

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement et de la recherche scientifique
Université Dr. Moulay Tahar de Saïda



Dynamique des fluides réels

(Cours de Mécanique des fluides)

Réalisé par :

Elaziouti Abdelkader

Année universitaire 2015/2016

Table des matières

Introduction	
Liste des figures	
Liste des tableaux	
Liste des abréviations	
Chapitre I : Viscosité. Lois de comportement	
I-1 Mise en évidence : viscosimètre de Couette.....	1
I-2 Lois de comportement.....	5
Chapitre II : Dynamique des fluides visqueux incompressibles : Equation de Navier Stokes	
II-1 Écoulements laminaires et écoulements turbulents.....	9
II-2 Écoulements laminaires pertes de charges linéaires.....	11
II-3 Coefficient de charge	16
II-3-1 Perte de charges linéaires ou régulières.....	16
II-3-2 Perte de charges singulières.....	20
II-3-3 Perte de charges totales.....	21
Chapitre III : Les écoulements internes	
III-1 Introduction.....	22
III-2 Écoulement parallèle dans un conduit bidimensionnel.....	22
III-3 Écoulement de Couette.....	25
III-4 Écoulement de Poiseuille.....	27
III-5 Écoulement dans un espace annulaire.....	30
Chapitre IV : Analyse dimensionnelle et similitude	
IV-1 Introduction.....	33
IV-2 Théorème de Buckingham (Théorème de π).....	34
IV-3 Coefficients sans dimension usuels.....	38
IV-4 Similitude dans les équations différentielles.....	41
IV-5 Application aux maquettes.....	43
Annexes	
Les unités du système international : Equation aux dimensions, symboles.....	45
A- Dimension.....	45

B- Alphabet grec.....	46
C- Préfixes du SI.....	47

Bibliographies

Introduction

La mécanique des fluides est l'étude du comportement des fluides (liquides et gaz) et des forces internes associées. C'est une branche de la mécanique des milieux continus qui modélise la matière à l'aide de particules assez petites pour relever de l'analyse mathématique mais assez grandes par rapport aux molécules pour être décrites par des fonctions continues. Elle se divise en deux parties :

- ✓ la statique des fluides est l'étude des fluides au repos, qui se réduit pour l'essentiel à l'**hydrostatique**.
- ✓ la dynamique des fluides, l'étude des fluides en mouvement (**hydrodynamique**).

On distingue également d'autres branches liées à la mécanique des fluides : l'hydraulique, l'hydrodynamique, l'aérodynamique, ... Une nouvelle approche a vu le jour depuis quelques décennies: la mécanique des fluides numérique ou en anglais "*Computational fluid dynamics*". qui simule l'écoulement des fluides en résolvant les équations qui les régissent à l'aide d'ordinateurs très puissants : les supercalculateurs.

L'étude de la mécanique des fluides remonte au moins à l'époque de la Grèce antique avec *Archimède* qui fut à l'origine de la statique des fluides.

Dans certains problèmes particuliers, faute de modélisation numérique correcte des phénomènes, des modèles réduits sont utilisés. Pour cette raison, et aussi pour présenter des lois empiriques, la mécanique des fluides utilise systématiquement des nombres sans dimension.

Ceci constitue le document de cours de Dynamique des fluides réels destiné aux étudiants de première année Master de l'université Dr Moulay Tahar de Saida ayant choisi le département de Génie des procédés. Nous limiterons notre étude à celle des fluides réels. Les lois et modèles simplifiés seront utilisés pour des fluides continus dans une description macroscopique.

Ce cours est subdivisé en quatre chapitres :

Le chapitre I est focalisé sur les aspects physiques du phénomène de viscosité et les lois de comportement des fluides (Newtonien, non newtonien,...).

Le chapitre II est consacré à l'étude de la dynamique des fluides visqueux incompressibles dans laquelle on classe les écoulements laminaires et écoulements turbulents. La résolution de l'équation fondamentale de *Navier-Stokes* en dynamique des fluides passe par l'introduction de la notion de pertes de charge. Ainsi, pour rendre compte de la dissipation d'énergie due aux frottements visqueux, ces pertes de charges prendront place dans la formulation d'une **équation de Bernoulli généralisée**.

Par rapport aux écoulements externes, les écoulements internes (écoulement parallèle dans un conduit bidimensionnel, écoulement de Couette, écoulement de Poiseuille et écoulement dans un espace annulaire) ont ceci de particulier que les conditions aux limites y sont omniprésentes. Ils sont abordés dans le chapitre III sous deux aspects complémentaires : les profils de vitesse et les pertes de charge qui conditionnent le dimensionnement des circuits fluides.

A l'issue du chapitre IV, les équations adimensionnelles et les conditions de similitude sont y énoncées et explicitées à partir de l'analyse dimensionnelle d'une relation mathématique entre grandeurs physiques.

Liste des figures

Figure I-1 : Viscosimètre de Couette

Figure I-2 : Couche de fluide placée entre deux plaques

Figure I-3 : La répartition des vitesses de fluide placée entre deux plaques

Figure I-4: Les contraintes tangentielles et normales entre deux couches successives de fluide en écoulement unidimensionnel

Figure I-5 : Les rhéogrammes des fluides

Figure II-1 : Expérience de Osborne Reynolds

Figure II-2 : Différents régimes d'un écoulement

Figure II-3 : Les régimes d'écoulement

Figure II-4 : Evolution de la pression totale (charge) avec la progression de l'écoulement

Figure II-5 : Expérience de Nikuradze

Figure II-6 : Abaques de Nikuradze

Figure II-7 : Diagramme de Moody

Figure II-8 : Abaque des pertes de charge

Figure II-9 : Liste non exhaustive de quelques singularités typiques

Figure III-1: Écoulement parallèle dans une conduite bidimensionnelle

Figure III-2: Le profil parabolique des vitesses de fluide en écoulement parallèle dans une conduite bidimensionnelle

Figure III-3: Écoulement de Couette

Figure III-4: Écoulement de Poiseuille (Écoulement parallèle dans une conduite cylindrique)

Figure III-5: Le profil parabolique des vitesses de fluide en écoulement de Poiseuille

Figure III-6: Écoulement dans une canalisation annulaire

Figure IV-1: Ecoulement d'un fluide dans une conduite cylindrique

Figure IV-2: Ecoulement d'un fluide sur une plaque plane rectangulaire

Liste des tableaux

Tableau I-1 : Valeurs caractéristiques de viscosités dynamiques et cinématiques obtenues à 20°C et 1 bar

Tableau IV-1: Inventaire des variables

Tableau A- 1: Les unités du système international SI, unités de base, dimensions règles d'écriture.

Tableau A-2 : Les unités de l'alphabet grec, règles d'écriture

Tableau A-3 : Les préfixes du système international, règles d'écriture

Liste des abréviations

ω	Vitesse angulaire
C	Couple
$\frac{\partial v}{\partial n}$	Gradient de vitesse
μ	Viscosité dynamique.
ν	Viscosité cinématique
$\dot{\gamma}$	Vitesse de cisaillement
μ_{app}	Viscosité apparente
K	Constante de consistance
n	Indice d'écoulement ou de comportement
λ	Coefficient de perte de charge linéaire
K'	Constante de perte de charge singulière
ε	Rugosité moyenne de la conduite.
ε_r	Rugosité relative
ρ	Masse volumique du fluide
D	Diamètre de la conduite
$\frac{\Delta P_t}{L}$	Perte de charge par unité de longueur
Re	Nombre de Reynolds
Rec	Nombre de Reynolds critique
Fr	Nombre de Froude
Eu	Nombre d'Euler
Ma	Nombre de Mach
St	Nombre de Stokes
Pr	Nombre de Prandtl
Ca	Nombre de capillarité ou nombre capillaire

Chapitre I : Viscosité. Lois de comportement

I-1 Mise en évidence : viscosimètre de Couette

Le viscosimètre (**Figure I-1**) est constitué de deux cylindres coaxiaux l'un est mis en rotation avec la vitesse angulaire ω . L'autre est entraîné par les forces de viscosité et est maintenu immobile par l'application d'un couple C . L'espace entre les deux cylindres est faible et rempli du fluide dont on veut mesurer la viscosité.

On appelle R_1 et R_2 les rayons des cylindres et e la différence $R_1 - R_2 \approx e$; e est très petite de telle façon que l'on puisse considérer la répartition des vitesses comme linéaire entre les deux cylindres.

On montre que la force de frottement est proportionnelle au gradient de vitesse soit :

$$F = \mu \frac{SV}{e} (1)$$

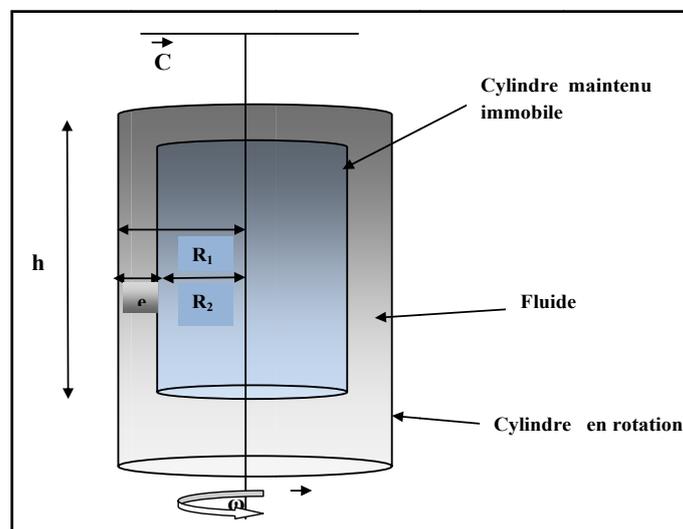


Figure I-1 : Viscosimètre de Couette.

Pour définir une grandeur capable de quantifier la notion de viscosité, on recherche une relation mathématique entre la force de déformation et la vitesse du fluide. Soit une couche de fluide placée entre deux plaques (**Figure I-2**)

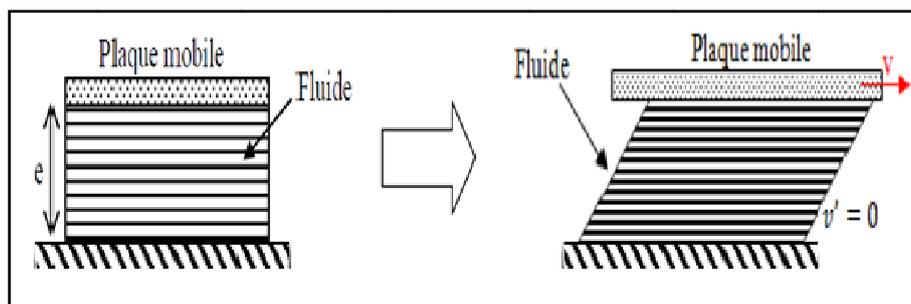


Figure I-2 : Couche de fluide placée entre deux plaques.

Remarques

- ✓ Lorsque la vitesse n'est pas trop grande, les couches de fluide ne se mélangent pas. C'est un écoulement laminaire.
- ✓ Si la vitesse est constante, le mouvement est rectiligne uniforme. Dans ce cas, F est la force de frottement.

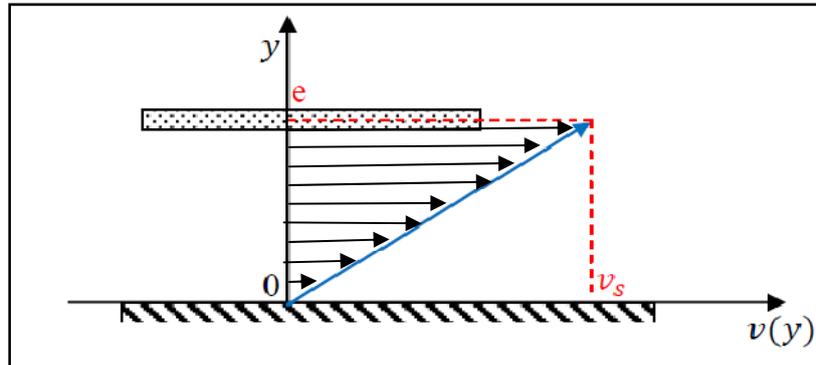


Figure I-3 :La répartition des vitesses de fluide placée entre deux plaques

Le coefficient de proportionnalité μ est appelé viscosité dynamique du fluide et V/e représente le gradient de vitesse. En effet, une particule de fluide en contact avec une paroi prend la vitesse de la paroi.

Vitesse d'une particule de fluide en contact avec la paroi mobile : $V=V_e$ ($y=e$)

Vitesse de la particule en contact avec la paroi immobile : $V_0=0$ ($y=0$)

Comme la répartition des vitesses est linéaire(**Figure I-3**), la vitesse est proportionnelle à y :

$$v=a.y$$

$$\text{et } a = \frac{dv}{dy} = \frac{V_e - V_0}{e - 0} = \frac{V}{e}$$

Cette grandeur est le **gradient de vitesse** : $\frac{dv}{dy}$

Nous avons vu précédemment que : $F = \mu \frac{SV}{e}$

$$\Rightarrow F = \mu \frac{Sdv}{dy}$$

Si on ramène à l'unité de surface : $\tau = \frac{F}{S} = \mu \frac{dv}{dy} \Rightarrow$ **Loi de Newton**

Remarque

- ✓ R_1 et $R_2 \approx 1$ à quelques centimètres et entrefer $R_2 - R_1 \approx$ quelques millimètres.
cisaillement constant si $R_1 - R_2 \ll R_2 \Rightarrow (R_1 - R_2)/R_2 < 0,15$ entrefer étroit ;

- ✓ Forme conique de la base du cylindre intérieure pour éviter les effets parasites. Il existe deux types de rhéomètres de Couette:
- ✓ À **cisaillement imposé**: on impose la vitesse de rotation et on mesure le couple C .
- ✓ À **contrainte imposée**: on impose le couple et on mesure la vitesse de rotation obtenue.

L'expérience de *Couette* permet la mesure du coefficient de viscosité par la mesure du couple C :

$$C = R_2 S \mu \frac{V}{e} \text{ avec } S = 2\pi R_2 h \Rightarrow \mu = \frac{C e}{2\pi R_2^2 R_1 h \omega} \quad (2)$$

I-2 Dimensions et unités

a-Viscosité dynamique

De la relation $\mu = \frac{F_e}{S V}$ on en déduit la dimension de la **viscosité dynamique**.

$$[\mu] = \frac{MLT^{-2}L}{L^2LT^{-1}} = ML^{-1}L^{-1}$$

En *Système International* (SI), l'unité de la viscosité dynamique est le **Pa.s** ou poiseuille (symbole **PI**) $1 \text{ PI} = 1 \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$. On trouve aussi le coefficient de viscosité dans le *Système d'unités* (CGS), l'unité est le **Poise** (symbole **Po**) tel que $1 \text{ PI} = 10 \text{ Po} = 1 \text{ daPo} = 1 \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$.

Autres unités : La viscosité de produits industriels (huile en particulier) est exprimée au moyen d'unités empiriques : degré ENGLER en Europe, degré Redwood en Angleterre, degré Saybolt aux USA.

Par rapport aux faits expérimentaux, on est conduit à considérer deux types de fluides :

- ✓ D'une part les fluides **newtoniens** qui satisfont à la loi de Newton. Ces fluides ont un coefficient de viscosité indépendant du gradient de vitesse. C'est le cas des liquides purs (eau, huiles).
- ✓ D'autre part les fluides **non-newtoniens**. Ce sont les solutions de polymères, les purées, les gels, les boues, le sang, la plupart des peintures, etc... L'étude de ces fluides relève de la rhéologie.

b-Viscosité cinématique

Dans de nombreuses formules apparait le rapport de la viscosité dynamique μ et de la masse volumique ρ . Ce rapport est appelé viscosité cinématique ν .

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (3)$$

Dimensions : $[\nu] = L^2 T^{-1}$

Unités : *Système international* (SI), l'unité de la viscosité est $m^2 \cdot s^{-1}$.

En *Système CGS*, l'unité est le **Stockes**(symbole : **St**) : $1 m^2 \cdot s^{-1} = 10^4 \text{ st}$

Quelques valeurs typiques

Quelques valeurs caractéristiques de viscosités dynamiques et cinématiques sont récapitulées dans le **tableau I-1**.

Tableau I-1 : Valeurs caractéristiques de viscosités dynamiques et cinématiques obtenues à 20°C et 1 bar.

Produits	Viscosité dynamiques μ (Pa.s)	Viscosité cinématiques ν (m^2/s)
H ₂	$8,9 \times 10^{-6}$	105×10^{-6}
Air	$18,5 \times 10^{-6}$	$15,6 \times 10^{-6}$
Hexan	$0,3 \times 10^{-3}$	$0,46 \times 10^{-6}$
Benzène	$0,652 \times 10^{-3}$	$0,741 \times 10^{-6}$
Eau	$1,005 \times 10^{-3}$	$1,007 \times 10^{-6}$
Mercure	$1,554 \times 10^{-3}$	$0,1147 \times 10^{-6}$
Lait	$2,0 \times 10^{-3}$	$1,93 \times 10^{-6}$
Sang de l'homme à 37°C	$4,0 \times 10^{-3}$	
Huile d'olive	84×10^{-3}	$91,5 \times 10^{-6}$
Glycérol	1,49	1182×10^{-6}
Gels /crèmes	1 à 100	
Vernis /peintures	10 à 1000	
Résines/goudrons/bitumes	100 à 100 000	
Glaces à 0°C	10^{13}	
Granit	10^{20}	

I-3 Variation de la viscosité dynamique avec la température et la pression

Cas des gaz

Influence de la pression $\mu = 0,499\rho c l(4)$

où l est le libre parcours moyen,

ρ la masse volumique et c la vitesse moyenne des molécules.

En général pour les gaz, la pression influe peu sur la viscosité.

Influence de la température

Soit μ_0 la viscosité à la température T_0

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{K \sqrt{T}}{1 + \frac{C}{T}} \quad (5)$$

où K et C sont des constantes qui dépendent de la nature du gaz

Cas des liquides

Influence de la pression

$$\frac{\mu_P}{\mu_{P_0}} = a \left(\frac{P}{P_0} - 1 \right) \quad \text{avec } \mu_P \text{ et } \mu_{P_0} \text{ les viscosités aux pressions } P \text{ et } P_0$$

Pour les huiles minérales. $a=1.003$

Influence de la température

$$\mu = e^{\left(\frac{T_0}{T} \right)^a} \log \mu_0 \quad \text{avec } \mu_0 \text{ la viscosité à la température } T_0$$

I-4 Lois de comportement

L'expérience montre que, lors de l'écoulement d'un fluide, la pression ne suffit pas à expliquer les phénomènes et qu'il convient d'introduire des forces tangentielles qui s'opposent au mouvement du fluide (**Figure I-4**). Ces forces, de type frottement, dues aux interactions entre molécules du fluide, sont appelées forces de viscosité. La contrainte (force par unité de surface) $\vec{\sigma}$ qu'exerce une couche de fluide supérieure sur un élément de surface d'une couche de fluide inférieure, s'écrit :

$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{F}}{dS} = \sigma_n \vec{n} + \sigma_t \vec{t} \quad \text{avec } \sigma_n = -p$$

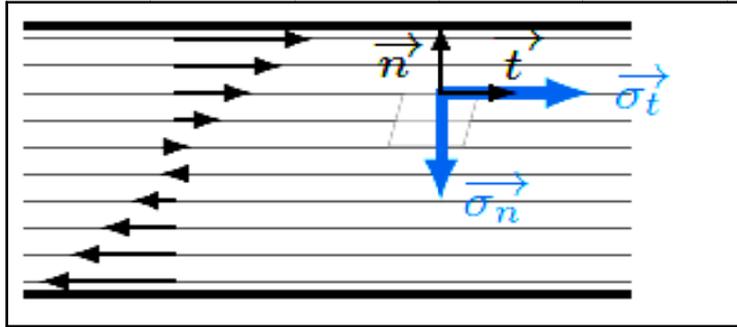


Figure I-4: Les contraintes tangentielles et normales entre deux couches successives de fluide en écoulement unidimensionnel.

a-Fluide newtonien

Entre deux couches successives de fluide en écoulement unidimensionnel à la vitesse \vec{v} , il existe des contraintes tangentielles à l'écoulement qui accélèrent la couche la plus lente et ralentissent la couche la plus rapide. Par définition d'un fluide newtonien, les forces visqueuses sont proportionnelles à la différence de vitesse c'est-à-dire au gradient de vitesse:

$$\sigma_t = \mu \frac{\partial v}{\partial n} = \mu \dot{\gamma} \quad (6)$$

où $\frac{\partial v}{\partial n}$ désigne le gradient de vitesse dans la direction normale à la surface. De manière générale, la contrainte visqueuse varie comme la vitesse de cisaillement; $\dot{\gamma}$.

μ est la constante de proportionnalité. Il est caractéristique du fluide et désigne la **viscosité dynamique** du fluide.

b- Fluides non newtoniens

Pour les fluides non newtoniens, on peut définir de la même façon une relation de la forme:

$$\sigma_t = K \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right)^n = K \dot{\gamma} \quad (7)$$

où μ_{app} : représente une **viscosité apparente**.

La viscosité apparente du fluide n'est pas constante contrairement au cas d'un fluide newtonien, elle dépend du taux de cisaillement.

I-5 Relations entre contrainte et taux de cisaillement pour différents fluides (Loi de puissance ou d’Ostwald – de Waehle)

Équation constitutive du fluide dite de type *loi de puissance ou d’Ostwald – de Waehle*:

$$\mu_{app} = k\dot{\gamma}^{n-1} \Rightarrow \sigma_t = k\dot{\gamma}^n \quad (8)$$

où **K** la consistance (Pa.sⁿ)

n indice d’écoulement

- ✓ loi valide pour une certaine gamme de taux de cisaillement. !

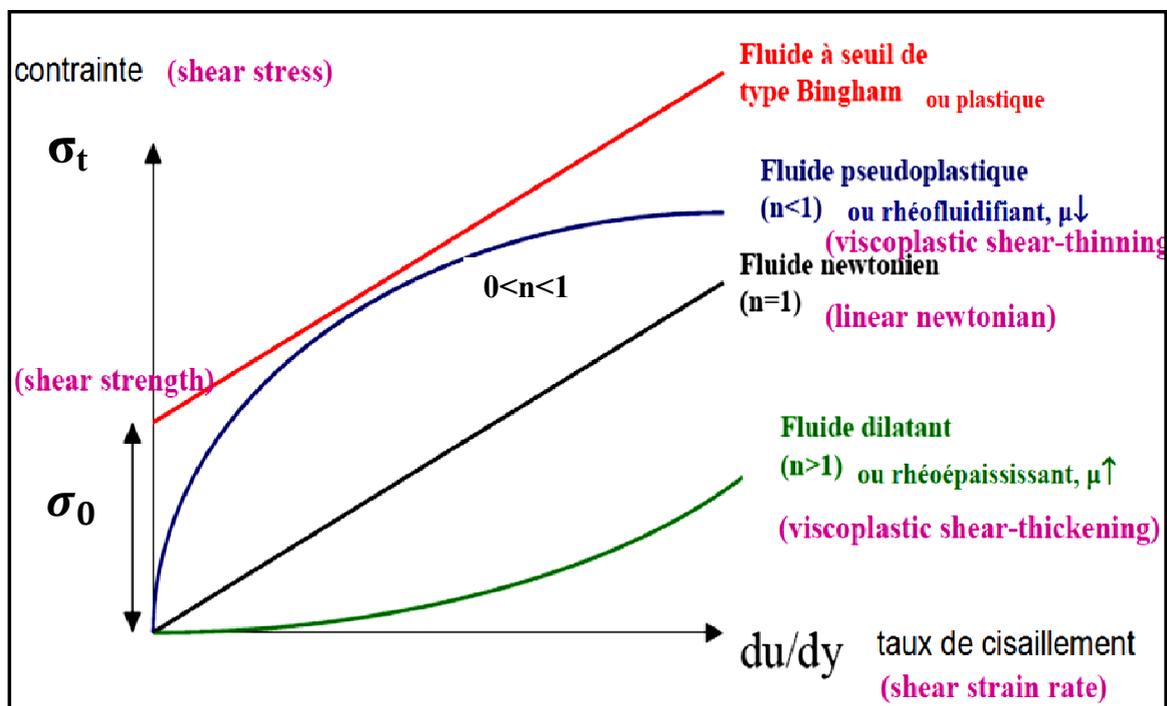


Figure I-5 :Les rhéogrammes des fluides.

La courbe $\sigma_t = f(\frac{\partial v}{\partial n})$, appelée "rhéogramme"(Figure I-5), présente des allures différentes suivant selon la nature des fluides.

a- Fluide newtonien (n=1):

La viscosité apparente est constante en fonction du taux de cisaillement. C'est le cas de nombreux liquides purs, tels que l'eau ou le glycérol.

b- Fluides pseudoplastiques ou rhéofluidifiants ($0 < n < 1$)

Les fluides pseudoplastiques sont tels que la viscosité apparente diminue lorsque la déformation augmente. On dit que ces fluides, qui sont les plus fréquents et les plus importants en Génie des Procédés, présentent une rhéofluidification. Appartiennent à cette classe les huiles et les graisses de lubrification, le pétrole, le sang, certaines peintures, la plupart des solutions de polymères.

c- Fluides dilatants ou rhéoépaississants ($n > 1$)

La viscosité apparente augmente lorsque le gradient de vitesse augmente tel que les suspensions fortement concentrées dans lesquelles la phase liquide n'occupe pratiquement que les interstices entre particules solides, les solutions colloïdales d'argile dans l'eau, sable mouillé, suspensions concentrées d'amidon. On utilise la loi de puissance pour les représenter.

d- Fluides à seuil ou fluides (visco)plastiques

Fluide à seuil ou fluides (visco) plastiques tel que les suspensions, solutions de polymères, crèmes et émulsions, pâtes dentifrices, ciment, frais, concentrés de tomate).

e- Fluides à seuil de type Bingham

Il existe une contrainte seuil au-dessous de laquelle il n'y a pas d'écoulement tel que le dentifrice.

**Chapitre II : Dynamique des fluides visqueux
incompressibles :
Equation de Navier Stokes**

II-1 Écoulements laminaires et écoulementsturbulents

Etudier l'écoulement d'un fluide réel revient à résoudre l'équation fondamentale de la dynamique (équation de **Navier-Stokes**):

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla}p + \mu\Delta\vec{v} + \rho\vec{g}(\mathbf{9})$$

Mais en pratique, cette équation ne peut se résoudre analytiquement qu'en introduisant des hypothèses de travail qui permettront de résoudre cette équation dans le cadre de régimes d'écoulement particuliers :le **régime laminaire**et le **régime turbulent**.

- ✓ On dit qu'un écoulement est **laminaire** lorsque le mouvement des particules fluides se fait de façon régulière et ordonnée.
- ✓ L'écoulement est **turbulent** lorsque le déplacement est irrégulier et que des fluctuations aléatoires de vitesse se superposent au mouvement moyen du fluide. En régime turbulent, on devra utiliser des relations empiriques généralement déterminées expérimentalement.

L'une des premières analyses de la transition d'un régime laminaire vers la turbulence est basée sur des observations d'écoulements dans une conduite cylindrique effectuées par O. Reynolds en 1883.

Le montage expérimental schématisé sur la **figure II-2** comporte un réservoir de liquide sous pression débouchant sur un conduit cylindrique. Un tube mince permet l'injection de colorant. Lorsque l'écoulement est laminaire, le filet de colorant reste mince, régulier et parallèle à la paroi du cylindre. En écoulement turbulent, le colorant est rapidement dispersé. Dans cette situation, une mesure de la composante de vitesse axiale montre que celle-ci fluctue de façon aléatoire dans l'espace et dans le temps.

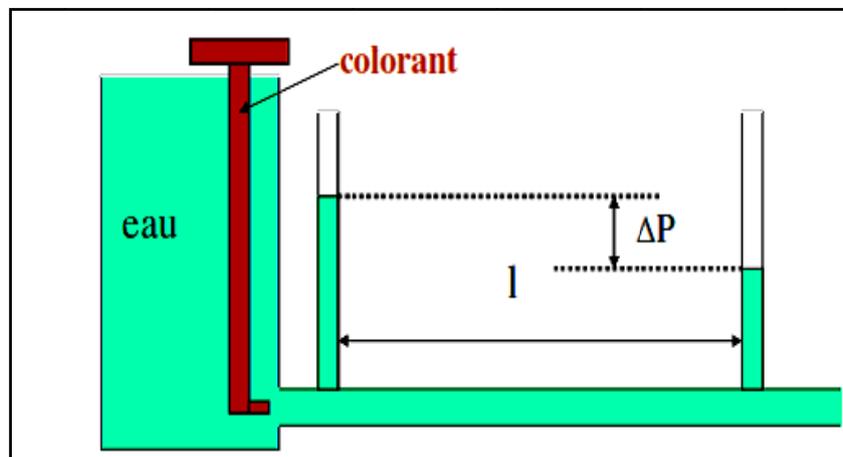


Figure II-1 : Expérience d'Osborne Reynolds

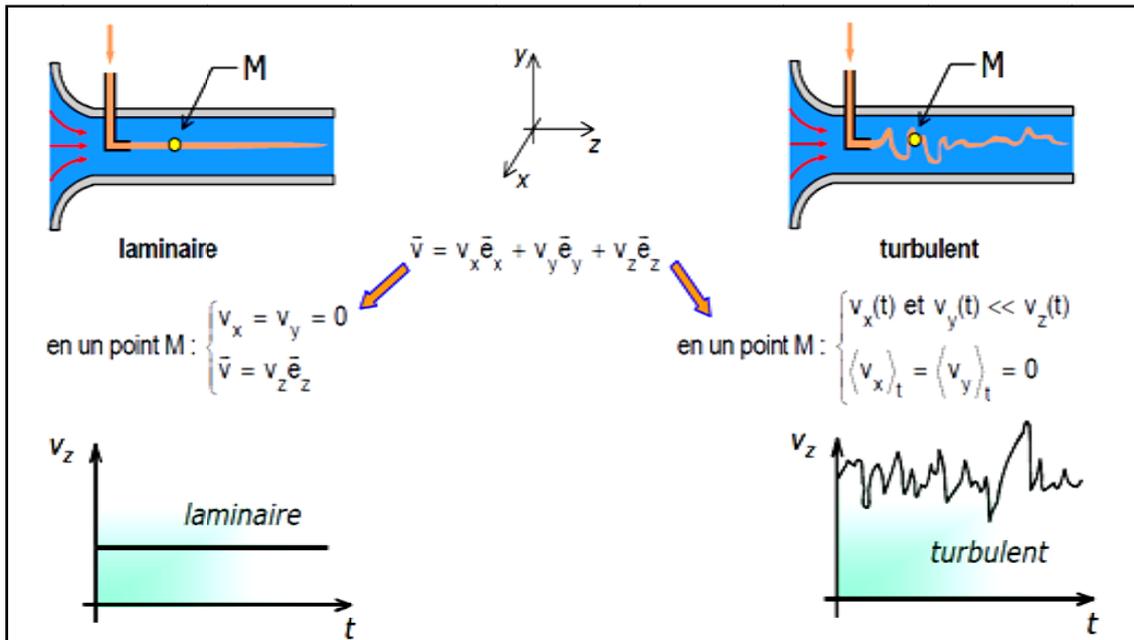


Figure II-2 : Différents régimes d'un écoulement

À partir de ces observations, les travaux de *Reynolds* ont alors permis de montrer que la transition du régime laminaire au régime turbulent (**Figure II-2**) n'est pas seulement conditionnée par le débit mais dépend d'un ensemble de paramètres qu'il convient de regrouper pour former une quantité sans dimension qu'on appellera « **nombre de Reynolds** » Eq. (10). Ce nombre prend en compte la vitesse moyenne de l'écoulement V , le diamètre D de la conduite (ou tout autre paramètre de longueur caractérisant l'écoulement), ainsi que les propriétés intrinsèques du fluide (masse volumique ρ et viscosité μ) :

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{V D}{\nu} \quad (10)$$

où ρ : masse volumique $[\rho] = ML^{-3}$

μ : viscosité $[\mu] = ML^{-1} T^{-1}$

$\nu = \mu/\rho$: viscosité cinématique $[\nu] = L^2 T^{-1}$

V : vitesse $[v] = LT^{-1}$

D : diamètre $[D] = L$

Remarque : Compte tenu des dimensions de chacun des paramètres, on vérifiera facilement que le nombre de *Reynolds* est bien sans dimension.

On constate généralement que la transition d'un régime laminaire à un régime turbulent(**Figure II-3**)

s'effectue lorsque $Re \approx 2000 = Re_c$, **nombre de Reynolds critique**.

- ✓ Pour $Re < 2000$, l'écoulement reste laminaire et une perturbation localisée introduite dans l'écoulement est progressivement dissipée.
- ✓ Dans un intervalle de Re de **2000 à 3000**, des « paquets » turbulents sont convectés dans le conduit de façon intermittente.
- ✓ Aux nombres de Reynolds plus élevés $Re > 3000$, l'écoulement devient turbulent dans son ensemble ; c'est-à-dire que les forces de viscosité ne sont plus suffisantes pour empêcher les inévitables perturbations d'engendrer des tourbillons qui se superposent à l'écoulement global.

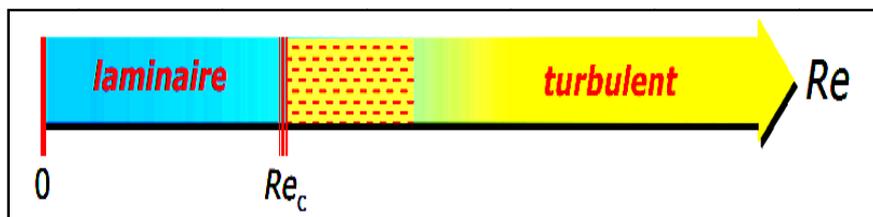


Figure II-3 : Les régimes d'écoulement

Remarque :

En prenant certaines précautions pour éviter au maximum les perturbations (vibrations, aspérités de la conduite...) l'écoulement peut rester laminaire au-delà de Re_c , jusqu'à une certaine limite (imprécise) qui dépendra essentiellement du niveau de précautions prises pour repousser l'apparition des turbulences.

II-2 Écoulement laminaire et pertes de charge régulières

Que l'écoulement soit laminaire ou turbulent, la résolution de l'équation de **Navier-Stokes** passe par l'introduction de la notion de pertes de charge. Ainsi, pour rendre compte de la

dissipation d'énergie due aux frottements visqueux, ces pertes de charges prendront place dans la formulation d'une équation de **Bernoulli généralisée**.

Partons de l'équation de **Navier-Stokes (Eq. (9))** établie pour l'écoulement d'un fluide newtonien incompressible :

Si l'écoulement est **stationnaire** $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \mathbf{0}$, la dérivée particulaire se résume à la dérivée convective et peut se développer comme :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{1}{2} \nabla v^2 - \vec{v} \wedge (\nabla \wedge \vec{v}) \quad (11)$$

On peut alors écrire **Eq. (12)** :

$$\frac{1}{2} \rho \nabla v^2 - \rho \vec{v} \wedge (\nabla \wedge \vec{v}) = -\nabla p + \mu \Delta \vec{v} + \rho \vec{g} \quad (12)$$

L'accélération de la pesanteur dérivant d'un potentiel et le fluide étant **incompressible** ($\rho = \text{Cte}$), on regroupe sous un même gradient trois des cinq termes de cette équation pour lui donner la forme suivante **Eqs. (13-15)** :

$$\nabla \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) - \rho \vec{v} \wedge (\nabla \wedge \vec{v}) = -\nabla p + \mu \Delta \vec{v} + \nabla \rho \vec{g} Z \quad (13)$$

$$\nabla \left(p + \rho \vec{g} Z + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) = \mu \Delta \vec{v} + \rho \vec{v} \wedge (\nabla \wedge \vec{v}) \quad (14)$$

$$\nabla \left(p + \rho \vec{g} Z + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) = \mu \Delta \vec{v} + 2 \rho \vec{v} \wedge \vec{\Omega} \quad (15)$$

On retrouve ainsi une formulation semblable à celle conduisant pour un fluide parfait à l'équation de **Bernoulli**.

De la même manière, le produit vectoriel du vecteur vitesse avec le rotationnel de la vitesse s'annule lorsque l'équation est considérée sur l'ensemble des points constituant une ligne de courant **Eq. (16)**.

$$\nabla \left(p + \rho \vec{g} Z + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) ds \vec{e}_s = (\mu \Delta \vec{v} + 2 \rho \vec{v} \wedge \vec{\Omega}) ds \vec{e}_s \quad (16)$$

$$(\vec{v} \wedge \vec{\Omega}) \perp \vec{v} \text{ et } \vec{e}_s \parallel \vec{v} \Rightarrow (\vec{v} \wedge \vec{\Omega}) \cdot \vec{e}_s = 0$$

Il reste donc que le long d'une ligne de courant, l'écoulement stationnaire d'un fluide de viscosité non négligeable obéit à l'équation suivante **Eq.(17)** :

$$\nabla \left(p + \rho \vec{g} Z + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) ds \vec{e}_s = \mu \Delta \vec{v} ds \vec{e}_s \quad (17)$$

Puis la projection sur chacun des axes d'un repère cartésien Eqs. (18-23) :

$$d\vec{s} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z \quad (18)$$

$$\nabla(\bullet) = \frac{\partial(\bullet)}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial(\bullet)}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial(\bullet)}{\partial z}\vec{e}_z \quad (19)$$

$$\nabla\vec{v} = \nabla v_x\vec{e}_x + \nabla v_y\vec{e}_y + \nabla v_z\vec{e}_z \quad (20)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(p + \rho\vec{g}Z + \frac{1}{2}\rho v^2 \right) dx = \mu\Delta v_x dx \quad (21)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(p + \rho\vec{g}Z + \frac{1}{2}\rho v^2 \right) dy = \mu\Delta v_y dy \quad (22)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(p + \rho\vec{g}Z + \frac{1}{2}\rho v^2 \right) dz = \mu\Delta v_z dz \quad (23)$$

Soit Eqs. (24-26) après simplification par dx, dy et dz :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(p + \rho\vec{g}Z + \frac{1}{2}\rho v^2 \right) = \mu\Delta v_x \quad (24)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(p + \rho\vec{g}Z + \frac{1}{2}\rho v^2 \right) = \mu\Delta v_y \quad (25)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(p + \rho\vec{g}Z + \frac{1}{2}\rho v^2 \right) = \mu\Delta v_z \quad (26)$$

$p + \rho\vec{g}Z + \frac{1}{2}\rho v^2$ est la **pression totale** (également appelée « **charge** »), notée P_t , somme de la pression motrice $p + \rho\vec{g}Z$ et de la pression cinétique $\frac{1}{2}\rho v^2$. C'est donc une quantité scalaire qui doit vérifier l'équation Eq. (27):

$$\nabla P_t = \mu\Delta\vec{v} \quad (27)$$

On suppose alors qu'un repère cartésien soit choisi de telle sorte qu'en tout point de l'écoulement on ait $\vec{v} = v(x, y, z)\vec{e}_x$ et que l'écoulement est laminaire. Dans ces conditions, la projection dans les trois directions du repère de l'équation Eq. (27) précédemment établie, donne :

$$v_x = v$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_y = 0 \\ v_z = 0 \end{array} \Rightarrow \vec{v} = v\vec{e}_x \right.$$

$$\frac{\partial P_t}{\partial x} = \mu\Delta v$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P_t}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial P_t}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

On en déduit que la **pression totale** n'est fonction que de x , et qu'elle varie en obéissant à l'équation **Eq. (28)** :

$$\frac{dp_t}{dx} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (28)$$

Par ailleurs, l'écoulement étant conservatif, l'équation de continuité **Eq. (29)** s'applique dans sa forme la plus simple:

$$\vec{\nabla} \vec{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \mathbf{0} \quad (29)$$

et comme $v=w=0$, il en découle $\frac{\partial u}{\partial x} = \mathbf{0} \Rightarrow u = u(y, z)$. Nous pouvons alors reconsidérer l'équation régissant l'évolution de la pression totale en la formulant **Eq. (30)** :

$$\frac{dp_t}{dx} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = Cte \forall (x, y, z) \quad (30)$$

Il s'avère alors que le membre de gauche $\left(\frac{dp_t}{dx}\right)$ ne peut dépendre que de x alors que celui de droite $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$ ne peut dépendre que de y et z . La conséquence est donc que les deux membres sont égaux à une même constante $\forall (x, y, z)$. Ceci permet de montrer que la pression totale **Eq. (31)** varie linéairement avec x :

$$\frac{dp_t}{dx} = Cte < 0 \quad (31)$$

Remarque :

- ✓ Pour un fluide parfait dont la viscosité est négligée, la pression totale ne varie pas. En effet, la constante étant proportionnelle à μ , elle devient nulle, l'équation de **Bernoulli Eq. (32)** s'applique le long d'une ligne de courant :

$$\frac{dp_t}{dx} = \mathbf{0} \Rightarrow p + \rho \vec{g}Z + \frac{1}{2} \rho v^2 = Cte \quad (32)$$

On dit alors que la charge est constante ou bien encore qu'il n'y a pas de perte de charge.

- ✓ Pour un fluide réel (dont la viscosité n'est pas négligeable), l'écoulement laminaire est caractérisé par une variation linéaire de la charge avec la distance parcourue. En effet, puisque les frottements visqueux sont responsables d'une dissipation d'énergie et que la pression totale n'est autre qu'une énergie volumique, il s'ensuit logiquement que la pression totale doit diminuer avec la progression de l'écoulement.

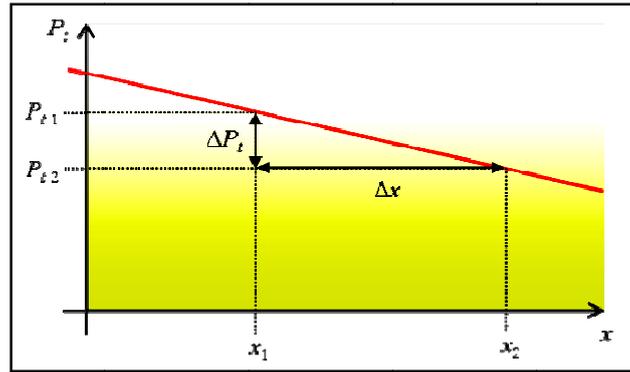


Figure II-4 : Evolution de la pression totale (charge) avec la progression de l'écoulement

Dans l'hypothèse logique d'une pression totale diminuant linéairement avec la progression de l'écoulement, le graphe de la **figure II-4** montre que sur une longueur $\Delta x = x_2 - x_1$ la chute de pression totale ΔP_t est proportionnelle à Δx et s'exprime **Eq. (33)** :

$$\frac{dp_t}{dx} = \frac{p_{t2} - p_{t1}}{x_2 - x_1} = -\frac{\Delta p_t}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \Delta p_t = -\frac{dp_t}{dx} \Delta x \quad (33)$$

Ainsi, une chute de perte de charge se traduit par $\Delta p_t > 0$ et est la conséquence d'un gradient de pression constant et négatif $\frac{dp_t}{dx} < 0$. C'est pourquoi on parle de pertes de charges régulières **Eq. (34)**:

$$\Rightarrow p_{t1} = p_{t2} - \frac{dp_t}{dx} (x_2 - x_1) = p_{t2} + \Delta p_t > 0 \quad (34)$$

On peut généraliser l'équation de **Bernoulli** en y faisant apparaître les pertes de charges régulières de la manière suivante **Eq. (35)** :

$$p_1 + \rho \bar{g} Z_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho \bar{g} Z_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \Delta p_t \quad (35)$$

où Δp_t représente l'ensemble des pertes de charge entre (1) et (2).

II-3 Coefficient de perte de charge

Particulièrement, les pertes de charge entre l'entrée et la sortie d'une canalisation est la somme de deux types de contributions :

- ✓ les pertes de charge **systematiques** (appelées aussi **linéaires** ou **régulières**) dues aux frottements visqueux.
- ✓ les pertes de charge **singularités** dues aux changements de direction et de sections (rétrécissements et élargissements) dans la conduite;

II-3-1 Perte de charges linéaires ou régulières

Les pertes de chargesystematiques (linéaires ou régulières) (chute de pression $\Delta p = p_1 - p_2$) résultent du frottement exercé entre le fluide et la surface intérieure de la canalisation. Elles sont proportionnelles à la longueur **L** de la conduite et au carré de la vitesse moyenne **V** du fluide, inversement proportionnelle au diamètre **d** et fonction de la rugosité moyenne ϵ de la canalisation. Entre deux points séparés par une longueur **L**, dans un tuyau de diamètre **D** apparaît une perte de pression Δp . Exprimée sous la forme suivante **Eq. (36)** :

$$\Delta p = \lambda \frac{L}{D} \rho \frac{V^2}{2} \quad (36)$$

où **D** : diamètre de la conduite considérée (m)

L : longueur de la conduite considérée (m)

V : vitesse moyenne (m/s)

λ (**Sans dimension**) : coefficient de perte de charge linéaire. Il dépend de la nature de l'écoulement et de l'état de surface de la conduite.

Remarque :

La nature de l'écoulement est caractérisée par le nombre de Reynolds **Re**

- ✓ l'état de surface est défini par l'épaisseur moyenne des rugosités :
- ✓ Alors $f(Re, \epsilon/d)$

Expérience de Nikuradze

L'expérience de Nikuradze (**Figure II-5**) a pour but de déterminer l'influence de la rugosité des parois sur le coefficient de perte de charge linéaire. Les parois d'une conduite sont

rendues artificiellement rugueuses en y collant des grains de sable calibrés. En changeant la taille des grains on change la rugosité et on trace **log λ** en fonction de **log Re**.

On appelle **ks** la taille moyenne des grains collés et **D** le diamètre de la conduite. ϵ / D est la rugosité relative. On remarque sur les abaques de Nikuradze(Figure II-6) que:

- ✓ la rugosité n'a pas d'influence en régime laminaire et le nombre de Reynolds critique R_c est indépendant de la rugosité.
- ✓ quand $Re > Re_c$ la perte de charge dépend fortement de ϵ / D ou du nombre de Reynolds
- ✓ quand $R \gg \gg R_c$ la perte de charge ne dépend pas du nombre de Reynolds, elle ne dépend que de ϵ / D .

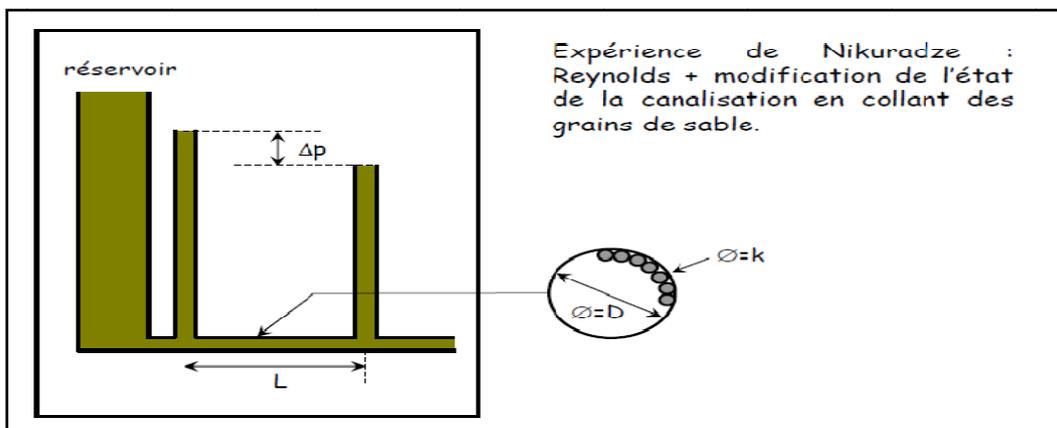


Figure II-5 :Expérience de Nikuradze

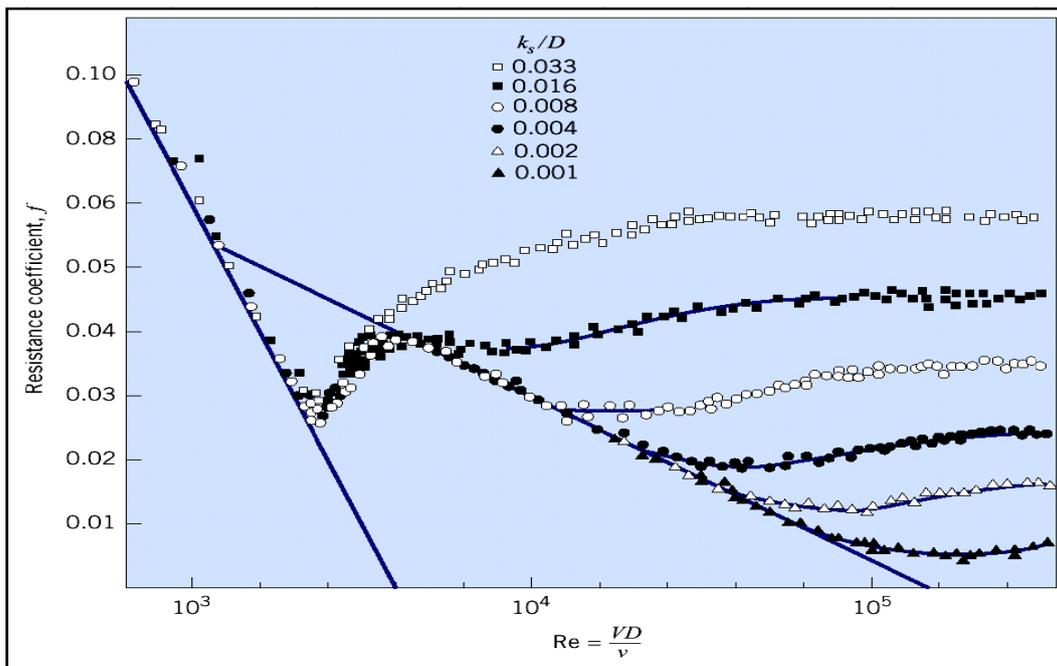


Figure II-6 : Abaques de Nikuradze

Selon le nombre de Reynolds, on distingue différents cas :

a- Cas de l'écoulement laminaire (Re < 2000 -la loi de Poiseuille)

Dans ce cas on peut montrer que le coefficient λ est uniquement fonction du nombre de Reynolds Re ; l'état de la surface n'intervient pas et donc λ ne dépend pas de la rugosité ϵ (noté aussi k), ni de la nature de la tuyauterie Eq. (37) .

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (37)$$

b- Cas de l'écoulement turbulent (Re > 3000)

Les phénomènes d'écoulement sont beaucoup plus complexes et la détermination du coefficient de perte de charge résulte de mesures expérimentales. C'est ce qui explique la diversité des formules anciennes qui ont été proposées pour sa détermination. En régime turbulent l'état de la surface devient sensible et son influence est d'autant plus grande que le nombre de Reynolds Re est grand. Tous les travaux ont montré l'influence de la rugosité et on s'est attaché par la suite à chercher la variation du coefficient λ en fonction du nombre de Reynolds Re et de la rugosité.

La formule de **Colebrook** Eq. (38) est actuellement considérée comme celle qui traduit le mieux les phénomènes d'écoulement en régime turbulent. Elle est présentée sous la forme suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{\epsilon}{3,7D} + \frac{2,51}{Re\sqrt{\lambda}} \right) \quad (38)$$

L'utilisation directe de cette formule demanderait, du fait de sa forme implicite, un calcul par approximations successives ; on emploie aussi en pratique des représentations graphiques (abaques).

Pour simplifier la relation précédente, on peut chercher à savoir si l'écoulement est hydrauliquement lisse ou rugueux pour évaluer la prédominance des deux termes entre parenthèses dans la relation de **Colebrook**.

Remarque :

On fait souvent appel à des formules empiriques plus simples valables pour des cas particuliers et dans un certain domaine du nombre de Reynolds, par exemple :

a- Formule de Blasius Eq. (39) : pour l'écoulement turbulent hydrauliquement lisse et $3000 < Re < 10^5$, λ ne dépend que de Re :

$$\lambda = (100Re)^{-0,25} = 0,316 . Re^{-0,25} (39)$$

b- Formule de Blench Eq. (40) : pour l'écoulement est dit turbulent hydrauliquement rugueux et $Re > 10^5$, λ ne dépend que de ϵ/d .

$$\lambda = 0,79 \sqrt{\frac{\epsilon}{d}} (40)$$

où ϵ : rugosité de la surface interne de la conduite (mm) ;

d : diamètre intérieur de la conduite (mm).

Diagramme de Moody

Cette relation est appelée équation de **Darcy-Weisbach**. Le facteur adimensionné λ désigne le **coefficient de perte de charge régulière** et ne dépend que du nombre de Reynolds pour une canalisation lisse. Dans le cas d'une canalisation rugueuse, un quatrième nombre sans dimension intervient : la rugosité relative ϵ/D qui mesure le rapport de la hauteur moyenne des aspérités de la paroi interne de la conduite sur son diamètre interne. La valeur de λ peut être obtenue à l'aide d'abaque comme le diagramme de **Moody** (Figure II-7).

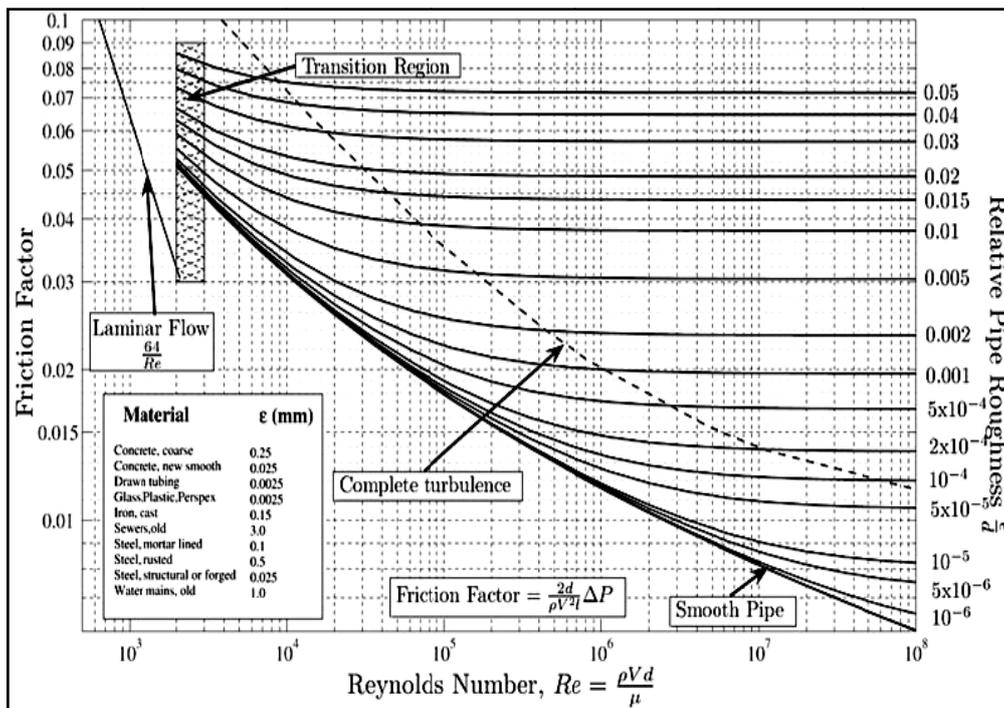


Figure II-7 : Diagramme de Moody

II-3-2 Perte de charge singulière

Les pertes de charges singulières résultent de la présence de coudes, raccords, branchements, robinets, etc. Tous ces éléments (singularités), installés le long des canalisations, constituent des obstacles qui freinent le passage du fluide et amènent des pertes de charge. Les pertes de charge singulières sont proportionnelles au carré de la vitesse, elle est exprimée sous la forme suivante **Eq. (41)** :

$$\Delta p = K\rho \frac{v^2}{2} \quad (41)$$

où **K** :Le coefficient de perte de charge singulière (sans dimension). Il dépend de la nature de la singularité.

v : La vitesse moyenne incidente du fluide arrivant sur l'obstacle.

Remarque :

La plupart des singularités ne permettent pas une approche analytique simple comme celle qui vient d'être développée concernant l'élargissement brusque. Les coefficients de perte de charge sont donc le plus souvent déduits de mesures ou de calculs numériques, et sont disponibles sous forme d'abaques (**Figure II-8**). À titre d'exemple, la **figure II-9** liste de façon non exhaustive quelques singularités typiques avec les coefficients de perte de charge associés.

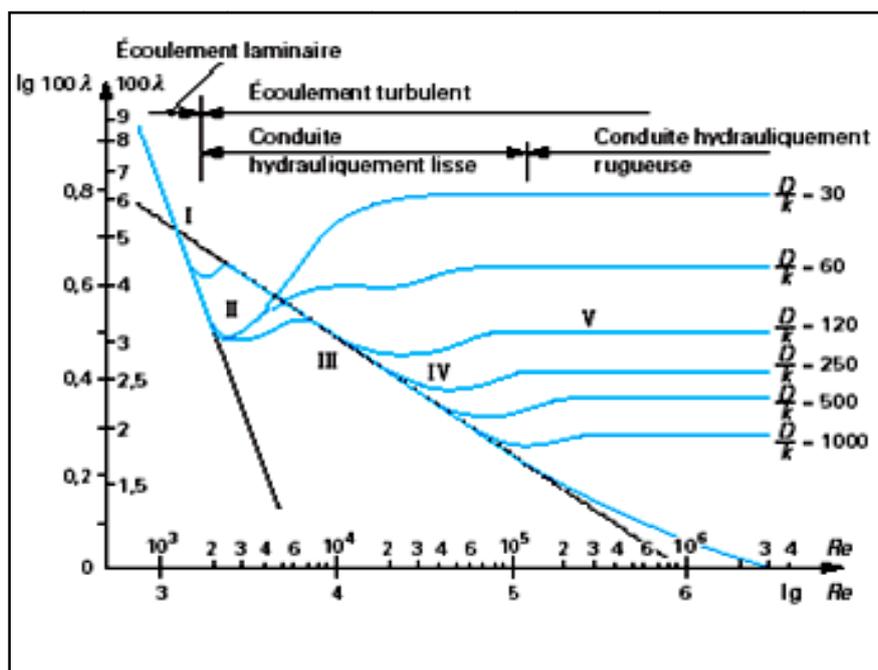


Figure II-8 :Abaque des pertes de charge.

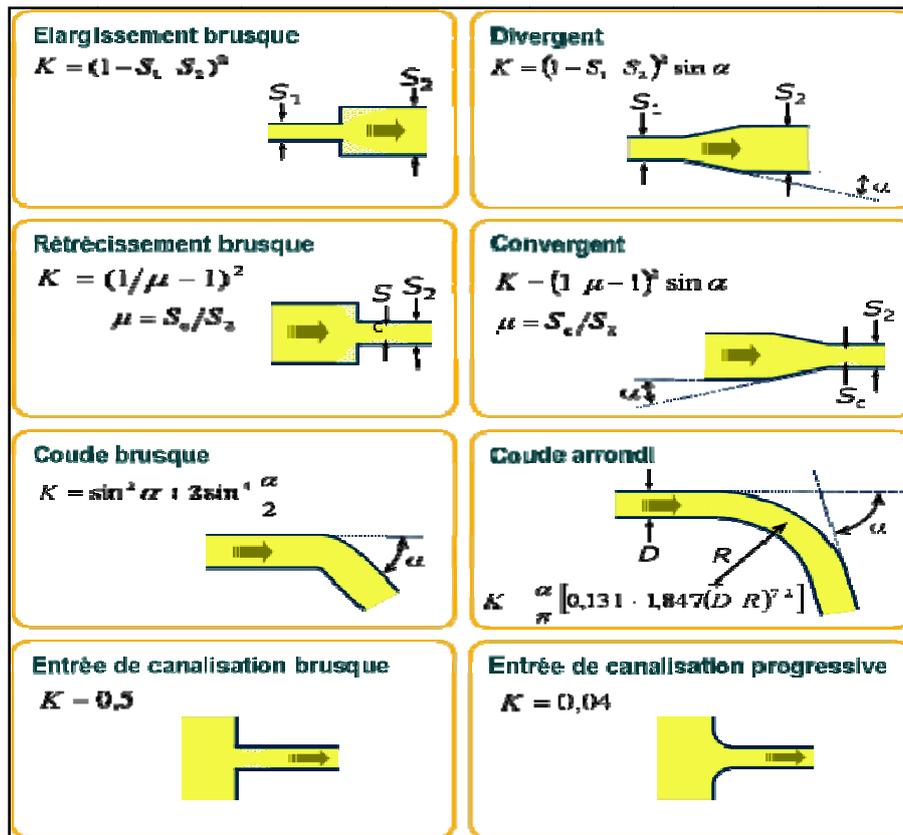


Figure II-9 :Liste non exhaustive de quelques singularités typiques

II-3-3 Pertes de charge totales

Pour un réseau hydraulique complet comportant différents tronçons de longueurs et sections différentes et reliés entre eux par des singularités, on peut évaluer les pertes de charge totales entre l'entrée et la sortie du circuit en formulant l'équation de **Bernoulli généralisée** Eq. (42) :

$$\Delta p_t = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \rho V_i^2 \lambda_i \frac{L_i}{D_i} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \rho V_i^2 K_i \quad (42)$$

Chapitre III : Les écoulements internes

III-1 Introduction

Par rapport aux écoulements externes, les écoulements internes ont ceci de particulier que les conditions aux limites y sont omniprésentes. Ils sont abordés dans ce chapitre sous deux aspects complémentaires : les profils de vitesse et les pertes de charge qui conditionnent le dimensionnement des circuits fluides.

Les écoulements internes ont pour caractère particulier l'absence de conditions aux limites à l'infini, ce qui n'est pas le cas des écoulements externes. L'influence des parois se manifeste donc dans toutes les directions, sauf éventuellement aux sections d'entrée et de sortie du fluide, et en particulier le dessin des échangeurs ; plus généralement, les dissipations doivent être prises en compte dans les bilans énergétiques ou économiques.

III-2 Écoulement parallèle dans une conduite bidimensionnelle

On considère une conduite bidimensionnelle infinie, d'épaisseur $e=2b$ faible, l'axe x coïncide avec l'axe de symétrie de la conduite. Le fluide est considéré comme newtonien, incompressible en écoulement stationnaire (permanent) selon l'axe x (Figure III-1).

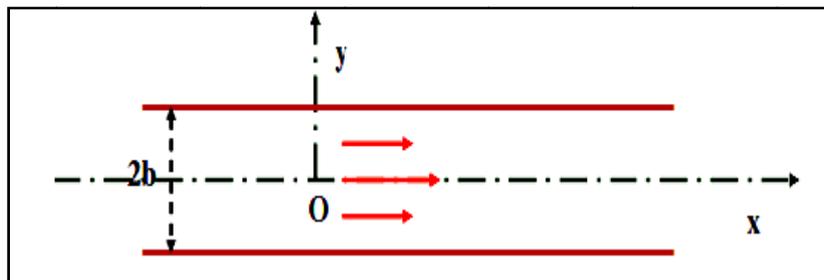


Figure III-1 : Écoulement parallèle dans une conduite bidimensionnelle

On choisit un repère cartésien, la projection de l'équation de Navier Stokes après modification, donne Eqs. (43-45) :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(p + \rho \bar{g} Z + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) = \mu \Delta v_x \quad (43)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(p + \rho \bar{g} Z + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) = \mu \Delta v_y \quad (44)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(p + \rho \bar{g} Z + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) = \mu \Delta v_z \quad (45)$$

Dans ces conditions, la projection dans les trois directions du repère cartésien de l'équation précédemment établie, donne :

$$v_x = v$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_y = 0 \Rightarrow \vec{v} = v\vec{e}_x \\ v_z = 0 \end{array} \right.$$

les équations précédentes deviennent :

$$\frac{\partial p_t}{\partial x} = \mu \Delta v$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p_t}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p_t}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

On en déduit que la pression totale n'est fonction que de x, et qu'elle varie en obéissant à l'équation **Eq. (46)** :

$$\frac{dp_t}{dx} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (46)$$

- ✓ Symétrie : dans tout plan xOy, on a le même profil donc $w = 0$
- ✓ Il n'y a pas de composantes de la vitesse suivant y donc $v = 0$
- ✓ L'équation de continuité $\text{div } \mathbf{V} = 0$ impose $du/dx=0$

Le profil des vitesses dans la conduite est donc donné par la résolution de l'équation différentielle **Eq. (47)** :

$$\frac{dp_t}{dx} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \text{Cte} \quad (47)$$

On intègre deux fois cette équation et on obtient **Eq. (48)**:

$$u(y) = \frac{1}{\mu} \left(\frac{dp_t}{dx} \right) \frac{y^2}{2} + Ky + K' \quad (48)$$

où **K** et **K'** sont des constantes d'intégration, elles sont déterminées grâce aux conditions aux limites sur la vitesse (une particule de fluide en contact avec une paroi possède la vitesse de la paroi) soit: $u(b) = u(-b) = 0$

En insérant ces deux conditions dans l'équation précédente, on obtient un système de deux équations à deux inconnues facile à résoudre, on obtient **Eq. (49)**:

$$K = 0 \text{ et } K' = -\frac{1}{2\mu} \left(\frac{dp_t}{dx} \right) b^2 \quad (49)$$

En reportant dans l'équation Eq. (48), on trouve le profil des vitesses suivant Eq. (50) :

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{dp_t}{dx} \right) (y^2 - b^2) \quad (50)$$

Le profil des vitesses est parabolique.

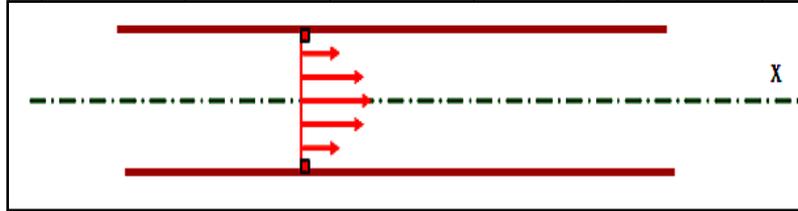


Figure III-2 :Le profil parabolique des vitesses de fluide en écoulement parallèle dans une conduite bidimensionnelle

Le gradient de pression peut être évalué, en effet si on néglige les forces de pesanteur Eqs. (51-52):

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dP}{dz} = 0 \text{ donc } P = P(x) \quad (51)$$

$$\Delta p_t = - \frac{dp_t}{dx} \Delta x \quad (52)$$

On peut donc écrire en appelant P_1 et P_2 les pressions à l'entrée et à la sortie de la conduite Eq. (53):

$$- \frac{dP}{dx} = \frac{p_1 - p_2}{x_1 - x_2} = \frac{p_1 - p_2}{L} \quad (53)$$

L est la longueur de la conduite et $P_1 > P_2$

Il suffit de mesurer les pressions correspondantes pour déterminer le gradient de pression

La vitesse moyenne de l'écoulement est définie par Eq. (54) :

$$\bar{u} = \frac{q_v}{S} = \frac{1}{S} \iint \vec{V} d\vec{S} \quad (54)$$

où S : La section de la conduite (m^2) et q_v : débit en volume (m^3/s)

Le débit en masse par unité d'aire Eq. (55):

$$\frac{q_m}{S} = \rho \bar{u} \quad (55)$$

Pour le conduit bidimensionnel, on trouve :

La vitesse maximale Eq. (56):

$$u_{max} = -\frac{1}{2\mu} \left(\frac{dp_t}{dx} \right) b^2 \quad (56)$$

La vitesse moyenne Eq. (57):

$$\bar{u} = -\frac{1}{3\mu} \left(\frac{dp_t}{dx} \right) b^2 = \frac{2}{3} u_{max} \quad (57)$$

Le débit en masse par unité d'aire Eq. (58):

$$\frac{q_m}{s} = \frac{\rho}{3\mu} \left(\frac{p_1 - p_2}{L} \right) b^2 \quad (58)$$

III-3 Écoulement de Couette

Une autre situation simple est celle de l'écoulement de Couette (Figure III-3). On a les mêmes hypothèses que précédemment sur la géométrie de la conduite, sur le fluide et l'écoulement. La différence vient du fait que la paroi supérieure possède une vitesse V_0 . Comme dans l'exemple précédent, on néglige les forces de pesanteur.

On obtient bien sûr la même équation différentielle avec des conditions aux limites qui changent.

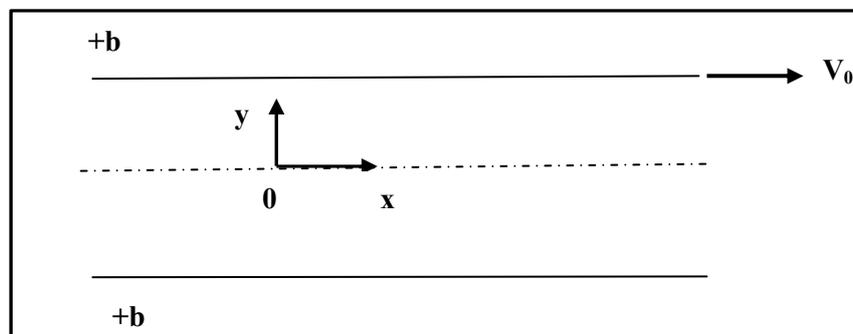


Figure III-3 : Écoulement de Couette

Les conditions aux limites deviennent : $V(+b) = V_0$ et $V(-b) = 0$

La solution générale de l'équation est comme dans l'exemple précédent Eq. (59) :

$$V(y) = \frac{1}{\mu} \left(\frac{dp_t}{dx} \right) \frac{y^2}{2} + Ky + K' \quad (59)$$

Avec les conditions aux limites, on trouve K et K' Eq. (60)

$$K = \frac{V_0}{2b} \text{ et } K' = \frac{V_0}{2} - \frac{1}{2\mu} \left(\frac{dp_t}{dx} \right) b^2 \quad (60)$$

La solution s'écrit donc Eq. (61):

$$u(y) = -\frac{1}{2\mu} \left(\frac{dp_t}{dx} \right) (b^2 - y^2) + \frac{V_0}{2} (y + b) \quad (61)$$

(Poiseuille)(Couette)

On peut écrire le profil des vitesses sous la forme :

On pose :

$$K_1 = -\frac{b^2}{2\mu} \left(\frac{dp_t}{dx} \right) \Rightarrow u(y) = \frac{V_0}{2} \left(\frac{y}{b} + 1 \right) + K_1 \left(1 - \left(\frac{y}{b} \right)^2 \right) \quad (62)$$

Le profil de vitesse est donc parabolique.

- ✓ K_1 apparaît comme un gradient de pression adimensionnel.
- ✓ $K_1 > 0$ le gradient de pression décroissant est dans le sens du mouvement donc $u(y)$ est toujours positif.
- ✓ $K_1 < 0$ et inférieur à $-1/2$ la vitesse devient négative au voisinage de la paroi (le sens de l'écoulement est inversé).

En l'absence d'un gradient de pression ($dp_t/dx = 0$) la répartition de vitesse entre les deux plans devient linéaire Eq. (63):

$$V(y) = \frac{V_0}{2} (y + b) \quad \text{sachant que } e = 2b \quad (63)$$

Le cisaillement σ_t dans l'écoulement est alors uniformément réparti Eq. (64) :

$$\sigma_t = \mu \frac{du}{dy} = \mu \frac{V_0}{e} = Cte \quad (64)$$

Le débit total de fluide entre les deux plans est dû à la fois à la vitesse d'entraînement et au gradient de pression. En désignant par l la largeur de la veine fluide, le débit-volume q_v s'écrit, dans une section S Eq. (65):

$$q_v = \int u ds = l \int_0^e u dy \quad (65)$$

On obtient en intégrant et en groupant les termes Eq. (66):

$$q_v = l \frac{e}{2} \left\{ u_e - \frac{e^2}{6\mu} \left(\frac{dp_t}{dx} \right) \right\} \quad (66)$$

III-4 Écoulement de Poiseuille

On considère un écoulement horizontal, laminaire, incompressible et newtonien d'un fluide de viscosité μ , de masse volumique ρ , dans un tube cylindrique de rayon R petit. L'écoulement est permanent dans la direction x (Figure III-4).

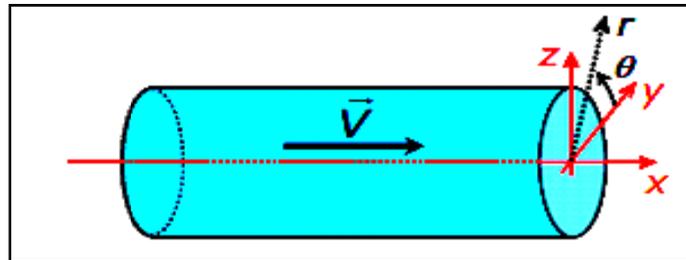


Figure III-4 : Écoulement de Poiseuille (Écoulement parallèle dans une conduite cylindrique)

La vitesse de la couche de fluide en contact avec les parois est nulle. Elle augmente lorsque la distance r à l'axe diminue.

La vecteur devitesse en tout point à l'intérieur de la conduite s'écrit Eq. (67):

$$\vec{V}(r, \theta, x) = v_x \vec{e}_x \quad v_r = v_\theta = 0 \quad (67)$$

L'écoulement étant conservatif et le fluide incompressible, l'équation de continuité se résume à $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$ se développe en coordonnées cylindriques comme Eq. (68):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad (68)$$

Et puisque $v_r = v_\theta = 0$, il reste Eq. (69):

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad (69)$$

traduisant le fait que la vitesse reste constante le long de l'axe de la conduite.

Compte tenu de la symétrie de révolution du problème, on en déduit par ailleurs que $\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$, ce qui permet d'en conclure que le vecteur vitesse est purement axial et ne dépend que de r Eq. (70):

$$\vec{V}(r)\vec{e}_x(70)$$

D'autre part, l'équation régissant l'évolution de la pression totale (charge) P_t le long d'un écoulement laminaire orienté suivant l'axe x (voir section précédente) Eq. (71):

$$\frac{dP_t}{dx} = \mu \Delta u(71)$$

En coordonnées cylindriques Eq. (72):

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right)(72)$$

alors Eq. (73):

$$\frac{dP_t}{dx} = \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right)(73)$$

où le terme de gauche ne dépend que de x et celui de droite que de r .

Il s'en suit que les membres de cette équation sont égaux à une même constante K . Ainsi, on a :

$\frac{dP_t}{dx} = K$ traduisant la perte de charge régulière ;

$$\mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = K \Rightarrow \text{permettant la détermination du profil de vitesse } u(r).$$

Résolvons cette dernière équation pour établir le profil de vitesse sur une section de la conduite Eq. (74):

$$\mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = K \quad \square \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{Kr}{\mu} \Rightarrow r \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{Kr^2}{2\mu} + K' \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{Kr}{2\mu} + \frac{K'}{r}$$

et donc :

$$u(r) = \frac{Kr^2}{4\mu} + k' \ln(r) + k''(74)$$

où k' et k'' sont deux constantes d'intégration dont l'indétermination peut être levée en utilisant les conditions aux limites.

Ainsi, on sait que la vitesse des particules fluides est nécessairement nulle au contact avec les parois de la conduite. On a donc Eq. (75) :

$$u(R = r) = 0 \Rightarrow \frac{Kr^2}{4\mu} + k' \ln(r) + k'' = 0(75)$$

Par ailleurs, la vitesse à l'axe de la conduite, en $r=0$, soit finie, il faut que $k''=0$ alors Eq. (76):

$$k'' = -\frac{KR^2}{4\mu} \tag{76}$$

et que le profil de vitesse se formule Eq. (77):

$$u(r) = -\frac{K}{4\mu}(R^2 - r^2) \text{ où } 0 \leq r \leq R \tag{77}$$

Cette équation traduisant leprofil parabolique de $u (r)$ (Figure III-5) et que la vitesse maximale sur l'axe estEq. (78) :

$$u_{max} = u (0) = -\frac{K}{4\mu}R^2 \tag{78}$$

$u (r) \geq 0$ et $K < 0$ impose $K = \frac{dP_t}{dx} < 0$ Perte de charge.

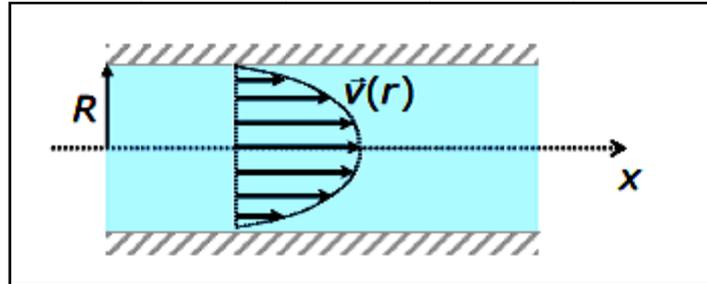


Figure III-5 :Le profil parabolique des vitesses de fluide en écoulement de Poiseuille

Pour caractériser les pertes de charges, on définit la vitesse moyenne de l'écoulement parEqs. (79-80) :

$$q_v = \int u ds = l \int_0^e u dy \tag{79}$$

$$\bar{u} = \frac{q_v}{S} = \frac{1}{\pi R^2} \iint \vec{v} \cdot \vec{n} ds = \frac{1}{\pi R^2} \iint u(r) ds \tag{80}$$

avec $ds = 2\pi r dr$ où Eq. (81):

$$\bar{u} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R u(r) 2\pi r dr = \frac{2K}{4\mu R^2} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr$$

$$\bar{u} = -\frac{2K}{4\mu R^2} \frac{R^4}{4} = -\frac{K}{8\mu} R^2 \tag{81}$$

et donc Eq. (82):

$$\bar{u} = -\frac{K}{8\mu} R^2 = \frac{u_{max}}{2} \tag{82}$$

Et comme $q_v = \bar{u}S = \bar{u}\pi R^2$, on a par ailleursEq. (83) :

$$q_v = -\frac{K}{8\mu}\pi R^4 \quad (83)$$

Cette dernière relation permet ainsi de faire le lien entre le débit volumique et les pertes de charge régulières puisque $K = \frac{dP_t}{dx}$ et que $\Delta P_t = -\frac{dP_t}{dx}\Delta x = -K\Delta x$ où $K = -8\mu \frac{q_v}{\pi R^4}$. On obtient alors la **formule de Poiseuille** Eq. (84):

$$\Delta P_t = 8\mu \frac{q_v}{\pi R^4} \Delta x = 8\mu \frac{\bar{u}}{R^2} \Delta x \quad (84)$$

La différence de pression totale (ou perte de charge) engendrée par les frottements visqueux dans une conduite de longueur $L=\Delta x$ est donc proportionnelle à L , mais également au débit et à la viscosité du fluide Eq. (85) :

$$\Delta P_t = 8\mu \frac{q_v}{\pi R^4} L \quad (85)$$

III-5 Écoulement dans un espace annulaire

Examinons encore le cas d'un écoulement entre deux tuyaux droits coaxiaux, que l'on rencontre en particulier dans certains échangeurs, et aussi dans les forages pétroliers. On notera R_1 le plus petit rayon et R_2 le plus grand. La figure III-6 illustre un écoulement de fluide dans une canalisation annulaire.

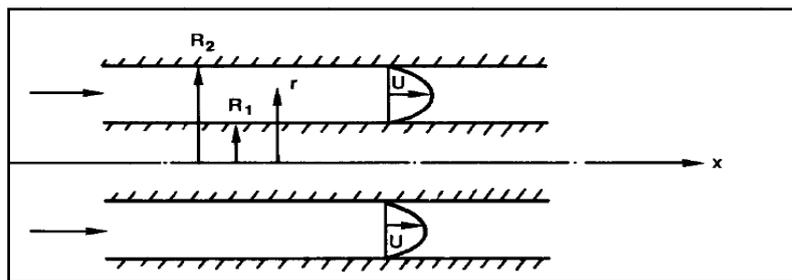


Figure III-6 : Écoulement dans une canalisation annulaire.

La solution générale reste valable, les conditions aux limites étant ici :

$$r = R_1, U = 0 \quad \text{et} \quad r = R_2, U = 0$$

soit les équations Eqs. (86-88) :

$$\Delta P_t = \frac{q_v}{\pi R^4} L \quad (86)$$

$$A \ln R_1 + B = -\frac{R_1^2}{4\mu} \frac{dP_t}{dx} \quad (87)$$

$$A \ln R_2 + B = -\frac{R_2^2}{4\mu} \frac{dP_t}{dx} \quad (88)$$

On en déduit les constantes A et B Eqs. (89-90):

$$A = -\frac{1}{4\mu} \frac{dP_t}{dx} \frac{(R_2^2 - R_1^2)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \quad (89)$$

$$B = +\frac{1}{4\mu} \frac{dP_t}{dx} \left\{ \frac{(R_2^2 - R_1^2)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \ln R_2 - R_2^2 \right\} \quad (90)$$

ce qui donne pour U, après regroupement de certains termes Eq. (91) :

$$u(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dP_t}{dx} \left\{ (R_2^2 - r^2) + \frac{(R_2^2 - R_1^2)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \ln \frac{r}{R_2} \right\} \quad (91)$$

Le maximum de la vitesse est obtenu pour un rayon r_{max} tel que Eq. (92) :

$$r_{max} = \sqrt{\frac{(R_2^2 - R_1^2)}{2 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}} \quad (92)$$

En ce qui concerne le débit dû au gradient dP/dx , les calculs sont un peu plus laborieux.

Posons provisoirement, pour alléger l'écriture Eq. (93):

$$C = \frac{(R_2^2 - R_1^2)}{2 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \quad (93)$$

Le débit-volume s'écrit Eq.(94):

$$q_v = \int_{R_1}^{R_2} U 2\pi r dr = -\frac{\pi}{2\mu} \frac{dP_t}{dx} \int_{R_1}^{R_2} (R_2^2 - r^2 + C \ln r - C \ln R_2) r dr \quad (94)$$

Au total, on a donc Eq.(95) :

$$q_v = -\frac{\pi}{2\mu} \frac{dP_t}{dx} \left\{ \frac{R_2^4}{2} - \frac{R_1^2 R_2^2}{2} - \frac{R_2^4}{4} + \frac{R_1^4}{2} - \frac{C}{2} (R_2^2 - R_1^2) \ln R_2 + C \int_{R_1}^{R_2} r \ln r dr \right\} \quad (95)$$

Au total, après avoir remplacé C par (Eq.(93)), puis groupé et réarrangé un peu les termes, on a donc Eq.(96) :

$$q_v = -\frac{\pi}{8\mu} \frac{dP_t}{dx} (R_2^2 - R_1^2) \left\{ R_2^2 + R_1^2 - \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \right\} \quad (96)$$

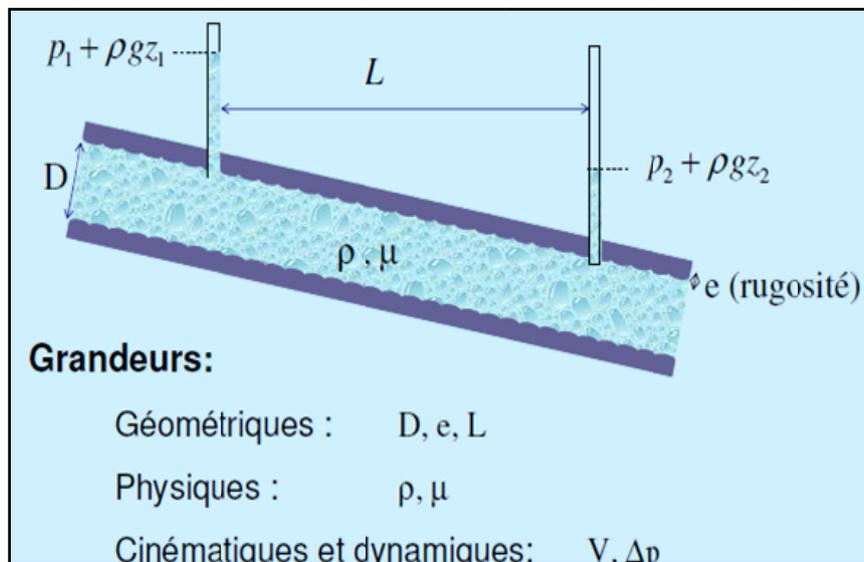
Chapitre IV : Analyse dimensionnelle et similitude

IV-1 Introduction

Quant le système étudié est trop complexe pour permettre une résolution complète des équations fondamentales, ou bien lorsque son comportement est chaotique, l'analyse dimensionnelle donne accès de façon simple à des relations entre les grandeurs caractérisant ce système.

Le regroupement de ces différentes grandeurs en des nombres sans dimension permet par ailleurs d'établir des similitudes entre les comportements des systèmes semblables mais différents (**prototype/maquette**).

Prenons l'exemple de la détermination des pertes de charge régulières dans une conduite cylindrique.



Les différentes grandeurs qui interviennent sont :

$\frac{\Delta P_t}{L}$: Perte de charge par unité de longueur,

D : Diamètre de la conduite,

v : Vitesse moyenne de l'écoulement (ou Q : Débit volumique),

ρ : Masse volumique du fluide,

μ : Viscosité dynamique du fluide,

ε : Rugosité moyenne de la conduite.

Par conséquent, il existe une relation entre ces différentes grandeurs **Eq. (97)**:

$$\frac{\Delta P_t}{L} = f(D, v, \rho, \mu, \varepsilon) \quad (97)$$

La fonction **f** peut s'avérer difficile à trouver ; l'analyse dimensionnelle va alors nous permettre d'établir une relation plus simple entre un nombre moins important de grandeurs sans dimension.

Une méthode systématique va permettre de trouver trois nombre sans dimension Eq.(98)

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = \frac{\Delta P_t}{L} \frac{D}{\rho v^2} = \lambda \\ \pi_2 = \frac{\rho v D}{\mu} = R_e \text{ (nombre de Reynolds)} \\ \pi_3 = \frac{\varepsilon}{D} = \varepsilon_r \text{ (rugosité relative)} \end{array} \right. \quad (98)$$

On peut aussi établir Eq. (99) :

$$\pi_1 = \phi(\pi_2, \pi_3)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta P_t}{L} \frac{D}{\rho v^2} = \phi\left(\frac{\rho v D}{\mu}, \frac{\varepsilon}{D}\right) \Rightarrow \frac{\Delta P_t}{L} = \frac{\rho v^2}{D} \phi(R_e, \varepsilon_r) \quad (99)$$

L'analyse dimensionnelle permet aussi de voir que la perte de charge régulière est fonction uniquement de nombre de *Reynolds* et de la rugosité relative de la conduite.

Voyons maintenant une description détaillée de la méthode.

IV-2 Théorème de Buckingham(Théorème de π)

Si une équation comportant **k** variables est homogène, elle peut être réduite à une relation entre (**k-r**) produit indépendant sans dimension, ou **r** est le nombre minimal de dimension requis pour décrire les **k** variables.

Inventaire des variables

L'inventaire des variables est regroupé dans le **tableau IV-1**.

Tableau IV-1 : Inventaire des variables

Variable	Symbole	Dimension (MLT)
Perte de charge	ΔP	$ML^{-1}T^{-2}$
	$\frac{\Delta P_t}{L}$	$ML^{-2}T^{-2}$
Vitesse	v	LT^{-1}
Diamètre	D	L
Longueur	L	L
Rugosité	ε	L

Viscosité	m	$ML^{-1}T^{-1}$
Masse volumique	ρ	ML^{-3}

Afin d'illustrer cet énoncée, reprenant l'exemple d'introduction.

Nous avons $k=6$ variables ($\frac{\Delta P_t}{L}, D, v, \rho, \mu, \varepsilon$), qui nécessitent un minimum de $r=3$ (trois dimensions (M, L, T)).

Par conséquent, l'équation reliant les 6 variables peut être ramener à une équation reliant $k-r=6-3=3$ produits sans dimension Eq.(100):

$$\pi_1 \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta P_t}{L} \frac{D}{\rho v^2} = \lambda \\ \pi_2 = \frac{\rho v D}{\mu} = Re(100) \\ \pi_3 = \frac{\varepsilon}{D} = \varepsilon_r \end{array} \right.$$

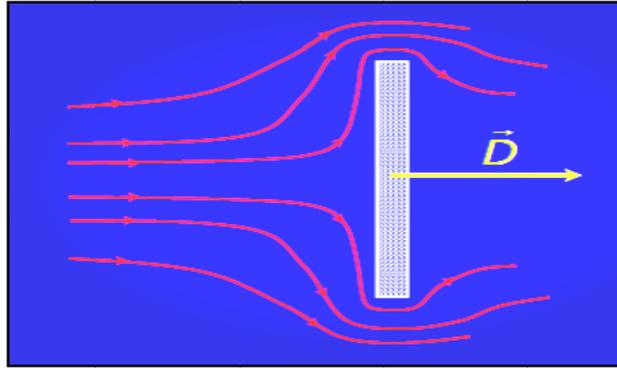
Le théorème de Buckingham π , permet donc le passage Eq.(101):

$$\frac{\Delta P_t}{L} = f(D, v, \rho, \mu, \varepsilon) \Rightarrow \pi_1 = \phi(\pi_2, \pi_3) \quad (101)$$

Pour effectuer une analyse dimensionnelle, on doit considérer les étapes suivantes:

- 1- Dresser la liste de toutes les variables du problème $\Rightarrow k$,
- 2- Ecrire l'équation aux dimensions de chacun des k variable,
- 3- Déterminer r , et donc $k-r \Rightarrow$ le nombre de produit sans dimension caractérisant le problème,
- 4- Parmi les k variables, on choisir un nombre r , qui soient dimensionnellement indépendant $\Rightarrow r$ variables primaires,
- 5- Former les $k-r$ produits (π) en combinaison les $k-r$ variable non primaires avec les r primaires.
- 6- Formuler la relation entre les $k-r$ produits (π) trouvé.

A titre d'illustration, appliquant la méthode à un exemple concret. On appelle force de trainée, la force \vec{D} exercée par un écoulement sur un objet, dans la direction parallèle à l'écoulement. Nous allons étudier le cas d'une plaque plane rectangulaire.



1. Les variables du problème sont : $\mathbf{D, h, L, v, \rho, \mu} \Rightarrow k=6$;

\mathbf{D} :Force de trainée,

\mathbf{h} : Hauteur de la plaque,

\mathbf{L} : Largeur de la plaque,

\mathbf{v} : Vitesse moyenne de l'écoulement,

$\mathbf{\rho}$: Viscosité de fluide,

$\mathbf{\mu}$:Masse volumique de fluide.

2. Equations aux dimensions

$[\mathbf{D}]$: MLT^{-2}

$[\mathbf{h}]$: L

$[\mathbf{L}]$: L

$[\mathbf{v}]$: LT^{-1}

$[\mathbf{\rho}]$: ML^{-3}

$[\mathbf{\mu}]$: $ML^{-1}T^{-1}$

3. Nombre de produit π sans dimension

$$k-r=6-3=3$$

4. Choix de $r=3$ variable primaire dimensionnellement indépendantes. Par exemple $\mathbf{h, v, \rho}$.

Remarque :On ne peut pas choisir à la fois \mathbf{h} et \mathbf{L}

5. Formuler les 3 produits (π).

Par combinaison des variables primaires et non primaires **Eq.(102)**:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= Dh^{\alpha_1} \rho^{\beta_1} v^{\gamma_1} \\ \pi_2 &= Dh^{\alpha_2} \rho^{\beta_2} v^{\gamma_2} \quad (102) \\ \pi_3 &= Dh^{\alpha_3} \rho^{\beta_3} v^{\gamma_3} \end{aligned}$$

$\pi_1 = Dh^{\alpha_1} \rho^{\beta_1} v^{\gamma_1} \rightarrow$ sans dimension

$$M^0 L^0 T^0 = M^1 L^1 T^{-2} L^{\alpha_1} (M^1 L^{-3})^{\beta_1} (L^1 T^{-1})^{\gamma_1} = M^{1+\beta_1} L^{(1+\alpha_1-3\beta_1+\gamma_1)} T^{-2-\gamma_1}$$

$$0=1+\beta_1 \Rightarrow \begin{cases} 0=1+\alpha_1-3\beta_1+\gamma_1 \\ 0=-2-\gamma_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1=-1 \\ \alpha_1=-2 \end{cases} \Rightarrow \pi_1 = \frac{D}{\rho v^2 h^2}$$

$\pi_2 = Dh^{\alpha_2} \rho^{\beta_2} v^{\gamma_2} \rightarrow$ sans dimension

$$M^0 L^0 T^0 = L^1 L^{\alpha_2} (M^1 L^{-3})^{\beta_2} (L^1 T^{-1})^{\gamma_2} = M^{\beta_2} L^{(1+\alpha_2-3\beta_2+\gamma_2)} T^{-\gamma_2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0=\beta_2 \\ 0=1+\alpha_2-3\beta_2+\gamma_2 \\ 0=-2\gamma_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_2=0 \\ \alpha_2=-1 \end{cases} \Rightarrow \pi_2 = \frac{L}{h}$$

$\pi_3 = Dh^{\alpha_3} \rho^{\beta_3} v^{\gamma_3} \rightarrow$ sans dimension $\Rightarrow \pi_3 = \frac{\mu}{\rho v h}$

6. Formuler la relation entre les 3 produits (π)trouvés :

$$\frac{\Delta P_t}{L} = f(D, v, \rho, \mu, \epsilon) \Rightarrow \pi_1 = \phi(\pi_2, \pi_3)$$

Avec $\pi_1 = \frac{D}{\rho v^2 h^2}$

$$\begin{aligned} \pi_2 &= \frac{L}{h} \\ \pi_3 &= \frac{\mu}{\rho v h} \end{aligned}$$

soit Eq.(103) $D = \rho v^2 h^2 \Phi(L/h, 1/ Re)$



Il sert notamment à classer le régime d'écoulement en distinguant les écoulements laminaires ($Re \leq 2000$) et les écoulements turbulents ($Re > 2000$). Si on introduit la viscosité cinématique du fluide ($\nu = \mu / \rho$ avec ρ la masse volumique du fluide), alors on a aussi : $Re = u\ell/\nu$.

Nombre de Froude

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{gL}} \Rightarrow \frac{\text{Forces d'inertie}}{\text{Force de gravité}} \quad (105)$$

❖ importance pour les écoulements à surface libre Eq.(105)

avec L une échelle de hauteur, v une échelle de vitesse, g l'accélération de la gravité. Le nombre de Froude Eq. (105) est le plus souvent interprété comme le rapport de l'énergie cinétique sur l'énergie potentielle. Il sert notamment en hydraulique à classer le régime d'écoulement en distinguant les écoulements supercritiques ($Fr > 1$) et les écoulements sub-critiques ($Fr < 1$).

Remarque : c'est la pesanteur qui est responsable de la forme de la surface libre : plus Fr est grand, moins la surface libre a d'effets sur l'écoulement, et inversement.

Nombre d'Euler

$$Eu = \frac{\Delta P}{\rho v^2} \Rightarrow \frac{\text{Forces de pression}}{\text{Force d'inertie}} \quad (106)$$

❖ importance s'il existe de grandes différences de pression au sein de l'écoulement Eq.(106).

Nombre de Mach

Le nombre de **Mach** exprime le rapport entre la vitesse caractéristique de l'écoulement et la vitesse de propagation du son caractéristique du fluide. Ce nombre quantifie donc les effets de compressibilité Eq. (107) :

$$Ma = \frac{V}{c} \Rightarrow \frac{\text{Forces d'inertie}}{\text{Force de compression}} \quad (107)$$

avec u une échelle de vitesse et C la célérité du son (ou célérité des ondes dans l'air). Le nombre de Mach sert en aérodynamique à évaluer la compressibilité de l'air. On distingue ainsi les écoulements supersoniques ($M > 1$) et subsoniques ($M < 1$) ;

Remarque : $C = \frac{1}{\sqrt{\rho \chi}}$ est la vitesse du son.

Nombre de Strouhal

$$St = \frac{\omega L}{v} \Rightarrow \frac{\text{Forces d'inertie locales}}{\text{Force d'inertie convectives}} \quad (108)$$

❖ importance pour les écoulements non stationnaires Eq. (108).

Nombre de Stokes

$$St = \frac{t_p}{t_s} \quad (109)$$

avec t_p le temps de relaxation de la particule (le temps typique de variation de la vitesse quand on perturbe l'état d'équilibre de la particule) et le temps caractéristique du fluide (l'échelle de temps sur laquelle le fluide s'ajuste à tout changement de la particule). Ce nombre Eq. (109). sert dans l'étude des écoulements biphasiques (par exemple, une suspension de particules) à quantifier les effets biphasiques, c'est-à-dire le couplage entre phases.

Lorsque $St \ll 1$, la phase solide est entièrement gouvernée par la phase fluide tandis que pour $St \gg 1$, les deux phases sont découplées.

Nombre de Prandtl

Il exprime le rapport entre la viscosité cinématique et la diffusivité thermique du fluide. Il s'agit donc d'un nombre caractérisant le fluide. Le nombre de Prandtl Eq. (110). est donc indépendant de l'écoulement.

$$Pr = \frac{\mu C_p}{K} \quad (110)$$

Nombre de capillarité ou nombre capillaire

$$Ca = \frac{\mu u}{\gamma} \tag{111}$$

avec u une échelle de vitesse, μ la viscosité du fluide, et γ la tension de surface. Ce nombre **Eq.(111)** sert à évaluer les effets de tension de surface, par exemple lorsqu'on étale un fluide ou bien dans un milieu poreux. Lorsque $Ca \ll 1$, les effets de tension l'emportent sur les forces visqueuses et réciproquement quand $Ca \gg 1$, la viscosité est tellement grande que les effets de tension de surface à la surface libre sont négligeables.

IV-4 Similitude dans les équations différentielles

Avant de procéder à l'analyse complète d'un écoulement, il convient tout d'abord de poser les hypothèses simplificatrices adéquates. L'évaluation des différents coefficients sans dimension relatifs à l'écoulement (**Reynolds, Froude...**) va en effet permettre de simplifier les équations à résoudre.

Voyons ce qu'il advient de la composante verticale (suivant z) de l'équation de **Navier-Stokes Eq.(112)**:

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \rho g \tag{112}$$

Introduisons des variables sans dimension :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{u}^* = \mathbf{u}/V & \mathbf{x}^* = \mathbf{x}/L \\ \mathbf{v}^* = \mathbf{v}/V & \mathbf{y}^* = \mathbf{y}/L \\ \mathbf{w}^* = \mathbf{w}/V & \mathbf{z}^* = \mathbf{z}/L \end{array} \right\} \quad \mathbf{t}^* = \mathbf{t}/\tau \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p}^* = \mathbf{p}/p_0 \end{array} \right.$$

où L, V, p_0, τ sont des grandeurs caractéristiques du système étudié.

Par extension, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial x^*} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial y^*} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2}{\partial y^{*2}} \text{ et } \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial t^*}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial z^*} \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2}{\partial z^{*2}}$$

On obtient alors l'équation suivante **Eq. (113)**

$$\begin{aligned} \frac{\rho V}{\tau} \frac{\partial w^*}{\partial t^*} + \frac{\rho V^2}{L} \left\{ u^* \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial w^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right\} \\ = -\frac{P_0}{L} \frac{\partial P^*}{\partial z^*} + \frac{\mu V}{L^2} \left\{ \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}} \right\} - \rho g \end{aligned} \quad (113)$$

Divisons toute l'expression $\frac{\rho V^2}{L}$, nous obtenons l'expression suivante **Eq. (114)**

$$\begin{aligned} \left(\frac{L}{V\tau} \right) \frac{\partial w^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial w^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \\ = -\left(\frac{P_0}{\rho V^2} \right) \frac{\partial P^*}{\partial z^*} + \left(\frac{\mu}{\rho V L} \right) \left\{ \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}} \right\} - \left(\frac{gL}{V^2} \right) \end{aligned} \quad (114)$$

avec

$$St = \frac{\omega L}{V} = \frac{L}{V\tau} \quad Eu = \frac{\Delta P}{\rho V^2} = \frac{P_0}{\rho V^2} \quad Re = \frac{\rho V L}{\mu} \quad Fr = \frac{V}{\sqrt{gL}}$$

On peut alors écrire **Eq.(115)**:

$$\begin{aligned} (St) \frac{\partial w^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial w^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \\ = -(Eu) \frac{\partial P^*}{\partial z^*} + \left(\frac{1}{Re} \right) \left\{ \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}} \right\} - \left(\frac{1}{Fr^2} \right) \end{aligned} \quad (115)$$

Ce qui peut s'interpréter comme suit :

- ✓ si **St** est très faible : on peut négliger la dérivée instantanée et l'écoulement pourra être considéré stationnaire.
- ✓ si **Eu** est très faible : on peut négliger le gradient de pression.
- ✓ si **Re** est très grand : on peut négliger la viscosité du fluide et l'assimilé à un fluide parfait.
- ✓ si **Fr** est très grand : on peut négliger les effets de la pesanteur

IV-5 Application aux maquettes

L'analyse dimensionnelle, grâce notamment au **théorème de Buckingham**, permet de résumer le comportement d'un système à une relation **Eq. (116)** entre un nombre restreint de grandeurs sans dimension :

$$\pi_1 = \phi(\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{k-r}) \quad (116)$$

Pour des systèmes complexes la détermination de la fonction Φ n'est accessible que par mesures expérimentales. Ainsi, lors de la mise au point d'un **prototype**, il est économiquement et pratiquement plus pertinent de procéder à ces mesures sur un modèle réduit: **la maquette**.

Il faut alors pouvoir transposer les résultats obtenus sur la maquette à ceux que l'on obtiendra sur le prototype :

On s'arrange donc pour respecter le maximum de similitudes entre la maquette et le prototype.

A titre d'illustration, reprenons l'exemple de la force de traînée exercée par un écoulement sur une plaque plane **Eqs (117, 118)**:

$$\frac{D_m}{\rho v_m^2 h_m^2} = \Phi\left(\frac{L_m}{h_m}, \frac{\mu_m}{\rho_m v_m h_m}\right) \Rightarrow \text{Maquette} \quad (117)$$

$$\frac{D_p}{\rho v_p^2 h_p^2} = \Phi\left(\frac{L_p}{h_p}, \frac{\mu_p}{\rho_p v_p h_p}\right) \Rightarrow \text{Prototype} \quad (118)$$

On commence alors par se fixer un facteur d'échelle :

$$\frac{L_m}{L_p} = \alpha = \frac{1}{25}$$

On respecte ensuite le facteur de forme :

$$\frac{L_m}{h_m} = \frac{L_p}{h_p}$$

Si on utilise le même fluide, on a :

$$\rho_m = \rho_p \text{ et } \mu_m = \mu_p$$

Et par conséquent, respecter la similitude de *Reynolds* revient à :

$$h_m V_m = h_p V_p \Rightarrow V_m = V_p \frac{h_p}{h_m} = \frac{V_p}{\alpha}$$

Dans ces conditions **Eq.(119)**:

$$\frac{D_m}{\rho_m v_m^2 h_m^2} = \frac{D_p}{\rho_p v_p^2 h_p^2} \Rightarrow D_m = \left(\frac{V_p}{V_m}\right)^2 \left(\frac{h_p}{h_m}\right)^2 D_p \Rightarrow D_m = D_p \quad (119)$$

α_1/α

Ce résultat, spécifique au problème étudié, montre que par un choix approprié de la vitesse, la mesure expérimentale de la traînée sur un maquette géométriquement semblable donne directement la traînée à laquelle on doit s'attendre sur le prototype.

En pratique, tout n'est pas si simple, dans la mesure où l'on ne peut souvent pas respecter simultanément toutes les similitudes.

Annexe

Les unités du système international : Equation aux dimensions, symboles.

A- Dimension

Il est commode, pour une grandeur physique **X** d'introduire sa dimension qui sera notée **[X]**.

Longueur : L, Masse : M, Temps : T, Intensité : I, $[X]=M^aL^bT^c$

Grandeur	symbole	Unité	dimensions
vitesse	v	m/s	$L T^{-1}$
accélération	a	$m s^{-2}$	$L T^{-2}$
volume	V	m^3	L^3
fréquence	f	hertz (Hz)	T^{-1}
force	F	newton (N)	$M L T^{-2}$
masse volumique	ρ	kg/m^3	$M L^{-3}$
énergie, travail	W	joule (J)	$M L^2 T^{-2}$
puissance	P	watt (W)	$M L^2 T^{-3}$
moment d'une force	M	N m	$M L^2 T^{-2}$
pression	p	pascal (Pa)	$M L^{-1} T^{-2}$
viscosité dynamique	η	Pa.s	$M L^{-1} T^{-1}$
viscosité cinématique	ν	m^2/s	$L^2 T^{-1}$
tension superficielle	A	$kg s^{-2}$	$M T^{-2}$
débit masse	q_m	kg/s	$M T^{-1}$
débit volume	q_v	m^3/s	$L^3 T^{-1}$
chaleur, enthalpie	Q, H	J	$M L^2 T^{-2}$
Entropie	S	J/K	$M L^2 T^{-2} \Theta^{-1}$
Conductivité thermique	λ	$W m^{-1} K^{-1}$	$M L T^{-3} \Theta^{-1}$
Coefficient global d'échange thermique	K	$W m^{-2} K^{-1}$	$M T^{-3} \Theta^{-1}$
Capacité thermique	C	J/K	$M L^2 T^{-2} \Theta^{-1}$

NB :

- Les unités du système international SI, unités de base, dimensions, règles d'écriture.

B-Alphabet grec

Majuscule	Minuscule	Nom Grec
A	α	Alpha
B	β	Beta
Γ	γ	Gamma
Δ	δ	Delta
E	ε	Epsilon
Z	ζ	Zeta
H	η	Eta
Θ	θ	Theta
I	ι	Iota
K	κ	Kappa
Λ	λ	Lambda
M	μ	Mu
N	ν	Nu
Ξ	ξ	Xi
O	\omicron	Omicron
Π	π	Pi
P	ρ	Rho
Σ	σ	Sigma
T	τ	Tau
Y	υ	Upsilon
Φ	ϕ	Phi
X	χ	Chi
Ψ	ψ	Psi
Ω	ω	Omega

C- Préfixes du SI

Facteur	Préfixe	Symbole	10^1	déca	da
10^{24}	yotta	Y	10^{-1}	déci	d
10^{21}	zetta	Z	10^{-2}	centi	c
10^{18}	exa	E	10^{-3}	milli	m
10^{15}	peta	P	10^{-6}	micro	μ
10^{12}	tera	T	10^{-9}	nano	N
10^9	giga	G	10^{-12}	pico	p
10^6	méga	M	10^{-15}	femto	f
10^3	kilo	k	10^{-18}	atto	a
10^2	hecto	h	10^{-21}	zepto	z
			10^{-24}	yocto	y

Bibliographies

- **S. Poncet.** Module de mécanique des fluides – Semestre 4 Groupe MECAFLU-GTE-2A sur l'ENT IUT Génie Thermique et Energie – Marseille Année 2012-2013
- **J. Carbonnet- M. Roques.** Mécanique des fluides. Académie de Nancy-Metz, 1998.

http://artic.ac-becanson.fr/reseau_stl/FTP_STL/MECA991.doc

- **R. Ben hamouda.** Notions de Mécanique des fluides. Cours et Exercices Corrigés. Centre de Publication Universitaire, Tunis, 2008.
- **J. Roussel.** Cours de Mécanique des fluides, 2010.
http://femto-physique.fr/mecanique_des_fluides/mecaflu_C3.php#menu.
- **J.L. Wojkiewicz.** « MOOC mécanique des fluides, structuration, activités pédagogiques et certification » Printemps d'UNIT, Université Paris ouest, Nanterre la défense, 2015
- **T. Amoura.** La mécanique des fluides. Cours.
<http://tarikamoura.blogspot.com/p/mdf.html>
- Dynamique des fluides réels.
http://campus-douai.gemtech.fr/pluginfile.php/15500/mod_resource/content/0/MecafluScenari_sept2012/Chap4_DynamiqueFluidesReels_web_webLatex/co/Chap4_DynamiqueFluidesReels_web.html.
- Cours de Mécanique des Fluides. Université d'Angers– LPA.
<http://www.almohandiss.com/index.php/mecanique-des-fluides/mecanique-des-fluides-cours-exercices-tp>.
- Écoulements internes. Chapitre VI.
www.sft.asso.fr/.../fluides%20en%20Ecoulement%20.../FEMM%20-%20