

## Avant-Propos

Le présent polycopié de cours, intitulé : « Ondes et vibrations » est élaboré et présenté en conformité au canevas relatif à la formation Licence LMD-S3 dans le domaine “ Science et Technologie (ST) ”.

Les objectifs assignés par ce programme portent sur l’initiation des étudiants de deuxième année aux phénomènes de vibrations mécaniques restreintes aux oscillations de faibles amplitudes pour 1 ou 2 degrés de libertés ainsi qu’à l’étude de propagation des ondes mécaniques. Ce manuel essaie de répondre au mieux aux recommandations du programme officiel. L’utilisation du formalisme de Lagrange est clairement spécifiée dans le programme officiel.

Ce cours est structuré en deux parties :

La première, répartie en Cinq chapitres, traite le problème des vibrations. Le premier chapitre porte sur l’utilisation du formalisme de Lagrange qui décrit les oscillations des systèmes physiques. L’étude des oscillations linéaires (de faible amplitude) libres des systèmes à un degré de liberté est présentée dans le deuxième chapitre, qui est divisé en deux parties, la première : oscillations non amorties, la deuxième partie traite les oscillations amorties, qui prend en compte les forces de frottements de viscosité proportionnelles à la vitesse du mobile. La notion de résonance consacrée aux oscillations forcées est présentée au troisième chapitre. Le quatrième chapitre présente les oscillations libres des systèmes à deux degrés de liberté. Le cinquième chapitre présente les oscillations forcées des systèmes à deux degrés de liberté. La deuxième partie de ce cours, qui traite les phénomènes de propagation des ondes est constitué de quatre chapitres, Phénomènes de propagation à une dimension en premier chapitre, le deuxième chapitre traitera les cordes vibrantes, ensuite les ondes acoustique en troisième chapitre et enfin les ondes électromagnétiques en dernier chapitre.

Ce document est un cours détaillé avec des exercices corrigés et des propositions d’exercices à résoudre, avec l’esprit de permettre une meilleure assimilation par l’étudiant.

**ABDELADIM MUSTAPHA**

# SOMMAIRE

## PREMIERE PARTIE : VIBRATIONS

### CHAPITRE I : Introduction aux équations de Lagrange

1- Introduction	2
2- Oscillateur	2
3- Degrés de liberté	2
4- Modélisation Masse ressort-Amortisseur des oscillateurs	5
5- Formalisme de Lagrange	5
6- Equation différentielle du mouvement	6

### Chapitre II Oscillations libres des systèmes à un degré de liberté

#### A: Oscillations libres non amorties 11

1- Oscillateur harmonique	11
2- Pulsation propre d'un oscillateur harmonique	12
3- L'énergie d'un oscillateur harmonique	13
4- Condition d'équilibre	14

#### B: Oscillations libres des systèmes amorties

1- Force d'amortissement	16
2- L'équation de Lagrange des systèmes amortis	16
2.1- Equation du mouvement des systèmes amortis	17
2.2 - Résolution de l'équation du mouvement	17
3- Décrément logarithmique	19

### Chapitre III Oscillations forcées des systèmes à un degré de liberté

1- Equation de Lagrange des systèmes forcés	24
2- Résolution de l'équation du mouvement	25
3- Résonance	26
4- Bande passante et facteur de qualité	26

5- Excitation périodique	28
6- Impédance mécanique	29
6.1- Définition	29
6.2- Amortisseur	29
6.3- Masse	29
6.4- Ressort	29

## Chapitre IV : Oscillations libres des systèmes à deux degrés de liberté :

1- Introduction	32
2- Application	33

## Chapitre V : Oscillations forcées des systèmes à deux degrés de liberté

1- Equation de Lagrange	35
2- Système masse-ressorts-masses	35
3- Généralisation aux systèmes à n degrés de liberté	37

## DEUXIEME PARTIE : ONDES

### Chapitre I : Phénomènes de propagation à une dimension

1. Généralités et définitions de base	40
2. Equation de propagation	42
3. Onde progressive sinusoïdale	45
4. Superposition de deux ondes progressives sinusoïdales	46
4-1. Cas de deux ondes de même fréquence se propageant dans le même sens	46
4-2. Cas de deux ondes de même fréquence se propageant dans des sens opposés	47
5. Ventres et nœuds d'une onde stationnaire	48

### Chapitre II : Cordes vibrantes

1. Introduction	51
2. Equation des ondes	52
3. Ondes progressives harmoniques	54
3-1. Définition	54
3-1. Impédance	55
4. Oscillations libres d'une corde de longueur finie	55

5. Réflexion et transmission	58
Chapitre III : Ondes acoustiques dans les fluides	
1. Introduction	61
1. Equation de propagation d'une d'onde acoustique	61
2. Vitesse du son	64
3. Onde progressive sinusoïdale	65
4. Réflexion-Transmission	66
Chapitre IV : Ondes électromagnétiques	
1. Equation d'onde	69
2. Réflexion-Transmission	70
2-1. Conditions de passage	71
2-2. Première configuration	72
2-3. Deuxième configuration	73
3. Différents types d'ondes électromagnétiques	75
3-1. Ondes radio et microondes	76
3-2. L'infrarouge	76
3-3. Visible	76
3-4. Ultraviolet	77
3-5. Les rayons X	77
3-6. Les rayons gamma	77
Références bibliographiques	78

# Nomenclature

$q_i(t)$  : Coordonnée généralisée

$T$  : Energie Cinétique

$U$  : Energie Potentielle

$E$  : Energie Totale

$L$  : Langrangien du système

$\omega_0$  : pulsation propre du mouvement libre

$T_0$  : Période propre du mouvement libre

$K$  : Constante de raideur du ressort

$A$  : Amplitude

$\varphi$  : Déphasage

$D$  : Fonction de dissipation

$W$  : Energie d'excitation

$\alpha$  : Coefficient de frottement

$\lambda$  : Facteur d'amortissement

$Q$  : facteur de qualité

$\omega$  : Pseudo-pulsation

$T$  : Pseudo-période

$\delta$  : Décrément logarithmique

$q$  : charge qui circule dans le circuit électrique

$R$  : Résistance électrique

$C$  : Capacité électrique

$L$  : Bobine électrique

$u_C$  : Tension au borne de la capacité  $C$

$u_L$  : Tension au borne de la bobine  $L$

$u_R$  : Tension au borne de la résistance  $R$

$F(t)$  : Force d'excitation externe appliquée au système

$\Omega$  : Pulsation de la force d'excitation externe appliquée au système

$\Omega_R$  : Pulsation de résonance en régime forcé

$\Omega_1$  et  $\Omega_2$  : Pulsations de coupures en régime forcé

B : Bande passante

$P_F(t)$  : Puissance instantanée fournie par la force d'excitation  $F(t)$

$\underline{Z}$  : Impédance

C : Vitesse de la propagation de l'onde (vitesse de la lumière)

k : Vecteur d'onde

$\lambda(m)$  : Longueur d'onde de propagation

$\mu$  : masse linéique de la corde

T : Tension de la corde

r : Coefficient de réflexion

t : Coefficient de transmission

$P_0$  : pression à l'équilibre

$P$  : surpression ou pression acoustique

$\chi$  : coefficient de compressibilité

$\epsilon_0$  : permittivité du vide

$\mu_0$  : perméabilité du vide

$\sigma$  : densité surfacique de charge

$\vec{J}_s$  : densité surfacique de courant

# PREMIERE PARTIE

## VIBRATIONS

### Chapitre 1

# Introductions aux équations de Lagrange

## 1-Introduction

Lagrange un physicien (1788), a formulé une méthode mathématique pour faciliter la mise en forme des équations différentielles du mouvement d'une particule.

La loi de Newton est liée aux repères et utilise des vecteurs, on trouvera des difficultés s'il y a plusieurs forces qui régissent le mouvement de la particule. Lagrange a trouvé une autre méthode sans utiliser les vecteurs, seulement à partir de l'expression de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. En un sens, elle schématise en maximum l'étude des problèmes mécaniques en offrant le chemin le plus court et le plus sûr vers l'équation du mouvement. Lagrange se vantait que son traité ne contenait aucune illustration ou schéma et que la méthode qu'il proposait était purement analytique.

## 2- Oscillateur :

Une vibration est un mouvement périodique de grandeur  $q(t)$  (déplacement, rotation) autour d'une position d'équilibre.

On appelle  $q(t)$  coordonnée généralisée qui permet de décrire et configurer un élément d'un système à tout instant  $t$ .

Un système physique est appelé oscillateur lorsque  $q(t)$  varie périodiquement.

Exemple circuit RLC est un oscillateur.

Un oscillateur est linéaire si son mouvement est décrit par une équation différentielle du second ordre, linéaire et à coefficients constants. L'oscillateur élémentaire linéaire possède un seul degré de liberté.

Un oscillateur est libre s'il oscille sans intervention extérieure pendant son retour à l'équilibre

Un oscillateur est forcé si une action extérieure lui communique de l'énergie.

Un oscillateur est dit amorti s'il dissipe de l'énergie quand il retourne vers son état d'équilibre.

Si la forme des oscillations est sinusoïdale, le système est un oscillateur harmonique. La forme peut être carré, triangulaire.

### Période et fréquence

La période  $T$  est la durée d'une oscillation. C'est la plus courte durée après laquelle le phénomène oscillatoire se reproduit à lui-même. L'unité de la période est la seconde. La fréquence  $f$  est le nombre de fois que le phénomène oscillatoire se reproduit par seconde. L'unité de la fréquence est le Hertz (HZ). La période et la fréquence sont inverse l'un de l'autre  $f = \frac{1}{T}$ .

## 3- Degrés de liberté.

Le degré de liberté est le nombre de coordonnées généralisées indépendantes, nécessaires

pour configurer tous les éléments du système à tout instant  $d=N$  où, le nombre de coordonnées généralisées liées  $N$ , pour configurer tous les éléments du système à tout instant moins (-) le nombre de relations liant ces coordonnées entre elles  $R$  :  $d = N - R$

$d$  : Degré de liberté

$N$  : Nombre de coordonnées généralisées

$R$  : Nombre de liaisons relations ces coordonnées entre elles

Liaisons imposés à un système :

On appelle liaison, toute obligation géométrique ou cinématique imposé à un système.

Mathématiquement, c'est une relation algébrique ou géométrique entre 2 ou plusieurs paramètres de mouvement.

L'effet mécanique d'une liaison est de réduire le nombre de paramètres géométriques indépendants qui détermine la position du point (ou du corps) dans l'espace.

Par exemple :  $x, y, z, \alpha, \beta$

Si  $x$  a une relation avec  $\alpha$  et  $\beta$ , elle réduit le nombre de paramètres indépendants

Une liaison simple réduit avec « un » le nombre de paramètres géométriques indépendants.

Exemple 1 :

Déterminer le nombre de degrés de liberté de la figure I.1 ci-dessous.

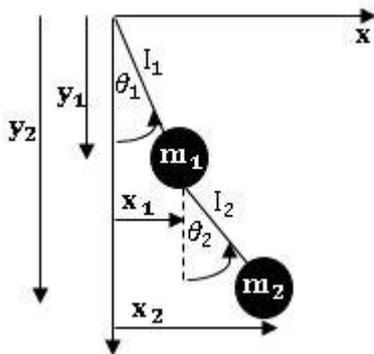


Figure I.1 Système pendule à deux masses

Pour déterminer la position de  $m_1$  on a 3 paramètres  $\Theta_1, x_1, y_1$  pour  $m_2$  on a aussi 3 paramètres  $\Theta_2, x_2, y_2$ . Nombre total  $6 = N$

La configuration du système est exprimée à l'aide de 6 paramètres :

$$q_1=x_1 \quad q_2=x_2 \quad q_3=y_1 \quad q_4=y_2 \quad q_5= \Theta_1 \quad \text{et} \quad q_6= \Theta_2$$

Ce système présente 4 liaisons (géométriques à partir de la figure I.1)  $R=4$

$$X_1= l_1 \sin \Theta_1, \quad y_1= l_1 \cos \Theta_1, \quad X_2= l_1 \sin \Theta_1+ l_2 \sin \Theta_2, \quad y_2= l_1 \cos \Theta_1+ l_2 \cos \Theta_2$$

On a  $x_1$  et  $y_1$  sont liés à  $\Theta_1$  et  $x_2$  et  $y_2$  sont liés à  $\Theta_2$

Le nombre de degrés de liberté est égal à  $d = N - R = 6 - 4 = 2$

### Exemple 2 :

Déterminer le nombre de degrés de liberté de la figure I.2 ci-dessous, qui représente un cylindre de rayon  $r$ , en roulement sans glissement :

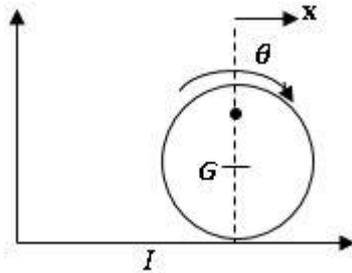


Figure I.2 Cylindre en roulement sans glissement

I point de contact. La condition de roulement sans glissement est donné par :  $V(I) = 0$ .

$\dot{x} = r \dot{\theta}$  donc  $\dot{x}$  dépend de  $\dot{\theta}$ .

Donc un seul paramètre indépendant  $\Theta$ . On a besoin d'une seule équation de mouvement.

Nombre de degré de liberté est  $d = 2 - 1 = 1$

### Exemple 3 :

Un autre exemple représenté sur la figure I.3 ci-dessous :

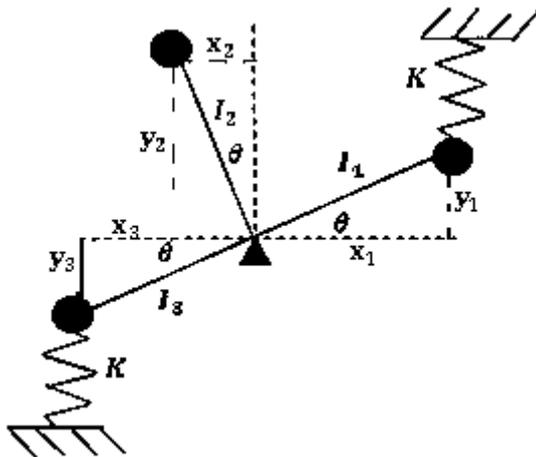


Figure I.3 : Système de l'exemple 3

On a 7 paramètres :  $q_1 = x_1$   $q_2 = x_2$   $q_3 = x_3$   $q_4 = y_1$   $q_5 = y_2$   $q_6 = y_3$  et  $q_7 = \Theta$ ;  $N = 7$

Et on 6 liaisons :

$x_1 = l_1 \sin \Theta$ ,  $y_1 = l_1 \cos \Theta$ ,  $x_2 = l_2 \sin \Theta$ ,  $y_2 = l_2 \cos \Theta$ ,  $x_3 = l_3 \sin \Theta$ ,  $y_3 = l_3 \cos \Theta$

Nombre de liaisons géométrique  $R = 6$

Le degré de liberté du système est  $d = N - R = 7 - 6 = 1$ .

Conclusion :

Pour déterminer la position du système dans l'espace, il est nécessaire de connaître le nombre de paramètres géométriques indépendants par rapport à un système de référence (distances (déplacements) et angles (rotation)).

Supposant que l'on exprime la configuration d'un système à l'aide de  $N$  paramètres et qu'il ait  $R$  liaisons alors on appelle le degré de liberté le nombre  $d = N - R$

C'est le nombre d'équations différentielles qu'on a besoin.

#### 4- Modélisation Masse ressort-Amortisseur des oscillateurs :

Pour appliquer le formalisme de Lagrange, on doit chercher un modèle mathématique.

Un oscillateur à un degré de liberté peut être modélisé par un système Masse-Ressort-Amortisseur

représenté sur la figure I.4.

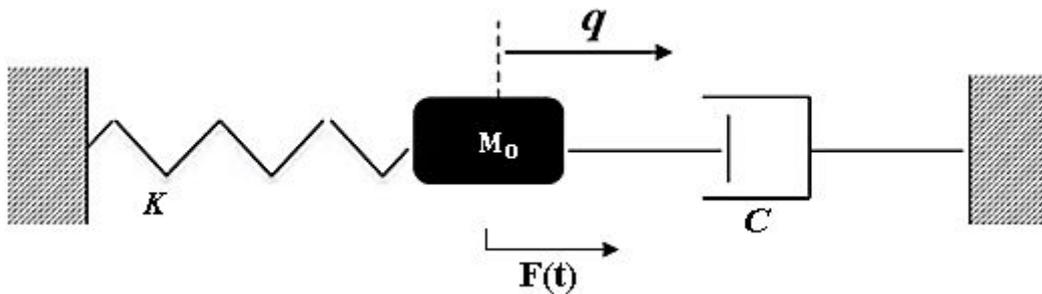


Figure I.4 Système Masse-Ressort-Amortisseur

$M_0$  la charge du système (masse indéformable), ressort sans masse qui fournit une force élastique proportionnelle et opposée au déplacement avec  $K$  appelé constante de raideur du système, est le coefficient de proportionnalité, un amortisseur qui fournit une force de freinage, proportionnelle et opposé à la vitesse avec  $\alpha$  le coefficient de proportionnalité appelé constante d'amortissement visqueux linéaire, et  $F(t)$  la force excitatrice.  $q$  est la coordonnée généralisé

#### 5-Formalisme de Lagrange :

Notre objectif est de déterminer l'équation différentielle du mouvement. Ce formalisme repose sur la fonction de Lagrange ( $L = T - U$ ), qui est donnée par la relation :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial W(f(t))}{\partial q} \quad \text{I.1}$$

$T$  : Energie cinétique du système

U : Energie potentielle du système

D : Fonction de dissipation

W : Travail des forces extérieures (travail de l'excitation)

$$\text{Avec } D = \frac{1}{2} \alpha \dot{q}^2 \quad \text{I.2}$$

$\alpha$  : Coefficient d'amortissement

$\dot{q}$  : coordonnée généralisée (paramètres indépendants ( $\dot{x}$ ,  $\dot{\theta}$ ))

Hypothèses :

1) Système à fonction de force (dérive d'un potentiel) (pour permettre d'utiliser le formalisme).

2) Oscillateur de faibles amplitudes :

$$\frac{\partial T}{\partial q} = 0 \text{ et } \frac{\partial U}{\partial \dot{q}} = 0 \text{ pour que le système reste linéaire}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial (T-U)}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial W(f(t))}{\partial q} \quad \text{I.3}$$

On pose  $T-U = L$ , appelée fonction de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial W(f(t))}{\partial q} \quad \text{I.4}$$

Si  $\frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = 0$  pas de dissipation, on dit qu'on a oscillateur non amorti

Si  $\frac{\partial D}{\partial \dot{q}} \neq 0$  on dit qu'on a un oscillateur amorti

Si  $\frac{\partial W(f(t))}{\partial q} = 0$  on dit qu'on a un oscillateur libre

Si  $\frac{\partial W(f(t))}{\partial q} \neq 0$  on dit qu'on a un oscillateur forcé.

6-Equation différentielle du mouvement :

On prendra un modèle d'un oscillateur représenté sur la figure I.4, précédente et on applique le formalisme de Lagrange pour déterminer l'équation différentielle du mouvement.

On détermine l'énergie cinétique T, potentielle U, fonction de dissipation D et l'énergie d'excitation W.

$$T = \frac{1}{2} M_0 \dot{x}^2 \quad \text{I.5}$$

$$U = \frac{1}{2} K x^2 \quad \text{I.6}$$

$$D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2 \quad \text{I.7}$$

$$W = F(t) x \quad \text{I.8}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = K x \quad \text{I.9}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = M_0 \ddot{x} \quad \text{I.10}$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \alpha \dot{x} \quad \text{I.11}$$

$$\frac{\partial W}{\partial q} = F(t) \quad \text{I.12}$$

On obtient l'équation différentielle qui représente le mouvement de l'oscillateur sous la forme :

$$M_0 \ddot{x} + K x + \alpha \dot{x} = F(t) \quad \text{I.13}$$

Qu'on peut l'écrire aussi :  $\ddot{x} + \frac{K}{M_0} x + \frac{\alpha}{M_0} \dot{x} = \frac{F(t)}{M_0}$

$$\text{Ou } \ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\lambda \dot{x} = B(t) \quad \text{I.14}$$

$\omega_0^2 = \frac{K}{M_0}$  d'où  $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M_0}}$  qu'on appelle pulsation propre.

$2\lambda = \frac{\alpha}{M_0}$  d'où  $\lambda = \frac{\alpha}{2M_0}$  qu'on appelle facteur d'amortissement.

$B(t) = \frac{F(t)}{M}$  qu'on appelle la fonction d'excitation.

Application : Trouver l'équation différentielle qui représentera le mouvement de l'oscillateur de la figure I.5:

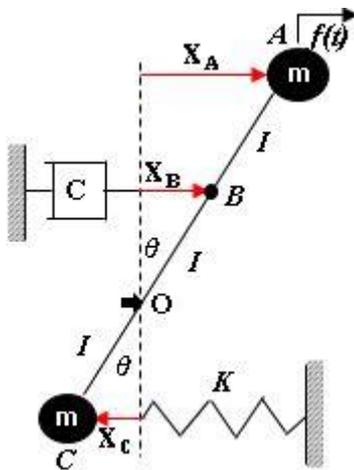


Figure I.5 : système ressort, deux masses avec amortisseur

Déterminons le nombre de degré de libertés.

Nombre de paramètres du mouvements sont :  $x_A, x_B, x_C$  et  $\Theta$ , donc  $N=4$ .

Nombre de liaisons  $R$  :

$x_A = 2l \sin \Theta, x_B = l \sin \Theta, x_C = -l \sin \Theta$ , donc 3 liaisons

Nombre de degré de libertés  $d = 4 - 3 = 1$

Energie cinétique :

$$T = \frac{1}{2} m \dot{X}_A^2 + \frac{1}{2} m \dot{X}_C^2$$

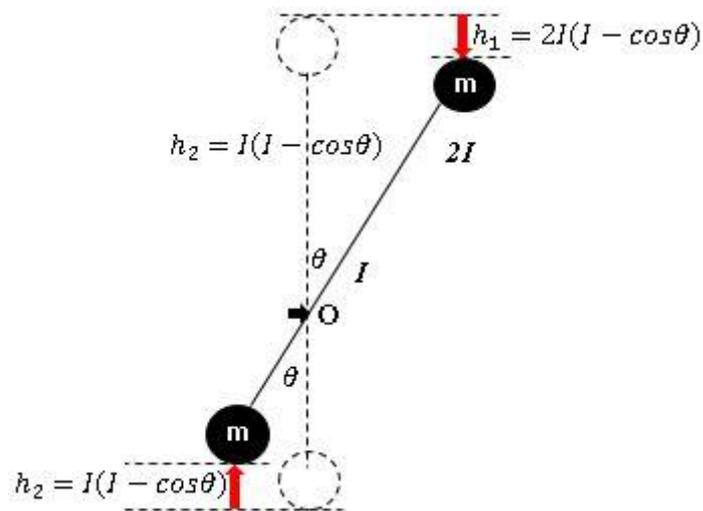
Pour des faibles oscillations ( $\Theta \ll 1$ ) on supposera :

$$X_A = 2l\Theta, \quad X_B = l\Theta, \quad X_C = -l\Theta \text{ d'où}$$

$$T = \frac{1}{2} m (2l\dot{\Theta})^2 + \frac{1}{2} m (-l\dot{\Theta})^2 = \frac{1}{2} (5ml^2) \dot{\Theta}^2 = \frac{1}{2} M_0 \dot{\Theta}^2$$

Avec  $M_0 = 5ml^2$

Energie potentielle :



$$U = \frac{1}{2} k X_C^2 - mgh_1 + mgh_2 = \frac{1}{2} k X_C^2 - mg (2l (1 - \cos\Theta)) + mg (l (1 - \cos\Theta))$$

Pour des faibles oscillations :  $\cos \Theta = 1 - \frac{\Theta^2}{2}$

$$U = \frac{1}{2} k X_C^2 - \frac{mgl}{2} \Theta^2 = \frac{1}{2} k l^2 \Theta^2 - \frac{mgl}{2} \Theta^2 = \frac{1}{2} (kl^2 - mgl) \Theta^2 = \frac{1}{2} K_0 \Theta^2$$

Avec  $K_0 = kl^2 - mgl$

Fonction de dissipation :

$$D = \frac{1}{2} \alpha \dot{X}_B^2 = \frac{1}{2} \alpha (l \dot{\Theta})^2 = \frac{1}{2} (\alpha l^2) \dot{\Theta}^2 = \frac{1}{2} \alpha_0 \dot{\Theta}^2$$

Avec  $\alpha_0 = \alpha l^2$

Le travail :

$$W = F X_A = F (2l) \Theta = (2 F l) \Theta = F(t) \Theta$$

Avec  $F(t) = 2 F l$

On appliquant le formalisme de Lagrange :  $L = T - U$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial (T-U)}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial W(f(t))}{\partial \theta}$$

$$M_0 \ddot{\Theta} + K_X + \alpha_0 \dot{\Theta} = F(t)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{\theta}} \right) = 5ml^2 \ddot{\Theta}, \quad - \frac{\partial (T-U)}{\partial \theta} = (kl^2 - mgl)\Theta, \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = \alpha l^2 \dot{\Theta}, \quad \frac{\partial W(f(t))}{\partial \theta} = 2 F l$$

$$\text{On obtient donc : } 5ml^2 \ddot{\Theta} + (kl^2 - mgl)\Theta + \alpha l^2 \dot{\Theta} = 2 F l$$

On déduit l'équation différentielle :

$$\ddot{\Theta} + \left( \frac{kl^2 - mgl}{5ml^2} \right) \Theta + \frac{\alpha l^2}{5ml^2} \dot{\Theta} = \frac{2 F l}{5ml^2}$$

La pulsation propre vaut :

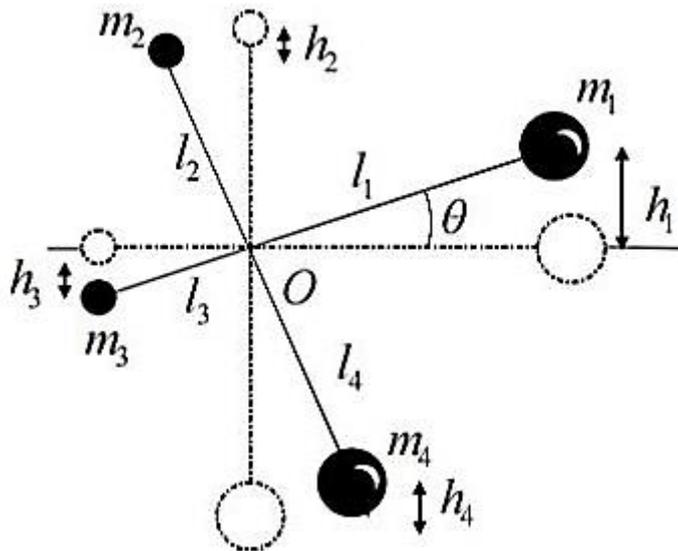
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{(kl^2 - mgl)}{5ml^2}}$$

et le facteur d'amortissement vaut :

$$\lambda = \frac{\alpha l^2}{10ml^2}$$

Exercice non résolu :

Le schéma ci-dessous représente un système en état de mouvement. La position initial est représenté en pointillé. Les deux tiges ont une masse négligeable. Les boules noires sont ponctuelles. 1) Déterminer le nombre de degré de liberté. 2) Trouver l'énergie cinétique T et l'énergie potentielle en fonction de  $\Theta$ . 3) Donner l'équation différentielle du mouvement pour des faibles oscillations, en déduire La pulsation propre et le facteur d'amortissement.





# Chapitre II

## Oscillations libres des systèmes à un degré de liberté

## A: Oscillations libres non amorties

Un système oscillant en absence de toutes force d'excitation, est appelé oscillateur libre.

### A.1 - Oscillateur harmonique :

En mécanique, on appelle oscillateur harmonique un oscillateur qui, dès qu'il soit écarté de sa position d'équilibre d'une distance  $x$  (ou angle  $\Theta$ ), est soumis à une force de rappel opposée et proportionnelle à l'écartement  $x$  (ou  $\Theta$ ) :

$$F = -Cx$$

$C$ : une constante positive.

Exemples :

a- Le système masse-ressort (figure II.1) est un oscillateur harmonique car la force de rappel est :

$$T = -Kx$$

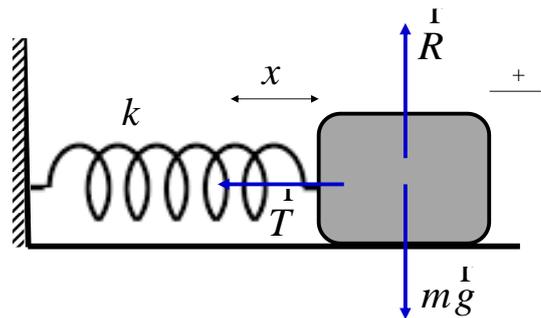


Figure II.1 : Système masse ressort

b- La force de rappel du pendule simple (figure II.2) est  $F_{\theta} = -mg \sin \Theta$ .

Le pendule devient un oscillateur harmonique lorsque  $\Theta \ll 1$ , car pour  $\Theta \ll 1$ :  $F_{\theta} \approx -mg\Theta$

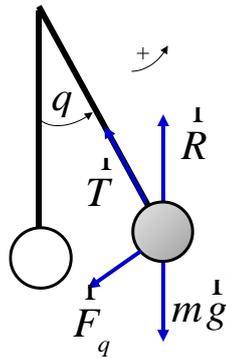


Figure II.2 : Pendule simple

A.2- Pulsation propre d'un oscillateur harmonique :

L'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique est linéaire, elle est de la forme :

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \tag{II.1}$$

(En mécanique  $q = x, y, z, \Theta, \phi, \dots$ ) En électricité  $q = i, u, q, \dots$ )

L'équation horaire  $q(t)$  (Solution de (II.1)) est de la forme :

$$q(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi) \tag{II.2}$$

$\omega_0$  est appelé pulsation propre car elle ne dépend que des grandeurs propres à l'oscillateur.

L'amplitude  $A$  et la phase  $\phi$  dépendent des conditions initiales.

Remarques : 1- Un système physique dont l'équation est linéaire est appelé système linéaire.

2- Le terme à côté de  $q$  dans l'équation II.1 doit être positif pour qu'il ait oscillation.

Exemples :

a ) Trouver à l'aide du principe fondamental de la dynamique (PFD) l'équation du mouvement du système (figure II.3), calculer sa pulsation propre pour  $m = 1 \text{ kg}$  et  $K = 3 \text{ N/m}$ . Trouvez l'amplitude  $A$  et la phase  $\phi$  sachant qu'initialement la masse est poussée 2 cm vers le bas puis lancée vers le haut à une vitesse de 2 cm/s.

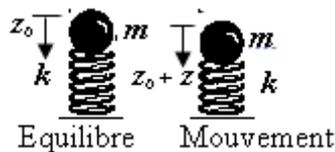


Figure II.3 : Système masse ressort

Réponse :

PFD en équilibre :  $\sum \vec{F} = \vec{0} \rightarrow m \vec{g} + \vec{T} = \vec{0} \rightarrow mg - kz_0 = 0$

$z_0$  est la longueur de compression du ressort à l'équilibre.

$z$  est la longueur de compression du ressort lors du mouvement.

PFD en mouvement :  $\sum \vec{F} = m \vec{a} \rightarrow m \vec{g} + \vec{T} = m \vec{a} \rightarrow mg - k(z+z_0) = m\ddot{z}$

Grace à l'équation de l'équilibre  $mg - kz_0 = 0$ , l'équation du mouvement se simplifie :

$$\ddot{z} + \frac{k}{m} z = 0$$

La pulsation propre est  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{3}$  rad/s

L'équation horaire est  $z(t) = A \sin(\sqrt{3}t + \varphi)$ . Utilisons les conditions initiales pour trouver  $A$  et  $\varphi$  :

$z(0) = A \sin\varphi = 2$  cm et  $\dot{z}(0) = A\sqrt{3} \cos\varphi = -2$  cm/s on trouvera :

$\text{tg } \varphi = -\sqrt{3}$  d'où  $\varphi = \frac{2\pi}{3}$  et  $A \approx 2.3$  cm.

b) Trouver à l'aide de la loi des mailles l'équation du mouvement de la charge  $q$  dans le circuit (figure II.4), puis déduire la pulsation propre  $\omega_0$ .

Réponse : La loi des mailles s'écrit :

$$U_C + U_L = 0 \rightarrow \frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} = 0 \rightarrow \ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0.$$

La pulsation propre est donc  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

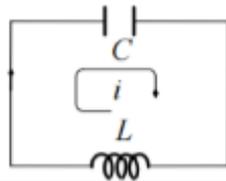


Figure II.4 : Circuit LC

### A.3- L'énergie d'un oscillateur harmonique :

L'énergie d'un oscillateur harmonique est la somme de ses énergies cinétiques et potentielles :

$$E = T + U \quad \text{II.3}$$

L'énergie cinétique de translation d'un corps de masse  $m$  et de vitesse  $v$  est :

$$T_{\text{translation}} = \frac{1}{2} m v^2 \quad \text{II.4}$$

L'énergie cinétique de rotation d'un corps de moment cinétique  $I_\Delta$  autour d'un axe  $\Delta$  et de vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  est :

$$T_{\text{rotation}} = \frac{1}{2} I_\Delta \dot{\theta}^2 \quad \text{II.5}$$

L'énergie potentielle d'une masse  $m$  dans un champs gravitationnel constant  $g$  est:

$$U_{\text{masse}} = mgh \text{ (Lors d'une ascension d'une hauteur } h) \quad \text{II.6}$$

$$U_{\text{masse}} = - mgh \text{ (Lors d'une descente d'une hauteur } h) \quad \text{II.7}$$

L'énergie potentielle d'un ressort de torsion de raideur  $K$  lors d'une déformation  $x$  est :

$$U_{\text{ressort}} = \frac{1}{2} Kx^2 \quad \text{II.8}$$

L'énergie potentielle d'un ressort à boudin de raideur  $K$  lors d'une déformation  $\Theta$  est :

$$U_{\text{ressort}} = \frac{1}{2} K\Theta^2 \quad \text{II.9}$$

Remarque : L'énergie totale  $E = T + U$  est conservé (constante) durant le mouvement :

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad \text{II.10}$$

Cette équation de conservation donne l'équation du mouvement des systèmes conservés.

Exemple :

Trouvons les énergies cinétique, potentiel et total du système précédent de la figure II.3, en déduire l'équation du mouvement à partir de la conservation de l'énergie totale.

$$T = \frac{1}{2} m \dot{z}^2, U = \frac{1}{2} k (z+z_0)^2 - mg(z+z_0).$$

$$U = \frac{1}{2} k z^2 + k z_0 z - mgz - mgz_0 + \frac{1}{2} k z_0^2$$

Grâce à la condition d'équilibre  $mg - kz_0 = 0$ . On a  $kz_0 z - mgz = 0$ .

$U$  se simplifie alors en  $U = \frac{1}{2} k z^2 - mgz_0 + \frac{1}{2} k z_0^2 = \frac{1}{2} k z^2 + C^{\text{te}}$ .

L'énergie totale qui est la somme de l'énergie cinétique et potentielle s'écrit :

$$E = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{1}{2} k z^2 + C^{\text{te}}.$$

Dérivant  $E$  :

$\frac{dE}{dt} = 0 \rightarrow m \dot{z} \ddot{z} + k z \dot{z} = 0 \rightarrow \ddot{z} + \frac{k}{m} z = 0$ , qui est bien l'équation du mouvement trouvée à l'aide de PFD.

A.4- Condition d'équilibre :

La condition d'équilibre est  $F = 0$ , Si l'équilibre est en  $x = x_0$ , on écrit

$F|_{x=x_0} = 0$ . Pour une force dérivant d'un potentiel ( $F = \frac{\partial U}{\partial x}$ ), la condition d'équilibre s'écrit :

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=x_0} = 0 \quad \text{II.11}$$

On distingue deux types d'équilibre, le premier équilibre d'un système est dit stable si, une fois écarté de sa position initiale, il y retourne. Le système retourne à son équilibre si F est une force de rappel. Puisque  $F = -Cx$ , on aura une force de rappel si  $C > 0$ .

Comme  $C = -\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ , la condition d'équilibre stable s'écrit :

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_{x=x_0} > 0 \quad \text{II.12}$$

Cette condition est aussi la condition d'oscillation.

Le deuxième type d'équilibre d'un système est dit instable si le système ne regagne pas son équilibre lors d'un écartement, c'est à dire  $C < 0$ . La condition d'équilibre instable s'écrit donc :

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_{x=x_0} < 0 \quad \text{II.13}$$

Pour les rotations les équations décrites avant deviennent : pour condition d'équilibre :

$$\left. \frac{\partial U}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} = 0 \quad \text{II.14}$$

Pour condition d'équilibre stable :

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\theta_0} > 0 \quad \text{II.15}$$

Pour condition d'équilibre instable :

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\theta_0} < 0 \quad \text{II.16}$$

Exemple :

Trouver les positions d'équilibre et leur nature pour le système de la figure II.5, qui comporte un pendule, composé d'une tige de longueur  $l$  et masse ponctuelle  $m$ .

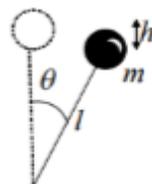


Figure II.5 : pendule simple inversé

Réponse :

L'énergie potentielle lors d'un écartement  $\Theta$  de la verticale est :

$U = -mgh = -mg(l - l \cos\Theta)$ . Les positions d'équilibre sont données par  $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$ .

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \rightarrow -mgl \sin\Theta = 0 \rightarrow \sin \Theta = 0$$

Les positions d'équilibres sont donc :  $\Theta = 0$  ou  $\Theta = \pi$

$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} |_{\Theta=0} = -mgl \cos\Theta |_{\Theta=0} = -mgl < 0$ :  $\Theta = 0$  est une position d'équilibre instable.

$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} |_{\Theta=\pi} = -mgl \cos\Theta |_{\Theta=\pi} = mgl > 0$ :  $\Theta = \pi$  est une position d'équilibre stable.

## B: Oscillations libres des systèmes amorties

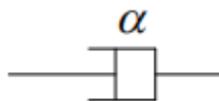
### B.1- Force d'amortissement :

Dans le chapitre précédent, nous n'avons pas tenu compte de certaines réalités physiques. En effet nous n'avons pas pris en compte les forces de frottement qui sont à l'origine de la perte d'énergie mécanique du système sous forme de chaleur. Dans ce chapitre, nous allons tenir compte de ces réalités en nous limitant toutefois au cas simple où les pertes sont dues à des frottements visqueux pour lesquels les forces de frottement, qui s'opposent au mouvement, sont proportionnelles à la vitesse.

Dans ce cas les frottements visqueux, les forces de frottements sont de la forme :

$$F = -\alpha v \quad \text{II.17}$$

$\alpha$  est une constante réelle positive appelée coefficient de frottement et  $v$  est la vitesse du corps en mouvement. En mécanique, l'amortisseur est schématisé par :



La vitesse  $v$  est dans ce cas la vitesse relative des deux bras de l'amortisseur.

### B.2- L'équation de Lagrange des systèmes amortis :

Rappelons l'équation de Lagrange associée à un système à un degré de liberté dont l'évolution au cours du temps se ramène à l'étude de la coordonnée généralisée  $q$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = F_q \quad \text{II.18}$$

$F_q$  représente la composante suivant  $q$  de la résultante des forces généralisées qui ne dérivent pas d'un potentiel.

Nous nous intéressons au cas particulier des forces de frottement définies par la force généralisée

$$F_q = -\alpha\dot{q} \quad \text{II.19}$$

En introduisant la fonction de dissipation  $D = \frac{1}{2} \alpha \dot{q}^2$ , nous pouvons écrire,

$$F_q = -\alpha\dot{q} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}} \quad \text{II.20}$$

(en translation  $D = \frac{1}{2} \alpha v^2 = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2$ . En rotation  $D = \frac{1}{2} \alpha v^2 = \frac{1}{2} \alpha (l\dot{\theta})^2$ ). En électricité

$$D = \frac{1}{2} R i^2 = \frac{1}{2} R \dot{q}^2$$

L'équation de Lagrange des systèmes amortis s'écrit alors :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}} \quad \text{II.21}$$

### B.2.1 Equation du mouvement des systèmes amortis :

L'équation du mouvement des systèmes linéaires amortis par  $F_q = -\alpha\dot{q}$  est de la forme :

$$\ddot{q} + 2\lambda + \omega_0^2 q = 0 \quad \text{II.22}$$

$\lambda$  est appelé facteur (coefficient ou constante) d'amortissement.  $\omega_0$  est la pulsation propre.  $\frac{\omega_0}{2\lambda} = Q$  est appelé facteur de qualité.

### B.2.2 Résolution de l'équation du mouvement :

La solution de l'équation II.22 est de la forme  $q(t) = A e^{rt}$ . En injectant ceci dans II.22 on obtient :

$$r^2 A e^{rt} + 2\lambda r A e^{rt} + A \omega_0^2 e^{rt} = 0 \quad \text{II.23}$$

On en déduit l'équation caractéristique :  $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$  II.24

On distingue alors trois solutions suivant le discriminant réduit  $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2$ .

$\lambda^2 - \omega_0^2 > 0$  : (amortissement important :  $Q < 0.5$ )

Deux solutions réelles pour l'équation caractéristique :

$$r_1 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \quad \text{et} \quad r_2 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

La solution de l'équation différentielle s'écrit dans ce cas :  $q(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$ , soit :

$$q(t) = A_1 e^{\left(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right)t} + A_2 e^{\left(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right)t} \quad \text{II.25}$$

$A_1$  et  $A_2$  sont des constantes d'intégration définies par les conditions initiales

On dit que le système est apériodique ou suramortie.

Dans la figure II.6 représente  $q$  en fonction du temps dans le cas particulier où  $q(0)=0$  et  $\dot{q}(0)=0$ .

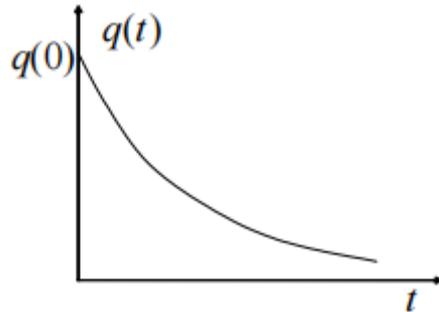


Figure II.6 : Variation de  $q$  en fonction du temps

1)  $\lambda^2 - \omega_0^2 = 0$  : (amortissement critique :  $Q=0.5$ )

Une solution double pour l'équation caractéristique :

$$r_1 = r_2 = -\lambda$$

La solution générale de l'équation différentielle est de la forme :

$$q(t) = (A_1 + A_2 t) e^{\lambda t}, \text{ soit:}$$

$$q(t) = e^{-\lambda t} (A_1 + A_2 t) \quad \text{II.26}$$

On dit qu'on a un amortissement critique. Dans la figure II.7 représente  $q$  en fonction du temps dans le cas particulier où  $q(0)=0$  et  $\dot{q}(0)=0$ .

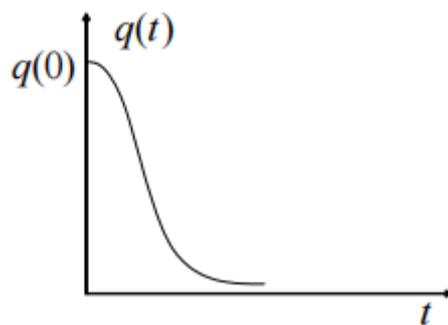


Figure II.7 : Variation de  $q$  en fonction du temps

2)  $\lambda^2 - \omega_0^2 < 0$  : (amortissement faible :  $Q > 0.5$ )

Deux solutions complexes pour l'équation caractéristique :

$$r_1 = -\lambda - j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = 0 \quad r_2 = -\lambda + j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = 0$$

Le mouvement résultant est  $q(t) = Ae^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi)$  II.27

Avec  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$  II.28

$A$  et  $\varphi$  sont deux constantes d'intégration déterminées à partir des conditions initiales.

On dit que le système est sous-amorti ou pseudo-périodique.  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$  est appelée pseudo-pulsation et  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$  est appelé pseudo-période.

Dans la figure II.8 représente  $q$  en fonction du temps dans le cas particulier où  $q(0)=0$  et  $\dot{q}(0)=0$ .

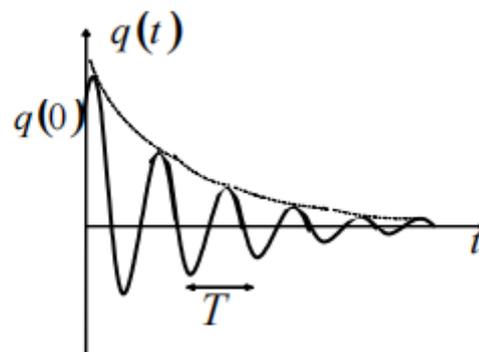


Figure II.8 : Variation de  $q$  en fonction du temps

### B.3- Décrément logarithmique :

Pour évaluer la diminution exponentielle de l'amplitude du mouvement pseudo-périodique, nous utilisons le logarithme. Le rapport  $\delta = \ln \frac{q(t)}{q(t+T)}$  (ou encore  $\frac{1}{n} \ln \frac{q(t)}{q(t+nT)}$ ) : est appelé le décrément logarithmique. En utilisant l'équation II.27, on trouve  $\delta = \ln \frac{Ae^{-\lambda t}}{Ae^{-\lambda(t+T)}}$

On trouve  $\delta = \lambda T$  II.28

Exemples :

- a) Soit le système masse-ressort de la figure II.9. Trouver l'équation du mouvement en utilisant le lagrangien.

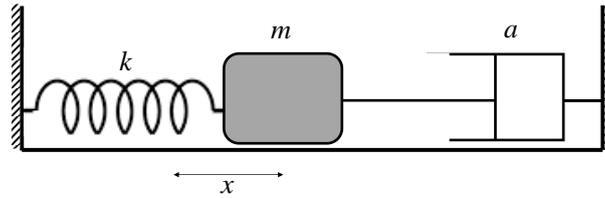


Figure II.9 : Système masse-ressort-amortisseur

Réponse :  $L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$

$D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2$ . L'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} \quad \rightarrow \quad m\ddot{x} + kx = - \alpha \dot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

b) Soit le système disque ressort de la figure II.10. Pour  $\Theta \ll 1$ , trouver l'équation du mouvement à partir du Lagrangien. Donner la nature du mouvement pour  $M= 1\text{kg}$ ,  $k=2\text{N/m}$ ,  $R=10\text{cm}$ ,  $r=5\text{ cm}$ ,  $\alpha=8\text{Ns/m}$ .

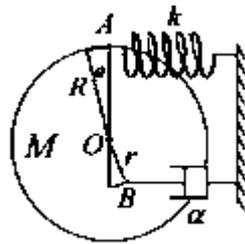


Figure II.10 : Système disque-ressort-amortisseur

Réponse :

$$L = T - U. \quad T = \frac{1}{2} I_O \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} MR^2 \right) \dot{\theta}^2. \quad U = \frac{1}{2} k(R\Theta)^2.$$

$$L = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} MR^2 \right) \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} k(R\Theta)^2. \quad D = \frac{1}{2} \alpha v_B^2 = \frac{1}{2} \alpha (r\dot{\theta})^2$$

L'équation de Lagrange nous donne alors l'équation du mouvement :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} MR^2 \ddot{\theta} + kR^2 \Theta = - \alpha r^2 \dot{\theta} \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{2\alpha r^2}{MR^2} \dot{\theta} + \frac{2k}{M} \Theta = 0$$

C) Soit le circuit électrique représenté sur la figure II.11. Trouver à l'aide de la loi des mailles l'équation du mouvement de la charge q, puis déduire la pulsation propre.

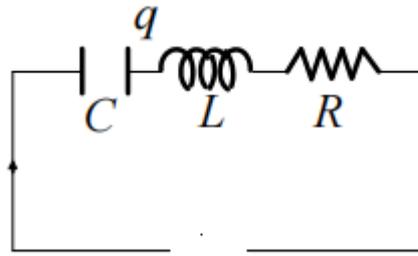


Figure II.10 : Circuit RLC

La loi des mailles s'écrit :

$$u_C + u_L + u_R = 0 \rightarrow \frac{1}{C} \int i dt + L \frac{di}{dt} + Ri = 0$$

Avec  $u_C$ ,  $u_L$  et  $u_R$  les tensions respectivement aux bornes de la capacité, la bobine L et la résistance R.

On sait que  $dq = i dt$  d'où on obtient :

$$\frac{q}{C} + L \ddot{q} + R \dot{q} = 0$$

L'équation du mouvement s'écrit donc :

$$\ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{1}{LC} q = 0$$

Par analogie à l'oscillateur mécanique :

$$\frac{R}{L} = 2\lambda \quad \text{et la pulsation propre } \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Analogie entre le système mécanique "Masse- Ressort" et le système électrique "L-C"

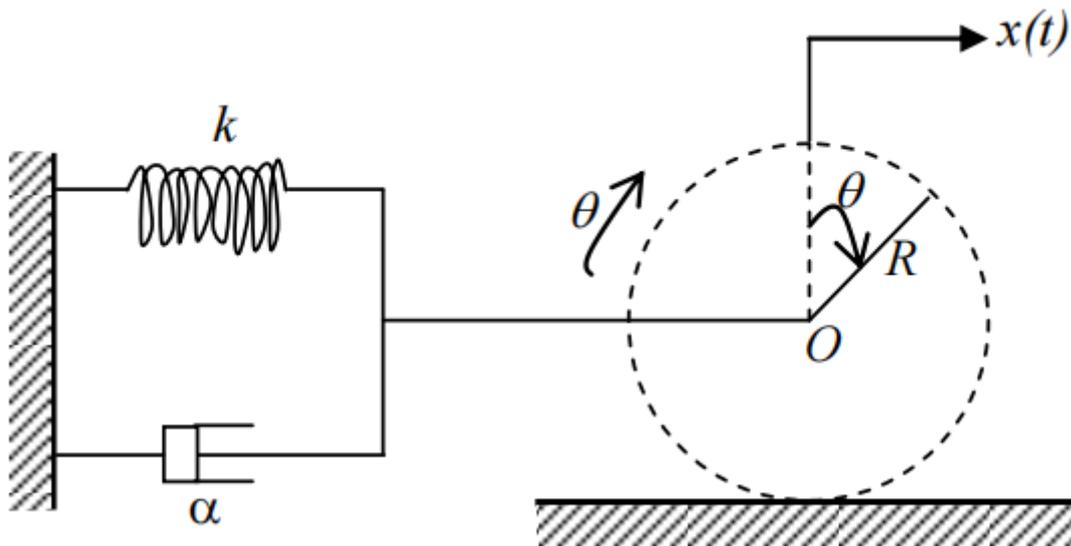
Système mécanique	Système électrique
Déplacement : $x(t)$	Charge électrique : $q(t)$
Vitesse : $\dot{x}(t)$	Courant électrique : $i = \frac{dq}{dt}$
Accélération : $\ddot{x}(t)$	Variation du courant : $\dot{q}$
Masse : $m$	Inductance, bobine, self : $L$
Ressort : $K$	Inverse de la capacité : $\frac{1}{C}$
Force de rappel : $K x$	d.d.p entre les bornes du condensateur : $\frac{q}{C}$
Force d'inertie : $m\ddot{x}$	d.d.p entre les bornes de la bobine : $L \dot{q}$
Energie Potentielle : $\frac{1}{2} K x^2$	Energie électrique : $\frac{1}{2C} q^2$
Energie cinétique : $\frac{1}{2} m \dot{x}^2$	Energie magnétique : $\frac{1}{2} L \dot{q}^2$

Exercice 1 (non résolu) :

Soit le système mécanique figure ci-dessous, composé d'un disque ( $M, R$ ) qui peut rouler sans glisser sur un plan horizontal, d'un ressort  $k$  et d'un amortisseur de coefficient de frottement visqueux  $\alpha$ .

- 1- Déterminer l'équation différentielle du mouvement en fonction de  $\lambda$  et  $\omega_0$ .
- 2- Trouver l'équation du mouvement.

On donne :  $I_0 = \frac{1}{2} M R^2$



Exercice 2 (non résolu) :

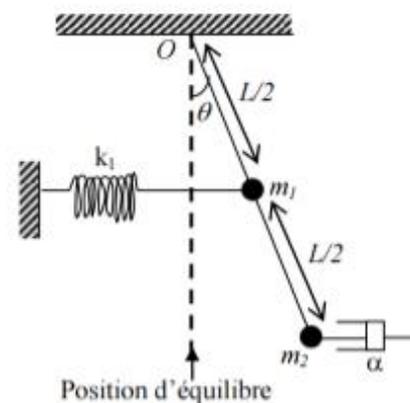
Le système est constitué de 2 masses  $m_1$  et  $m_2$ , d'une tige de masse négligeable et de longueur  $L$  et d'un ressort  $k_1$  et d'un amortisseur de coefficient de frottement visqueux  $\alpha$ .

1- Ecrire l'équation différentielle du mouvement, sachant que le système effectue des oscillations de faible amplitude.

2- Déterminer la pulsation propre du système.

3- Trouver l'équation du mouvement, sachant

que :  $\theta(0) = \theta_0$  et  $\dot{\theta}(0) = 0$ . On donne :  $\frac{m_1}{4} = m_2 = m$  et  $\frac{k_1}{4} = k$



# Chapitre III

## Oscillations forcées des systèmes à un degré de liberté

Pour vaincre les frottements responsables des pertes d'énergies et des ralentissements des systèmes en mouvement, il faut appliquer une force externe qu'on appelle excitation.

### 1- Equation de Lagrange des systèmes forcés :

Si en plus du frottement  $F_q = -\alpha\dot{q}$ , il existe une force d'excitation externe  $F(t)$ , l'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial (T-U)}{\partial x} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + F(t) \quad \text{III.1 (En translation)}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial (T-U)}{\partial \theta} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + M(t) \quad \text{III.2 (En rotation, M est le moment de la force F)}$$

L'équation de mouvement des systèmes linéaires amortis par  $F_q = -\alpha\dot{q}$  et excités par  $F(t)$  s'écrit en prenant comme  $q$  la coordonnées généralisée :

$$\ddot{q} + 2\lambda \dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{F(t)}{a} \quad \text{III.3} \quad \text{avec } a \text{ constante}$$

Pour un système mécanique le modèle physique est représenté (masse-ressort-amortisseur) sur la figure III.1 :

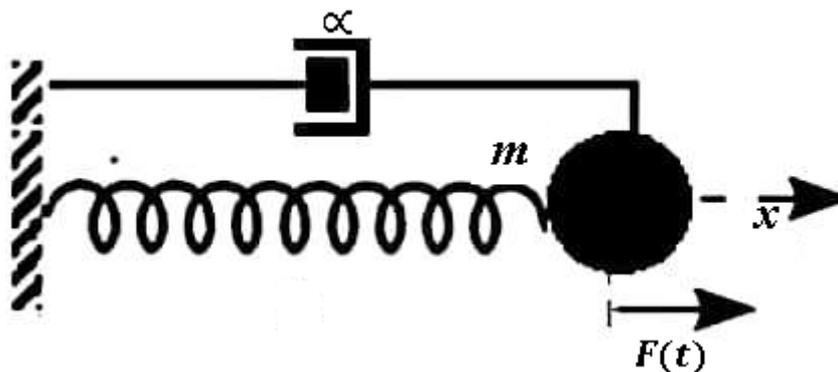


Figure III.1 Système masse-Ressort-Amortisseur-Force excitatrice

L'équation du mouvement du système ci-dessus est donnée par :

$$m\ddot{x} = -kx(t) - \alpha\dot{x} + F(t) \quad \text{III.4}$$

Où  $F_r(t) = -kx(t)$  est la force de rappel du ressort,  $F_{fr} = \alpha\dot{x}(t)$  force de frottement et  $F(t)$  force appliquée au système. L'équation différentielle ci-dessus devient :

$$\ddot{x}(t) + 2\lambda \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{F(t)}{m} \quad \text{III.5}$$

Avec  $2\lambda = \frac{\alpha}{m}$  et  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

C'est une équation différentielle linéaire du second ordre non homogène à coefficients constants.

## 2- Résolution de l'équation du mouvement :

Supposant qu'à  $t=0$  la masse est au repos et sans vitesse initiale. A  $t=0$  aussi l'oscillateur est soumis à une force constante  $F(t)$ .

La solution de cette équation est composée de deux termes : une solution sans second membre (homogène)  $x_h(t)$  que nous avons déjà étudié (Sans excitation  $F(t)$ ) qui dépend du signe de  $\lambda^2 - \omega_0^2$ , elle s'appelle aussi solution transitoire car elle s'éteint au cours du temps (Voir chapitre II) et une solution particulière  $x_p(t)$  de l'équation non homogène (avec  $F(t)$ ), elle s'appelle solution permanente car elle dure tout au long du mouvement.

Cas d'une force extérieure sinusoïdale :

Dans le cas où  $F(t)$  est sinusoïdale de type :  $F(t) = F_0 \cos\Omega t$

avec  $\Omega$  la Pulsation de la force d'excitation externe appliquée au système.

L'équation du mouvement s'écrit sous la forme :

$$\ddot{x}(t) + 2\lambda \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{F_0}{m} \cos\Omega t \quad \text{III.6}$$

La solution permanente est de la forme :  $x_p(t) = A \cos(\Omega t + \varphi)$  III.7

$A$  est l'amplitude de la masse en réponse à la force extérieure et  $\varphi$  est le déphasage de la masse par rapport à la force extérieure.

On trouve  $A$  et  $\varphi$  à l'aide de la représentation complexe comme suit :

$$F_0 \cos\Omega t \rightarrow F_0 e^{j\Omega t}$$

$$x(t) = A \cos(\Omega t + \varphi) \rightarrow x(t) = A e^{j(\Omega t + \varphi)} = \underline{A} e^{j\Omega t} \quad \text{III.8}$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) + 2\lambda \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) &= \frac{F_0}{m} \cos\Omega t \rightarrow \ddot{x}(t) + 2\lambda \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{F_0}{m} e^{j\Omega t} \\ &\rightarrow -\Omega^2 \underline{A} e^{j\Omega t} + 2\lambda j\Omega \underline{A} e^{j\Omega t} + \omega_0^2 \underline{A} e^{j\Omega t} = \frac{F_0}{m} e^{j\Omega t} \\ &\rightarrow \underline{A} (-\Omega^2 + 2\lambda j\Omega + \omega_0^2) e^{j\Omega t} = \frac{F_0}{m} e^{j\Omega t} \\ &\rightarrow \underline{A} = \frac{\frac{F_0}{m}}{(\omega_0^2 - \Omega^2) + 2\lambda j\Omega} \quad \text{III.9} \end{aligned}$$

L'amplitude du mouvement est donc :

$$A = |\underline{A}| = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2 \Omega^2}} \quad \text{III.10}$$

La phase  $\varphi$  du mouvement (déphasage entre  $x(t)$  et  $F(t)$ ) est donnée par :

$$\tan \varphi = \frac{\text{Im}(\underline{A})}{\text{Re}(\underline{A})} = - \frac{2\lambda\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)} \quad \text{III.11}$$

Finalement la solution du mouvement en régime permanent est :

$$x_p(t) = A \cos(\Omega t + \varphi) \quad \text{avec } A \text{ donné par III.10 et } \varphi \text{ donnée par III.11}$$

### 3- Résonance :

La pulsation d'excitation  $\Omega$  pour laquelle l'amplitude  $A$  atteint son maximum est appelée pulsation de résonance notée  $\Omega_R$ .  $A$  est maximale lorsque  $\frac{\partial A}{\partial \Omega} = 0$ . D'après III.10 :

$$\frac{\partial A}{\partial \Omega} = 0 \rightarrow \frac{(-4\Omega(\omega_0^2 - \Omega^2) + 8\lambda^2\Omega)\left(\frac{F_0}{m}\right)}{2[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2]^{3/2}} = 0 \rightarrow -4\Omega(\omega_0^2 - \Omega^2) + 8\lambda^2\Omega = 0, \text{ soit}$$

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2} = \Omega_R \quad \text{III.12}$$

$$\text{D'une autre façon } \Omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \quad \text{III.13}$$

Avec  $Q = \frac{\omega_0}{2\lambda}$  facteur de qualité définie en chapitre II paragraphe B.2.1.

A cette pulsation l'amplitude est :

$$A_{\max} = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{4\lambda^2\omega_0^2 - 4\lambda^4}} \quad \text{III.14}$$

ou en fonction de facteur de qualité :

$$A_{\max} = \frac{\frac{F_0}{m}}{\omega_0^2} \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \quad \text{III.15}$$

Pour qu'il ait résonance il faut que :  $\omega_0^2 - 2\lambda^2 > 0 \rightarrow 1 - \frac{1}{4Q^2} > 0 \rightarrow Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

Le facteur de qualité doit donc être supérieur à  $\frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow$  l'amortissement doit être faible.

D'après l'équation (f),  $\tan \varphi = -\infty$  ( $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ ) lorsque  $\Omega = \omega_0$

Cette pulsation est appelée pulsation de résonance de phase.

### 4- Bande passante et facteur de qualité :

Soit  $P_F(t)$  la puissance instantanée fournie par la force d'excitation  $F(t)$  au système. En régime permanent, on obtient :

$$P_F(t) = \frac{dW}{dt} = F \dot{x} \quad W \text{ est le travail fournie.}$$

En utilisant l'équation III.7, on trouve :

$$P_F(t) = -F_0 \Omega A \cos \Omega t \sin(\Omega t + \varphi) = -\frac{1}{2} F_0 \Omega A [\sin \varphi + \sin(2\Omega t + \varphi)] \quad \text{III.16}$$

La puissance moyenne sur une période est :

$$\langle P_F \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P_F dt = -\frac{1}{2} F_0 \Omega A \sin \varphi = -\frac{1}{2} F_0 \Omega A \frac{\tan \varphi}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} \quad \text{III.17}$$

$$\text{D'après III.10 et III.11 : } \langle P_F \rangle = \frac{\Omega^2 \lambda \left(\frac{F_0^2}{m}\right)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2 \Omega^2} \quad \text{III.18}$$

La valeur maximale de la puissance moyenne  $\langle P_F \rangle$  est obtenue pour  $\Omega = \omega_0$  quelque soit la valeur de  $\lambda$ . Dans ce cas la valeur maximale de la puissance moyenne dissipée ou fournie vaut :

$$\langle P \rangle_{\max} = \frac{F_0^2}{4\lambda m} \quad \text{III.19}$$

La figure III.4 représente les variations, en fonction de  $\Omega$ , de la puissance moyenne fournie par la force excitation (ou d'une manière équivalente la puissance moyenne dissipée par les forces des frottements).

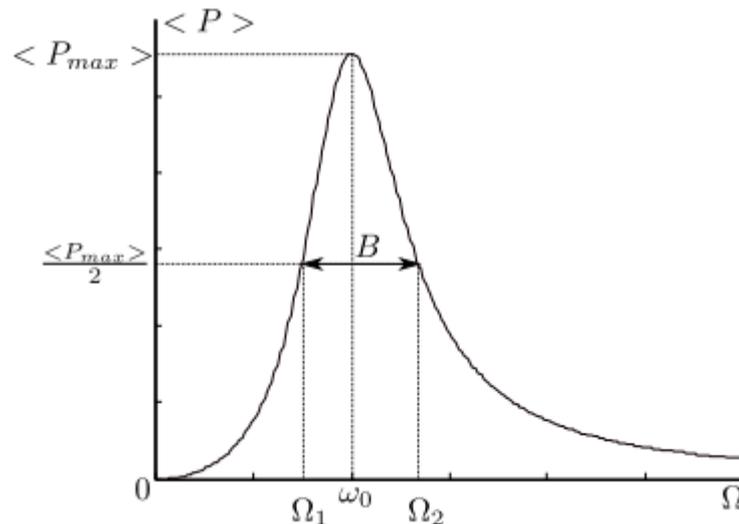


Figure III.4 : Les variations de la puissance moyenne en fonction de  $\Omega$ .

On définit par bande passante, la bande des pulsations autour de  $\Omega = \omega_0$  pour lesquelles

$\langle P \rangle = \langle P \rangle_{\max} / 2$ . Les deux pulsations  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , situées de part et d'autre de la pulsation  $\omega_0$  et pour lesquelles  $\langle P \rangle = \langle P \rangle_{\max} / 2$ , sont appelées pulsations de coupures. La bande passante  $B$  s'écrit :

$$B = \Omega_2 - \Omega_1 \quad \text{III.20}$$

Le calcul de  $B$  consiste à rechercher deux pulsations pour lesquelles  $\langle P \rangle = \langle P \rangle_{\max} / 2$ , (à faible amortissement :  $\lambda \ll \omega_0$ ) et d'après l'équation II.19; on trouve  $\Omega_1 \approx \omega_0 - \lambda$  et  $\Omega_2 \approx \omega_0 + \lambda$ .  
Donc

$$B = 2\lambda \quad \text{III.21}$$

Le facteur de qualité  $Q$  qui est égale à  $\frac{\omega_0}{2\lambda}$  on peut l'écrire égale à :

$$Q = \frac{\omega_0}{B}$$

III.22

La figure III.5 présente la variation de A en fonction de la pulsation d'excitation  $\Omega$  pour différentes facteur de qualité.

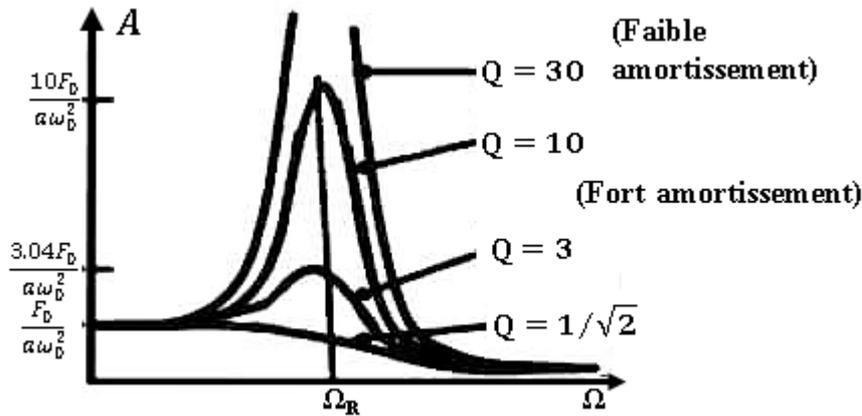


Figure III.5 : L'amplitude A en fonction de  $\Omega$

### 5- Excitation périodique :

Dans le cas d'excitation périodique, de période T, on procède à une généralisation du cas harmonique (série d'excitations sinusoïdales).

Soit une excitation périodique appliquée à un système amorti à un degré de liberté. L'équation différentielle qui régit ce système s'écrit :

$$\ddot{q} + 2\lambda \dot{q} + \omega_0^2 q = F(t)$$

L'excitation F(t) étant périodique, de période T, peut être écrite sous forme d'une série trigonométrique (ou série de Fourier):

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \quad \text{III.23}$$

L'équation différentielle s'écrit alors :

$$\ddot{q} + 2\lambda \dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \quad \text{III.24}$$

Avec  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  ,  $a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt$  ,  $a_n = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) \cos(n\omega t) dt$  et  $b_n = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) \sin(n\omega t) dt$

La réponse permanente (ou stationnaire) qui s'identifie avec la solution particulière pour  $t$  suffisamment élevé, peut alors être calculé pour chacune des composantes de l'excitation.

Pour résoudre le problème, on applique le principe de superposition : la réponse d'un système linéaire à une somme d'excitations extérieures soit la somme des réponses du même système à chacune des excitations décomposant la force extérieure.

## 6- Impédance mécanique :

### 6.1 Définition :

Considérons un système mécanique soumis à une force sinusoïdale  $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$ . En régime permanent, le point d'application de cette force se déplace avec une vitesse  $v(t) = V_0 \cos(\Omega t + \varphi)$ . On appelle impédance mécanique d'entrée du système mécanique, le rapport des amplitudes complexes de la force  $F$  et de la vitesse  $v$  :

$$\underline{Z} = \frac{F}{v} \quad \text{III.25}$$

### 6.2 Amortisseur :

Dans le cas d'un amortisseur, la force appliquée est reliée à la vitesse :

$$F = \alpha v$$

On en déduit l'impédance complexe d'un amortisseur :

$$\underline{Z} = \alpha \quad \text{III.26}$$

### 6.3 Masse :

Dans le cas d'une masse, la relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$F = m \frac{dv}{dt}$$

On en déduit l'impédance complexe d'une masse :

$$\underline{Z} = jm\Omega = m\Omega e^{j\frac{\pi}{2}} \quad \text{III.27}$$

### 6.4 Ressort :

Dans le cas d'un ressort de raideur  $K$ , la force  $f$  appliquée au ressort s'exprime en fonction de l'allongement par :  $f = K x$

On a  $v = \frac{dx}{dt}$  d'où  $x = \int v dt = \frac{V_0}{j\Omega} e^{j(\Omega t + \varphi)}$

On en déduit l'impédance complexe d'un ressort :

$$\underline{Z} = \frac{f}{v} = \frac{k}{j\Omega} = -j \frac{k}{\Omega} = \frac{k}{\Omega} e^{-j\frac{\pi}{2}} \quad \text{III.28}$$

Exercice (non résolu):

Dans la figure III.6, la masse est fixée à un ressort  $K$  et un amortisseur  $\alpha$ . On applique à la masse  $m$  une force  $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$ .

- 1- Trouver l'équation du mouvement forcé amorti.
- 2- Trouver la solution générale de l'équation différentielle, en calculant la solution homogène et la solution particulière.

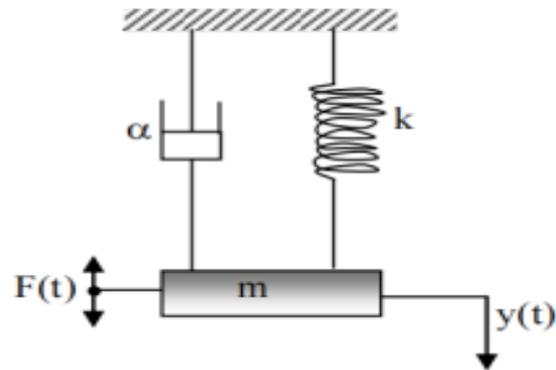


Figure III.6 de l'exercice cité au dessus

# Chapitre IV:

## Oscillations libres des systèmes à deux degrés de liberté

## 1- Introduction :

Les systèmes qui nécessitent deux coordonnées indépendantes pour spécifier leurs positions sont appelés systèmes à deux degrés de liberté, ils sont constitués de deux systèmes à un degré de liberté couplé. Il existe 3 types de couplages : par élasticité (fig.IV.1), inertiel (Fig.IV.2) et visqueux (fig.IV.3). On aura deux équations différentielles régissant l'évolution dans le temps de ces deux coordonnées.

Exemples :

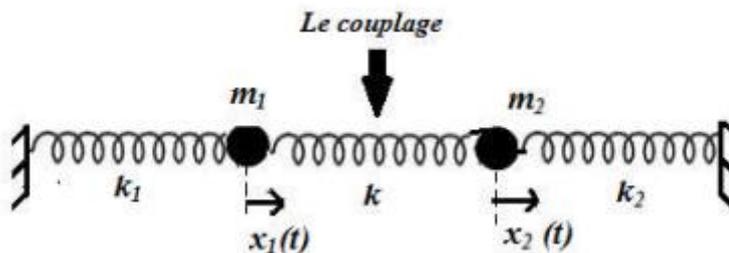


Figure IV.1 Couplage par élasticité (à travers un ressort)

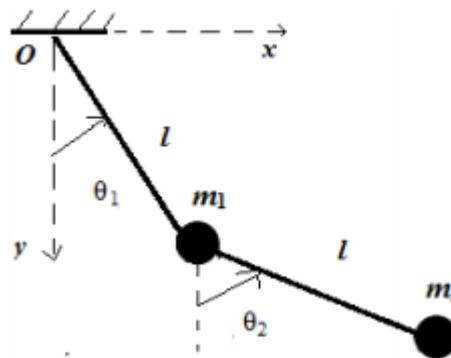


Figure IV.2 Couplage par inertie (à travers une masse)

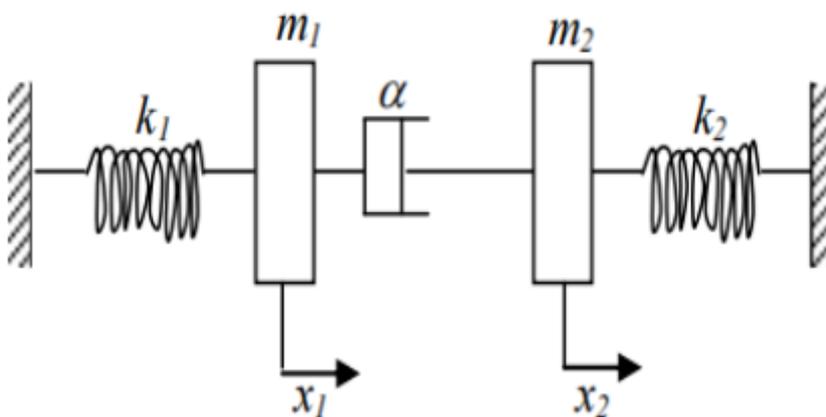


Fig.IV.3 Couplage visqueux (à travers un amortisseur)

## 2- Application :

Prenons la figure IV.2 et déterminons les 2 équations différentielles à partir des équations de Lagrange :

Déterminons d'abord l'énergie cinétique du système :

$$T = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2 \quad \text{avec } v_1 = (l\dot{\theta}_1) \quad \text{et} \quad v_2 = (l\dot{\theta}_2)$$

L'énergie potentielle :

$$U = m_1gh_1 + m_2gh_2$$

$h_1 = l - l \cos\theta_1$  et  $h_2 = 2l - 2l \cos\theta_2$  pour des petites oscillations on a  $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$  d'où on obtient :

$$U = m_1gl\frac{\theta_1^2}{2} + m_2gl\theta_2^2$$

$$L = T - U$$

Les équations différentielles :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0$$

On obtient après les dérivations les deux équations différentielles :

$$m_1l^2\ddot{\theta}_1 + m_1gl\theta_1 = 0 \quad \text{et} \quad m_2l^2\ddot{\theta}_2 + 2m_2gl\theta_2 = 0 \quad \text{on en déduit finalement}$$

$$\ddot{\theta}_1 + \frac{g}{l}\theta_1 = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{\theta}_2 + \frac{2g}{l}\theta_2 = 0$$

# Chapitre V

## Oscillations forcées des systèmes à deux degrés de liberté

### 1- Equation de Lagrange :

Les équations différentielles du mouvement oscillatoire forcé des systèmes à deux degrés de liberté sont :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_1} = F_1(t) \quad \text{V.1}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_2} = F_2(t) \quad \text{V.2}$$

$F_1(t)$  et  $F_2(t)$  sont les forces généralisées conjuguées des coordonnées généralisées respectives  $q_1$  et  $q_2$ .

### 2- Système masse-ressorts-masses :

Pour étudier les particularités des oscillations forcées des systèmes à deux degrés de liberté, étudions le système symétrique de la figure V.1 ci-dessous, soumis à une force horizontale  $F$  appliquée à la première masse.

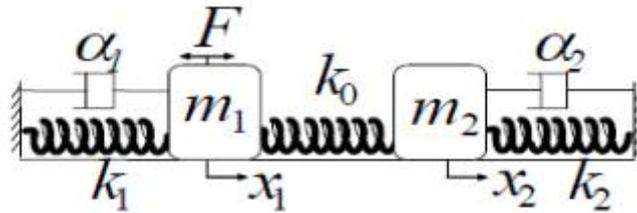


Figure V.1 : Système à deux degrés de liberté

Le Lagrangien est :  $L = T - U = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} K_1 x_1^2 - \frac{1}{2} K_0 (x_1 - x_2)^2 - \frac{1}{2} K_2 x_2^2$

Les deux équations de Lagrange s'écrivent :-

(Pour  $D = \frac{1}{2} \alpha_1 \dot{x}_1^2 + \alpha_2 \dot{x}_2^2$  et  $F = F_0 \cos \omega t$ )

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} + F$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_2}$$

$$m_1 \ddot{x}_1 + (K_0 + K_1) x_1 + \alpha_1 \dot{x}_1 - K_0 x_2 = F_0 \cos \omega t$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + (K_0 + K_2) x_2 + \alpha_2 \dot{x}_2 - K_0 x_1 = 0$$

La solution générale de système d'équations différentielles est égale à la somme de la solution homogène et d'une solution particulière.

Considérant le cas d'un régime permanent sinusoïdal. En raison de l'amortissement, la solution de l'équation homogène tend vers 0 lorsque le temps augmente. Donc lorsque le régime permanent s'établit, la solution devient égale à la solution permanente et s'écrit alors:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \quad , \quad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

Avec  $A_1$  et  $A_2$  sont les amplitudes respectivement des masses  $m_1$  et  $m_2$  en réponse à la force extérieure,  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  le déphasages respectivement des masses  $m_1$  et  $m_2$  par rapport à la force extérieure.

$A_1, A_2, \varphi_1$  et  $\varphi_2$  dépendent de la pulsation d'excitation  $\omega$  et de  $F_0$ , pour trouver leur expression nous allons utiliser la représentation complexe.

$$F(t) = F_0 \cos \omega t \rightarrow \underline{F}(t) = F_0 e^{j\omega t}$$

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \rightarrow \underline{x}_1 = A_1 e^{j(\omega t + \varphi_1)} = \underline{A}_1 e^{j\omega t}$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \rightarrow \underline{x}_2 = A_2 e^{j(\omega t + \varphi_2)} = \underline{A}_2 e^{j\omega t}$$

Avec l'amplitude complexe qui sont définies par :

$$\underline{A}_1 = A_1 e^{j\varphi_1} \quad \text{et} \quad \underline{A}_2 = A_2 e^{j\varphi_2}$$

Prenons le cas d'un amortissement suffisamment faible pour que l'on puisse considérer  $\alpha \approx 0$ .

Dans ce cas les équations différentielles se transforment en équations algébriques :

$$m_1 \ddot{\underline{x}}_1 + (K_0 + K_1) \underline{x}_1 - K_0 \underline{x}_2 = F_0 e^{j\omega t}$$

$$m_2 \ddot{\underline{x}}_2 + (K_0 + K_2) \underline{x}_2 - K_0 \underline{x}_1 = 0$$

$$-m_1 \underline{A}_1 \omega^2 + (K_0 + K_1) \underline{A}_1 - K_0 \underline{A}_2 = F_0$$

$$-m_2 \underline{A}_2 \omega^2 + (K_0 + K_2) \underline{A}_2 - K_0 \underline{A}_1 = 0$$

$$\left(-\omega^2 + \frac{K_0 + K_1}{m_1}\right) \underline{A}_1 - \frac{K_0}{m_1} \underline{A}_2 = \frac{F_0}{m_1}$$

$$-\frac{K_0}{m_2} \underline{A}_1 + \left(-\omega^2 + \frac{K_0 + K_2}{m_2}\right) \underline{A}_2 = 0$$

En prendra le cas le plus simple :  $m_1 = m_2 = m$  et  $K_0 = K_1 = K_2 = K$  et en posant  $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$

On obtient :

$$\left(-\omega^2 + 2\omega_0^2\right) \underline{A}_1 - \omega_0^2 \underline{A}_2 = \frac{F_0}{m}$$

$$-\omega_0^2 \underline{A}_1 + \left(-\omega^2 + 2\omega_0^2\right) \underline{A}_2 = 0$$

Faisons la résolution en utilisant les déterminants.

$$\text{Det} = (2\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega_0^4$$

Les amplitudes seront égales à :

$$A_1 = \frac{F_0}{m} \frac{|2\omega_0^2 - \omega^2|}{|(2\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega_0^4|} \quad \text{et} \quad A_2 = \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2}{|(2\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega_0^4|}$$

On remarque que pour  $A_1$  et  $A_2$  tendent vers l'infini, ceci est réalisé lorsque

$$((2\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega_0^4) = 0, \text{ on en déduit } \omega = \omega_0 = \omega_{R1} \text{ et } \omega = \sqrt{3}\omega_0 = \omega_{R2}$$

Ces deux pulsations sont appelées pulsations de résonance. L'amortissement étant faible, les amplitudes à la résonance sont très importantes. Ce résultat nous permet de se rendre compte de l'utilité de connaître a priori les pulsations propres du système avant que celui-ci soit mis sous l'effet d'une force extérieure. Car en connaissant ces pulsations on pourrait éviter au système l'effet de résonance infinie. Il est utile de noter qu'en appliquant une force de frottement au système à deux degrés de liberté, on éliminera les singularités aux niveaux des modes propres.

Enfin,  $A_1$  tend vers zéro lorsque  $\omega = \sqrt{2}\omega_0$  appelé pulsation d'antirésonance. C'est le phénomène dans lequel la masse ( $m_1$ ) soumise à la force extérieure reste immobile lorsque la pulsation de cette dernière est réglée à la valeur  $\omega = \sqrt{2}\omega_0$ .

La figure V.2 ci-dessous illustre bien les phénomènes de résonance et d'antirésonance sur les allures des amplitudes de mouvement.

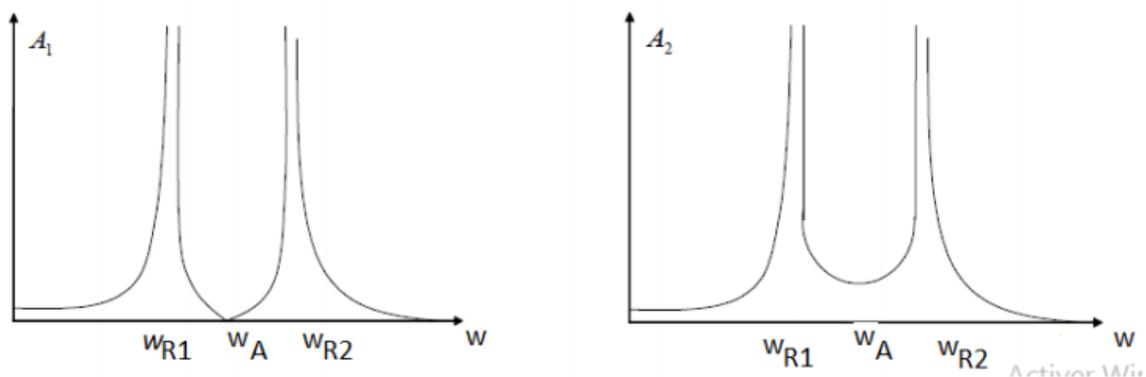


Figure.2 Variation des amplitudes  $A_1$  et  $A_2$  de mouvement

### 3- Généralisation aux systèmes à n degrés de liberté

#### Définition :

Un système oscillateur présente  $N$  degrés de liberté s'il nécessite  $N$  paramètres pour définir sa position à un instant  $t$ . Nous considérons ici des systèmes linéaires dont la mise en équation aboutit à un système de  $N$  équations différentielles linéaires. Le nombre de degrés de liberté dépend de la structure du système. S'il s'agit d'un :

. D'un système à  $N$  particules, les mouvements sont des translations et le nombre maximum de degrés de liberté sera égale à  $3N$ .

. Si le système est constitué de  $N$  corps étendus, il faut ajouter les rotations et le nombre maximum de degrés de liberté sera égal à  $6N$ .

Mise en équation de système à  $N$  degrés de liberté :

Les systèmes d'équations à résoudre sont de la forme :

$$[m] [\ddot{x}] + [c] [\dot{x}] + [K] [x] = [F] \cos \omega t \quad \text{V.2}$$

où  $[K]$  représente une matrice carré  $N \times N$  et  $[x]$  un vecteur colonne.

Pour les systèmes libres non amortis à  $N$  degrés de liberté, l'équation devient :

$$[m] [\ddot{x}] + [K] [x] = 0 \quad \text{V.3}$$

Il apparaît donc que le nombre de fréquences propres est égal au nombre de degrés de liberté.

La recherche de fréquences propres et de modes de vibration se ramène à la recherche de valeurs propres et de vecteurs propres d'une matrice carrée symétrique de dimension  $N \times N$ . Il existe plusieurs méthodes mathématiques pour chercher ces solutions : méthode directe si  $N$  est petit ( $< 6$ ), ou méthodes numériques si  $N$  est grand.

# DEUXIEME PARTIE

## ONDES

### Chapitre I :

# Phénomène de propagation à une dimension

## 1- Généralités et définition de base

De nombreux phénomènes physiques sont décrits par les propriétés de propagation des ondes. On peut citer les ondes se propageant à la surface de l'eau à la suite de la chute d'un objet, les vagues se déplaçant à la surface de la mer, les ondes produites sur les cordes vibrantes, les ondes sonores, les ondes radio, les ondes optiques, etc. Du point de vue mathématique, le mouvement et les propriétés de ces ondes sont décrits, dans une bonne approximation, par une même équation, l'équation de d'Alembert (à une ou à plusieurs dimensions d'espace, suivant le cas), ce qui place l'étude des ondes sur un plan très général.

On peut distinguer deux catégories d'ondes. La première correspond aux ondes d'origine mécanique, élastique, thermodynamique, ou hydrodynamique, qui, pour se manifester ont besoin d'un support matériel préexistant, tel que système de ressorts couplés, corde, gaz, liquide, etc. La seconde correspond aux ondes électromagnétiques (ondes radio, ondes optiques, rayons X, etc.) dues à la propagation de quantas d'énergie appelés photons, pouvant se déplacer dans le vide, indépendamment de tout milieu matériel préexistant. C'est la théorie de la relativité qui a mis en évidence, au début du vingtième siècle, ce dernier aspect. Auparavant, on supposait que les ondes électromagnétiques se propageaient, par analogie avec les autres types d'onde, dans un milieu ambiant inobservé, appelé éther. Les équations de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide, appelées équations de Maxwell

Une onde est généralement produite par la déformation localisée d'un milieu continu ; celle-ci, après sa création, se déplace dans le milieu. Ce phénomène de déplacement est appelé propagation. Les exemples les plus visibles d'ondes sont les vagues à la surface de la mer et les excitations créées sur une corde tendue.

On peut caractériser une onde par son amplitude, qui représente la hauteur de la déformation par rapport au milieu, par sa position moyenne à l'instant d'observation, par sa taille autour de sa position moyenne, et par sa vitesse de propagation ou célérité.

L'onde mécanique est une perturbation locale temporaire qui se déplace dans un milieu matériel élastique, homogène et isotrope sans transport de matière, comme le montre la figure I.1

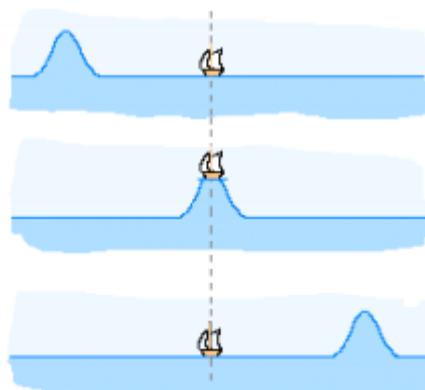


Figure I.1 Onde mécanique

L'onde mécanique se propage avec transport d'énergie.

Il existe deux types de milieux :

Milieu dispersif : La célérité de l'onde dépend des caractéristiques du milieu et de la longueur d'onde.

**Exemple :** ce phénomène se perçoit par exemple dans l'air lorsque l'amplitude est importante (dans le cas du tonnerre, les ondes de haute fréquence se propagent plus rapidement que les ondes de basse fréquence, l'air est dispersif)

Milieu non dispersif : La célérité dépend uniquement des propriétés du milieu de propagation.

Il existe deux types d'onde :

Onde longitudinale : La déformation est parallèle à la direction de Propagation de l'onde, comme le montre la figure I.2, exemple : onde produite sur un ressort

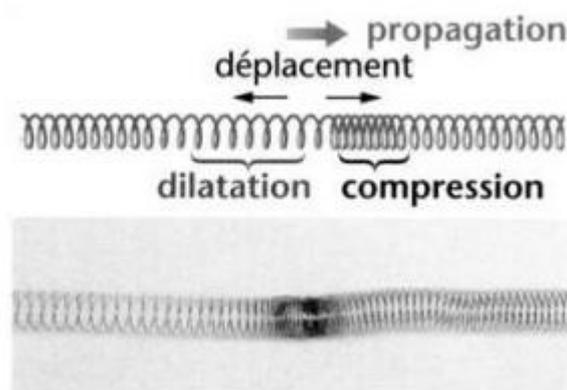


Figure I.2 Onde longitudinale

Onde transversale : La déformation est perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde comme le montre la figure I.3, exemple onde produite sur une corde.

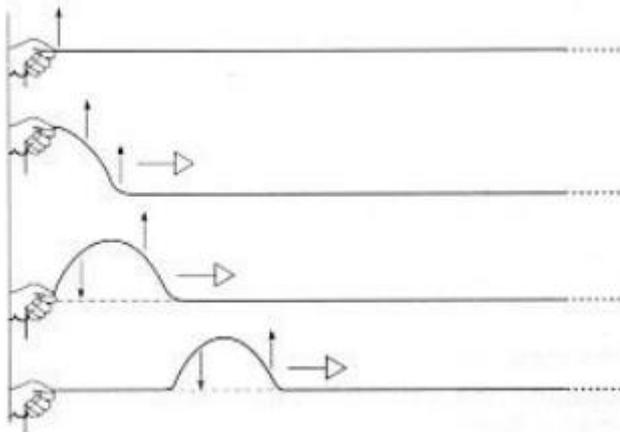


Figure I.3 : Onde transversale

La célérité de l'onde est constante dans un milieu linéaire, homogène, isotrope et non dispersif. Elle dépend de l'inertie, de la rigidité et de la température du milieu.

L'onde mécanique se propage à partir d'une source sous différentes formes :

**A une dimension** : Mouvement le long d'une corde, d'un ressort.

**A deux dimensions** : Mouvement circulaire à la surface d'eau.

*Exemple* : Lorsqu'on jette une pierre sur une surface d'eau, comme l montre la figure I.4 ci-dessous :



Figure I.4 : Onde mécanique à deux dimensions

Le phénomène apparent dans l'image est une onde circulaire se propageant dans un plan.

**A trois dimension** : Ondes sonores.

Les ondes mécaniques présentent une double périodicité :

**Périodicité temporelle** : Caractérisée par la période  $T$  (s).

**Périodicité spatiale** : Caractérisée par la longueur d'onde  $\lambda$  (m).

## 2- Equation de propagation :

*La propagation d'onde est un phénomène ou perturbation qui est décrite par une fonction qui dépend à la fois du temps  $t$  et d'une variable d'espace, par exemple  $x$ .*

Nous considérons en général des milieux non-visqueux et non-dissipatifs, ne subissant pas de forces extérieures (en particulier, la force de la pesanteur est négligée). Dans ces milieux, l'onde se propage avec une vitesse constante  $C$  et garde une forme inaltérée.

Considérons le cas d'une onde transversale se propageant suivant une direction fixe, que nous choisirons comme l'axe des  $x$ . Supposons qu'à l'instant  $t_0$  cette onde ait une forme localisée autour de la position  $x_0$ , cette dernière représentant l'abscisse de la hauteur maximale de l'onde.

La forme de l'onde à tout instant est décrite par la fonction  $u = f(t,x)$ , où  $t$  représente l'instant d'observation de l'onde et  $x$  l'abscisse observée. La valeur de  $f(t,x)$  donne ainsi la hauteur algébrique (c'est-à-dire positive ou négative) de l'onde à la position  $x$  à l'instant  $t$  suivant un axe vertical, que nous choisissons comme étant l'axe des  $z$ . L'onde précédente est représentée schématiquement sur la figure I.5 à l'instant  $t_0$  ;

Elle est donc décrite pour tout  $x$  par la fonction  $f(t_0,x)$  ; en particulier, la valeur  $f(t_0,x_0)$  représente à l'instant  $t_0$  la hauteur de l'onde à la position  $x_0$ , qui correspond en fait à sa hauteur maximale.

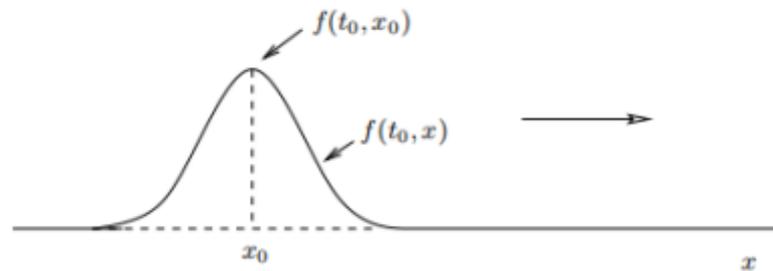


Figure I.5 : Une onde transversale observée à l'instant  $t_0$  et représentée par la fonction  $f(t_0, x_0)$ . L'onde est localisée autour de l'abscisse  $x_0$

Aux instants suivants, cette onde se propage sur l'axe des  $x$ . Supposons qu'elle se déplace vers les  $x$  croissants. Observons l'onde à l'instant  $t_1$ , tel que  $t_1 > t_0$ . L'onde, en gardant sa forme inaltérée, se trouve maintenant localisée autour de l'abscisse  $x_1$ , telle que  $x_1 > x_0$ . Sa forme est décrite par la fonction  $f(t_1, x_1)$ . Sa hauteur maximale correspond à la valeur  $f(t_1, x_1)$ . L'onde est représentée sur la figure 1.6

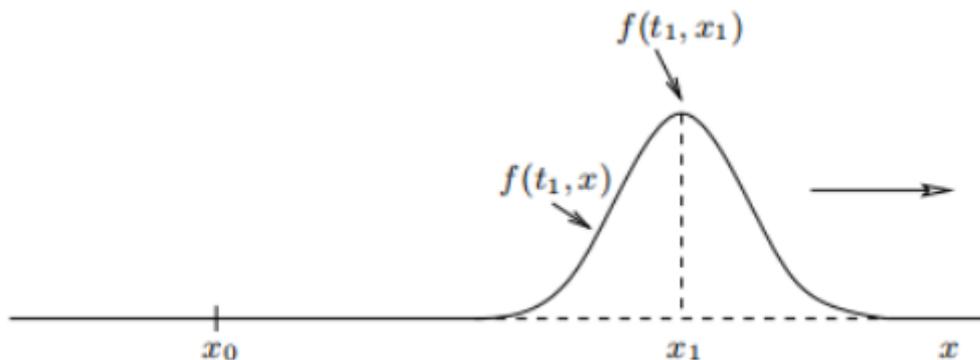


Figure I.6 : Représentation de l'onde à l'instant  $t_1$ .

A partir de la comparaison de la forme de l'onde aux deux instants différents  $t_0$  et  $t_1$  on peut déduire des résultats généraux concernant la structure de la fonction  $f$ . Le fait que le milieu est non dissipatif nous permet de conclure que l'onde est en train de se déplacer sans modification de sa forme ; il s'agit donc d'une translation globale de la forme de l'onde vers les  $x$  croissants. En particulier, si on compare les maxima aux instants  $t_0$  et  $t_1$ , on doit avoir :

$$f(t_1, x_1) = f(t_0, x_0) \quad \text{I.1}$$

Cette perturbation (déplacement d'onde)  $f(x, t)$  est régie par une équation aux dérivées partielles, appelé équation de d'Alembert ou équation d'onde ou encore équation de propagation à une dimension de la forme:

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{I.2}$$

Dans laquelle  $f(x, t)$  représente l'amplitude de cette perturbation et  $C$  la vitesse de propagation.

**Solution de l'équation de propagation :**

Pour résoudre des ondes à une dimension, opérons le changement de variable suivant :  $u = x-ct$  et montrons que  $g(x-ct) = f(x,t)$  est une solution de l'équation de propagation.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial g}{\partial u} = -C g'(u) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -C \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = C^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial u} = g'(u) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}$$

$$\text{Avec } \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} \text{ on aura } C^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = C^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}$$

Donc on obtient bien l'équation de d'Alembert pour  $g(x-Ct)$ , cette dernière est une solution de l'équation de propagation. De même l'équation  $h(x+Ct)$  est une solution de l'équation de propagation.

L'une des propriétés mathématiques importantes des équations du mouvement des ondes est la propriété de linéarité. Ainsi, si deux fonctions indépendantes sont solutions de ces équations, leur somme ou d'une façon générale toute combinaison linéaire formée d'elles est aussi solution. On peut ainsi représenter la solution générale de l'équation du mouvement des ondes sous la forme suivante, qui découle des résultats précédents :

$$f(x,t) = g(x-Ct) + h(x+Ct) \quad \text{I.3}$$

Exemple : Vérifier que les fonctions suivantes :

$$1) U(x,t) = A \sin(\omega(t-\frac{x}{v}))$$

$$2) U(x,t) = A \exp(i\omega(t+\frac{x}{v}))$$

$$\text{Sont solution de l'équation : } \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial^2 x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial^2 t^2} = 0$$

Réponses :

$$1) \quad \frac{\partial U}{\partial x} = -A \frac{\omega}{v} \cos(\omega(t-\frac{x}{v})), \quad \frac{\partial^2 U}{\partial^2 x^2} = -A \frac{\omega^2}{v^2} \sin(\omega(t-\frac{x}{v}))$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = A \omega \cos(\omega(t-\frac{x}{v})), \quad \frac{\partial^2 U}{\partial^2 t^2} = -A \omega^2 \sin(\omega(t-\frac{x}{v}))$$

En remplaçant dans l'équation de propagation :

$$-A \frac{\omega^2}{v^2} \cos(\omega(t-\frac{x}{v})) - \frac{1}{v^2} (-A \omega^2 \cos(\omega(t-\frac{x}{v}))) = 0; \text{ effectivement } U(x,t) \text{ est bien la solution de notre équation.}$$

$$2) \quad \frac{\partial U}{\partial x} = A \frac{i\omega}{v} \exp(i\omega(t+\frac{x}{v})), \quad \frac{\partial^2 U}{\partial^2 x^2} = A \frac{(i\omega)^2}{v^2} \exp(i\omega(t+\frac{x}{v}))$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = A i\omega \exp(i\omega(t+\frac{x}{v})), \quad \frac{\partial^2 U}{\partial^2 t^2} = A (i\omega)^2 \exp(i\omega(t+\frac{x}{v}))$$

En remplaçant dans l'équation de propagation :

$A \frac{(i\omega)^2}{v^2} \exp(i\omega(t+\frac{x}{v})) - \frac{1}{v^2} A (i\omega)^2 \exp(i\omega(t+\frac{x}{v})) = 0$ ; effectivement  $U(x,t)$  est bien la solution de notre équation.

### 3- Onde progressive sinusoïdale :

Comme on a défini ultérieurement, une onde progressive est le phénomène de propagation d'une perturbation local dans un milieu matériel (corde par exemple). La caractéristique principale de l'onde progressive est que la perturbation se retrouve identique à elle-même après une durée  $T$  (période temporelle de propagation) et à une distance  $\lambda$  (période spatiale de propagation ou longueur d'onde), il faut pour cela que le milieu de propagation ait une extension infinie ou, tout du moins, une taille très grande devant celle de la longueur d'onde. On a par exemple les vagues, ondes sonores et ondes lumineuses.

Considérons une onde progressive se propageant dans la direction de l'axe des  $x$ , telle que le point  $x=0$  est soumis à une vibration sinusoïdale de la forme :

$$U(x=0, t) = U_0 \sin(\omega t) \quad \text{I.4}$$

Le point se trouvant à l'abscisse  $x > 0$  aura la même vibration que celle du point  $x = 0$  mais avec un retard égal à  $\frac{x}{c}$  :

$$U_+ = U_0 \sin[\omega(t - \frac{x}{c})] \quad \text{I.5}$$

valable que si  $x < ct$

$U_0$  est l'amplitude de l'onde et  $\omega$  la pulsation. On introduit  $K = \frac{\omega}{c}$  en  $m^{-1}$  vecteur d'onde,  $\lambda = \frac{2\pi}{K} = \frac{2\pi c}{\omega}$  la longueur d'onde en mètre constitue la période spatiale,  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  la période temporelle en seconde.

Cette expression constitue la définition d'une onde progressive sinusoïdale (ou harmonique) ; elle peut être écrite sous la forme :

$$U_+(x, t) = U_0 \sin[\omega t - \varphi(x)] \quad \text{I.6}$$

Où  $\varphi(x) = \frac{\omega x}{c}$  représente le déphasage lié au temps de propagation  $\frac{x}{c}$ . On dit que  $\varphi(x)$  représente le déphasage dû à la propagation. L'onde progressive sinusoïdale s'écrit sous la forme suivante qui permet de mettre en évidence la double périodicité (dans le temps et dans l'espace) :

$$U_+(x, t) = U_0 \sin[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})] \quad \text{I.7}$$

On peut vérifier aisément que :

$$U(x, t+nT) = U(x,t) \quad \text{I.8}$$

$$U(x+n\lambda, t) = U(x,t) \quad \text{I.9}$$

Où  $n$  est un nombre entier.

L'onde progressive s'écrit souvent :  $U(x, t) = U_0 \sin[\omega t - kx]$

On utilise très souvent la notation complexe d'une onde progressive sinusoïdale :

$$U(x, t) = U_0 e^{j(\omega t - kx)} \quad \text{I.10}$$

$$U(x, t) = \underline{U}_0 e^{j\omega t} \quad \text{I.11}$$

où  $\underline{U}_0 = U_0 e^{-jkx}$  représente l'amplitude complexe de l'onde progressive sinusoïdale. Le module  $U_0$  de  $U$  est l'amplitude de l'onde tandis que son argument  $-kx$  représente le déphasage dû à la propagation.

## 4- Superposition de deux ondes progressives sinusoïdale :

### 4-1- Cas de deux ondes de même fréquence se propageant dans le même sens :

Considérons deux ondes progressives sinusoïdales d'amplitudes  $U_1$  et  $U_2$  et de phases respectives  $\phi_1$  et  $\phi_2$ , de même fréquence, qui se déplacent à la vitesse  $C$  dans le sens des  $x$  croissant, quel que soit  $x$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , l'onde résultante sera alors :

$$U(x, t) = U_1 e^{j(\omega t - kx + \phi_1)} + U_2 e^{j(\omega t - kx + \phi_2)} \quad \text{I.12}$$

En notation complexe, on écrit alors l'onde totale, somme des deux ondes  $U_1$  et  $U_2$  comme (avec la convention  $k > 0$ ):

$$U = (\underline{U}_1 + \underline{U}_2) e^{j(\omega t - kx)} \quad \text{I.13}$$

Nous observons immédiatement que, comme il se doit, la somme de ces deux ondes progressives est elle-même une onde progressive.

On peut obtenir alors l'onde résultante sous la forme canonique en utilisant la décomposition :

$$\underline{U}_1 + \underline{U}_2 = U_1 e^{j\phi_1} + U_2 e^{j\phi_2} \quad \text{I.14}$$

Le module de l'amplitude complexe résultante est donné par :

$$|\underline{U}|^2 = (U_1 e^{j\phi_1} + U_2 e^{j\phi_2}) (U_1 e^{-j\phi_1} + U_2 e^{-j\phi_2}) = U_1^2 + U_2^2 + 2U_1 U_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \quad \text{I.15}$$

Calculons maintenant la phase de l'onde. Nous avons

$$\tan\varphi = \frac{\text{Im}(U)}{\text{Re}(U)} = \frac{U_1 \sin \phi_1 + U_2 \sin \phi_2}{U_1 \cos \phi_1 + U_2 \cos \phi_2} \quad \text{I.16}$$

Considérons maintenant le cas particulier où  $U_1 = U_2$ . Dans ce cas le calcul explicite de la superposition est simple. Nous avons

$$|\underline{U}|^2 = 2U_1^2 (1 + \cos(\phi_1 - \phi_2)) = 4U_1^2 \cos^2\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \quad \text{I.17}$$

L'amplitude réelle dépend donc du déphasage entre les deux ondes progressives, défini par :

$$\Delta\varphi(x, t) = \varphi_2(x, t) - \varphi_1(x, t) = \varphi_2 - \varphi_1 \quad \text{I.18}$$

Notons que, pour des ondes à une dimension, le déphasage  $\Delta\varphi(x, t)$  est constant ; il est indépendant de la position  $x$  et de l'instant  $t$ .

On écrit finalement l'amplitude réelle de l'onde obtenue par superposition de deux ondes progressives sinusoïdales en fonction de leur déphasage :

$$U(x,t) = 2U_1 \left| \cos \frac{\Delta\phi}{2} \right| \quad \text{I.19}$$

Nous avons rajouté une valeur absolue, comme l'amplitude doit être toujours positive.

#### 4-2 Cas de deux ondes de même fréquence se propageant dans des sens opposés :

Si par contre, on superpose deux ondes harmoniques de même fréquence mais se propageant dans des sens opposés, le résultat est tout autre. En effet, dans ce cas :

$$U(x,t) = U_1 e^{j(\omega t - kx + \phi_1)} + U_2 e^{j(\omega t + kx + \phi_2)} \quad \text{I.20}$$

Prenons le cas toutes deux de même amplitude réelle  $U_0$ . L'onde complexe résultant de cette superposition a la forme suivante :

$$\underline{U} = U_0 e^{j(\omega t - kx + \phi_1)} + U_0 e^{j(\omega t + kx + \phi_2)} = U_0 (e^{j\phi_1} e^{-jkx} + e^{j\phi_2} e^{+jkx}) e^{j\omega t} \quad \text{I.21}$$

$$\text{On a: } \phi_1 = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \quad \text{et} \quad \phi_2 = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} + \frac{\phi_2 - \phi_1}{2}$$

Nous pouvons récrire cette expression comme :

$$\underline{U} = U_0 e^{j(\omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2})} (e^{j(-Kx + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2})} + e^{j(+Kx + \frac{\phi_2 - \phi_1}{2})})$$

$$\underline{U} = U_0 e^{j(\omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2})} (\cos(-kx + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}) + j\sin(-kx + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}) + (\cos(+kx + \frac{\phi_2 - \phi_1}{2}) + j\sin(+Kx + \frac{\phi_2 - \phi_1}{2}))$$

Comme la fonction cosinus est paire et sinus est impaire on obtient :

$$\underline{U} = 2U_0 e^{j(\omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2})} \cos(+kx + \frac{\phi_2 - \phi_1}{2}) \quad \text{I.22}$$

On observe ainsi que l'onde est le produit d'une fonction de  $t$  uniquement et d'une fonction de  $x$  uniquement. La partie réelle est donc :

$$U = 2 U_0 \cos(\omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}) \cos(+kx + \frac{\phi_2 - \phi_1}{2}) \quad \text{I.23}$$

Cette onde se présente sous une forme factorisée, par rapport à ses dépendances spatiale et temporelle :

$$\exists g \text{ et } h \in C^2(\mathbb{R}), U(x,t) = g(x) h(t) \quad \forall x, \forall t \in \mathbb{R}$$

Une telle onde est appelée onde stationnaire ; elle correspond à une onde qui ne se propage pas.

La forme de l'onde, vue comme une fonction de  $x$ , est indépendante de  $t$ . Nous observons en effet que l'amplitude locale de la vibration sinusoïdale associée à l'onde, pour une valeur de  $x$  donnée, est :

$$2 U_0 |\cos(+kx + \frac{\phi_2 - \phi_1}{2})| \quad \text{I.24}$$

indépendamment de  $t$ . Ainsi au cours du temps l'onde ne change pas de forme, mais oscille globalement de manière sinusoïdale.

### 5- Ventres et nœuds d'une onde stationnaire :

Nous pouvons distinguer deux types de points remarquables de l'onde stationnaire, voir figure I.7. La position de ces points particuliers ne change pas au cours du temps en raison du caractère stationnaire de cette onde.

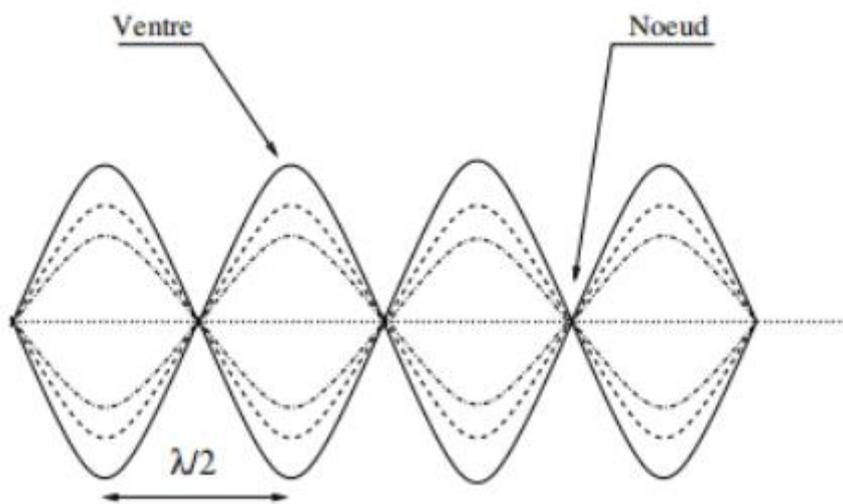


Figure I.7 : Nœuds et ventres d'une onde stationnaire

Pour simplifier la discussion, considérons le cas particulier  $\frac{\phi_2 + \phi_1}{2} \equiv 0[2\pi]$ . On distingue alors :

– les nœuds sont tels que  $f(x,t) = 0 \forall t$ , c.-a.-d. qu'ils ne sont jamais en mouvement. Ils se situent aux points  $x_n$  tels que :

$$X_n = [(n + \frac{1}{2}) + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2\pi}] \frac{\lambda}{2} \quad \text{I.25}$$

Avec  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

où l'amplitude de vibration est constamment nulle.

Entre chaque paire de nœuds existe un ventre qui correspond à des extrema de l'onde à tout instant, alternativement maxima et minima selon la valeur de  $t$  où l'amplitude de vibration est égale à  $|2U_0|$ . On note aussi que l'intervalle entre deux nœuds est égal à une demi-longueur d'onde  $\lambda/2$ .

Ils sont situés aux points  $x_m$  tels que  $kx_m = m\pi$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ . Il faut distinguer deux séries de ventres. Les ventres pour  $m$  pair d'une part, et pour  $m$  impair d'autre part, sont les uns maxima et les autres minima de  $U(x,t)$  pour une valeur de  $t$  donnée. On note aussi que l'intervalle entre deux nœuds est égal à une demi-longueur d'onde  $\lambda/2$ .

# Chapitre II

## Cordes vibrantes

## 1- Introduction:

Une corde est un milieu continu unidimensionnel ayant une longueur finie ou parfois infinie. Elle possède généralement des propriétés d'élasticité et peut être tendue à ses deux extrémités et être amenée à une longueur supérieure à sa longueur de repos. Dans ce cas, elle possède une tension interne dont l'effet est d'attirer toute portion de la corde vers sa position d'équilibre. Pour une corde tendue, la position d'équilibre correspond à la ligne droite joignant les deux extrémités.

La corde tendue peut être modélisée au niveau microscopique par la juxtaposition de ressorts de taille infinitésimale couplés entre proches voisins et exerçant l'un sur l'autre des forces de rappel. Lorsqu'on écarte une portion de la corde de sa position d'équilibre (c'est-à-dire de la ligne droite) elle subit immédiatement les forces de rappel des portions voisines et il en résulte un mouvement oscillatoire autour de la position d'équilibre qui crée une onde qui se propage sur toute la corde.

Le mouvement d'une corde tendue écartée de sa position d'équilibre peut se faire dans les trois directions d'espace. On peut cependant distinguer deux cas. Un mouvement transversal ou orthogonal à la position d'équilibre de la corde tendue et un mouvement longitudinal à la corde. Nous nous intéresserons dans ce cours uniquement au mouvement transversal et nous préciserons chaque fois qu'il est nécessaire les conditions physiques qui empêchent la corde d'avoir un mouvement longitudinal. Le mouvement transversal peut se faire en chaque point de la corde dans le plan orthogonal à la corde. Ainsi, si la corde tendue se trouve à l'état d'équilibre le long de l'axe des  $x$ , les plans orthogonaux à la corde sont parallèles au plan  $Oyz$ . Le mouvement transversal est donc en général bidimensionnel dans ces plans. Nous considérerons le cas simplifié d'un mouvement transversal unidimensionnel, parallèlement à l'un des axes orthogonaux à  $Ox$ , que nous choisissons comme étant l'axe des  $y$ . Nous supposerons que les conditions initiales imposées, ainsi que d'autres conditions physiques, assurent à la corde la possibilité d'avoir un tel mouvement au cours du temps.

Un point de la corde sera repéré par l'abscisse  $x$  de sa position d'équilibre, qui reste inchangé au cours du temps, et par l'ordonnée  $z$  qui représente l'écart algébrique (positif ou négatif) de sa position à partir de l'axe d'équilibre  $Ox$  de la corde. Comme ce point se déplace au cours du temps, l'ordonnée  $y$  est une fonction du temps,  $y = y(t)$ . L'ensemble des points de la corde seront repérés par une seule fonction  $u(t, x)$ , dans laquelle  $t$  représente l'instant d'observation de la corde et  $x$  l'abscisse du point observé, alors que  $u(t, x)$  représente l'ordonnée  $y$  de ce point (avec abscisse  $x$ ) à cet instant  $t$  (voir Fig. II.1).

A un instant  $t$  donné, la fonction  $u(t, x)$ , considérée comme fonction de  $x$ , donne la courbe continue formée par la corde dans le plan  $Oxz$ .

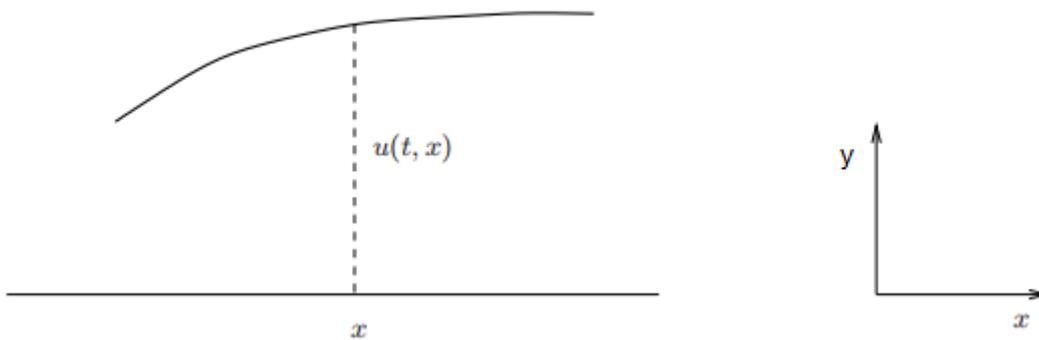


Figure II.1 :Un point de la corde repéré à l'instant  $t$  par son abscisse  $x$  et son ordonnée  $u(t, x)$

## 2- Equation des ondes :

L'équation d'onde des vibrations transverses d'une corde est l'exemple le plus simple à décrire afin d'illustrer la physique des ondes. Il s'applique naturellement à l'étude des instruments à cordes.

Considérons une corde tendue, rectiligne selon la coordonnée  $x$ , et de longueur infinie. Nous allons étudier la propagation d'un faible ébranlement le long de la corde. Supposons que cet ébranlement se produise suivant l'axe  $Oy$ .

Étudions l'équation du mouvement de cette corde. Nous dénoterons par  $T$  la tension à laquelle est soumise la corde. Cette tension a la dimension d'une force et représente la force attractive exercée par une partie de la corde sur son voisinage immédiat. De ce fait, la tension est portée par un vecteur tangent à la corde au point considéré et dirigé vers la partie de la corde exerçant cette force. Nous supposons pour le moment que la tension dépend aussi du point de la corde considéré et par conséquent est une fonction de l'abscisse  $x$  :  $T = T(x)$ .

La corde a en outre une masse définie par une masse linéique  $\mu$  (masse par unité de longueur). Pour le cas général d'une corde non-homogène, la masse linéique n'est pas constante et dépend de  $x$  :  $\mu = \mu(x)$ , elle s'exprime en kg/m.

Au cours des calculs, nous nous placerons dans l'approximation des petits mouvements, pour laquelle les déformations transversales de la corde sont très petites par rapport à la longueur à l'équilibre de la corde tendue.

Pour établir l'équation du mouvement de la corde, on considère en un point d'abscisse  $x$  un segment très court de cette corde, de longueur  $\Delta x$  (Figure II.2). La masse  $\Delta m$  du segment est donnée par :

$$\Delta m = \mu \Delta x$$

Pour cela on va utiliser l'équation fondamentale de la dynamique (PFD). On va raisonner sur un élément  $dl$  de la corde situé entre les points  $M$  et  $M'$  en  $x$  et  $x+dx$ . Cette élément  $dl$  subit un déplacement transversal  $y$  et  $y+dy$ .

**On fait les hypothèses suivantes :**

- 1- La corde est tendue à une tension de module constant  $T_0$ .
- 2- La corde a une masse linéique  $\mu$ .
- 3- Le poids de la corde est négligeable devant la tension  $T_0$ .
- 4- Les déplacements de la corde sont uniquement verticaux et de faibles amplitudes devant la longueur de la corde ( $\alpha \ll 1$ ).

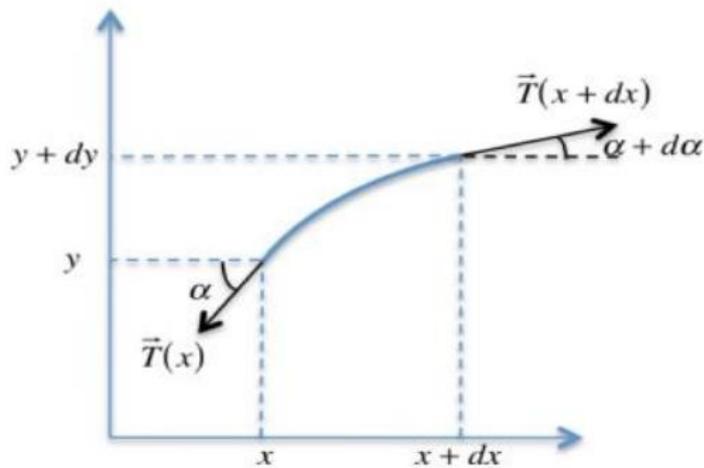


Figure II.2 : Tensions exercées sur une tranche infinitésimale de la corde tendue.

$$\tan(\alpha) = \frac{dy}{dx} \approx \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} \text{ car } \alpha \ll 1$$

$$\sin(\alpha) \approx \alpha \text{ et } \sin(\alpha + \Delta\alpha) \approx \alpha + \Delta\alpha$$

$$\cos(\alpha) \approx 1 \text{ et } \cos(\alpha + \Delta\alpha) \approx 1$$

De part et d'autre de l'élément  $dl$  de la corde on a une force qui s'exerce due à la tension  $T_0$  de la corde. On applique le PFD à l'élément  $dl$ :

$$\square m_{dl} \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F} = \vec{T}(x+dx) + \vec{T}(x) \quad \text{II.2}$$

On projette selon  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  on aura:

$$m_{dl} \frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2} = T_0 \sin(\alpha(x+dx)) - T_0 \sin(\alpha(x)) \quad \text{II.3}$$

$$m_{dl} \frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2} = T_0 \cos(\alpha(x+dx)) - T_0 \cos(\alpha(x)) \quad \text{II.4}$$

$\alpha \ll 1$ , on néglige les variations du second ordre:  $\sin(\alpha) \approx \alpha$  et  $\cos(\alpha) \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2} \approx 1$ , et  $m_{dl} = \mu dx$   
on a un mouvement selon y

$$\mu dx \frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2} = T_0 (\alpha(x+dx)) - T_0 (\alpha(x)) \quad \text{II.5}$$

pas de mouvement selon x

$$\mu dx \frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2} = 0 \quad \text{II.6}$$

De l'équation II.5 on obtient :

$$\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\mu} \left( \frac{\alpha(x+dx) - \alpha(x)}{dx} \right) = \frac{T_0}{\mu} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \quad \text{II.7}$$

De plus on a  $\tan(\alpha) = \frac{dy}{dx} \approx \alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$  car  $\alpha \ll 1$ , ainsi on peut écrire:  $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$

On a finalement :

$$\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\mu} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T_0} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad \text{II.8}$$

C'est l'équation du mouvement des cordes vibrantes appelée aussi l'équation d'onde de la corde. Par identification, on identifie la vitesse  $v$  de propagation de l'onde:  $v = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$  appelée aussi la célérité de l'onde.  $T_0$  Tension en newton ou encore en  $\text{kg.m.s}^{-2}$  et  $\mu$  en  $\text{kg.m}^{-1}$  donc  $v$  en  $\text{m.s}^{-1}$

A titre d'exemple :  $T_0 = 10 \text{ N}$  et  $\mu = 0,001 \text{ en kg.m}^{-1}$ ,  $v = 100 \text{ m.s}^{-1}$

### 3- Ondes progressives harmoniques :

#### 3.1- Définition :

Une onde progressive harmonique se propageant selon  $Ox$  est définie par :

$$u(x, t) = U_0 \cos(\omega t - kx) \quad \text{II.9}$$

ou encore en notation complexe :  $U(x, t) = U_0 e^{j(\omega t - kx)}$  II.10

Où  $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$  est le module du vecteur d'onde,  $\lambda$  étant la longueur d'onde.

Force en un point :

On appelle force en un point, la projection selon  $Oy$  de la force exercée, en ce point, par la partie gauche de la corde sur la partie droite :

$$F_{GD} = -T \frac{\partial U}{\partial x} \quad \text{II.11}$$

Dans le cas d'une onde progressive sinusoïdale, cette relation devient :

$$F_{GD} = jkT U_0 e^{j(\omega t - kx)} \quad \text{II.12}$$

La vitesse de particules s'écrit :

$$\dot{U} = \frac{\partial U}{\partial t} = j\omega U_0 e^{j(\omega t - kx)} \quad \text{II.13}$$

On constate que pour une onde progressive la vitesse de particule  $\dot{U}$  est en phase avec la force  $F_{GD}$ .

### 3.2- Impédance :

On appelle impédance en un point le rapport de l'amplitude complexe de la force à l'amplitude complexe de la vitesse de particule :

$$Z(x) = \frac{F_y}{\dot{U}_y} \quad \text{II.14}$$

Dans le cas d'une onde progressive, on obtient :

$$Z(x) = \frac{kT}{\omega} = \frac{T}{v} = \frac{v^2 \mu}{v} \quad \text{II.15}$$

Enfinement:  $Z(x) = \mu v = \sqrt{\mu T}$  II.16

La quantité  $\sqrt{\mu T}$  définit l'impédance caractéristique de la corde :

$$Z_C = \sqrt{\mu T} = \mu v$$

### 4- Oscillations libres d'une corde de longueur finie :

Considérons une corde de longueur  $L$  fixe aux points  $x = 0$  et  $x = L$ , représentée sur la figure II.3.

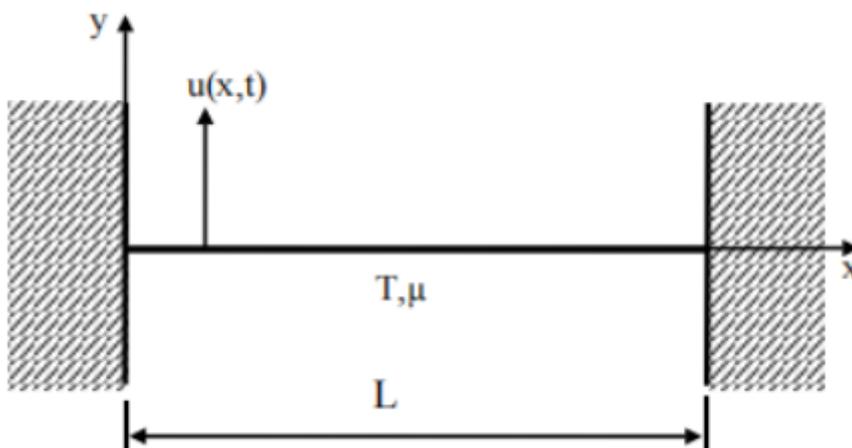


Figure II.3 Corde de longueur  $L$  fixée aux extrémités

L'onde qui vérifie ces conditions aux limites i.e  $\forall t \quad y(0,t)=y(L,t)=0$  c'est une onde stationnaire et mathématiquement la solution de l'équation de l'onde sera exprimé sous la forme:

$$U(x,t) = f(x) g(t) = A \cos(kx+\varphi) \cos(\omega t+\Psi) \quad \text{II.17}$$

$$\text{avec } k = \frac{\omega}{c}$$

$f(x)$  et  $g(t)$  deux ondes de phases respectives  $\varphi$  et  $\Psi$ , de même fréquence.

En remplaçant dans l'équation de propagation d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} \rightarrow \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad \text{II.18}$$

On faisant des dérivés secondes :

$$f''(x) g(t) - \frac{1}{C^2} f(x) g''(t) = 0 \rightarrow \text{on obtient finalement } \frac{f''}{f} = \frac{1}{C^2} \frac{g''}{g} \quad \text{II.19}$$

Le membre de gauche de cette équation ne dépend que de  $x$ , tandis que le membre de droite ne dépend que de  $t$ . Ces deux expressions sont donc égales à une constante qui doit être un nombre réel négatif que nous posons égal à  $-K^2$  car la solution ne doit pas tendre vers l'infini lorsque  $t$  tend vers l'infini. On aura donc à résoudre deux équations différentielles :

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = -K^2 f \quad \text{et} \quad \frac{d^2 g}{dt^2} = -K^2 C^2 g$$

$$\text{ou} \quad f''(x) + K^2 f(x) = 0 \quad \text{II.20}$$

$$\text{et} \quad g''(t) + K^2 C^2 g(t) = 0 \quad \text{II.21}$$

Pour trouver  $K$  remplaçant  $f$  et  $g$  par leur expression dans les deux équations différentielles, on obtient :  $\omega = KC$

Appliquant les conditions aux limites sur la fonction de  $x$  :

$y(0,t) = 0$  et  $y(L,t) = 0 \quad \forall t$  on obtient:

$$\text{Pour } x = 0 \text{ on a } \cos \varphi = 0 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

On choisit  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$  pour transformer  $\cos$  en  $\sin$ :

$$\cos(kx - \frac{\pi}{2}) = \cos(-kx + \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} - kx) = \sin(kx) \quad (\cos \text{ est une fonction paire})$$

Pour  $x = L$  on a  $\sin(k.L) = 0 \rightarrow k.L = n\pi$  et comme  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  on obtient:

$$L = \frac{n\lambda}{2} \quad \text{ou } n = 0, 1, 2, \dots$$

et comme :  $\omega = k.C$  on aura  $\omega_n = \frac{n\pi C}{L}$

Les  $\omega_n$  sont les pulsations propres de la corde vibrante, elles sont en progression arithmétique.

La solution de l'équation d'onde qui satisfait ces conditions aux limites est donc :

$$U_n(x,t) = A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t + \Psi_n\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \text{II.22}$$

qui est sinusoïdale dont la fréquence propre  $\omega_n$ . Les termes  $A_n$  et  $\Psi_n$  sont déterminés par les conditions initiales du mouvement.

Une telle solution est appelé un mode propre de la corde vibrante, correspondant la pulsation propre  $\omega_n$ . Il s'agit d'une onde stationnaire telle que les points  $x = 0$  et  $x = L$  soient des nœuds de vibration.

Les positions des nœuds et des ventres (voir figure ci-dessous) du mode propre associé à la pulsation propre  $\omega_n$  sont :

les nœuds de la corde sont tels que  $y_n(x,t) = 0 \forall t$ . D'après l'équation II.22, ils se situent en :

$$\sin\left(\frac{n\pi}{L}x_m\right) = 0 \Rightarrow \frac{n\pi}{L}x_m = m\pi \Rightarrow x_m = \frac{Lm}{n} \text{ avec } m = 0, 1, 2, \dots n$$

Naturellement, les deux extrémités de la corde en  $x = 0$ , et  $x = L$  sont toujours des nœuds car la corde est attachée en ces points

Les ventres de la corde, représentées sur la figure II.4, sont obtenus pour:

$$\left|\sin\left(\frac{n\pi}{L}x_a\right)\right| = 1 \Rightarrow \frac{n\pi}{L}x_a = \pi a + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_a = \frac{a + \frac{1}{2}}{n} L \text{ avec } a = 0, 1, \dots, n-1.$$

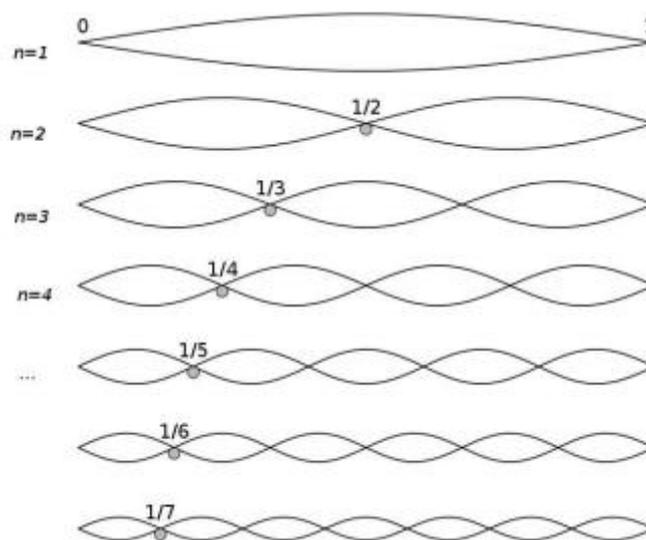


Figure II.4 Modes propres d'une corde fixée à ses extrémités

### Solution générale pour la corde vibrante :

La solution générale de l'équation d'onde sur la corde vibrante de longueur  $L$ , fixée aux deux extrémités, s'obtient comme une superposition générale de tous les modes propres associés :

$$U(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \sin(k_n x) \quad \text{II.23}$$

Ce développement ressemble à un développement en série de Fourier. Les coefficients  $C_n$  sont donnés par les conditions initiales du problème, par exemple en  $t = 0$ .

### 5- Réflexion et transmission :

#### Réflexion et transmission entre deux cordes semi-infinies :

Soit deux cordes de longueur semi-infinie, représentées sur la figure II.4, reliées en  $x = 0$ . Leurs masses linéiques sont respectivement  $\mu_1$  et  $\mu_2$ . Lorsqu'une onde venant de  $-\infty$  se propage vers  $x = 0$  dans la première corde, elle donne naissance au point de jonction,  $x = 0$ , à deux ondes :

- une onde réfléchie qui se propage dans le premier milieu dans le sens des  $x$  décroissants.
- une onde transmise qui se propage dans le second milieu dans le sens des  $x$  croissants.

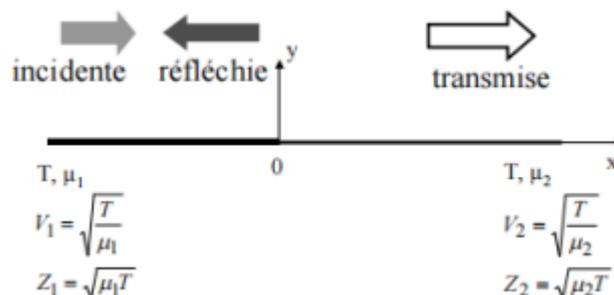


Figure II.4 : Réflexion transmission dans deux cordes semi-infinies

En supposant que le point de rencontre des deux corde  $x=0$  est ponctuel, donc il appartient au même temps à la corde 1 et la corde 2, donc il y a continuité de déplacement et de la force (ou vitesse) ce qui veut dire aussi que le déplacement de la corde le long de l'axe  $oy$  doit être le même des deux côtés de la jonction en  $x=0$ , donc ce qui permet d'écrire:

$$U_1(x,t) = U_i(x,t) + U_r(x,t) \quad \text{II.24} \quad \text{et} \quad U_2(x,t) = U_t(x,t) \quad \text{II.25}$$

$$U_1(x,t) = U_i e^{j(\omega t - k_1 x)} + U_r e^{j(\omega t + k_1 x)} \quad \text{II.26} \quad \text{et} \quad U_2(x,t) = U_t e^{j(\omega t - k_2 x)} \quad \text{II.27}$$

Où  $U_i$ ,  $U_r$  et  $U_t$  sont des amplitudes des déplacements associés respectivement à l'onde incidente, réfléchie et transmise.

Ce qui permet aussi d'obtenir le coefficient de réflexion  $r$  qui est le rapport entre l'amplitude de l'onde réfléchie et l'onde incidente, et le coefficient de transmission  $t$  qui est le rapport entre l'amplitude de l'onde transmise et l'onde incidente :

$$r = \frac{U_r(x,t)}{U_i(x,t)} = \frac{U_r}{U_i} \quad \text{II.28} \quad \text{et} \quad t = \frac{U_t(x,t)}{U_i(x,t)} = \frac{U_t}{U_i} \quad \text{II.29}$$

On a aussi  $U_1(0,t) = U_2(0,t)$  et  $\dot{U}_1(0,t) = \dot{U}_2(0,t)$

On obtient :  $U_i e^{j\omega t} + U_r e^{j\omega t} = U_t e^{j\omega t} \Rightarrow U_i + U_r = U_t$  divisons chaque membre par  $U_i$

On obtient la première relation entre  $r$  et  $t$  :  $1 + r = t$  II.30

Pour la deuxième relation, utilisons le PFD :  $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$$\vec{F}_{GD} + \vec{F}_{DG} + \vec{P} = m\vec{a} \quad \text{II.31}$$

Avec  $\vec{F}_{GD}$  et  $\vec{F}_{DG}$  les forces exercées en point  $x=0$ , par la partie gauche de la corde sur la partie droite et par la partie droite sur la partie gauche respectivement (voir la relation II.11)

Suivant l'axe  $Oy$  au point  $x=0$  (nœud):  $F_{GD} + F_{DG} = 0$  (d'après le principe des actions réciproques)  $\Rightarrow -T \frac{\partial U_1}{\partial x} \Big|_{x=0} + T \frac{\partial U_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$  II.32

On faisant les dérivés on obtient :

$$T k_1 (U_i - U_r) = T k_2 U_t \quad \text{II.33}$$

Avec  $\omega = k_1 V_1 = k_2 V_2$ , les deux cordes ont même pulsation

$\frac{T}{V_1} (U_i - U_r) = \frac{T}{V_2} U_t$  en divisant chaque membre par  $U_i$ , on obtient :

$$Z_1(1 - r) = Z_2 t \quad \text{II.34}$$

A partir des deux relations trouvées II.30 et II.34 on aura :

$$r = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad \text{II.35} \quad \text{et} \quad t = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad \text{II.36}$$

Avec  $Z_1$  et  $Z_2$  les impédances respectives de la corde 1 et 2.

# Chapitre III: Ondes acoustiques dans les fluides

## 1- Introduction :

Dans un fluide, l'onde acoustique se traduit par écart en pression par rapport à la valeur de repos  $P_0$ , appelée aussi *pression à l'équilibre*. La pression de l'air s'écrit alors  $P = P_0 + p$  avec  $p$  écart en pression, appelée aussi *supression* ou *pression acoustique*.  $P_0$  vaut  $10^5$  Pa alors que  $p$  est de l'ordre  $10^{-5}$  Pa à la limite du seuil d'audibilité, et de l'ordre de la dizaine de Pa au seuil de douleur. On a donc toujours  $p \ll P_0$ . Les variations de pression sont liées au déplacement des particules fluides.

Le son est produit par des objets qui vibrent. Pour se propager, les vibrations sonores initiales ont besoin d'un milieu matériel : solide, liquide ou gaz. Le son ne se propage pas dans le vide (comme l'espace)

Le problème de la corde vibrante fut le premier à être résolu et constitue une base sur lesquels les physiciens de l'époque construisirent la théorie acoustique.

Le son est produit par une vibration : tout élément matériel qui se déplace alternativement engendre une vibration de l'air, se traduisant par des compressions et des dilatations. On observe : une modification de la pression, un mouvement vibratoire de l'air.

De proche en proche, la vibration se propage d'une molécule à l'autre : c'est la propagation. Pour qu'il puisse y avoir propagation d'une onde acoustique, il faut un milieu matériel (le son ne se propage pas dans le vide) : dans les fluides (air, eau, . . . ), les ondes sont de type longitudinales : le mouvement des particules s'effectue dans le sens de la propagation.

## 2- Equation de propagation d'une onde acoustique :

Les ondes acoustiques sont des ondes élastiques qui se propagent dans les fluides (gaz ou liquides). Il est donc possible d'obtenir l'équation d'onde qui régit la propagation des ondes planes dans un fluide par la même démarche que celle que nous avons utilisée pour établir l'équation de propagation des ondes transversales dans une corde.

Pour obtenir cette équation nous avons besoin de l'équation fondamentale de l'acoustique. Pour cela posons les données suivantes : soit un tuyau de section 'S' contenant un fluide, représenté sur la figure III.1. Prenons un élément de volume contenant des millions de molécules de telle sorte qu'il puisse être considéré comme continu, mais toutefois suffisamment petit pour que les grandeurs acoustiques comme la pression, la masse volumique et la vitesse de particule puissent être considérées comme constantes dans cet élément de volume.

Dans ce qui suit, nous négligerons les effets de la gravitation de telle sorte que  $P_0$  et  $\rho_0$  (masse volumique du fluide à l'équilibre) sont uniformes dans tout le milieu. On suppose d'autre part que le milieu est homogène, isotrope et parfaitement élastique, c'est-à-dire non

dissipatif.

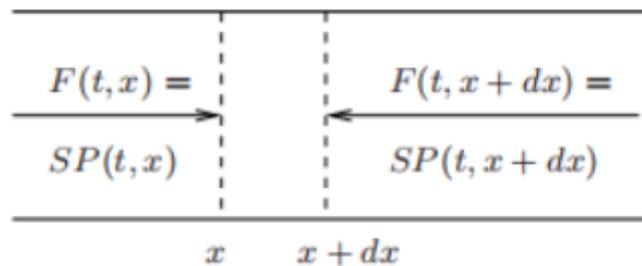


Figure II.1: Force agissant sur la tranche de gaz.

Soit une tranche de fluide de petite épaisseur  $\Delta x$  située à l'abscisse  $x$  lorsque le fluide est au repos, la pression dans le fluide est uniforme et vaut  $P_0$  et le volume occupé est  $V_0$  avec :

$$V_0 = S \cdot (x + \Delta x - x) = S \cdot \Delta x \quad \text{III.1}$$

On applique une perturbation à l'entrée du tuyau au point  $x$  l'onde se propage. Il y aura déplacement des particules qui se trouvent à la branche  $x$  avec une distance  $U(x)$ , de même les particules qui se trouvent à la branche  $x + \Delta x$  vont se déplacer de la même distance  $U(x + \Delta x)$ . On a de nouvelles positions  $x + U(x)$  et  $x + \Delta x + U(x + \Delta x)$  (voir la figure III.2).

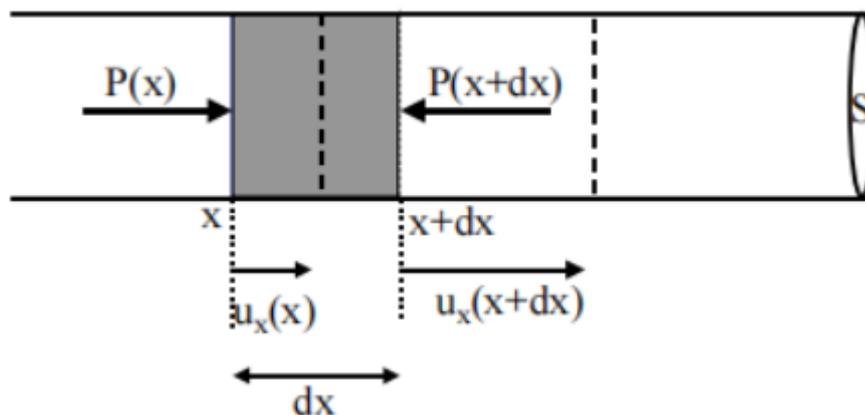


Figure III.2 : Propagation d'une onde acoustique

Le nouveau volume après perturbation devient:

$$\begin{aligned} V &= S \cdot (U(x + \Delta x) + x + \Delta x - x - U(x)) = S \cdot (U(x + \Delta x) + \Delta x - U(x)) \\ &= S \cdot \Delta x + S \cdot (U(x + \Delta x) - U(x)) = V_0 + S \cdot (U(x + \Delta x) - U(x)) \end{aligned} \quad \text{III.2}$$

En faisant un développement en série de Taylor au premier ordre de  $U(x)$ , on obtient :

$$U(x + \Delta x) = U(x) + \frac{\partial U}{\partial x} \Delta x \quad \text{III.3}$$

On aura :  $V = V_0 + S \frac{\partial U}{\partial x} \Delta x = V_0 + V_0 \frac{\partial U}{\partial x}$  et finalement :

$$\frac{V-V_0}{V_0} = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\partial U}{\partial x} \quad \text{III.4}$$

La pression acoustique est un paramètre essentiel pour caractériser une onde acoustique.

A l'équilibre, la pression au points  $x$  et  $x+\Delta x$  est  $P_0$  après la perturbation, la pression instantanée  $P$  en un point quelconque et la différence de pression entre  $P$  et  $P_0$  appelée surpression ou pression acoustique notée:

$$P(x) = P - P_0 \quad \text{III.5}$$

Comme il y a une compressibilité du fluide à cause de son déplacement, il existe une relation entre la pression acoustique et la variation du volume :

$$P(x) = -\frac{1}{\chi} \frac{\Delta V}{V_0} \quad \text{III.6}$$

avec  $\chi$  coefficient de compressibilité adiabatique.

En combinant les relations III.4 et III.6 on obtient :

$$P(x) = -\frac{1}{\chi} \frac{\partial U}{\partial x} \quad \text{III.7}$$

C'est la relation fondamentale de l'acoustique (RFA).

Le déplacement est donc lié à la surpression.

Utilisant maintenant le principe fondamental de la dynamique :  $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$$\vec{F}(x,t) - \vec{F}(x+\Delta x,t) + \vec{P} = \Delta m \vec{a} \quad \text{III.8}$$

on a une onde longitudinale (les particules vibrent en phase)

Remarque :

1- Les forces  $\vec{F}(x,t)$  et  $\vec{F}(x+\Delta x,t)$  sont différents à cause la pression.

2- On a variation de masse comme on a variation de volume.

Projectons selon Ox:

$$S.P(x,t) - S.P(x+\Delta x,t) = \Delta m \ddot{U} \quad \text{III.9}$$

comme  $\Delta m = \Delta x S \rho_0$

$\rho_0$  étant la masse volumique du fluide à l'équilibre.

En ajoutant et retranchant  $P_0$  dans le premier membre on obtient alors:

$$S.(P(x,t) - P(x+\Delta x,t)) = \Delta x S \rho_0 \ddot{U} \quad \text{III.10}$$

En faisant un développement en série de Taylor au premier ordre de  $P(x,t)$ , on obtient :

$$P(x+\Delta x) = P(x,t) + \frac{\partial P(x,t)}{\partial x} \Delta x \quad \text{III.11}$$

On aura: 
$$-S \frac{\partial P(x,t)}{\partial x} \Delta x = \Delta x S \rho_0 \ddot{U} = \Delta x S \rho_0 \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} \quad \text{III.12}$$

En utilisant la RFA: 
$$+ \frac{1}{\chi} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right) = \rho_0 \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2}$$
 finalement on obtient l'équation de propagation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} - \rho_0 \chi \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad \text{III.13}$$

Cette équation est identique à l'équation des cordes vibrantes.

Où  $C$  représente la vitesse de propagation définie par :

$$C = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi}} \quad \text{III.14}$$

La célérité  $C$  peut être calculée facilement à partir des données thermodynamiques du gaz. Pour l'air, dans les conditions normales de température et de pression, on a :

$$\rho_0 = 1,29 \text{ kg m}^{-3}, P_0 = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa, et}$$

$$\chi = 0,71 \times 10^{-5} \text{ Pa}^{-1} \text{ ce qui donne : } C = 332 \text{ m s}^{-1},$$

Obtenons l'équation de propagation en fonction de la pression acoustique  $P(x,t)$ :

On a 
$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} - \rho_0 \chi \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = 0$$
 à l'aide de la relation RFA

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U(x,t)}{\partial x} \right) = \rho_0 \chi \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} (-\chi P(x,t)) = \rho_0 \chi \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2}$$

Dérivant les deux membres par rapport à  $x$  :

$$-\chi \frac{\partial^2}{\partial x^2} (P(x,t)) = \rho_0 \chi \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} \right) = \rho_0 \chi \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial U(x,t)}{\partial x} \right) = \rho_0 \chi \frac{\partial^2}{\partial t^2} (-\chi P(x,t))$$

On obtient finalement l'équation de propagation :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (P(x,t)) - \rho_0 \chi \frac{\partial^2}{\partial t^2} (P(x,t)) = 0 \quad \text{III.15}$$

### 3- Vitesse du son :

La vitesse du son -- encore appelée « célérité du son » -- correspond à la vitesse de propagation des ondes sonores. Ainsi la vitesse du son dans l'air est-elle de l'ordre de 340 mètres par seconde, dans des conditions normales de température et de pression.

Contrairement à la vitesse de la lumière dans le vide, la vitesse du son n'est pas une constante. Elle varie, par exemple, en fonction de la température. Plus il fait chaud, plus le son voyage vite.

La vitesse du son augmente aussi avec la pression atmosphérique. Dans un liquide, plus dense que l'air, le son se propage plus rapidement. Ainsi, dans l'eau, la vitesse du son, qui dépend aussi de la compressibilité du milieu, est de quelque 1.480 mètres par seconde. Elle augmente logiquement encore dans un solide. Par exemple, dans le béton, le son se propage à une vitesse d'environ 3.100 mètres par seconde.

La vitesse de déplacement du son dépend du milieu dans lequel il est propagé. Lorsqu'il est dans l'air, il se déplace à une vitesse de 344 mètres par seconde (ce qui donne environ 1 kilomètre toutes les 3 secondes).

Le son se propage grâce à la compression qui se déplace au milieu des molécules d'air. Pour l'expliquer, on compare souvent ce phénomène physique à une pierre que l'on jette dans l'eau : on observe que de petites vagues se déplacent alors à la surface sous forme d'ondes, alors que l'eau reste à sa place.

Contrairement au vent, le son est une vibration de molécules mais pas un déplacement d'air. Comme les vaguelettes formées par la pierre dans l'eau, les molécules ne font que vibrer localement et entraînent avec elles d'autres molécules, comme par un effet domino. C'est ensuite leur oscillation qui entraîne leur propagation, jusqu'à ce qu'elles faiblissent et s'arrêtent naturellement.

Dans des matériaux solides, le son peut atteindre 5000 mètres par seconde. Il se répand par une vibration des atomes, qui se propage, elle, sans déplacer les atomes.

#### 4- Onde progressive sinusoïdale :

L'équation de la propagation obtenue pour les ondes acoustiques étant formellement identique à celle des cordes vibrantes, sa résolution et l'étude des propriétés des solutions suivent les mêmes méthodes d'approche. Tous les résultats obtenus dans le cadre des ondes progressives et stationnaires (chapitres II et III) restent valables aussi pour les ondes sonores et ne seront pas repris. Nous considérerons dans cette section, à titre d'illustrations, une onde progressive, dans le cas du tuyau ouvert d'un seul côté.

Pour produire des ondes progressives, on peut supposer que le tuyau est extrêmement long, de telle sorte qu'on puisse ignorer la condition aux limites du côté gauche. On peut aussi supposer qu'une force extérieure (un musicien par exemple) envoie régulièrement des ondes progressives se dirigeant au début vers la droite.

Pour une onde se propageant vers les  $x$  croissants, une représentation de la fonction  $P(x,t)$  est donnée par l'expression suivante :

$$P(t, x) = P_0 \cos\left(\omega \left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \quad \text{III.16}$$

$k$  le vecteur d'onde qui vaut :  $k = \frac{\omega}{c}$ .

D'où :  $P(t, x) = P_0 \cos(\omega t - kx)$

En représentation complexe l'onde progressive sinusoïdale s'écrit :

$$P(t, x) = P_0 e^{j(\omega t - kx)} \quad \text{III.17}$$

En utilisant la relation fondamentale RAF:  $P(x) = -\frac{1}{\chi} \frac{\partial U(x, t)}{\partial x}$

Ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} U(x, t) &= -\chi \int P(x) dx \\ U(x, t) &= -\chi \int P_0 e^{j(\omega t - kx)} dx \\ U(x, t) &= \frac{\chi P_0}{jk} e^{j(\omega t - kx)} = \frac{\chi P_0}{j\frac{\omega}{c}} e^{j(\omega t - kx)} \quad \text{III.18} \end{aligned}$$

et comme  $C = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi}}$  on obtient alors  $U(x, t) = \frac{P_0}{j\omega \rho_0 C} e^{j(\omega t - kx)}$  III.19

La dérivation de cette dernière expression par rapport au temps permet d'obtenir la vitesse de particules :

$$\dot{U}(x, t) = \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{P_0}{\rho_0 C} e^{j(\omega t - kx)} \quad \text{III.20}$$

On constate que pour une onde progressive la vitesse de particules est en phase avec la pression acoustique.

## 5- Réflexion-Transmission

Soit deux milieux fluides semi-infinis séparés par une surface plane. Choisissons un repère orthonormé de telle sorte que le plan  $yOz$  coïncide avec la surface de séparation.

Lorsque une onde acoustique provenant de  $-\infty$ , se propageant dans le premier dans la direction de l'axe des  $x$  arrive à la surface de séparation, elle donne naissance à deux ondes

1 - une onde réfléchie qui se propage dans le premier milieu dans le sens des  $x$  décroissants.

2 - une onde transmise qui se propage dans le second milieu dans le sens des  $x$  croissants.

L'onde résultante dans le premier milieu ( $x \leq 0$ ) est caractérisée par :

$$P_1(x, t) = P_i(x, t) + P_r(x, t) \quad \text{III.21}$$

$$P_1(x, t) = P_i e^{j(\omega t - k_1 x)} + P_r e^{j(\omega t + k_1 x)}$$

$$U_1(x, t) = -\frac{\chi_1}{jk_1} (-P_i e^{j(\omega t - k_1 x)} + P_r e^{j(\omega t + k_1 x)}) \quad \text{III.22}$$

$$\dot{U}_1(x, t) = \frac{\omega \chi_1}{k_1} (+P_i e^{j(\omega t - k_1 x)} - P_r e^{j(\omega t + k_1 x)}) \quad \text{III.23}$$

Dans le deuxième milieu, on a

$$P_2(x, t) = P_t(x, t) \quad \text{III.24}$$

$$P_2(x, t) = P_t e^{j(\omega t - k_2 x)}$$

$$U_2(x,t) = + \frac{\chi_2}{jK_2} (P_t e^{j(\omega t - k_2 x)}) \quad \text{III.25}$$

$$\dot{U}_2(x,t) = \frac{\omega \chi_2}{K_2} (P_t e^{j(\omega t - k_2 x)}) \quad \text{III.26}$$

Les relations de continuité à l'interface s'écrivent :

$$P_1(0, t) = P_2(0, t)$$

$$\dot{U}_1(0,t) = \dot{U}_2(0,t)$$

On en déduit :

$$P_i + P_r = P_t \quad \text{III.27}$$

$$\frac{\chi_1}{k_1} (P_i - P_r) = \frac{\chi_2}{k_2} P_t$$

Avec  $k_1 = \frac{\omega}{c_1}$ ,  $k_2 = \frac{\omega}{c_2}$ ,  $C_1 = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_1}}$  et  $C_2 = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_2}}$  on obtient :

$$\frac{1}{\rho_{01} c_1} (P_i - P_r) = \frac{1}{\rho_{02} c_2} P_t$$

$$\frac{1}{Z_1} (P_i - P_r) = \frac{1}{Z_2} P_t \quad \text{III.28}$$

On pose :  $\rho_{01} c_1 = Z_1$  appelée Impédance du fluide 1 et  $\rho_{02} c_2 = Z_2$  appelée Impédance du fluide 2, On définit :

- Le coefficient de réflexion pour la pression :  $r = \frac{P_r}{P_i}$

- Le coefficient de transmission pour la pression :  $t = \frac{P_t}{P_i}$

A partir des relations III.27 et III.28, on peut écrire aussi:

$$1 + r = t \quad \text{et} \quad 1 - r = \frac{Z_1}{Z_2} t$$

On en déduit les coefficients de réflexion et de transmission :

$$r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \quad \text{III.29} \quad \text{et} \quad t = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} \quad \text{III.30}$$

# CHAPITRE IV : ONDES ELECTROMAGNETIQUES

Les ondes électromagnétiques (OEM) n'ont pas besoin de milieu pour se propager. Elles sont créées par vibration des charges électriques et cette vibration se propage par transfert d'énergie entre le champ électrique et magnétique.

### 1- Equation d'onde :

La propagation des OEM est l'une des conséquences les plus importantes des équations de Maxwell. Ces équations couplent l'évolution du champ électrique et du champ magnétique. En les combinant on peut obtenir une équation d'évolution pour le champ électrique seul, et de même pour le champ magnétique seul.

On étudie la propagation (dans un milieu homogène et isotrope) d'une onde électromagnétique, mais en se limitant aux régions de l'espace où il n'y a ni charge ( $\rho=0$ ) ni densité de courant ( $j=0$ ) (Vide)

Les équations de Maxwell dans le vide en absence des sources sont :

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad \text{IV.1} \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \text{IV.2}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad \text{IV.3} \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \quad \text{IV.4}$$

$\epsilon_0$  : permittivité du vide =  $8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N/m}^2$ .

$\mu_0$  : perméabilité du vide =  $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T m/A}$ .

On a pour toute fonction vectorielle  $\vec{V}$  la relation :

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{V}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}(\vec{V})) - \Delta \vec{V}$$

Dans le cas où  $\vec{V}$  est  $\vec{E}$  on aura :

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}(\vec{E})) - \Delta \vec{E}$$

Utilisant les équations IV.1 et IV.3 de Maxwell :

$$\operatorname{rot}\left(-\frac{\partial B}{\partial t}\right) = -\Delta \vec{E}$$

En faisant la permutation on obtient :  $\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot} \vec{B}) = \Delta \vec{E}$

Utilisant l'équation IV.4 de Maxwell :  $\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}) = \Delta \vec{E}$

On aura par la suite :  $\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \Delta \vec{E}$

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{IV.5}$$

C'est l'équation de propagation du champ électrique avec une vitesse :

$$C = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad \text{IV.6}$$

On vérifie aisément que  $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$  a bien les dimensions de la vitesse.

$$\text{Qu'on peut écrire : } \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \vec{0}$$

De la même manière, en utilisant les équations de Maxwell IV.2 et IV.4, on trouve les mêmes équations pour  $\vec{B}$  :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div}(\vec{B})) - \Delta \vec{B}$$

Utilisant les équations IV.2 et IV.4 de Maxwell :

$$\overrightarrow{\text{rot}} (\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t}) = -\Delta \vec{B}$$

$$\text{En faisant la permutation on obtient : } \frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = \Delta \vec{B}$$

$$\text{Utilisant l'équation IV.4 de Maxwell : } \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (-\frac{\partial B}{\partial t}) = -\Delta \vec{B}$$

$$\text{On aura par la suite : } \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \Delta B$$

$$\Delta \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{IV.7}$$

C'est l'équation de propagation du champ magnétique.

Dans les deux équations de propagation IV.6 et IV.7 apparaît la même vitesse  $C = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ . Les champs électrique et magnétique se propagent donc à la même vitesse, appelé vitesse de la lumière. On en déduit que la lumière est donc un champ électrique et un champ magnétique qui s'influencent mutuellement au cours de la propagation.

## 2- Réflexion - Transmission :

On s'intéresse à présent à la manière dont une onde est modifiée au travers d'une interface séparant deux milieux. Les milieux considérés sont des diélectriques sans perte, ne contenant ni charges libres ( $\rho = 0$ ), ni courants de conduction ( $\vec{j} = \vec{0}$ ). Dans la plupart des situations pratiques, l'onde électromagnétique est incidente sur une frontière entre deux matériaux ; il y a alors transmission du signal mais aussi une réflexion, par exemple pour la transmission et la réflexion de la lumière incidente sur l'eau.

Les propriétés électromagnétiques des deux milieux sont décrites par les indices de réfraction  $n_1$  et  $n_2$  (voir figure IV.1). L'interaction donne naissance à une onde plane réfléchie, et une onde plane transmise. Pour résoudre le problème de l'onde incidente sur un plan de séparation entre deux milieux, on applique les conditions aux limites dans lesquels on sépare les composantes tangentielles et normales des champs (appelés aussi conditions de passage).

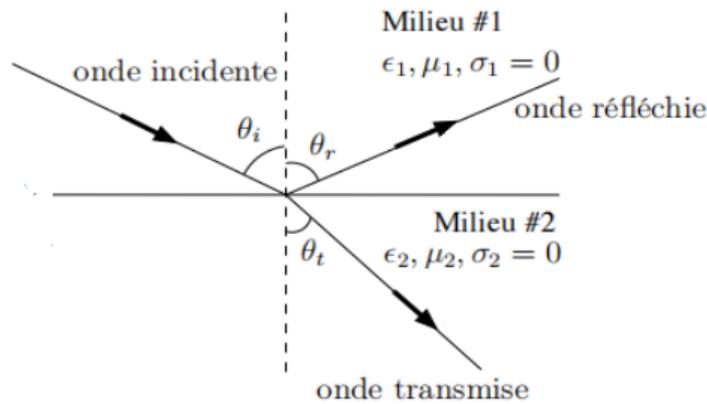


Figure IV.1 : OEM incidente sur un plan de séparation de deux milieux

## 2-1 Conditions de passage :

Une onde électromagnétique qui se propage dans une direction et dans un milieu 1 dont ses caractéristiques  $\epsilon_1$  et  $\mu_1$ , qui arrive dans un milieu 2 dont ses caractéristiques  $\epsilon_2$  et  $\mu_2$ ; on obtient une OEM réfléchie et OEM transmise. La surface de séparation entre les deux milieux appelée plan d'interface.

Les vecteurs de propagations incident  $\vec{k}_i$ , réfléchi  $\vec{k}_r$ , et transmis  $\vec{k}_t$  se trouvent dans le même plan appelé plan d'incidence, ce dernier est perpendiculaire au plan d'interface.

On a les lois de réflexion et de transmission (lois de Snell-Descartes) :

$$\Theta_i = \Theta_r \quad \text{IV.8} \quad \text{et} \quad n_1 \sin \Theta_i = n_2 \sin \Theta_t \quad \text{IV.9}$$

Avec  $n_1$  et  $n_2$  les indices de réfraction des milieux 1 et 2 respectivement.

$\Theta_i$ ,  $\Theta_r$  et  $\Theta_t$  sont respectivement les angles d'incidence, de réflexion et de transmission.

Cas de diélectrique parfait :  $\sigma = 0$  et  $\vec{j}_s = \vec{0}$

Les milieux considérés sont des diélectriques parfaits (sans perte). Le champ électrique est supposé tangent de part et d'autre du plan d'interface constant, de même pour le champ magnétique (conditions de passage).

$$\vec{D}_{2N} - \vec{D}_{1N} = \vec{0} \quad \text{IV.10}$$

$$\vec{E}_{2T} - \vec{E}_{1T} = \vec{0} \quad \text{IV.12}$$

$$\vec{B}_{2N} - \vec{B}_{1N} = \vec{0} \quad \text{IV.11}$$

$$\vec{H}_{2T} - \vec{H}_{1T} = \vec{0} \rightarrow \vec{B}_{2T} - \vec{B}_{1T} = \vec{0} \quad \text{IV.13}$$

$\sigma$  : densité surfacique de charge,  $\vec{j}_s$  : densité surfacique de courant

N: vecteur normale, T: vecteur tangentielle

$\vec{D}$  : appelé excitation électrique, avec  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  et  $\vec{H}$  : excitation magnétique, avec  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$

## 2-2 Première configuration :

Polarisation électrique perpendiculaire au plan d'incidence :

Dans le cas où le champ électrique est perpendiculaire au plan d'incidence, nous avons les vecteurs d'ondes suivants :

$$\vec{k}_i = \frac{n_1 \omega}{c} (\sin \Theta_i \vec{e}_y - \cos \Theta_i \vec{e}_z) \quad \text{IV.14}$$

$$\vec{k}_r = \frac{n_1 \omega}{c} (\sin \Theta_i \vec{e}_y + \cos \Theta_i \vec{e}_z) \quad \text{IV.15}$$

$$\vec{k}_t = \frac{n_2 \omega}{c} (\sin \Theta_t \vec{e}_y - \cos \Theta_t \vec{e}_z) \quad \text{IV.16}$$

Et les vecteurs champs électriques :

$$\vec{E}_i = E_{0i} e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \vec{e}_x \quad \text{IV.17}$$

$$\vec{E}_r = E_{0r} e^{i(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})} \vec{e}_x \quad \text{IV.18}$$

$$\vec{E}_t = E_{0t} e^{i(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})} \vec{e}_x \quad \text{IV.19}$$

On pose :

$$E_i = E_{0i} e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})}, \quad E_r = E_{0r} e^{i(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})} \quad \text{et} \quad E_t = E_{0t} e^{i(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})}$$

Dans le cas d'onde plane, on détermine le champ magnétique par :

$$\vec{B}_i = \frac{\vec{k}_i \wedge \vec{E}_i}{\omega} = -\frac{n_1 E_i}{c} (\cos \Theta_i \vec{e}_y + \sin \Theta_i \vec{e}_z) \quad \text{IV.20}$$

$$\vec{B}_r = \frac{\vec{k}_r \wedge \vec{E}_r}{\omega} = \frac{n_1 E_r}{c} (\cos \Theta_i \vec{e}_y - \sin \Theta_i \vec{e}_z) \quad \text{IV.21}$$

$$\vec{B}_t = \frac{\vec{k}_t \wedge \vec{E}_t}{\omega} = -\frac{n_2 E_t}{c} (\cos \Theta_t \vec{e}_y + \sin \Theta_t \vec{e}_z) \quad \text{IV.22}$$

Sur la figure IV.2 les différents vecteurs sont représentés dans le cas de l'incidence normale.

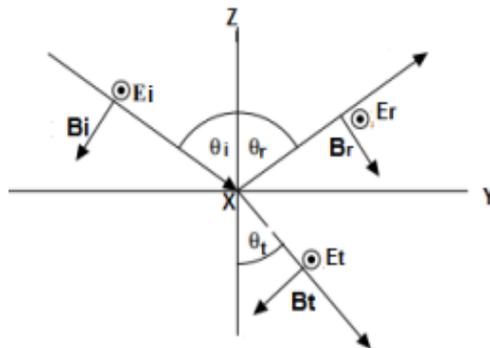


Figure IV.2 : Orientation des champs dans le cas de la polarisation perpendiculaire

Condition initiale à  $t = 0$  on se place à l'origine  $x = y = z = 0$  qui veut dire  $\vec{r} = \vec{0}$ , les conditions de passage sont valable sur l'interface donc à l'origine aussi, dans ce cas on a  $E_{2T} = E_{1T}$ , les composantes tangentielles sont continues.  $E_{1T}$  c'est le champ du milieu 1 qui est égale à la somme des champs incident et réfléchi, et  $E_{2T}$  c'est le champ du milieu transmis ce qui nous permis d'écrire :

$$E_{0i} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} + E_{0r} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = E_{0t} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \text{ après simplification :}$$

$$E_{0i} + E_{0r} = E_{0t} \quad \text{IV.23}$$

En divisant cette expression par  $E_{0i}$  on obtient :

$$1 + r_{\perp} = t_{\perp} \quad \text{IV.24}$$

On définit  $r_{\perp}$  et  $t_{\perp}$  comme coefficients de réflexion et de transmission respectivement par :

$$r_{\perp} = \frac{E_{0r}}{E_{0i}} \quad \text{et} \quad t_{\perp} = \frac{E_{0t}}{E_{0i}}$$

L'indice  $\perp$  veut dire qu'on est dans le cas où le champ est perpendiculaire au plan d'incidence.

De même on a  $B_{2T} = B_{1T}$  comme condition de passage :

$$B_{1T} = -\frac{n_1 E_i}{c} \cos \Theta_i + \frac{n_1 E_r}{c} \cos \Theta_i \quad \text{IV.25} \quad \text{et} \quad B_{2T} = -\frac{n_2 E_t}{c} \cos \Theta_t \quad \text{IV.26}$$

En faisant l'égalité entre les expressions de  $B_{2T}$  et  $B_{1T}$  et après transformation on obtient :

$$n_1 \cos \Theta_i (E_i - E_r) = n_2 \cos \Theta_t E_t \quad \text{IV.27}$$

divisant cette expression par  $E_i$  on aura :

$$1 - r_{\perp} = \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} t_{\perp} \quad \text{IV.28}$$

En combinant la relation 1 avec la relation 2 on obtient les expressions de  $r_{\perp}$  et  $t_{\perp}$  :

$$r_{\perp} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \quad \text{IV.29} \quad \text{et} \quad t_{\perp} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \quad \text{IV.30}$$

### 2-3 Deuxième configuration :

Polarisation électrique parallèle au plan d'incidence :

Nous avons les vecteurs d'ondes suivants :

$$\vec{k}_t = \frac{n_1 \omega}{c} (\sin \Theta_i \vec{e}_y - \cos \Theta_i \vec{e}_z) \quad \text{IV.31}$$

$$\vec{k}_r = \frac{n_1 \omega}{c} (\sin \Theta_i \vec{e}_y + \cos \Theta_i \vec{e}_z) \quad \text{IV.32}$$

$$\vec{k}_t = \frac{n_2 \omega}{c} (\sin \Theta_t \vec{e}_y - \cos \Theta_t \vec{e}_z) \quad \text{IV.33}$$

Et les vecteurs champs électriques :

$$\vec{E}_l = E_i (-\cos \Theta_i \vec{e}_y - \sin \Theta_i \vec{e}_z) \quad \text{IV.34}$$

$$\vec{E}_r = E_r (\cos \Theta_i \vec{e}_y - \sin \Theta_i \vec{e}_z) \quad \text{IV.35}$$

$$\vec{E}_t = E_t (-\cos \Theta_t \vec{e}_y - \sin \Theta_t \vec{e}_z) \quad \text{IV.36}$$

Dans le cas d'onde plane, on détermine le champ magnétique par :

$$\vec{B}_l = \frac{\vec{k}_l \wedge \vec{E}_l}{\omega} = -\frac{n_1 E_i}{c} \vec{e}_x \quad \text{IV.37}$$

$$\vec{B}_r = \frac{\vec{k}_r \wedge \vec{E}_r}{\omega} = -\frac{n_1 E_r}{c} \vec{e}_x \quad \text{IV.38}$$

$$\vec{B}_t = \frac{\vec{k}_t \wedge \vec{E}_t}{\omega} = -\frac{n_2 E_t}{c} \vec{e}_x \quad \text{IV.39}$$

Sur la figure IV.3 les différents vecteurs sont représentés dans le cas de l'incidence parallèle.

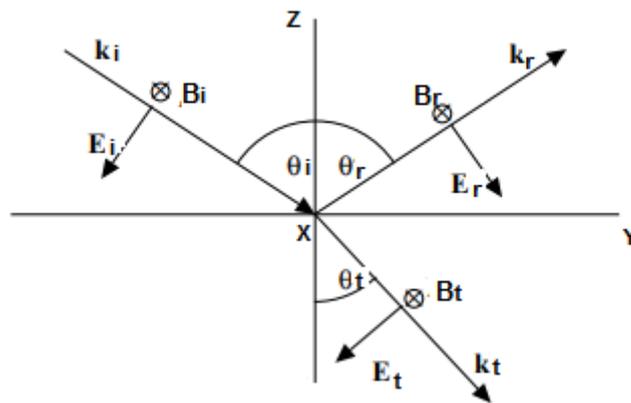


Figure IV.3 Orientation des champs dans le cas de la polarisation parallèle.

En utilisant la condition de la continuité de la composante tangentielle du champ électrique à l'interface,  $E_{2T} = E_{1T}$ , on obtient :

$$-E_i \cos \Theta_i + E_r \cos \Theta_i = -E_t \cos \Theta_t \quad \text{IV.40}$$

En divisant cette équation par  $E_i$  on obtient :

$$1 - r_{\parallel} = \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} t_{\parallel} \quad \text{IV.41}$$

L'indice  $\parallel$  veut dire qu'on est dans le cas où le champ est parallèle au plan d'incidence

De même on a  $B_{2T} = B_{1T}$  comme condition de passage :

$$-\frac{n_1 E_i}{c} - \frac{n_1 E_r}{c} = -\frac{n_2 E_t}{c} \quad \text{IV.42}$$

$$\text{d'où } n_1(E_i + E_r) = n_2 E_t \quad \text{IV.43}$$

de la même façon divisant cette relation par  $E_i$  on obtient :

$$1 + r_{\parallel} = \frac{n_2}{n_1} t_{\parallel} \quad \text{IV.44}$$

On définit  $r_{\parallel}$  et  $t_{\parallel}$  comme coefficients de réflexion et de transmission respectivement par :

$$r_{\parallel} = \frac{E_i}{E_r} \quad \text{et} \quad t_{\parallel} = \frac{E_t}{E_r}$$

En combinant la relation IV.41 avec la relation IV.44, on obtient les expressions de  $r_{\parallel}$  et  $t_{\parallel}$  :

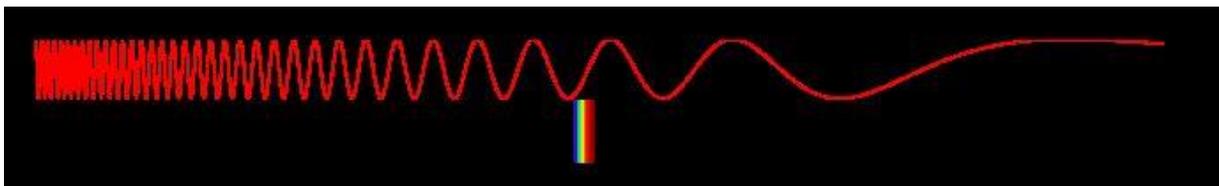
$$t_{\parallel} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i} \quad \text{IV.45} \quad \text{et} \quad r_{\parallel} = \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i} \quad \text{IV.46}$$

On en déduit que l'onde est partiellement réfléchi avec un coefficient de réflexion  $r_{\parallel}$ , et partiellement transmise avec un coefficient  $t_{\parallel}$ .

### 3- Les différents types d'ondes électromagnétiques :

Les ondes électromagnétiques, contrairement aux ondes mécaniques, n'ont pas besoin d'un support matériel pour se déplacer. Selon leur longueur et leur fréquence, les ondes électromagnétiques se classent en différentes catégories. Celles qui sont les plus connues sont celles de la lumière visible puisqu'elles sont perceptibles par l'œil, mais il existe aussi d'autres formes de rayonnements que l'œil ne peut pas percevoir.

Voici à quoi ressemble le spectre électromagnétique.



Les longueurs d'onde des rayons électromagnétiques varient entre 0,001 nm et 100 m. Les types d'ondes électromagnétiques sont les suivants :

### 3.1- Ondes radio et microondes :

Ce sont les ondes électromagnétiques ayant la plus petite fréquence du spectre. La longueur d'onde est plus grande que le millimètre. Elles transportent peu d'énergie. Les microondes, un type d'ondes radio, les longueurs d'ondes entre le millimètre et décimètre, peuvent vibrer les molécules et en augmenter la température. On trouve l'utilisation des Ondes radio en :

radio, télévision, four à micro-ondes, cellulaire, des microondes en transmissions par satellite, par téléphone cellulaire et par internet ; four à micro-ondes.

### 3.2- L'infrarouge :

L'infrarouge s'étend entre les microondes et le visible. Il est très souvent associé au rayonnement thermique. Bien qu'il soit invisible, il est possible de percevoir la chaleur qu'il transmet.

On distingue trois types de rayonnement infrarouge :

Gamme d'ondes	$\lambda$ (vide)	Gamme de température
Infrarouge proche	0.7 $\mu\text{m}$ à 5 $\mu\text{m}$	740 K à 3000 K
Infrarouge moyen	5 $\mu\text{m}$ à 30 $\mu\text{m}$	100 K à 740 K
Infrarouge lointain	30 $\mu\text{m}$ à 200 $\mu\text{m}$	10 K à 100 K

On trouve son utilisation en : communication avec satellites, télécommande à distance.

### 3.3- Visible :

C'est le seul type d'onde électromagnétique visible par les êtres humains. C'est un ensemble de 6 couleurs (rouge, orange, jaune, vert, bleu, violet) qui composent la lumière blanche. La longueur d'onde est comprise entre 380 nm et 770 nm.

Violet	400 nm à 450 nm
Bleu	450 nm à 520 nm
Vert	520 nm à 560 nm
Jaune	560 nm à 600 nm
Orange	600 nm à 630 nm
rouge	630 nm à 750 nm

On trouve leur utilisation en : éclairage, laser, photographie, écrans d'ordinateurs.

### 3.4- Ultraviolet :

Le rayonnement est invisible pour l'être humain, mais certains animaux sont en mesure de le percevoir. Il transporte une plus grande quantité d'énergie que la lumière visible. Il fait bronzer, mais il peut causer le cancer de la peau.

La longueur d'onde est inférieure à celle du visible. On distingue trois types de rayonnement ultraviolet :

Ultraviolet proche	300 nm à 400 nm
Ultraviolet moyen	200 nm à 300 nm
Ultraviolet lointain	90 nm à 200 nm

Leur utilisation en traitement de certaines maladies, stérilisation d'instruments chirurgicaux.

### 3.5- Les rayons X :

Leur longueur d'onde est comprise entre 0.01 Å à 100 Å. Ils transportent une grande quantité d'énergie, peuvent traverser des objets ou des substances. Leur exposition prolongée provoque des brûlures et des cancers.

On distingue deux types de rayon X, les "X mou" avec une longueur d'onde comprise entre 0.01 à 100 Å et les "X dur" avec une longueur d'onde comprise entre 0.01 et 0.5 Å.

Les rayons X sont utilisés en radiographie et pour les inspections des bagages.

### 3.6- Les rayons gamma :

Ce sont des rayons électromagnétiques de longueur d'onde très faible allant de  $10^{-12}$ m à  $10^{-14}$ m. Ils sont produits par des réactions nucléaires. Ils transportent une grande quantité d'énergie. Ils traversent des objets ou des substances très facilement. Ils sont très dangereux : ils peuvent causer des brûlures et des cancers.

Les rayons gamma sont utilisés pour les traitements du cancer et conservation des aliments.

# Bibliographie

- [1] Pr DJELOUAH Hakim, « Vibrations et Ondes, Manuel de cours » cours en ligne, Faculté de Physique, USTHB, année 2006/2007.
- [2] Dr Fouad BOUKLI HACENE. Vibrations et Ondes Mécaniques. Université Hassiba BENBOUALI de CHLEF. Année Universitaire : 2012 /2013
- [3] H. Sazdjian, cordes vibrantes, ondes sonores et ondes optiques, photocopié, Université Paris-Sud11, Orsay, 2012/2013.
- [4] M. Nicolas, <<Ondes et électromagnétisme>>, Dunod 2009.
- [5] O. Jacquin, <<Cours de propagations des ondes>>, Université de Grenoble Alp, cours en ligne 2018.
- [6] J. Bruneaux et J. Matricon, <<Vibration, Ondes>>, Edition Ellipses, 2008.
- [7] M. Del Pedro et P Pahud, Mécanique Vibratoire, systèmes discrets linéaires, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2003.