

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE d'ORAN Mohamed Boudiaf



Faculté de Physique  
Département de Génie Physique  
Spécialité : Physique

Thèse

Présentée par

Mme Loumi-Fergane Halima

Pour l'obtention du Diplôme de Docteur en Sciences Physique

**GEOMETRIE MULTISYMPLECTIQUE ET STRUCTURE  $k$ -  
COSYMPLECTIQUE**

**POUR LES THEORIES DE CHAMPS**

**ET LA MECHANIQUE RELATIVISTE**

Soutenu le 20 / 05 / 2015

Devant la commission de jury composée de :

Président	Mr. DJEMAI Abdel Farid	Professeur	USTO- MB
Rapporteur	Mr. BELAIDI Abdelkader	Professeur	ENP Oran
Examineur	Mr. BOUCIF Abdesslam	Professeur	Centre Univ. Temouchent
Examineur	Mr. HAMOU Amine Bouziane	Professeur	USTO- MB
Examineur	Mr. BOUKREDIMI Djamel	MCA	Univ. Es-senia Oran

## DEDICACE

*À la mémoire de mon Père bien aimé rahimahou Allah  
Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour,  
L'estime, le dévouement et le respect que j'ai eu toujours pour vous.  
Rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et  
Nuit pour mon éducation et mon bien être.  
Ce travail est le fruit de tes sacrifices que tu as  
consentis pour mon éducation et ma formation.*

*Je dédie ce travail*

## REMERCIEMENTS

الحمد و الشكر للهالذي رزقني نعمة العلم و فضلني على كثير من عباده و الصلاة و السلامعلى سيدنا محمد  
خير و أفضل العلماء.

*Je tiens tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui m'a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.*

*La première personne que je tiens à remercier vivement est mon encadreur Mr Belaidi Abdelkader, mon directeur de cette thèse qui s'est toujours montré à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de cette thèse, l'aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer, pour son soutien moral, l'orientation, la confiance et la patience qui ont constitué un apport considérable sans lequel ce travail n'aurait pas pu être mené. Je trouve dans sa façon de m'encadrer un hommage à sa forte personnalité.*

*J'exprime ma gratitude à Mr Carl Bender Professeur à l'Université « Washington » à St. Louis pour son aide précieux en nous fournissant une liste de sujets liés au domaine qui nous intéresse.*

*Sans oublier Mr Chaker Mohamed Professeur à INRS\_EMT physics de l'université de Montréal et Mr Chaker Abdelkader Professeur à ENP d'Oran, Algérie.*

*Mes remerciements s'étendent également au Professeur Zaanoun Yahia du département de physique de l'université d'Es-Senia.*

*Mes vifs remerciements vont également aux membres du jury Mrs : A. Boucif, A. Djemai, A.B. Hamou et D. Boukredimi pour l'intérêt qu'ils ont porté à ma recherche en acceptant d'examiner mon travail et de siéger ma soutenance.*

*Enfin, je ne peux terminer mes remerciements sans exprimer tout ma reconnaissance et ma gratitude : à ma très chère mère dont ta prière et ta bénédiction m'ont été d'un grand secours pour mener à bien mes études. Je te dédie ce travail en témoignage de mon profond amour. Puisse Dieu, le tout puissant, te préserver et t'accorder santé, longue vie.*

*A mon cher mari et mes très chères filles. Vos sacrifices, vos soutiens moraux et matériels, la gentillesse et le profond attachement de mon mari m'ont permis de réussir mes études.*

*Sans l'aide de ma petite famille, et son conseil et son encouragement, ce travail n'aurait vu le jour.*

# Contenu

- Introduction générale..... 10

## Chapitre 1

### Mécanique analytique

1. Mécanique analytique .....	17
• 1.1 La loi de Newton des équations Lagrange .....	17
○ 1.1.1 Coordonnées généralisées .....	17
○ 1.1.2 Déplacement virtuel.....	18
○ 1.1.3 Le travail virtuel et le principe de D'Alembert.....	19
○ 1.1.4 Force généralisée .....	20
○ 1.1.5 Equations de Lagrange .....	21
• 1.2 Formalisme lagrangien.....	23
○ 1.2.1 Principe de Hamilton.....	23
○ 1.2.2 Principe de variation de Hamilton.....	24
• 1.3 Formalisme hamiltonien.....	25
○ 1.3.1 Variables canoniques.....	26
○ 1.3.2 Transformation de Legendre .....	26
○ 1.3.3 Equations de Hamilton .....	26
○ 1.3.4 Action et Hamiltonien .....	27
2. Principe variationnel pour les champs .....	28
• 2.1 Formalisme lagrangien .....	28
• 2.2 Formalisme hamiltonien.....	29

## Chapitre 2

### Géométrie Riemannienne et la géodésique

• 2.1 Espace ponctuel pré-Euclidien .....	32
○ 2.1.1 Exemple d'un espace pré-Euclidien.....	32
▪ Définition d'un espace ponctuel .....	33
▪ Références d'un espace ponctuel pré-Euclidien.....	33
▪ Coordonnées d'un point .....	33
▪ Changement de référence .....	34
▪ Distance entre deux points.....	34
▪ Dérivée d'un vecteur .....	35
○ 2.1.2 Coordonnées curvilignes .....	37
▪ Systèmes de coordonnées .....	37
▪ Coordonnées rectilignes.....	37
▪ Coordonnées curvilignes .....	37
○ 2.1.3 Repère naturel.....	38
▪ Système de coordonnées cartésiennes .....	38

▪	Base naturelle.....	38
▪	Référence naturelle .....	39
▪	Changementdes coordonnées curviligne .....	39
▪	Changement de base naturelle .....	40
•	2.2 Connexions .....	40
○	2.2.1 Connexions et symboles de Christoffel.....	41
▪	Symboles de seconde espèce .....	42
▪	Symboles de première espèce.....	42
▪	Notation des symboles de Christoffel.....	43
▪	Determination des symboles de Christoffel.....	43
▪	Symétrie des symboles de Christoffel .....	44
▪	Les symboles de Christoffel en fonction de la métrique .....	44
▪	Changement de base .....	45
▪	Vecteurs duaux .....	46
▪	Équation géodésique en utilisant le principe de Hamilton .....	46
○	2.2.2 Dérivée Covariante.....	48
▪	Transport parallèle .....	48
▪	Variation le long d'une géodésique.....	49
▪	Propriétés de la dérivée covariante .....	51
▪	Deuxième dérivée covariant d'un vecteur.....	51
○	2.2.3 Differentiation covariante.....	52
▪	Différentiation covariant d'un champ de vecteur cotangent .....	52
▪	Connexions linéaires et dérivée covariante .....	52
▪	Différentiation covariant d'un champde vecteur tangent.....	55
▪	Différentiation covariant d'un tenseur .....	55
○	2.2.4 Géodésiques et Transport Parallèle .....	56
▪	Champs de vecteurs le long des courbes .....	56
▪	Dérivées covariantes le long des courbes .....	56
▪	Transport parallèle le long d'une courbe .....	57
▪	Equation géodésique.....	57
○	2.2.5 Théorème de Ricci.....	58
○	2.2.6 Torsion.....	59
○	2.2.7 Connexion métrique et Symbolesde Christoffel.....	60
•	2.3 Courbure .....	61
○	2.3.1 Forme courbure .....	61
○	2.3.2 Transformation de la forme courbure.....	64
▪	2.3.3 Tenseur de courbure de Riemann .....	65
▪	Courbure métrique.....	66
▪	Système de coordonnées normal .....	67
▪	Symétries du tenseur de Riemann .....	68
▪	Première identité de Bianchi.....	68
▪	Deuxième identité de Bianchi.....	69
○	2.3.4 Forme de courbure et Tenseur de courbure de Riemann.....	69
○	2.3.5 Tenseur de Ricci et Courbure scalaire .....	71
▪	Deuxième identité de Bianchi.....	71
▪	Tenseur d'Einstein .....	72

# Chapitre 3

## Multivecteurs champs

### La formulation géométrique pour les formalismes de Lagrange et de Hamilton

• 3.1 Champs multivecteurs .....	76
○ 3.1.1 Champs multivecteurs dans les variétés différentiables.....	76
○ 3.1.2 Jet bundle .....	78
▪ Jets .....	78
▪ Jets manifolds .....	78
▪ Jet bundles .....	79
○ 3.1.3 Connexions et Champs multivecteurs dans le je bundle de premier ordre. .	80
○ 3.1.4 Champs multivecteurs et Champs de jet dans les jets bundles.....	82
• 3.2 Géométrie $k$ -symplectique.....	84
○ 3.2.1 Manifold $k$ -symplectique .....	84
○ 3.2.2 Eléments géométriques .....	85
▪ Fibré tangent de $k^1$ --velocities d'un manifold .....	85
▪ Champs de vecteurs canoniques .....	85
▪ Structure canonique $k$ -tangente .....	86
▪ Remontées verticales des champs de vecteurs de $M$ à $T_k^1 M$ .....	86
▪ Champs $k$ -vecteurs et Sections intégrales.....	87
▪ Second-ordre des équations différentielles partielles dans $T_k^1 M$ (SOPDE) ....	88
○ 3.2.3 Formulation géométrique pour le formalisme de Lagrange $k$ -symplectique .....	89
○ 3.2.4 Formalisme hamiltonien $k$ -symplectique.....	91
• 3.3 Géométrie $k$ -Cosymplectique .....	92
○ 3.3.1 Manifold $k$ -cosymplectique .....	92
○ 3.3.2 Formalisme hamiltonien $k$ -cosymplectique .....	94
○ 3.3.3 Eléments géométriques pour le formalisme lagrangien $k$ -cosymplectique .	95
▪ Champs de vecteurs canoniques .....	95
○ 3.3.4 Formulation géométrique pour le formalisme lagrangien $k$ -cosymplectique .....	95
• 3.4 Géométrie multisymplectique .....	98
○ 3.4.1 Manifold multisymplectique et les champs multivecteurs hamiltoniens....	98
○ 3.4.2 Formalisme multisymplectique de la théorie de champs.....	99
▪ Multimomentum bundles.....	99
○ 3.4.3 Systèmes hamiltoniens dans $J^1 \pi^*$ .....	100
▪ Systèmes hamiltoniens restreints.....	100
▪ Principe variationnel et Equations de champ .....	101
▪ Équations hamiltoniennes pour les champs multivecteurs .....	103

○ 3.4.4 Formalisme lagrangien .....	105
▪ Systèmes lagrangiens.....	105
▪ Equations de champ de Lagrange.....	106
○ 3.4.5 Formalisme hamiltonien .....	108
▪ Faisceaux Multimomentum. Cartes de Legendre.....	108
▪ Systèmes hyper réguliers .....	110

## Chapitre 4

### Géométrie Multisymplectique et $k$ -Cosymplectique

#### Structures pour les Théories de Champs

#### et la Mécanique Relativiste

• 4.1 Géométrie multisymplectique pour les Théories de Champs Classiques.....	115
○ 4.1.1 Formalisme lagrangien .....	115
○ 4.1.2 Formalisme hamiltonien .....	116
• 4.2 Géométrie multisymplectique pour la Mécanique Relativiste .....	119
○ 4.2.1 Formalisme lagrangien .....	119
○ 4.2.2 Formalisme hamiltonien .....	120
• 4.3 Relation entre la géométrie multisymplectique et $k$ -structure.....	122
○ 4.3.1 Géométrie multisymplectique et $k$ -cosymplectique structure.....	122
○ 4.3.2 Géométrie multisymplectique et $k$ -symplectique structure .....	123
• 4.4 Dynamique des Systèmes physiques .....	125
○ 4.4.1 Dynamique d'une particule chargée relativiste.....	125
○ 4.4.2 Dynamique du champ électromagnétique libre.....	129
• Conclusion.....	131
• References .....	132
• ANNEXE.....	136
• Résumé.....	137



# **Introduction générale**

## Introduction générale

La cinématique est concernée par le mouvement des corps matériels et, pour cette raison, elle est parfois appelée *la géométrie du mouvement*. Mais le mouvement n'a de sens que lorsqu'elle est mesurée par rapport à *un système de référence*, ce qui nécessite un système bien défini de coordonnées et une mesure du temps. En mécanique newtonienne, on suppose qu'il existe un espace absolu qui est euclidien et *un temps absolu* dont l'écoulement est indépendant de l'espace. Puisque l'espace euclidien est homogène et isotrope, nous devons conclure qu'il n'y a pas de position ou d'orientation préférée, donc pas de favori système de coordonnées.

La première étape vers la mise de l'étude de la dynamique sur une base vraiment scientifique a été prise par Galileo. La principale contribution de Galileo pour le développement de la science de la physique repose sur des mesures spécifiques plutôt que sur des principes métaphysiques et formelles logiques. Il a mis l'étude du mouvement des corps sur la bonne voie en développant le concept de l'accélération. La recherche de Galilée de la chute d'objets lui a permis de constater qu'il est faux de croire que partout où il ya un mouvement il doit y avoir une force. En effet, il a conclu que la force provoque un changement de vitesse, mais ce n'est pas nécessairement la force qui maintient le mouvement dans lequel l'amplitude et la direction de la vitesse ne changent pas. C'est la déclaration de base de Galilée sur *la loi d'inertie*.

La mesure de la tendance d'un corps à résister à un changement dans son mouvement uniforme est connue comme étant *la masse* ou *inertie* du corps. Galilée a également observé que si l'accélération est constante, la vitesse varie avec le temps pour les organismes relevant, de sorte que la déviation d'un état de repos ou de mouvement uniforme doit être attribuée à l'influence d'autres corps. Il reconnaît que les lois du mouvement ne sont pas affectées par le mouvement uniforme, de sorte que non seulement il n'y a pas de position naturelle dans l'espace, mais il n'y a pas de vitesse favorisée dans le référentiel naturel.

Ainsi la référence Galilée a montré qu'il existe en effet des systèmes de référence privilégiées dans lesquels un élément se déplaçant avec une vitesse uniforme ou rester dans un état de repos, sauf s'il est influencé par des forces extérieures. Un tel référentiel homogène et isotrope est appelé un espace inertiel ou *Repère galiléen*. Le système inertiel est au repos ou se déplace avec une vitesse uniforme par rapport à un espace fixe. Les propriétés de l'espace et le temps sont les mêmes et les lois de la mécanique sont identiques dans tous les référentiels inertiels. C'est le principe de Galilée de la relativité.

Les relations entre les coordonnées de deux systèmes inertiels en mouvement relatif uniforme à une vitesse sont connues comme les transformations de Galilée:

$$\begin{aligned}\vec{r}'_i &= \vec{r}_i - \vec{v}t \\ t' &= t\end{aligned}\tag{1.1}$$

Le dernier travail de Galileo, publié à Leyde en 1638, revu et redéfini ses premières études sur le mouvement et les principes de la mécanique en général. Le livre a ouvert une voie qui mènerait à la loi de la gravitation de Newton qui établit le lien entre les lois de la physique mathématique planétaires de Kepler et Galilée. Newton a élargi les idées de Galilée et vers la fin du XVII ème siècle, il a formulé ce qui a fini par être connu comme la loi du mouvement

de Newton. En fait la première loi est tout simplement la loi de Galilée de l'inertie. Si nous insistons sur le traitement des phénomènes mécaniques dans les systèmes accélérés, nous devons introduire des forces fictives qui sont des forces centrifuges et de Coriolis.

Ces forces fictives sont strictement de nature cinématique et apparaissent lorsque le mouvement est une rotation des systèmes de coordonnées. Selon Newton, le temps est le même dans tous les systèmes inertiels. Étant donné que le temps est le même pour toutes les trames d'inertie, la notion de simultanéité ne présente aucune difficulté et les événements se produisent simultanément pour tous les observateurs inertiels.

Le principe de la relativité énonce que toutes les lois de la physique, sont identiques dans tous les référentiels galiléens. On y joint un postulat conforme à l'électromagnétisme de Maxwell : « la valeur de la vitesse de la lumière dans le vide est la même dans tous les référentiels galiléens ». Cela s'avère être en conflit avec les résultats prédits par des observateurs dont les mouvements sont liés par des transformations de Galilée. Ceci, cependant, est en contradiction avec le résultat expérimental. Les expériences faites par les célèbres Michelson et Morley ont montré que la vitesse de la lumière est la même dans toutes les directions et ne dépend pas de mouvement relatif de l'observateur et la source. Il faut donc conclure que les transformations galiléennes peuvent ne pas être correctes et doivent être remplacées par des transformations préservant la constance de la vitesse de la lumière dans tous les systèmes. Cette transformation, connue comme la transformation de Lorentz, est applicable à la fois aux phénomènes mécaniques et électromagnétiques.

Dans la dernière partie du 19<sup>ème</sup> siècle, la théorie ondulatoire de la lumière a été créée sur une base solide faite par les recherches de Faraday, Maxwell et Hertz en théorie des champs électromagnétiques. Selon cette théorie, les ondes lumineuses sont simplement des ondes électromagnétiques se propageant dans le vide à une vitesse constante  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$  par rapport

à un espace absolu. Mais, contrairement aux équations de la mécanique newtonienne qui sont invariantes à la transformation de la vitesse qui est dérivé de (1.1):

$$\vec{V}' = \vec{V} - \vec{v}$$

Les équations de Maxwell ont été démontrés de ne pas être invariants sous les transformations de Galilée.

Maxwell a insisté sur le fait que les équations de base de l'électrodynamique étaient valides dans une référence privilégiée appelée "éther" qui est un milieu élastique qui permet aux ondes électromagnétiques à se propager. Ce milieu élastique est censé d'être une référence absolue pour les phénomènes électromagnétiques de la même manière que l'espace absolu qui décrit la mécanique de Newton. Que l'éther était seulement une hypothèse, la nécessité de trouver des preuves concrètes de son existence restait. Étant donné que la terre a été supposé se déplacer par rapport à l'éther à une vitesse  $v$ , et étant donné que la vitesse de la lumière  $c$  par rapport à l'éther, qui est supposée être constante, il est prévu qu'au moins la vitesse de la lumière par rapport à la terre doit être différente de  $c$ . Afin de prouver l'existence du

mouvement de la terre par rapport à l'éther, en 1881 Michelson réalise une expérience à l'aide d'un interféromètre capable de mesurer la vitesse de la lumière dans le milieu prétendue (éther) et basé sur la loi classique de l'addition de vitesses. Sachant que cette expérience permet de détecter le moindre changement de vitesse possible plus petit que  $(v/c)^2$  mais il ne pouvait trouver aucun effet. En 1887, Michelson et Morley ont répété l'expérience, mais l'expérience a de nouveau réussi à détecter l'existence de l'éther. Cependant, ils ont démontré avec un grand degré de précision que la vitesse de la lumière est la même dans toutes les directions, indépendamment du mouvement de la source. C'est ainsi que l'expérience de Michelson-Morley, en 1880, avait défié les postulats de la physique classique en prouvant que la vitesse de la lumière est la même pour tous les observateurs, indépendamment de leur mouvement relatif.

Dans une tentative pour expliquer l'échec de l'expérience nécessaire pour détecter le mouvement de la terre par rapport à l'éther. Fitzgerald et Lorentz, tous les deux indépendamment l'un de l'autre, avaient avancé une hypothèse de la notion de la contraction d'un objet le long de la direction de son mouvement par rapport à un observateur, mais les dimensions dans les autres directions ne sont pas contractées. Lorentz et Fitzgerald ont tenté de préserver les concepts classiques en montrant comment la contraction faite par l'appareil de mesure permettrait de réduire la constance de la vitesse apparente de la lumière. L'hypothèse de contraction a été généralisée par Lorentz en introduisant un ensemble de transformations qui rendent les phénomènes électromagnétiques et optiques indépendant du mouvement uniforme du système. En particulier, il a présenté un temps variable, connue sous le nom de temps local, car elle diffère de système à un autre. La différence entre la l les transformations de Lorentz et celles de Galilée est de l'ordre  $(v/c)^2$ . Bien que Lorentz a réalisé que pour tenir compte de la constance de la vitesse de la lumière une nouvelle cinématique appelé la cinématique de Lorentz était nécessaire. Il n'a pas contesté la validité du principe classique de la relativité, et il n'a pas abandonné l'idée de l'éther. En fait, le but de ses transformations était de sauver le concept d'éther en fournissant une explication de l'échec de l'expérience de Michelson et Morley.

À peu près au même moment, Poincaré a également développé un ensemble de transformations semblables aux transformations de Lorentz et la réalisation de l'objectif est de rendre l'électromagnétique et les phénomènes optiques indépendants du mouvement uniforme de cadre de référence. Les deux Lorentz et Poincaré ont réalisé que, à la suite de ces transformations, les équations de Maxwell pourraient être exprimées dans un nombre infini de systèmes inertiels, mais Lorentz a continué de croire que l'un de ces systèmes représentait l'éther au repos. Poincaré, cependant, est allé plus loin en reconnaissant que l'équivalence mathématique des systèmes inertiels pour les phénomènes électromagnétiques représente un nouveau principe de relativité. En fait, il a proposé ce principe comme une loi générale de la nature et a suggéré que les lois de la mécanique doivent être modifiées pour se conformer à cette loi. Cependant, il n'a jamais compris l'implication physique complète de ce principe de la relativité et il considérait que les transformations sont purement comme un dispositif mathématique. Il n'a pas pris la décision importante de faire du principe de la relativité indépendant de sa dérivation à partir des équations de Maxwell.

Lorentz et Poincaré ont fait un pas de géant vers la fourniture d'une nouvelle description du monde physique; Mais ils ont tous deux manqué d'apprécier les implications considérables de leurs transformations. Il restait à Einstein pour démontrer que le principe de la relativité et les transformations de Lorentz ont soulevé des questions sur les concepts très fondamentaux, tels que l'éther et de l'espace absolu, qui étaient supposés. Einstein a proposé en 1905 de construire de nouveaux principes fondés sur des données expérimentales. Il a avancé deux postulats:

- 1) Les lois de la nature (y compris les lois de la mécanique et de l'électrodynamique) sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels.
- 2) La vitesse de la lumière a la même valeur pour tous les systèmes d'inertie indépendamment de la source.

Les deux postulats sont à la base de la théorie spéciale de la relativité d'Einstein. Bien que les postulats semblent contradictoires, Einstein a montré qu'ils peuvent coexister si la notion de temps absolu est éliminée et le temps est ajouté comme quatrième coordonnée aux trois coordonnées spatiales euclidiennes. Einstein a fait retenir la transformation de Lorentz, mais il faut souligner qu'il a tiré les équations correspondantes du point de vue général du principe de la relativité. En 1907, Minkowski réalisa que le travail de Lorentz et Einstein pourrait être mieux compris dans un espace plat, déjà introduit par Poincaré en 1905 et dispose d'une pseudo-métrique qui est un "continuum espace-temps" en quatre dimensions. Cet espace-temps continu appelé maintenant l'espace de Minkowski. C'est un espace pseudo-euclidien. Un tel espace pour Einstein est un espace sans gravité (sans accélération de l'observateur). D'autre part, par la révision du concept de temps et le mouvement relatif des référentiels inertiels au moyen de transformations de Lorentz, Einstein a réussi à fournir une base commune pour le traitement de ces deux phénomènes mécaniques et électromagnétiques.

Dans la mécanique relativiste d'Einstein la notion de simultanéité nécessite un examen plus approfondi. Il renonce alors à la notion de simultanéité absolue entre deux événements qui se produisent dans deux endroits différents. Si la vitesse de la lumière est finie et constante et si deux événements se produisent simultanément, pour un observateur dans un système inertiel généralement ne se produit pas simultanément pour un observateur dans un autre système inertiel. Einstein a montré qu'il est possible de définir par rapport à une simultanéité relative de deux événements qui se produisent en différents points d'un système d'inertie donné.

En mécanique newtonienne, la masse constante est une propriété du corps. Elle est indépendante du mouvement par rapport dans un espace inertiel ou à l'écoulement du temps. Dans la mécanique relativiste, le concept de la masse constante doit également être révisé, à la suite de la nouvelle cinématique. En particulier, une masse relativiste est fonction de la vitesse.

Les lois de la mécanique s'écrivent sous une forme classique et simple quand on se réfère à un système inertiel. Un observateur voyageant dans un référentiel en rotation pourra détecter les forces de Coriolis et les forces centrifuges. Ces forces, qui sont directement proportionnelles à la masse, sont cinématique et peuvent être éliminés en se référant à un système de Galilée. Mais certaines forces très importantes dans la mécanique classique, à savoir, les forces gravitationnelles sont également proportionnelles à la masse.

En revanche, les forces gravitationnelles ne peuvent pas être éliminées par une transformation qui conserve le concept plat de l'espace, comme dans la relativité restreinte. De plus, en présence de la gravité, la constance de la vitesse de la lumière est maintenue mais elle s'oppose formellement à l'hypothèse d'un temps absolu. Le premier postulat (principe de relativité dit) toutes les lois de la physique sont les mêmes dans les référentiels galiléens. En effet, nous savions que les lois de la mécanique conservent leur forme dans les systèmes de coordonnées qui sont appelés galiléen. Einstein avait généralisé cette hypothèse en l'appliquant à toutes les lois de la physique (mécanique, optique et électrodynamiques). Un autre éclair de génie, Einstein a abandonné l'espace de Minkowski en faveur d'un espace de Riemann à quatre dimensions dans lequel les forces gravitationnelles disparaissent. Cet espace possède une courbure et devient minkowskien localement. La nouvelle géométrie comprend *l'espace*, *le temps* et *la matière* ainsi que les équations du champ de gravitation qui rapporte la courbure en un point de l'espace au tenseur impulsion-énergie en ce point. Ce tenseur est une mesure de la densité de *matière* et de *l'énergie*. La nouvelle théorie est appelée *la théorie générale de relativité d'Einstein* [2].

En relativité générale, la présence de matière peut déformer localement l'espace-temps lui-même et pas seulement les chemins, de sorte que les trajectoires ne sont plus des lignes droites, elles sont appelés les géodésiques et l'espace est dit *espace de Riemann*.

La trajectoire des particules libres comme celle des photons est une ligne droite dans un repère inertiel local. Une fois ces lignes sont prolongées au-delà de la référence locale, ils ne semblent plus directement, ils sont connus comme géodésique. Première loi de Newton doit être remplacée par la loi de l'équation géodésique.

Le travail de thèse présent est présenté dans le contexte d'étendre l'idée de la géométrie multisymplectique faite aux champs de types de « jauge de Yang-Mills » par la construction d'un faisceau de fibres plus particulier que celui déjà donné dans le travail [40], à la mécanique relativiste. Nous nous intéressons, en particulier, à la propagation des champs sans influence gravitationnelle.

Ce travail se compose de quatre chapitres. Le premier chapitre est une introduction rapide de la mécanique analytique. Le sujet comporte deux parties principales: formalisme lagrangien et formalisme hamiltonien.

Dans le deuxième chapitre, nous introduisons quelques concepts de base de la géométrie de Riemann. Nous avons commencé par l'introduction de la notion d'espace-temps. Nous nous sommes focalisés sur les coordonnées curvilignes, la dérivée covariante, le transport parallèle, les géodésiques ... etc. Autres sujets sont expliqués plus attentivement afin de clarifier les définitions les plus importantes que: courbure de Riemann, le tenseur de torsion, la connexion de Levi-Civita ... Etc. Et nous trouvons quelles sont les conditions qui rendent l'espace de Riemann à devenir un espace de Minkowski.

Dans le troisième chapitre, nous avons donné quelques définitions de ce qui est le faisceau de jet, les champs multivecteurs et les champs de jet dans les faisceaux de jet. Nous nous sommes focalisés en particulier sur des formalismes de Lagrange et de Hamilton qui sont tous

deux définis dans les géométries suivantes:  $k$ -symplectique,  $k$ -cosymplectique et multisymplectique.

Dans le quatrième chapitre, d'abord nous prolongeons la géométrie multisymplectique déjà réalisée pour les théories des champs à la mécanique relativiste par l'introduction d'une configuration d'un faisceau appropriée. En particulier, nous avons développé le modèle pour obtenir les équations de Hamilton-De Donder-Weyl (*HDW*) pour le mouvement d'une particule chargée relativiste immergée dans un champ électromagnétique. Deuxièmement, nous avons trouvé une relation directe entre la géométrie multisymplectique et la structure  $k$ -cosymplectique d'un système physique.

## **1 chapitre**

# **Mécanique analytique**



# 1. Mécanique analytique

La **mécanique analytique** est un terme utilisé pour une forme mathématique élégante de la mécanique classique [1]. Souvent, la forme vectorielle de la mécanique classique est appliquée à la formulation basée sur l'œuvre de Newton. Une autre façon d'analyser le mouvement de la mécanique classique est d'utiliser la mécanique analytique où deux quantités scalaires du mouvement sont utilisées: les énergies cinétiques et potentielles au lieu des forces.

La mécanique analytique comprend deux parties principales: le formalisme lagrangien et le formalisme hamiltonien, les deux sont équivalents.

La mécanique analytique [2, 3] a été développée principalement pour étendre la portée de la mécanique classique pour résoudre des problèmes en utilisant le concept de contraintes sur le système et les intégrales de chemin. Toutefois, les concepts conduisent les théoriciens au développement de la mécanique quantique, et son amélioration est la théorie des champs quantiques. Applications et extensions ont donné lieu à la relativité générale d'Einstein. Les contraintes introduisent deux difficultés dans la formulation de Newton car les coordonnées ne sont plus indépendantes et les forces derrière les liaisons ne sont pas connues. La première difficulté est surmontée en introduisant les coordonnées généralisées tandis que la seconde est en reformulant le problème en éliminant les forces de liaison.

Une liaison est appelée holonome si elle peut être représentée par une relation  $f$  entre les coordonnées et le temps par la formule:

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, t) = 0$$

Dans le cas contraire la liaison est dite non-holonome.

La mécanique analytique donne un aperçu sur certaines caractéristiques de la mécanique classique. En particulier, elle permet d'établir une relation entre la symétrie et la loi de conservation.

## 1.1 La loi de Newton et les équations de Lagrange

### 1.1.1 Coordonnées généralisées

Le nombre de degrés de liberté d'un système est le nombre de coordonnées nécessaire pour spécifier sa configuration. Une particule se déplaçant dans l'espace, elle a trois degrés de liberté. Si elle doit se déplacer sur une surface, elle a deux degrés de liberté. Si elle devrait continuer à se déplacer sur une courbe, elle a seulement un degré de liberté. Le fait de se déplacer dans une surface, la particule est donc soumise à une contrainte mais si elle doit se déplacer sur une courbe, il y a deux contraintes. Pour un système constitué de  $N$  particules et est soumis aux  $k$  contraintes, il a donc  $f = 3N - k$  degrés de liberté.

Le nombre de coordonnées généralisées est égal au nombre de degrés de liberté du système. Les coordonnées généralisées sont indépendantes l'une de l'autre. Ils définissent un espace de configuration.

Le vecteur de position est une fonction du temps et de **coordonnées généralisées** ( $q_i$ ):

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_f, t) \quad (1.1.1.1)$$

où l'indice  $i$  identifie une particule dans le système.

### 1.1.2 Déplacement virtuel

Un déplacement virtuel découle des variations infinitésimales des coordonnées qui sont dues à des liaisons imposées sur le système à un moment donné.

Pour éviter la confusion entre le déplacement virtuel et le déplacement réel de la particule  $i$ , nous notons le premier  $\delta \vec{r}_i$  et le second  $d\vec{r}_i$ . Le déplacement virtuel est indépendant du temps que nous pouvons écrire:

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{k=1}^f \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \quad (1.1.2.1)$$

où  $\delta q_k$  représente des changements dans les coordonnées généralisées qui correspondent au déplacement virtuel. La somme est naturellement sur tous les degrés de liberté du système.

Le déplacement réel de la particule  $i$  est :

$$d\vec{r}_i = \sum_{k=1}^f \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt \quad (1.1.2.2)$$

La vitesse étant donné par  $\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$ , l'équation (1.1.2.2) donne :

$$\vec{v}_i = \sum_{k=1}^f \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \quad (1.1.2.3)$$

Où  $\dot{q}_k = \frac{dq_k}{dt}$  la vitesse généralisée.

Les vecteurs de position sont indépendants des vitesses généralisées, la dérivée de l'équation (1.1.2.3) par rapport à  $\dot{q}_k$  donne:

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^f \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_j} \quad (1.1.2.4)$$

Comme les vitesses généralisées sont indépendantes, nous avons:

$$\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_j} = \delta_{jk} \quad (1.1.2.5)$$

dans (1.1.2.4), seulement le terme pour qui  $k = j$  n'est pas nul, alors

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad (1.1.2.6)$$

Par conséquent: cette relation sera utile plus tard.

La dérivée partielle du vecteur de position par rapport à une coordonnée généralisée est elle-même une fonction de coordonnées généralisées et du temps. Sa dérivée totale par rapport au temps donne:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) = \sum_{k=1}^f \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t \partial q_j} \quad (1.1.2.7)$$

i.e:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial}{\partial q_j} \left\{ \sum_{k=1}^f \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right\} \quad (1.1.2.8)$$

Le terme (1.1.2.8) correspond à  $\partial \vec{v}_i / \partial q_j$ .

### 1.1.3 Le travail virtuel et le principe de D'Alembert

Par définition le travail virtuel fait sur une particule est le produit scalaire de la force agissant sur la particule par le déplacement virtuel:

$$\delta w_i = \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i \quad (1.1.3.1)$$

Nous obtenons le travail virtuel fait sur le système en prenant la somme des travaux sur toutes les particules. À l'équilibre, le travail virtuel fait sur le système est nul:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (1.1.3.2)$$

la somme est étendue à toutes les particules du système.

La force totale agissant sur chaque particule du système peut être considérée comme la somme d'une force exercée extérieure  $\vec{F}_i^a$  et de la force de liaison entre les particules  $\vec{f}_i$ .

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^a + \vec{f}_i \quad (1.1.3.3)$$

En substituant (1.1.3.3) dans l'équation (1.1.3.2), nous obtenons:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^a \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^N \vec{f}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (1.1.3.4)$$

Dans la suite, nous supposons que le travail virtuel des forces de liaison est nul. Cette condition est écrite sous la forme :

$$\sum_{i=1}^N \vec{f}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (1.1.3.5)$$

C'est ainsi que les forces de liaison sont éliminées de la formalisme de Lagrange. Lorsque le système n'est pas en équilibre, une particule peut être accélérée et la loi de Newton peut être écrite par:

$$\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i = 0 \quad (1.1.3.6)$$

i.e: 
$$\vec{F}_i^a + \vec{f}_i - \dot{\vec{p}}_i = 0 \quad (1.1.3.7)$$

Le terme  $(-\dot{\vec{p}}_i)$  représente une force d'inertie, le travail virtuel de toutes les forces est nul, nous déduisons:

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (1.1.3.8)$$

Cette relation reflète le **principe de D'Alembert**. En tenant compte des équations (1.1.3.5) et (1.1.3.7), nous obtenons:

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i^a - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (1.1.3.9)$$

cela ne signifie pas que chaque parenthèse est nulle. En effet, les déplacements virtuels ne sont pas indépendants car ils doivent être compatibles avec les liaisons imposées au système. Parce que les coordonnées généralisées peuvent varier indépendamment l'une de l'autre, la relation (1.1.3.9) doit être exprimée en termes de variations virtuelles des coordonnées généralisées  $(\delta q_k)$ .

#### 1.1.4 Force généralisée

Compte tenu de la relation (1.1.2.1), le travail virtuel des forces appliquées peut être écrit comme:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^a \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^f \vec{F}_i^a \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \quad (1.1.4.1)$$

où l'indice  $i$  est utilisé pour identifier une particule et l'indice  $k$  est utilisé pour identifier un degré de liberté.

L'expression d'une **force généralisée** associée à la coordonnée généralisée :

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^a \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \quad k = 1, 2, \dots, f \quad (1.1.4.2)$$

Le travail virtuel de forces appliquées peut être écrit comme:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^a \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{k=1}^f Q_k \delta q_k \quad (1.1.4.3)$$

On note que la force généralisée n'a pas nécessairement la dimension d'une force ordinaire. Elle est exprimée en Newton si la coordonnée généralisée  $\delta q_k$  dans (1.1.4.3) a la dimension d'une longueur.

Un cas particulièrement intéressant est celui du champ conservateur. Il est alors possible de définir une énergie potentielle  $V$  et la force agissant sur la particule  $i$  par l'expression:

$$\vec{F}_i^a = -\text{grad}_i V \quad (1.1.4.4)$$

où l'indice  $i$  signifie que les dérivés impliqués dans le gradient sont calculés à partir des coordonnées de la particule.

En utilisant la définition (1.1.4.2) de la force généralisée, nous obtenons:

$$Q_k = -\sum_{i=1}^N \text{grad}_i V \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \quad (1.1.4.5)$$

où

$$Q_k = -\sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \quad (1.1.4.6)$$

Ce qui est équivalent à :

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \quad (1.1.4.7)$$

### 1.1.5 Equations de Lagrange

Nous transformons maintenant la deuxième somme qui apparaît dans l'équation (1.1.3.9). En utilisant l'équation (1.1.2.1) et la définition de l'impulsion  $\vec{p}_i = m_i \dot{\vec{r}}_i$ , nous obtenons:

$$\sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^f m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \quad (1.1.5.1)$$

Nous notons en outre que:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left( m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) - m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \quad (1.1.5.2)$$

En utilisant l'équation (1.1.2.6), le premier terme à droite se lit comme suit:

$$\frac{d}{dt} \left( m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) = \frac{d}{dt} \left( m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left( \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_k} \right) \quad (1.1.5.3)$$

où  $T_i$  est l'énergie cinétique de la particule  $i$ .

De la même façon, en utilisant l'équation (1.1.2.8) et la définition de l'impulsion, le deuxième terme dans (1.1.5.2) peut être écrit comme suit:

$$m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) = m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) = \frac{\partial T_i}{\partial q_k} \quad (1.1.5.4)$$

En portant les résultats (1.1.5.3) et (1.1.5.4) dans l'équation (1.1.5.1) et prendre en considération que l'énergie cinétique est additive, nous obtenons:

$$\sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{k=1}^f \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right] \delta q_k \quad (1.1.5.5)$$

où  $T = \sum_{i=1}^f \frac{1}{2} m_i v_i^2$  est l'énergie cinétique totale du système.

Les équations (1.1.4.3) et (1.1.5.5) permettent d'exprimer la relation (1.1.3.9) reflétant le principe de D'Alembert en termes de coordonnées généralisées:

$$\sum_{k=1}^f \left[ Q_k - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right] \delta q_k = 0 \quad (1.1.5.6)$$

Comme les coordonnées généralisées peuvent varier indépendamment les un des autres, le terme entre crochet de l'équation (1.1.5.6) doit s'annuler pour chaque valeur de  $k$  :

$$Q_k = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} \quad (1.1.5.7)$$

Dans le cas d'un champ conservateur, l'identification des expressions (1.1.4.7) et (1.1.5.7) de la force généralisée permet d'écrire:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} (T - V) = 0 \quad (1.1.5.8)$$

Dans le cas particulier où l'énergie potentielle est indépendante des vitesses généralisées, l'équation (1.1.5.8) est équivalente à:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_k} = 0 \quad (1.1.5.9)$$

Où nous définissons une nouvelle fonction dite **la fonction de Lagrange ou lagrangien** du système qui est donné par :

$$L = T - V \quad (1.1.5.10)$$

Tout système mécanique de degrés de liberté  $f$  est caractérisé, à chaque instant  $t$ , par une fonction  $L$  définie par les coordonnées et les vitesses généralisées, elle est dite *le Lagrangien* :

$$L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) = L(q, \dot{q}, t)$$

Donc  $L$  est une notation condensée pour une fonction à  $2f$  coordonnées indépendants:  $f$  coordonnées généralisées et  $f$  vitesses généralisées.

Les équations (1.1.5.9) sont dites équations de Lagrange (ou **équations d'Euler-Lagrange**), elles décrivent le mouvement du système.

Le Lagrangien est déterminé à une constante additive. Nous pouvons toujours ajouter, au Lagrangien, une dérivée totale par rapport au temps d'une fonction arbitraire sans changer les équations du mouvement.

Ainsi, si  $L$  est le Lagrangien d'un système,  $L'$  défini par l'équation:

$$L' = L + \frac{d}{dt} F(q, t) \quad (1.1.5.11)$$

$L'$  est aussi un Lagrangien du système.

Le moment conjugué d'une coordonnée généralisée est défini par:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad (1.1.5.12)$$

L'équation de Lagrange (1.1.5.9) peut être écrite comme:

$$\dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k} \quad (1.1.5.13)$$

Une coordonnée généralisée  $q_i$  qui ne paraît pas explicitement dans le Lagrangien

$$\dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (1.1.5.14)$$

$q_i$  est appelée une coordonnée **cyclique**. Le moment conjugué  $p_i$  est conservé selon (1.1.5.14). Il est dit une **constante du mouvement**.

## 1.2 Formalisme lagrangien

### 1.2.1 Principe de Hamilton

Les équations de Lagrange peuvent être obtenues à partir du principe de d'Alembert, c'est à dire en tenant compte des variations infinitésimales de mouvement du système à un moment donné. Il est également possible d'obtenir, à partir d'un autre principe qui estime le mouvement complet du système entre les instants  $t$  et  $t'$  et des petites des variations du mouvement virtuel autour du mouvement réel.

Il est nécessaire de définir ce que signifie « le mouvement du système entre les temps  $t_1$  et  $t_2$  ».

On peut décrire la configuration instantanée d'un système par les  $f$  valeurs de coordonnées généralisées  $q_1, q_2, \dots, q_f$ . Cet espace de dimension  $f$  est appelé "**espace de configuration**".

Comme le temps varie, le système évolue et le point représentatif décrit une courbe, dans l'espace de configuration, appelée **la trajectoire**. On peut considérer le temps comme un paramètre de la courbe.

Aux temps  $t_1$  et  $t_2$ , le système occupe des positions spécifiques  $q^{(1)}$  et  $q^{(2)}$  dans l'espace de configuration respectivement. Entre ces deux positions, nous définissons l'action intégrale par:

$$I(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (1.2.1.1)$$

En d'autres termes, parmi tous les chemins possibles le long desquels le système pourrait se déplacer de sa position  $q^{(1)}$  à l'instant  $t_1$  à une nouvelle position  $q^{(2)}$  à l'instant  $t_2$ , il va vraiment se déplacer le long d'un chemin pour lequel l'intégrale ci-dessus est extrémal. Cela se traduit par le **principe de Hamilton** appelé encore le **principe de Lagrange-Hamilton** qui postule l'existence d'une trajectoire parmi d'autres qui réalise

$$\delta I = 0 \quad (1.2.1.2)$$

Ce principe est appelé souvent le principe de moindre action.

Le signe  $\delta$  indique un changement arbitraire (virtuel) de la trajectoire dans l'espace de configuration.  $\delta I$  est le changement dans  $I$  résultant des changements dans  $\delta q(t)$  et  $\delta \dot{q}(t)$ .

$q(t)$  est le chemin pour lequel  $I$  est minimum.

## 1.2.2 Principe variationnel de Hamilton

Dans cette partie, nous présenterons la méthode pour le calcul variationnel, parce que l'un des principaux problèmes de ce calcul est de trouver la courbe pour laquelle l'action est extrémal.

La variation de l'action aura lieu en déformant la trajectoire dans l'espace de configuration entre les instants  $t_1$  and  $t_2$  en fixant les points des extrémités i.e  $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ . On dit que l'action est une fonction de la trajectoire.

Dans un principe variationnel, c'est le chemin mais pas une variable indépendante qui est changée. Cependant, les techniques de calcul de la dérivée ordinaire peuvent être appliquées à un tel problème si elles parviennent à définir le chemin. Pour cela, nous introduisons un paramètre  $\alpha$  tel que:

$$\delta q_i = q_i(t, \alpha) = q_i(t, 0) + \alpha \eta_i(t) \quad (1.2.2.1)$$

Où  $\eta_i(t)$  est une fonction arbitraire qui indique le changement imposée sur chaque coordonnée généralisée dans la déformation de la trajectoire. La trajectoire réelle du système correspond naturellement à  $\alpha = 0$ . Le Lagrangien et par conséquent l'action deviennent des fonctions de  $\alpha$ . La variation de l'action associée à une variation de la trajectoire est donnée par:

$$\delta I = \frac{\partial I}{\partial \alpha} d\alpha = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt \quad (1.2.2.2)$$



La variation d'une coordonnée généralisée impliquée dans la déformation d'une trajectoire est donnée par:

$$\delta q_i = \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} d\alpha \quad (1.2.2.3)$$

nous savons aussi que

$$\delta \dot{q}_i = \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} d\alpha = \frac{d}{dt} \delta q_i = \frac{\partial^2 q_i}{\partial \alpha \partial t} d\alpha dt \quad (1.2.2.4)$$

car les opérateurs différentiels  $\delta$  et  $\frac{d}{dt}$  sont indépendants.

En intégrant par partie le deuxième terme de l'équation (1.2.2.2), on obtient:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} (\delta q_i) dt = \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt \quad (1.2.2.5)$$

Etant donné que les points extrêmes sont fixés, les variations des coordonnées généralisées disparaissent pour les temps  $t_1$  and  $t_2$  i.e ( $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ ):

Le premier terme de l'équation (1.2.2.5) est nul. Utiliser (1.2.1.2) et (1.2.2.5), la relation (1.2.2.2) devient

$$\delta \mathcal{I} = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt = 0 \quad \forall \delta q_i \quad (1.2.2.6)$$

Sachant que les coordonnées généralisées sont indépendantes, nous concluons que l'expression entre parenthèse dans l'équation (1.2.2.6) doit disparaître pour chaque valeur de  $i$ . Nous trouvons ainsi les équations de Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad (1.2.2.7)$$

L'équation (1.2.2.7) est un système de  $f$  équations différentielles indépendantes de deuxième ordre pour  $i = 1, 2, \dots, f$ .

Il a été mentionné que l'addition au Lagrangien d'une dérivée totale par rapport au temps d'une fonction arbitraire (1.1.5.11) n'affecte pas les équations de mouvement selon le principe de Hamilton. Il est clair que:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + \delta F(q, t) \Big|_{t_1}^{t_2} \quad (1.2.2.8)$$

Les deux Lagrangiens  $L$  et  $L'$  mènent aux mêmes équations de mouvement. Maintenant, le dernier terme est nul car la trajectoire n'est pas déformée aux points extrêmes. Le principe variationnel est formulé à partir des scalaires ( $T$  et  $V$ ) et il est évident que les équations de mouvement (1.2.2.7) sont valables quelque soit le système de coordonnées.

### 1.3 Formalisme hamiltonien

### 1.3.1 Variables canoniques

Le formalisme Hamiltonien (ou La formulation de Hamilton) a le même contenu physique que celui du formalisme Lagrangien ( la formulation de Lagrange).

Pour un système mécanique avec  $f$  degrés de liberté, la dimension de l'espace de configuration est  $f$  et la formulation de Lagrange fournit autant d'équations de mouvement. Ces équations sont de second ordre alors il faut  $2f$  conditions initiales pour déterminer complètement l'état du système à l'instant  $t$ .

Les variables  $q$  et  $p$  sont appelés variables canoniques, dans la formulation de Hamilton. Ils définissent un espace de dimension  $2f$  appelé l'espace des phases. Le système de  $f$  équations différentielles de deuxième ordre dans le formalisme de Lagrange est remplacé par un système de  $2f$  équations différentielles de premier ordre dans la formulation de Hamilton. Les variables intervenantes sont  $(q, p, t)$  au lieu de  $(q, \dot{q}, t)$ . Un tel changement de variable peut être fait par une transformation de Legendre.

### 1.3.2 Transformation de Legendre

Soit  $f(x, y)$  une fonction de deux variables avec la différentielle totale:

$$df = udx + vdy \quad (1.3.2.1)$$

avec

$$u = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{et} \quad v = \frac{\partial f}{\partial y} \quad (1.3.2.2)$$

nous définissons une fonction  $g(y, u)$  par l'équation:

$$g = f - ux \quad (1.3.2.3)$$

La différentielle de cette fonction est écrite:

$$dg = df - udx - xdu \quad (1.3.2.4)$$

En prenant en considération (1.3.2.1), (1.3.2.4) devient :

$$dg = vdy - xdu \quad (1.3.2.5)$$

cette relation nous permet d'écrire:

$$v = \frac{\partial g}{\partial y} \quad \text{et} \quad x = -\frac{\partial g}{\partial u} \quad (1.3.2.6)$$

alors la variable  $x$  apparaissant dans la fonction  $f$  est remplacée, en utilisant la transformation de Legendre, par un nouveau paramètre  $u$  dans la fonction  $g$ . Les fonctions  $f$  et  $g$  sont duales.

### 1.3.3 Equations de Hamilton

Nous définissons une nouvelle fonction des coordonnées, impulsions et de temps par la relation:

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t) \quad (1.3.3.1)$$

Cette fonction dans (1.3.3.1) est appelée **hamiltonien** du système en mouvement. La différentielle totale de  $H$  est donnée par la formule:

$$dH = \sum_{i=1}^f \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^f \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (1.3.3.2)$$

D'autre part, la différentielle du terme (1.3.3.1) est:

$$dH = \sum_{i=1}^f p_i d\dot{q}_i + \sum_{i=1}^f \dot{q}_i dp_i - \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (1.3.3.3)$$

En utilisant (1.1.5.12), les coefficients de  $d\dot{q}_i$  dans (1.3.3.3) disparaissent. L'équation (1.3.3.3) s'écrit:

$$dH = \sum_{i=1}^f \dot{q}_i dp_i - \sum_{i=1}^f \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (1.3.3.4)$$

En identifiant les termes des équations (1.3.3.2) et (1.3.3.4), on trouve:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{et} \quad \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} \quad (1.3.3.5)$$

Ces équations sont obtenues pour chaque valeur de  $i$ , car les coordonnées de l'espace de phase sont indépendantes. Lorsque le lagrangien ne dépend pas explicitement du temps, il est de même pour l'hamiltonien.

Les équations de mouvement (1.3.3.5) sont de premier ordre. Il existe  $2f$  équations pour  $f$  degrés de liberté. Ce sont les **équations canoniques de Hamilton**. Les positions et les impulsions sont dites **variables conjuguées**.

### 1.3.4 Action et hamiltonien

Le lien entre la fonction de Lagrange et la fonction de Hamilton nous permet d'écrire l'action sous la forme:

$$I(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i - H \right) dt \quad (1.3.4.1)$$

L'accroissement de l'action s'écrit simplement:

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{i=1}^f (p_i \delta \dot{q}_i + \dot{q}_i \delta p_i) - \delta H \right) dt \quad (1.3.4.2)$$

L'accroissement de  $H$  entre la trajectoire réelle et la trajectoire variée s'écrit simplement:

$$\delta H = \sum_{i=1}^f \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^f \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \quad (1.3.4.3)$$

On peut donc mettre  $\delta I$  sous la forme:

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \delta p_i \left[ \frac{dq_i}{dt} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right] dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[ p_i \delta \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i \right] dt \quad (1.3.4.4)$$

On peut intégrer par parties pour faire apparaître  $\delta q(t)$  au lieu de  $\delta \dot{q}(t)$  dans le premier terme de la deuxième intégrale :

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[ \frac{dq_i}{dt} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right] \delta p_i dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[ \frac{dp_i}{dt} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \right] \delta q_i dt \quad (1.3.4.5)$$

$\delta I$  ne s'annulera quels que soient les accroissements des positions et impulsions que si les termes entre crochets dans chaque intégrale s'annulent identiquement sur la trajectoire effectivement suivie.

On montre bien que cette trajectoire obéit effectivement aux équations de Hamilton dont nous avons parfaitement pu établir par ce raisonnement.

On peut écrire les équations entre crochets de (1.3.4.5) sous une autre forme algébrique :

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \{H, q_i\} \\ \dot{p}_i &= \{H, p_i\} \end{aligned} \quad (1.3.4.6)$$

où  $\{A, B\} = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} - \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} \right]$  est le crochet de Poisson des deux fonctions A et B.

### Remarque

En présence d'un champ conservateur et quand l'énergie cinétique est une fonction quadratique homogène des vitesses généralisées, l'équation (1.3.3.1) donne:

$$H = 2T - L = T + V \quad (1.3.4.7)$$

L'hamiltonien est alors l'énergie totale du système.

## 2. Principe variationnel pour les champs

### 2.1 Formalisme lagrangien

Soit le champ défini sur l'espace à 4-dimension

$$\Phi(t, \vec{x}) = \Phi(x^\mu) \quad \text{où} \quad x^\mu = \begin{cases} t_0 = t \\ (x_i)_{i=1,3} = \vec{x} \end{cases}$$

L'évolution du champ est complètement caractérisée par **la densité lagrangienne**  $\tilde{L}$  qui produit **le Lagrangien** par une simple intégration :

$$L = \int \tilde{L}(\Phi^A, \partial_\mu \Phi^A, \partial_\mu \partial_\nu \Phi^A, \dots) dx^3 \quad (2.1.1)$$

Comme nous l'avons étudié en mécanique analytique, l'action (1.2.1.1) sera écrite, pour les champs, plus naturellement:

$$I = \int \tilde{L}(\Phi^A, \partial_\mu \Phi^A, \partial_\mu \partial_\nu \Phi^A, \dots) dx^4 \quad (2.1.2)$$

Où  $dx^4 = dt dx_1 dx_2 dx_3$  et  $dx^3 = dx_1 dx_2 dx_3$

Le principe de moindre action s'écrit sous la forme suivante :

$$\delta I = \int dx^4 \left\{ \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \Phi^A} - \partial_\mu \left[ \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \partial_\mu \Phi^A} \right] \right\} \delta \Phi^A \quad (2.1.3)$$

La variation  $\delta \Phi^A$  est quelconque, on obtient l'équation d'Euler-Lagrange pour le champ  $\Phi^A$  :

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \Phi^A} - \partial_\mu \left[ \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \partial_\mu \Phi^A} \right] = 0 \quad (2.1.4)$$

C'est l'équation fondamentale du mouvement pour le champ  $\Phi^A$  [4].

## 2.2 Formalisme hamiltonien

En analogie avec (1.1.5.12), on définit le champ  $\Pi^A(x)$  l'impulsion conjuguée au champ  $\Phi^A(x)$  par la formule

$$\Pi_A = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial (\dot{\Phi}^A)} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial (\partial_0 \Phi^A)} \quad (2.2.1)$$

En analogie avec (1.3.3.1), La densité hamiltonienne  $\tilde{H}(\Phi^A(x), \Pi^A(x), \partial_i \Phi^A(x))$  est alors définie par

$$\tilde{H} = \Pi \dot{\Phi}^A - \tilde{L} \quad (2.2.2)$$

L'Hamiltonien du système est une fonctionnelle des champs  $\Phi^A, \Pi^A, \partial_i \Phi^A$

$$H = \int dx^3 \tilde{H}(\Phi^A(x), \Pi^A(x), \partial_i \Phi^A(x)) \quad (2.2.3)$$

En analogie avec avec la mécanique, on définit alors les crochets de Poisson pour des fonctionnelles  $\tilde{A}[\Phi^A, \Pi^A]$  et  $\tilde{B}[\Phi^A, \Pi^A]$  par

$$\{\tilde{A}, \tilde{B}\} = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \Pi_A} \frac{\partial \tilde{B}}{\partial \Phi_A} - \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \Phi_A} \frac{\partial \tilde{B}}{\partial \Pi_A} \right] \quad (2.2.4)$$

On a alors les relations canoniques suivantes :

$$\{\Pi^A(t, \bar{x}), \Phi^A(t, \bar{y})\} = \delta^{(3)}(\bar{x} - \bar{y}) \quad (2.2.5)$$

Les équations du mouvement [4] sont alors

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_A &= \{H, \Phi_A\} \\ \dot{\Pi}_A &= \{H, \Pi_A\} \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

## **Chapitre 2**

### **Géométrie Riemannienne et la géodésique**

## 2.1 Espace ponctuel pre-Euclidien

### 2.1.1 Exemple d'un espace pré-Euclidien

L'étude des phénomènes physiques nécessite d'abord pour leur représentation, dans l'espace de la géométrie euclidienne classique, une dimension temporelle et un nombre quelconque de dimensions spatiales.

Les vecteurs (tenseurs d'ordre 1) et tenseurs (de tout ordre) [5, 6, 9] peuvent tous être utilisés pour relier chaque point de l'espace-temps à un référentiel et ainsi former des champs de vecteurs et / ou tenseurs. Cela nécessite la définition d'espaces formés de points, appelé "**espace ponctuel**".

Etudions d'abord le cas particulier de l'espace-temps formé par des triplets de nombres qui dérivent directement de l'espace géométrique classique dans les trois dimensions.

Soit les triplets de nombres notés par:

$$A = (a_1, a_2, a_3) \quad B = (b_1, b_2, b_3) \quad (2.1.1.1)$$

Appelons  $E'_3$  l'ensemble de tous les éléments  $\{A, B, \dots\}$  formés par des triplets de nombres. Pour tout couple  $(A, B)$  de deux éléments de  $E'_3$ , pris dans cet ordre, nous pouvons correspondre un vecteur  $\vec{x}$  appartenant à un espace vectoriel  $\mathcal{E}_3$ . Ce vecteur est noté  $\overline{AB}$ , et est défini par un triplet de nombres tel que:

$$x_i = b_i - a_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.1.1.2)$$

Nous avons donc:

$$\vec{x} = \overline{AB} = (x_1, x_2, x_3) \quad (2.1.1.3)$$

Si nous associons à cet élément, l'addition et la multiplication par un scalaire, nous nous trouvons dans une théorie des ensembles avec une structure d'espace vectoriel.

La correspondance que l'on établit entre chaque paire  $(A, B)$  de deux éléments de  $E'_3$  et un vecteur d'un espace vectoriel  $\mathcal{E}_3$ , vérifie les propriétés suivantes:

P1.  $\overline{AB} = -\overline{BA}$

P2. Associativité relative à l'addition :  $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$ .

P3. Si O est un élément arbitraire sélectionné de  $E'_3$ , à tout vecteur  $\vec{x}$  de  $\mathcal{E}_3$ , il correspond un point M et un seul tel que  $\overline{OM} = \vec{x}$ .

Lorsque nous avons équipé l'ensemble  $E'_3$  de cette loi de correspondance avec  $\mathcal{E}_3$  satisfaisant les trois propriétés ci-dessus, nous disons que l'ensemble des triplets de nombres est un **espace**



ponctuel noté par  $E_3$ . Les éléments de  $E_3$  et  $\mathcal{E}_3$  sont appelés respectivement des **points** et **vecteurs**. L'ensemble  $E'_3$  est dit **le support** des espaces  $E_3$  et  $\mathcal{E}_3$ .

### Définition d'un espace ponctuel

On peut généraliser à tout support  $E'_n$  la notion d'espace ponctuel. Pour cela, nous considérons un ensemble  $E'_n$  d'éléments, notés  $A, B$ , etc., et il est supposé que toute paire  $(A, B)$  d'éléments de  $E'_n$ , pris dans cet ordre, nous pouvons associer un vecteur  $\vec{x}$  noté  $\vec{AB}$  d'un espace vectoriel  $\mathcal{E}_n$  de dimensions  $n$ . Si la correspondance ainsi obtenue satisfait les axiomes P1, P2 et P3 ci-dessus de, nous disons que l'ensemble  $E'_n$  avec cette structure est un espace ponctuel de dimension  $n$  que nous désignons par  $E_n$ . Les éléments de  $E_n$  sont appelés des points.

L'espace vectoriel  $\mathcal{E}_n$  est appelé **l'espace associé** à  $E_n$  et est noté par  $T(E_n)$ . Il est l'espace tangent de  $E_n$ . Lorsque l'espace vectoriel associé est pré-Euclidien, alors  $E_n$  est un **espace ponctuel pré-Euclidien**.

### Références d'un espace ponctuel pré-Euclidien

Considérons un point  $O$  d'un espace ponctuel pré-Euclidien  $E_n$  et une base  $(\vec{e}_i)$  de l'espace vectoriel associé  $T(E_n)$ . Nous appelons un référentiel de l'espace  $E_n$  l'ensemble formé par le point  $O$  et la base  $(\vec{e}_i)$ . Ce référentiel sera désigné par  $(O, \vec{e}_i)$ , le point  $O$  est appelé **l'origine** de la référence.

### Coordonnées d'un point

Les "**coordonnées**" d'un point  $M$  d'un espace ponctuel pré-Euclidien  $E_n$ , par rapport à la référence  $(O, \vec{e}_i)$ , sont les composantes **contravariant**  $x^i$  du vecteur  $\vec{x} = \vec{OM}$  de l'espace  $T(E_n)$  par rapport à la base  $(\vec{e}_i)$ .

Soit deux points  $M$  et  $M'$  de  $E_n$  définis par leurs coordonnées respectives  $x^i$  et  $x'^i$ , nous avons:

$$\vec{OM} = x^i \vec{e}_i \quad \vec{OM}' = x'^i \vec{e}_i \quad (2.1.1.4)$$

En utilisant les propriétés P1 et P2:

$$\vec{MM}' = \vec{MO} + \vec{OM}' = -\vec{OM} + \vec{OM}' = (-x^i + x'^i) \vec{e}_i \quad (2.1.1.5)$$

Les composantes du vecteur  $\vec{MM}'$ , par rapport à la base  $(\vec{e}_i)$ , sont les  $n$  quantités  $(x'^i - x^i)$  qui sont les différences des coordonnées des points  $M$  et  $M'$ .

## Changement de référence

Soit  $(O, \vec{e}_i)$  et  $(O', \vec{e}'_i)$  tous deux références de  $E_n$  liés par la relation générale:

$$(a) \mathbf{e}_i = A_i^k \mathbf{e}'_k ; (b) \mathbf{e}'_k = A_k^i \mathbf{e}_i \quad (2.1.1.6)$$

Pour donner la relation entre les coordonnées d'un point  $M$  de  $E_n$  par rapport aux deux références cités çï dessus, d'abord on donne l'expression des vecteurs  $\overline{OO'}$  et  $\overline{O'O}$  par rapport à chacune de ces bases de  $T(E_n)$ :

$$(a) \mathbf{OO}' = \alpha^i \mathbf{e}_i ; (b) \mathbf{O'O} = \alpha'^j \mathbf{e}'_j \quad (2.1.1.7)$$

Sachant que les vecteurs:

$$(a) \mathbf{OM} = x^i \mathbf{e}_i ; (b) \mathbf{O'M} = x'^j \mathbf{e}'_j \quad (2.1.1.8)$$

En revanche, nous avons:

$$\begin{aligned} \mathbf{OM} &= \mathbf{OO}' + \mathbf{O'M} \\ &= \alpha^i \mathbf{e}_i + x'^j \mathbf{e}'_j = \alpha^i \mathbf{e}_i + x'^j A_j^i \mathbf{e}_i = (\alpha^i + x'^j A_j^i) \mathbf{e}_i \end{aligned} \quad (2.1.1.9)$$

Identifiant les composantes du vecteur  $\overline{OM}$  dans les expressions (2.1.1.8) et (2.1.1.9), nous obtenons:

$$x^i = \alpha^i + A_j^i x'^j \quad (2.1.1.10)$$

De même, les composantes du vecteur  $\overline{OM}'$  sur la base  $(\mathbf{e}'_j)$

$$x'^j = \alpha'^j + A_i^j x^i \quad (2.1.1.11)$$

## Distance entre deux points

Soit  $E_n$  un espace ponctuel pré-Euclidien,  $M$  et  $M'$  deux points dans cet espace. Par définition, la norme du vecteur  $\overline{MM}'$  est la distance entre les deux points  $M$  et  $M'$ :

$$\text{distance } \overline{MM}' = \text{norm } \overline{MM}' = \|\overline{MM}'\| \quad (2.1.1.12)$$

Si les deux points  $M$  et  $M'$  ont respectivement les coordonnées  $x^i$  et  $x'^i$  relatives à une référence  $(O, \mathbf{e}_i)$ , d'après Eq. 2.1.1.5 le vecteur  $\overline{MM}'$  possède comme composantes la quantité  $(x'^i - x^i)$ . Le carré de la distance est donné par:

$$\|\overline{MM}'\|^2 = g_{ij} (x^i - x'^i)(x^j - x'^j) \quad (2.1.1.13)$$

Si le point  $M'$  est infiniment près du point  $M$ , ses coordonnées sont dénotées  $x^i + dx^i$  et le vecteur  $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{dM}$  possède comme composantes la quantité  $dx^i$ . Désignons par  $ds$  la distance entre les points  $M$  et  $M'$ . La relation (2.1.1.13) donne l'expression du carré de la distance entre ces points sous forme:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (2.1.1.14)$$

Pour un espace-temps pré-Euclidien où les vecteurs de la base sont orthonormés, nous avons:

$$g_{ij} = \delta_{ij} \quad (2.1.1.15)$$

et le terme (2.1.1.14) devient:

$$ds^2 = dx^i dx^i \quad (2.1.1.16)$$

### Dérivée d'un vecteur

Considérons un vecteur  $\vec{x}$  appartenant à un espace Euclidien  $T(E_n)$  dont les composantes sur une base  $(e_i)$ , sont des fonctions à un paramètre  $\alpha$ , on note ce vecteur par  $\vec{x}(\alpha)$ , ainsi on a:

$$\mathbf{x}(\alpha) = x^i(\alpha) \mathbf{e}_i \quad (2.1.1.17)$$

Par définition, **la dérivée** du vecteur  $\vec{x}$ , par rapport à au paramètre  $\alpha$ , est un vecteur désigné par  $x'(\alpha)$  défini par :

$$\mathbf{x}'(\alpha) = \frac{dx^i(\alpha)}{d\alpha} \mathbf{e}_i \quad (2.1.1.18)$$

On appelle **la différentielle** du vecteur  $\vec{x}$ , le vecteur désigné par  $d\vec{x}$  tel que:

$$d\vec{x} = \vec{x}'(\alpha) d\alpha \quad (2.1.1.19)$$

Si un vecteur  $\vec{x}$  de  $T(E_n)$  dépend de plusieurs paramètres indépendants  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ , **la dérivée partielle** du vecteur  $\vec{x}$  par rapport à la variable  $\alpha$ , par exemple, est un vecteur noté:

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \alpha} \quad \text{ou} \quad \partial_\alpha \vec{x} \quad (2.1.1.20)$$

dont les composantes sont les dérivées partielles des composantes de  $\vec{x}$ , soit:

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \alpha} = \frac{\partial x^i}{\partial \alpha} \vec{e}_i \quad (2.1.1.21)$$

**La différentielle totale** du vecteur  $\vec{x}$  peut être écrite:

$$d\vec{x} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \vec{x}}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial \vec{x}}{\partial \gamma} d\gamma \quad (2.1.1.22)$$

Considérons maintenant un espace vectoriel  $T(E_n)$  associé à un espace ponctuel  $E_n$ . Dans une référence  $(O, \vec{e}_i)$ , tout point  $M$  de  $E_n$  est associé à un vecteur  $\vec{x}$  tel que  $\vec{x} = \overrightarrow{OM}$ . Si le vecteur  $\vec{x}$  dépend d'un paramètre  $\alpha$  et a une dérivée  $x'(\alpha)$ , il en est de même avec  $\overrightarrow{OM}$ .

Montrons que le vecteur dérivé  $\vec{x}'(\alpha)$  ne dépend pas de l'origine  $O$  mais seulement sur le point  $M$  considéré. En effet, si  $O'$  est une autre origine, nous avons:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \quad (2.1.1.23)$$

Puisque le vecteur  $\overrightarrow{OO'}$  est fixé et ne dépend pas de  $\alpha$ , nous avons:

$$\frac{d\overrightarrow{OO'}}{d\alpha} = \vec{0} \quad (2.1.1.24)$$

alors

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\alpha} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{d\alpha} = \vec{x}'(\alpha) \quad (2.1.1.25)$$

On peut ainsi écrire la dérivée du vecteur  $\overrightarrow{OM}$  en mentionnant seulement le point  $M$ , et on peut écrire :

$$\vec{x}'(\alpha) = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{d\alpha} = \frac{d\vec{M}}{d\alpha} = \vec{M}'(\alpha) \quad (2.1.1.26)$$

La différentielle de  $\overrightarrow{OM}$  s'écrit alors:

$$d\vec{M} = \vec{M}'(\alpha) d\alpha \quad (2.1.1.27)$$

Si le vecteur  $\vec{x}(\alpha, \beta, \gamma) = \overrightarrow{OM}$ , par rapport à une référence  $(O, \vec{e}_i)$ , les dérivées partielles du vecteur  $\overrightarrow{OM}$  :

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial \alpha} \quad (2.1.1.28)$$

Pour simplifier les expressions des dérivations partielles des fonctions dépendant de  $n$  variables, nous allons utiliser plus tard les notations suivantes. Si  $f(y^1, y^2, \dots, y^n)$  est une fonction à  $n$  variables, nous dénotons les dérivations partielles sous la forme suivante:

$$\frac{\partial f}{\partial y^i} = \partial_i f \quad (2.1.1.29)$$

Les dérivées secondes par rapport aux variables  $y^i$  et  $y^k$  seront écrites comme:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^i \partial y^k} = \partial_{ik} f \quad (2.11.30)$$

Quand  $\vec{x}$  est un vecteur tel que  $\vec{x} = x^i \vec{e}_i$  et dont les composantes sont des fonctions à  $n$  variables  $y^k$  :

$$x^i = x^i(y^1, y^2, \dots, y^n) \quad (2.1.1.31)$$

Les dérivées partielles du vecteur  $\vec{x}$  seront notées en utilisant la convention de sommation:

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial y^k} = \partial_k \vec{x} = \partial_k (x^i \vec{e}_i) = (\partial_k x^i) \vec{e}_i \quad (2.1.1.32)$$

## 2.1. 2 Coordonnées curvilignes

### Systèmes coordonnés

$E_n$  est équipé d'un système de coordonnées, un point  $M$ , dans cet espace, est basée sur  $n$  scalaires  $u^i$  qui sont appelées coordonnées de  $M$  dans le système considéré. Pour un système donné de coordonnées, on appelle **la ligne coordonnée** : le lieu des points de  $M$  où une seule coordonnée varie, les autres étant égales à des constantes. En un point  $M$  donné, les lignes se croisent.

### Coordonnées rectilignes

Les lignes de coordonnées sont *droites* dans une *référence fixe* et pour cette raison; ces coordonnées sont appelées des **coordonnées rectilignes**.

### Coordonnées curvilignes

Considérer un espace-temps  $E_n$  et une référence fixe  $(O, \vec{e}_i^0)$  de cet espace. Soit  $x^i$  les coordonnées rectilignes d'un point  $M$  de  $E_n$  par rapport à cette référence. Un système de coordonnée arbitraire  $u^k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , est obtenu en donnant  $n$  fonctions arbitraires  $f^i$  dont les paramètres sont  $u^k$ , tel que:

$$x^i = f^i(u^1, u^2, \dots, u^n); \quad i = 1 \text{ à } n \quad (2.1.2.1)$$

Il est supposé que les  $n$  fonctions suivantes  $f^i$  satisfont les propriétés suivantes:

1 - Elles sont continûment différentiables jusqu'à un certain ordre supérieur ou égal à deux.

Les dérivations de ces fonctions sont permutantes:

$$\partial_{kl} f^i = \partial_{lk} f^i \quad (2.1.2.2)$$

2 - Ces fonctions sont telles que nous pouvons résoudre le système de  $n$ -équations (2.1.1.31) par rapport aux variables  $u^k$  et sont exprimées comme des fonctions de  $x^i$  de la façon suivante:

$$u^k = g^k(x^1, x^2, \dots, x^n); \quad k = 1 \text{ à } n \quad (2.1.2.3)$$

3 - quand les variables  $u^k$  varient dans un domaine  $\Delta$ , les variables  $x^i$  varient dans  $\Delta'$ . Le Jacobien des fonctions  $x^i = f^i(u^1, u^2, \dots, u^n)$  est donné par:

$$D(\partial_k x^i) = \begin{bmatrix} \partial_1 x^1 & \partial_1 x^2 & \dots & \partial_1 x^n \\ \partial_2 x^1 & \partial_2 x^2 & \dots & \partial_2 x^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial_n x^1 & \partial_n x^2 & \dots & \partial_n x^n \end{bmatrix} \quad (2.1.2.4)$$

Le Jacobien  $D(\partial_k u^i)$  des fonctions  $u^k = g^k(x^1, x^2, \dots, x^n)$  est l'inverse du Jacobien  $D(\partial_k x^i)$ . Si les Jacobiens existent, ils ne sont pas nuls comme conséquence de l'hypothèse (2) citée ci-dessus.

Si les  $(n-1)$  paramètres  $u^k$  sont fixés en variant un paramètre,  $u^1$  par exemple, nous obtenons les coordonnées  $x^i(u^1)$  d'un ensemble de points  $M$  de  $E_n$  qui constitue une ligne de coordonnée. En général, les lignes de coordonnée ne sont pas droites mais courbées; ces coordonnées  $u^k$ , pour cette raison, sont appelées des **coordonnées curvilignes**. Au point  $M$  de  $E_n$ , les  $n$  lignes se croisent.

### 2.1.3 Repère naturel

#### Système de coordonnées Cartésiennes

Tout espace vectoriel pré-Euclidien  $T(E_n)$  a une base orthonormée  $\{\vec{e}_i^0\}$  et un point origine  $O$ . En formant une référence  $(M, \vec{e}_i^0)$  de l'espace-temps; nous disons que cette référence est un **système de coordonnées Cartésiennes**. Il peut, en particulier, attacher à chaque point  $M$  de  $E_n$  un système de coordonnées Cartésiennes  $(M, \vec{e}_i^0)$ . On désigne par  $x^i$  les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{OM}$  dans un système cartésien.

#### Base naturelle

La dérivée et la différentielle d'un vecteur  $\overrightarrow{OM}$  sont indépendantes du point  $O$  d'une référence donnée. Si  $E_n$  est lié à un système de coordonnées curvilignes  $u^k$ , nous nous référons aux  $\vec{e}_k$  les vecteurs suivants:

$$\mathbf{e}_k = \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial u^k} = \partial_k \mathbf{M} \quad (2.1.3.1)$$

Soit  $(u_k)$  les coordonnées curvilignes du point  $M$  par rapport à un système de coordonnées Cartésien  $(M, \vec{e}_i^0)$ . Dans cette référence, le vecteur  $\overrightarrow{OM} = x^i \vec{e}_i^0$  où les coordonnées Cartésiennes sont  $x^i = x^i(u^1, u^2, \dots, u^n)$ . Le vecteur  $\vec{e}_k$  défini dans (2.1.3.1) est exprimé par:

$$\mathbf{e}_k = \partial_k (x^i \mathbf{e}_i^0) = (\partial_k x^i) \mathbf{e}_i^0 \quad (2.1.3.2)$$

À partir des composantes  $\partial_k x^i$  du vecteur  $\vec{e}_k$ , nous pouvons former un déterminant  $D(\partial_k x^i)$  qui est précisément le Jacobien (2.1.2.4) des fonctions  $x^i$ . Etant donné que ce déterminant est différent de zéro, il en résulte que les  $n$ -vecteurs  $\vec{e}_k$  sont linéairement indépendants.

Ces  $n$  vecteurs définis par la relation (2.1.3.1) sont appelées **la base naturelle** au point  $M$  de l'espace vectoriel associé  $T(E_n)$ . Ils sont colinéaires aux  $n$  lignes qui se croisent au point  $M$  où ils sont définis.

### Référence naturelle

En associant au point  $M$  de  $E_n$  une référence formée par le point  $M$  et le vecteur de la base naturelle, cette référence est appelée **la référence naturelle** en  $M$  associée au système de coordonnées  $(u_k)$  qui sera noté par la suite par  $(M, \vec{e}_k)$ . On l'appelle aussi **repère naturel** de l'espace tangent  $T(E_n)$ .

La différentielle du vecteur  $\overrightarrow{OM}$  est exprimée:

$$d\vec{M} = \partial_k \vec{M} du^k = \vec{e}_k du^k \quad (2.1.3.3)$$

Les quantités  $du^k$  sont par conséquent les **composantes contravariant** du vecteur  $d\vec{M}$  dans la référence naturelle  $(M, \vec{e}_k)$  générée par le système de coordonnées  $(u_k)$ .

### Changement des coordonnées curvilignes

Considérer deux systèmes de coordonnées curvilignes  $u^i$  et  $u'^k$  liés par les relations:

$$u^i = u^i(u'^1, u'^2, \dots, u'^n) ; \quad u'^k = u'^k(u^1, u^2, \dots, u^n) \quad (2.1.3.4)$$

où les fonctions sont  $u^i = u^i(u^1, u^2, \dots, u^n)$  sont supposés être continuellement différentiables par rapport à  $u'^k$  et de même pour les fonctions  $u'^k$  par rapport aux coordonnées  $u^i$ . Lors du passage d'un système de coordonnées à l'autre, on l'appelle **un changement de coordonnées curvilignes**.

Les coordonnées  $x^i$  données par rapport à une référence fixe sont également liées à chaque système de coordonnées curvilignes et on suppose que les jacobiniennes  $D(\partial x^j / \partial u^i)$  et  $D(\partial x^j / \partial u'^k)$  sont différents de zéro. Dans ce cas, le jacobien  $D(\partial u^i / \partial u'^k)$  est non nul, puisque la relation

$$D\left(\frac{\partial x^j}{\partial u^i}\right) D\left(\frac{\partial u^i}{\partial u'^k}\right) = D\left(\frac{\partial x^j}{\partial u'^k}\right) \quad (2.1.3.5)$$

## Changement de base naturelle

Chaque système de coordonnées curvilignes  $u^i$  et  $u'^k$  donné par (2.1.3.4) est associé respectivement avec une base naturelle, tel que:

$$\mathbf{e}_k = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u'^k} ; \quad \mathbf{e}'_k = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u^k} \quad (2.1.3.6)$$

Le calcul de la relation entre les vecteurs des deux bases est effectué en utilisant la formule de dérivation des fonctions composées, à savoir:

$$\mathbf{e}'_k = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u'^k} = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u^i} \frac{\partial u^i}{\partial u'^k} = \mathbf{e}_i \frac{\partial u^i}{\partial u'^k} \quad (2.1.3.7)$$

En revanche, le développement de la dérivée du terme  $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u^i}$  mène à la relation:

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial u'^k}{\partial u^i} \mathbf{e}'_k \quad (2.1.3.8)$$

Ainsi, lors d'un passage système de coordonnées curvilignes à une autre, nous substituons la base  $(\vec{e}_i)$  de l'espace vectoriel  $TE_n$  par une autre base  $(\vec{e}'_k)$  du même espace vectoriel. La relation d'un changement du vecteur de base d'un espace vectoriel à un autre est:

$$(a) \quad \mathbf{e}_i = A_i^k \mathbf{e}'_k ; \quad (b) \quad \mathbf{e}'_k = A_k^i \mathbf{e}_i \quad (2.1.3.9)$$

$A_i^k = (A^{-1})^k_i$  est l'élément matriciel de  $A^{-1}$  ( $A^{-1}$  est la matrice inverse de  $A$ ). Les deux matrices appartiennent à  $GL(n, R)$ . À partir de l'Eq. (2.1.3.7), nous pouvons faire la remarque suivante que les éléments  $A_k^i$  de  $GL(n, R)$  agissent par la droite sur la base  $(\vec{e}_i)$  [7, 8, 9].

En comparant les expressions (2.1.3.7) et (2.1.3.8) avec la relation (2.1.3.9) et en identifiant les coefficients des vecteurs de base, on obtient:

$$(a) \quad A_i^k = \frac{\partial u'^k}{\partial u^i} ; \quad (b) \quad A_k^i = \frac{\partial u^i}{\partial u'^k} \quad (2.1.3.10)$$

*En conclusion, tout système de coordonnées curvilignes  $u^i$  et  $u'^k$  est associé respectivement, au même point  $M$  de  $E_n$ , les références naturelles  $(M, \vec{e}_i)$  et  $(M, \vec{e}'_k)$  dont les bases naturelles sont liées par les relations (2.1.3.7) et (2.1.3.8). Tout changement de coordonnées curviligne est un changement base donné par les formules (2.1.3.9) et (2.1.3.10).  $(M, \vec{e}'_k)$  est dit le repère mobile.*

## 2.2 Connexions

### 2.2.1 Connexions et symboles de Christoffel



Maintenant, on suppose que  $E_n$  soit un manifold. À chaque point  $M$  de  $E_n$ , on peut associer une référence naturelle  $(M, \vec{e}_i)$  dont les vecteurs  $\vec{e}_i = \partial_i \vec{M}$  forment une base de l'espace vectoriel  $TE_n$ .

Le champ du tenseur  $U$  est une fonction du point  $M$  que l'on note  $U(M)$ . Si le tenseur  $U$  est une fonction seulement de  $M$ , le champ considéré est appelé un **champ fixe**. Si  $U$  est aussi une fonction d'un ou plusieurs paramètres  $\alpha$ , autre que les coordonnées de  $M$ , alors nous disons que le champ est **variable**, on le note par  $U(M, \alpha)$ .

Une difficulté survient en essayant de calculer la dérivée du tenseur  $U(M)$  par rapport aux coordonnées curvilignes. En effet, les composantes du tenseur sont définies en chaque point  $M$  par rapport un repère naturel qui varie d'un point à un autre. En conséquence, le calcul de la variation élémentaire  $U(M) - U(M')$ , lors du passage du point  $M$  à un autre point  $M'$  infiniment voisin, peut être fait si on utilise la même base. Pour Comparer les tenseurs  $U(M)$  et  $U(M')$ , nous sommes amenés à considérer comment varie un repère naturel pour un système donné de coordonnées, lors du déplacement d'un point  $M$  à un autre point  $M'$  infiniment voisin.

Un problème fondamental de l'analyse tensoriel se pose c'est comment déterminer la variation du tenseur lors d'un passage d'un repère mobile  $(M, \vec{e}_i)$  défini au point  $M$ , un autre repère mobile  $(M', \vec{e}'_i)$  défini en  $M'$  infiniment voisin. On dit alors qu'on cherche une **connexion**.

Tout d'abord, le point  $M'$  est bien défini par rapport à  $M$ , si on détermine le vecteur  $d\vec{M}$  comme  $\vec{MM}' = d\vec{M}$ . Pour les coordonnées curvilignes  $u^k$ , la décomposition du vecteur élémentaire  $d\vec{M}$  est donné par la relation qu'on a précédemment montrée dans (2.1.3.3)

$$d\vec{M} = \partial_k \vec{M} du^k = \vec{e}_k du^k$$

où les quantités  $du^k$  sont les composantes contravariantes du vecteur  $d\vec{M}$  sur la base naturelle  $(\vec{e}_k)$ .

En revanche, les vecteurs  $\vec{e}'_k$  seront déterminés en calculant les variations élémentaires des vecteurs  $\vec{e}_k$ , relatif à un repère naturel  $(M, \vec{e}_k)$ , quand on passe de  $M$  à  $M'$ , alors nous avons:

$$\vec{e}'_k = \vec{e}_k + d\vec{e}_k \quad (2.2.1.1)$$

Le calcul des vecteurs  $d\vec{e}_k$  est alors le problème essentiel à résoudre.

Pour résoudre le problème du calcul de variations élémentaires  $d\vec{e}_k$  des vecteurs du repère naturel  $(\vec{e}_k)$ , nécessite l'introduction d'un nouveau type de dérivé.

## Symboles de seconde espèce

Pour tout système de coordonnées curvilignes  $u^i$ , la différentielle du vecteur  $\vec{e}_i$  de la base naturelle est écrite sur cette base par:

$$d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j = \Gamma_{ki}^j du^k \vec{e}_j \quad (2.2.1.2)$$

Dans ce cas, la différentielle  $d\vec{e}_i$  est appelée la **dérivée absolue** du vecteur  $\vec{e}_i$  mais les quantités  $\Gamma_{ki}^j$  sont les **symboles de Christoffel de seconde espèce** qui sont des fonctions continues de coordonnées curvilignes  $u^i$  et  $\omega_i^j$  sont appelés les **composantes contravariantes** du vecteur  $d\vec{e}_i$ . Lorsque  $E_n$  est un manifold qui n'est pas nécessairement muni d'une métrique,  $\omega_i^j$  sont appelés **connexions**.

### Symboles de première espèce

Le manifold  $E_n$  possède une métrique  $(g_{ij})$ , le calcul des quantités  $\Gamma_{ki}^j$  en fonction des  $g_{ij}$  nous conduit à introduire un autre type de symboles de Christoffel  $\omega_{ij}$  appelées les **composantes covariantes** qui sont définies par :

$$\omega_{ij} = d\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \quad (2.2.1.3)$$

Les composantes covariantes  $\omega_{ij}$  sont des combinaisons linéaires de la différentielle  $du^k$  qui peuvent être écrites comme:

$$\omega_{ji} = \Gamma_{kji} du^k \quad (2.2.1.4)$$

Les quantités  $\Gamma_{kji}$  sont appelées **les symboles Christoffel de première espèce**.

**Les composantes covariantes**  $\omega_{ij}$  sont liées aux **composantes contravariant**  $\omega_i^j$  par les relations:

$$\omega_{ji} = g_{jl} \omega_i^l = g_{jl} \Gamma_{ki}^l du^k \quad (2.2.1.5)$$

$\omega_i^j$  et  $\omega_{ij}$  sont appelées les **connexion 1-formes**.

On obtient une expression reliant les symboles de Christoffel de chaque espèce à l'autre :

$$\Gamma_{kji} = g_{jl} \Gamma_{ki}^l \quad (2.2.1.6)$$

Inversement, en écrivant l'expression des composantes contravariantes en fonction des covariantes, on obtient:

$$\Gamma_{ki}^j = g^{jl} \Gamma_{kjl} \quad (2.2.1.7)$$

### Notation des symboles de Christoffel

Diverses notations sont utilisées pour représenter les symboles de Christoffel. Les plus courantes sont:

$$\text{Symboles de première espèce: } \Gamma_{kji} = [ki, j] \quad (2.2.1.8)$$

$$\text{Symboles de seconde espèce : } \Gamma_{ki}^j = \{k^j i\}$$

### Détermination des symboles de Christoffel

Le calcul des symboles de Christoffel est effectué à partir des  $\frac{n(n+1)}{2}$  quantités  $g_{ij}$ . Basé sur la définition de ces quantités [6, 9]:

$$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \quad (2.2.1.9)$$

En différenciant la dernière relation, on obtient:

$$dg_{ij} = \vec{e}_i \cdot d\vec{e}_j + \vec{e}_j \cdot d\vec{e}_i \quad (2.2.1.10)$$

L'insertion de (2.2.1.2) dans (2.2.1.10), on trouve:

$$dg_{ij} = (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i) \omega_j' + (\vec{e}_j \cdot \vec{e}_i) \omega_i' = g_{ii} \omega_j' + g_{ji} \omega_i' \quad (2.2.1.11)$$

En tenant compte de (2.2.1.4) et (2.2.1.5), La différentielle donnée par l'Eq. 2.2.1.11 peut être écrite:

$$dg_{ij} = \omega_{ij} \cdot + \omega_{jl} \cdot = (\Gamma_{kij} + \Gamma_{kji}) du^k \quad (2.2.1.12)$$

D'autre part, la différentielle de la fonction  $g_{ij}$  (2.2.1.9) s'écrit également:

$$dg_{ij} = (\partial_k g_{ij}) du^k \quad (2.2.1.13)$$

L'identification des coefficients de la différentielle  $du^k$  dans les deux dernières expressions

$$\Gamma_{kij} + \Gamma_{kji} = \partial_k g_{ij} \quad (2.2.1.14)$$

Puisque on a  $(\frac{n(n+1)}{2})$  quantités de  $g_{ij}$  et  $k=1, \dots, n$ , le système d'équations donné par Eq. 2.2.1.14 a  $(\frac{n^2(n+1)}{2})$  équations.

### Symétrie des symboles de Christoffel

L'intégrabilité de la différentielle  $d\vec{M} = \partial_k \vec{M} du^k = \vec{e}_k du^k$  exige que les dérivées secondes du vecteur  $\vec{OM}$  de  $E_n$  doivent être indépendantes de l'ordre de dérivation i.e.

$$\partial_{kj} M = \partial_{jk} M \quad (2.2.1.15)$$

D'autre part, la différentielle des vecteurs de la base naturelle est donnée comme suit, vu (2.2.1.2):

$$d\vec{e}_i = (\partial_k \vec{e}_i) du^k = \omega_i^j \vec{e}_j = (\Gamma_{ki}^j \vec{e}_j) du^k \quad (2.2.1.16)$$

On déduit l'expression de la première dérivée  $\partial_k \vec{e}_i = \Gamma_{ki}^j \vec{e}_j$  et en utilisant (2.1.3.1), on a :

$$\partial_{kj} \mathbf{M} = \partial_k (\partial_j \mathbf{M}) = \partial_k \mathbf{e}_j = \Gamma_{kj}^l \mathbf{e}_l \quad (2.2.1.17)$$

En inversant les indices  $k$  et  $j$  de (2.2.1.17), on obtient:

$$\partial_{jk} \mathbf{M} = \partial_j \mathbf{e}_k = \Gamma_{jk}^l \mathbf{e}_l \quad (2.2.1.18)$$

L'égalité (2.2.1.15) permet d'écrire:

$$\Gamma_{kj}^l = \Gamma_{jk}^l \quad (2.2.1.19)$$

En tenant compte de l'expression (2.2.1.6) et la relation (2.2.1.19), nous obtenons les relations entre les symboles de première espèce:

$$\Gamma_{kij} = \Gamma_{jik} \quad (2.2.1.20)$$

*En conclusion, les symboles de Christoffel sont symétriques par rapport à leurs indices extrêmes.*

### Les symboles de Christoffel en fonction de la métrique

En raison de la symétrie des symboles de Christoffel, on a  $n^3$  inconnues symboles de Christoffel. En effectuant une permutation circulaire des indices de (2.2.1.14), on obtient:

$$\Gamma_{kji} + \Gamma_{ikj} = \partial_i g_{jk} \quad (2.2.1.21)$$

$$\Gamma_{ikj} + \Gamma_{jih} = \partial_j g_{hi} \quad (2.2.1.22)$$

La somme des relations (2.2.1.14) et (2.2.1.21) et soustraire l'expression (2.2.1.22), on obtient l'expression des symboles de Christoffel de première espèce en fonction des dérivées partielles des composantes  $g_{ij}$  du tenseur fondamental  $g$ .

$$\Gamma_{kji} = \frac{1}{2} (\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ki}) \quad (2.2.1.23)$$

Ceux de seconde espèce sont obtenus à partir des relations (2.2.1.7) et (2.2.1.23), à savoir:

$$\Gamma_k^i{}^j = g^{il} \Gamma_{klj} = \frac{1}{2} g^{il} (\partial_k g_{jl} + \partial_j g_{lk} - \partial_l g_{kj}) \quad (2.2.1.24)$$

Les expressions (2.2.1.23) et (2.2.1.24) permettent le calcul des symboles de Christoffel pour une métrique donnée.

### Changement de base

Considérons deux systèmes de coordonnées curvilignes  $\mathbf{u}^i$  et  $\mathbf{u}'^j$  correspondantes respectivement aux bases naturelles  $\vec{e}_i$  et  $\vec{e}'_j$  liés par la relation (2.1.3.9).

Par exemple, la différentielle du vecteur  $\vec{e}_i$  est:

$$d\vec{e}_i = A_i^j d\vec{e}_j + dA_i^j \vec{e}_j \quad (2.2.1.25)$$

Ecrivons autre expression différentielle des vecteurs  $\vec{e}_i$  et  $\vec{e}'_k$  sur chacune des bases naturelles, il vient:

$$(a) \quad d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j \quad ; \quad (b) \quad d\vec{e}'_k = \omega_k'^m \vec{e}'_m \quad (2.2.1.26)$$

L'identification des relations (2.2.1.25) et (2.2.1.26) (a) et la substitution des relations (2.2.1.26) (b) et (2.1.3.9) (b) dans l'équation (2.2.1.25), on obtient:

$$\omega_i^j e_j = A_i^k \omega_k'^m e'_m + dA_i^j e_j = (A_i^k \omega_k'^m A_m^j + dA_i^k A_k^j) e_j \quad (2.2.1.27)$$

Par identification des coefficients du vecteur  $\vec{e}_j$  dans l'équation (2.2.1.27), on obtient:

$$\omega_i^j = A_i^k \omega_k'^m A_m^j + dA_i^k A_k^j \quad (2.2.1.28)$$

La forme contractée de (2.2.1.28) en optant les indices matriciels est:

$$\omega(\vec{e}) = A^{-1} \omega(\vec{e}'A)A + AdA^{-1} = A^{-1} \omega'(\vec{e}')A - A^{-1} dA \quad (2.2.1.29)$$

C'est la règle de transformation de la connexion 1-forme  $\omega_i^j$  lors du changement de base. Elle ne correspond pas à la transformation des composantes d'un tenseur. En exprimant les quantités indiquées dans Eq.2.2.1.28 en fonction des symboles de Christoffel, on a :

$$\Gamma_{ki}^j du^k = A_i^l A_m^j \Gamma_{hl}^m du'^h + A_i^j dA_l^l \quad (2.2.1.30)$$

D'autre part, on a les expressions des différentielles suivantes:

$$dA_i^l = \partial_k A_i^l du^k \quad ; \quad du^h = A_k^h du^k \quad (2.2.1.31)$$

En substituant l'expression (2.2.1.31) dans l'équation (2.2.1.30) et en identifiant les coefficients de la différentielle  $du^k$ , on obtient:

$$\Gamma_k^j{}_i = A_i^l A_{lm}^j A_k^m \Gamma_k^m{}_l + A_l^j \partial_k A_i^l \quad (2.2.1.32)$$

*C'est la formule pour un changement de base pour les symboles de Christoffel. Dans cette formule, un terme apparaît en plus  $A_{li}^j \partial_k A_i^l$ . Par conséquent, les symboles de Christoffel ne se comportent pas en tenseurs.*

### Vecteurs duaux

Calculer l'expression des variations élémentaires  $d\bar{e}^k$  du vecteur  $\bar{e}^k$  vecteur dual (reciproque) de la base naturelle  $\bar{e}_i$ . Ces vecteurs reciproques  $\bar{e}^k$  forment une base sur l'espace cotangent  $T^*E_n$ .

La relation entre les vecteurs réciproques:

$$\bar{e}_i \cdot \bar{e}^k = \delta_{ik} \quad (2.2.1.33)$$

L'Eq. 2.2.1.33 donne par différentiation:

$$d(\bar{e}_i \cdot \bar{e}^k) = \bar{e}_i \cdot d\bar{e}^k + \bar{e}^k \cdot d\bar{e}_i = 0 \quad (2.2.1.34)$$

La relation précédente peut être écrite en utilisant l'expression  $d\bar{e}_i = \omega_i^j \bar{e}_j$

$$\bar{e}_i \cdot d\bar{e}^k = -\bar{e}^k \cdot (\omega_i^j \bar{e}_j) = -\omega_i^j \delta_{kj} = -\omega_i^k \quad (2.2.1.35)$$

Les quantités  $\omega_i^k$  sont les composantes contravariantes du vecteur  $d\bar{e}^k$  sur la base  $(\bar{e}^i)$  réciproque à la base naturelle  $\{\bar{e}_i\}$ . Donc, on a finalement:

$$d\bar{e}^k = -\omega_i^k \bar{e}^i = -\Gamma_{ji}^k du^j \bar{e}^i \quad (2.2.1.36)$$

Dans ce cas, la différentielle  $d\bar{e}^k$  est appelée **la dérivée absolue** du vecteur  $\bar{e}^k$ .

### Équation géodésique en utilisant le principe de Hamilton

On suppose que l'espace-temps  $E_n$  est doté d'une métrique.

Soit  $M_0 C M_1$  est une courbe de l'espace  $E_n$  passant par deux points  $M_0(t_0=0)$  et  $M_1(t_1)$  définie par les équations paramétriques:

$$\mathbf{u}^i = \mathbf{u}^i(t) \quad (2.2.1.37)$$

La longueur de la courbe  $M_0 C M_1$  est donnée par l'intégrale:

$$I = \int_0^{t_1} \left( g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} \right)^{\frac{1}{2}} dt \quad (2.2.1.38)$$

Considérons maintenant une autre courbe infiniment voisine  $M_0C'M_1$  passant par les deux points  $M_0$  et  $M_1$ . On va montrer que si la courbe est une géodésique passant par les points  $M_0$  et  $M_1$ , ce sera une courbe extrémale parmi toutes les autres courbes  $M_0C'M_1$ .

Pour ce faire, choisissons (s) un paramètre arbitraire comme l'abscisse curviligne de la courbe  $M_0C'M_1$ . Les équations paramétriques des courbes sont alors:

$$u^i = u^i(s) \quad (2.2.1.39)$$

L'intégrale (2.2.1.38) s'écrit alors avec les nouveaux paramètres:

$$I = \int_0^{t_1} \left( g_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \right)^{\frac{1}{2}} ds \quad (2.2.1.40)$$

Nous cherchons l'extremum de cette longueur par le principe de moindre action.

Soit  $\dot{u}^i = \frac{du^i}{ds}$  et désignons par  $L(u^k, \dot{u}^j) = \sqrt{g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j}$  le Lagrangien, puisque  $\dot{u}^i$  sont les cosinus directeurs du vecteur unitaire porté par la tangente à la courbe. Les courbes  $M_0C'M_1$  qui font que l'intégrale (2.2.1.38) soit minimum sont définies par les équations d'Euler-Lagrange:

$$\delta I = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial u^i} - \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{u}^i} \right) = 0 \quad (2.2.1.41)$$

La métrique  $g_{ij}$  ne dépend que de  $u^i$ , la relation (2.2.1.41) nous donne l'expression de l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (g_{ij} \dot{u}^j) - \frac{1}{2} \partial_i g_{jk} \dot{u}^j \dot{u}^k &= g_{ij} \frac{d\dot{u}^j}{ds} + \left( \partial_k g_{ij} - \frac{1}{2} \partial_i g_{jk} \right) \dot{u}^j \dot{u}^k \\ &= g_{ij} \frac{d\dot{u}^j}{ds} + \frac{1}{2} (\partial_k g_{ij} + \partial_j g_{ik} - \partial_i g_{jk}) \dot{u}^j \dot{u}^k = 0 \end{aligned} \quad (2.2.1.42)$$

En utilisant l'expression des symboles de Christoffel du premier type (2.2.1.23), l'Eq.2.2.1.42 peut s'écrire:

$$g_{ij} \frac{d\dot{u}^j}{ds} + \Gamma_{ijk} \dot{u}^j \dot{u}^k = 0 \quad (2.2.1.43)$$

La multiplication de l'équation précédente par  $g^{il}$  nous donne, sachant que  $g_{ij} g^{il} = \delta_{jl}$

et  $g^{\dot{m}} \Gamma_{j\dot{i}k} = \Gamma_{j\dot{k}}^{\dot{i}}$

$$\frac{d^2 u^l}{ds^2} + \Gamma_{jk}^l \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} = 0 \quad (2.2.1.44)$$

On obtient ainsi le système d'équations qui définit les géodésiques [5, 6, 8, 9], qui sont les lignes (courbes) dans  $E_n$ . Ce sont donc l'extremum de l'intégrale qui mesure la longueur d'un arc joignant deux points dans  $E_n$ .

### Remarque

En physique, le Lagrangien d'une particule ponctuelle influencée que par la gravité est:

$$L(u^k, \dot{u}^j) = -mc \sqrt{g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j}$$

Où  $m$  et  $c$  sont respectivement la masse au repos de la particule et la vitesse de la lumière.

Le coefficient  $(-mc)$  est inutile car en utilisant l'équation d'Euler-Lagrange (2.2.1.41), il disparaît et l'équation géodésique (2.2.1.44) est toujours vérifiée.

### 2.2.2 Dérivée covariante

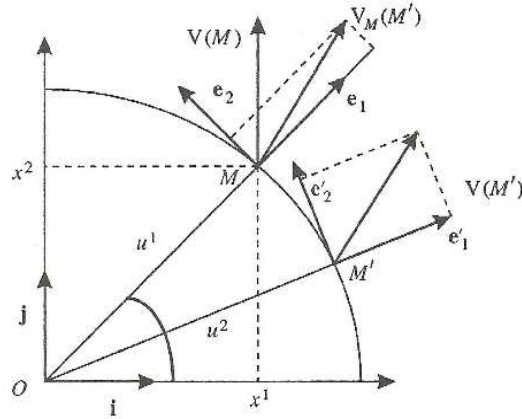
Les expressions des lois de la physique doivent être indépendantes du système de coordonnées où ces lois sont traduites en un ensemble d'équations. Ceci conduit finalement à définir et utiliser d'un nouveau objet mathématique en physique qui est spécifiquement la **dérivée covariante** du tenseur. En ce sens, le calcul tensoriel est entièrement justifié c'est-à-dire le tenseur est indépendant du système de coordonnées utilisé.

### Transport parallèle

Pour déterminer la différence entre deux vecteurs  $V(M)$  et  $V(M')$  placés respectivement en deux points  $M$  et  $M'$  infiniment proche, nous devons d'abord déplacer parallèlement à lui-même le vecteur  $V(M')$  du point  $M'$  au point  $M$ . Au cours de cette **translation** (ou **transport parallèle**) [6, 8, 9], les composantes de  $V(M')$  ne varient pas dans le cas des coordonnées rectilignes car les références naturelles sont identiques en chaque point.

D'autre part, en coordonnées curvilignes, le transport parallèle de  $V(M')$  au point  $M$ , c'est une translation le long d'une ligne droite reliant  $M$  et  $M'$  qui change généralement la valeur de ses composantes dans le repère naturel, il est facile de voir ceci dans **Fig.1**





**Fig.1**

Notons par  $V_M(M')$  le vecteur  $V(M')$  transporté parallèlement au point  $M$ . La différence:

$$V_M(M') - V(M) = dV \quad (2.2.2.1)$$

$dV$  est appelé la différentielle absolue du vecteur  $V$ . Les composants de  $dV$ , dans le repère naturel en  $M$ , ne coïncident pas en général avec la différence des composants de  $V(M')$  et  $V(M)$ . On va déterminer l'expression des composants de  $dV$  dans un transport parallèle.

### Variation le long d'une géodésique

Dans l'espace euclidien, les géodésiques sont des lignes droites. Un transport parallèle est donc un mouvement le long d'une géodésique. On va étudier les variations d'un vecteur dans un tel mouvement. L'équation des droites, pour tout système de coordonnées curvilignes  $y^i$  de l'espace-temps  $E_n$ , est donnée par (2.2.1.44):

$$\frac{d^2 y^i}{ds^2} + \Gamma_{k j}^i \frac{dy^k}{ds} \frac{dy^j}{ds} = 0 \quad (2.2.2.2)$$

où  $s$  est l'abscisse d'un point sur la ligne considérée à partir d'une origine donnée.

Les composantes contravariants  $dy^i/ds$  sont les cosinus directeurs d'un vecteur unitaire  $n$  porté par la tangente à la ligne dans chaque référence naturelle  $(M, \bar{e}_i)$ . Considérons un vecteur  $V$  de  $E_n$  de composantes covariantes  $v_i$ , le produit scalaire des vecteurs  $V$  et  $n$  est donné par:

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = v_i \frac{dy^i}{ds} \quad (2.2.2.3)$$

Lors d'un déplacement le long de la géodésique d'un point  $M$  en un point  $M'$  infiniment proche, la variation du scalaire (2.2.2.3) donne:

$$d\left(v_k \frac{dy^k}{ds}\right) = dv_k \frac{dy^k}{ds} + v_i \frac{d^2 y^k}{ds^2} ds \quad (2.2.2.4)$$

L'expression de la différentielle  $dv_k$  apparaissant dans (2.2.2.4) est:

$$dv_k = \partial_j v_k \frac{dy^j}{ds} ds \quad (2.2.2.5)$$

La deuxième dérivée  $\frac{d^2 y^i}{ds^2}$  peut être donnée par l'équation de la géodésique (2.2.2.2), on obtient:

$$d\left(v_k \frac{dy^k}{ds}\right) = (\partial_j v_k - v_i \Gamma_k^{ij}) \frac{dy^k}{ds} \frac{dy^j}{ds} ds \quad (2.2.2.6)$$

L'expression (2.2.2.6) peut s'écrire comme:

$$d(\mathbf{V}.n) = dv_k \frac{dy^k}{ds} = (\partial_j v_k - v_i \Gamma_k^{ij}) dy^j \frac{dy^k}{ds} \quad (2.2.2.7)$$

Par analogie avec (2.2.1.7), nous posons:

$$dv_k = (\partial_j v_k - v_i \Gamma_k^{ij}) dy^j = (\nabla_j \mathbf{V})_k dy^j \quad (2.2.2.8)$$

où  $dv_k$  est la **différentielle absolue** de la **composante covariante**  $v_k(y)$  et les quantités qui apparaissent entre parenthèses dans l'expression (2.2.2.8) que nous notons  $(\nabla_j \mathbf{V})_k$  sont la **dérivée covariante** de  $v_k(y)$  du **champ de vecteur cotangent**

$\mathbf{V}(y) = v_k(y) e^k(y)$  :

$$(\nabla_j \mathbf{V})_k = \partial_j v_k - v_i \Gamma_k^{ij} \quad (2.2.2.9)$$

Le produit scalaire  $\mathbf{V}(M').n$  comme étant indépendant de toute référence, nous avons:

$$\mathbf{V}(M') \cdot \mathbf{n} = \mathbf{V}_M(M') \cdot \mathbf{n} \quad (2.2.2.10)$$

où

$$d(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{V}_M(M').n - \mathbf{V}(M).n = |\mathbf{V}_M(M') - \mathbf{V}(M)|.n = d\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \quad (2.2.2.11)$$

On peut écrire la différentielle absolue  $d\mathbf{V}$ , pour laquelle nous allons donner une autre notation plus tard, par:

$$d\mathbf{V} = (\nabla_j \mathbf{V})_k dy^j e^k \quad (2.2.2.12)$$

## Champ uniforme

Si toutes les composantes  $(\nabla_j V)_i$  de la dérivée covariante sont nulles, les variations du produit scalaire  $V.n$  sont nulles et par conséquent, les vecteurs champs sont équipollents. Nous sommes en présence d'un champ uniforme.

### Propriété de la dérivée covariante

La contraction de (2.2.2.9) par le tenseur contravariant  $g^{ik}$  :

$$g^{ik} \nabla_j v_k = g^{ik} (\partial_j v_k - v_r \Gamma_k^r{}_j) \quad (2.2.2.13)$$

L'équation (2.2.2.13) permet de définir les quantités:

$$\nabla_j v^i = \partial_j v^i + v^l \Gamma_j^i{}_l \quad (2.2.2.14)$$

Considérons les composantes d'un tenseur de troisième ordre  $u_{sr}^r$  par exemple, la dérivée covariante et la contraction sont deux opérations permutable, i.e:

$$u_{sr}^r = \delta_r^t u_{st}^r \quad (2.2.2.15)$$

$$\delta_r^t (\nabla_k u_{st}^r) = \nabla_k (\delta_r^t u_{st}^r)$$

Les relations (2.2.2.13) donnent:

$$\nabla_k u_{sr}^r = \partial_k u_{sr}^r - u_{ir}^r \Gamma_k^i{}_s \quad (2.2.2.16)$$

La multiplication de l'équation (2.2.2.15) par  $dy^k$  donne la différentielle absolue de la composante  $u_{sr}^r$  :

$$\delta_i^r (du_{sr}^r) = d(\delta_i^r u_{sr}^r) \quad (2.2.2.17)$$

*La différentielle absolue commute avec la contraction des indices.*

### Deuxième dérivée covariante d'un vecteur

La dérivée covariante d'un tenseur de composantes covariantes  $\nabla_j v_i$  données par (2.2.2.9), nous obtenons:

$$\nabla_k (\nabla_j v_i) = \partial_k (\nabla_j v_i) - \Gamma_{i k}^r (\nabla_j v_r) - \Gamma_{j k}^r (\nabla_r v_i)$$

$$\begin{aligned} \nabla_k (\nabla_j v_i) &= \partial_{kj} v_i - (\partial_k \Gamma_j^l{}_i) v_l - \Gamma_j^l{}_i \partial_k v_l \\ &\quad - \Gamma_{i k}^r \partial_j v_r + \Gamma_{i k}^r \Gamma_j^l{}_r v_l - \Gamma_{j k}^r \partial_r v_i + \Gamma_{j k}^r \Gamma_r^l{}_i v_l \end{aligned} \quad (2.2.2.18)$$

### 2.2.3 Différentiation covariante

#### Différentiation covariante d'un champ de vecteur cotangent

En coordonnées curvilignes, la différentiation ordinaire d'un produit donné par la formule (2.2.2.7) peut être exprimée par le terme de gauche de l'égalité quand il existe une relation entre des scalaires. Cependant, la différentiation ordinaire d'un vecteur  $V$ , exprimé dans une base naturelle  $V = v_i e^i$ , ne peut être a priori traitée comme dans le cas classique car  $dV = dv_i e^i + v_i de^i$ , le premier terme  $dv_i e^i$  représente la différentielle ordinaire du vecteur dans un système de coordonnées fixe :

$$dv_i = \partial_j v_i dy^j \quad (2.2.3.1)$$

Le deuxième terme  $v_i de^i$  résulte de la variation  $de^i$  de la base naturelle lors du déplacement par translation du vecteur de base  $e^i$  d'un point à l'autre. À partir de maintenant, la différentielle  $de^k$  est appelée **la différentiation covariante** du vecteur  $e^k$  et elle est notée par  $\nabla e^k$  qui est donnée par Eq.2.2.1.36. On l'appelle **connexion** sur le fibré cotangent  $T^*E_n$ . Ainsi, la différentielle  $dV$  (2.2.2.12) s'applique à la différentielle absolue  $dV$  du vecteur  $V$  qui sera notée par  $\nabla V$ . On l'appelle la **différentiation covariante** du champ tenseur  $V$ .

Quand un système de coordonnées local est choisi:

$$\nabla V = dv_i \otimes e^i + v_i \otimes \nabla e^i \quad (2.2.3.2)$$

De l'Eq.2.2.3.2,  $\nabla V$  peut être calculé si différentiation covariante  $\nabla e^k$  des bases  $(e^k)$  est donnée par (2.2.1.36), la différentiation covariante du champ de vecteur cotangent [6, 7]  $V(y) = v_k(y) e^k(y)$  :

$$\nabla V = (dv_i - \omega_i^k v_k) e^i \quad (2.2.3.3)$$

#### Connexions linéaires et dérivées covariantes

Soit  $E_n$  un manifold à  $n$ -dimensions de classe  $C^\infty$ .

Une connexion linéaire  $\nabla$  [5, 6, 7, 8, 9, 10] est défini comme étant une application qui associe à chaque paire de champs de vecteurs lisses  $X, Y$  ( $C^\infty$ -champs de vecteurs) dans  $TE_n$  à un champ de vecteur lisse,

$$\nabla : TE_n \times TE_n \rightarrow TE_n : (X, Y) \rightarrow \nabla_X Y$$

Tel que  $\forall f, h \in C^\infty(E_n), \forall X, Y \in TE_n$  satisfont

- $\nabla_{fX+hY} Z = f \nabla_X Z + h \nabla_Y Z$
- $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
- $\nabla_X f = X(f)$  (2.2.3.4)

et la règle de Leibnitz

- $\nabla_X f Y = f \nabla_X Y + (X f) Y$

Le champ de vecteurs  $\nabla_X Y$  est appelé la dérivée covariante de  $Y$  en  $X$ .

Une connexion linéaire sur  $E_n$  est souvent appelée simplement *une connexion* sur  $E_n$  (Le terme *connexion affine* est également fréquemment utilisé).

Il est important de noter que  $\nabla$  n'est pas un tenseur puisque la règle de Leibnitz implique qu'il n'est pas linéaire en  $Y$ . Cependant, il est considéré comme une application

$$\nabla Y : X \rightarrow \nabla_X Y \tag{2.2.3.5}$$

linéaire sur le fibré tangent  $TE_n$ , i.e.  $TE_n \rightarrow TE_n$

Soit  $\{e^k\}$  la base duale à la base  $\{e_k\}$ . Quand un système de coordonnées locale  $(x^i)$  est donné, on note **la base de coordonnées induite**  $\begin{cases} e_k \rightarrow \partial_k \\ e^k \rightarrow dx^k \end{cases}$ . Les composantes du champ

vectorel  $\nabla_X Y$  par rapport à un système de coordonnées locales  $(x^i)$  are :

Étant donné que les vecteurs:  $X = X^i e_i, Y = Y^j e_j$

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_X (Y^j e_j) \\ &= (\nabla_X Y^j) e_j + Y^j (\nabla_X e_j) \\ &= (X^i e_i Y^j) e_j + Y^j (\nabla_{X^i e_i} e_j) \\ &= X^i (e_i Y^j) e_j + Y^j X^i (\nabla_{e_i} e_j) \end{aligned}$$

Si  $\{e_i\}$  une base de coordonnée induite, alors la dérivée covariante par rapport à cette base naturelle :

$$\begin{aligned} \nabla_{e_i} e_j &= \Gamma_{ij}^k e_k \\ e_i Y^j &= \nabla_{e_i} Y^j = \partial_i Y^j \end{aligned} \tag{2.2.3.6}$$

En utilisant (2.2.3.6), nous avons donc:

$$\begin{aligned}\nabla_x Y &= X^i \left( \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} e_j + Y^j \Gamma_{ij}^k e_k \right) \\ &= \left( X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} + X^i Y^k \Gamma_{ik}^j \right) e_j\end{aligned}\tag{2.2.3.7}$$

Notons que, dans (2.2.3.7),  $\nabla_x Y$  est un champ de vecteur.

Ainsi, on peut exprimer les composantes du champ de vecteur  $\nabla_x Y$  dans un système de coordonnées locales  $(x^j)$  par :

$$(\nabla_x Y)^j = X^i \left( \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} + \Gamma_{ik}^j Y^k \right)\tag{2.2.3.8}$$

Si  $X$  est en particulier le vecteur  $e_j$ , alors on désigne la dérivée covariante de  $Y$  le long de  $e_j$  par:

$$\nabla_{e_j} Y = \nabla_j Y\tag{2.2.3.9}$$

En utilisant (2.2.3.9), Eq. 2.2.3.8 devient:

$$\begin{aligned}(\nabla_j Y)^i &= \delta_j^r \left( \frac{\partial Y^i}{\partial x^r} + \Gamma_{rs}^i Y^s \right) \\ &= \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} + \Gamma_{js}^i Y^s = \nabla_j Y^i\end{aligned}\tag{2.2.3.10}$$

Dans un système de coordonnées locales  $(x^i)$ , Eq.2.2.3.10 peut être également désignée par:

$$(\nabla_j Y)^i = Y^i{}_{;j} = \underbrace{Y^i{}_{;j} + \Gamma_{js}^i Y^s}_{\text{atensor}}\tag{2.2.3.11}$$

C'est la dérivée covariante des composants  $Y^i$  du champ de vecteur  $Y = Y^i e_i$  et

$$Y^i{}_{;j} = \frac{\partial Y^i}{\partial x^j}.$$

### Remarque

La **connexion** est appelée **euclidienne** s'il existe des coordonnées telles que tous les

coefficients  $\Gamma_{js}^k$  sont égales à zéro et donc  $Y^i{}_{;j} = \frac{\partial Y^i}{\partial x^j}$  (cas de  $E_n = R^n$ ).

Soit  $\nabla$  une connexion linéaire. Si  $\tilde{\omega}$  est une 1-forme (i.e. vecteur champ cotangent  $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_i dx^i$ ) et  $X$  un champ de vecteur, L'expression de coordonnées pour  $\nabla_x \tilde{\omega}$  est :

$$\nabla_x \tilde{\omega} = (X^j \partial_j \tilde{\omega}_i - X^j \tilde{\omega}_k \Gamma_{ji}^k) dx^i\tag{2.2.3.12}$$

Notons que, dans (2.2.3.12),  $\nabla_x \tilde{\omega}$  est une 1-forme.

### Différentiation covariante d'un champ de vecteur tangent

Pour un champ de vecteurs  $V$ , lorsque le repère local est choisi,  $V(y) = v^k(y) e_k(y) = v^k \partial_k$

La différenciation covariante d'un champ vecteur tangent  $V$  par rapport à un référentiel naturel  $(M, \partial_k)$  est :

$$\nabla V = dv^i \otimes e_i + v^i \otimes \nabla e_i$$

$$\nabla V = (dv^k + v^i \Gamma_{ij}^k dy^j) e_k$$

En utilisant le résultat (2.2.3.11)

$$\nabla V = v^k{}_{;j} dy^j \otimes \partial_k \quad (2.2.3.13)$$

Notons que, dans (2.2.3.13),  $\nabla V$  est un tenseur de type (1, 1) dont les composantes sont  $v^k{}_{;j}$ .

### Différentiation covariante d'un tenseur

Une dérivée des composantes de n'importe quel champ de tenseur peut être définie de la même façon que pour le champ de vecteur. Par exemple, la dérivée covariante du tenseur de type (1, 1)  $K = K_b^a e^b \otimes e_a$ , en utilisant la règle de Leibnitz est:

$$\nabla_i K = (\partial_i K_b^a - \Gamma_{ib}^r K_r^a + \Gamma_{ir}^a K_b^r) e^b \otimes e_a \quad (2.2.3.14)$$

La dérivée covariante d'un champ de tenseur de type (1,1) dans un référentiel naturel :

$$(\nabla_i K)_b^a = \partial_i K_b^a - \Gamma_{ib}^r K_r^a + \Gamma_{ir}^a K_b^r = K_{b;i}^a \quad (2.2.3.15)$$

La différenciation covariante peut être étendue de façon naturelle à tout champ de tenseurs, ce qui signifie que, si est un tenseur de type  $(q, p)$  [5, 6] i.e.  $K \in T_q^p E_n$

$$K = K_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q} \quad (2.2.3.16)$$

alors  $\nabla K$  définit un champ de type de tenseur  $(q + 1, p)$  exprimée dans une carte locale de la façon suivante:

$$\nabla \mathbf{K} : \underbrace{T^* E_n \times \dots \times T^* E_n}_{p \text{ termes}} \times \underbrace{T E_n \times \dots \times T E_n}_{q \text{ termes}} \rightarrow C^\infty(E_n)$$

$$\nabla \mathbf{K}(\tilde{\omega}^1, \dots, \tilde{\omega}^p, Y_1, \dots, Y_q, X) = \nabla_X \mathbf{K}(\tilde{\omega}^1, \dots, \tilde{\omega}^p, Y_1, \dots, Y_q) \quad (2.2.3.17)$$

Le tenseur  $\nabla \mathbf{K}$  est appelé aussi la dérivée covariante totale de  $\mathbf{K}$ . Les composants de la dérivée totale du champ tensoriel de type  $(q, p)$ , par rapport à un système de coordonnées, sont données par :

$$\begin{aligned} (\nabla_s \mathbf{K})_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} &= \mathbf{K}_{j_1 \dots j_p; s}^{i_1 \dots i_q} = \mathbf{K}_{j_1 \dots j_p, s}^{i_1 \dots i_q} + \Gamma_{sk}^{i_1} \mathbf{K}_{j_1 \dots j_p}^{k i_2 \dots i_q} + (\text{all upper indices}) \\ &\quad - \Gamma_{s j_1}^k \mathbf{K}_{k j_2 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} - (\text{all lower indices}). \end{aligned} \quad (2.2.3.18)$$

## 2.2.4 Géodésiques et Transport Parallèle

### Champs de vecteurs le long des courbes

Soit  $\gamma: I \rightarrow E_n$  une courbe et  $E_n$  un manifold. A tout moment  $t \in I$ , la vitesse  $\dot{\gamma}(t)$  de  $\gamma$  est définie

$$\dot{\gamma}(t)f = \frac{d(f \circ \gamma)(t)}{dt} \quad (2.2.4.1)$$

la représentation des coordonnées de  $\gamma$  comme  $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t))$  alors

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}^i(t) \partial_i \quad / \quad \dot{\gamma}^i(t) = \frac{d\gamma^i(t)}{dt} \quad (2.2.4.2)$$

Un champ de vecteur le long d'une courbe  $\gamma: I \rightarrow E_n$  est une application  $\mathbf{V}: I \rightarrow T E_n$  tel que  $\mathbf{V}(t) \in T_{\gamma(t)} E_n \forall t \in I$ . Soit  $\mathcal{X}(\gamma)$  désigne l'espace des champs de vecteurs le long de  $\gamma$ . L'exemple le plus évident d'un champ de vecteur le long d'une courbe  $\gamma$  est le vecteur vitesse:  $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)} E_n$  et l'expression de coordonnées (2.2.4.2) montre que  $\dot{\gamma}$  est lisse [6].

### Dérivées covariantes le long des courbes

Soit  $\nabla$  une connexion linéaire sur  $E_n$ . A chaque courbe  $\gamma: I \rightarrow E_n$ ,  $\nabla$  détermine un opérateur unique

$$D_t: \mathcal{X}(\gamma) \rightarrow \mathcal{X}(\gamma)$$

Choisir les coordonnées à proximité de  $\gamma(t_0)$ , et écrire  $\mathbf{V}(t) = V^i(t) \partial_i$  au voisinage de  $t_0$ ,

$$D_t \mathbf{V}(t_0) = \dot{V}^j(t_0) \partial_j + V^j(t_0) \nabla_{\dot{\gamma}(t_0)} \partial_j \quad (2.2.4.3)$$

puisque  $\partial_k$  est extensible,



$$D_t V(t_0) = \left( \dot{V}^k(t_0) + V^j(t_0) \dot{\gamma}^i(t_0) \Gamma_{ij}^k(\gamma(t_0)) \right) \partial_k = \tilde{V}^k \partial_k \quad (2.2.4.4)$$

alors pour toute extension  $\tilde{V}$  de  $V$ ,  $D_t V(t) = \nabla_{\gamma(t)} \tilde{V}$ .

pour tout  $V \in \mathcal{X}(\gamma)$ ,  $D_t V$  est appelé la dérivée covariante de  $V$  le long de  $\gamma$ .

### Transport parallèle le long d'une courbe

Dans l'espace courbe, le résultat du transport parallèle d'un vecteur (ou tenseur) d'un point à un autre dépend du chemin parcouru.

Nous disons qu'un vecteur (ou un tenseur)  $T$  est parallèlement transporté par rapport au vecteur  $X$  si

$$\nabla_X T = 0 \quad (2.2.4.5)$$

Soit  $\gamma(t)$  une courbe et  $\phi \circ \gamma = \{x^\mu(t)\}$  est l'image de  $\gamma$  dans  $IR^n$ . Alors  $T$  est transporté parallèlement le long de la courbe  $\gamma$  si  $\nabla_X T = 0$  avec  $X$  étant le vecteur tangent à la courbe, tel que

$$X = \frac{d}{dt} = \left( \frac{dx^\mu(t)}{dt} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) \quad (2.2.4.6)$$

Alors  $\nabla_X T = 0$  devient

$$\left( \frac{dx^\mu}{dt} \right) \nabla_\mu T = \frac{DT}{dt} = 0 \quad (2.2.4.7)$$

En particulier, pour un champ de vecteurs  $V$ , ceci donne :

$$\frac{DV^\mu}{dt} = \frac{dV^\mu}{dt} + \Gamma_{\beta\alpha}^\mu \frac{dx^\alpha}{dt} V^\beta = 0 \quad (2.2.4.8)$$

C'est l'équation de transport parallèle pour un champ de vecteur. La dérivée (2.2.4.8) est appelée **la dérivée absolue** de la composante  $V^\mu$  le long de la courbe  $\gamma(t)$ .

### Equation géodésique

Une géodésique dans l'espace plat est une ligne droite; elle est la plus courte distance entre deux points. Dans un espace courbe, les géodésiques sont les chemins qui transportent parallèlement leur propre vecteur tangent.

Dans l'espace courbe avec une connexion linéaire  $\nabla$ , une géodésique est définie comme suit:

Le vecteur tangent à la trajectoire  $\gamma(t) = (x^\mu(t))$  est simplement *le vecteur vitesse*

$$\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}^\mu(t)).$$

L'accélération de  $\gamma$  est le champ de vecteur  $D_t \dot{\gamma}$  le long de  $\gamma$ . Une courbe  $\gamma$  est appelée une géodésique par rapport à  $\nabla$  si son accélération est nulle:  $D_t \dot{\gamma} \equiv 0$ . Ces composants doivent satisfaire l'équation de transport parallèle, de sorte que

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \Gamma_{\beta\alpha}^\mu \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} = 0 \quad (2.2.4.9)$$

Eq. 2.2.4.9 signifie que la courbe  $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$  devrait être de sorte qu'elle transporte parallèlement son propre vecteur tangent  $\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}^1(t), \dots, \dot{x}^n(t))$  le long de la courbe  $\gamma(t)$ . C'est l'équation géodésique et la courbe est appelée la géodésique [6, 9]. Notons que nous avons également spécifié un point de départ  $\gamma(0)$  et une direction de départ  $\dot{\gamma}(0)$  sorte que, localement, il existe une solution unique pour  $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$ .

### 2.2.5 Théorème de Ricci

La différentiation des composantes du tenseur fondamental  $g_{ij} = e_i \cdot e_j$ , nous donne:

$$dg_{ij} = e_i \cdot \nabla e_j + e_j \cdot \nabla e_i = (e_i \cdot e_k) \omega_j^k + (e_j \cdot e_k) \omega_i^k \quad (2.2.5.1)$$

$$dg_{ij} = g_{ik} \cdot \omega_j^k + g_{jk} \cdot \omega_i^k \quad (2.2.5.2)$$

En explicitant les composantes  $\omega_i^k$  en fonction des symboles de Christoffel:

$$dg_{ij} = \partial_k g_{ij} du^k = g_{jl} \Gamma_{ki}^l du^k + g_{il} \Gamma_{kj}^l du^k \quad (2.2.5.3)$$

En identifiant les coefficients de la différentielle  $du^k$ , on obtient:

$$\partial_h g_{ij} = g_{ik} \Gamma_j^k{}_h + g_{jk} \Gamma_i^k{}_h \quad (2.2.5.4)$$

Relations (2.2.5.4) est la différentielle covariante des composants  $g_{ij}$ :

$$\nabla g_{ij} = dg_{ij} - g_{ik} \cdot \omega_j^k - g_{jk} \cdot \omega_i^k \quad (2.2.5.5)$$

La formule (2.2.5.5) est la différentielle covariante des composantes du tenseur métrique  $g = g_{ij} e^i \otimes e^j$  qui peut être écrite par

$$\nabla(g_{ij} e^i \otimes e^j) = \nabla g = 0 \quad (2.2.5.6)$$

Il s'agit de la première partie du **théorème de Ricci**.

### 2.2.6 Torsion

On définit un autre opérateur [6, 7, 8] qui est bilinéaire par rapport à X, Y:

$$T : T(E_n) \times T(E_n) \rightarrow T(E_n) : (X, Y) \rightarrow T(X, Y)$$

$$T(X, Y) \equiv \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad (2.2.6.1)$$

Satisfaisant

$$T(X, Y) = -T(Y, X),$$

$$T(fX, gY) = f g T(X, X), \quad f, g \in C^\infty(E_n) \quad (2.2.6.2)$$

T est un champ tensoriel de type (1,2), et est appelé **tenseur de torsion**.

Quand un choix de la base  $\{e_a\}$  est donné, Eq. 2.2.6.1 devient :

$$T(e_a, e_b) = \nabla_{e_a} e_b - \nabla_{e_b} e_a - [e_a, e_b] = T_{ab}^c e_c \quad (2.2.6.3)$$

sachant que

$$[e_j, e_k] = f_{jk}^l e_l \quad (2.2.6.4)$$

où  $\{T_{ab}^c\}$  sont les coefficients du tenseur de torsion dans le référentiel mobile. De la définition de la connexion (2.2.3.6), et en utilisant Eq.2.2.6.3, les composantes  $T_{ab}^c$  du tenseur torsion sont :

$$T_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c - \Gamma_{ba}^c - f_{ab}^c \quad (2.2.6.5)$$

Étant donné que les coefficients du commutateur  $f_{ab}^c$  sont antisymétrique par rapport aux indices inférieurs, les composantes  $T_{ab}^c$  du tenseur de torsion sont également antisymétrique par rapport aux indices inférieurs  $T_{[ab]}^c$ . Par conséquent, une torsion 2-forme  $\tau^c$  peut être construite à partir de  $T_{ab}^c$

$$\tau^c = \frac{1}{2} T_{[ab]}^c e^a \wedge e^b \quad (2.2.6.6)$$

Mettre Eq.2.2.6.5 dans Eq.2.2.6.3, le tenseur de torsion

$$T = \tau^c e_c = \frac{1}{2} T_{[ab]}^c e_c (e^a \wedge e^b) \quad (2.2.6.7)$$

La torsion 2-forme peut être écrite

$$\tau^c = de^c + \omega_a^c \wedge e^a \wedge e^b \quad (2.2.6.8)$$

L'équation (2.2.6.8) est appelée la **première équation de structure de Cartan** pour la torsion sur un manifold.

Dans une base de coordonnées induite, la connexion est symétrique,  $f_{ab}^c = 0$  et la torsion sur un manifold est supposée être zéro.

## 2.2.7 Connexion métrique et Symboles de Christoffel

On a vu que, sur un manifold arbitraire, une connexion satisfait (2.2.3.6). Toutefois, si le manifold est doté d'une métrique, il ya un choix unique pour la connexion c'est la **connexion de Levi-Civita**.

Théorème (Le théorème fondamental de la géométrie de Riemann): Si un manifold possède une métrique  $g$ , il existe une connexion sans torsion unique tel que

$$\nabla g = 0 \quad (2.2.7.1)$$

*Preuve du Théorème*

En supposant  $\nabla g = 0$ , nous prouvons l'existence et l'unicité en construisant explicitement la connexion unique. Soient  $X, Y, Z$  des champs de vecteurs. Alors

$$\begin{aligned} X g(Y, Z) &= \nabla_X g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \\ Y g(Z, X) &= \nabla_Y g(Z, X) = g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X), \end{aligned} \quad (2.2.7.2)$$

De même,

$$Z g(X, Y) = \nabla_Z g(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y).$$

En combinant (2.2.7.2),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(X g(Y, Z) + Y g(Z, X) - Z g(X, Y)) &= \frac{1}{2}g(\nabla_X Y, Z) + \frac{1}{2}g(Y, \nabla_X Z) + \frac{1}{2}g(\nabla_Y Z, X) \\ &\quad + \frac{1}{2}g(Z, \nabla_Y X) - \frac{1}{2}g(\nabla_Z X, Y) - \frac{1}{2}g(X, \nabla_Z Y) \\ &= \frac{1}{2}g(Y, \nabla_X Z - \nabla_Z X) + \frac{1}{2}g(X, \nabla_Y Z - \nabla_Z Y) \\ &\quad + \frac{1}{2}g(Z, \nabla_Y X) + \frac{1}{2}g(\nabla_X Y, Z) \end{aligned} \quad (2.2.7.3)$$

puisque  $g$  est forme bilinéaire. En supposant que la torsion s'annule,

$$\begin{aligned} T(X, Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0 \\ \Rightarrow \nabla_X Y - \nabla_Y X &= [X, Y] \end{aligned} \quad (2.2.7.4)$$

Alors l'expression (2.2.7.3) ci-dessus donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(X g(Y, Z) + Y g(Z, X) - Z g(X, Y)) &= \frac{1}{2}g(Y, [X, Z]) + \frac{1}{2}g(X, [Y, Z]) \\ &\quad + \frac{1}{2}g(\nabla_X Y, Z) + \frac{1}{2}g(Z, \nabla_X Y - [X, Y]) \end{aligned}$$

Enfin, on obtient

$$g(\nabla_x Y, Z) = \frac{1}{2} \left( X g(Y, Z) + Y g(Z, X) - Z g(X, Y) + g(Z, [X, Y]) - g(Y, [X, Z]) - g(X, [Y, Z]) \right) \quad (2.2.7.5)$$

En utilisant (2.2.3.6), (2.2.1.9) et (2.2.6.4), on obtient

$$\begin{aligned} g(\nabla_i e_j, e_k) &= g(\Gamma_{ji}^l e_l, e_k) = \Gamma_{ji}^l g(e_l, e_k) = \Gamma_{ji}^l g_{lk} \\ &= \frac{1}{2} \left( e_i(g_{jk}) + e_j(g_{ki}) - e_k(g_{ij}) \right. \\ &\quad \left. + g(e_k, [e_i, e_j]) - g(e_j, [e_i, e_k]) - g(e_i, [e_j, e_k]) \right) \\ &= \frac{1}{2} (e_i(g_{jk}) + e_j(g_{ki}) - e_k(g_{ij}) + f_{ij}^l g_{kl} - f_{ik}^l g_{jl} - f_{jk}^l g_{il}) \end{aligned} \quad (2.2.7.6)$$

Dans une base de coordonnées induite, le commutateur s'annule alors

$$\Gamma_{ji}^l g_{lk} = \frac{1}{2} (g_{jk,i} + g_{ki,j} - g_{ij,k}) = \Gamma_{jik} \quad (2.2.7.7)$$

Ceci est le symbole de Christoffel. Il est parfois écrit

$$\Gamma_{jik} = \frac{1}{2} g_{[ji,k]} \quad (2.2.7.8)$$

Si  $\nabla g = 0$  on dit que *la métrique est compatible avec la connexion*.

Le symbole de Christoffel dont l'expression est unique et est donnée par (2.2.7.7), sont les composants de la connexion de Levi-Civita [6, 10] et peut être écrit comme

$$\Gamma_{ik}^m = \left\{ \begin{matrix} m \\ ik \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{mj} (\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{kj} - \partial_j g_{ik}) \quad (2.2.7.9)$$

### Remarque

La connexion de Levi-Civita est dite aussi **la connexion riemannienne**.

## 2.3 Courbure

### 2.3.1 Forme courbure

Le calcul du déplacement associé à un cycle élémentaire permet d'exprimer la rotation subie par un vecteur après un transport par équipollence le long d'un cycle. La méthode suivante a été inventée par Elie-Cartan.

Soit deux systèmes de différentiation identifiés par les symboles  $d$  et  $\delta$ . Soit un point quelconque  $M$  d'un espace de Riemann muni de coordonnées  $u^i$ ; soit les points  $M_1$  et  $M_2$  dont les coordonnées sont  $(u^i + du^i)$  et  $(u^i + \delta u^i)$  respectivement.

Le vecteur  $MM_1$  définit un déplacement élémentaire  $d_1$  et le vecteur  $MM_2$  est associé à

un déplacement élémentaire  $d_2$ . Effectuons, maintenant, au point  $M_1$  un déplacement élémentaire  $d_2$  nous obtenons un point  $M_3$  de coordonnées:

$$u^i + du^i + \delta(u^i + du^i) = u^i + du^i + \delta u^i + \delta du^i \quad (2.3.2.1)$$

En effectuant de la même manière sur  $M_2$  un déplacement élémentaire  $d_1$  pour donner un point  $M'_3$  de coordonnées:

$$u^i + \delta u^i + d(u^i + \delta u^i) = u^i + \delta u^i + d u^i + d \delta u^i \quad (2.3.2.2)$$

Nous voyons que le point  $M_3$  coïncidera avec le point  $M'_3$  si l'on a:

$$d \delta u^i = \delta d u^i \quad (2.3.2.3)$$

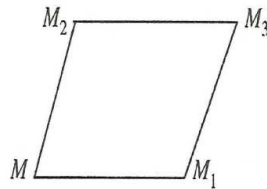
Si  $f(\mathbf{u}^i)$  est deux fois continûment différentiable, nous avons:

$$\delta f = \partial_i f \delta u^i \quad \text{et} \quad d \delta f = \partial_{ij} f \delta u^i du^j + \partial_i f d \delta u^i \quad (2.3.2.4)$$

Un calcul semblable pour  $\delta df$  donne, en supposant l'égalité (2.3.1.3):

$$\delta df = d \delta f \quad (2.3.2.5)$$

Nous supposons alors que les deux différentiations sont considérées interchangeables. Considérez maintenant un cycle élémentaire  $MM_1M_3M_2M$  d'un espace Riemannien constitué de quatre côtés (**Fig.2**) formant un parallélogramme. Nous supposons que ce cycle est parcouru dans l'ordre indiqué par la notation.



**Fig.2**

Développer les deux chemins du point  $M$  au point  $M_3$ , on a le cycle  $MM_1M_3$  et l'autre est  $MM_2M_3$ . D'abord, nous développons le côté  $MM_1$  du cycle. Ainsi, nous associons une référence Euclidienne  $(M, e_i)$  au point  $M$ ; lors du déplacement infiniment proche du point  $M_1$ , nous avons les changements fondamentaux suivants:

$$dM = du^k e_k \quad ; \quad de_i = \omega_i^k(d) e_k \quad (2.3.1.6)$$

Où les composantes  $\omega_i^k(d)$  sont des combinaisons linéaires de la différentielle  $du^k$ .

De la même façon, le développement du chemin  $MM_2$  donne les variations:

$$\delta M = \delta u^k e_k ; \quad \delta e_i = \omega_i^k(\delta) e_k \quad (2.3.1.7)$$

Le développement du chemin  $M_1 M_3$  sera étudié par rapport à l'espace euclidien dont la référence est  $(M_1, (e_i)_1)$ . Pour ce faire, nous devons appliquer l'opération  $\delta$  définie par les formules (2.3.1.7), mais au lieu de considérer les coordonnées  $u^i$ , ils seront remplacés par  $u^i + du^i$  car le mouvement est du point  $M_1$  au point d'extrémité  $M_3$  et la référence sera  $(M_3, (e_i)_3)$  tel que:

$$MM_3 = dM + \delta(M + dM) = dM + \delta M + \delta dM \quad (2.3.1.8)$$

et

$$(e_i)_3 = e_i + de_i + \delta(e_i + de_i)$$

Le développement du chemin  $MM_2 M_3$  donne un point d'arrivée  $M'_3$  et une référence  $(M'_3, (e'_i)_3)$  en ce point tel que:

$$MM'_3 = \delta M + d(M + \delta M) = \delta M + dM + d\delta M \quad (2.3.1.9)$$

et

$$(e'_i)_3 = e_i + \delta e_i + d(e_i + \delta e_i)$$

Par conséquent, pour passer de  $(M_3, (e_i)_3)$  à  $(M'_3, (e'_i)_3)$ , nous devons faire un mouvement donné par les formules:

$$MM'_3 - MM_3 = d\delta M - \delta dM \quad (2.3.1.10)$$

$$(e'_i)_3 - (e_i)_3 = d\delta e_i - \delta d e_i \quad (2.3.1.11)$$

Substituer (2.3.1.6) et (2.3.1.7) dans (2.3.1.10), nous obtenons:

$$\begin{aligned} d\delta M - \delta dM &= d\delta u^k e_k - \delta d u^k e_k = \delta u^k d e_k - d u^k \delta e_k \\ &= [\delta u^k \omega_k^i(d) - d u^k \omega_k^i(\delta)] e_i = [\Gamma_{sr}^i - \Gamma_{rs}^i] d u^r \delta u^s e_i = 0 \end{aligned} \quad (2.3.1.12)$$

Les deux développements mènent au même point. Comparer les vecteurs des deux références qui ont traversé deux chemins différents. Nous avons:

$$\begin{aligned} d\delta e_i - \delta d e_i &= d(\omega_i^k(\delta) e_k) - \delta(\omega_i^k(d) e_k) \\ &= [d\omega_i^k(\delta) - \delta\omega_i^k(d)] e_k + \omega_i^k(\delta) d e_k - \omega_i^k(d) \delta e_k \end{aligned} \quad (2.3.1.13)$$

Relations (2.3.1.6) et (2.3.1.7) nous donnent:

$$\begin{aligned} d\delta e_i - \delta d e_i &= d(\omega_i^k(\delta) e_k) - \delta(\omega_i^k(d) e_k) \\ &= [d\omega_i^j(\delta) - \delta\omega_i^j(d) + \omega_i^k(\delta) \omega_k^j(d) - \omega_i^k(d) \omega_k^j(\delta)] e_j \end{aligned} \quad (2.3.1.14)$$

Où on pose :

$$\Omega_i^j = d\omega_i^j(\delta) - \delta\omega_i^j(d) + \omega_i^k(\delta)\omega_k^j(d) - \omega_i^k(d)\omega_k^j(\delta) \quad (2.3.1.15)$$

Le déplacement associé au cycle est donné alors par :

$$d\delta e_i - \delta d e_i = \Omega_i^j e_j \quad (2.3.1.16)$$

Les références  $(M_3, (e_i)_3)$  et  $(M'_3, (e'_i)_3)$  associées aux deux développements ont des orientations différentes. En conséquence, les quantités  $\Omega_i^j$  définissent une rotation lors du passage d'une référence à l'autre.

*En conclusion, nous voyons que le déplacement associé à un cycle élémentaire laisse l'origine fixé pour le cycle et réduit le mouvement à **une rotation** autour de ce point.*

L'Eq. (2.3.1.15) peut être écrite comme :

$$\Omega_i^j = d\omega_i^j + \omega_i^k \wedge \omega_k^j \quad (2.3.1.17)$$

La forme contractée de l'équation (2.3.1.17) est donnée par:

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega \quad (2.3.1.18)$$

C'est ce qu'on appelle **la forme de courbure** [5, 6, 9, 10] qui est une 2-forme dont les composantes sont déterminées par la connexion selon (2.3.1.17). Eq.2.3.1.18 est appelée **la seconde équation de structure de Cartan** pour la forme de courbure qui est indépendante du choix des référentiels.

### 2.3.2 Transformation de la forme de courbure

Montrer que les quantités  $\Omega_i^j$  sont les composantes d'un tenseur. Pour cela, utiliser le changement de base de référence naturelle:

Appliquer aux équations (2.1.3.9) le symbole de différentiation, on obtient:

$$\delta d e_i = A_i'^j \delta d e'_j + (\delta A_i'^j) d e'_j + (\delta d A_i'^j) e'_j + (d A_i'^j) \delta e'_j \quad (2.3.2.1)$$

En échangeant l'ordre de différentiation d et  $\delta$  dans (2.3.2.1), on obtient  $d \delta e_i$  et en notant que nous avons:  $\delta d A_i'^j = d \delta A_i'^j$ , on obtient par soustraction membre à membre:

$$d\delta e_i - \delta d e_i = A_i'^j (d\delta e'_j - \delta d e'_j) \quad (2.3.2.2)$$

Les quantités  $(d\delta e'_j - \delta d e'_j)$  sont les déplacements géométriques du nouveau vecteur  $e'_j$ . Ces déplacements sont de la forme:

$$d\delta e'_j - \delta d e'_j = \Omega_j'^k e'_k \quad (2.3.2.3)$$



Compte tenu de l'expression (2.3.1.16) et en combinant les relations (2.3.2.2) et (2.3.2.3), on obtient:

$$\Omega_i^l e_l = A_i^j \Omega_j^k e_k = A_i^j \Omega_j^k A_k^l e_l \quad (2.3.2.4)$$

En identifiant les coefficients des vecteurs  $e_l$  dans les deux derniers membres de cette relation, on obtient:

$$\Omega_i^l = A_i^j A_k^l \Omega_j^k \quad (2.3.2.5)$$

Eq.2.3.2.5 montre que les quantités  $\Omega_i^l$  se transforment en tant que composantes d'un **tenseur de type (1,1)**. La forme contractée de Eq.2.3.2.5 est donnée par :

$$\Omega' = A^{-1} \Omega A \quad (2.3.2.6)$$

### 2.3.3 Tenseur de courbure de Riemann

Nous avons vu que le développement de deux chemins différents, commençant et finissant aux mêmes points, fournit des références dont les positions finales sont distinctes. Par conséquent, les composantes de la dérivée seconde d'un vecteur, calculées par deux chemins différents, ne sont pas égales dans un espace de Riemann. Nous pouvons vérifier cela en prenant l'expression (2.2.2.18) de la deuxième dérivée covariante d'un vecteur  $V$ . Nous calculons la soustraction de deux expressions de la dérivée covariante obtenue en permutant les indices. On obtient une quantité qui est un tenseur d'ordre quatre, c'est le **tenseur de courbure de Riemann** appelé aussi **Riemann-Christoffel tenseur** est un champ tensoriel de type (1,3) défini généralement par

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (2.3.3.1)$$

Où  $X, Y, Z$  sont des champs de vecteurs et  $[X, Y]$  est le crochet de Lie de deux champs de vecteurs  $X$  et  $Y$ .

#### Propriétés du tenseur de courbure de Riemann

- $R(X + W, Y) Z = R(X, Y) Z + R(W, Y) Z$ .
- $R(X, Y) (Z + W) = R(X, Y) Z + R(X, Y) W$ .
- $R(fX, Y) Z = f R(X, Y) Z$ , de même pour  $R(X, Y)(fZ)$ .

(2.3.3.2)

Pour calculer les composantes du tenseur de courbure de Riemann, en particulier il est calculé pour les vecteurs de base  $\{e_a\}$

$$R(e_j, e_k)e_i = \nabla_j \nabla_k e_i - \nabla_k \nabla_j e_i - \nabla_{[e_j, e_k]} e_i \quad (2.3.3.3)$$

En utilisant (2.2.6.4)

$$\begin{aligned}
R(e_j, e_k)e_i &= \nabla_j \nabla_k e_i - \nabla_k \nabla_j e_i - \nabla_{f_{jk}^l} e_i \\
&= \nabla_j (\Gamma_{ki}^l e_l) - \nabla_k (\Gamma_{ji}^l e_l) - f_{jk}^l \nabla_l e_i \\
&= \nabla_j (\Gamma_{ki}^l) e_l + \Gamma_{ki}^l \nabla_j e_l - \nabla_k (\Gamma_{ji}^l) e_l - \Gamma_{ji}^l \nabla_k e_l - f_{jk}^l \Gamma_{li}^m e_m \\
&= e_j (\Gamma_{ki}^l) e_l + \Gamma_{ki}^l \Gamma_{jl}^m e_m - e_k (\Gamma_{ji}^l) e_l - \Gamma_{ji}^l \Gamma_{kl}^m e_m - f_{jk}^l \Gamma_{li}^m e_m \\
&= e_j (\Gamma_{ki}^m) e_m + \Gamma_{ki}^l \Gamma_{jl}^m e_m - e_k (\Gamma_{ji}^m) e_m - \Gamma_{ji}^l \Gamma_{kl}^m e_m - f_{jk}^l \Gamma_{li}^m e_m \\
&= (e_j (\Gamma_{ki}^m) + \Gamma_{ki}^l \Gamma_{jl}^m - e_k (\Gamma_{ji}^m) - \Gamma_{ji}^l \Gamma_{kl}^m - f_{jk}^l \Gamma_{li}^m) e_m
\end{aligned} \tag{2.3.3.4}$$

Nous identifions le terme entre crochets de (2.3.3.4) par

$$R_{ijk}^m = e_j (\Gamma_{ki}^m) + \Gamma_{ki}^l \Gamma_{jl}^m - e_k (\Gamma_{ji}^m) - \Gamma_{ji}^l \Gamma_{kl}^m - f_{jk}^l \Gamma_{li}^m \tag{2.3.3.5}$$

Ce sont les composantes du **tenseur de courbure de Riemann**.

Dans une base de coordonnées induites, on a  $e_j \rightarrow \partial_j$  et  $[e_j, e_k] = 0 \Rightarrow f_{jk}^l = 0$

$$R_{ijk}^m = \partial_j \Gamma_{ki}^m - \partial_k \Gamma_{ji}^m + \Gamma_{ki}^l \Gamma_{jl}^m - \Gamma_{ji}^l \Gamma_{kl}^m \tag{2.3.3.6}$$

Ce tenseur est antisymétrique sur ses deux derniers indices  $R_{i[jk]}^m$  i.e.  $R_{ijk}^m = -R_{ikj}^m$ .

### Courbure métrique

Si le manifold possède une métrique, les composantes covariantes peuvent être définies pour le tenseur de Riemann-Christoffel comme suit:

$$R_{jirs} = g_{jk} R_{irs}^k \tag{2.3.3.7}$$

En Utilisant les relations suivantes entre les symboles de Christoffel de première et deuxièmes espèces

$$\Gamma_{jir} = g_{jk} \Gamma_{ir}^k \tag{2.3.3.8}$$

Et remplacer les quantités  $g_{jk} \partial_r \Gamma_{is}^k$  par  $\partial_r (g_{jk} \Gamma_{is}^k) - \Gamma_{is}^k \partial_r g_{jk}$  dans l'équation (2.3.3.6), on obtient:

$$R_{jirs} = \partial_r (g_{jk} \Gamma_{is}^k) - \partial_s (g_{jk} \Gamma_{ir}^k) + \Gamma_{is}^l (\Gamma_{rjl} - \partial_r g_{jl}) - \Gamma_{ir}^l (\Gamma_{sjl} - \partial_s g_{jl}) \tag{2.3.3.9}$$

La relation (2.2.1.14) donne:

$$\Gamma_{kij} - \partial_k g_{ij} = -\Gamma_{kji} \tag{2.3.3.10}$$

Après avoir utilisé les relations (2.3.3.8) et (2.3.3.10) dans l'expression (2.3.3.9), on obtient:

$$R_{ijrs} = \partial_r \Gamma_{ijs} - \partial_s \Gamma_{ijr} - \Gamma_{is}^k \Gamma_{rkj} + \Gamma_{ir}^k \Gamma_{skj} \quad (2.3.3.11)$$

Remplacer les symboles de Christoffel par leur expression en termes de coefficients  $g_{ij}$ , donc selon la relation (2.2.1.23), on obtient:

$$2\partial_r \Gamma_{ijs} = \partial_{ri} g_{sj} + \partial_{rs} g_{ji} - \partial_{rj} g_{is} \quad (2.3.3.12)$$

En substituant (2.3.3.12) dans (2.3.3.11), on obtient:

$$R_{ijrs} = \frac{1}{2} (\partial_{ri} g_{sj} + \partial_{sj} g_{ir} - \partial_{rj} g_{is} - \partial_{si} g_{rj}) - \Gamma_{rj}^k \Gamma_{iks} + \Gamma_{si}^k \Gamma_{ikr} \quad (2.3.3.13)$$

### Système de coordonnées normal

Il est intéressant d'introduire un système de coordonnées locales, pour les espaces de Riemann spéciales, appelées **coordonnées normales**, car de tels systèmes peuvent beaucoup simplifier le tenseur de Riemann-Christoffel.

Soit un point  $M_0$  d'un espace de Riemann de coordonnées  $y^i$  et un vecteur unitaire  $n$  de direction arbitraire en ce point dont les composantes sont  $n^i$ . Pour chaque point  $M$  situé proche de  $M_0$ , on montre qu'il n'y a qu'un seul choix de direction  $n$  en  $M_0$  de sorte qu'une géodésique  $z^i(s)$  solution des équations (2.2.2.2) passe par  $M$ .

Les coordonnées du point  $M$  à proximité de  $M_0$  sont les suivantes:

$$z^i = s n^i \quad (2.3.3.14)$$

où  $s$  est la distance entre  $M$  et  $M_0$  le long de la géodésique. Les coordonnées  $z^i$  sont appelées **des coordonnées normales** du point  $M$ .

Pour  $n^i$  fixe, l'équation (2.3.3.14) donne:

$$\frac{dz^i}{ds} = n^i ; \quad \frac{d^2 z^i}{ds^2} = 0 \quad (2.3.3.15)$$

L'équation géodésique écrite en coordonnées  $z^i$  devient, en prenant en considération (2.3.3.15), pour toutes les directions en  $M_0$ :

$$\Gamma_j^i k n^j n^k = 0 \quad (2.3.3.16)$$

Étant donné que  $\Gamma_{jk}^i$  est symétrique par rapport aux indices  $j$  et  $k$ . Pour tous les indices  $j, i$  et  $k$ :  $\Gamma_{jk}^i = 0$  en  $M_0$ . De plus, on a les relations:

$$\Gamma_{ikj} = g_{kr} \Gamma_i^r{}_j = 0 \quad ; \quad \Gamma_{ikj} + \Gamma_{jik} = \partial_k g_{ij} \quad (2.3.3.17)$$

Où  $\partial_k g_{ij} = 0$ , ce résultat est approuvé par la relation  $g^{ri} g_{ij} = \delta^{rj}$ .

La propriété essentielle des coordonnées normales réside dans le fait que, au point  $M_0$ , les symboles de Christoffel du système de coordonnées sont tous nuls.

### Symétries du tenseur de Riemann

Dans le système de coordonnées normales  $z^i$ , l'expression (2.3.3.13) du tenseur de la courbure se simplifie à:

$$R_{ijrs} = \frac{1}{2} (\partial_{ri} g_{sj} + \partial_{sj} g_{ir} - \partial_{rj} g_{is} - \partial_{si} g_{rj}) \quad (2.3.3.18)$$

où les composantes du tenseur métrique  $g_{ij}$  sont fonctions des coordonnées normales.

En permutant les indices, on obtient facilement les propriétés de symétrie suivantes qui sont valables pour tout système de coordonnées. Comme la propriété de symétrie des indices est un concept indépendant de la référence utilisée. On permute les indices  $i$  et  $j$  dans les relations (2.3.3.18), on obtient:

$$R_{jirs} = \frac{1}{2} (\partial_{rj} g_{si} + \partial_{si} g_{jr} - \partial_{ri} g_{js} - \partial_{sj} g_{ri}) = -R_{ijrs} \quad (2.3.3.19)$$

De la même manière, en interchangeant les indices  $r$  et  $s$ , on obtient:

1) *Les deux derniers indices sont antisymétriques:*

$$R_{iklm} = -R_{kilm} = -R_{ikml} \quad (2.3.3.20)$$

Comme conséquence directe de la symétrie  $g_{ij}$  et l'ordre de la dérivation de  $g_{ij}$ , on obtient en permutant les indices  $i, j$  et  $r, s$ :

$$R_{ijrs} = R_{rsij} \quad (2.3.3.21)$$

### Première identité de Bianchi

En faisant une permutation circulaire sur les indices  $j, r, s$  dans l'expression (2.3.3.18), on obtient:

$$R_{irsj} = \frac{1}{2} (\partial_{jr} g_{is} + \partial_{is} g_{jr} - \partial_{rs} g_{ij} - \partial_{ij} g_{rs}) \quad (2.3.3.22)$$

$$R_{isjr} = \frac{1}{2} (\partial_{rs} g_{ij} + \partial_{ij} g_{rs} - \partial_{js} g_{ir} - \partial_{ir} g_{js}) \quad (2.3.3.23)$$

En additionnant (2.3.3.18), (2.3.4.22) et (2.3.4.23), on obtient:

$$R_{ijrs} + R_{irsj} + R_{isjr} = 0 \quad (2.3.3.24)$$

Ceci est souvent écrit

$$R_i [jrs] = 0 \quad (2.3.3.25)$$

Cette identité est appelée *la première identité de Bianchi*.

### Deuxième identité de Bianchi

La dérivée covariante du tenseur de Riemann-vérifie:

$$R_{ijrs;k} + R_{ijsk;r} + R_{ijk r;s} = 0 \quad (2.3.3.26)$$

De façon équivalente, (2.3.3.26) est  $R_{ij [rs;k]} = 0$

L'égalité (2.3.3.26) est **la deuxième identité de Bianchi**.

Le nombre total des composantes du tenseur de courbure de Riemann d'un espace de dimension  $n$  qui ne sont pas nul et qui sont indépendants l'un de l'autre est égal à  $n^2(n^2 - 1)/12$ .

### Remarque

Les composantes du tenseur de Riemann  $R^i_{jrs}$  vérifient également les identités de Bianchi i.e.  $R^i [jrs] = 0$  et  $R^i j [rs;k] = 0$ .

## 2.3.4 Forme de courbure et Tenseur de courbure de Riemann

Évaluer les composantes mixtes du tenseur de rotation infinitésimale:

$$\Omega_i^j = d\omega_i^j(\delta) - \delta\omega_i^j(d) + \omega_i^k(\delta)\omega_k^j(d) - \omega_i^k(d)\omega_k^j(\delta) \quad (2.3.4.1)$$

Compte tenu de la dépendance de  $\omega_i^j$  sur les symboles de Christoffel, la quantité  $d\omega_i^j(\delta)$  contenu dans le membre droit de l'expression (2.3.4.1) est la suivante:

$$d\omega_i^j(\delta) = d\left(\Gamma_{ki}^j \delta u^k\right) = \partial_m \Gamma_{ki}^j du^m \delta u^k + \Gamma_{ki}^j d\delta u^k \quad (2.3.4.2)$$

Un calcul semblable donne le terme  $\delta\omega_i^j(d)$  où la soustraction de ces deux quantités donne:

$$d\omega_i^j(\delta) - \delta\omega_i^j(d) = \partial_m \Gamma_{ki}^j du^m \delta u^k - \partial_m \Gamma_{ki}^j \delta u^m du^k \quad (2.3.4.3)$$

En échangeant les indices de sommation  $m$  et  $k$  dans le dernier terme de l'équation

précédente, on obtient:

$$d\omega_i^j(\delta) - \delta\omega_i^j(d) = (\partial_m \Gamma_{ki}^j - \partial_k \Gamma_{mi}^j) du^m \delta u^k \quad (2.3.4.4)$$

En revanche, les deux derniers termes qui apparaissent dans l'expression (2.3.4.1), ils donnent:

$$\omega_i^k(\delta)\omega_k^j(d) - \omega_i^k(d)\omega_k^j(\delta) = (\Gamma_{si}^k \Gamma_{rk}^j - \Gamma_{ri}^k \Gamma_{sk}^j) du^r \delta u^s \quad (2.3.4.5)$$

Finalement, l'expression du tenseur de rotation peut être écrite par:

$$\Omega^j_i = (\partial_r \Gamma_{si}^j - \partial_s \Gamma_{ri}^j + \Gamma_{si}^k \Gamma_{rk}^j - \Gamma_{ri}^k \Gamma_{sk}^j) du^r \delta u^s \quad (2.3.4.6)$$

Le tenseur de Riemann-Christoffel  $R^j_{irs}$  (2.3.3.6) apparaît entre parenthèse de la relation (2.3.4.6), l'expression de la forme de courbure (2.3.4.1) devient:

$$\Omega^j_i = R^j_{irs} du^r \delta u^s \quad (2.3.4.7)$$

$$\Omega^j_i = R^j_{irs} du^r \delta u^s = \frac{1}{2} R^j_{i[rs]} du^r \wedge \delta u^s \quad (2.3.4.8)$$

$$R = \Omega^j_i e_j \otimes e^i \quad (2.3.4.9)$$

C'est la relation entre la forme de courbure et tenseur de courbure de Riemann.

La différentiation extérieure de l'équation de structure (2.3.1.18) donne:

$$d\Omega = \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega \quad (2.3.4.10)$$

De façon équivalente, (2.3.4.10) est

$$D\Omega = 0$$

Où  $D$  est la **différentielle extérieure covariante** qui peut agir sur toute forme tensorielle ; elle est définie par:

$$D = d + [\omega, \quad ]$$

### 2.3.5 Propriétés de l'espace de Minkowski

Un tenseur métrique  $g$  est un (0,2) tenseur tel que

(i) l'amplitude du vecteur  $X$  est  $|g(X, X)|^{1/2}$

(ii) la longueur de la courbe dont le vecteur tangent est  $X$  entre les temps  $t_1$  et  $t_2$  est

$$\int_{t_1}^{t_2} |g(X, X)|^{1/2} dt$$

Dans la base particulière  $\{e_\mu\}$ , le tenseur métrique est donné par :

$$g(e_\mu, e_\nu) = g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} \quad (2.3.5.1)$$

Dans le cas de l'espace de Minkowski, cet espace est muni d'une base orthogonale  $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$  dont le produit scalaire vérifie:

$$(e_0)^2 = - (e_1)^2 = - (e_2)^2 = - (e_3)^2 = 1 \quad (2.3.5.2)$$

Ces conditions peuvent être écrites de manière compacte sous la forme suivante :

$$e_\mu \cdot e_\nu = g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \quad (2.3.5.3)$$

Où les indices  $\mu$  et  $\nu$  varient sur les valeurs (0, 1, 2, 3) et la matrice  $\eta$  est donné par:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.3.5.4)$$

L'espace est plat, la métrique est indépendant de  $x$  ainsi, Eq.2.2.7.9 donne:

$$\Gamma^m_{ik} = \begin{Bmatrix} m \\ ik \end{Bmatrix} = 0$$

$$\nabla_{e_i} e_j = \nabla_{\partial_i} \partial_j = 0, \text{ et par conséquence } T^l_{ik} = R^l_{ikj} = 0.$$

### 2.3.6 Tenseur de Ricci et Courbure scalaire

La contraction du tenseur Riemann-Christoffel  $R^k_{i rs}$ , par rapport à  $k$  et  $r$ , mène au tenseur:

$$R_{is} = R^k_{i ks} = \partial_k \Gamma^k_{is} - \partial_s \Gamma^k_{ik} + \Gamma^l_{is} \Gamma^k_{kl} - \Gamma^l_{ik} \Gamma^k_{sl} \quad (2.3.6.1)$$

Le tenseur  $R_{is}$  est appelé le **tenseur de Ricci**. Ses composantes mixtes sont données par:

$$R^i_j = g^{ik} R_{kj} \quad (2.3.6.2)$$

Prendre en considération les propriétés de symétrie du tenseur de Riemann-Christoffel (2.3.3.21), le tenseur de Ricci est symétrique:

$$R_{i;s} - R_i^k{}_{ks} - g^{ki} R_{ijk;s} - g^{ki} R_{ksij} \quad (2.3.6.3)$$

et

$$R_{i;s} = g^{kj} R_{ksij} = g^{kj} R_{ijk;s} = R_s^k{}_{ki} = R_{si} \quad (2.3.6.4)$$

La contraction du tenseur de Ricci donne **la courbure de Ricci** qui est connue aussi par **la courbure de Ricci scalaire**, désignée par  $R$ :

$$R = g^{ij} R_{ij} = R_i^i \quad (2.3.6.5)$$

### Deuxième identité de Bianchi

Dans le système coordonné normal, les symboles Christoffel dans l'expression de  $R_i^l{}_{rs}$  sont tous nuls mais pas leurs dérivées. Alors, prendre la dérivée covariant de  $R$ , on obtient:

$$\nabla_t R_i^l{}_{rs} = \partial_{rt} \Gamma_s^l{}_i - \partial_{st} \Gamma_r^l{}_i \quad (2.3.6.6)$$

Une permutation circulaire des indices  $t, r$  et  $s$  dans la relation (2.3.6.6), nous donne:

$$\nabla_r R_i^l{}_{st} = \partial_{sr} \Gamma_t^l{}_i - \partial_{tr} \Gamma_s^l{}_i \quad (2.3.6.7)$$

$$\nabla_s R_i^l{}_{tr} = \partial_{ts} \Gamma_r^l{}_i - \partial_{rs} \Gamma_t^l{}_i \quad (2.3.6.8)$$

L'addition des trois équations précédentes conduit à:

$$\nabla_t R_i^l{}_{rs} + \nabla_r R_i^l{}_{st} + \nabla_s R_i^l{}_{tr} = 0 \quad (2.3.6.9)$$

Une telle relation est appelée la **deuxième identité Bianchi** [6, 7]. D'après leur forme tensorielle, la deuxième identité de Bianchi est valide dans tout système de coordonnées et en tout point de l'espace de Riemann considéré.

Généralement, (2.3.6.9) peut s'écrire

$$R_{irs;t}^l + R_{ist;r}^l + R_{itr;s}^l = 0 \Leftrightarrow R_{i[rs;t]}^l = 0 \quad (2.3.6.10)$$

### Einstein tenseur

La contraction de la première identité (2.3.6.10) pour  $t=l$ , donne:

$$R_{irs;l}^l + R_{isl;r}^l + R_{ilr;s}^l = 0 \quad (2.3.6.11)$$



En tenant compte de la définition (2.3.6.1) du tenseur de Ricci et l'égalité  $R_{r\,sl}^l = -R_{r\,ls}^l$ , on obtient :

$$R_{irs;l}^l - R_{is;r}^k + R_{ir;s}^k = 0 \quad (2.3.6.12)$$

En multipliant l'équation (2.3.6.12) par  $g^{ik}$ , on obtient:

$$R_{rs;l}^{lk} - R_{s;r}^k + R_{r;s}^k = 0 \quad (2.3.6.13)$$

Effectuer une deuxième contraction sur les indices  $k$  et  $s$ , on obtient:

$$R_{rk;l}^{lk} - R_{k;r}^k + R_{r;k}^k = 0 \quad (2.3.6.14)$$

Après la contraction, en changeant l'indice de sommation  $k$  à l'indice  $l$  dans le premier terme de l'équation ci-dessus et en outre on a l'égalité  $R^{kl}{}_{rk} = R^{lk}{}_{kr}$ , on a :

$$2 \nabla_k R_r^k - \nabla_r R = 0 \quad (2.3.6.15)$$

Cette dernière expression peut être écrite dans la formule suivante:

$$\nabla_k \left( R_r^k - \frac{1}{2} \delta_r^k R \right) = \nabla_k S_r^k = 0 \quad (2.3.6.16)$$

L'expression entre parenthèses apparaissant dans (2.3.6.16) est un tenseur qui est désigné par  $S_r^k$  et dont les composantes covariantes sont données par:

$$S_{ij} = g_{ik} S_j^k = g_{ik} \left( R_j^k - \frac{1}{2} \delta_j^k R \right) = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R \quad (2.3.6.17)$$

Le Tenseur  $S_r^k$  est appelé **tenseur d'Einstein** [6, 7]. En raison de la symétrie du tenseur de Ricci, le tenseur d'Einstein est aussi symétrique et il est la partie sans trace du Ricci de tenseur. Ce tenseur intervient dans les quations fondamentales de la relativité générale. Selon (2.3.6.17), il vérifie les identités:

$$\nabla_k S_r^k = 0 \quad (2.3.6.18)$$

En conséquence de l'invariance de tous les systèmes physiques dans le transport parallèle, l'énergie et l'impulsion sont conservés, ce qui peut être exprimé comme suit:

$$\partial_k T^{kr} = 0 \quad (2.3.6.19)$$

lorsque l'on considère la courbure de l'espace-temps provoquée par la gravité, la dérivée ordinaire devrait être remplacée par la dérivée covariante, Eq. 2.3.6.19 devient :

$$\nabla_k T^{kr} = 0 \quad (2.3.6.20)$$

Pour cette raison, un tenseur qui satisfait aux relations de la forme (2.3.6.20) est un tenseur conservateur.

En comparant avec l'identité de Bianchi contractée, Einstein a proposé la célèbre équation :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi \tilde{G} T_{\mu\nu} \quad (2.3.6.21)$$

où  $\tilde{G}$  est la **constante gravitationnelle de Newton**.

## **Chapitre 3**

### **Multivecteur champs**

#### **La formulation géométrique pour les formalismes de Lagrange et de Hamilton**

### 3.1 Champs multivecteurs

#### 3.1.1 Champs multivector dans les variétés différentiables

Soit  $M$  une variété différentiable de dimension  $n$ . Les sections de  $\Lambda^m(TM)$  sont les  $m$ -multivecteurs champs dans  $M$  [11, 12] (ceux sont les tenseurs antisymétriques contravariants d'ordre  $m$  dans  $M$ ). On désigne par  $\mathcal{X}^m(M)$  l'ensemble des  $m$ -multivecteurs champs dans  $M$ . En général, pour chaque  $Y \in \mathcal{X}^m(M)$  et  $p \in M$ , il existe un voisinage ouvert  $U_p \subset M$  et  $Y_1, \dots, Y_r \in \mathcal{X}(U_p)$  tel que

$$Y \underset{U_p}{=} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq r} f^{i_1 \dots i_m} Y_{i_1} \wedge \dots \wedge Y_{i_m}$$

avec  $f^{i_1 \dots i_m} \in C^\infty(U_p)$  et  $m \leq r \leq \dim M$ .

**Définition** Un  $m$ -multivecteur champ  $Y \in \mathcal{X}^m(M)$  est dit décomposable s'il y a  $Y_1, \dots, Y_m \in \mathcal{X}(M)$  tel que  $Y = Y_1 \wedge \dots \wedge Y_m$ .

Le champ multivecteur  $Y \in \mathcal{X}^m(M)$  est dit localement décomposable si, pour chaque  $p \in M$ , il existe un voisinage ouvert  $U_p \subset M$  et  $Y_1, \dots, Y_m \in \mathcal{X}(U_p)$  tel que  $Y \underset{U_p}{=} Y_1 \wedge \dots \wedge Y_m$ .

Soit  $D$  une distribution de dimension  $m$  dans  $M$  qui est un sous-fibré de dimension  $m$  de  $TM$ . Il est évident que les sections de  $\Lambda^m D$  sont des champs  $m$ -multivecteurs dans  $M$ . L'existence d'une section globale non nulle de  $\Lambda^m D$  est équivalent à l'orientabilité de  $D$ .

**Définition** Un  $m$ -multivecteur champ non nul  $Y \in \mathcal{X}^m(M)$  et une distribution  $D \subset TM$   $m$ -dimensionnelle sont associées localement s'il existe un ensemble ouvert et connexe  $U \subseteq M$  tel que  $Y_U$  est une section de  $\Lambda^m D|_U$ .

Si  $Y, Y' \in \mathcal{X}^m(M)$  sont les multivecteurs champs non nuls localement associés au même ouvert connexe  $U$  et la même distribution  $D$ , alors il existe une fonction non nulle  $f \in C^\infty(U)$  telle que  $Y' \underset{U}{=} f Y$ . Ce fait définit une relation d'équivalence dans l'ensemble des  $m$ -multivecteurs champs dans  $M$  dont les classes d'équivalences seront désignées par  $\{Y\}_U$ . Par conséquent:

**Théorème** Il existe une correspondance bijective entre l'ensemble de distributions orientables  $D \subset TM$  de dimension  $m$  et l'ensemble des classes d'équivalence  $\{Y\}_U$  des champs  $m$ -multivecteurs dans  $M$  non nuls et localement décomposables.

Si  $Y \in \mathcal{X}^m(M)$  est un champ  $m$ -multivector non nul et  $U \subseteq M$  est un ouvert connexe, alors la distribution associée à la classe  $\{Y\}_U$  sera désignée par  $D_U(Y)$ . Si  $U=M$ ,  $D_U(Y)$  sera désignée simplement par  $D(Y)$ .

**Définition** Soit  $Y \in \mathcal{X}^m(M)$  un champ multivecteur.



### 3.1.2 Jet bundle

#### Jets

Soit  $(E, \pi, M)$  un faisceau de fibres dans une catégorie de manifolds et soit  $p \in M$ , avec  $\dim M = m$ .

Soit  $\Gamma(\pi)$  désigne l'ensemble de toutes les sections locales dont les domaines contiennent  $p$ . Soit  $I = (I(1), I(2), \dots, I(m))$  est un multi-indice (un m-uplet de nombres entiers), alors

$$|I| = \sum_{i=1}^m I(i)$$

$$\frac{\partial^{|I|}}{\partial x^I} = \prod_{i=1}^m \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^{I(i)}$$

On définit les sections locales pour  $\sigma, \eta \in \Gamma(\pi)$  avoir le même **r-jet** à  $p$  si

$$\left. \frac{\partial^{|I|} \sigma^\alpha}{\partial x^I} \right|_p = \left. \frac{\partial^{|I|} \eta^\alpha}{\partial x^I} \right|_p, \quad 1 \leq |I| \leq r$$

La relation que deux cartes ont le même  $r$ -jet est une relation d'équivalence. Un  $r$ -jet est une classe de l'équivalence associée à la relation citée çï dessus, et le  $r$ -jet avec la représentation  $\sigma$  est désigné par  $j_p^r \sigma$ . Le nombre entier  $r$  est aussi appelé l'**ordre** du jet [13].

$p$  est l'**origine** de  $j_p^r \sigma$  et  $\sigma(p)$  est **la cible** de  $j_p^r \sigma$ .

#### Jets manifolds

Le jet manifold  $r^{\text{ème}}$  de  $\pi$  est l'ensemble  $\{j_p^r \sigma : p \in M, \sigma \in \Gamma(\pi)\}$  et est désigné par  $J^r \pi$ . On peut définir des projections  $\pi_r$  et  $\pi_{r,0}$  appelés respectivement **l'origine** et **la cible** par :

$$\pi_r : J^r \pi \rightarrow M$$

$$j_p^r \sigma \rightarrow p$$

Et

$$\pi_{r,0} : J^r \pi \rightarrow E$$

$$j_p^r \sigma \rightarrow \sigma(p)$$

Si  $1 \leq k \leq r$ , alors **la projection**  $k$ -jet est la fonction  $\pi_{r,k}$  définie par :

$$\pi_{r,k} : J^r \pi \rightarrow J^k \pi$$

$$j_p^r \sigma \rightarrow j_p^k \sigma$$

De cette définition, on a  $\pi_r = \pi \circ \pi_{r,0}$  et que si  $0 \leq m \leq k$ , alors  $\pi_{r,m} = \pi_{k,m} \circ \pi_{r,k}$ .

La carte d'identité sur  $J^r \pi$  est identifié avec  $\pi_{r,r} = id_{J^r \pi}$  et  $J^0 \pi$  avec  $E$ .

Les fonctions  $\pi_{r,k}$ ,  $\pi_{r,0}$  et  $\pi_r$  sont des submersions surjectives « smooth ».

$$\begin{array}{ccccccc} J^r \pi & \xrightarrow{\pi_{r,r-1}} & J^{r-1} \pi & \dots & J^1 \pi & \xrightarrow{\pi_{1,0}} & E \\ \pi_r \downarrow & & \pi_{r-1} \downarrow & & \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{id_M} & M & \dots & M & \xrightarrow{id_M} & M \end{array}$$

Un système de coordonnées sur  $E$  va générer un système de coordonnées sur  $J^r \pi$ . Soit  $(U, u)$  une carte de coordonnées adaptées sur  $E$  où  $u = (x^i, u^\alpha)$ . La carte de coordonner induite  $(U^r, u^r)$  sur  $J^r \pi$  est définie par :

$$\begin{aligned} U^r &= \{j_p^r \sigma : \sigma(p) \in U\} \\ u^r &= (x^i, u^\alpha, u_i^\alpha) \quad i = 1, \dots, m ; \alpha = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} x^i(j_p^r \sigma) &= x^i(p) \\ u^\alpha(j_p^r \sigma) &= u^\alpha(\sigma(p)) \end{aligned}$$

et les fonctions

$$u_i^\alpha : U^k \rightarrow R$$

qui sont spécifiées par

$$u_p^\alpha(j_p^r \sigma) = \left. \frac{\partial^{|\alpha|} \sigma^\alpha}{\partial x^{|\alpha|}} \right|_p$$

et sont connues comme les coordonnées **dérivatives**.

Donnant un atlas de cartes adaptées  $(U, u)$  sur  $E$ , la collection correspondante de cartes  $(U^r, u^r)$  est un  $C^\infty$  atlas sur  $J^r \pi$ .

### Jet bundles

Puisque l'atlas sur chaque  $J^r \pi$  définit un manifold, les triplets  $(J^r \pi, \pi_{r,k}, J^k \pi)$ ,  $(J^r \pi, \pi_{r,0}, E)$  et  $(J^r \pi, \pi_r, M)$  définissent tous des manifolds de fibres. En particulier, si  $(E, \pi, M)$  est un faisceau de fibres, le triplet  $(J^r \pi, \pi_r, M)$  définit le  $r^{\text{ème}}$  **jet bundle** de  $\pi$ .

Si  $p \in M$ , alors la fibre  $\pi_r^{-1}(p)$  est dénotée  $J_p^r \pi$ .

Soit  $\sigma$  une section locale de  $\pi$  avec le domaine  $W \subset M$ . **La prolongation  $r^{\text{ème}}$  jet** de  $\sigma$  est la carte

$$j^r \sigma : W \rightarrow J^r \pi$$

définie par:  $(j^r \sigma) \equiv j_p^r \sigma$

En coordonnées locales,  $\sigma$  est donné par:

$$\left( \sigma^\alpha, \frac{\partial^{|\mathcal{I}|} \sigma^\alpha}{\partial x^{|\mathcal{I}|}} \right) \quad 1 \leq |\mathcal{I}| \leq r$$

On identifie  $j^0 \sigma \equiv \sigma$ .

### 3.1.3 Connexions et Champs multivecteurs dans le je bundle de premier ordre

Soit  $\pi : E \rightarrow M$  est un faisceau de fibres,  $\pi_{1,0} : J^1 \pi \rightarrow E$  is le jet bundle de premier ordre [13, 14] et  $\pi_1 = \pi \circ \pi_{1,0} : J^1 \pi \rightarrow M$ . Soit  $(t^A, x_i, v_i^A)$  un système coordonnées locales naturelles dans  $J^1 \pi$  ( $A = 1, \dots, k; i = 1, \dots, n$ ).

**Définition** Une connexion dans  $J^1 \pi$  un des éléments équivalents suivants:

- 1- Une section globale de  $\pi_{1,0} : J^1 \pi \rightarrow E$ , (qui est une mapping  $\psi : E \rightarrow J^1 \pi$  tel que  $\pi_{1,0} \circ \psi = Id_E$ ). Il est appelé un jet de champ.
- 2- Un sous-fibré  $H(E)$  de  $TE$  tel que  $TE = V(\pi) \oplus H(E)$ . Il est appelé un sous-fibré horizontal qui est noté  $D(\psi)$  quand la distribution est associée à  $\psi$ .
- 3- Une 1-forme  $\pi$ - semibasic  $\nabla$  dans  $E$  dont les valeurs sont dans  $TE$ , tel que  $\nabla^* \alpha = \alpha$ , pour chaque  $\pi$ - semibasic forme  $\alpha \in \Omega^1(E)$ . Elle est appelée la forme de connexion ou connexion de Ehresmann.

Soit  $(t^A, x^i)$  un système local de coordonnées dans un ensemble ouvert  $U \subset E$ , alors les expressions locales de ces éléments sont :

$$\begin{aligned} \psi &= (t^A, x^i, \Gamma_\rho^i(t^A, x^i)) \\ \nabla &= dt^A \otimes \left( \frac{\partial}{\partial t^A} + \Gamma_A^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \\ H(E) &= span \left\{ \frac{\partial}{\partial t^A} + \Gamma_A^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right\} \end{aligned}$$

**Définition** Soit  $\psi : E \rightarrow J^1 \pi$  est un jet de champ. Une section  $\phi : M \rightarrow E$  est dite une section intégrale de  $\psi$  if  $\psi \circ \phi = j^1 \phi$  ( où  $j^1 \phi : M \rightarrow J^1 \pi$  représente la levée canonique de



$\phi$ ).  $\psi$  est dit un champ de jet intégrable s'il admet des sections intégrales travers chaque point de  $E$ .

Si  $(t^A, x^i, v_A^i)$  est un système local naturel dans  $J^1\pi$ . Dans ce système, les expressions locales pour  $\phi$  et  $\psi$  sont :  $\psi = (t^A, x^i, \Gamma_\rho^A(t^A, x^i))$  et  $\phi = (t^A, x^i = \phi^i(t^A))$ , alors  $\phi$  est une section intégrale de  $\psi$  si et seulement si  $\phi$  est une solution du système d'équation différentielle partielle suivant :

$$v_A^i = \frac{\partial \phi^i}{\partial t^A} = \Gamma_A^i \circ \phi$$

**Proposition** Un jet de champ  $\psi : E \rightarrow J^1\pi$  est intégrable si et seulement si  $D(\psi)$  est une distribution involutive (i.e.  $D(\psi)$  is intégrable).

Considérons maintenant le second jet bundle  $J^2\pi \xrightarrow{\pi_{2,1}} J^1\pi \xrightarrow{\pi_1} M$ . Soit  $\varphi : J^1\pi \rightarrow J^2\pi$  un champ de jet  $J^2\pi$  associé à une forme connexion  $\nabla$  de  $J^1\pi$  et un horizontal  $m$ -fibré  $H(J^1\pi)$ .  $(t^A, x^i, v_A^i, F_A^i, G_{AB}^i)$  est un système local naturel in  $J^2\pi$  ; Ainsi, les expressions locales pour les éléments suivants sont :

$$\begin{aligned} \varphi &= (t^A, x^i, v_A^i, F_A^i(t^A, x^i, v_A^i), G_{AB}^i(t^A, x^i, v_A^i)) \\ \nabla &= dt^A \otimes \left( \frac{\partial}{\partial t^A} + F_A^i \frac{\partial}{\partial x^i} + G_{AB}^i \frac{\partial}{\partial v_B^i} \right) \\ H(J^1\pi) &= span \left\{ \frac{\partial}{\partial t^A} + F_A^i \frac{\partial}{\partial x^i} + G_{AB}^i \frac{\partial}{\partial v_B^i} \right\} \end{aligned}$$

Si  $\varphi : J^1\pi \rightarrow J^2\pi$  est un champ de jet alors une section  $j^1\phi : M \rightarrow J^1\pi$  est dite une section intégrale de  $\varphi$  si  $\varphi \circ j^1\phi = j(j^1\phi) = j^2\phi$ .  $\varphi$  est dit un champ de jet intégrable [14] s'il admet des sections intégrales. Dans un système local naturel de coordonnées dans  $J^2\pi$ ,  $j^1\phi = (t^A, \phi^i(t^A), \phi_A^i(t^B))$  est une section intégrale de  $j^2\phi$  si et seulement si  $j^1\phi$  est une solution du système d'équations différentielles suivant :

$$\frac{\partial \phi^i}{\partial t^A} = F_A^i \circ j^1\phi \quad , \quad \frac{\partial \phi_B^i}{\partial t^A} = G_{AB}^i \circ j^1\phi$$

**Définition** Un champ de jet  $\varphi : J^1\pi \rightarrow J^2\pi$  est dit une équation différentielle partielle de deuxième ordre (SOPDE), si elle est une section de la projection  $\pi_{2,1}$  tel que  $\pi_{2,1} \circ \varphi = Id_{j^1\pi}$ .

**Proposition** Un champ de jet intégrable  $\varphi : J^1\pi \rightarrow J^2\pi$  est un SOPDE si et seulement si ses sections intégrales sont des prolongements canoniques des sections  $\phi : M \rightarrow E$ .

**Définition** Un champ de jet  $\varphi : J^1\pi \rightarrow J^2\pi$  est appelé holonome s'il est intégrable et

SOPDE.

Le champ de jet  $\varphi$  est un SOPDE, alors  $j^1\varphi = \left( t^A, \phi^i, \frac{\partial \phi^i}{\partial t^A} \right)$  est une section intégrale de  $\varphi$ ,

$$F_A^i = v_A^i \text{ et } G_{AB}^i \left( t^A, \phi^i, \frac{\partial \phi^i}{\partial t^A} \right) = \frac{\partial^2 \phi^i}{\partial t^A \partial t^B}.$$

### 3.1.4 Champs multivecteurs et Champs de jet dans les jets bundles

**Définition** Un champ multivecteur non nulle  $Y \in \mathcal{X}^m(E)$  est dit transversal à la projection  $\pi$  (or  $\pi$ -transverse) si en chaque point  $y \in E, (i(Y)(\pi^*\omega))_y \neq 0$ , et pour chaque  $\omega \in \Omega^m(M)$  avec  $\omega(\pi(y)) \neq 0$ .

**Théorème** Soit  $Y \in \mathcal{X}^m(E)$  est intégrable. Alors  $Y$  est  $\pi$ -transverse si et seulement si ses variétés intégrales sont des sections locales de  $\pi : E \rightarrow M$ .

**Définition** Un champ de jet  $\psi : E \rightarrow J^1\pi$  est dit orientable si  $D(\psi)$  est une distribution orientable sur  $E$ .

**Théorème** Tout champ de jet orientable  $\psi : E \rightarrow J^1\pi$  définit une classe de champs multivecteurs localement décomposable et  $\pi$ -transverse  $\{Y\} \subset \mathcal{X}^m(E)$ , et inversement. Ils sont caractérisés par le fait que  $D(\psi) = D(Y)$ . De plus, le champ de jet orientable  $\psi$  est intégrable si et seulement si pour tout  $Y \in \{Y\}$ .

L'expression locale pour un champ multivecteur représentatif  $Y$  de la classe  $\{Y\}$  associé au champ de vecteur de jet  $\psi$

$$Y = \bigwedge_{A=1}^k Y_A = \bigwedge_{A=1}^k \left( \frac{\partial}{\partial t^A} + \Gamma_A^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right)$$

**Définition** Un champ multivecteur  $\pi_1$ -transverse  $X \in \mathcal{X}^m(J^1\pi)$  vérifie la condition de SOPDE.

**Proposition** Soit  $X \in \mathcal{X}^m(J^1\pi)$  est  $\pi_1$ -transverse et localement décomposable. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:

- 1-  $X$  est un SOPDE.
- 2-  $i_X \theta = 0$  (où  $\theta \in \Omega^1(J^1\pi, \pi_{1,0}^*V(\pi))$  est la structure forme canonique dans  $J^1\pi$ ).
- 3- Si  $(W; t^A, x^i, v_A^i)$  est une carte naturelle dans  $J^1\pi$ , alors l'expression local de  $X$  est

$$X = \bigwedge_{A=1}^k X_A = \bigwedge_{A=1}^k f^A \left( \frac{\partial}{\partial t^A} + F_A^i \frac{\partial}{\partial x^i} + G_{AB}^i \frac{\partial}{\partial v_B^i} \right)$$

où  $f^A \in C^\infty(J^1\pi)$  est une fonction non nulle.

La relation entre les champs multivecteurs intégrables et SOPDE dans  $J^1\pi$  [11, 12, 14] est:

**Théorème** Soit  $X \in \mathcal{X}^m(J^1\pi)$  est  $\pi_1$ -transverse et intégrable.  $X$  est un SOPDE si et seulement ses variétés intégrales sont des prolongements canoniques des sections  $\phi : M \rightarrow E$ , qui sont des sections  $\psi : M \rightarrow J^1\pi$ .

**Définition** Un champ multivecteur  $X \in \mathcal{X}^m(J^1\pi)$  est dit holonome si:

1-  $X$  est intégral.

2-  $X$  est un SOPDE.

**Théorème** Tout champ de jet orientable  $\varphi : J^1\pi \rightarrow J^2\pi$  définit une classe de champs multivecteurs  $\{X\} \subset \mathcal{X}^m(J^1\pi)$  localement décomposables et  $\pi_1$ -transverses et inversement. Ils sont caractérisés par le fait que  $D(\varphi) = D(X)$ . De plus:

- 1- Le champ de jet  $\varphi$  est intégrable si et seulement si pour tout  $X \in \{X\}$ ,  $X$  est intégrable.
- 2- Le champ de jet  $\varphi$  est SOPDE si et seulement si pour tout  $X \in \{X\}$ ,  $X$  est SOPDE.
- 3- Le champ de jet  $\varphi$  est holonome si et seulement si pour tout  $X \in \{X\}$ ,  $X$  est holonome.

L'expression locale pour un champ multivecteur représentatif  $X$  de la classe  $\{X\}$  associé au champ de vecteur de jet  $\varphi$

$$X = \bigwedge_{A=1}^k X_A = \bigwedge_{A=1}^k \left( \frac{\partial}{\partial t^A} + F_A^i \frac{\partial}{\partial x^i} + G_{AB}^i \frac{\partial}{\partial v_B^i} \right)$$

Si  $\varphi$  est un SOPDE, alors un champ multivecteur représentatif de  $\{X\}$  peut être choisi tel que  $F_A^i = v_A^i$ .

Nous avons donc le schéma résumant ce qui suit:

$$C.m.v \text{ holonome } \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} C.m.v \pi_1 - \text{transverse} \\ C.m.v \text{ involutif} \end{array} \right\} (classe) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} C.j \text{ orientable} \\ C.j \text{ int egrable} \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} C.m.v \text{ loc. decom.} \\ C.m.v \text{ SOPDE} \end{array} \right\} (classe) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} C.j \text{ SOPDE} \\ C.j \text{ orientable} \end{array} \right\} \end{cases} C.j \text{ holonome.}$$

## 3.2 Géométrie $k$ -symplectique

### 3.2.1 Manifold $k$ -symplectique

**Définition** Une structure  $k$ -symplectic sur une manifold  $M$  de dimension  $N=n+k$  est une famille  $(\omega^A, V; 1 \leq A \leq k)$ , où chaque  $\omega^A$  est une 2-forme fermée et  $V$  est de dimension  $nk$  intégrable sur  $M$  tel que:

$$(i) \omega^A|_{V \times V} = 0, \quad (ii) \bigcap_{A=1}^k \ker \omega^A = \{0\}. \quad (3.2.1.1)$$

Alors  $(M, \omega^A, V)$  est appelé un manifold  $k$ -symplectic [15, 16, 17, 19, 20, 21].

**Théorème** Soit  $(\omega^A, V; 1 \leq A \leq k)$  est une structure  $k$ -symplectic sur  $M$ . Pour chaque point de  $M$ , il existe une carte locale de coordonnées  $(x^i, p_i^A), 1 \leq i \leq n, 1 \leq A \leq k$ , tel que

$$\omega^A = dx^i \wedge dp_i^A, \quad V = \left\langle \frac{\partial}{\partial p_i^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial p_i^k} \right\rangle_{i=1, \dots, n}; \quad 1 \leq A \leq k. \quad (3.2.1.2)$$

Le modèle canonique pour cette structure géométrique est  $((T_k^1)^* M, \omega^A, V)$ , où  $M$  est une variété différentiable de dimension  $n$  et  $(T_k^1)^* M = T^* M \oplus \dots \oplus T^* M$  est la somme de Whitney de  $k$ -copies du fibré cotangent  $T^* M$  qui est habituellement appelé le bundle des  $k^1$ -covelocities de  $M$ . On donne les projections canoniques :

$$\pi^A : (T_k^1)^* M \rightarrow T^* M, \quad \pi_M^1 : (T_k^1)^* M \rightarrow M; \quad 1 \leq A \leq k, \quad (3.2.1.3)$$

(ici  $\pi^A$  est la projection canonique sur la  $A^{\text{ème}}$ -copie  $T^* M$  de  $(T_k^1)^* M$ ). Ainsi, si  $x \in M$  et  $(p_x^1, \dots, p_x^k)$ , nous avons:

$$\pi^A(p_x^1, \dots, p_x^k) = p_x^A, \quad \pi_M^1(p_x^1, \dots, p_x^k) = x; \quad 1 \leq A \leq k \quad (3.2.1.3) (a)$$

Si  $(x^i), 1 \leq i \leq n$ , sont les coordonnées locales sur  $U \subseteq M$ , les coordonnées locales induites  $(x^i, p_i^A)$  sur  $(\pi_M^1)^{-1}(U) = (T_k^1)^* U$  sont donnés par

$$x^i(p_x^1, \dots, p_x^k) = x^i(x), \quad p_i^A(p_x^1, \dots, p_x^k) = p_i^A \quad (3.2.1.3) (b)$$

La structure  $k$ -symplectique canonique dans  $(T_k^1)^* M$  est construite comme suit: on définit les formes différentiels:

$$\theta^A = (\pi^A)^* \theta, \quad \omega^A = (\pi^A)^* \omega; \quad 1 \leq A \leq k,$$

où  $\theta$  la 1-forme de Liouville sur  $T^* M$  et  $\omega = -d\theta$  est la forme symplectique canonique sur  $T^* M$ . Évidemment  $\omega^A = -d\theta^A$ . En coordonnées locales, on a

$$\theta^A = p_i^A dx^i \quad , \quad \omega^A = dx^i \wedge dp_i^A \quad , \quad 1 \leq A \leq k. \quad (3.2.1.4)$$

Le manifold  $k$ -symplectique canonique est  $\left( (T_k^1)^* M, \omega^A, V \right)$  où  $V = \ker(\pi_M^1)_*$ .

### 3.2.2 Eléments géométriques

#### Fibré tangent de $k^1$ -velocities d'un manifold

Soit  $M$  une variété différentiable de dimension  $n$ . Soit  $\tau_M : TM \rightarrow M$  le fibré tangent de  $M$ . Soit  $T_k^1 M = TM \oplus \dots \oplus TM$  la somme de Whitney de  $k$ -copies de  $TM$ , avec projection canonique  $\tau_M^1 : T_k^1 M \rightarrow M$ ,  $\tau_M^1(v_{1_x}, \dots, v_{k_x}) = x$ , où  $v_{A_x} \in T_x M$ ,  $1 \leq A \leq k$ .

$T_k^1 M$  est appelé le fibré vectoriel  $k$ -tangente ou fibré tangent de  $k^1$ -velocities de  $M$ .  $T_k^1 M$  est de dimension  $(n+nk)$ .

$T_k^1 M$  peut être identifié avec le manifold  $J_0^1(R^k, M)$  qui est 1-jets  $\sigma : R^k \rightarrow M$  avec origine  $t = 0 \in R^k$  donc

$$T_k^1 M \equiv J_0^1(R^k, M) \equiv TM \oplus \dots \oplus TM$$

$$j_{0,x}^1 \sigma \equiv (v_{1_x}, \dots, v_{k_x})$$

où  $x = \sigma(0)$  et  $v_{A_x} = \sigma_* \left( \frac{\partial}{\partial t^A} \Big|_0 \right)$ .

Si  $(x^i)$  est des coordonnées locales sur  $U \subseteq M$  alors les coordonnées locales induites  $(x^i, v^i)$ ,  $1 \leq i \leq n$  sur  $TU = \tau_M^{-1}(U)$  est donné par:

$$x^i(v_x) = x^i(x), \quad v^i(v_x) = v_x(x^i)$$

et les coordonnées locales induites  $(x^i, v_A^i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq A \leq k$  sur  $(\tau_M^1)^{-1}(U) \equiv T_1^k U$  sont données par:

$$x^i(v_{1_x}, \dots, v_{k_x}) = x^i(x), \quad v_A^i(v_{1_x}, \dots, v_{k_x}) = v_{A_x}(x^i)$$

#### Champs de vecteurs canoniques

Soit  $\Delta$  le champ du vecteur canonique (champ de vecteur Liouville) sur  $T_k^1 M$  [21]. Ce champ de vecteur  $\Delta$  est le générateur infinitésimal du flux suivant:

$$\psi : R \times T_k^1 M \rightarrow T_k^1 M$$

$$\psi(s, v_{1_x}, \dots, v_{k_x}) = (e^s v_{1_x}, \dots, e^s v_{k_x})$$

et en coordonnées locales, il a la forme:

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \sum_{A=1}^k v_A^i \frac{\partial}{\partial v_A^i} = \sum_{i=1}^n \Delta_A \quad 1 \leq A \leq k.$$

où chaque  $\Delta_A$  correspond au champ de vecteur canonique sur la  $A^{\text{ème}}$  - copie de  $TM$  sur  $T_k^1 M$ .  $\Delta_A$  est le générateur infinitésimal du flux suivant

$$\begin{aligned} \psi^A : R \times T_k^1 M &\rightarrow T_k^1 M \\ \psi^A(s, v_{1_x}, \dots, v_{k_x}) &= (v_{1_x}, \dots, v_{A-1_x}, e^s v_{A_x}, v_{A+1_x}, \dots, v_{k_x}) \end{aligned}$$

### Structure canonique $k$ -tangente

La structure  $k$ -tangente canonique sur  $T_k^1 M$  est l'ensemble  $(S^1, \dots, S^k)$  de champs des tenseurs de type  $(1, 1)$  défini localement par

$$S^A = \frac{\partial}{\partial v_A^i} \otimes dx^i$$

Cette structure est intégrable si et seulement si pour tout  $\{S^A, S^B\} = 0, 1 \leq A, B \leq k$ , où

$$\{S^A, S^B\}(X, Y) = [S^A X, S^B Y] + S^A S^B [X, Y] - S^A [X, S^B Y] - S^B [S^A X, Y],$$

pour tous champs de vecteur  $X, Y$  sur  $M$ .

### Remontées verticales des champs de vecteurs de $M$ à $T_k^1 M$

**Définition 3.2.2** Pour un vecteur  $X_x \in T_x M$  et pour  $A = 1, \dots, k$  on définit la verticale  $A$ -remontée  $(X_x)^{V_A}$  comme le champ du vecteur local sur la fibre  $(\tau_k^1)^{-1}(x) \subset T_k^1 M$  donné par

$$(X_x)^{V_A}(w_x) = \left. \frac{d}{ds} (v_{1_x}, \dots, v_{A-1_x}, v_{A_x} + sX_x, v_{A+1_x}, \dots, v_{k_x}) \right|_{s=0}$$

pour tous les points  $w_x = (v_{1_x}, \dots, v_{k_x}) \in (\tau_k^1)^{-1}(x) \subset T_k^1 M$ .

En coordonnées locales, si  $X_x = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x$  alors  $(X_x)^{V_A}(w_x) = a^i \frac{\partial}{\partial v_A^i} \Big|_{w_x}$ .

Si  $X$  est un champ de vecteur sur  $M$  alors on définit la verticale  $A$ -remontée à  $T_k^1 M, 1 \leq A \leq k$  comme le champ de vecteur  $X^{V_A}$  donné par :

$$(X)^{V_A}(w_x) = \left( X^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x \right)^{V_A}(w_x) = X^i(x) \frac{\partial}{\partial v_A^i} \Big|_{w_x} = (X^i \circ \tau_k^1)(w_x) \frac{\partial}{\partial v_A^i} \Big|_{w_x},$$

alors

$$X^{V_A} = (X^i \circ \tau_k^1) \frac{\partial}{\partial v_A^i}$$

où  $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ .

### Champs $k$ -vecteurs et Sections intégrales

Soit  $M$  une variété quelconque différentiable.

**Définition** Une champ  $k$ -vecteur sur  $M$  est une section  $X : M \rightarrow T_k^1 M$  de la projection  $\tau_M^1$ .

Etant donné  $T_k^1 M$  est la somme Whitney de  $k$ -copies de  $TM$ , on déduit que pour donner un champ  $k$ -vecteur  $X$  est équivalent à donner une famille de champs  $k$ -vecteurs  $X_1, \dots, X_k$  sur  $M$  obtenus en projetant  $X$  sur chaque facteur ; i.e.  $X_A = \tau_A \circ X$ , où  $\tau_A : T_k^1 M \rightarrow TM$  est la projection canonique sur la  $A^{\text{ème}}$ - copie  $TM$  de  $T_k^1 M$ . Ces champs  $k$ -vecteurs sont dénotés par  $X = (X_1, \dots, X_k)$ .

**Définition** Une section intégrale de champ  $k$ -vecteur  $X = (X_1, \dots, X_k)$ , qui traverse un point  $x \in M$ , est une application  $\psi : U_0 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow M$ , définie sur un voisinage  $U_0$  de  $0 \in \mathbb{R}^k$ , tel que

$$\psi(0) = x, \quad \psi_* (t) \left( \frac{\partial}{\partial t^A} \Big|_t \right) = X_A(\psi(t)) \quad \text{pour } t \in U_0, 1 \leq A \leq k$$

ou, ce qui est équivalent,  $\psi$  satisfait  $X \circ \psi = \psi^{(1)}$ , où  $\psi^{(1)}$  est le premier prolongement de  $\psi$  sur  $T_k^1 M$  défini par

$$\begin{aligned} \psi^{(1)} : U_0 \times \mathbb{R}^k &\rightarrow T_k^1 M \\ t &\rightarrow \psi^{(1)}(t) = j_0^1 \psi_t \equiv \left( \psi_* (t) \left( \frac{\partial}{\partial t^1} \Big|_t \right), \dots, \psi_* (t) \left( \frac{\partial}{\partial t^k} \Big|_t \right) \right) \end{aligned}$$

où  $\psi_t(s) = \psi(t+s)$  pour tout  $t, s \in \mathbb{R}$ .

Un champ  $k$ -vecteur  $X = (X_1, \dots, X_k)$  sur  $M$  est intégrable s'il y a une section intégrale qui traverse chaque point de  $M$ .

En coordonnées locales, on a

$$\psi^{(1)}(t^1, \dots, t^k) = \left( \psi^i(t^1, \dots, t^k), \frac{\partial \psi^i}{\partial t^A}(t^1, \dots, t^k) \right), \quad 1 \leq A \leq k, 1 \leq i \leq n \quad (3.2.2.1)$$

et  $\psi$  est une section intégrale de  $(X_1, \dots, X_k)$  si et seulement si les équations suivantes sont vérifiées:

$$\frac{\partial \psi^i}{\partial t^A} = (X_A)^i \circ \psi \quad 1 \leq A \leq k, 1 \leq i \leq n.$$

## Second-ordre des équations différentielles partielles dans $T_k^1M$ (SOPDE)

**Définition** Un champ  $k$ -vecteur  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$  sur  $T_k^1M$ , est appelé une équation partielle de deuxième ordre (SOPDE) s'il est une section du fibré vectoriel  $T_k^1\tau: T_k^1(T_k^1M) \rightarrow T_k^1M$  i.e.

$$T_k^1\tau \circ (\xi_1, \dots, \xi_k) = Id_{T_k^1M}$$

L'expression locale d'un SOPDE  $\xi$  donné par le système de coordonnées  $(x^i, v_A^i)$  défini sur  $T_k^1M$  est

$$\xi_A(x^i, v_A^i) = v_A^i \frac{\partial}{\partial x^i} + (\xi_A)^i_B \frac{\partial}{\partial v_B^i}, \quad 1 \leq A \leq k, \quad (3.2.2.2)$$

où  $(\xi_A)^i_B$  sont des fonctions sur  $T_k^1M$ .

Si  $\psi: R^k \rightarrow T_k^1M$  est une section intégrale de  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ , localement donné par,  $\psi(t) = (\psi^i(t), \psi_B^i(t))$  alors à partir de la définition 3.2.2 et Eq.3.2.2.2. on déduit

$$\left. \frac{\partial \psi^i}{\partial t^A} \right|_t = \psi_A^i(t), \quad \left. \frac{\partial \psi_B^i}{\partial t^A} \right|_t = (\xi_A)^i_B(\psi(t)) \quad (3.2.2.3)$$

De (3.2.2.1) et (3.2.2.3), on obtient la proposition suivante :

**Proposition** Soit  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$  est un SOPDE intégrable (i.e.  $\xi$  est holonome). Si  $\psi$  est une section intégrale de  $\xi$  alors  $\psi = \phi^{(1)}$  où  $\phi^{(1)}$  est le premier prolongement de l'application  $\phi = \tau \circ \psi: R^k \xrightarrow{\psi} T_k^1M \xrightarrow{\tau} M$  et  $\phi$  est la solution du système d'équations aux dérivées partielles de second ordre

$$\frac{\partial^2 \phi^i}{\partial t^A \partial t^B}(t) = (\xi_A)^i_B \left( \phi^i(t), \frac{\partial \phi^i}{\partial t^C}(t) \right) \quad 1 \leq i \leq n; 1 \leq A, B \leq k \quad (3.2.2.4)$$

**Proposition** Soit  $\xi$  un champ  $k$ -vecteur intégrable sur  $T_k^1M$ . La condition nécessaire et suffisante pour  $\xi$  pour être une Équation Différentielle Partielle de Second Ordre (SOPDE) est que ses sections intégrales sont les premiers prolongements de l'application  $\phi^{(1)} \phi: R^k \rightarrow M$ .

$$\xi_A(\phi^{(1)}(t)) = \phi_*^{(1)}(t) \left( \left. \frac{\partial}{\partial t^A} \right|_t \right), \quad 1 \leq A \leq k.$$

Ces applications  $\phi$  seront appelés des solutions du SOPDE  $\xi$ .  $\phi$  est donné localement par (3.2.1.4) si et seulement si



$$\frac{\partial \phi^i}{\partial t^A}(t) = v_A^i(\phi^{(1)}(t)), \quad \frac{\partial^2 \phi^i}{\partial t^A \partial t^B}(t) = (\xi_A)^i_B(\phi^{(1)}(t)). \quad (3.2.2.5)$$

De (3.2.2.5), on déduit que si  $\xi$  est un SOPDE intégrable alors  $(\xi_A)^i_B = (\xi_B)^i_A$  pour tout  $A, B = 1, \dots, k$ .

### 3.2.3 Formulation géométrique pour le formalisme de Lagrange $k$ -symplectique

Soit  $L \in C^\infty(T_k^1 M)$  une fonction de Lagrange (i.e.  $L : T_k^1 M \rightarrow R$ ).

Soit  $\theta_L^A$  les 1-formes définis sur  $T_k^1 M$ ,  $1 \leq A \leq k$ , qui sont introduits en utilisant la structure de  $k$ -tangent de  $T_k^1 M$ , comme suit

$$\theta_L^A = dL \circ S^A \quad 1 \leq A \leq k,$$

qui sont localement données par

$$\theta_L^A = \frac{\partial L}{\partial v_A^i} dx^i \quad (3.2.3.1)$$

Si on note par  $\omega_L^A = -d\theta_L^A$ , en coordonnées locales on a :

$$\omega_L^A = dx^i \wedge d\left(\frac{\partial L}{\partial v_A^i}\right) = \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial v_A^i} dx^i \wedge dx^j + \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^j \partial v_A^i} dx^i \wedge dv_B^j \quad (3.2.3.2)$$

Soit  $E_L$  la fonction de Lagrange d'énergie associée à  $L$ ,  $E_L \in C^\infty(T_k^1 M)$ , comme  $E_L = \Delta(L) - L$ . Son expression locale est:

$$E_L = v_A^i \frac{\partial L}{\partial v_A^i} - L \quad (3.2.3.3)$$

L'application de Legendre  $FL : T_k^1 M \rightarrow (T_k^1)^* M$  a été introduite par *Günther* [14] et qui est localement donnée par:

$$FL : (x^i, v_A^i) \rightarrow \left( x^i, \frac{\partial L}{\partial v_A^i} = p_A^i \right) \quad (3.2.3.4)$$

De (3.2.1.4) et (3.2.3.4), on obtient que :

$$\theta_L^A = FL^* \theta^A, \quad \omega_L^A = FL^* \omega^A \quad (3.2.3.5)$$

où  $FL^*$  le pull back de  $FL$ .

**Définition** Un Lagrangien  $L$  est dit régulier [19] si et seulement si

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial v_A^i \partial v_B^j}\right) \neq 0, \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad 1 \leq A, B \leq k. \quad (3.2.3.6)$$

**Proposition** Soit  $L \in C^\infty(T_k^1 M)$  est un Lagrangien. Les conditions suivantes sont équivalentes:

1)  $L$  est régulier. 2)  $FL$  est un difféomorphisme local. 3)  $(T_k^1 M, \omega_L^A, V)$ , où  $V = \text{Ker}(\tau_M^1)_*$ , est un manifold  $k$ -symplectique.

Une fonction de Lagrange  $L$  est dite *hyperrégulière* si la correspondante Legendre application  $FL$  est un difféomorphisme global. Si  $L$  est régulier,  $(T_k^1 M, L)$  est dit un système Lagrangien  $k$ -symplectique. Si  $L$  n'est pas régulier,  $(T_k^1 M, L)$  est un système Lagrangien  $k$ -presymplectique.

Les équations d'Euler-Lagrange pour  $L$  sont:

$$\sum_{A=1}^k \frac{\partial}{\partial t^A} \left( \left. \frac{\partial L}{\partial v_A^i} \right|_{\psi(t)} \right) = \left. \frac{\partial L}{\partial x^i} \right|_{\psi(t)} \quad (3.2.3.7) \text{ (a)}$$

avec

$$v_A^i(\psi(t)) = \frac{\partial \psi^i}{\partial t^A}, \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq A \leq k \quad (3.2.3.7) \text{ (b)}$$

dont les solutions sont des cartes  $\psi: R^k \rightarrow T_k^1 M$  qui, à la suite du dernier groupe d'équations (3.2.3.7), sont les premiers prolongements à  $T_k^1 M$  des cartes  $\phi = \tau_M^1 \circ \psi: R^k \rightarrow M$ ; i.e.  $\psi$  sont holonomes. Cela veut dire que  $\psi = \phi^{(1)}$  où

$$\begin{aligned} \phi^{(1)}: R^k &\rightarrow T_k^1 M \\ t &\rightarrow \phi^{(1)}(t) = \left( \phi_*(t) \left( \left. \frac{\partial}{\partial t^1} \right|_t \right), \dots, \phi_*(t) \left( \left. \frac{\partial}{\partial t^k} \right|_t \right) \right) \end{aligned}$$

Comme  $(T_k^1 M, \omega_L^A, V)$  est un manifold  $k$ -symplectique, on définit le morphisme de fibré vectoriel suivant

$$\begin{aligned} \Omega_L: T_k^1(T_k^1 M) &\rightarrow T^*(T_k^1 M) \\ X = (X_1, \dots, X_k) &\rightarrow \Omega_L(X_1, \dots, X_k) = \text{trace}(i_{X_B} \omega_L^A) = \sum_{A=1}^k i_{X_A} \omega_L^A. \end{aligned} \quad (3.2.3.8)$$

On désigne par  $\mathcal{X}_L^k(T_k^1 M)$  l'ensemble des champs  $k$ -vecteurs  $\xi_L = (\xi_L^1, \dots, \xi_L^k)$  sur  $T_k^1 M$  qui sont des solutions de l'équation

$$\Omega_L(\xi_L^1, \dots, \xi_L^k) = dE_L, \quad (3.2.3.9)$$

La famille  $(T_k^1 M, \omega_L^A, E_L)$  est appelée système Lagrangien  $k$ -symplectique. Si chacun  $\xi_L^A$  est donné localement par

$$\xi_L^A = (\xi_L^A)^i \frac{\partial}{\partial x^i} + (\xi_L^A)^B \frac{\partial}{\partial v_B^i} \quad (3.2.3.10)$$

Alors  $(\xi_L^A)$  est une solution de (3.2.3.9) si et seulement si  $(\xi_L^A)^i$  et  $(\xi_L^A)_B^i$  satisfont le système d'équations:

$$\left( (\xi_L^A)^j - v_A^j \right) \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial v_A^j} - (\xi_L^A)^j \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial v_A^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^j \partial v_A^i} (\xi_L^A)_B^j + \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0$$

(3.2.3.11)

et

$$\frac{\partial^2 L}{\partial v_B^j \partial v_A^i} (\xi_L^A)^i = \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^j \partial v_A^i} v_A^i$$

Si le Lagrangien est régulier, les équations précédentes sont équivalentes aux équations

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial v_A^i} v_A^j + \frac{\partial^2 L}{\partial v_A^i \partial v_B^j} (\xi_L^A)_B^j = \frac{\partial L}{\partial x^i}, \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq A \leq k \quad (3.2.3.12) \text{ (a)}$$

et

$$(\xi_L^A)^i = v_A^i \quad (3.2.3.12) \text{ (b)}$$

Le dernier groupe de ces équations (3.2.3.12) (b) est l'expression locale de la condition que  $\xi_L$  est un SOPDE et si elle est intégrable, ses sections intégrales sont les premiers prolongements  $\phi^{(1)} : R^k \rightarrow T_k^1 M$  des cartes  $\phi : R^k \rightarrow M$ , et en utilisant les systèmes d'équations (3.2.3.12) (a) et (3.2.3.7) (b), on déduit que  $\{\phi^i\}$  sont solutions des équations d'Euler-Lagrange (3.2.3.7) (a).

Ainsi, les équations (3.2.3.9) peuvent être considérées comme une version géométrique des équations du champ d'Euler-Lagrange:

$$\sum_{A=1}^k \frac{\partial}{\partial t^A} \left( \frac{\partial L}{\partial v_A^i} \Big|_{\phi^{(1)}(t)} \right) = \frac{\partial L}{\partial x^i} \Big|_{\phi^{(1)}(t)} \quad (3.2.3.13)$$

### 3.2.4 Formalisme hamiltonien $k$ -symplectique

Considerer le  $k$ -manifold  $\left( (T_k^1)^* M, \omega^A, V \right)$  et soit  $H \in C^\infty \left( (T_k^1)^* M \right)$  une fonction Hamiltonienne.  $\left( (T_k^1)^* M, H \right)$  est appelé un système Hamiltonien  $k$ -symplectique [19]. Les équations de Hamilton-de Donder Weyl ( $HDW$ -équations en abrégé) pour ce système sont l'ensemble d'équations différentielles partielles:

$$\frac{\partial H}{\partial x^i} = - \sum_{A=1}^k \frac{\partial \psi_i^A}{\partial t^A}$$

et

$$1 \leq i \leq n, 1 \leq A \leq k \quad (3.2.4.1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i^A} = \frac{\partial \psi^i}{\partial t^A}$$

où  $\psi : R^k \rightarrow (T_k^1)^* M$ ,  $\psi(t) = (\psi^i(t), \psi_i^A(t))$  est une solution.

On désigne par  $\mathcal{X}_H^k \left( (T_k^1)^* M \right)$  l'ensemble des champs  $k$ -vecteurs  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$  sur  $(T_k^1)^* M$  qui sont solutions à l'équation

$$\sum_{A=1}^k i(\xi_A) \omega^A = dH \quad (3.2.4.2)$$

Dans un système local de coordonnées canonique, chaque  $\xi_A$  est donné localement par :

$$\xi_A = (\xi_A)^i \frac{\partial}{\partial x^i} + (\xi_A)^B \frac{\partial}{\partial p_i^B}, \quad 1 \leq A \leq k \quad (3.2.4.3)$$

Alors, l'insertion de (3.2.4.1) dans (3.2.4.2), l'équation (3.2.4.2) est équivalent aux équations:

$$\frac{\partial H}{\partial x^i} = - \sum_{A=1}^k (\xi_A)^A_i \quad 1 \leq i \leq n \quad (3.2.4.4)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i^A} = (\xi_A)^i$$

**Proposition** Soit  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$  est un champ  $k$ -vecteur intégrable dans  $(T_k^1)^* M$  et  $\psi : R^k \rightarrow (T_k^1)^* M$  une section intégrale de  $\xi$ . Alors  $\psi(t) = (\psi^i(t), \psi_i^A(t))$  est une solution aux équations HDW (3.2.4.1) si et seulement si  $\xi \in \mathcal{X}_H^k \left( (T_k^1)^* M \right)$  alors,

$$\frac{\partial \psi^i}{\partial t^B} = (\xi_B)^i \quad (3.2.4.5)$$

et

$$\frac{\partial \psi_i^A}{\partial t^B} = (\xi_B)^A_i$$

Par conséquent, en combinant (3.2.4.4) et (3.2.4.5), on trouve les équations HDW (3.2.4.1).

### 3.3 Géométrie $k$ -Cosymplectique

#### 3.3.1 Manifold $k$ -cosymplectique

**Définition** Soit  $M$  une variété différentiable de dimension  $k(n+1) + n$ . Une structure  $k$ -cosymplectique est une famille  $(\eta^A, \Omega^A, V, 1 \leq A \leq k)$  où  $\eta^A \in \Omega^1(M)$ ,  $\Omega^A \in \Omega^2(M)$  et  $V$  est une distribution de dimension  $nk$  sur  $M$ , tel que

1.  $\eta^1 \wedge \dots \wedge \eta^k \neq 0$ ,  $\eta^A|_V = 0$ ,  $\Omega^A|_{V \times V} = 0$ .
2.  $\left( \bigcap_{A=1}^k \ker \eta^A \right) \cap \left( \bigcap_{A=1}^k \ker \Omega^A \right) = \{0\}$ ,  $\dim \left( \bigcap_{A=1}^k \ker \Omega^A \right) = k$ .
3. Les forms  $\eta^A$ ,  $\Omega^A$  sont fermés et  $V$  est intégrable.

Alors  $(M, \eta^A, \Omega^A, V)$  est une variété  $k$ -cosymplectique [14, 19, 22, 23].

Pour chaque  $k$ -cosymplectique structure  $(\eta^A, \Omega^A, V)$  sur  $M$ , il existe une famille de champs  $k$ -vecteurs  $\{R_A\}_{1 \leq A \leq k}$  qui sont appelés des champs de vecteur *Reeb*, caractérisés par les conditions suivantes :

$$i_{R_A} \eta^B = \delta_A^B \quad , \quad i_{R_A} \Omega^B = 0 \quad ; \quad 1 \leq A, B \leq k.$$

où les champs de vecteurs *Reeb* sont  $R_A = \frac{\partial}{\partial t^A}$ ,  $1 \leq A \leq k$ .

**Théorème** (de Darboux): *Si  $M$  est un manifold  $k$ -cosymplectique, alors pour tout point de  $M$ , il existe une carte locale de coordonnées  $(t^A, x^i, p_i^A)$ ,  $1 \leq A \leq k, 1 \leq i \leq n$ , tel que*

$$\eta^A = dt^A, \quad \Omega^A = dx^i \wedge dp_i^A, \quad V = \left( \frac{\partial}{\partial p_i^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial p_i^k} \right)_{i=1, \dots, n}$$

Le modèle canonique pour ces structures géométriques est  $(R^k \times (T_k^1)^* M, \eta^A, \Omega^A, V)$ . Si  $(t^A)$  sont des coordonnées dans  $R^k$  et  $(x^i)$  sont des coordonnées locales sur  $U \subset M$ , alors les coordonnées locales induites  $(t^A, x^i, p_i^A)$  sur  $R^k \times (T_k^1)^* U$  sont donnés par:

$$t^A(t, p_x^1, \dots, p_x^k) = t^A \quad , \quad x^i(t, p_x^1, \dots, p_x^k) = x^i(x) \quad , \quad p_i^A(t, p_x^1, \dots, p_x^k) = p_i^A$$

Si  $t = (t^1, \dots, t^k) \in R^k$ ,  $x \in M$  et  $(t, p_x^1, \dots, p_x^k) \in R^k \times (T_k^1)^* M$ , on a

$$\bar{\pi}_2(t, p_x^1, \dots, p_x^k) = (p_x^1, \dots, p_x^k) \quad , \quad \bar{\pi}_2^A(t, p_x^1, \dots, p_x^k) = (p_x^A)$$

$$\bar{\pi}_M^1(t, p_x^1, \dots, p_x^k) = x \quad , \quad \bar{\pi}_M^A(t, p_x^1, \dots, p_x^k) = t^A$$

$$\bar{\pi}^k(t, p_x^1, \dots, p_x^k) = t \quad , \quad \bar{\pi}^A(t, p_x^1, \dots, p_x^k) = (t^A, p_x^A)$$

La structure canonique  $k$ -cosymplectique dans  $R^k \times (T_k^1)^* M$  est construite par les formes différentielles suivantes

$$\eta^A = (\bar{\pi}_k^A)^* dt^A \quad , \quad \Theta^A = (\bar{\pi}_2^A)^* \theta \quad , \quad \Omega^A = (\bar{\pi}_2^A)^* \omega \quad ; \quad 1 \leq A \leq k$$

Évidemment  $\Omega^A = -d\Theta^A$ . En coordonnées locales, nous avons

$$\eta^A = dt^A \quad , \quad \Theta^A = p_i^A dx^i \quad , \quad \Omega^A = dx^i \wedge dp_i^A \quad , \quad 1 \leq A \leq k \quad (3.3.1.1)$$

Le manifold canonique  $k$ -cosymplectique est  $(R^k \times (T_k^1)^* M, \eta^A, \Omega^A, V)$  où  $V = \ker(\bar{\pi}_0)_*$  et

localement  $V = \left( \frac{\partial}{\partial p_i^A} \right)_{1 \leq A \leq k, 1 \leq i \leq n}$ .

### 3.3.2 Formalisme hamiltonien $k$ -cosymplectique

Considérer le manifold  $k$ -cosymplectique  $(R^k \times (T_k^1)^* M, \eta^A, \Omega^A, V)$  et  $H \in C^\infty(R^k \times (T_k^1)^* M)$  est une fonction Hamiltonienne.  $(R^k \times (T_k^1)^* M, H)$  est appelé un système Hamiltonien  $k$ -cosymplectique. Les équations *HDW* pour ce système sont l'ensemble d'équations différentielles partielles:

$$\frac{\partial H}{\partial x^i} = - \sum_{A=1}^k \frac{\partial \bar{\psi}_i^A}{\partial t^A}$$

et

$$1 \leq A \leq k, 1 \leq i \leq n \quad (3.3.2.1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i^A} = \frac{\partial \bar{\psi}^i}{\partial t^A}$$

où les solutions  $\bar{\psi}(t^A) = (t^A, \bar{\psi}^i(t^A), \bar{\psi}_i^A(t^A))$  sont des sections de la projection  $\bar{\pi}_k : R^k \times (T_k^1)^* M \rightarrow R^k$ .

On désigne par  $\mathcal{X}_H^k(R^k \times (T_k^1)^* M)$  l'ensemble des champs du  $k$ -vecteurs  $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_k)$  sur  $R^k \times (T_k^1)^* M$  qui sont solutions des équations

$$\sum_{A=1}^k i(\bar{\xi}_A) \Omega^A = dH - \sum_{A=1}^k R_A(H) \eta^A, \quad 1 \leq A \leq k \quad (3.3.2.2)$$

Etant donné  $R_A = \frac{\partial}{\partial t^A}$  et  $\eta^A = dt^A$ , ainsi les équations ci-dessus sont localement écrites comme suit :

$$\sum_{A=1}^k i(\bar{\xi}_A) \Omega^A = dH - \sum_{A=1}^k \frac{\partial H}{\partial t^A} dt^A, \quad 1 \leq A \leq k \quad (3.3.2.3)$$

Dans un système de coordonnées locales,  $\bar{\xi}_A$  est donné par localement par :

$$\bar{\xi}_A = \frac{\partial}{\partial t^A} + (\bar{\xi}_A)^i \frac{\partial}{\partial x^i} + (\bar{\xi}_A)^B \frac{\partial}{\partial p_i^B} \quad (3.3.2.4)$$

et en utilisant (3.3.1.1), les équations (3.3.2.2) sont équivalentes au système d'équations

$$\frac{\partial H}{\partial x^i} = - \sum_{A=1}^k (\bar{\xi}_A)^i \quad (3.3.2.5)$$

$$1 \leq A \leq k, 1 \leq i \leq n$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i^A} = (\bar{\xi}_A)^i$$

**Proposition** Soit  $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_k)$  est un champ  $k$ -vecteur intégrable dans  $R^k \times (T_k^1)^* M$  et  $\bar{\psi} : R^k \rightarrow R^k \times (T_k^1)^* M$  une section intégrale de  $\bar{\xi}$ . Alors  $\bar{\psi}(t) = (t, \bar{\psi}^i(t), \bar{\psi}_i^A(t))$  est une solution aux équations HDW (3.3.2.1) si et seulement si  $\bar{\xi} \in \mathcal{X}_H^k(R^k \times (T_k^1)^* M)$  alors,

$$\frac{\partial \bar{\psi}^i}{\partial t^B} = (\bar{\xi}_B)^i$$

et

(3.3.2.6)

$$\frac{\partial \bar{\psi}_i^A}{\partial t^B} = (\bar{\xi}_B)_i^A$$

Par conséquent, en combinant (3.3.2.5) et (3.3.2.6), on trouve les équations HDW (3.3.2.1).

### 3.3.3 Éléments géométriques pour le formalisme lagrangien $k$ -cosymplectique

Soit  $\bar{\tau}_M^1 : R^k \times T_k^1 M \rightarrow M$  la projection canonique. Si  $(x^i)$  sont les coordonnées locales sur  $U \subseteq M$ , alors les coordonnées locales induits  $(t^A, x^i, v_A^i)$  sur  $(\bar{\tau}_M^1)^{-1}(U) = R^k \times T_k^1 U$  sont:

$$t^A(t, v_{1_x}, \dots, v_{k_x}) = t^A, \quad x^i(t, v_{1_x}, \dots, v_{k_x}) = x^i(x), \quad v_A^i(t, v_{1_x}, \dots, v_{k_x}) = v_{A_x}^i(x^i)$$

#### Structure $k$ -tangente canonique

La structure  $k$ -tangente canonique sur  $R^k \times T_k^1 M$  est l'ensemble  $(\bar{S}^1, \dots, \bar{S}^k)$  des tenseurs champs de type  $(1, 1)$  défini localement par:

$$\bar{S}^A = \frac{\partial}{\partial v_A^i} \otimes dx^i$$

#### Champs de vecteurs canoniques

Soit  $\bar{\Delta}$  le champ de vecteur canonique (champ de vecteur de Liouville) sur  $R^k \times T_k^1 M$ . Ce champ de vecteur  $\bar{\Delta}$  est le générateur infinitésimal du flux suivant :

$$\begin{aligned} \psi : R \times R^k \times T_k^1 M &\rightarrow R^k \times T_k^1 M \\ \psi(s, t, v_{1_x}, \dots, v_{k_x}) &= (t, e^s v_{1_x}, \dots, e^s v_{k_x}) \end{aligned}$$

et en coordonnées locales, il a la forme

$$\bar{\Delta} = \sum_{i=1}^n \sum_{A=1}^k v_A^i \frac{\partial}{\partial v_A^i} = \sum_{i=1}^n \bar{\Delta}_A \quad 1 \leq A \leq k.$$

### 3.3.4 Formulation géométrique pour le formalisme lagrangien $k$ -cosymplectique

Soit  $L \in C^\infty(R^k \times T_k^1 M)$  une fonction Lagrangien (i.e  $L : R^k \times T_k^1 M \rightarrow R$ ).

Soit  $\Theta_L^A$  la 1-forme définie sur  $R^k \times T_k^1 M$ ,  $1 \leq A \leq k$ , est introduite en utilisant la structure

$k$ -tangent de  $R^k \times T_k^1 M$ , comme suit :

$$\Theta_L^A = dL \circ \bar{S}^A \quad 1 \leq A \leq k,$$

qui est donnée localement par :

$$\Theta_L^A = \frac{\partial L}{\partial v_A^i} dx^i \quad (3.3.4.1)$$

Si nous dénotons par  $\Omega_L^A = -d\Theta_L^A$ , en coordonnées locales, on a

$$\Omega_L^A = dx^i \wedge d\left(\frac{\partial L}{\partial v_A^i}\right) = \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial v_A^i} dx^i \wedge dx^j + \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^j \partial v_A^i} dx^i \wedge dv_B^j + \frac{\partial^2 L}{\partial t^B \partial v_A^i} dx^i \wedge dt^B \quad (3.3.4.2)$$

Soit  $\bar{E}_L$  la fonction Lagrangien d'énergie [14, 19] associé à  $L$ ,  $\bar{E}_L \in C^\infty(R^k \times T_k^1 M)$ , comme  $\bar{E}_L = \bar{\Delta}(L) - L$ , dont l'expression locale est :

$$\bar{E}_L = v_A^i \frac{\partial L}{\partial v_A^i} - L \quad (3.3.4.3)$$

L'application Legendre  $FL : R^k \times T_k^1 M \rightarrow R^k \times (T_k^1)^* M$  est donnée localement par :

$$FL : (t^A, x^i, v_A^i) \rightarrow \left( t^A, x^i, \frac{\partial L}{\partial v_A^i} = p_A^i \right) \quad (3.3.4.4)$$

A partir de (3.3.1.1) et (3.3.4.4), on obtient

$$\Theta_L^A = FL^* \Theta^A, \quad \Omega_L^A = FL^* \Omega^A, \quad 1 \leq A \leq k \quad (3.3.4.5)$$

où  $FL^*$  est un pull back de  $FL$ .

Le Lagrangien  $L = L(t^A, x^i, v_A^i)$  est régulier si la matrice n'est  $\left( \frac{\partial^2 L}{\partial v_A^i \partial v_B^j} \right)$  pas singulière en

chaque point de  $R^k \times T_k^1 M$ . Alors, on déduit la proposition suivante:

**Proposition** Soit  $L \in C^\infty(R^k \times T_k^1 M)$  est un Lagrangian. Les conditions suivantes sont équivalentes:

- 1-  $L$  est régulier.
- 2-  $FL$  est un diffeomorphism local.
- 3-  $(R^k \times T_k^1 M, dt^A, \Omega_L^A, V)$ , où  $V = \ker(\bar{\tau}_0)_*$ , est un manifold  $k$ -cosymplectic.

Une fonction Lagrangien  $L$  est dite *hyperregular* si la carte de Legendre  $FL$  associée est



un difféomorphisme global. Si  $L$  est régulier,  $(R^k \times T_k^1 M, L)$  est dit un système Lagrangien  $k$ -cosymplectique. Si  $L$  n'est pas régulier,  $(R^k \times T_k^1 M, L)$  est un système Lagrangien  $k$ -precosymplectique.

Les équations d'Euler-Lagrange sont (3.2.3.13), mais maintenant le Lagrangien est  $L = L(t^A, x^i, v_A^i)$ , et leurs solutions sont les sections  $\bar{\varphi} : R^k \rightarrow R^k \times T_k^1 M$  qui sont les premiers prolongements à  $R^k \times T_k^1 M$  des sections  $\phi : R^k \rightarrow M$ ; c'est à dire,  $\bar{\varphi}$  sont holonomes. Cela veut dire que  $\bar{\varphi} = \phi^{[1]}$  où

$$\begin{aligned} \phi^{[1]} : R^k &\rightarrow R^k \times T_k^1 M \\ t &\rightarrow \phi^{(1)}(t) = \left( t, \phi_*(t) \left( \frac{\partial}{\partial t^1} \Big|_t \right), \dots, \phi_*(t) \left( \frac{\partial}{\partial t^k} \Big|_t \right) \right) \end{aligned}$$

En outre, on dénote par  $\mathcal{X}_L^k(R^k \times T_k^1 M)$  l'ensemble des champs  $k$ -vecteurs  $\bar{\xi}_L = (\bar{\xi}_L^1, \dots, \bar{\xi}_L^k)$  sur  $R^k \times T_k^1 M$  qui sont solutions aux équations

$$\sum_{A=1}^k i(\bar{\xi}_L^A)_L \Omega_L^A = d\bar{E}_L + \sum_{A=1}^k \frac{\partial L}{\partial t^A} dt^A, \quad 1 \leq A \leq k \quad (3.3.4.6)$$

Dans un système local de coordonnées naturelles, si

$$\bar{\xi}_L^A = \frac{\partial}{\partial t^A} + (\bar{\xi}_L^A)^i \frac{\partial}{\partial x^i} + (\bar{\xi}_L^A)^j_B \frac{\partial}{\partial v_B^j} \quad (3.3.4.7)$$

Alors  $\bar{\xi}_L$  est une solution de (3.3.4.6) si et seulement si  $(\bar{\xi}_L^A)^i$  and  $(\bar{\xi}_L^A)^j_B$  satisfont

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial t^A \partial v_A^i} (\bar{\xi}_L^A)^i &= \frac{\partial^2 L}{\partial t^A \partial v_A^i} v_A^i, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^j \partial v_A^i} (\bar{\xi}_L^A)^i = \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^j \partial v_A^i} v_A^i \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial v_A^j} \left( (\bar{\xi}_L^A)^j - v_A^j \right) &- (\bar{\xi}_L^A)^j \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial v_A^i} - (\bar{\xi}_L^A)^j_B \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^j \partial v_A^i} + \frac{\partial^2 L}{\partial t^A \partial v_A^i} + \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0 \end{aligned} \quad (3.3.4.8)$$

Quand  $L$  est régulier, on impose que  $(\bar{\xi}_L^A)^i = v_A^i$ , et la dernière équation peut être écrite comme suit

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t^A \partial v_A^i} + (\bar{\xi}_L^A)^j \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial v_A^i} + (\bar{\xi}_L^A)^j_B \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^j \partial v_A^i} = \frac{\partial L}{\partial x^i} \quad (3.3.4.9)$$

alors  $\bar{\xi}_L$  est un SOPDE, et par conséquent si  $\bar{\xi}_L$  est intégrable, ses sections intégrales sont holonomes et elles sont solutions aux équations d'Euler-Lagrange. Si  $L$  n'est pas régulier, l'existence des solutions aux équations (3.2.3.13) pour  $L$  ou à (3.3.4.6) n'est pas assuré en général, sauf dans une sous-variété  $R^k \times T_k^1 M$ .

### 3.4 Géométrie multisymplectique

#### 3.4.1 Manifold multisymplectique et les champs multivecteurs hamiltoniens

Soit  $E$  une variété différentiable de dimension  $m$  et notons par  $\Lambda^k T^*E$  le bundle des  $k$ -formes extérieures sur  $E$  avec la projection canonique  $\rho_k : \Lambda^k T^*E \rightarrow E$ . On note que  $\Lambda^1 T^*E \equiv T^*E$ .

Une extension directe de la construction de la 1-forme canonique de Liouville sur un fibré cotangent est qu'il existe un  $k$ -forme canonique  $\theta_E$  et  $(k+1)$ -forme  $\Omega_E$  sur le multicotangent  $\Lambda^k T^*E$  défini par [19, 35]

$$\Omega_E = -d\theta_E \quad (3.4.1.1)$$

Prenant les coordonnées du bundle  $(x^i, p_{i_1 \dots i_k})$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$ , sur  $\Lambda^k T^*E$ , on a

$$\theta_E = p_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \quad , \quad \Omega_E = -dp_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \quad (3.4.1.2)$$

Supposons que  $E$  lui-même est fibrée au-dessus d'une variété  $M$ , avec la projection  $\pi : E \rightarrow M$ . Pour tout  $r$ , avec  $0 \leq r \leq k$ , soit  $\Lambda_r^k T^*E$  désigne l'ensemble des  $k$ -formes sur  $E$  qui disparaît par l'action de  $(r)$   $\pi$ -champs de vecteurs verticaux. De toute évidence, est  $\Lambda_r^k T^*E$  un sous-fibré vectoriel de  $\Lambda^k T^*E$  et on notera par la carte d'inclusion :

$$i_{k,r} : \Lambda_r^k T^*E \rightarrow \Lambda^k T^*E$$

La restriction de  $\theta_E$  et  $\Omega_E$  à  $\Lambda_r^k T^*E$  qui sera dénotée par  $\theta_E^r$  et  $\Omega_E^r$  respectivement; c'est à dire

$$\theta_E^r = i_{k,r}^* \theta_E, \quad \Omega_E^r = i_{k,r}^* \Omega_E, \quad \text{and} \quad \Omega_E^r = -d\theta_E^r. \quad (3.4.1.3)$$

Sur la base des propriétés des  $(k+1)$ -formes  $\Omega_E$  et  $\Omega_E^r$ , la définition suivante est introduite :

**Définition:** Le couple  $(M, \Omega)$ , avec  $\Omega \in \Omega^{m+1}(M)$ , est un manifold multisymplectique si  $\Omega$  est fermé et 1-non dégénéré; autrement dit, pour chaque  $p \in M$  et  $X_p \in T_p M$ , on a alors  $i(X_p)\Omega_p = 0$  si et seulement si  $X_p = 0$ .

Bien sûr les manifolds  $(\Lambda^k T^*E, \Omega_E)$  et  $(\Lambda_r^k T^*E, \Omega_E^r)$ ,  $0 \leq r \leq k$ , sont des multisymplectiques.

Si  $(M, \Omega)$  est manifold multisymplectique,  $X \in X^k(M)$  est dit un champ Hamiltonien  $k$ -multivecteur si  $i(X)\Omega$  est un exact  $(m+1-k)$ -forme; autrement dit, il existe  $\zeta \in \Omega^{m-k}(M)$  tel que

$$i(X)\Omega = d\zeta \quad (3.4.1.4)$$

Le champ multivecteur  $\zeta$  est défini modulo  $(m-k)$ -formes fermées. La classe  $\{\zeta\}$  définie par  $\zeta$  est appelée l'Hamiltonien pour  $X$ , et chaque élément dans cette classe  $\hat{\zeta} \in \{\zeta\}$  est dit être une forme Hamiltonienne pour  $X$ . En outre,  $X$  est dit être un champ Hamiltonien  $k$ -multivecteur locale si  $i(X)\Omega$  est une  $(m+1-k)$ -forme fermée. Dans ce cas, pour tout point  $x \in M$ , il ya un voisinage ouvert  $W \subset M$  et  $\zeta \in \Omega^{m-k}(W)$  tel que

$$i(X)\Omega = d\zeta \quad (\text{sur } W)$$

Inversement,  $\zeta \in \Omega^k(M)$  est dit être une  $k$ -forme Hamiltonienne (resp. un Hamiltonien  $k$ -forme local) s'il existe un champ multivecteur  $X \in X^{m-k}(M)$  (resp.  $X \in X^{m-k}(W)$ ) tel que (3.4.1.4) est vérifiée (resp. sur  $W$ ). En particulier, quand  $k=0$ , i.e. si  $\zeta \in C^\infty(M)$ , alors l'existence d'un champ Hamiltonien  $m$ -multivector pour  $\zeta$  être assuré.

### 3.4.2 Formalisme multisymplectique de la théorie de champs

#### Multimomentum bundles

Les manifolds multisymplectiques particuliers qui se rapportent dans la théorie des champs sont dits les multimomentum bundles : soit  $\pi: E \rightarrow M$  un faisceau de fibres ( $\dim M = k, \dim E = n+k$ ), où  $M$  est un manifold orienté dont la forme volume  $\omega \in \Omega^k(M)$ , et notons par  $(t^A, x^i)$ , où  $1 \leq A \leq k, 1 \leq i \leq n$ , les coordonnées naturelles dans  $E$  adaptées au bundle tel que  $\omega = dt^1 \wedge \dots \wedge dt^k \equiv d^k t$ . Tout d'abord, on a  $\Lambda^k T^* E \equiv M\pi$ , il est le faisceau de  $k$ -formes sur  $E$  qui disparaît par l'action de deux  $\pi$ -champs Verticaux. Ceci est appelé le faisceau multimomentum prolongé [19, 30, 35], et ses submersion canoniques sont désignés par :

$$\kappa: M\pi \rightarrow E \quad ; \quad \bar{\kappa} = \pi \circ \kappa: M\pi \rightarrow M$$

$M\pi$  est un sous-fibré de  $\Lambda^k T^* E$  qui est le faisceau multicotangent de  $E$  d'ordre  $k$  (le faisceau de  $k$ -formes en  $E$ ). Alors  $M\pi$  est doté de formes canoniques.

Ainsi, la forme multisymplectique

$$\Omega = -d\theta \in \Omega^{k+1}(M\pi) \quad (3.4.2.1)$$

Les formes  $\theta$  et  $\Omega$  sont connues comme Liouville multimomentum  $k$  et  $(k+1)$ -formes.

Les coordonnées naturelles, introduites dans  $M\pi$  adaptées au faisceau  $\pi: E \rightarrow M$ , sont désignées par  $(t^A, x^i, p_i^A, p)$  et  $\omega = d^k t$ . Alors les expressions locales des formes  $\theta$  et  $\Omega$  sont:

$$\theta = p_i^A dx^i \wedge d^{k-1} t_A + p d^k t \quad (3.4.2.2)$$

$$\Omega = -dp_i^A \wedge dx^i \wedge d^{k-1} t_A - dp \wedge d^k t$$

$$\text{où } d^{k-1}t_A = i\left(\frac{\partial}{\partial t^A}\right)d^k t$$

Considérons  $\Lambda_1^k T^* E \equiv \pi^* \Lambda^k T^* M$  un autre bundle qui est au dessus de  $E$  et dont les sections sont les  $\pi$ -semibasic  $k$ -formes sur  $E$  et notons par  $J^1 \pi^*$  le quotient  $\Lambda_2^k T^* E / \Lambda_1^k T^* E$ .  $J^1 \pi^*$  est généralement appelé le faisceau de multimomentum restreint associé à l'ensemble  $\pi : E \rightarrow M$ . Les coordonnées naturelles dans  $J^1 \pi^*$  sont désigné par  $(t^A, x^i, p_i^A)$ .

On fait la remarque suivante que les coordonnées locales définies sur  $\Lambda_1^k T^* E$  sont  $(t^A, x^i, p)$  et les éléments de  $\Lambda_1^k T^* E$  peuvent être écrits par  $p d^k t$ .

Les submersions naturelles associées à  $J^1 \pi^*$  sont :

$$\tau : J^1 \pi^* \rightarrow E \quad ; \quad \bar{\tau} = \pi \circ \tau : J^1 \pi^* \rightarrow M$$

En outre, la submersion naturelle  $\mu : M\pi \rightarrow J^1 \pi^*$  dote  $M\pi$  avec la structure d'un faisceau affine sur  $J^1 \pi^*$ , avec  $\tau^* \Lambda_1^m T^* E$  comme le fibré vectoriel associé.

On a le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} M\pi & \xrightarrow{\mu} & J^1 \pi^* \\ \cdot \cdot \kappa & & \tau \cdot \cdot \\ \bar{\kappa} & E & \bar{\tau} \\ \pi \downarrow & & \\ & & M \end{array}$$

### 3.4.3 Systèmes hamiltoniens dans $J^1 \pi^*$

#### Systèmes hamiltoniens restreints

**Définition** *Considérons le faisceau  $\bar{\tau} : J^1 \pi^* \rightarrow M$ .*

1 - Une section  $h : J^1 \pi^* \rightarrow M\pi$  de la projection  $\mu$  est appelée une section Hamiltonienne de  $\mu$ .

2 - Les formes différentiables:

$$\theta_h = h^* \theta \tag{3.4.3.1}$$

$$\Omega_h = -d\theta_h = h^* \Omega$$

Ces formes sont appelées  $k$  et  $(k+1)$  formes de Hamilton-Cartan de  $J^1 \pi^*$  qui sont associés à la section Hamiltonienne  $h$ .

3 - le couple  $(J^1 \pi^*, h)$  est dit être un système Hamiltonien restreint (ou seulement système Hamiltonien).

Dans une carte locale de coordonnées naturelles, une section Hamiltonienne est spécifiée par une fonction Hamiltonienne locale  $h \in C^\infty(U), U \subset J^1\pi^*$  [19, 30], tel que

$$h(t^A, x^i, p_i^A) \equiv (t^A, x^i, p_i^A, p = -h(t^A, x^i, p_i^A)).$$

Les expressions locales des formes de Hamilton-Cartan associées à  $h$  sont:

$$\theta_h = p_i^A dx^i \wedge d^{k-1}t_A + h d^k t \quad (3.4.3.2)$$

et

$$\Omega_h = -dp_i^A \wedge dx^i \wedge d^{k-1}t_A - dh \wedge d^k t$$

**Remarque** on note que  $\Omega_h$  est non-dégénérée; alors  $\Omega_h$  est une forme multisymplectique.

### Principe variationnel et Equations de champ

**Définition** Soit  $(J^1\pi^*, h)$  est un système hamiltonien restreint. Soit  $\Gamma(M, J^1\pi^*)$  l'ensemble des sections de  $\bar{\tau}$ . Considérons la carte

$$\begin{aligned} H : \Gamma(M, J^1\pi^*) &\rightarrow R \\ \psi &\rightarrow \int_M \psi^* \theta_h \end{aligned}$$

(où la convergence de l'intégrale est assumée). Le problème variationnel [33, 34] pour ce système hamiltonien restreint est la recherche des sections critiques (ou stationnaires) de la fonctionnelle  $H$  par rapport aux variations de  $\psi$  donné par  $\psi_t = \sigma_t \circ \psi$ , où  $\{\sigma_t\}$  est un groupe à un-paramètre local avec un support compact  $Z \in \mathcal{X}^{V(\bar{\tau})}(J^1\pi^*)$  (où  $\mathcal{X}^{V(\bar{\tau})}(J^1\pi^*)$  représente le module des champs de vecteurs verticaux  $\bar{\tau}$  dans  $J^1\pi^*$ ), cela veut dire:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \int_M \psi_t^* \theta_h = 0$$

Ceci est dit *le principe de Hamilton-Jacobi* du formalisme hamiltonien.

Il suit ce théorème fondamental:

**Théorème** Soit  $(J^1\pi^*, h)$  est un système hamiltonien restreint. Les assertions suivantes sur une section  $\psi \in \Gamma(M, J^1\pi^*)$  sont équivalentes:

1.  $\psi$  est une section critique pour le problème variationnel posé par le principe de Hamilton-Jacobi.
2.  $\psi^* i(Z)\Omega_h = 0$  pour tout  $Z \in \mathcal{X}^{V(\bar{\tau})}(J^1\pi^*)$ .
3.  $\psi^* i(X)\Omega_h = 0$  pour tout  $X \in \mathcal{X}^{V(\bar{\tau})}(J^1\pi^*)$ .
4. Si  $(U; t^A, x^i, p_i^A)$  est un système naturel de coordonnées dans  $J^1\pi^*$ , alors  $\psi$  satisfait le

système d'équations suivant dans  $U$ :

$$\frac{\partial(x^i \circ \psi)}{\partial t^A} = \frac{\partial h}{\partial p_i^A} \circ \psi \equiv \frac{\partial h}{\partial p_i^A} \Big|_{\psi} \quad (3.4.3.3)$$

$$\frac{\partial(p_i^A \circ \psi)}{\partial t^A} = -\frac{\partial h}{\partial x^i} \circ \psi \equiv -\frac{\partial h}{\partial x^i} \Big|_{\psi}$$

où  $h$  une fonction hamiltonienne locale. Les équations (3.4.3.3) sont connues comme les équations de Hamilton-de Donder-Weyl (HDW) du système hamiltonien restreint.

(1  $\Leftrightarrow$  2) On assume que  $\partial U$  est un manifold de dimension  $(k-1)$  et que  $\bar{\tau}(\text{sup } p(Z)) \subset U$ , pour tout support compact  $Z \in \mathcal{X}^{V(\bar{\tau})}(J^1\pi^*)$ . Alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_U \psi_t^* \theta_h &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_U \psi^*(\sigma_t^* \theta_h) = \int_U \psi^* \left( \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sigma_t^* \theta_h - \theta_h}{t} \right) \\ &= \int_U \psi^*(L(Z)\theta_h) = \int_U \psi^*(i(Z))d\theta_h = \int_U \psi^*(i(Z)d\theta_h + di(Z)\theta_h) \\ &= -\int_U \psi^*(i(Z)\Omega_h - di(Z)\theta_h) = -\int_U \psi^*(i(Z)\Omega_h) + \int_U d[\psi^*(i(Z)\theta_h)] \\ &= -\int_U \psi^*(i(Z)\Omega_h) + \int_{\partial U} \psi^*(i(Z)\theta_h) = -\int_U \psi^*(i(Z)\Omega_h) = 0 \end{aligned}$$

(A la suite du théorème de stocks et l'hypothèse faite sur les supports des champs verticaux).

Ainsi, en utilisant le théorème fondamental du calcul variationnel, on conclut que

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_M \psi_t^* \theta_h = 0 \Leftrightarrow \psi^*(i(Z)\Omega_h) = 0$$

pour chaque  $Z \in \mathcal{X}^{V(\bar{\tau})}(J^1\pi^*)$ .

(2  $\Leftrightarrow$  3) Si  $p \in \text{Im } \psi$ , alors  $T_p J^1\pi^* = V_p(\bar{\tau}) \oplus T_p(\text{Im } \psi)$ . Donc, si  $X \in \mathcal{X}(J^1\pi^*)$

$$\text{alors } X_p = (X_p - T_p(\psi \circ \bar{\tau})(X_p)) + T_p(\psi \circ \bar{\tau})(X_p) \equiv X_p^V + X_p^\psi$$

et par conséquent

$$\psi^*(i(X)\Omega_h) = \psi^*(i(X^V)\Omega_h) + \psi^*(i(X^\psi)\Omega_h) = \psi^*(i(X^\psi)\Omega_h) = 0$$

Puisque  $\psi^*(i(X^V)\Omega_h) = 0$  la condition citée ci-dessus, en outre  $X_p^\psi \in T_p(\text{Im } \psi)$  et

$\dim(\text{Im } \psi) = k / \Omega_h \in \Omega^{k+1}(J^1\pi^*)$ . Par conséquent, on conclut que  $\psi^*(i(X)\Omega_h) = 0$  pour chaque  $X \in \mathcal{X}(J^1\pi^*)$ .

$$(3 \Leftrightarrow 4) \text{ If } X = \alpha^A \frac{\partial}{\partial t^A} + \beta^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \gamma_i^A \frac{\partial}{\partial p_i^A} \in \mathcal{X}(J^1\pi^*),$$

en tenant compte de l'expression locale (3) de  $\Omega_h$ , on a :

$$\begin{aligned} i(X)\Omega_h = & -\alpha^B \left( dp_i^A \wedge dx^i \wedge d^{k-2}t_{BA} + \frac{\partial h}{\partial p_i^A} dp_i^A \wedge d^{k-1}t_B + \frac{\partial h}{\partial x^i} dx^i \wedge d^{k-1}t_B - \frac{\partial h}{\partial t^B} d^k t \right) \\ & + \beta^i \left( dp_i^A \wedge d^{k-1}t_A + \frac{\partial h}{\partial x^i} d^k t \right) + \gamma_i^A \left( -dx^i \wedge d^{k-1}t_A + \frac{\partial h}{\partial p_i^A} d^k t \right) \end{aligned}$$

si  $\psi = (t^A, x^i(t^B), p_i^A(t^B))$ , alors

$$\begin{aligned} \psi^* i(X)\Omega = & -\alpha^B \left( \frac{\partial(p_i^A \circ \psi)}{\partial t^A} \frac{\partial(x^i \circ \psi)}{\partial t^B} + \frac{\partial h}{\partial x^i} \Big|_{\psi} \frac{\partial(x^i \circ \psi)}{\partial t^B} + \frac{\partial h}{\partial p_i^A} \Big|_{\psi} \frac{\partial(p_i^A \circ \psi)}{\partial t^A} - \frac{\partial h}{\partial t^B} \right) d^k t \\ & + \beta^i \left( \frac{\partial(p_i^A \circ \psi)}{\partial t^A} + \frac{\partial h}{\partial x^i} \Big|_{\psi} \right) d^k t + \gamma_i^A \left( -\frac{\partial(x^i \circ \psi)}{\partial t^B} + \frac{\partial h}{\partial p_i^A} \Big|_{\psi} \right) d^k t \end{aligned}$$

comme cela est vrai pour chaque  $X \in \mathcal{X}(J^1\pi^*)$ , on conclut que  $\psi^*(i(X)\Omega_h) = 0$ , si et seulement si, les équations de Hamilton De-Donder-Weyl maintiennent pour  $\psi$ .

### Équations hamiltoniennes pour les champs multivecteurs

Soit  $(J^1\pi^*, h)$  est un système hamiltonien restreint. Le problème de trouver des solutions sections critiques du principe Hamilton-Jacobi peut être formulé de manière équivalente comme suit: pour trouver une distribution  $D$  of  $T(J^1\pi^*)$  satisfaisant:

1.  $D$  est  $k$ -dimensionnel.
2.  $D$  est  $\bar{\tau}$ -transverse.
3.  $D$  est intégrable (il est involutif).
4. Les variétés intégrables de  $D$  sont les sections critiques du principe Hamilton-Jacobi.

Cependant, ces types de distributions sont associées aux classes de champs multivecteurs intégrables (i.e., non nulle, localement décomposables et involutifs) et  $\bar{\tau}$ -transversaux dans  $J^1\pi^*$ . L'expression locale en coordonnées naturelles d'un élément d'une de ces classes est

$$X = \bigwedge_{A=1}^k f^A \left( \frac{\partial}{\partial t^A} + F_A^i \frac{\partial}{\partial x^i} + G_{AB}^i \frac{\partial}{\partial p_B^i} \right) \quad (3.4.3.4)$$

où  $f \in C^\infty(J^1\pi^*)$  est une fonction non nulle.

Par conséquent, le problème posé par le principe de Hamilton-Jacobi peut être énoncé de la façon suivante:

**Théorème** Soit  $(J^1\pi^*, h)$  un système hamiltonien restreint, et  $\{\mathcal{X}\} \subset \mathcal{X}^k(J^1\pi^*)$  est une classe de champs multivecteurs  $\bar{\tau}$ -transversaux et intégrables. Alors, les variétés intégrales de  $\{\mathcal{X}\}$  sont des sections critiques pour le problème variationnel posé par le principe de Hamilton-Jacobi si et seulement si [30],

$$i(\mathcal{X}_h)\Omega_h = 0 \quad , \quad \forall \mathcal{X}_h \in \{\mathcal{X}_h\} \quad (3.4.3.5)$$

**Remarque** La condition de  $\bar{\tau}$ -transversalité pour multivecteurs champs solutions de (3.4.3.5) peut être dit en exigeant que  $i(\mathcal{X}_h)(\bar{\tau}^*\omega) \neq 0$ . En particulier, si on prend  $i(\mathcal{X}_h)(\bar{\tau}^*\omega) = 1$ , on choisit un représentant de la classe des champs multivecteurs  $\bar{\tau}$ -transversaux solutions à (3.4.3.5). (Ceci est équivalent à mettre  $f = 1$  dans l'expression locale (3.4.3.4)).

Ainsi, le problème posé est de chercher un champ multivecteur  $\mathcal{X}_h \in \mathcal{X}^m(J^1\pi^*)$  tel que :

1.  $i(\mathcal{X}_h)\Omega_h = 0$ .
2.  $i(\mathcal{X}_h)(\bar{\tau}^*\omega) = 1$ .
3.  $\mathcal{X}_h$  est intégrable.

Des conditions 1 et 2 et en utilisant les expressions locales (3.4.3.2) de  $\Omega_h$  et (3.4.3.4) pour  $\mathcal{X}_h$ , on obtient que  $f = 1$  et

$$F_A^i = \frac{\partial h}{\partial p_A^i} \quad ; \quad G_{iA}^B = -\frac{\partial h}{\partial x^i} \quad (3.4.3.6)$$

et si  $\psi(x) = (x^\nu, y^A(x^\nu), p_A^\nu(x^\nu))$  doit être une section intégrale de  $\mathcal{X}_h$ , alors

$$\frac{\partial(x^i \circ \psi)}{\partial t^A} = F_A^i \circ \psi \quad ; \quad \frac{\partial(p_i^B \circ \psi)}{\partial t^A} = G_{iA}^B \circ \psi \quad (3.4.3.7)$$

Par conséquent les équations de Hamilton-de Donder-Weyl (3.4.3.3) pour  $\psi$  sont récupérés à partir de (3.4.3.5) [30].

**Remarque** Les classes des champs multivecteurs localement décomposables et  $\bar{\tau}$ -transversaux sont en correspondance un à un avec des connexions dans le faisceau



$\bar{\tau} : J^1\pi^* \rightarrow M$ . Par conséquent, il peut être prouvé que la condition énoncée dans le théorème 3.4.3 est équivalente à trouver une intégrable connexion  $\nabla_h$  dans  $J^1\pi^* \rightarrow M$  satisfaisant l'équation

$$i(\nabla_h)\Omega_h = (m-1)\Omega_h$$

et dont les sections intégrales sont les sections critiques du problème Hamilton-Jacobi. Bien sûr,  $\nabla_h$  est la connexion associée à la classe  $\{\chi_h\}$  solution de (3.4.3.5), et  $\chi_h$  est intégrable si et seulement si la courbure  $\nabla_h$  s'anulle partout.

L'expression de  $\nabla_h$  en coordonnées est

$$\nabla_h = dx^A \otimes \left( \frac{\partial}{\partial t^A} + F_A^i \frac{\partial}{\partial x^i} + G_{AB}^i \frac{\partial}{\partial p_B^i} \right)$$

**Définition**  $\chi_h \in \mathcal{X}^m(J^1\pi^*)$  est appelé un champ multivecteur de Hamilton-de Donder-Weyl (HDW) pour le système  $(J^1\pi^*, h)$  s'il est  $\bar{\tau}$ -transversal, localement décomposable et vérifie l'équation  $i(\chi_h)\Omega_h = 0$ . Alors, la connexion associée  $\nabla_h$  est appelée une connexion de Hamilton-de Donder-Weyl (HDW) pour  $(J^1\pi^*, h)$ .

Pour les systèmes hamiltoniens restreints l'existence de champs ou de connexions multivecteurs de Hamilton-De Donder-Weyl est garantie, bien qu'ils ne soient pas nécessairement intégrables.

### 3.4.4 Formalisme lagrangien

#### Systèmes lagrangiens

Une théorie de champ classique de premier ordre est décrite par les éléments suivants: En premier, on a la configuration de faisceau de fibres  $\pi : E \rightarrow M$ , avec  $\dim M = k$  et  $\dim E = n+k$  où  $M$  est un manifold orienté et dont la forme volume  $\omega \in \Omega^k(M)$ .  $\pi^1 : J^1\pi \rightarrow E$  est le jet bundle du premier ordre de sections locales de  $\pi$ . Il est également un faisceau au-dessus de  $M$  avec la projection  $\bar{\pi}^1 = \pi \circ \pi^1 : J^1\pi \rightarrow M$ , et  $\dim J^1\pi = nk + n + k$ . On désigne par  $(t^A, x^i, v_A^i)$ , où  $A = 1, \dots, k; i = 1, \dots, n$ , les coordonnées naturelles dans  $J^1\pi$  adaptées à la structure du faisceau tel que  $\omega = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k \equiv d^k x$ . En second, on donne la densité de Lagrange sur  $\bar{\pi}^1$  qui est un  $m$ -forme semi-basique sur  $J^1\pi$  et par conséquent elle peut être exprimée comme  $L = L(\bar{\pi}^1 \omega)$ , où  $L \in C^\infty(J^1\pi)$  est la fonction de Lagrange associée à  $L$  et  $\omega$  [14, 19, 27, 29].

Le bundle  $J^1\pi$  est doté d'une structure canonique  $\nu \in (J^1\pi) \otimes \Gamma(J^1\pi, \mathbb{V}(\pi^1)) \otimes \Gamma(J^1\pi, \bar{\pi}^{1*}TM)$  qui est appelé endomorphisme verticale [14, 46] ( $\mathbb{V}(\pi^1)$  désigne ici le sous-fibré vertical par rapport à la projection  $\pi^1$  et  $\Gamma(J^1\pi, \mathbb{V}(\pi^1))$  l'ensemble des sections dans le bundle correspondant).

Alors les formes  $k$  et  $(k+1)$  de Poincaré-Cartan associées à  $L$  sont définies par:

$$\theta_L := i(\nu)L + L \in \Omega^k(J^1\pi) \quad ; \quad \Omega_L := -d\theta_L \in \Omega^{k+1}(J^1\pi)$$

Nous avons les expressions locales suivantes avec  $d^{k-1}t_A \equiv i\left(\frac{\partial}{\partial t^A}\right)d^k t$ :

$$\begin{aligned} \theta_L &= \frac{\partial L}{\partial v_A^i} dx^i \wedge d^{k-1}t_A - \left( \frac{\partial L}{\partial v_A^i} v_A^i - L \right) d^k x \\ \Omega_L &= -\frac{\partial^2 L}{\partial v_A^i \partial v_B^j} dv_A^i \wedge dx^j \wedge d^{k-1}t_B - \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial v_B^j} dx^i \wedge dx^j \wedge d^{k-1}t_B + \\ &\quad \frac{\partial^2 L}{\partial v_A^i \partial v_B^j} v_B^j dv_A^i \wedge d^k t + \left( \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial v_B^j} v_B^j - \frac{\partial L}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 L}{\partial t^B \partial v_B^j} \right) dx^i \wedge d^k t \end{aligned} \quad (3.4.4.1)$$

**Définition**  $(J^1\pi, \Omega_L)$  est appelé le système de Lagrange.

Le système Lagrangien et la fonction de Lagrange est dit régulier si  $\Omega_L$  une  $(k+1)$ -forme multisymplectique (i.e.; 1-nondegenerate). Par ailleurs, ils sont singuliers (ou non-réguliers).

La condition de la régularité est localement équivalente à:

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial v_A^i \partial v_B^j}(\bar{y})\right) \neq 0, \forall \bar{y} \in J^1\pi \quad (3.4.4.2)$$

### Equations de champ de Lagrange

Les équations du champ Lagrange peuvent être dérivées d'un principe variationnel [32].

**Définition** Soit  $(J^1\pi, \Omega_L)$  un système Lagrangien. Soit  $\Gamma(M, E)$  l'ensemble de sections de  $\pi$ .

Considérons l'application

$$\begin{aligned} L: \quad \Gamma(M, E) &\rightarrow R \\ \phi &\rightarrow \int_M (j^1\phi)^* \theta_L \end{aligned}$$

(où la convergence de l'intégrale est présumée). Le problème variationnel [14, 28] pour ce système de Lagrange est de rechercher les sections critiques (ou stationnaires) de la fonctionnelle  $L$ , par rapport aux variations de  $\phi$  données par  $\phi_t = \sigma_t \circ \phi$ , où  $\{\sigma_t\}$  est un groupe à un paramètre local d'un support compact  $Z \in \mathcal{X}^{\nu(\pi)}(E)$  (où  $\mathcal{X}^{\nu(\pi)}(E)$  dénote le module des champs du vecteur  $\pi$ -verticaux dans  $E$ ), autrement dit:

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_M (j^1 \phi_t)^* \theta_L = 0$$

Ceci est dit *le principe de Hamilton* du formalisme lagrangien.

Le Hamilton principe est équivalent à trouver une distribution  $D$  dans  $J^1\pi$  tel que :

1.  $D$  est  $k$ -dimensionnel.
2.  $D$  est  $\bar{\pi}^1$ -transversal.
3.  $D$  est intégrable ( $D$  est involutif).
4. Les variétés intégrales de  $D$  sont les liftings canoniques au  $J^1\pi$  des sections critiques du principe de Hamilton.

Une distribution  $D$  qui satisfait 1 et 2 est associé à une connexion dans le bundle  $\bar{\pi}^1 : J^1\pi \rightarrow M$  (intégrable si 3 est maintenue) dont l'expression locale est :

$$\nabla = dt^A \otimes \left( \frac{\partial}{\partial t^A} + F_A^i \frac{\partial}{\partial x^i} + G_{AB}^i \frac{\partial}{\partial v_B^i} \right)$$

En outre, ces types de distributions intégrables et les connexions correspondantes sont associées à des classes de champs  $k$ -multivecteurs  $\bar{\pi}^1$ -transversaux et intégrables (ie, non nuls localement décomposables et involutifs) dans  $J^1\pi$ . Si le point 2 est vérifié, l'expression locale en coordonnées naturelles d'un élément de l'un de ces classes [19] est

$$X = \bigwedge_{A=1}^k f^A \left( \frac{\partial}{\partial t^A} + F_A^i \frac{\partial}{\partial x^i} + G_{AB}^i \frac{\partial}{\partial v_B^i} \right), \quad (f \in C^\infty(J^1\pi))$$

Si, en plus, les sections intégrales sont holonomes (ce qui signifie qu'elles sont des levées canoniques des sections de  $\pi : E \rightarrow M$ ), alors les connexions intégrables et leurs classes associées de champs multivecteurs sont appelés holonomes (pour être holonomes est équivalent à être intégrable) et dans ce cas, on a  $F_A^i = v_A^i$  dans les expressions locales ci-dessus, alors:

**Théorème** Soit  $(J^1\pi, \Omega_L)$  un système Lagrangien. Les assertions suivantes sur une section  $\phi \in \Gamma(M, E)$  sont équivalentes:

1.  $\phi$  est une section critique pour le problème variationnel posé par le principe de Hamilton.
2.  $(j^1 \phi)^* i(X) \Omega_L = 0, \forall X \in \mathcal{X}(J^1\pi)$ .
3.  $j^1 \phi$  est une section intégrale d'une classe de champs multivecteurs holonomes  $\{\mathcal{X}_L\} \subset \mathcal{X}^k(J^1\pi)$  satisfaisant :

$$i(\chi_L)\Omega_L = 0 \quad , \quad \forall \chi_L \in \{\chi_L\} \quad (3.4.4.3)$$

4.  $j^1\phi$  est une section intégrale d'une classe de connexion holonomes  $\nabla_L$  dans  $J^1\pi$  satisfaisant :

$$i(\nabla_L)\Omega_L = (k-1)\Omega_L \quad (3.4.4.4)$$

5. Si  $(U; t^A, x^i, v_A^i)$  est un système naturel de coordonnées dans  $J^1\pi$ , a

$j^1\phi = \left( t^A, x^i(t^B), v_A^i = \frac{\partial x^i}{\partial t^A}(t^B) \right)$  dans  $U$  satisfait des équations Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} \circ j^1\phi - \frac{\partial}{\partial t^A} \left( \frac{\partial L}{\partial v_A^i} \circ j^1\phi \right) = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad (3.4.4.5)$$

Les champs multivecteurs holonomes et les connexions qui sont solutions aux équations de Lagrange (3.4.4.3) et (3.4.4.4) respectivement sont appelées champs multivecteurs et connexions d'Euler-Lagrange de  $(J^1\pi, \Omega_L)$  [19, 28].

**Remarque** Les Champs multivecteurs semi-holonomes (ils ne sont pas nécessairement intégrables) localement décomposables sont solutions des équations de lagrange (3.4.4.3) et (3.4.4.4).

Si  $(J^1\pi, \Omega_L)$  est régulier, les champs  $k$ -vecteurs d'Euler-Lagrange et les connexions existent dans  $J^1\pi$ , bien qu'ils ne soient pas nécessairement intégrables. Si  $(J^1\pi, \Omega_L)$  est singulier, dans le cas le plus favorable, ces champs multivecteurs d'Euler-Lagrange et les connexions existent seulement dans certaines sous-variétés  $S \rightarrow J^1\pi$  qui peuvent être obtenues après avoir appliqué un algorithme de contrainte approprié.

### 3.4.5 Formalisme hamiltonien

#### Faisceaux multimomentum. Cartes de Legendre

Il existe différents faisceaux où le formalisme hamiltonien des théories de champ [19, 28, 29, 30, 31] peut être développé. Ici, nous prenons l'un des choix les plus classiques.

En premier,  $M\pi \equiv \Lambda^k T^*E$  est l'ensemble des  $k$ -formes sur  $E$  qui s'annulent par l'action de deux  $\pi$ -champs de vecteurs verticaux (alors  $\dim M\pi = nk + n + k + 1$ ), et est diffeomorphe à l'ensemble des cartes affines de  $J^1\pi$  à  $\Lambda^k T^*M$  i.e.  $\text{Aff}(J^1\pi, \Lambda^k T^*M)$ , ( $\Lambda^k T^*M$  est le faisceau des multitangents de  $M$  d'ordre  $k$ ). Il est appelé le faisceau multimomentum prolongé [19, 30], et les submersions canoniques associés sont désignés par :

$$\kappa : M\pi \rightarrow E \quad ; \quad \bar{\kappa} = \pi \circ \kappa : M\pi \rightarrow M$$

Comme  $M\pi$  est un sous-fibré de  $\Lambda^k T^*E$  (le faisceau multicotangent de  $E$  d'ordre  $k$ ), alors  $M\pi$  est doté d'une forme canonique  $\theta \in \Omega^k(M\pi)$  (la "forme tautologique") qui est définie comme suit:

Soit  $(x, \alpha) \in \Lambda^k T^*E$ , avec  $x \in E$  et  $\alpha \in \Lambda^k T_x^*E$ ; alors, pour chaque  $X_1, \dots, X_k \in T_{(x, \alpha)}(M\pi)$ ,

$$\theta((x, \alpha); X_1, \dots, X_k) := \alpha(x; T_{(x, \alpha)}\kappa(X_1), \dots, T_{(x, \alpha)}\kappa(X_k))$$

Alors, on définit la forme multisymplectique  $\Omega := -d\theta \in \Omega^{k+1}(M\pi)$ . Ils sont connus comme les multimomentum  $k$  et  $(k+1)$  – formes de Liouville.

Les coordonnées naturelles, introduites dans  $M\pi$  adaptées au faisceau  $\pi: E \rightarrow M$ , sont désignées par  $(t^A, x^i, p_i^A, p)$ , et  $\omega = d^k t$ , les expressions locales de ces formes sont les suivantes:

$$\theta = p_i^A dx^i \wedge d^{k-1} t_A + p d^k t \quad (3.4.5.1)$$

et

$$\Omega = -dp_i^A \wedge dx^i \wedge d^{k-1} t_A - dp \wedge d^k t$$

On désigne par  $J^1\pi^*$  le quotient  $M\pi/\pi^* \wedge T^*M$ , avec  $\dim J^1\pi^* = nk + n + k$ . On a les submersions naturelles associées à  $J^1\pi^*$ :

$$\tau: J^1\pi^* \rightarrow E \quad ; \quad \bar{\tau} = \pi \circ \tau: J^1\pi^* \rightarrow M$$

En outre, la submersion naturelle  $\mu: M\pi \rightarrow J^1\pi^*$  dote  $M\pi$  avec une structure d'un faisceau affine sur  $J^1\pi^*$ , avec  $(\pi \circ \tau) \wedge T^*M$  comme le fibré vectoriel associé.  $J^1\pi^*$  est appelé généralement *le faisceau de multimomentum restreint* associé au faisceau  $\pi: E \rightarrow M$ . Les coordonnées naturelles dans  $J^1\pi^*$  sont désignées par  $(t^A, x^i, p_i^A)$ .

**Définition** Soit  $(J^1\pi, \Omega_L)$  un système Lagrangien. La carte de Legendre prolongée associée à  $L$ ,  $\tilde{FL}: J^1\pi^* \rightarrow M\pi$ , définie par

$$(\tilde{FL}(\bar{y}))(Z_1, \dots, Z_k) := (\theta_L)_{\bar{y}}(\bar{Z}_1, \dots, \bar{Z}_k)$$

Où  $Z_1, \dots, Z_k \in T_{\pi^{-1}(\bar{y})}E$ , et  $\bar{Z}_1, \dots, \bar{Z}_k \in T_{\bar{y}}J^1\pi$  sont tel que  $T_{\bar{y}}\pi^{-1}\bar{Z}_\alpha = Z_\alpha$ .

La carte de Legendre restreint associée à  $L$  est  $FL := \mu \circ \tilde{FL}: J^1\pi \rightarrow J^1\pi^*$ .

$$\tilde{FL}^* t^A = t^A \quad , \quad \tilde{FL}^* x^i = x^i \quad , \quad \tilde{FL}^* p_i^A = \frac{\partial L}{\partial v_A^i} \quad , \quad \tilde{FL}^* p = L - v_A^i \frac{\partial L}{\partial v_A^i} \quad (3.4.5.2)$$

$$FL^* t^A = t^A \quad , \quad FL^* x^i = x^i \quad , \quad FL^* p_i^A = \frac{\partial L}{\partial v_A^i}$$

Alors, on observe que  $\tilde{FL}^* \theta = \theta_L$ , et  $\tilde{FL}^* \Omega = \Omega_L$ .

**Définition**  $(J^1\pi, \Omega_L)$  est régulier (hyper régulier) si  $FL$  est un difféomorphisme local

(global) respectivement. Par ailleurs il est singulier.

$(J^1\pi, \Omega_L)$  est quasi régulier si

1.  $P := \text{FL}(J^1\pi)$  est une sous-variété fermée de  $J^1\pi^*$  (intégration naturelle  $j_0 : P \rightarrow J^1\pi^*$ ).
2. FL est une submersion sur son image.
3. Les fibres  $\text{FL}^{-1}(\text{FL}(\bar{y}))$ ,  $\forall \bar{y} \in J^1\pi$ , sont des sous-variétés de  $J^1\pi$ .

### Systèmes hyper réguliers

La façon habituelle de définir les systèmes hamiltoniens réguliers dans la théorie des champs consiste à considérer le faisceau  $\bar{\tau} : J^1\pi^* \rightarrow M$  et en donnant aux sections  $h : J^1\pi^* \rightarrow M\pi$  de la projection  $\mu$ . Celles-ci sont appelées sections hamiltoniennes qui portent l'information physique du système. Nous pourrions alors définir les formes différentiables :

$$\theta_h = h^* \theta \in \Omega^k(J^1\pi^*) \quad , \quad \Omega_h = -d\theta_h = h^* \Omega \in \Omega^{k+1}(J^1\pi^*) \quad (3.4.5.3)$$

Elles sont les  $k$  et  $(k+1)$  formes de *Hamilton-Cartan* de  $J^1\pi^*$  associé à la section Hamiltonienne  $h$ . Le couple  $(J^1\pi^*, \Omega_h)$  est dit système *Hamiltonian*.

Dans une locale de coordonnées naturelles, une section Hamiltonienne est spécifiée par une fonction Hamiltonienne locale  $h \in C^\infty(U)$ ,  $U \subset J^1\pi^*$ , tel que

$$h(t^A, x^i, p_i^A) \equiv (t^A, x^i, p_i^A, p = -h(t^A, x^i, p_i^A))$$

Alors, les expressions locales des formes de Hamilton-Cartan associées à  $h$  sont:

$$\theta_h = p_i^A dx^i \wedge d^{k-1}t_A + h d^k t$$

Et

$$\Omega_h = -dp_i^A \wedge dx^i \wedge d^{k-1}t_A - dh \wedge d^k t$$

On note que  $\Omega_h$  est nondégénéré; c'est une forme multisymplectique.

Maintenant, nous voulons associer des systèmes hamiltoniens à ceux de Lagrange. D'abord, on considère le cas de l'hyper-régulier (le cas régulier est analogue, mais en travaillant localement).

Si  $(J^1\pi, \Omega_L)$  est un système Lagrangien hyper-régulier [30], alors on a le diagramme :

$$\begin{array}{c}
M\pi \\
\mu \downarrow \uparrow h \\
J^1\pi \xrightarrow{FL} J^1\pi^*
\end{array}$$

Il est prouvé que  $\tilde{P} := \tilde{FL}(J^1\pi)$  est une sous-variété codimension intégrée de  $M\pi$  ( $\tilde{j}_0 : \tilde{P} \rightarrow M\pi$  désigne l'intégration naturelle) qui est transverse à  $\mu$  et est diffeomorphe à  $J^1\pi^*$ . Ce diffeomorphisme est  $\mu^{-1}$ , quand  $\mu$  est limité à  $\tilde{P}$ , et coïncide avec l'application  $h := \tilde{FL} \circ FL^{-1}$ , quand il est restreint sur son image qui est just  $\tilde{P}$ . Ainsi  $h$  et  $(J^1\pi^*, \Omega_h)$  la section hamiltonienne et le système hamiltonien associés au système de Lagrange hyper-régulier  $(J^1\pi, \Omega_L)$  respectivement.

Localement, la section Hamiltonienne  $h(t^A, x^i, p_i^A) \equiv (t^A, x^i, p_i^A, p = -h(t^A, x^i, p_i^A))$  est spécifiée par une fonction Hamiltonienne locale

$$h = p_i^A (\text{FL}^{-1})^* v_A^i - (\text{FL}^{-1})^* L \quad (3.4.5.4)$$

Les expressions locales pour les formes de Hamilton-Cartan sont :

$$\theta_h = p_i^A dx^i \wedge d^{k-1}t_A + h d^k t \quad (3.4.5.5)$$

et

$$\Omega_h = -dp_i^A \wedge dx^i \wedge d^{k-1}t_A - dh \wedge d^k t$$

De plus, on a

$$\text{FL}^* \theta_h = \theta_L, \text{ and } \text{FL}^* \Omega_h = \Omega_L. \quad (3.4.5.6)$$

Les équations du champ Hamiltonien peuvent aussi être dérivées d'un autre principe variationnel. En fait:

**Définition** Soit  $(J^1\pi^*, \Omega_h)$  est un système Hamiltonien. Soit  $\Gamma(M, J^1\pi^*)$  l'ensemble de sections de  $\bar{\tau}$ . Considérons la carte :

$$\begin{array}{l}
H : \Gamma(M, J^1\pi^*) \rightarrow R \\
\psi \quad \rightarrow \int_M \psi^* \theta_h
\end{array}$$

(où la convergence de l'intégrale est assumée). Le problème variationnel pour ce système Hamiltonien restreint est de chercher les sections critiques (ou stationnaires) de la fonctionnelle  $H$  par rapport aux variations de  $\psi$  donné par  $\psi_t = \sigma_t \circ \psi$ , où  $\{\sigma_t\}$  est un groupe à un-paramètre local d'un support compact  $Z \in \mathcal{X}^{V(\bar{\tau})}(J^1\pi^*)$  (où  $\mathcal{X}^{V(\bar{\tau})}(J^1\pi^*)$  dénote le module de  $\bar{\tau}$ -champs de vecteurs verticaux dans  $J^1\pi^*$ ), c'est à dire :

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \int_M \psi_t^* \theta_h = 0$$

*Ceci est le principe de Hamilton-Jacobi du formalisme hamiltonien.*

Le principe de Hamilton-Jacobi est équivalent à trouver des distributions  $D$  de  $J^1\pi^*$  tel que:

1.  $D$  est  $k$ -dimensionnel.
2.  $D$  est  $\bar{\tau}$ -transversal.
3.  $D$  est intégrable (elle est involutive).
4. Les variétés intégrales  $D$  sont des sections critiques du principe Hamilton-Jacobi.

Comme dans le formalisme Lagrangien,  $D$  sont associés aux classes d'intégrables et  $\bar{\tau}$ -transversal  $k$ -champs multivecteurs  $\{\mathcal{X}\} \subset \mathcal{X}^k(J^1\pi^*)$  qui sont équivalent aux connexions définies dans le bundle  $\bar{\pi}^1 : J^1\pi \rightarrow M$ , dont les expressions sont :

$$X = \bigwedge_{A=1}^k f^A \left( \frac{\partial}{\partial t^A} + F_A^i \frac{\partial}{\partial x^i} + G_{AB}^i \frac{\partial}{\partial p_B^i} \right), \quad (f \in C^\infty(J^1\pi^*))$$

$$\nabla_h = dt^A \otimes \left( \frac{\partial}{\partial t^A} + F_A^i \frac{\partial}{\partial x^i} + G_{AB}^i \frac{\partial}{\partial p_B^i} \right)$$

Alors on a:

**Théorème** *Les assertions suivantes sur une section  $\psi \in \Gamma(M, J^1\pi^*)$  sont équivalentes:*

1.  $\psi$  est une section critique pour le problème variationnel posé par le principe de Hamilton-Jacobi.

2.  $\psi^* i(X)\Omega_h = 0, \forall X \in \mathcal{X}(J^1\pi^*)$ .

3.  $\psi$  est une section intégrale d'une classe de champs multivecteurs  $\{\mathcal{X}_h\} \subset \mathcal{X}^k(J^1\pi^*)$   $\bar{\tau}$ -transversaux et intégrables qui satisfont

$$i(\mathcal{X}_h)\Omega_h = 0, \quad \forall \mathcal{X}_h \in \{\mathcal{X}_h\} \quad (3.4.5.7)$$

4.  $\psi$  est une section intégrale d'une connexion intégrable  $\nabla_h$  dans  $J^1\pi^*$  qui satisfait l'équation

$$i(\nabla_h)\Omega_h = (k-1)\Omega_h$$

5. Si  $(U; t^A, x^i, p_i^A)$  est un système naturel de coordonnées dans  $J^1\pi^*$ , alors  $\psi$  satisfait les équations de Hamilton-de Donder-Weyl dans  $U$



$$\frac{\partial(x^i \circ \psi)}{\partial t^A} = \frac{\partial h}{\partial p_i^A} \circ \psi \equiv \left. \frac{\partial h}{\partial p_i^A} \right|_{\psi}$$

Et

(3.4.5.8)

$$\frac{\partial(p_i^A \circ \psi)}{\partial t^A} = -\frac{\partial h}{\partial x^i} \circ \psi \equiv -\left. \frac{\partial h}{\partial x^i} \right|_{\psi}$$

Les champs multivecteurs  $\bar{\tau}$ -transversaux localement decomposables (mais pas nécessairement intégrables) et les connexions qui sont des solutions aux équations de Lagrange (3.2.3.7) (a) et (3.2.3.7) (b) sont appelés les champs multivecteurs et les connexions *de Hamilton-de Donder-Weyl (HDW)* de  $(J^1\pi^*, \Omega_h)$ .

Il y a une équivalence entre les formalismes de Lagrange et de Hamilton dans le cas de hyper régulier:

**Théorème** (théorème de l'Équivalence) Soit  $(J^1\pi, \Omega_L)$  est système Lagrangien hyper régulie,  $(J^1\pi^*, \Omega_h)$  est le système Hamiltonien associé [27].

Si une section  $\phi \in \Gamma(M, E)$  est une solution au problème variationnel du Lagrangien (le principe de Hamilton), alors la section  $\psi = \text{FL} \circ j^1\phi \in \Gamma(M, J^1\pi^*)$  est une solution au problème variationnel de l'hamiltonien (le principe de Hamilton-Jacobi).

Inversement, si  $\psi \in \Gamma(M, J^1\pi^*)$  est une solution au problème variationnel de l'hamiltonien, alors la section  $\phi = \tau \circ \psi \in \Gamma(M, E)$  est une solution au problème variationnel de Lagrange.

$$\begin{array}{ccc} J^1\pi & \xrightarrow{\text{FL}} & J^1\pi^* \\ \cdot \cdot \pi^1 & & \cdot \cdot \tau \\ \cdot \cdot E \cdot \cdot & & \\ \phi \uparrow \downarrow \pi & & \\ M & & \end{array}$$

# Chapitre 4

International Journal of Geometric Methods in Modern Physics  
Vol. 10, No. 4 (2013) 1350001 (22 pages)  
© World Scientific Publishing Company  
DOI: 10.1142/S0219887813500011



## MULTISYMPLECTIC GEOMETRY AND $k$ -COSYMPLECTIC STRUCTURE FOR THE FIELD THEORIES AND THE RELATIVISTIC MECHANICS

H. LOUMI-FERGANE

*Département de Physique, Faculté des Sciences  
Université Es-Senia, Oran 31000, Algérie  
h\_loumi@yahoo.com*

A. BELAIDI

*Département de Génie Electrique, ENSET d'Oran  
Oran 31000, Algérie  
belaidia@yahoo.fr*

Received 16 January 2012  
Accepted 17 September 2012  
Published 15 January 2013

## 4.1 Multisymplectic Geometry for Classical Field Theories

### 4.1.1 Lagrangian formalism

The field theories are the classical limit [25, 26, 36, 37] of quantum fields' theories. Those are the fields, such as gauge fields of Yang-Mills, which interact with matter fields. A geometric description has already been done [40] in building a principal fibre bundle  $G \times S^{0,2}$  where  $G \equiv \text{Lie}$  group associated in this case to the quantum fields of YM. This fibre is above a database the flat space: Minkowski space ( $k=4$ ) which coincides with the form of the Lagrangian of fields that we studied (i.e. Lagrangian which is only explicit on fields not on the database coordinates  $(x^\mu)_{\mu=0,3}$ ). The classical limit of these Lagrangians corresponds to the study of fields without constraints (this coincides with the abstraction of ghosts which corresponds to the  $S^{0,2}$  group). The favourable principal fibre of configuration is  $E = G (G \equiv N)$  and the structure in this case is four-symplectic (i.e.  $L_0 \in (T_4^1 N)$ ). How to use the multisymplectic geometry to such theories? This problem is solved in Sec. 4.3.

In this section, we are going to summarize the multisymplectic geometry given for studying the dynamic of field theories [26, 30]. In particular, we are going to concentrate ourselves on dynamic of most general case of field theories: theories whose Lagrangians are explicit on database coordinates  $(x^\mu)_{\mu=0,3} = (x^0 = ct, (x^i)_{i=1,3})$  and are hyper-regular. So, we follow the following steps:

Let  $\pi : E \rightarrow M$  be a fibre bundle with  $M$  the base space, that we choose, is a flat manifold i.e. the Minkowski space with global coordinates  $\{x^\mu\}$ .

$\pi$  is the pull back of a section  $\phi : M \rightarrow E$

$$x^\mu \rightarrow (x^\mu, y^A = \phi^A(x^\rho)) \quad ; \quad \mu = 0, \dots, 3 ; A = 1, \dots, d.$$

where  $\{y^A\} \equiv$  physical fields .

These fields  $\{y^A\}$  are presented by a fibre above each  $(x^\mu)$  of the base space  $M$ . The fibre bundle  $E$ :

$$E = R^4 \times N . \tag{4.1.1.1}$$

Let  $\pi^1 : J^1 \pi \rightarrow E$  the first-order jet bundle of  $\pi$ . By using (4.1.1.1),

$$J^1 \pi = R^4 \times T_4^1 N \tag{4.1.1.2}$$

If  $(x_\nu)$  is a natural local system on  $M$ ,  $(x_\nu, y^A, v_\nu^A)$  is the induced local coordinates system on  $J^1 \pi$  where

$$j^1 \phi(x_\nu) = (x_\nu, y^A, v_\nu^A) = (x_\nu, \phi^A(x_\rho), \partial_\nu \phi^A(x_\rho)) \tag{4.1.1.3}$$

With

$$\partial_\nu \phi^A = \frac{\partial \phi^A}{\partial x^\nu} = v_\nu^A \equiv \text{velocity of field}$$

By using the natural system of coordinates defined on  $J^1\pi$ , the expression of the Lagrangian density is:

$$L = L(x^\mu, y^A, v_\mu^A) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \quad (4.1.1.4)$$

And the expressions of  $\theta_L$  and  $\Omega_L$  the Poincaré-Cartan 4 and 5 forms are respectively [28]:

$$\theta_L = \frac{\partial L}{\partial v_\nu^A} dy^A \wedge d^{k-1}x_\nu - \left( \frac{\partial L}{\partial v_\nu^A} v_\nu^A - L \right) d^k x \quad (4.1.1.5)$$

et

$$\Omega_L = -d\theta_L \in \Omega^5(J^1\pi),$$

Where  $d^{k-1}x_\alpha \equiv i\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)d^k x$ .

The Lagrangian field equations can be derived from a variational principle called the Hamilton principle associated to the Lagrangian formalism which is given by:

$$i(X_L) \Omega_L = 0 \quad (4.1.1.6)$$

where  $\{X_L\} \subset \mathcal{X}_L^A(J^1\pi)$  is a class of holonomic multivector fields associated to  $j^1\phi$  ( $X_L$  is  $\bar{\pi}^1$ -transverse, integrable and SOPDE). The local expression of  $X_L$  is given by:

$$X_L = \frac{\partial}{\partial x^\nu} + F_\nu^A \frac{\partial}{\partial y^A} + G_{\nu\rho}^A \frac{\partial}{\partial v_\rho^A} \quad (4.1.1.7)$$

Where  $F_\nu^A = v_\nu^A$  and  $G_{\nu\rho}^A = \frac{\partial^2 y^A}{\partial x^\nu \partial x^\rho}$ .

By substituting (4.1.1.7) and (4.1.1.5) in (4.1.1.6), the Euler-Lagrange equations for the fields satisfy:

$$\left( \frac{\partial L}{\partial y^A} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left( \frac{\partial L}{\partial v_\nu^A} \right) \right) \circ j^1\phi = 0 \quad \forall A = \overline{1, d} \quad (4.1.1.8)$$

In this case  $\frac{\partial^2 L}{\partial v_\mu^A \partial v_\nu^B} \neq 0 \quad \forall (\bar{y}) \in J^1\pi$ , the Lagrangian is hyper-regular (regular globally), so we can associate a Hamiltonian formalism equivalent to the Lagrangian one.

#### 4.1.2 Hamiltonian formalism

Because  $(J^1\pi, \Omega_L)$  is hyper-regular, it is equivalent to a Hamiltonian system  $(J^1\pi^*, \Omega_h)$  by

a global diffeomorphism  $FL$  called the restricted Legendre map associated at  $L$ . Let  $J^1\pi^*$  be the restricted multimomentum bundle associated at  $\pi: E \rightarrow M$ , so,  $J^1\pi^* = R^4 \times (T_4^1)^* N$  where  $(T_4^1)^* N$  is the Whitney sum of 4-copies of the cotangent space  $T^* N$  at  $N$  spawned by  $(y^A, p_v^A)$

Let the natural submersion  $FL := J^1\pi \rightarrow J^1\pi^*$ .

The coordinates of both bundles are related by:

$$FL^* x^v = x^v, FL^* y^A = y^A, FL^* p_v^A = \frac{\partial L}{\partial v_v^A} \quad (4.1.2.1)$$

Where  $(x^v, y^A, p_v^A)$  is a natural coordinate system defined on  $J^1\pi^*$ .

We associate a section  $h$  to  $J^1\pi^*$ . Locally, the Hamiltonian section  $h(x^v, y^A, p_v^A) = (x^v, y^A, p_v^A, p = -h(x^\rho, y^B, p_B^\rho))$  is specified by the Hamiltonian function

$$h = (FL^{-1})^* L - p_v^A (FL^{-1})^* v_v^A \quad (4.1.2.2)$$

On  $J^1\pi^*$ , the local expressions of the Hamilton-Cartan 4 and 5 forms are defined by:

$$\theta_h = p_v^A dy^A \wedge d^{k-1} x_v + h d^k x \quad (4.1.2.3)$$

$$\Omega_h = -d\theta_h = -dp_v^A \wedge dy^A \wedge d^{k-1} x_v - dh \wedge d^k x$$

By substituting (4.1.2.1) in (4.1.2.3), we obtain (4.1.1.5):

$$FL^* \theta_h = \theta_L, \quad FL^* \Omega_h = \Omega_L$$

In order to obtain the Hamiltonian fields' equations equivalent to those obtained by the Lagrangian formalism (4.1.1.8), we use the Hamilton-Jacobi principal:

$$i(X_h)\Omega_h = 0 \quad (4.1.2.4)$$

Where  $X_h$  the HDW multivector field (i.e. HDW multivector field is a class of integrable and  $\bar{\tau}$ -transverse multivector fields  $\{X_h\} \subset \mathcal{X}^4(J^1\pi^*)$ )

$$X_h = \frac{\partial}{\partial x^v} + F_v^A \frac{\partial}{\partial y^A} + G_{Av}^\rho \frac{\partial}{\partial p_A^\rho} \quad (4.1.2.5)$$

With

$$F_v^A = \frac{\partial h}{\partial p_v^A}, \quad G_{Av}^\rho = -\frac{\partial h}{\partial y^A}$$

and  $\bar{\tau}: J^1\pi^* \rightarrow M$  pull back of an integral section  $\Psi$  associated at  $\phi$  such that:

$$FL \circ J^1\phi := \Psi : M \rightarrow J^1\pi^* \quad (4.1.2.6)$$

Finally, in a natural system of coordinates  $(x^\nu, y^A, p_A^\nu)$  in  $J^1\pi^*$ ,  $\Psi$  satisfies the following system of equations:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(y^A \circ \Psi)}{\partial x^\nu} &= \frac{\partial h}{\partial p_A^\nu} \circ \Psi \equiv \frac{\partial h}{\partial p_A^\nu} \Big|_\Psi \\ \frac{\partial(p_A^\nu \circ \Psi)}{\partial x^\nu} &= -\frac{\partial h}{\partial y^A} \circ \Psi \equiv -\frac{\partial h}{\partial y^A} \Big|_\Psi \end{aligned} \quad (4.1.2.7)$$

These equations are known as the *HDW* equations of the restricted Hamiltonian system.

We define the vector  $Z \equiv (y^A, p_A^\mu)^T$  and  $\nabla_z \equiv (\partial_{y^A}, \partial_{p_A^\mu})$  for  $A = \overline{1, d}$  and  $\mu = \overline{0, 3}$  where both the components  $\{y^A\}$  and  $\{p_A^\mu\}$  are unconstrained in  $J^1\pi^*$ . Having regards to the choice of the configuration bundle  $E$  and the Lagrangian of fields, if we explicit the Hamiltonian equation fields (4.1.2.7), we obtain:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial y^A} \\ \frac{\partial h}{\partial p_A^0} \\ \frac{\partial h}{\partial p_A^1} \\ \frac{\partial h}{\partial p_A^2} \\ \frac{\partial h}{\partial p_A^3} \end{pmatrix} &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{J^0} \partial_0 \begin{pmatrix} y^A \\ p_A^0 \\ p_A^1 \\ p_A^2 \\ p_A^3 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{J^1} \partial_1 \begin{pmatrix} y^A \\ p_A^0 \\ p_A^1 \\ p_A^2 \\ p_A^3 \end{pmatrix} \\ &+ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{J^2} \partial_2 \begin{pmatrix} y^A \\ p_A^0 \\ p_A^1 \\ p_A^2 \\ p_A^3 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{J^3} \partial_3 \begin{pmatrix} y^A \\ p_A^0 \\ p_A^1 \\ p_A^2 \\ p_A^3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.1.2.8)$$

The system (4.1.2.8) can be contracted naturally [39] in:

$$\underbrace{(J^\mu \partial_\mu)}_{J_0} Z = \nabla_z h \quad (4.1.2.9)$$

The equation (4.1.2.9) is the contracted form of the *HDW* equations for fields whose components are independents (i.e. unconstrained).

The explicit matrices  $\{J^\mu\}_{\mu=\overline{0,3}}$  [41] associated to the operator  $J_0$  are obtained naturally,

where  $J^\mu$  are  $5 \times 5$  skew-symmetric constant matrixes for “A” fixed. The partial differential  $\partial_\mu$  appearing in  $J_\partial$  is associated to the coordinates  $(x_\mu)$  of the flat space: Minkowski space.

The system (4.1.2.9) can also be written as:

$$\nabla_Z h = -i \underbrace{(iJ^\mu \partial_\mu)}_X Z = (e^{-iX} - 1)Z \quad (4.1.2.10)$$

## 4.2 Multisymplectic Geometry for the Relativistic Mechanics

### 4.2.1 Lagrangian formalism

By analogy with the work already done for the field theories, we extend the idea to the relativistic mechanics.

Let  $\pi: E = R \times N \rightarrow R$ , where  $E$  is the configuration bundle,  $R$  as a base space spawned by  $(ct)$  as global coordinate and  $N = R^3$  is the fibre above each point of the database ( $\dim N = 3$  and  $\dim E = 4$ ). Let  $(q^\mu)_{\mu=0,3} = (q^0 = ct, (q^i)_{i=1,3})$  be a natural coordinate defined in  $E$ . If the configuration bundle  $E$  can be equipped with a metric  $\eta^{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$  such that  $q^\mu = \eta^{\mu\nu} q_\nu$ , in this case  $E$  coincides with the Minkowski space. We note that “ $c$ ” is speed of light and  $(q^i)_{i=1,3}$  are the generalized coordinates.  $\pi^1: J^1\pi \rightarrow E$  is the first-order jet bundle of  $\pi$ . In this case, the section  $j^1\phi: R \rightarrow J^1\pi := R \times TN$ , the natural coordinates defined on  $J^1\pi$  as done in (4.1.1.3) is  $(q^0, q^i, \dot{q}^i)$  and the global integral section  $j^1\phi$  such that:

$$j^1\phi(q^0) = (q^0, \phi^i(q^0)) = \phi^i(t) = q^i(t), \quad \frac{\partial \phi^i}{\partial q^0}(q^0) = \frac{\partial \phi^i}{c \partial t}(t) = \frac{dq^i}{cdt}(t) = \frac{\dot{q}^i(t)}{c} = \bar{\dot{q}}^i(t) \quad (4.2.1.1)$$

We define the Lagrange function  $L: R \times TN \rightarrow R$ . We define on  $J^1\pi$ , the Poincaré-Cartan one-form  $\theta_L$  and 2-form  $\Omega_L$  associated at  $L$  as in (5) by:

$$\begin{aligned} \theta_L &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} dq^i - \frac{1}{c} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i - L \right) dq^0 \\ \Omega_L &= -d\theta_L \end{aligned} \quad (4.2.1.2)$$

We put

$$\frac{dq^i}{cdt}(t) = \bar{\dot{q}}^i(t) \quad \text{and} \quad \frac{d^2 q^i}{cdt^2}(t) = \frac{\ddot{q}^i(t)}{c} = \bar{\ddot{q}}^i(t).$$

Where  $\dot{q}^i(t)$  and  $\ddot{q}^i(t)$  are the velocity and the acceleration of the mechanical system respectively. For the relativistic mechanics, at the Hamilton principal (4.1.1.6), we can associate the following holonomic multivector field, (4.1.1.7) becomes:

$$\bar{X}_L = \frac{\partial}{\partial q^0} + \bar{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \bar{\dot{q}}^i \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \quad (4.2.1.3)$$

We can do the following remark that

$$\bar{X}_L = \frac{1}{c} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \ddot{q}^i \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \right) = \frac{1}{c} X_L$$

For this dynamic, the first-order jet bundle  $J^1\pi$  is generated by the HDW multivector field  $\bar{X}_L$  (i.e.HDW multivector field is a class of integrable) and  $\bar{\tau}$  – transverse multivector fields  $\{\bar{X}_L\} \subset \mathcal{X}^1(J^1\pi)$ . The Lagrangian is hyper-regular so,  $(J^1\pi, \Omega_L)$  is equivalent to a Hamiltonian system  $(J^1\pi^*, \Omega_h)$ .

#### 4.2.2 Hamiltonian formalism

The first -order jet bundle associated at  $E$  is  $J^1\pi^* := R \times T^*N$  at which we associate the following forms defined in natural coordinate  $(q^0, q^i, p^i)$ :

$$\begin{aligned} \theta_h &= p_i dq^i + p_0 dq^0 \\ \Omega_h &= -dp_i \wedge dq^i - dp_0 \wedge dq^0 \end{aligned} \quad (4.2.2.1)$$

By analogy with (4.1.2.1) and (4.1.2.2) the Hamiltonian function for the mechanic is generally the following non-autonomous Hamiltonian:

$$h(t, q^i(t), p_i(t)) = (FL^{-1})^* L - p_i (FL^{-1})^* \dot{q}^i \quad (4.2.2.2)$$

where

$$FL^* t = t, \quad FL^* q^i = q^i, \quad FL^* p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \quad (4.2.2.3)$$

From (4.2.1.2), (4.2.2.1) and (4.2.2.2), we find naturally

$$p_0 = \frac{h}{c} \quad (4.2.2.4)$$

In the Eq. (4.2.1.2), we identify the terms

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} dq^i &= \Theta_L \xrightarrow{FL} p_i dq^i = \Theta_{Liouville \ one-form} \\ -d \downarrow & \qquad \qquad \qquad -d \downarrow \\ \omega_L = -d \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \wedge dq^i &\xrightarrow{FL} \omega = dq^i \wedge dp_i = \omega_{canonical \ symplectic \ two-form} \end{aligned} \quad (4.2.2.5)$$

By substituting (4.2.2.3) in (4.2.2.1), we obtain (4.2.1.2):

$$FL^* \theta_h = \theta_L \quad \text{and} \quad FL^* \Omega_h = \Omega_L$$



The corresponding multivector field equivalent to (4.2.1.3) which satisfies the Hamilton-Jacobi principal (4.1.2.4) is:

$$\bar{X}_h = \frac{\partial}{\partial q^0} + \bar{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \bar{p}^i \frac{\partial}{\partial p^i} \quad (4.2.2.6)$$

The *HDW* equations obtained can be identified by the *ODE* equations for the curves in relativistic mechanics:

$$\begin{aligned} \frac{dq^i \circ \Psi}{dq^0} &= \bar{q}^i = \left. \frac{\partial p_0}{\partial p_i} \right|_{\Psi} \\ \frac{dp_i \circ \Psi}{dq^0} &= \bar{p}_i = - \left. \frac{\partial p_0}{\partial q^i} \right|_{\Psi} \end{aligned} \quad (4.2.2.7)$$

We put  $Z \equiv (q^i, p_i), \nabla_Z \equiv (\partial_{q^i}, \partial_{p_i}); i = \overline{1,3}$ , the system *ODE* of the *HDW* can be written by:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial p_0}{\partial q^i} \\ \frac{\partial p_0}{\partial p_i} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{J_i} \begin{pmatrix} \partial_0 q^i = \bar{q}^i \\ \partial_0 p_i = \bar{p}_i \end{pmatrix} \quad \text{for } i \text{ fixed and } \partial_0 = \frac{\partial}{\partial q^0} \quad (4.2.2.8)$$

The system (4.2.2.7) can be contracted naturally in:

$$\nabla_Z h_Z = \underbrace{J_0}_{J_0} \partial_0 Z = J_0 \dot{Z} \quad (4.2.2.9)$$

If we explicit the index  $i = \overline{1,3}$  the system *ODE* (4.2.2.9) becomes:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial p_0}{\partial q_1} \\ \frac{\partial p_0}{\partial p_1} \\ \frac{\partial p_0}{\partial q_2} \\ \frac{\partial p_0}{\partial p_2} \\ \frac{\partial p_0}{\partial q_3} \\ \frac{\partial p_0}{\partial p_3} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{J_0} \begin{pmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{p}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \bar{p}_2 \\ \bar{q}_3 \\ \bar{p}_3 \end{pmatrix} \quad (4.2.2.10)$$

Where  $J_0$  is  $6 \times 6$  skew-symmetric constant matrix and  $J_0$  depends only on the partial

differential  $\partial_0$  associated to the base space coordinates ( $q^0$ ).

### 4.3 Relation between Multisymplectic Geometry and the $k$ -structure

#### 4.3.1 The multisymplectic geometry and $k$ -cosymplectic structure

We are going to concentrate ourselves on fields' theory; the result is the same for the mechanic theory, so: let the fibre bundle cited above  $E = R^4 \times N$ . On the associated first-jet bundle  $J^1\pi = R^4 \times T_4^1N$ , we have the local coordinate  $(x_\mu, y^A, v_\mu^A)$  ;  $\mu = \overline{0,3}$ ,  $A = \overline{1,d}$

Let the Lagrangian function  $L \in C^\infty(J^1\pi)$  (i.e.  $L(x_\nu, y^A, v_\nu^A)$ ) and  $\mathcal{X}_L^4(J^1\pi = R^4 \times T_4^1N)$  be the set of the holonomic  $k$ -vector fields on  $J^1\pi$  [19], such that:

$$X_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu} + F_\nu^A \frac{\partial}{\partial y^A} + G_{\nu\rho}^A \frac{\partial}{\partial v_\rho^A} \quad (4.3.1.1)$$

Where  $F_\nu^A = v_\nu^A$  and  $G_{\nu\rho}^A = \frac{\partial^2 y^A}{\partial x^\nu \partial x^\rho}$ . These multivector fields are, in four-cosymplectic Lagrangian formalism, are solutions for the following equation:

$$i_{x_\nu} \omega_L^\nu = -dE_L + \frac{\partial L}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad (4.3.1.2)$$

where

$$\omega_L^\nu = -d\left(\frac{\partial L}{\partial v_\nu^A} dy^A\right) \quad (4.3.1.3)$$

$$\Theta_L^\nu = \frac{\partial L}{\partial v_\nu^A} dy^A \quad (4.3.1.4)$$

$$E_L = -v_\nu^A \frac{\partial L}{\partial v_\nu^A} + L$$

By putting (4.3.1.3) and (4.3.1.4) in (4.3.1.2), we obtain:

$$i_{x_\nu} \left[ -d\left(\frac{\partial L}{\partial v_\nu^A} dy^A\right) \right] = d\left(v_\nu^A \frac{\partial L}{\partial v_\nu^A} - L\right) + \frac{\partial L}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad (4.3.1.5)$$

Because the base space is flat, we can use the following relations:

$$\begin{aligned} d[\alpha \wedge \beta] &= d\alpha \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge d\beta \\ i_X(\alpha \wedge \beta) &= i_X \alpha \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge i_X \beta \\ r &= d^\circ \alpha = \text{degrees of } \alpha \end{aligned} \quad (4.3.1.6)$$

And “d” the total differential is defined on  $J^1\pi$  by:

$$d = \frac{\partial}{\partial x^\nu} dx^\nu + \frac{\partial}{\partial y^A} dy^A + \frac{\partial}{\partial v_\nu^A} dv_\nu^A \quad (4.3.1.7)$$

By multiplying (4.3.1.5) by the volume element  $\eta = dx^k = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ , we obtain:

$$\left\{ -i_{x^\nu} d\Theta_L^\nu - d\left( v_\nu^A \frac{\partial L}{\partial v_\nu^A} - L \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\nu} dx^\nu \right\} \wedge dx^k = 0 \quad (4.3.1.8)$$

By using (4.3.1.5), the following term gives:

$$-i_{x^\nu} d\Theta_L^\nu \wedge dx^k = d(\Theta_L^\nu \wedge i_{x^\nu} dx^k) - (-1)^1 \Theta_L^\nu \wedge d(i_{x^\nu} dx^k) \quad (4.3.1.9)$$

By contracting (4.3.1.1) by  $\eta$ , we have:

$$i_{x^\nu} dx^k = dx_\nu^{k-1} \quad (4.3.1.10)$$

Finally (4.3.1.9) gives:

$$-i_{x^\nu} d\Theta_L^\nu \wedge dx^k = -i_{x^\nu} d(\Theta_L^\nu \wedge dx^k) + d(\Theta_L^\nu \wedge dx_\nu^{k-1}) \quad (4.3.1.11)$$

The term

$$\frac{\partial L}{\partial x^\nu} dx^\nu \wedge dx^k = 0 \quad \forall \nu = \overline{0,3} \quad (4.3.1.12)$$

Inserting (4.3.1.11) and (4.3.1.12) in (4.3.1.8), we obtain:

$$d\left[ \Theta_L^\nu \wedge dx_\nu^{k-1} - \left( v_\nu^A \frac{\partial L}{\partial v_\nu^A} - L \right) \wedge dx^k \right] = i_{x^\nu} d(\Theta_L^\nu \wedge dx^k) \quad (4.3.1.13)$$

We identify the term in (4.3.1.13)

$$\Theta_L^\nu \wedge dx_\nu^{k-1} - \left( v_\nu^A \frac{\partial L}{\partial v_\nu^A} - L \right) \wedge dx^k = \theta_{\text{multisymplectic}} \quad (4.3.1.14)$$

$$\Omega_{L \text{ multisymplectic}} = -d\theta_{L \text{ multisymplectic}} = -i_{x^\nu} d(\Theta_L^\nu \wedge dx^k) \quad (4.3.1.15)$$

### 4.3.2 The multisymplectic geometry and $k$ -symplectic structure

By analogy with the work done for the  $k$ -cosymplectic structure, but in this case  $E = N$ , the Lagrangian function  $L \in C^\infty(T_4^1 N)$  and  $\chi_L^A(T_4^1 N)$  be the set of  $k$ -vector fields in  $T_4^1 N$  [19], such that:

$$\begin{aligned}
X_\nu &= F_\nu^A \frac{\partial}{\partial y^A} + G_{\nu\rho}^A \frac{\partial}{\partial v_\rho^A} \\
F_\nu^A &= v_\nu^A, \quad G_{\nu\rho}^A = \frac{\partial^2 y^A}{\partial x^\nu \partial x^\rho}
\end{aligned} \tag{4.3.2.1}$$

The relation (4.3.1.2) becomes:

$$i_{x_\nu} \omega_L^\nu = -dE_L \tag{4.3.2.2}$$

where the term  $\frac{\partial L}{\partial x^\nu} = 0 \forall \nu = \overline{0,3}$  and the expressions (4.3.1.3) and (4.3.1.4) of  $\omega_L^\nu$  and  $E_L, \Theta_L^\nu$  respectively seen in four-cosymplectic differ for four-symplectic in the expression of the Lagrangian (i.e.  $L$  does not depend on  $x^\nu$ ) and “d” the total differential, in this case, is given by:

$$d = \frac{\partial}{\partial y^A} dy^A + \frac{\partial}{\partial v_\nu^A} dv_\nu^A \tag{4.3.2.3}$$

Given the expression of  $k$ -vector field  $X_\nu$ , we have  $i_{x_\nu} dx^k = 0$ . The same calculus can be done for  $k$ -symplectic as it was done for four-cosymplectic, but in this case the term  $(\Theta_L^\nu \wedge dx_\nu^{k-1})$  disappears automatically from (4.3.1.14) which it becomes

$$-\left( v_\nu^A \frac{\partial L}{\partial v_\nu^A} - L \right) \wedge dx^k \neq \theta_{\text{multisymplectic}} \tag{4.3.2.4}$$

We can make the following remark that the contribution of the term  $\frac{\partial L}{\partial x^\nu}$  vanishes in both cases if it is  $k$ -symplectic or  $k$ -cosymplectic. So, to study the dynamic of a  $k$ -symplectic physical system, we can recalculate demonstration for the relationship between  $k$ -symplectic and multisymplectic treating the dynamic in the first jet bundle  $j^1\pi = R^k \times T_k^1 N$  as if it was  $k$ -cosymplectic with  $\frac{\partial L}{\partial x^\nu} = 0$ .

In conclusion, we deduce that the multisymplectic geometry is  $k$ -cosymplectic structure such that the fibres of the first-jet bundle  $J^1\pi$  for the Lagrangian formalism are constructed based on the two-symplectic form  $\omega_L^\nu = -d(\frac{\partial L}{\partial v_\nu^A} dy^A)$  defined on each point of the fibre. So,  $\omega_L^\nu$  forms the structure of the multisymplectic geometry.

We remark also that, in physics, if the theory is explicit so the Lagrangian depends on the local coordinates  $(x_\nu, y^A = \phi^A(x_\nu), v_\nu^A = \partial_\nu \phi^A(x_\nu))$  (i.e.  $L(x_\nu, y^A, v_\nu^A)$  and  $\frac{\partial L}{\partial x^\nu} \neq 0$ , the structure of the geometry is  $k$ -cosymplectic and the dynamic of fields is studied on a first-jet bundle  $J^1\pi = R^4 \times T_4^1 N$ . But if the Lagrangian depends only on the following

coordinates  $(y^A, v_v^A)$  and  $\frac{\partial L}{\partial x^v} = 0 \forall v = \overline{0,3}$ , the theory is said implicit and the structure is  $k$ -symplectic and can be also constructed on the fibre bundle  $J^1\pi = R^4 \times T_4^1 N$  above the database  $R^4$ .

$$FL: R^4 \times T_4^1 N \rightarrow R^4 \times (T_4^1)^* N$$

By using the Legendre map

$$(x_v, y^A, v_v^A) \rightarrow \left( x_v, y^A, p_v^A = \frac{\partial L}{\partial v_v^A} \right) \quad (4.3.2.5)$$

Without any demonstration, we can use the same method done for the Lagrangian formalism and by using  $FL$ ; the same results will be deduced for the Hamiltonian formalism. In this case, the  $k$ -cosymplectic structure of the geometry is based on the symplectic two-form

$$\omega_v = dy_A \wedge dp_v^A = FL \omega_L^v.$$

We can use the same method of demonstration and without doing any calculus using the fibre bundle cited above in Sec. 4.2 for the relativistic mechanics, we will find a result similar to the equation (4.3.1.15) just by making the following change of variables:

$$(x_v, y^A, v_v^A) \text{ and } k = 4 \rightarrow (ct, q^i, \dot{q}^i) \text{ and } k = 1 \quad (4.3.2.6)$$

We can construct the multisymplectic geometry for the relativistic mechanics based on to the canonical symplectic two-form (4.2.2.5), Eq. (4.3.1.2) becomes in this case:

$$i_{\bar{x}} \omega_L = -dE_L + \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (4.3.2.7)$$

Unless, in this case, we can make the following remark that the relativistic mechanics is implicit (i.e.  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$  and  $L(q^i, \dot{q}^i)$ ), the theory is said autonomous. If the theory of relativistic mechanics is explicit (i.e.  $\frac{\partial L}{\partial t} \neq 0$  and  $L(t, q^i, \dot{q}^i)$ ), it is called non-autonomous.

## 4.4 Dynamic of Physical Systems

By using the multisymplectic geometry studied in sections cited above, and having regard to the relation-ship between the  $k$ -cosymplectic ( $k$ -symplectic respectively) and multisymplectic geometry in Sec. 4.3. Here, we are going to develop the model for studying separately the dynamic of a relativistic charged particle immersed in a weak field: the electromagnetic field  $A_\mu \equiv (\phi, A_i)$  and in the absence of the gravitational field (a strong field), then the dynamic of a classical free electromagnetic field.

### 4.4.1 Dynamic of a relativistic charged particle

A geometric formulation of the lagrangian of relativistic mechanics in terms of jets bundle was already treated in [42, 43, 44], but in this subsection, we are going to treat the Hamiltonian of relativistic mechanics in the geometrical model cited above in Sec. 4.2.

The Lagrangian function of a relativistic particle immersed in an electromagnetic field

$$L(t, q^i, \dot{q}^i) = m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + e \phi(t, q^i) - e \vec{v} \cdot \vec{A}(t, q^i) \quad (4.4.1.1)$$

where  $m_0$  is the rest mass of the particle. Where the four- vector  $\dot{q}_\mu$  is given by:

$$\dot{q}_\mu = \frac{dq_\mu}{dt} = \begin{cases} \dot{q}_0 = c \\ (\dot{q}_i)_{i=1,2,3} = \vec{v} \end{cases} \quad (4.4.1.2)$$

By using the metric  $\eta^{\mu\nu}$  defined in Minkowski space in Sec. 4.2, the four-vector of the electromagnetic field is

$$A^\mu = \begin{cases} A^0 = A_0 = \frac{\phi}{c} \\ (A^i)_{i=1,2,3} = - (A_i)_{i=1,2,3} = -\vec{A} \end{cases} \quad (4.4.1.3)$$

The four-momentum vector

$$p^0 = \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e \frac{\phi}{c} = \frac{h}{c} \quad (4.4.1.4)(a)$$

$$p^i = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \dot{q}^i + e A^i \quad (4.4.1.4)(b)$$

We do the following change of coordinate

$$\begin{cases} P^0 = p^0 - e A^0 = mc & (4.4.1.5)(a) \\ P^i = p^i - e A^i = m \dot{q}^i & (4.4.1.5)(b) \end{cases}$$

Where  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$  and  $P^0, p^0$  are respectively the mass and the energies (the

Hamiltonians in different system of coordinates) of the particle moving at the speed  $\vec{v}$ .

The Hamiltonian function for a relativistic particle is given by:

$$p^\mu \dot{q}_\mu - L = (p^\mu - e A^\mu)(p_\mu - e A_\mu) - m_0 c^2 = 0 \quad \text{and} \quad p^\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} \quad (4.4.1.6)$$

By substituting (4.4.1.1) and (4.4.1.4) in (4.4.1.6), we obtain:

$$P^0 = p^0 - e A^0 = \frac{E}{c} - e \frac{\phi}{c} = \sqrt{m_0 c^2 - (p^i - e A^i)(p_i - e A_i)} \quad (4.4.1.7)$$

the study of the dynamics in the jet bundle  $J^1\pi = R \times TR^3$  generated by  $(ct, q^i, \dot{q}^i)$ .

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^\mu \partial \dot{q}^\nu} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left[ \eta^{\mu\nu} + \frac{\dot{q}_\mu \dot{q}_\nu}{c^2 - v^2} \right] \neq 0, \quad \forall \mu, \nu = \overline{0,3}.$$

The Lagrangian is hyper-regular. The Lagrangian formalism in the first jet bundle  $J^1\pi$  is equivalent to a Hamiltonian one treated on the first jet bundle  $J^1\pi^*$  generated by the following local coordinate system  $(ct, q^i, p^i)$ .

The Hamilton-Jacobi principal (4.1.2.4) is verified for:

$$\Omega_h = -dp_i \wedge dq^i - dp_0 \wedge dq^0 \quad (4.4.1.8)$$

$$\bar{X}_h = \frac{\partial}{\partial q^0} + \bar{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \bar{p}^i \frac{\partial}{\partial p^i}$$

Because the laws of physics must be invariant of a system of coordinates to another, in this case, the dynamic of the particle can be studied on the first-jet bundle  $J^1\pi^* = R \times T^*N$  generated by the following coordinate system  $(ct, q^i, P^i)$ . The Hamilton-Jacobi principal (4.1.2.4) becomes:

$$\tilde{\Omega}_h = -dP_i \wedge dq^i - dP_0 \wedge dq^0 = -dP_\mu \wedge dq^\mu \quad (4.4.1.9)$$

$$\tilde{X}_h = \frac{\partial}{\partial q^0} + \bar{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \bar{P}^i \frac{\partial}{\partial P^i}$$

By using the change of coordinates (4.4.1.5), we have

$$\tilde{\Omega}_h = -dP_\mu \wedge dq^\mu = -dp_\mu \wedge dq^\mu + e dA_\mu \wedge dq^\mu \quad (4.4.1.10)$$

$$dA_\mu \wedge dq^\mu = \frac{1}{2} F_{\nu\mu} dq^\nu \wedge dq^\mu \quad (4.4.1.11)$$

Inserting (4.4.1.11) in (4.4.1.10)

$$\tilde{\Omega}_h = -dP_\mu \wedge dq^\mu = -\left( dp_\mu + \frac{e}{2} F_{\mu\nu} dq^\nu \right) \wedge dq^\mu \quad (4.4.1.12)$$

The Hamilton-Jacobi principal (4.1.24) gives:

$$\begin{aligned}
i(\tilde{X}_h)\tilde{\Omega}_h &= \left( e F_{i0}\bar{q}^i - \bar{P}^i \frac{\partial p_0}{\partial p^i} - \bar{P}_i \frac{dq^i}{dq^0} - \bar{q}^i \frac{\partial p_0}{\partial q^i} \right) dq^0 + \left( \frac{\partial p_0}{\partial q^i} - e F_{i0} - e \bar{q}^j F_{ij} \right) dq^i \\
&+ \left( \frac{\partial p_0}{\partial q^i} - e F_{i0} - e \bar{q}^j F_{ij} \right) dq^i + \left( \frac{\partial p_0}{\partial p^i} + \bar{q}_i \right) dp^i = 0
\end{aligned} \tag{4.4.1.13}$$

By a geometric construction that was made and without going through the derivation of the Hamiltonian (4.4.1.7), if we identify term by term in equality (4.4.1.13), the system of the HDW equations (4.2.2.7) which describes the dynamic of a particle plunged in electromagnetic field gives:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p_0}{\partial p^i} = -\bar{q}_i = \bar{q}^i \\ -\frac{\partial p_0}{\partial q^i} = e F_{0i} - e \bar{q}^j F_{ij} = e(F_{0i} + \bar{q}_j F_{ij}) = \bar{P}_i \end{array} \right. \tag{4.4.1.14(a)}$$

$$\tag{4.4.1.14(b)}$$

Inserting the equations (4.4.1.14)(a) and (4.4.1.14)(b) in the first bracket of the relation (4.4.1.13),

$$e F_{i0}\bar{q}^i - \bar{P}^i \frac{\partial p_0}{\partial p^i} - \bar{P}_i \frac{dq^i}{dq^0} - \bar{q}^i \frac{\partial p_0}{\partial q^i} = -e\bar{q}^i\bar{q}^j F_{ij} = 0$$

By multiplying the system (4.4.1.14) by "c",

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial p^i} = \dot{q}^i \\ -\frac{\partial h}{\partial q^i} = e \left( \vec{E} + \vec{q} \wedge \vec{B} \right)_i = \vec{F}_i \text{ Lorentz force} = \dot{p}_i \end{array} \right. \tag{4.4.1.15(a)}$$

$$\tag{4.4.1.15(b)}$$

In particular 
$$\bar{P}_i = -\frac{\partial P_0}{\partial q^i} = e \frac{\partial A_i}{\partial q^0} - e \bar{q}^j F_{ij}.$$

We conclude that such geometrical construction let to identify the Hamilton-Carton two-form  $\tilde{\Omega}_h$  (4.4.1.9) to the charged two symplectic form already used in the work [45]. This geometrical model is invariant by boosts when moving from one fiber to another horizontally on Minkowski space which coincides, in this model, with the configuration bundle  $E$ . The relation (4.4.1.12) shows how changes  $\tilde{\Omega}_h$  from the coordinate system  $(ct, q^i, P^i)$  to the other one  $(ct, q^i, p^i)$  which is the result already put in [45] where  $\tilde{\Omega}_h$



(4.4.1.9) was defined on the base space  $M$  taken as Minkowski space.

We can also do the following remark that the contribution of the term  $\frac{\partial p^0}{\partial q^0}$  disappears naturally in the expression of  $\tilde{\Omega}_h$  (4.4.1.13). This is explained by the fact that the expression (4.4.1.7) of  $p^0$  is time implicit.

The classical limit which is the development to the first order of the theory leaves invariant the model built where just tender the terms  $\frac{v}{c} \rightarrow 0$  and

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^\alpha} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\alpha} = 1 + \alpha \frac{v^2}{c^2}$$

The classical limit of the term

$$\left(1 - \frac{1}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \dot{q}^i \dot{q}_i\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{v^2}{2c^2} = 1 + \frac{(p_i - e A_i)^2}{2c^2} \quad (4.4.1.16)$$

Inserting (4.4.1.16) in (4.4.1.5)(b) and (4.4.1.7), the classical limit of the Hamiltonian of the particle

$$h = m_0 c^2 + \frac{m_0}{2} (p_i - e A_i)^2 + e \phi \quad (4.4.1.17)$$

if we take the origin of energies  $h_0 = m_0 c^2$ , Inserting (4.4.1.4)(b) in (4.4.1.15)(b), we retrieve the Newton's law

$$m_0 \ddot{q}^i = -e \partial_i \phi + e \left( \vec{\dot{q}} \wedge \vec{B} \right)_i \quad (4.4.1.18)$$

In this case, the theory is invariant by Galilean transformation which is the classical limit of boosts.

By using the result found in Sec. 4.3.2, the model built in Sec. 4.2.2 remains valid for the study of the dynamics of free particle (*i.e.*  $A_\mu = 0$ ) in the jet bundle  $J^1 \pi^* = R \times T^* R^3$  generated by  $(ct, q^i, p^i)$  and the last remark that we can do is that the multisymplectic Hamiltonian formalism for relativistic mechanics is the familiar homogeneous Hamiltonian formalism of non-relativistic mechanics [24].

#### 4.4.2 Dynamic of the free electromagnetic field

Recall the expression of the Lagrangian of a free electromagnetic field

$$L = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

Where  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ,  $A_\mu(x^\rho)$  is the electromagnetic field and  $v_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu$  is the velocity of the field  $A_\nu$ ,  $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ . Having regarded to the expression of the Lagrangian  $L(\partial_\mu A_\nu)$  and  $x^\mu$  is implicit, the theory is four-symplectic. By using the result obtained in Sec. 4.3.2, we can study the dynamic of the field, by using the multisymplectic geometry studied in Sec.4.1, on  $J^1\pi^* = R^4 \times (T_4^1)^* N$  where  $N$  is the space of the field  $A_\mu$  where the group of symmetry is  $U(1)$ .

$$L = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu) F^{\mu\nu} \quad (4.4.2.1)$$

The Hamiltonian of the field

$$h = \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{4} p^{\mu\nu} p_{\mu\nu} \quad (4.4.2.2)$$

so,

$$dh = \frac{\partial h}{\partial p^{\mu\nu}} dp^{\mu\nu} = F_{\mu\nu} dF^{\mu\nu}$$

By using (4.1.2.1) and (4.1.2.3), we obtain

$$\Omega_h = -dp^{\mu\nu} \wedge dA_\nu \wedge d^3x_\mu - dh \wedge d^4x = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} dF^{\mu\nu} \wedge d^4x \quad (4.4.2.3)$$

and

$$X_h = \frac{\partial}{\partial x^\rho} + S_\rho^\sigma \frac{\partial}{\partial A^\sigma} - G^{\sigma\gamma}_\rho \frac{\partial}{\partial F^{\sigma\gamma}}$$

The Hamilton-Jacobi principal (4.1.2.4) gives:

$$\begin{aligned} i(X_h)\Omega_h &= -\frac{1}{2} \left[ \partial_\rho F_{\mu\nu} \wedge dF^{\mu\nu} \wedge dx^4 + F_{\mu\nu} (\partial_\gamma F^{\mu\nu}) \delta_\rho^\gamma d^4x + F^{\mu\nu} dF_{\mu\nu} \wedge d^3x_\rho \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} (-G^{\sigma\gamma}_\rho) \delta_\mu^\sigma \delta_\nu^\gamma dF^{\mu\nu} \wedge dx^4 \\ &= (\partial_\rho F^{\mu\nu} - G^{\mu\nu}_\rho) dF_{\mu\nu} \wedge dx^4 + 2F_{\mu\nu} \partial_\rho F^{\mu\nu} d^4x = 0 \end{aligned} \quad (4.4.2.4)$$

By identification the terms in (4.4.2.4), we obtain

$$\begin{aligned}
\partial_\rho F^{\mu\nu} - G^{\mu\nu}{}_\rho = 0 &\Rightarrow G^{\mu\nu}{}_\rho = \partial_\rho F^{\mu\nu}, \quad \text{in particular for } \rho=\mu, \quad \underbrace{\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 = \frac{\partial h}{\partial A^\nu}} \\
&\Downarrow \\
\Box A^\nu - \underbrace{\partial^\nu \partial_\mu A^\mu}_{\text{Lorentz gauge}=0} &= 0 \\
&\Downarrow \\
\Box A^\nu &= 0 \quad \left( \begin{array}{l} \text{propagation equation} \\ \text{for the free electromagnetic} \\ \text{electromagnetic field } A^\nu \end{array} \right).
\end{aligned}$$

$$2F_{\mu\nu} (\partial_\rho F^{\mu\nu}) d^4x = \partial_\rho (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) d^4x = 0 \Rightarrow h = \text{constant}. \quad (81)$$

Because the  $k$ -vector-field  $X_h$  is holonomic (SOPDE and integrable),  $S_\rho{}^\sigma = \partial_\rho A^\sigma$ .

In conclusion of this Sec. 4.4, we deduce that the multisymplectic geometry is the favourable geometry for describing both the relativistic dynamics for gauge theories (boson fields) (i.e. the electromagnetic field) which dynamic obeys at Maxwell equations e.g. Sec. 4.4.2 and the mechanic which obeys at Newton equations in the classical limit e.g. Sec. 4.4.1 respectively.

## Conclusion

Several works on the multisymplectic geometry has been made to describe the dynamics of relativistic fields. The dynamics of these fields are described by the Maxwell equations. As it was done in the work [40], we built the bundle of the quantum theories of Yang Mills whose base is identified with the flat space: Minkowski space. In this work, conditions are fixed for the construction of the bundle for the relativistic YM fields to apply the multisymplectic geometry. In particular in our work, we pointed out for the hyper-regular field theories which can be developed in this configuration bundle. In the same way, in this work we built an appropriate configuration bundle for the relativistic mechanics; in particular, we study the dynamic of a relativistic electron immersed in electromagnetic fields. The movement of such a particle obeys to Newton's law. Using this extension, we can define new kinds of holonome multivector fields which verify the Hamilton principle. In particular, in Hamiltonian formalism, we obtained the *HDW* equations describing the movement in mechanics. After this study, we deduce that the extension of the multisymplectic geometry to the relativistic mechanics operates successfully. Furthermore, we have proved that in the absence of the gravitational field, both the propagation of a free field (the movement of a free particle or a particle immersed in a weak field as the electromagnetic field) in the space respectively lead to a construction of a multisymplectic geometry on the first-jet bundle whose base space is treated globally. In particular, we distinguish in this construction of the bundles how are placed the coordinates: the space and time of the Minkowski space in the fiber bundle for both theories. Finally, we have found a direct relationship between the  $k$ -cosymplectic structure and the multisymplectic geometry.

## References

- [1] D. T. Greenwood, *Classical Dynamics* (1977).
- [2] L. Meirovitch, *Methods of analytical dynamics* (1970).
- [3] M. D. Ardena, *Analytical Dynamics: Theory and Application* (2005).
- [4] *M. Shaposhnikov, Notes du cours Champs Quantiques Relativistes 2007 Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.*
- [5] T. Sakai, *Riemannian geometry* (1996): American Mathematical Society.
- [6] J. M. Lee, *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*, Springer.
- [7] B. Yu Hou, B. Yyan. Hou, *Differential Geometry for Physicists, Advanced Series on Theoretical Physical Sciences Vol. 6* (Word Scientific Publishing Co. Ltd).
- [8] M. Fecko, *Differential Geometry and Lie Groups for Physicists* (2006) Cambridge.
- [9] S. Gallot, D. Hulin and J. La fontaine *Riemannian Geometry* (1980) Third Edition, Springer.
- [10] C. H. Taubes, *Differential Geometry: Bundles, Connections, Metrics and Curvature* (2011) Oxford Graduate Texts in Mathematics.
- [11] A. Echeverria-Enriquez, M. C. Muñoz -Lecanda and N. Roman-Roy, Multivector fields and connections: Setting Lagrangian equations in field theories, *J. Math. Phys.* **39**(9) 1998) 4578-4603.
- [12] A. Echeverria-Enriquez, M.C. Muñoz -Lecanda and N. Roman-Roy 2002 Multivector fields and connections. Applications to field theories, *Rev. R. Acad. Cien. Ser. A.Mal.* **96** (1) (2002) 83-93.
- [13] D.J. Saunders, *The geometry of jet bundles, London Mathematical Society Lecture Notes Series*, Vol. 142(Cambridge, University Press, 1989).
- [14] A. Echeverria-Enriquez, M. C. Muñoz -Lecanda and N. Roman-Roy, Geometry of Lagrangian first-order classical field theories, *Fortschr. Phys* **44** (1996) 235-280.
- [15] A. Awane, *k*-symplectic structures, *J. Math. Phys.* **32** (12) (1992) 4046-4052.
- [16] A. Awane, *G*-spaces *k*-symplectic homogènes, *J. Geom. Phys.* **13** (1994) 139-157.
- [17] A. Awane, M. Goze, *Pfaffian Systems, k-symplectic Systems* (Kluwer Academic

Publishers, Dordrecht, 2000).

- [18] C. Günther, The polysymplectic Hamiltonian formalism in the field theory and the calculus of variations I: The local case, *J. Differential. Geom.* **25** (1987)23-53.
- [19] M. De Leon, M. McLean, L. K. Norris, A. Rey Roy Roca and M. Salgado, Geometric structures in field theory, preprint (2002), arXiv:math-ph/020803.
- [20] J. Kijowski, and W. M. Tulczyjew, *A symplectic framework for field theories*, Lecture. Notes in Physics, 170 (Springer-Verlag, Berlin, 1979).
- [21] N. Roman-Roy, *K-Symplectic Formulation for Field Theories. An Introduction to Symmetries* (2007).
- [22] M. De Leon, E. Merino, J.A. Oubina, P. Rodrigues, M. Salgado, Hamiltonian systems on  $k$ -cosymplectic manifolds, *J. Math. Phys.* **39** (2) (1998) 876-893.
- [23] M. De Leon, E. Merino and M. Salgado,  $k$ -cosymplectic manifolds and Lagrangian field theories, *J. Math. Phys.* **42** (5) (2001) 2092-2104.
- [24] V. Aldaya and J. A. De Azcarraga, Geometric formulation of classical mechanics and field theory, *Riv. Nuovo Cimento.* **3** (10) (1980) 1-66.
- [25] E. Binz, J. Sniatycki and H. Fisher, *The geometry of classical fields* (North-Holland, Amsterdam 1988).
- [26] M. De Leon, J. Marin-Salano and J. C. Marrero, A geometrical approach to classical field theories: A constraint algorithm for singular theories, in *Proc. New Developments in Differential Geometry*, eds. L. Tamassi-J. Szenthe (Kluwer Academic. Press, 1996), pp. 291-312.
- [27] G. Giachetta, L. Mangiarotti and G. Sardanashvily, *New Lagrangian and Hamiltonian Methods in field theory* (Word Scientific Publishing, Singapore, 1997).
- [28] N. Roman-Roy, Multisymplectic lagrangian and Hamiltonian formalisms of first-order classical field theories, preprint (2005), arXiv:math-ph /0506022.
- [29] A. Echeverria-Enriquez, M. C. Muñoz -Lecanda and N. Roman-Roy, Geometry of multisymplectic Hamiltonian first-order field theories, *J. Math. Phys.* **41** (11) (2000)

7402-7444.

- [30] A. Echeverría-Enríquez, M. De Leon, M. C. Muñoz-Lecanda, and N. Roman-Roy, Hamiltonian systems in multisymplectic field theories, preprint (2005), arXiv:math-ph/0506003.
- [31] A. Echeverría-Enríquez, M.C. Muñoz-Lecanda and N. Román Roy, Multivector field Formulation of Hamiltonian Fields Theories: Equations and Symmetries math-ph/9907007 (published in *J. Phys. A: Mathematical and General*).
- [32] A. Echeverría-Enríquez and M. C. Muñoz-Lecanda, Variational calculus in several variables: A Hamiltonian approach, *Ann. Inst. H. Poincaré* **56** (1) (1992) 27-47.
- [33] F. Hélein and J. Kouneiher, Finite dimensional Hamiltonian formalism for gauge and quantum field theories, *J. Math. Phys.* **43** (5) (2002) 2306-2347.
- [34] F. Hélein and J. Kouneiher, Covariant Hamiltonian formalism for the calculus of variations with several variables: Lepage-Dedecker versus De Donder-Weyl, *Adv. Theor. Math. Phys.* **8** (3) (2004) 565-601.
- [35] C. Paufler and H. Romer, 2002 Geometry of Hamiltonian  $n$ -vector fields in multisymplectic field theory, *J. Geom. Phys.* **44** (1) (2002) 52-69.
- [36] J. F. Cariñena, M. Crampin and L. A. Ibort, 1991 On the multisymplectic formalism for first order field theories, *Differential. Geom. Appl.* **1** (1991) 345-374.
- [37] M. De Leon, J. Marin-Salano and J. C. Marrero, A geometrical approach to classical field theories: A constraint algorithm for singular theories, in *Proc. New Developments in Differential Geometry*, eds. L. Tamassi-J. Szenthe (Kluwer Academic. Press, 1996), pp. 291-312.
- [38] G. Sardanashvily, *Generalized Hamiltonian formalism for field theory. Constraint systems* (World Scientific, Singapore, 1995).
- [39] J. B. Thomas, *Proc. Roy. Soc. London A* **462** (2006) 1531-1551.
- [40] H. Loumi and M. Tahiri, *Rep. Math. Phys.* **33** (1993) 367-373.
- [41] J.B. Thomas and R. Sebastian, Numerical methods for Hamiltonian PDEs, *J. Phys. A: Math. Gen* **39** (2006) 5287-5320.

- [42] G.Sardanashvily, Relativistic mechanics in a general setting, *Int. J. Geom. Math. Mod. Phys.* **7** (2010) 1307-1319.
- [43] G. Giachetta, L.Mangiarotti and G.Sardanashvily, *Geometric Formulation of Classical and Quantum Mechanics*, (Word Scientific, Singapore 2010).
- [44] G.Sardanashvily, Lagrangian dynamics of submanifolds: Relativistic mechanics, *J. Geom. Mech.* **4** (2012) 99-110.
- [45] L. K. Norris, On the affine connection-structure of the charged symplectic 2-form, *Int. J. Theor Phys.* **30** (1991) 1127-1150.
- [46] G. Sardanashvily, Multimomentum canonical quantization of fields, *Hadronic J.* **17** (1994), 227–245.

## ANNEXE

### Définition

1] La dérivée extérieure  $d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p+1}(M)$  ( $p = 0, \dots, \dim M$ )

$$d(\eta(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}) = \frac{\partial \eta(x)}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

Et est étendue par linéarité à l'ensemble de  $\Omega^p(M)$ .

La dérivée extérieure utilise la règle du produit suivante:  $\omega \in \Omega^p(M)$ ,  $\theta \in \Omega^q(M)$  alors

$$\begin{aligned}d(\omega \wedge \theta) &= d\omega \wedge \theta + (-1)^p \omega \wedge d\theta \\ \omega \wedge \theta &= (-1)^{pq} \theta \wedge \omega\end{aligned}$$

2] Le contracteur extérieur  $i_X$  est défini par :  $i_X \omega \equiv X \lrcorner \omega$ .

1) Cet opérateur linéaire agit sur les formes  $i_X : \Lambda^r \rightarrow \Lambda^{r-1}$

$$2) i_X(\alpha_p \wedge \beta_q) = (i_X \alpha_p) \wedge \beta_q + (-1)^p \alpha_p \wedge (i_X \beta_q).$$

3) Pour les 1-formes  $\omega \in \Lambda^1(M)$ ,  $i_X \omega \equiv \omega(X)$

$$\text{Par exemple, } i_X df \equiv f(X)$$

$$i_X \omega_r(X_1, \dots, X_{r-1}) \equiv \omega_r(X, X_1, \dots, X_{r-1}).$$

4) Pour les fonctions,  $f \in C^\infty(M)$ , ( $f \in \Lambda^0(M)$ )  $i_X f = 0$ .



## Résumé

L'idée principale de la relativité est que l'on ne peut parler de quantités telles que la vitesse ou l'accélération sans avoir choisi un référentiel défini en un point donné. Tout mouvement est ensuite décrit en relation avec cette référence. La relativité postule que cette référence peut être prolongée indéfiniment dans l'espace et dans le temps. Il ne traite que le cas des référentiels dits inertiels. Ces référentiels sont animés par une vitesse constante sans changer de direction dans le continuum espace-temps. Cet espace est appelé espace de Minkowski. C'est un espace pseudo-euclidien. La présence de matière peut déformer localement l'espace-temps lui-même. Alors l'espace de Minkowski est abandonnée en faveur d'un espace à quatre dimensions dit espace de Riemann. La théorie dans ce cas est dite la relativité générale. En relativité générale, la trajectoire des particules libres est une ligne droite dans un repère inertiel local. Une fois ces lignes sont prolongées au-delà de la référence locale, elles ne sont plus rectilignes. Ces courbes sont reliées à la métrique de l'espace-temps elles sont connues par le nom de géodésiques. La première loi de Newton doit être remplacée par l'équation de la géodésique.

Dans la description géométrique des théories de champs, le sujet le plus intéressant concerne l'étude des équations de champ qui décrivent la dynamique des champs. Dans la géométrie multisymplectique, à la fois dans les formalismes de Lagrange et de Hamilton, ces équations peuvent être dérivés d'un principe de variation approprié: le soi-disant principe de Hamilton dans le formalisme de Lagrange et le principe de Hamilton-Jacobi dans le formalisme hamiltonien. En particulier, pour les théories hyper-réguliers, le principe de variation conduit à l'équation de Hamilton-De Donder-Weyl (*HDW*) en utilisant des types particuliers de champs multivecteurs intégrables appelés les multivecteur champs holonomes. Pour cette dynamique, le jet bundle de premier ordre est principalement généré par les champs multivecteurs *HDW*. Dans le travail [40], nous avons construit particulièrement le bundle de théories quantiques de Yang-Mills. Pour appliquer la géométrie multisymplectique sur ce travail, nous nous sommes focalisés sur les champs relativistes qui se propagent librement dans l'espace de Minkowski; nous identifions ces champs à ceux hyper-réguliers. Ce modèle géométrique donne les équations de Maxwell. De la même manière, dans ce travail, nous étendons la géométrie multisymplectique, déjà réalisée pour les théories de champs, à la mécanique relativiste par l'introduction d'un bundle approprié. Nous construisons le bundle pour étudier en particulier la dynamique d'un électron relativiste immergé dans un champ électromagnétique. Ce modèle géométrique donne les équations de Maxwell. De la même manière, dans ce travail, nous étendons la géométrie multisymplectique, déjà réalisée pour les théories de champs, à la mécanique relativiste par l'introduction d'un bundle approprié. Nous construisons le bundle pour étudier en particulier la dynamique d'un électron relativiste immergé dans un champ électromagnétique. L'extension de la géométrie multisymplectique de la mécanique relativiste fonctionne avec succès.

En conclusion, nous avons prouvé qu'en l'absence de la gravitation, la dynamique d'un champ relativiste libre (le mouvement d'une particule libre ou une particule immergée dans un champ faible que le champ électromagnétique) dans l'espace de Minkowski conduit à utiliser la multisymplectique géométrie en utilisant le premier-ordre jet bundle dont l'espace de base est traité globalement. En particulier, nous distinguons dans cette construction des faisceaux comment sont placés les coordonnées: l'espace et le temps de l'espace de Minkowski dans le faisceau de fibres pour les deux théories. Enfin, nous avons trouvé une relation directe entre la structure de  $k$ -cosymplectique et la géométrie multisymplectique.