaginaire[C_{2k+1}] = \dfrac{2A}{(2k+1)\pi} \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned} x_T(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi f_0 nt) + b_n \sin(2\pi f_0 nt) \\ &= \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)} \sin(2\pi f_0 (2k+1)t) \end{aligned}$$

- Le deuxième signal périodique $\delta_T(t)$ (Peigne de Dirac).



SF3 : Forme Exponentielle complexe :

$$x_T(t) = C_0 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \ e^{j2\pi f_0 nt}$$

D'où :

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t)\ dt = \frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t)\ dt = \frac{1}{T}$$

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) \quad e^{-j2\pi f_0 nt} \quad dt = \frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) \quad e^{-j2\pi f_0 nt}\, dt = \frac{1}{T}$$

$$C_n = \frac{1}{T}$$

Donc :

$$x_T(t) = C_0 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \quad \mathrm{e}^{j2\pi f_0 nt} = \frac{1}{T} + \frac{1}{T}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} e^{j2\pi f_0 nt} = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f_0 nt}$$

- Déduction de la 1ière forme (Forme trigonométrique SF1) :

On a :

SF1 :

$$x_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi f_0 nt) + b_n \sin(2\pi f_0 nt) \qquad , \qquad \left(f_0 = \frac{1}{T}\right)$$

$$a_0 = 2 \times C_0 = \frac{2}{T}$$

$$C_n = \frac{a_n - j\ b_n}{2} \Rightarrow \begin{cases} a_n = 2 \times Réèl[C_n] \\ b_n = (-2) \times Imaginaire[C_n] \end{cases}$$

$$C_n = \frac{1}{T} \Rightarrow \begin{cases} a_n = 2 \times Réèl[C_{2k+1}] = \dfrac{2}{T} \\ b_n = (-2) \times Imaginaire[C_{2k+1}] = 0 \end{cases}$$

Donc :

$$x_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi f_0 nt) + b_n \sin(2\pi f_0 nt) = \frac{1}{T} + \frac{2}{T}\sum_{n=1}^{+\infty} \cos(2\pi f_0 nt)$$

Série de TD N°4 : TRANSFORMEE DE FOURIER

Exercice N°1 :

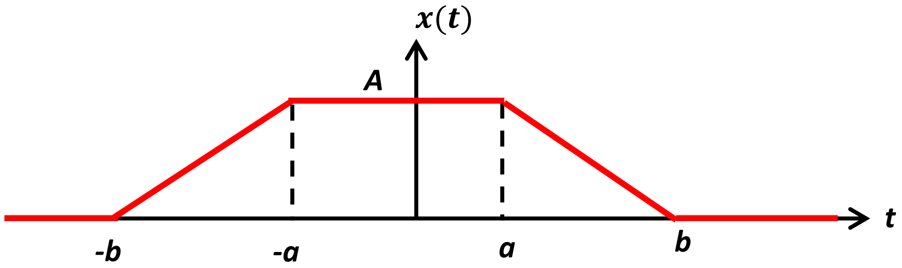
1. Calculer la transformée de ***FOURIER*** des signaux suivants :

$$x(t) = A\, rect\left(\frac{t}{T}\right) \qquad \text{et} \qquad y(t) = A\, tri\left(\frac{t}{T}\right)$$

2. Représenter ses spectres du module et de la phase.

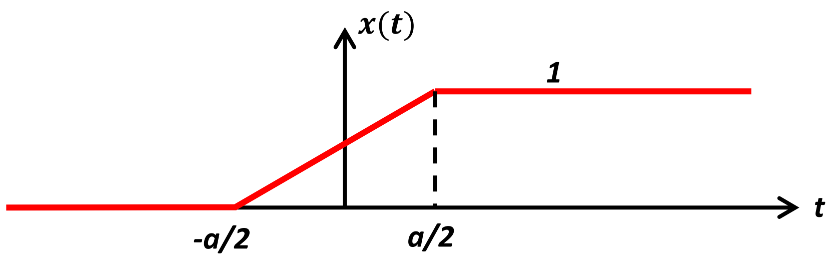
Exercice N°2 :

Calculer la transformée de ***FOURIER*** du signal représenté par la figure suivante :



Exercice N°3 :

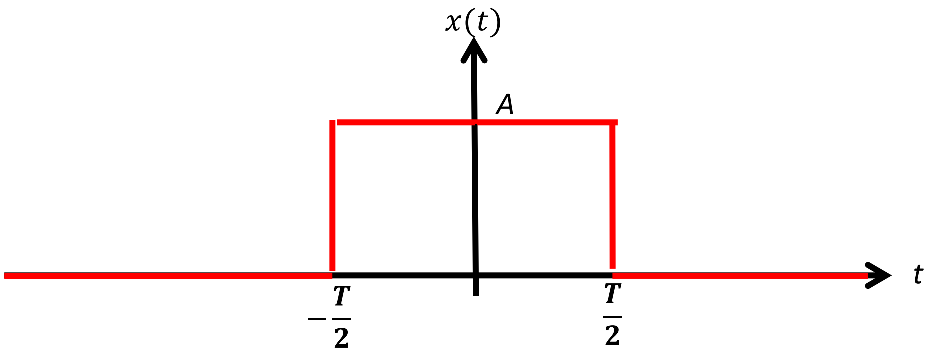
Calculer la transformée de ***FOURIER*** du signal représenté par la figure suivante :



Corrigé de la série de TD N°4 : Transformée de Fourier

Exercice N°1 :

1. Calcul de la transformée de ***FOURIER*** du signal $x(t) = A\, rect\left(\frac{t}{T}\right)$



$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ e^{-j2\pi ft}\ dt\ = \int_{-T/2}^{T/2} A\ e^{-j2\pi ft}\ dt\ = \frac{-A}{j2\pi f}\ \left[e^{-j2\pi f\frac{T}{2}} - e^{j2\pi f\frac{T}{2}}\ \right]$$

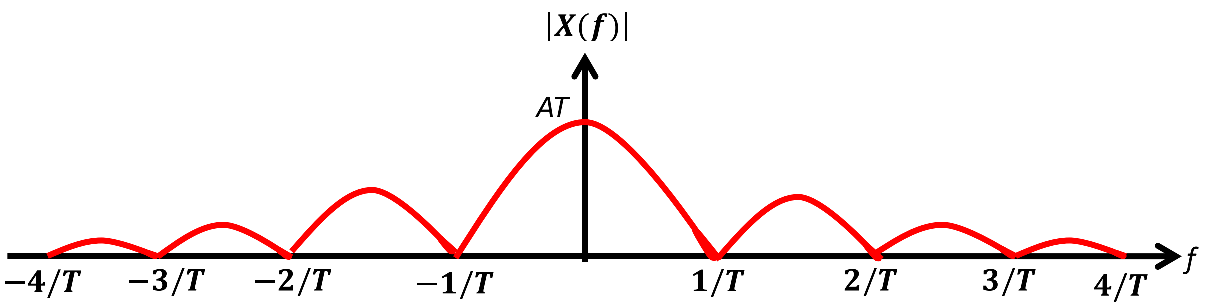
$$X(f) = \frac{-A}{j2\pi f}\ [-2j\sin(\pi fT)\,]\ = \frac{A}{\pi f}\sin(\pi fT) = A\ \frac{\sin(\pi fT)}{\pi f}\ = A\mathbf{T}\ \frac{\sin(\pi fT)}{\pi f\mathbf{T}}$$

$$\boldsymbol{X(f) = AT\ \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}\ = AT\ sinc(\pi fT)}$$

2. Représenter ses spectres du module et de la phase.

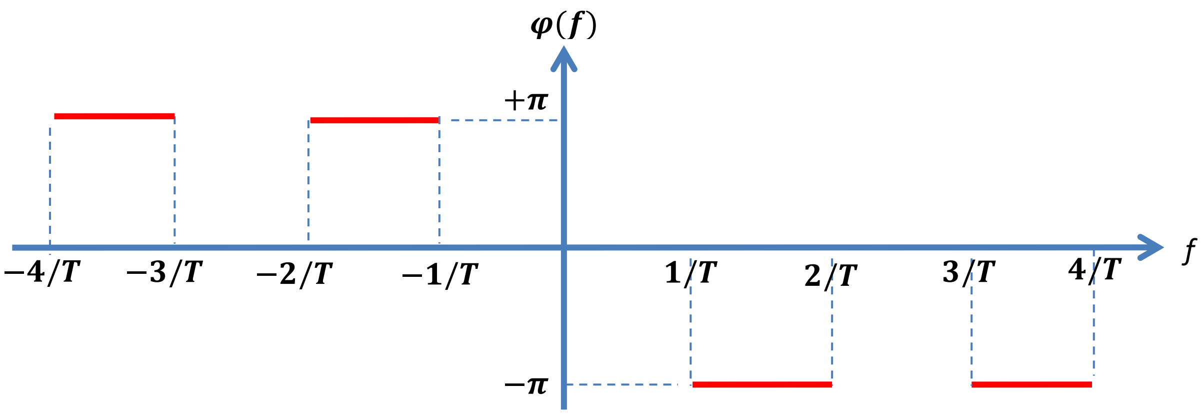
- **Le module : (Spectre pair)**

$$\boldsymbol{|X(f)| = AT\ \left|\frac{sin(\pi fT)}{\pi fT}\right|\ = AT\ |sinc(\pi fT)|}$$



- **La phase : (Spectre impair)**

$$\varphi(f) = \begin{cases} 0 & si \;\; |X(f)| \geq 0 \\ -\pi & si \;\; |X(f)| < 0 \end{cases}$$



- ***Explication du calcul de la phase :***

Si le signal $X(f)$ est purement réel :

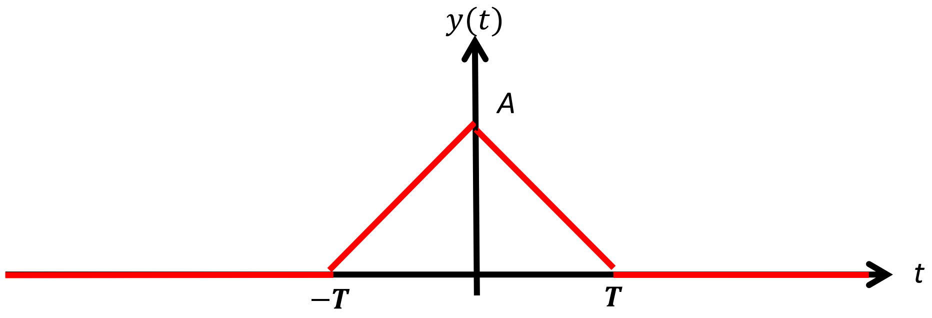
$$\cos(\varphi(\mathrm{f})) = \frac{Réel\,[X(f)]}{|X(f)|} = \begin{cases} \dfrac{x}{x} = 1 \;\; si \;\; X(f) > 0 \\ \dfrac{x}{-x} = -1 \;\; si \;\; X(f) < 0 \end{cases}$$

$$\sin(\varphi(\mathrm{f})) = \frac{Imaginaire\,[X(f)]}{|X(f)|} = \begin{cases} \dfrac{0}{x} = 0 \;\; si \;\; X(f) > 0 \\ \dfrac{0}{-x} = 0 \;\; si \;\; X(f) < 0 \end{cases}$$

Par convention, on pose :

$$\boldsymbol{\varphi(f)} = \begin{cases} \boldsymbol{-\pi \;\; si} \;\; |X(f)| < \mathbf{0} \quad et \;\; f \geq 0 \\ \boldsymbol{\pi \;\; si} \;\; |X(f)| > \mathbf{0} \quad et \;\; f < 0 \end{cases}$$

3. Calcul de la transformée de ***FOURIER*** du signal $y(t) = A\,tri\left(\frac{t}{T}\right)$



$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ e^{-j2\pi ft}\ dt\ = \int_{-T}^{0} \left(\frac{A}{T}\ t + A\right)\ e^{-j2\pi ft}\ dt + \int_{0}^{T} \left(\frac{-A}{T}\ t + A\right)\ e^{-j2\pi ft}\ dt$$

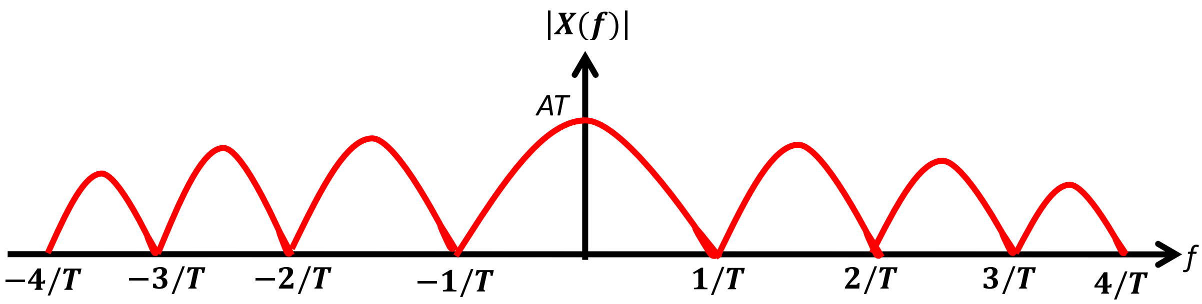
$$X(f) = \frac{-A}{T} \times \frac{1}{(2\pi f)^2}\ [e^{j2\pi fT} + e^{-j2\pi fT} - 2\ ]\ = \frac{-A}{T} \times \frac{1}{(2\pi f)^2} [-4 \times sin^2(\pi fT)]$$
$$= AT\ \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}$$

$$\boldsymbol{X(f) = AT\ \frac{\sin^2(\pi fT)}{(\pi fT)^2} = AT\ sinc^2(\pi fT)}$$

4. Représenter ses spectres du module et de la phase.

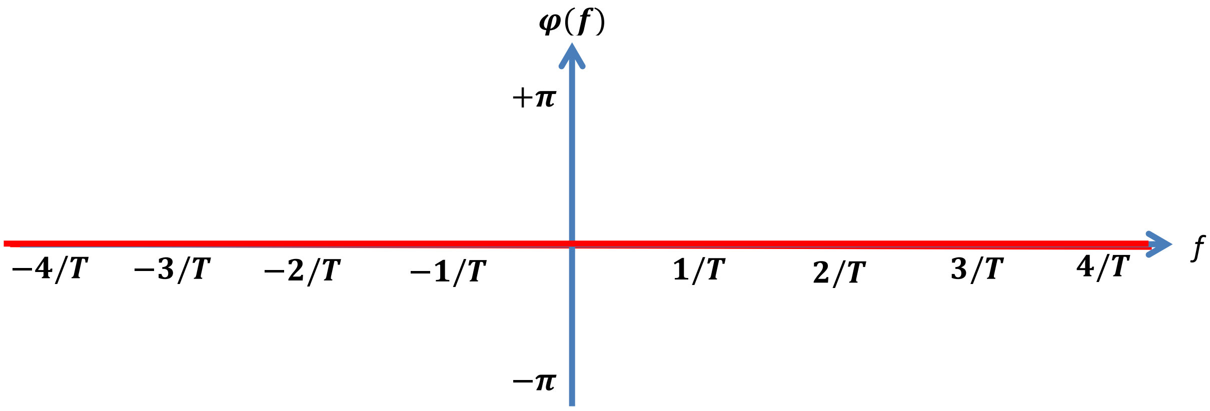
- **Le module : (Spectre pair)**

$$\boldsymbol{|X(f)| = AT\ \left|\frac{\sin^2(\pi fT)}{(\pi fT)^2}\right| = AT\ \left|sinc^2(\pi fT)\right|}$$



- **La phase : (Spectre impair)**

$$\varphi(f) = \begin{cases} 0 & si \;\; |X(f)| \geq 0 \\ -\pi & si \;\; |X(f)| < 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi(f) = 0 \quad quelque\ soit\ f$$



- ***Explication du calcul de la phase :***

Si le signal $X(f)$ est purement réel :

$$\cos(\varphi(f)) = \frac{Réel\,[X(f)]}{|X(f)|} = \begin{cases} \dfrac{x}{x} = 1 \;\; si \;\; X(f) > 0 \\ \\ \dfrac{x}{-x} = -1 \;\; si \;\; X(f) < 0 \end{cases}$$

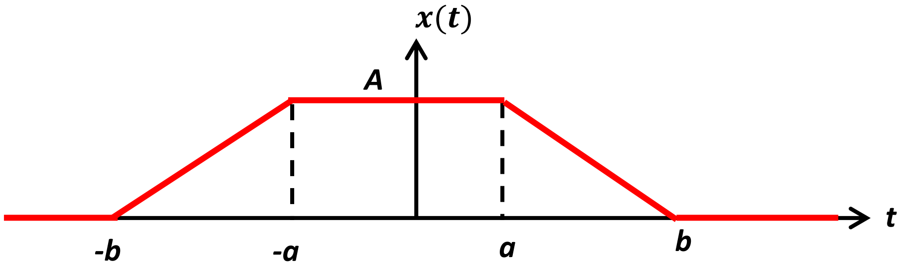
$$\sin(\varphi(f)) = \frac{Imaginaire\,[X(f)]}{|X(f)|} = \begin{cases} \dfrac{0}{x} = 0 \;\; si \;\; X(f) > 0 \\ \\ \dfrac{0}{-x} = 0 \;\; si \;\; X(f) < 0 \end{cases}$$

Par convention, on pose :

$$\boldsymbol{\varphi(f)} = \begin{cases} \boldsymbol{-\pi \;\; si} \;\; |X(f)| < \mathbf{0} \quad et \;\; f \geq 0 \\ \\ \boldsymbol{\pi \;\; si} \;\; |X(f)| > \mathbf{0} \quad et \;\; f < 0 \end{cases}$$

Exercice N°2 :

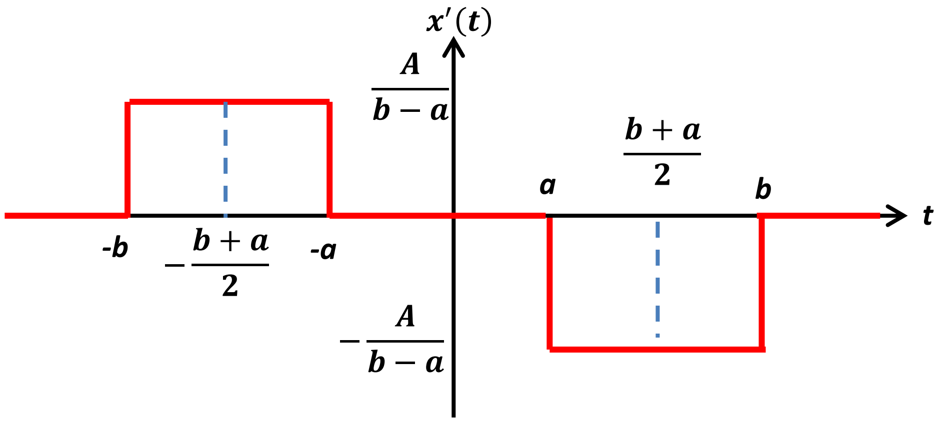
Calcul de la transformée de ***FOURIER*** du signal représenté par la figure suivante :



- L'expression du signal $x(t)$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{A}{b-a}\, t + \frac{A}{b-a}\, b & si - b \leq t \leq -a \\ A & si \;\; - a \leq t \leq a \\ -\frac{A}{b-a}\, t + \frac{A}{b-a}\, b & si \;\; a \leq t \leq b \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

- La dérivée du signal $x(t)$, notée $x'(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ est représentée par la figure suivante :



$$x'(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{A}{b-a}\, rect\left(\frac{t+\frac{b+a}{2}}{b-a}\right) - \frac{A}{b-a}\, rect\left(\frac{t-\frac{b+a}{2}}{b-a}\right)$$

On a :

$$TF\left[A\ rect\left(\frac{t}{T}\right)\right] = AT\ sinc(fT)$$
$$TF[x(t-t_0)] = e^{-j2\pi f t_0}\ X(f)$$

Donc :

$$TF[x'(t)] = TF\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]$$
$$= TF\left[\frac{A}{b-a}\ rect\left(\frac{t-\frac{b+a}{2}}{b-a}\right)\right] - TF\left[\frac{A}{b-a}\ rect\left(\frac{t+\frac{b+a}{2}}{b-a}\right)\right]$$
$$TF[x'(t)] = \frac{A}{(b-a)}\ (b-a)\ sinc(f(b-a))\ e^{+j2\pi f\left(\frac{b+a}{2}\right)}$$
$$-\frac{A}{(b-a)}\ (b-a)\ sinc(f(b-a))\ e^{-j2\pi f\left(\frac{b+a}{2}\right)}$$
$$TF[x'(t)] = TF\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = A\ sinc(f(b-a))\ \left[e^{j2\pi f\left(\frac{b+a}{2}\right)} - e^{-j2\pi f\left(\frac{b+a}{2}\right)}\right]$$
$$= A\ sinc(f(b-a))\ [(2j)\ sin(\pi f(b+a))]$$
$$= 2jA\ sinc\big(f(b-a)\ \ sin(\pi f(b+a))\big)$$

On a :

$$TF[x'(t)] = j2\pi f\ \ X(f)\ \ \Rightarrow X(f) = \frac{1}{j2\pi f}\ \ TF[x'(t)]$$

Donc :

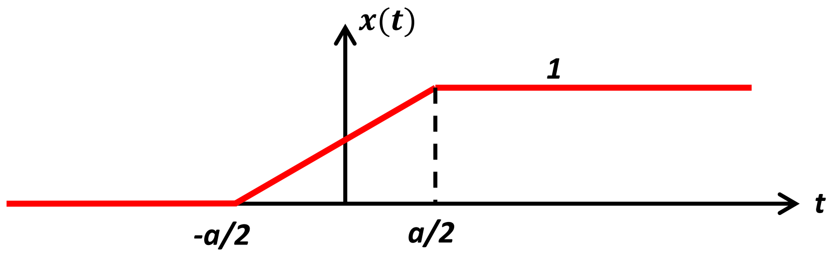
$$X(f) = \frac{1}{j2\pi f}\ \ TF[x'(t)] = \frac{2jA}{j2\pi f}\ sinc\big(f(b-a)\ \ sin(\pi f(b+a))\big)$$

$$X(f) = \ A\ (b+a)\ sinc(f(b-a)\ \ )\ \ \frac{sin(\pi f(b+a))}{\pi f\ (b+a)}$$

$$\boldsymbol{X(f) = \ A\ (b+a)\ sinc(f(b-a)\ \ )\ \ sinc(f(b+a))}$$

Exercice N°3 :

Calcul de la transformée de ***FOURIER*** du signal représenté par la figure suivante :



- L'expression du signal $x(t)$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{a}\,t + \frac{1}{2} & si - a/2 \leq t \leq a/2 \\ 1 & si \quad \frac{a}{2} \leq t \\ 0 & si \quad t \leq -a/2 \end{cases}$$

Le signal $x(t)$ n'est pas un signal sommable, donc il n'accepte pas une transformée de ***FOURIER***, c'est la raison pour laquelle on doit trouver une autre forme pour lui.

Le signal $x(t)$ peut s'écrire sous la forme :

$$x(t) = x_0(t) + \bar{x}$$

D'où :

- $\bar{x} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\ dt \neq 0$: est la valeur moyenne du signal $x(t)$

- $x_0(t) = x(t) - \bar{x}$: est la partie du signal $x(t)$, à valeur moyenne nulle.

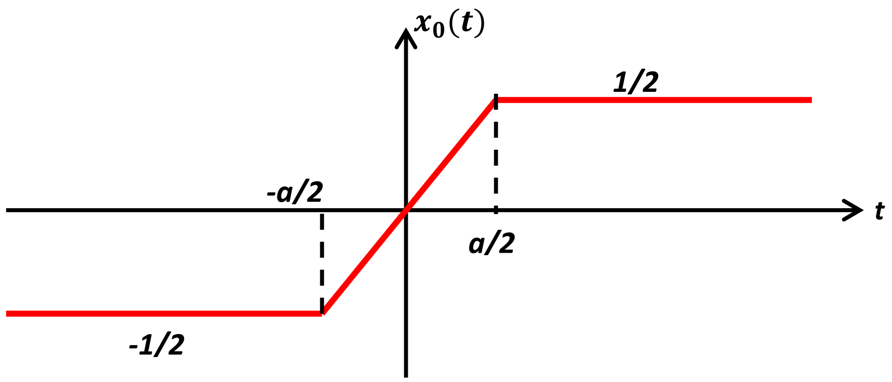
$$\bar{x} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\ dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[\int_{-a/2}^{a/2}\left(\frac{1}{a}\,t + \frac{1}{2}\right) dt + \int_{a/2}^{T/2} 1\ dt\right]$$

$$\bar{x} = \frac{1}{2}$$

$$x_0(t) = x(t) - \bar{x} = x(t) - \frac{1}{2} = \begin{cases} \frac{1}{a}t + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} & si - a/2 \leq t \leq a/2 \\ 1 - \frac{1}{2} & si \quad \frac{a}{2} \leq t \\ 0 - \frac{1}{2} & si \quad t \leq -\frac{a}{2} \end{cases}$$

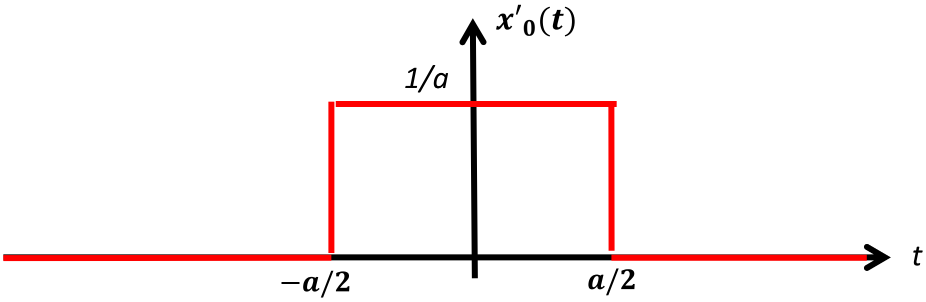
$$x_0(t) = x(t) - \bar{x} = x(t) - \frac{1}{2} = \begin{cases} \frac{1}{a}\, t & si - a/2 \leq t \leq a/2 \\ \frac{1}{2} & si \quad \frac{a}{2} \leq t \\ -\frac{1}{2} & si \quad t \leq -\frac{a}{2} \end{cases}$$

- Représentation du signal $x_0(t)$:



- Représentation de la dérivée du signal $x_0(t)$:

$$x'_0(t) = \frac{dx_0(t)}{dt} = \begin{cases} \frac{1}{a} & si \quad -\frac{a}{2} \leq t \leq \frac{a}{2} \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$



$$x'_0(t) = \frac{dx_0(t)}{dt} = \frac{1}{a} \ rect\left(\frac{t}{a}\right) \Rightarrow TF[x'_0(t)] = \frac{1}{a} \times a \times sinc(fa)$$

$$TF[x'_0(t)] = sinc(fa)$$

$$X_0(f) = TF[x_0(t)] = \frac{1}{j2\pi f} \ TF[x'_0(t)] = \frac{1}{j2\pi f} sinc(fa)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow TF[\bar{x}] = \frac{1}{2} \ \delta(f)$$

$$X(f) = TF[x(t)] = TF[x_0(t) + \bar{x}] = TF[x_0(t)] + TF[\bar{x}]$$

$$\boldsymbol{X(f) = TF[x_0(t)] + TF[\bar{x}] = \frac{1}{j2\pi f} sinc(fa) + \frac{1}{2} \ \delta(f)}$$

Série de TD N°5 : TRANSFORMEE DE LAPLACE

Exercice N°1 :

3. Calculer la transformée de ***LAPLACE*** des signaux suivants :

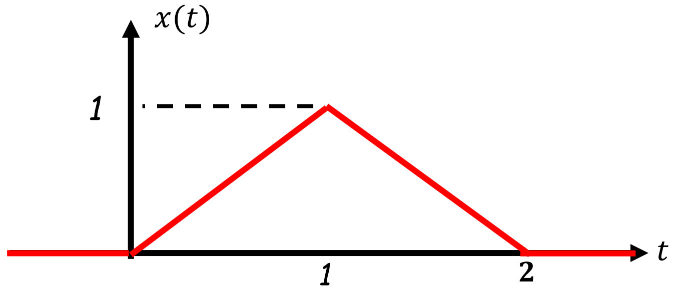
- $x(t) = (t^2 + t + 1) \times e^{-2t}\ u(t)$
- $y(t) = A\, rect\left(t - \frac{1}{2}\right)$
- $z(t) = \cos(t)\ \ e^{-t}\ u(t)$

2. Calculer la transformée de ***LAPLACE INVERSE*** du signal suivant :

$$X(p) = \frac{5}{p^2 + p - 6}$$

Exercice N°2 :

Calculer la transformée de ***LAPLACE*** du signal représenté par la figure suivante :



Exercice N°3 :

En utilisant la transformée de ***LAPLACE***, déterminer la solution particulière de chacune des deux équations différentielles suivantes :

- $x''(t) + x'(t) = u(t)$ *avec* $x(0) = 1$ *et* $x'(0) = 0$
- $x''(t) + 5x'(t) + 4x(t) = e^{-2t}\ u(t)$ *avec* $x(0) = 1$ *et* $x'(0) = 0$

Corrigé de la série de TD N°5 : Transformée de LAPLACE

Exercice N°1 :

1. Calcul de la transformée de ***LAPLACE*** des signaux suivants :

- $x(t) = (t^2 + t + 1) \times e^{-2t}\ u(t)$

On a :

$$X(p) = TL[t^n\ u(t)] = \frac{n!}{p^{(n+1)}}$$

$$TL[t^n\ e^{-at}\ u(t)] = \frac{n!}{(p+a)^{n+1}} \qquad avec\ a > 0$$

Donc :

$$\begin{aligned} X(p) = TL[x(t)] &= TL[(t^2 + t + 1) \times e^{-2t}\ u(t)] \\ &= TL[t^2 \times e^{-2t}\ u(t)] + TL[t \times e^{-2t}\ u(t)] + TL[e^{-2t}\ u(t)] \end{aligned}$$

$$X(p) = TL[x(t)] = \frac{2!}{(p+2)^{2+1}} + \frac{1!}{(p+2)^{1+1}} + \frac{1}{(p+2)} = \frac{2}{(p+2)^3} + \frac{1}{(p+2)^2} + \frac{1}{(p+2)}$$

- $y(t) = A\ \times rect\left(t - \frac{1}{2}\right)$

$$y(t) = A \times\ rect\left(t - \frac{1}{2}\right) = A\,u(t) - A\,u(t-1)$$

$$\begin{aligned} Y(p) = TL[y(t)] = TL\left[A \times rect\left(t - \frac{1}{2}\right)\right] &= TL[A \times\ u(t) - A\ \times u(t-1)] \\ = A \times TL[u(t)] + A\ \times TL[u(t-1)] &= \frac{A}{p} + \frac{A}{p}\ e^{-p} = \frac{A}{p}(1 - e^{-p}) \end{aligned}$$

- $z(t) = \cos(t)\ \ e^{-t}\ u(t)$

$Z(p) = TL[z(t)] = TL[A \times \cos(t)\ \times\ e^{-t}\ \times\ u(t)] =?$

On a :

$$TL[\cos(t)\ \times\ u(t)] = \frac{p}{p^2 + 1}$$

Donc :

$$Z(p) = TL[z(t)] = TL[A \times \cos(t)\ \times\ e^{-t}\ \times\ u(t)] = \frac{p+1}{(p+1)^2 + 1}$$

2. Calcul de la transformée de ***LAPLACE INVERSE*** du signal suivant :

$$X(p) = \frac{5}{p^2 + p - 6}$$

$$X(p) = \frac{5}{p^2 + p - 6} = \frac{A_1}{(p - p_1)} + \frac{A_2}{(p - p_2)}$$

Avec :

$$A_1 = \lim_{p \to p_1} \left(p - p_1\right) \; X(p) \qquad \text{et} \qquad A_2 = \lim_{p \to p_2} (p - p_2) \; X(p)$$

On a : $p^2 + p - 6 = (p - 2)\,(p + 3) \;\; \Rightarrow (p_1 = 2) \;\; et \;\;\; (p_2 = -3)$

On trouve : $A_1 = \lim_{p \to 2} (p - 2) \;\; X(p) = 1$ et $A_2 = \lim_{p \to -3} (p + 3) \;\; X(p) = -1$

Donc :

$$X(p) = \frac{5}{p^2 + p - 6} = \frac{1}{(p - 2)} - \frac{1}{(p + 3)}$$

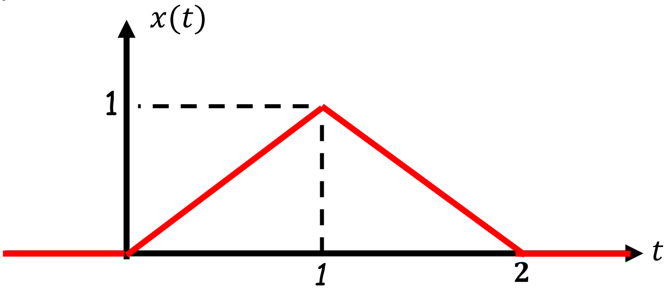
Finalement :

$$x(t) = TL^{-1}[X(p)] = TL^{-1}\left[\frac{1}{(p-2)} - \frac{1}{(p+3)}\right] = TL^{-1}\left[\frac{1}{(p-2)}\right] - TL^{-1}\left[\frac{1}{(p+3)}\right]$$

$$x(t) = e^{+2t}\, u(t) - \; e^{-3t}\, u(t)$$

Exercice N°2 :

Calculer la **transformée de *LAPLACE*** du signal représenté par la figure suivante :



Solution :

L'expression du signal $x(t)$ est : $x(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq 1 \\ -t+2 & 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$

$$x(t) = t \times [u(t) - u(t-1)] + (-t+2) \times [u(t-1) - u(t-2)]$$

$$x(t) = t \times u(t) - t \times u(t-1) - t \times u(t-1) + 2 \times u(t-1) + t \times u(t-2) - 2 \times u(t-2)$$

$$x(t) = t \times u(t) - 2 \times (t-1) \times u(t-1) + (t-2) \times u(t-2)$$

$$X(p) = TL[x(t)] = \frac{1}{p^2} - 2 \times \frac{1}{p^2} \times e^{-p} + \frac{1}{p^2} \times e^{-2p} = \frac{1}{p^2} \times (1 - e^{-p})^2$$

Exercice N°3 :

En utilisant la **transformée de LAPLACE,** déterminer la solution particulière des deux équations différentielles suivante :

- $x''(t) + x'(t) = u(t) \qquad avec \qquad x(0) = 0 \quad et \quad x'(0) = 0$
- $x''(t) + 5\,x'(t) + 4\,x(t) = e^{-2t}\ u(t) \qquad avec \qquad x(0) = 1 \quad et \quad x'(0) = 0$

Solution :

On a

$$TF\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = p\ X(p) - x(0)$$

$$TL\left[\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right] = p\,[\,p\,X(p) - x(0)] - x'(0) = p^2\ X(p) - p\,x(0) - x'(0)$$

$$TL\left[\frac{d^3x(t)}{dt^3}\right] = p\,[\,p^2\ X(p) - p\,x(0) - x'(0)] - x''(0) = p^3\ X(p) - p^2\,x(0) - p\,x'(0) - x''(0)$$

- $\boldsymbol{x''(t) + x'(t) = u(t) \qquad avec \qquad x(0) = 0 \quad et \quad x'(0) = 0}$

$$\Rightarrow TL[x''(t) + x'(t)] = TL[u(t)] \Rightarrow TL[x''(t)] + TL[x'(t)] = \frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow [p^2\ X(p) - p\,x(0) - x'(0)] + [p\,X(p) - x(0)] = \frac{1}{p} \iff p^2\ X(p) + p\,X(p) = \frac{1}{p}$$

$\Rightarrow X(p) \times (p^2 + p) = \dfrac{1}{p} \;\Rightarrow\; X(p) = \dfrac{1}{p(p^2 + p)} = \dfrac{1}{p^2(p+1)} = \dfrac{1}{p^2} - \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p+1}$

Donc :

$$\boldsymbol{x(t) = t \times u(t) - u(t) + e^{-t}\, u(t) = (t - 1 + e^{-t}\,) \times u(t)}$$

- $\boldsymbol{x''(t) + 5\, x'(t) + 4\, x(t) = e^{-2t}\; u(t)} \qquad \boldsymbol{avec} \qquad \boldsymbol{x(0) = 1 \quad et \quad x'(0) = 0}$

$\Rightarrow TL[x''(t) + 5\, x'(t) + 4\, x(t)] = TL[e^{-2t}\; u(t)]$

$\Rightarrow TL[x''(t)] + 5 \times TL[x'(t)] + 4 \times TL[x(t)] = TL[e^{-2t}\; u(t)]$

$\Rightarrow [p^2\; X(p) - p\, x(0) - \; x'(0)] + 5 \times [p\, X(p) - x(0)] + 4 \times X(p) = \dfrac{1}{p+2}$

$\Rightarrow (p^2 + 5p + 4)\, X(p) - p - 5 = \dfrac{1}{p+2} \;\Rightarrow\; X(p) = \dfrac{p^2 + 7p + 11}{(p+2) \times (p^2 + 5p + 4)}$

$\Rightarrow \;\; X(p) = \dfrac{p^2 + 7p + 11}{(p+2) \times (p+1) \times (p+4)} = \dfrac{A}{p+2} + \dfrac{B}{p+1} + \dfrac{C}{p+4}$

On trouve :

$$A = -\frac{1}{2} \;\;,\;\; B = \frac{5}{3} \qquad et \quad c = -\frac{1}{6}$$

$\Rightarrow \;\; X(p) = \dfrac{A}{p+2} + \dfrac{B}{p+1} + \dfrac{C}{p+4} = -\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{p+2} + \dfrac{5}{3} \times \dfrac{1}{p+1} - \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{p+4}$

Donc :

$$x(t) = -\frac{1}{2} \times e^{-2t} \times u(t) + \frac{5}{3} \times e^{-t} \times u(t) - \frac{1}{6} \times e^{-4t}\, u(t)$$

$$\boldsymbol{x(t) = \left(\frac{5}{3} \times e^{-t} - \frac{1}{2} \times e^{-2t} \times \left(1 + \frac{1}{3} \times e^{-2t}\right)\right) \times u(t)}$$