



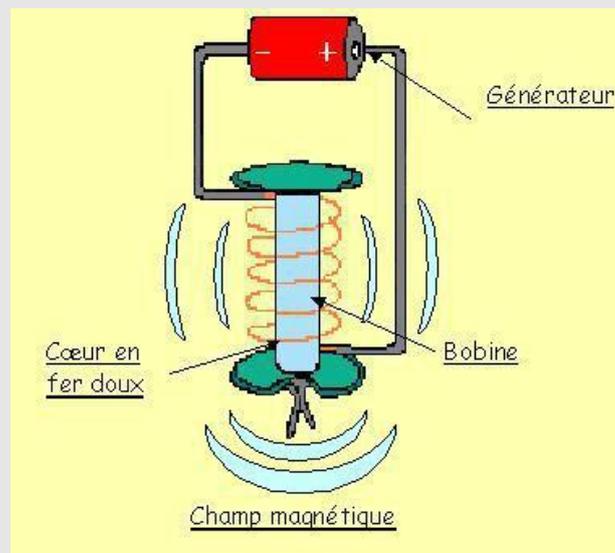
جامعة وهران للعلوم و التكنولوجيا محمد بوضياف



## Université des Sciences et de la Technologie d'Oran « Mohamed Boudiaf »

Faculté de Génie Electrique  
Département d'Electrotechnique

### Polycopié d'Electromagnétisme Avec exercices pour Master et Licence



Préparé par Dr *REMAOUN Sidi Mohammed*

Année Universitaire 2014-2015

# Préambule

Ce polycopié a été conçu dans le but d'être considéré comme étant un support pédagogique. Dans le quel, j'ai essayé de présenter plus au moins des notions qui seront destinées aux étudiants de la filière d'électrotechnique des deux niveaux licence ainsi que ceux de Master ayant des acquis sur les notions de l'analyse vectorielle.

Et vu que L'électromagnétisme est un domaine très vaste, je ne pouvais dans ce modeste travail mettre en relief. C'est pour cela que j'ai préféré et selon mon expérience dans l'enseignement de cette matière, me basé simplement sur les notions qui sont très simples.

Il débute par le premier chapitre sur l'électrostatique, qui normalement est considéré comme étant la connaissance de base pour chaque étudiant qui entame le cours de l'électromagnétisme. Ensuite, dans le chapitre deux, je présente l'électrocinétique dans les règles fondamentales et non pas approfondies. Car, il est impossible de tout citer dans ce polycopie. Etant donné qu'il existe d'ores et déjà des polycopiés et des manuels, qui ont déjà traités une grande partie de l'électromagnétisme.

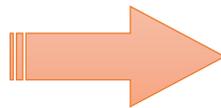
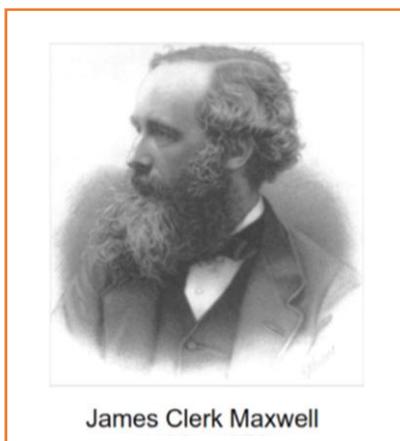
Le chapitre trois est consacré à la magnétostatique accompagné de quelques notions fondamentales. Enfin, le dernier chapitre sera consacré à l'étude de l'énergie électromagnétique en faisant surtout référence au vecteur de Poynting.

Toutefois, dans ce polycopié, j'ai introduit quelques exercices résolus dont plusieurs livres font référence. Je les ai considérés comme étant primordiaux. Puisque le but recherché, est que l'étudiant ait une idée sur leurs méthodes de résolution. Ainsi lui permettre de surpasser les quelques difficultés rencontrées lors de leur cursus.

Enfin, j'ai terminé ce polycopié avec quelques annexes. Que je considère comme étant un genre de support mnémotechnique. Comme par exemple le calcul vectoriel.

## Equations De Maxwell, toute l'électricité est là !!

Les phénomènes électriques et magnétiques ont tout d'abord été étudiés séparément par plusieurs physiciens de renom, dont les principaux sont **Franklin** (1706 – 1790), **Coulomb** (1736 – 1806) **Oested** (1775 – 1851), **Ampère** (1775 – 1836), **Gauss** (1777 – 1855) et **Faraday** (1791 – 1867). C'est cependant à **Maxwell** (1831 – 1879) que l'on doit la formulation la plus complète des relations liant entre elles les grandeurs électriques et magnétiques. Les équations de Maxwell spécifient que toute variation spatiale d'un champ électrique ou magnétique en un point de l'espace entraîne ou est due à l'existence, ou la variation temporelle, d'un autre champ au même point de l'espace. Il s'agit là de leur forme locale, ou encore différentielle.



$$\begin{aligned}\overline{\text{rot}} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div} \vec{D} &= \rho \\ \text{div} \vec{B} &= 0 \\ \overline{\text{rot}} \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\end{aligned}$$

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Chapitre 1 : Electrostatique</b>	<b>06</b>
1.1 La loi de Coulomb . . . . .	06
1.2 Le champ électrique . . . . .	06
1.3 Principe de superposition . . . . .	06
1.4 Champ et potentiel électrostatique . . . . .	07
1.4.1 Le potentiel électrostatique. . . . .	07
1.4.2 Relation entre le champ et le potentiel électrostatique . . . . .	09
1.4.3 Circulation d'un champ électrique . . . . .	10
1.4.4 Distribution continue de charges -Densité. . . . .	10
1.4.5 Champ et potentiel d'une distribution continue de charge. . . . .	11
1.4.6 Topographie d'un champ électrique. . . . .	14
1.4.7 Théorème de Gauss : le flux de champ électrostatique. . . . .	15
1.4.8 Propriété de symétrie . . . . .	17
1.4.9 Exemples de calcul . . . . .	19
<b>Chapitre 2 : Electrocinétique</b>	<b>30</b>
2.1 Densité de courant . . . . .	30
2.2 Courant volumique . . . . .	30
2.3 Intensité du courant électrique . . . . .	31
2.4 Equation locale de bilan de charges. . . . .	33
2.5 Loi d'Ohm. . . . .	33
2.5.1 Loi d'Ohm locale : Conductivité . . . . .	33
<b>Chapitre 3 : Magnétostatique</b>	<b>36</b>
3.1 Champ d'induction d'un courant stationnaire. . . . .	36
3.2 Calcul de $\text{div } \mathbf{B}$ : Potentiel vecteur. . . . .	37
3.3 Calcul de $\text{rot } \mathbf{B}$ : Théorème d'Ampère . . . . .	39
3.4 Champ d'induction magnétique dû à une charge ponctuelle en mouvement . . . . .	40
3.5 Les propriétés de symétrie : le champ magnétostatique et potentiel . . . . .	41
<b>Chapitre 4 : Introduction au régime variable</b>	<b>51</b>
4.1 Force de LORENTZ. . . . .	51
4.2 Le phénomène d'induction électromagnétique . . . . .	51
4.2.1 Circuit mobile dans une induction magnétostatique. . . . .	51
4.2.2 Circuit mobile dans une induction magnétique variable. . . . .	52
4.3 La forme locale de la loi de FARADAY . . . . .	53
4.4 Energie potentielle magnétostatique d'un système de courant . . . . .	55
4.5 Densité d'énergie magnétostatique. . . . .	57
<b>Chapitre 5 : Energie électromagnétique : Vecteur de Poynting</b>	<b>69</b>
5.1 L'énergie du champ électromagnétique . . . . .	69
5.2 L'équation de conservation de l'énergie. . . . .	69
5.3 Identification du couple $(\Pi, w)$ . . . . .	71
<b>Annexe A : Rappel des points importants</b>	<b>82</b>
<b>Annexe B : Quelques théorèmes utiles en électromagnétisme</b>	<b>86</b>
<b>Annexe C : Relations utiles &amp; Opérateurs vectoriels en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques</b>	<b>87</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>89</b>



# CHAPITRE 1

## ELECTROSTATIQUE

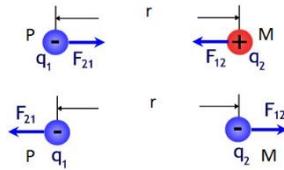
### 1.1 La loi de Coulomb

Deux corps chargés s'attirent ou se repoussent. On appelle, forces électrostatiques ou forces colombiennes les forces d'interaction entre deux corps électrisés.

Un corps électrisé peut porter soit une charge positive ou négative

Dans ce cas, on considère que la force électrostatique d'interaction selon la loi de Coulomb par :

$$\vec{F}_{11} = -\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 \frac{\vec{PM}}{PM^3} \quad (1.1)$$



Où  $r$  représente la distance séparant les deux charges alors que la permittivité du vide est donnée par :

$$\epsilon_0 = 8.854187817 \times 10^{-12} \text{ Fm}^{-1} \quad (1.2)$$

### 1.2 Le champ électrique

Soit une charge ponctuelle  $q$  qui, placée en un point  $P$  de l'espace, subit une force électrostatique proportionnelle à la charge. Cette force traduit l'existence d'un champ électrostatique en ce point défini par la relation :

$$\vec{F} = q \vec{E} \quad (1.3)$$

Tenant compte de la loi de Coulomb, le champ électrique créé par la charge  $q$ , dans une direction donnée par le vecteur unitaire  $\vec{u}$  et à une distance  $r$ , est alors défini par :

$$\vec{E}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} \quad (1.4)$$

### 1.3 Principe de superposition

Commençons par déterminer la force exercée par une distribution discrète de charges ( $q_i$ ) sur une charge  $q$  placée au point  $\vec{r}$  (figure. I.1). L'expérience a permis de montrer que la présence d'autres charges ne modifié pas la force entre deux charges particulières. Dans ce cas, la force résultante obéit à la règle générale de composition des forces et est égale à la simple somme vectorielle de toutes les contributions associées aux différentes paires ( $q, q_i$ ). Ceci constitue le principe de superposition.

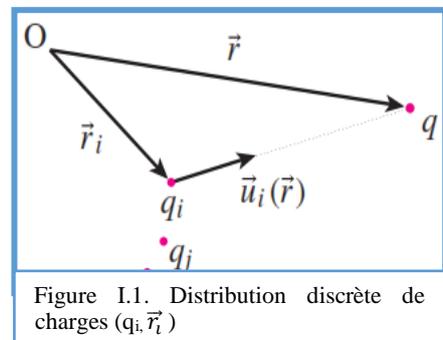


Figure I.1. Distribution discrète de charges ( $q_i, \vec{r}_i$ )

Dans ce cas la force  $\vec{F}(\vec{r})$  exercée sur la charge  $q$ , située au point  $\vec{r}$ , par un ensemble de charges  $q_i$  situées en  $\vec{r}_i$  est égale à

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{qq_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \vec{u}_i(\vec{r}) \quad (1.5)$$

Avec  $\vec{u}_i(\vec{r})$  étant le vecteur unitaire dirigé de la charge  $q_i$  vers le point  $\vec{r}$

## 1.4 Champ et potentiel électrostatique

Le potentiel électrostatique  $V(M)$  associé au champ électrostatique  $\vec{E}(M)$  est une fonction scalaire contrairement à  $\vec{E}$ . Nous verrons, dans beaucoup de cas, que le potentiel sera un intermédiaire commode dans le calcul du champ vectoriel  $\vec{E}(M)$ . Le potentiel se rattache physiquement à la notion d'énergie potentielle, d'où son appellation.

### 1.4.1 Potentiel électrostatique

#### a) Cas d'une seule charge ponctuelle

Considérons une charge ponctuelle  $q (>0)$  fixée en P et un point M de l'espace (figure.I.2) :

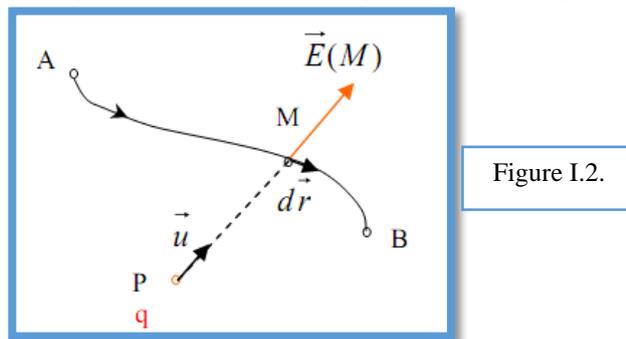


Figure I.2.

La charge ponctuelle  $q$  fixée en P crée en tout point M de l'espace un champ électrostatique donné par :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}}{r^2} \quad (1.6)$$

Avec

$\vec{u} = \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|}$  vecteur unitaire dirigé de P vers M.

La circulation élémentaire  $d\mathcal{C}$  du champ  $\vec{E}$  correspondant à un déplacement élémentaire  $d\vec{r}$  point M sur la courbe AB est :

$$dC = \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{u} \cdot d\vec{r} \quad (1.7)$$

Or,  $d\vec{r} = d(\overline{PM}) = d(r\vec{u}) = dr\vec{u} + r d\vec{u}$  et  $d\vec{r} \cdot \vec{u} = (dr\vec{u} + r d\vec{u}) \cdot \vec{u} = dr + r d\vec{u} \cdot \vec{u}$

Puisque :  $d(\vec{u} \cdot \vec{u}) = 2\vec{u} \cdot d\vec{u} = 0$  ; on a :  $d\vec{r} \cdot \vec{u} = dr$

La circulation élémentaire  $dC$  s'écrit alors :

$$dC = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = -d\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}\right) \quad (1.8)$$

Posons alors,

$$dC = \vec{E} \cdot d\vec{r} = -dV(r)$$

V est le potentiel électrostatique V(M) créée par la charge q fixée en M :

$$V(M) = V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + cste \quad (1.9)$$

Nous venons de définir un nouveau champ, le potentiel électrostatique ; c'est un champ scalaire défini à une constante près. On choisit en général la valeur de la constante de telle sorte que le potentiel soit nul lorsque le point M est infiniment éloigné de la charge :  $V(r \rightarrow \infty) = 0$ . Dans ce cas, la constante est nulle et le potentiel s'écrit :

$$V(M) = V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (1.10)$$

Comme le champ  $\vec{E}$ , le potentiel V n'est pas défini aux points  $P_i$  :  $\vec{E}(P_i)$  et  $V(P_i)$  ne sont pas définis.

### b) Cas d'une distribution de n charges ponctuelles

Soient n charges ponctuelles  $q_1, q_1, \dots, q_i, \dots, q_n$  fixés aux points  $P_1, P_1, \dots, P_i, \dots, P_n$ . Soit M un point de l'espace. (figure .I.3).

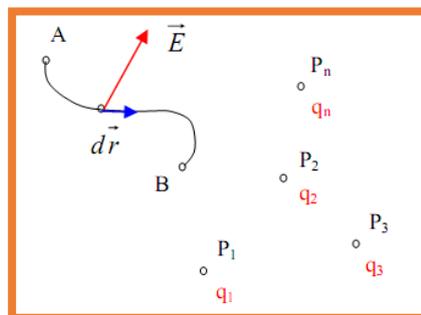


Figure I.3.

Calculons la circulation élémentaire  $dC_i$  du champ  $\vec{E}_i$  créée par la charge  $q_i$  seule :

$$dC_i = \vec{E}_i \cdot d\vec{r} = -dV_i(r)$$

$$\text{Avec } \vec{E}_i(M) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P}_iM}{\|\vec{P}_iM\|^3} = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_i}{r_i^2} \text{ et } \vec{P}_iM = r_i \vec{u}_i$$

Ainsi, le potentiel électrostatique  $V_i(M)$  dû à la charge  $q_i$ .

$$V_i(M) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_i}$$

$$\text{avec: } r_i = \|\vec{P}_iM\|$$

Le potentiel  $V(M)$  dû à l'ensemble des  $n$  charges est la somme des potentiels en application du principe de superposition :

$$V(M) = \sum_{i=1}^n V_i(M) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_i} \quad (1.11)$$

Dans cette relation, nous avons choisi la constante nulle pour chaque potentiel  $V_i$  créée par la charge  $q_i$ ; ceci n'est pas valable que si les charges  $q_i$  sont réparties dans un volume fini.

#### 1.4.1 Relation entre champ et le potentiel électrostatique

Le potentiel électrostatique a été défini à partir de la circulation élémentaire du champ  $\vec{E}$ :

$$dC = \vec{E} \cdot d\vec{r} = -dV(r)$$

Or  $dE = -\overrightarrow{grad}V \cdot d\vec{r}$  d'où la relation entre  $\vec{E}$  et  $V$  la relation locale

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}V(M) \quad (1.12)$$

Le champ électrostatique  $\vec{E}$  dérive du potentiel scalaire  $V$ . Par l'intermédiaire de cette relation locale, qui lie le champ électrostatique  $\vec{E}$  et le potentiel électrostatique  $V$ , la connaissance de  $V$  en un point de l'espace suffit pour la détermination de  $\vec{E}(M)$ . Cette relation implique des conditions de continuité et de dérivabilité sur la fonction  $V(M)$ .  
**Unité** : l'unité du potentiel électrostatique dans le système MKSA est le Volt (V).  
 D'après la relation qui lie le champ électrostatique  $\vec{E}$  et le potentiel électrostatique  $V$ , l'unité du champ électrostatique est le Volt par mètre (V/m).

### 1.4.3 Circulation d'un champ électrique

La circulation  $C_{AB}$  du champ  $\vec{E}$  le long du contour AB est

$$C_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_A^B dV = V(A) - V(B) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \quad (1.13)$$

La circulation du champ de vecteur  $\vec{E}$ , le long de AB, est donc égale à la différence de potentiel  $V_A - V_B$ . Ainsi, la connaissance de  $\vec{E}$  ne définit que les différences de potentiel. Pour avoir le potentiel en un point, il faudra définir une origine arbitraire des potentiels. Il est commode de choisir le potentiel nul à l'infini quand la distribution de charges est limitée à un domaine fini. La circulation du champ de vecteur  $\vec{E}$ , le long de AB est indépendante de la forme du contour AB ; elle ne dépend pas du chemin suivi (la circulation élémentaire  $dC$  est différentielle totale exacte).

En conséquence la circulation de  $\vec{E}$  est nulle le long de tout contour fermé. Le champ  $\vec{E}$  est un champ de vecteurs à circulation conservative qui dérive d'une fonction scalaire appelée potentiel électrostatique. En résumé :

$$C_{AB} = \int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_A^B dV = V(A) - V(B) \Leftrightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \Leftrightarrow \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V \quad (1.14)$$

### 1.4.4 Distribution Continue De Charges - Densité

A l'échelle macroscopique, le nombre de charges élémentaires est si important que la nature discontinue de la charge n'a plus de sens ; il en est de même pour la masse puisqu'il ne nous est pas possible de déceler les protons et les électrons à l'échelle macroscopique. Ceci nous permet de considérer que la répartition de charges dans la matière est continue.

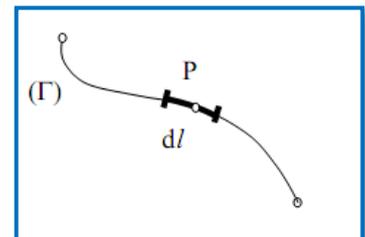
#### a - Densité linéique de charge

Si la charge est concentrée sur un système filiforme, on définit une densité linéique de charges  $\lambda(P)$ , à partir de la charge  $dq$  portée par un élément  $dl$  du fil, entourant le point P :

$$dq = \lambda dl \quad (1.15)$$

La charge totale du fil est donnée par l'intégrale curviligne :

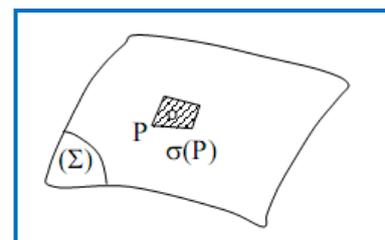
$$Q = \int_{\Gamma} \lambda dl$$



#### b - Densité surfacique de charge

Lorsque les charges sont réparties sur une couche d'épaisseur très faible par rapport aux dimensions de la couche, on définit une densité surfacique de charges  $\sigma(P)$  à partir de la charge  $dq$  portée par un élément  $dS$  de la surface de la couche, entourant le point P :

$$dq = \sigma dS \quad (1.16)$$



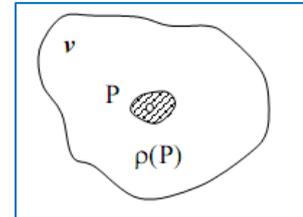
Dans ce cas, la charge totale d'une surface (S) est donnée par s'obtient à partir de l'intégrale de surface :

$$Q = \iint_S \sigma dS$$

### c - Densité volumique de charge

Pour décrire une distribution volumique de charge, on définit la densité volumique de charges  $\rho(P)$  à partir de la charge  $dq$  contenue dans un élément de volume  $d\tau$  entourant le point P :

$$dq = \rho d\tau \quad (1.17)$$



La densité de charges  $\rho(P)$  est une fonction de point scalaire qui peut subir de grandes variations d'un point à l'autre de la distribution. En effet, la charge est nulle dans l'espace vide entre un noyau et un électron et prend une valeur différente de zéro en un point situé sur le noyau ou l'électron. En conséquence  $\rho(P)$  pourrait avoir des valeurs très différentes suivant le choix du volume élémentaire  $d\tau$ . Pour que la définition de  $\rho(P)$  ait un sens, c'est à dire qu'elle soit indépendante de la forme exacte de  $d\tau$ , il faut considérer un élément de volume  $d\tau$  qui soit grand par rapport aux dimensions atomiques, mais très petit par rapport aux dimensions de la distribution de charges. Celle-ci correspond alors à un système macroscopique et  $\rho(P)$  pourra être considéré comme une densité volumique de charges, moyennée sur le volume  $d\tau$ . Cette description est valable tant que l'on s'intéresse à une description macroscopique (en opposition à microscopique) du système de charges. Pour un volume  $\tau$ , la charge totale s'obtient à partir de l'intégrale de volume :

$$Q = \iiint_{\tau} \rho d\tau$$

## 1.4.5 - Champ et Potentiel d'une distribution continue de Charges

### A - Introduction

Nous savons déterminer le champ et le potentiel électrostatique créé par une distribution de charges ponctuelles :

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i(M) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_i}{r_i^2} \quad \text{et} \quad V(M) = \sum_{i=1}^n V_i(M) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_i}$$

Comment calculer le champ et le potentiel créés par une distribution continue ? La distribution de charges peut être découpée en éléments de volume ou de surface ou de courbe qui portent une charge élémentaire  $dq$ . Chacune de ces charges élémentaires crée un champ et un potentiel électrostatiques appelés élémentaires. Le champ (ou le potentiel) créé par toute la distribution est, par application du principe de superposition, la somme des charges (ou des potentiels) élémentaires créés par les charges  $dq$ .

## B - Distribution linéique

On considère une portion de courbe  $\Gamma = AB$  portant une densité linéique de charge  $\lambda$  (figure .I.4).

Un élément  $dl$  entourant un point  $P$  porte une charge :

$$dq = \lambda dl$$

Cette charge crée en  $M$  un champ et un potentiel donné par les expressions suivantes :

$$d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda(P)dl}{r^2} \vec{u} \quad \text{et} \quad dV(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda(P)dl}{r}$$

avec,  $\vec{PM} = \|\vec{PM}\| \vec{u} = r \vec{u}$

D'où le champ total  $\vec{E}(M)$  et le potentiel  $V(M)$  créés en  $M$  par toute la distribution linéique de charge s'écrivent :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Gamma} \frac{\lambda(P)dl}{r^2} \vec{u} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Gamma} \frac{\lambda(P)dl}{\|\vec{PM}\|^3} \vec{PM} \quad (1.18)$$

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Gamma} \frac{\lambda(P)dl}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Gamma} \frac{\lambda(P)dl}{\|\vec{PM}\|} \quad (1.19)$$

Cette dernière relation n'est valable que si le fil est de dimension finie.

### Remarque

On peut montrer que le champ  $\vec{E}(M)$  et le potentiel  $V(M)$  ne sont pas définis en un point  $M$  situé sur le fil chargé.

## C - Distribution surfacique

Dans le cas d'une distribution surfacique de charges, on considère une charge  $dq$  portée par un élément de surface  $dS$  (figure .I.5).

Le champ et le potentiel créés en  $M$  par  $dq$  sont donnés par :

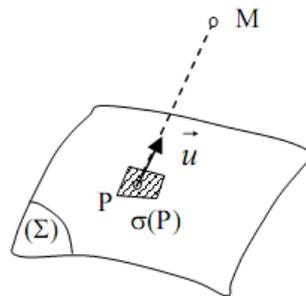


Figure I.5.

D'où le champ total  $\vec{E}(M)$  et le potentiel  $V(M)$  créés par les charges réparties sur la surface  $\Sigma$  :

$$d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(P)dS_P}{r^2} \vec{u} \quad \text{et} \quad dV(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(P)dS_P}{r}$$

avec,  $\vec{PM} = \|\vec{PM}\| \vec{u} = r \vec{u}$

Cette relation suppose que la distribution de charges s'étend sur une surface de dimension fini. Dans le cas contraire, on choisira comme origine des potentiels un point à distance finie.

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\Sigma} \frac{\sigma(P)dS_P}{r^2} \vec{u} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\Sigma} \frac{\sigma(P)dS_P}{\|\vec{PM}\|^3} \vec{PM} \quad (1.20)$$

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\Sigma} \frac{\sigma(P)dS_P}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\Sigma} \frac{\sigma(P)dS_P}{\|\vec{PM}\|} \quad (1.21)$$

### Remarque

On peut montrer que le potentiel est défini sur la surface chargée et continue à la traversée de la surface chargée. Il n'en est pas de même pour le champ  $\vec{E}(M)$  qui n'est pas défini sur une surface chargée. Il subit une discontinuité à la traversée de la face chargée. Nous étudierons le comportement du champ  $\vec{E}(M)$  à la traversée d'une surface chargée au chapitre

### D - Distribution volumique

Soit une distribution volumique de charges contenue dans le volume  $v$  ;  $\rho(P)$  est la densité volumique de charges en un point  $P$  du volume  $v$  (figure .I.6).

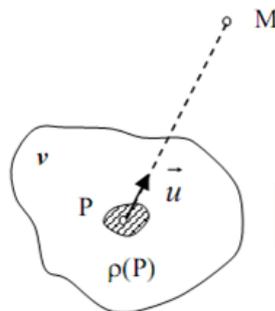


Figure I.6.

La charge contenue dans l'élément de volume entourant le point  $P$   $d\tau_P$  est :

$$dq = \rho(P)d\tau_P$$

$$d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{u} \quad \text{et} \quad dV(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r}$$

avec,  $\vec{PM} = \|\vec{PM}\| \vec{u} = r \vec{u}$  et  $dq = \rho(P)d\tau_P$

Cette charge crée en  $M$  un champ  $\vec{E}(M)$  et un potentiel  $dV$  comme le ferait une charge ponctuelle  $dq$  placée en  $P$  (figure .I.1):

D'après le principe de superposition, le champ total  $\vec{E}(M)$  créé par la distribution est la somme des contributions  $d\vec{E}(M)$ :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_v \frac{\rho(P) d\tau_P \vec{u}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_v \frac{\rho(P) d\tau_P \overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} \quad (1.22)$$

Il faut donc calculer une intégrale de volume pour obtenir le champ  $\vec{E}(M)$  alors que le potentiel est obtenu à partir de l'intégrale de volume :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_v \frac{\rho(P) d\tau_P}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_v \frac{\rho(P) d\tau_P}{\|\overrightarrow{PM}\|} \quad (1.23)$$

Cette relation suppose que l'on a choisi le potentiel nul à l'infini, donc que la distribution de charges s'étend sur un volume fini. Si ce n'est pas le cas, il faut choisir une autre origine des potentiels.

### 1.4.6 Topographie d'un champ électrique

#### a- Lignes de champ

Pour avoir une idée sur l'allure du champ  $\vec{E}$ , on trace les **lignes de champ**, c'est-à-dire les courbes tangentes en chaque point au vecteur  $\vec{E}$  défini en ce point. Ces courbes sont orientées par convention dans le sens du vecteur  $\vec{E}$  (figure I.7).

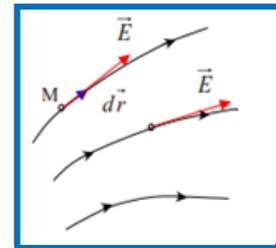


Figure I-7

Soit  $M$  un point d'une ligne de champ et  $d\vec{r}$  le vecteur déplacement élémentaire sur une ligne de champ (voir figure II-7).

Puisque  $\vec{E}$  et  $d\vec{r}$  sont colinéaires, on a :

$$d\vec{r} \wedge \vec{E} = \vec{0} \quad (1.24)$$

Cette relation permet d'obtenir les équations des lignes de champ. Dans le système de coordonnées **cartésiennes**, posons :

$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}$  et  $d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$ , ainsi la relation (1.13) conduit à :

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z} \quad (1.25)$$

#### • Exemple de lignes de champ

Soit une charge ponctuelle en  $O$ , les lignes du champ créée par la charge ponctuelle sont des demi-droites concourantes en  $O$ , divergentes si  $q > 0$  (figure I.8.a) et convergentes si  $q < 0$  (figure I.8.b).

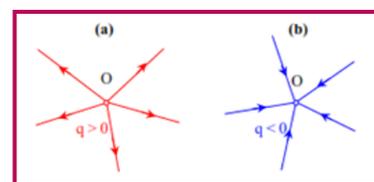


Figure I-8

✚ Notons que dans une région où le champ  $\vec{E}$  est un vecteur bien défini et non nul, on peut suivre de façon continue une ligne de champ.

✚ Deux lignes de champ ne peuvent se croiser : la figure I-7 montre que les lignes de champ commencent (fig.I.7.a) où s'arrêtent (fig.I.7.b) sur les charges qui sont des points singuliers.

b- Tube de champ

L'ensemble des lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé constitue un tube de champ (figure I.9)

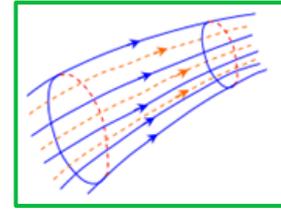


Figure I-9

c- Surfaces équipotentielles.

Ce sont des surfaces d'équation  $V = \text{cste}$ , c'est-à-dire d'égal potentiel (fig.I.9). D'après la relation  $\vec{E} = -\text{grad}V$ , le champ  $\vec{E}$  est normal aux surfaces équipotentielles et dirigé vers les potentiels décroissantes (sans le signe moins dans cette relation,  $\vec{E}$  est dirigé vers les potentiels croissants).

Nous avons représenté sur la figure I.10, les surfaces équipotentielles et les lignes du champ  $\vec{E}$  créée par une charge ponctuelle positive. Les surfaces équipotentielles sont des sphères centrées en  $O$ , point où se trouve la charge. La direction de  $\vec{E}$ , c'est-à-dire du gradient de  $V$  est la direction de la normale aux surfaces équipotentielles, celle de  $V$  varie le plus rapidement ; ainsi il est clair que pour passer de la valeur  $V_1$  à la valeur de  $V_2$ , le chemin le plus court est le segment  $AB$ .

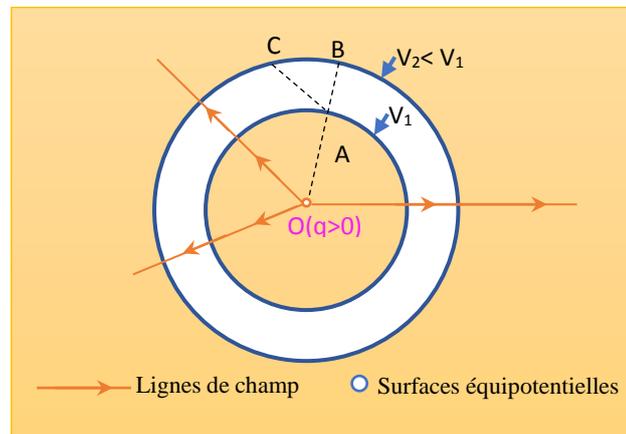


Figure I-10

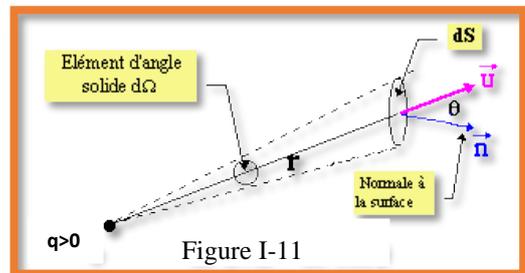
**Remarque :**

Lorsqu'on a un système de plusieurs charges, on ne peut pas obtenir les lignes de champ par superposition des lignes du champ de chacune des charges. Il faut calculer le champ total  $\vec{E}$  et ensuite tracer les lignes de champ.

**1.4.7 Le théorème de Gauss : le flux du champ électrostatique**

**a- Cas d'une charge ponctuelle**

Soit une charge ponctuelle  $q > 0$  placée en  $O$  et  $M$  un point de l'espace (figure I-11)



Le champ  $\vec{E}(M)$  créé par  $q$  en  $M$  est :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}}{r^2} \quad (1.26)$$

Avec,  $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$  et  $r = \|\overrightarrow{OM}\|$

Soit  $dS$  un élément de surface entourant le point M ; orientons la surface. Le flux élémentaire de  $\vec{E}$  à travers la surface orientée est :

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u} \cdot d\vec{S}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

$$d\Omega = \frac{\vec{u} \cdot d\vec{S}}{r^2} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{r^2} dS$$

où,  $d\Omega$  : angle solide élémentaire sous lequel du point O on voit la surface élémentaire. Le signe de  $d\Omega$  dépend de l'orientation de la surface :

☞  $d\Omega > 0$  si  $\alpha = (\vec{u}, \vec{n}) < \pi/2$

☞  $d\Omega < 0$  si  $\alpha > \pi/2$

### b- Cas de n charges ponctuelles

Considérons  $n_i$  charges à l'intérieure d'une surface fermée ( $\Sigma$ ) et  $n_e$  charges situées à l'extérieure de cette surface. Le champ  $\vec{E}$  créé par les  $n = n_i + n_e$  charges est la somme vectorielle des champs créés par chacune des charges :

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n_i} \vec{E}_i + \sum_{e=1}^{n_e} \vec{E}_e \quad (1.27)$$

Le flux du champ sortant de la surface  $\Sigma$  est :

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_{\Sigma} \left( \sum_i \vec{E}_i + \sum_e \vec{E}_e \right) \cdot d\vec{S} = \sum_i \Phi_i + \sum_e \Phi_e \quad (1.28)$$

D'après (1.15) et (1.16), on a :

$$\Phi_i = \frac{q_i}{\epsilon_0} \text{ et } \Phi_e = 0$$

d'où :

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \text{ avec } , Q_{\text{int}} = \sum_{i=1}^{n_i} q_i$$

Le flux sortant de la surface fermée  $\Sigma$  est égal à la somme, divisée par  $\epsilon_0$ , des charges intérieures à la surface  $\Sigma$  :

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad (1.29)$$

avec,  $Q_{\text{int}}$  : charge totale intérieure à  $\Sigma$

**Ce résultat constitue le théorème de Gauss.**

## 1.4.8 Propriétés de symétrie

### B.1 Le principe de Curie

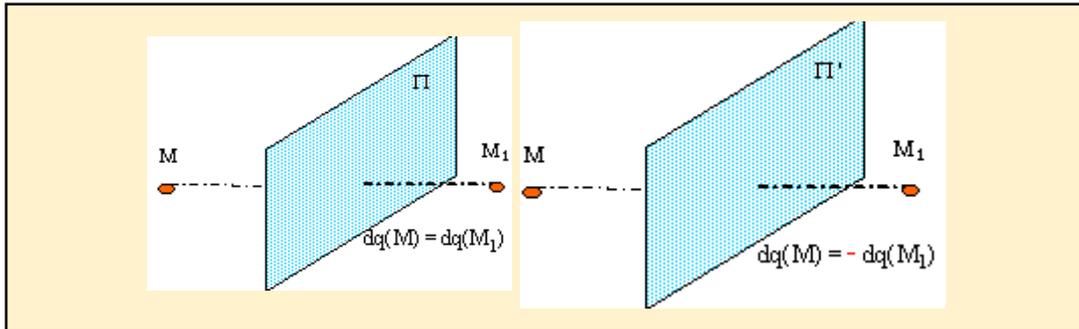
La symétrie des causes (que sont les charges, sources de l'électrostatique) se retrouve dans les effets produits (que sont le champ et le potentiel électrostatiques).

Ce principe est très utile en électrostatique car il permet de prévoir l'allure des lignes du champ électrique et les surfaces équipotentielles à partir de la symétrie du système chargé.

### B.1 Le champ électrostatique

Une distribution de charges possède :

- ✚ un plan de **symétrie**  $\Pi$  si pour tout élément symétrique on a des charges identiques.
- ✚ un plan d'**antisymétrie**  $\Pi'$  si pour tout élément symétrique on a des charges opposées.



- ✚ Une distribution est **invariante par translation** si elle reste inchangée par translation : le champ ne dépend pas de la variable  $z$ .
- ✚ Une distribution est **invariante par rotation** si elle reste inchangée par rotation autour d'un axe : le champ ne dépend pas de l'angle.

Le champ électrostatique  $\vec{E}$  est contenu dans un plan de symétrie perpendiculaire à un plan de symétrie

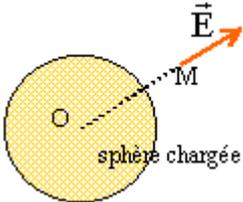
Fil infini uniformément chargé

	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Tout plan perpendiculaire au fil est plan de symétrie.</li> <li>▪ Tout plan contenant le fil est plan de symétrie. invariant par translation le long du fil et invariant par translation le long du fil :</li> </ul> <p><b>Le champ dépend de la distance OM</b></p>
--	---

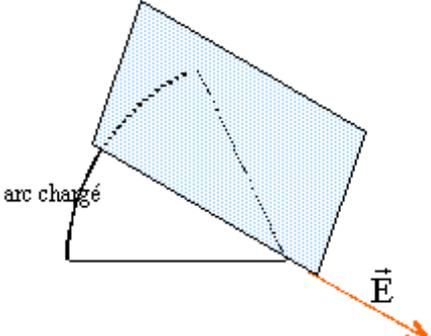
Disque uniformément chargé :

	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Tout plan contenant <math>\Delta</math> est plan de symétrie</li> <li>▪ Le plan du disque est plan de symétrie invariant par rotation autour de l'axe:</li> </ul> <p><b>Le champ dépend de la distance OM</b></p>
--	--

Sphère uniformément chargée en surface ou en volume :

 <p>sphère chargée</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Tout plan passant par le centre est plan de symétrie : <b>champ radial</b></li> <li>▪ invariant par rotation autour de tout axe passant par le centre O :</li> </ul> <p style="text-align: center;"><b>Le champ dépend de la distance OM</b></p>
---	---

### Arc de cercle uniformément chargé

 <p>arc chargé</p>	<p style="text-align: center;">Le plan perpendiculaire à l'arc et contenant la bissectrice est plan de symétrie.</p>
---	--

- Soit M un point de l'espace où l'on souhaite calculer le champ électrostatique créé par une distribution spatiale de charges électriques.
- Si par le point M, passe un plan de symétrie pour la distribution des charges électriques, le champ électrique  $\vec{E}$  est contenu dans ce plan de symétrie.
- Si par le point M, passe un plan d'antisymétrie pour la distribution des charges électriques, le champ électrique  $\vec{E}$  est perpendiculaire à ce plan d'antisymétrie.

#### 1.4.9 Exemples

Calcul du champ et du potentiel électrostatiques créés par une distribution continue de charges à partir du **THEOREME de GAUSS**

##### 1- Nappe chargée uniformément en surface

###### 1-1 Enoncé

Considérons un plan **uniformément** avec une densité surfacique  $\sigma > 0$  (nappe chargée) de dimension **infinie** et contenue dans le plan  $xOy$ . Calculer le champ électrostatique puis le potentiel en tout point de l'espace.

###### 1-2 Solution

a) Variable dont dépend  $\vec{E}$  et sa direction

La nappe chargée en surface est contenue dans le plan  $(xOy)$  comme le montre la figure I-12

✚ Le plan chargé est invariant par translations suivant  $Ox$  et  $Oy$ . Le système des coordonnées le plus adapté au calcul de  $\vec{E}$  est le système cartésien de base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Le champ  $\vec{E}$  est indépendant de  $x$  et  $y$  :  $\vec{E}(M) = \vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(z)$ .

✚ Le plan  $\Pi_1 = (M, \vec{j}, \vec{k})$  passant par  $M$  en perpendiculaire à  $(Ox)$  est un plan de symétrie pair.  $\vec{E} \in \Pi_1$ , ainsi :  $\vec{E} = \vec{E}_y + \vec{E}_z$

✚ Le plan  $\Pi_1 = (M, \vec{i}, \vec{k})$  passant par  $M$  en perpendiculaire à  $(Oy)$  est un plan de symétrie pair.  $\vec{E} \in \Pi_1$ , ainsi :  $\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_z$   
Ainsi,  $\vec{E} \in \Pi_1 \cap \Pi_1$  d'où :

$$\vec{E} = E(z)\vec{k}$$

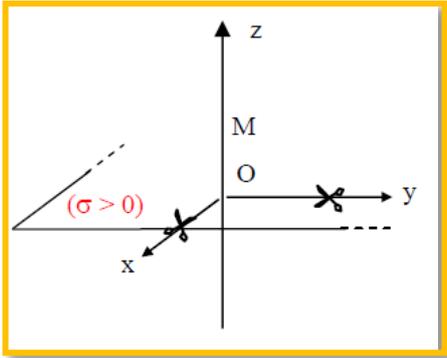


Figure I-12

De plus, le plan chargé  $xOy$  étant un plan de symétrie paire, le champ  $\vec{E}$  en un point  $M'$  symétrique de  $M$  par rapport à ce plan est :

$\vec{E}(M') = -\vec{E}(M)$  avec  $\vec{E}(M') = \vec{E}(-z) = E(-z)\vec{k}$  et  $\vec{E}(M) = \vec{E}(z) = E(z)\vec{k}$ , ce qui implique que :

$$E(-z) = -E(z)$$

b) Calcul du champ électrostatique  $\vec{E}(M)$

Tenant compte de la **symétrie** de la distribution plane de charge, nous choisissons comme surface fermée  $\Sigma$  **le parallélépipède droit** dont les génératrices sont **normales** au plan chargé, fermé par **deux sections droites** notées  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  d'aire  $S$ , passant respectivement par  $M(x, y, z)$  et par  $M'(x, y, -z)$ , le point symétrique de  $M$  par rapport au plan  $xOy$  ( Figure I-13).

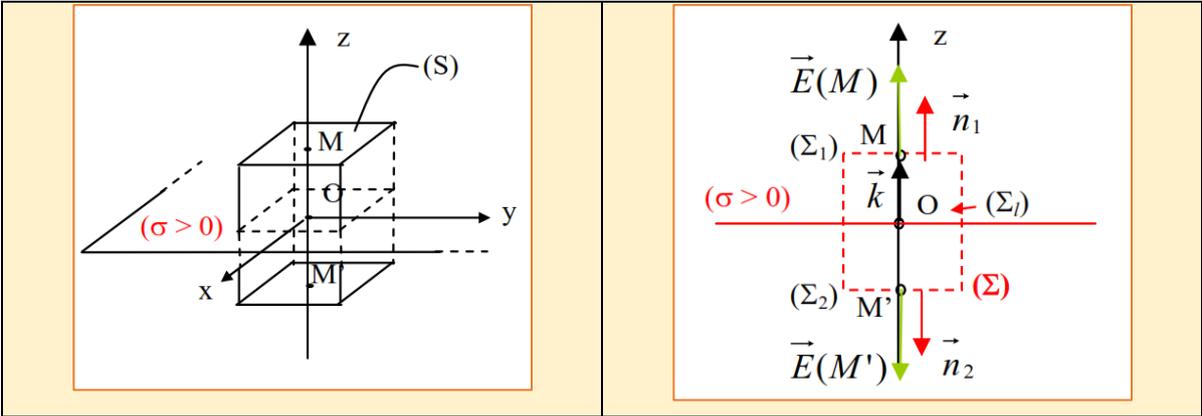


Figure I-13

Le flux de  $\vec{E}$  sortant de la surface latérale  $\Sigma_l$  du cylindre est nul car en tout point de  $\Sigma_l$ , on a :  $\vec{E} \cdot d\vec{\Sigma}_l = 0$ .

Le flux sortant de  $\Sigma$  se réduit au flux sortant de  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  :

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \iint_{\Sigma_1} \vec{E}(M) \cdot d\vec{\Sigma}_1 + \iint_{\Sigma_2} \vec{E}(M') \cdot d\vec{\Sigma}_2$$

$$\Phi = E(z)(\vec{k} \cdot \vec{n}_1) \iint_{\Sigma_1} d\vec{S}_1 + E(-z)(\vec{k} \cdot \vec{n}_2) \iint_{\Sigma_2} d\vec{S}_2$$

Avec  $(\vec{k} \cdot \vec{n}_1) = 1$ ;  $(\vec{k} \cdot \vec{n}_2) = -1$  et  $\iint_{\Sigma_1} d\vec{S}_1 = \iint_{\Sigma_2} d\vec{S}_2 = S$

$$\phi = [E(z) - E(-z)]S \text{ avec } E(-z) = -E(z)$$

$$\phi = 2E(z)S$$

La charge à l'intérieur de la surface de GAUSS est :

$$Q_{int} = \iint_{\sigma} \sigma d\vec{S} = \sigma S$$

Or, d'après le *théorème de GAUSS*, on a :

$$2E(z)S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

D'où le champ  $\vec{E}$

- Pour  $z > 0$  :  $\vec{E} = +\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{k}$
- Pour  $z < 0$  :  $\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{k}$

Ces deux résultats peuvent être condensés sous la forme :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|} \vec{k} (z \neq 0)$$

📌 Ce résultat peut être retrouvé en choisissant comme surface de GAUSS  $\Sigma$  la surface fermée formée par le **cylindre droit**, dont les génératrices sont normales au plan chargé, fermé par **deux sections droites d'aire S**, passant par  $M(x, y, z)$  et  $M'(x, y, -z)$ .

📌 Le champ  $\vec{E}$  change de sens à la traversée de la nappe chargée et subit une **décontinuité** égale à  $\sigma/\epsilon_0$  (Figure I-14).

📌 En réalité, il n'existe pas de distribution plane de dimensions **infinies**. Cependant, la distribution plane est considérée comme infinie si on ne considère que des points placés **loin des bords** de la distribution, c'est-à-dire des points dont la distance à la surface chargée est **petite par rapport aux dimensions de celle-ci**.

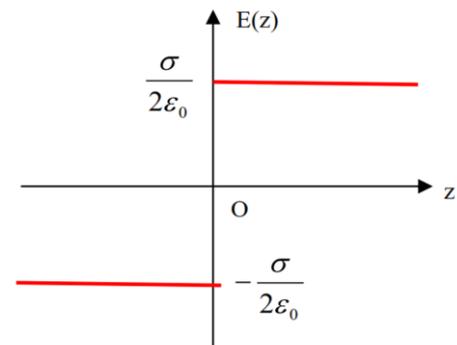


Figure I-14

c) Calcul du potentiel électrostatique  $V(M)$

En choisissant l'origine des potentiels dans le plan  $xOy$  :

$$V(z = 0) = 0$$

$$V(z) = \int_0^z dV = - \int_0^z \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \text{ avec } d\vec{\ell} = dz\vec{k}$$

• Pour  $z > 0$  :  $V(z) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \int_0^z dz = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} z$

• Pour  $z < 0$  :  $V(z) = +\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \int_0^z dz = +\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} z$

Soit

$$V(z) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} |z|$$

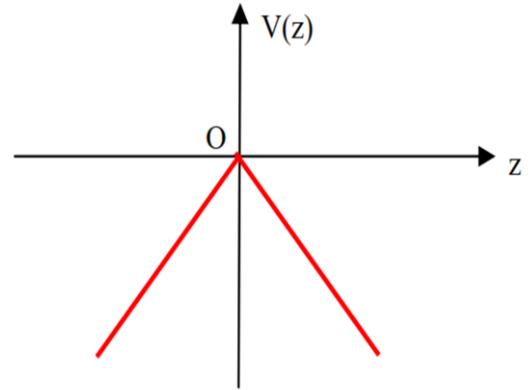


Figure I-15

➡ A la traversé du plan chargé, le potentiel y est **continu** (figure I-15).

## 2- *Cylindre chargé uniformément en surface*

### 2-1 *Enoncé*

Soit un cylindre (C) d'axe  $\vec{z}'z'$ , de rayon R, de longueur infinie, uniformément chargé avec une densité surfacique de charge  $\sigma > 0$ . Calculer le champ électrostatique puis le potentiel en tout point de l'espace.

### 2-2 *Solution*

a) Variable dont dépend  $\vec{E}$  et sa direction

■ Le cylindre chargé a un axe de révolution  $Oz$  ( figure I-16). Le système de coordonnées le plus adapté est le système cylindrique de base  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  . Cette distribution de charge est invariante par translation suivant  $Oz$  et par rotation d'angle  $\theta$  autour de  $Oz$ .

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(r, \theta, z) = \vec{E}(r)$$

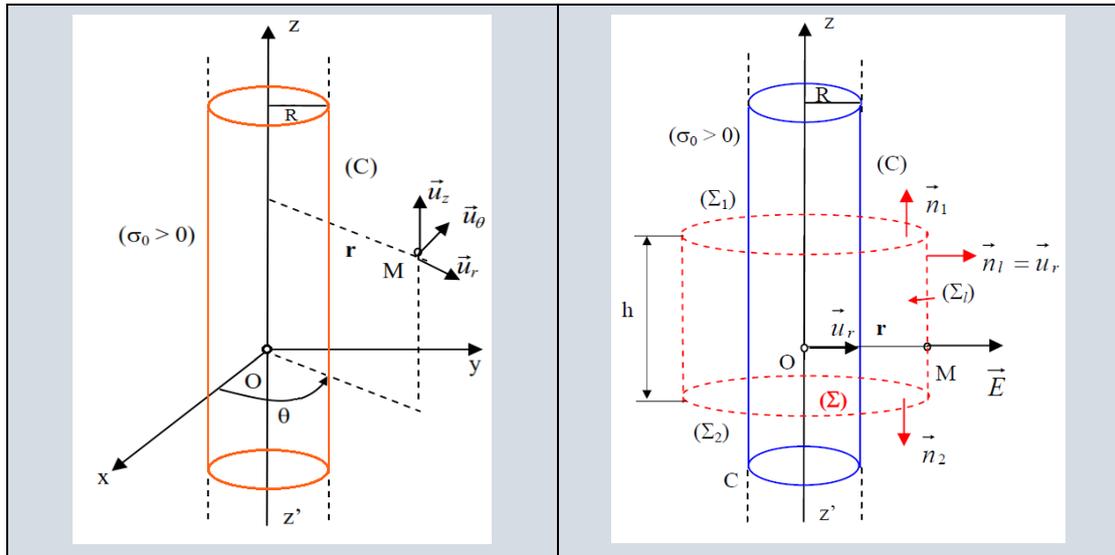
■ Le plan  $\Pi_1 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$  passant par M et l'axe ( $Oz$ ) est plan de symétrie pair.

$\vec{E} \in \Pi_1$ , ainsi  $\vec{E} = \vec{E}_r + \vec{E}_z$ .

■ Le plan  $\Pi_2 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  passant par M et perpendiculaire à l'axe ( $Oz$ ) est plan de symétrie pair.  $\vec{E} \in \Pi_1 \cap \Pi_2$  , ainsi on aura un champ radial de la forme  $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$ .

Aussi, le système possède une symétrie de **révolution** par rapport à l'axe  $\vec{z}'z'$ , et de **translation** parallèlement à cet axe : le champ  $\vec{E}$  en un point M situé à la distance r de l'axe est donc de la forme :

$$\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$$



b) Calcul du champ électrostatique  $\vec{E}(M)$

La surface fermée  $\Sigma$  que nous choisissons pour calculer le flux de  $\vec{E}$  est une surface de même type que la surface chargée constitué d'un cylindre d'axe  $z'z$ , de rayon  $r$ , de hauteur  $h$  ( figure I-16).

Le flux de  $\vec{E}$  à travers de GAUSS s'écrit :

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} \text{ avec, } d\vec{\Sigma}_{\ell} = rd\theta dz \vec{u}_r \text{ et } d\vec{\Sigma}_1 = d\vec{\Sigma}_2 = r dr d\theta \vec{k}$$

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \iint_{\Sigma_1} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma}_1 + \iint_{\Sigma_2} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma}_2 + \iint_{\Sigma_{\ell}} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma}_{\ell}$$

Le flux de  $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$ , à travers les surfaces **planes**  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  étant nul ( en tout point de ces surfaces, on a  $\vec{E}(r) \perp \vec{n}_1$  et  $\vec{E}(r) \perp \vec{n}_2$ ). Le flux sortant  $\Sigma$  se réduit à :

$$\Phi = \iint_{\Sigma_{\ell}} (E(r)\vec{u}_r) \cdot d\vec{\Sigma}_{\ell} \text{ avec } d\vec{\Sigma}_{\ell} = rd\theta dz \vec{u}_r$$

Avec,  $\Sigma_{\ell}$  : surface latérale de  $\Sigma$ .

Puisque  $E(r)$  et  $r$  sont des constantes, on a :

$$\Phi = E(r)r \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = 2\pi r h E(r)$$

Aussi le théorème de GAUSS, s'écrit :

$$\Phi = 2\pi r h E(r) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

☛ Si  $M$  est **extérieur** au cylindre chargé ( $C$ ) :  $r > R$

$$Q_{int} = \iint_S \sigma_0 dS \text{ avec } dS = R d\theta dz$$

Et puisque  $\sigma_0$  est uniforme, on a :

$$Q_{int} = \sigma_0 R \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z dz = 1\pi R h \sigma_0$$

Le théorème de GAUSS s'écrit donc :

$$\phi = 2\pi r h E(r) = \frac{2\pi R h \sigma_0}{\epsilon_0}$$

En simplifiant par  $2\pi h$ , la valeur du champ électrostatique  $E(r)$

$$E(r > R) = \frac{\sigma_0 R}{\epsilon_0} \frac{2}{r}$$

Par raison de symétrie, on sait que  $\vec{E}(M)$  est porté par  $\vec{u}_r$ . On obtient finalement

$$\vec{E}(r > R) = \frac{\sigma_0 R}{\epsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r}$$

☞ Si M est **intérieur** au cylindre chargé (C) :  $r < R$

Dans ce cas, la charge à l'intérieur du cylindre  $\Sigma$  de rayon  $r < R$  étant **nulle**,  $Q_{int} = 0$ .

Il s'ensuit, d'après le théorème de GAUSS, que la norme du champ est nulle,  $E(r) = 0$ .

Ce qui conduit à :  $\vec{E}(r < R) = \vec{0}$ .

Le champ  $\vec{E}$  normal à la surface chargée, subit une discontinuité égale à  $\sigma_0/\epsilon_0$  (figure I-17).

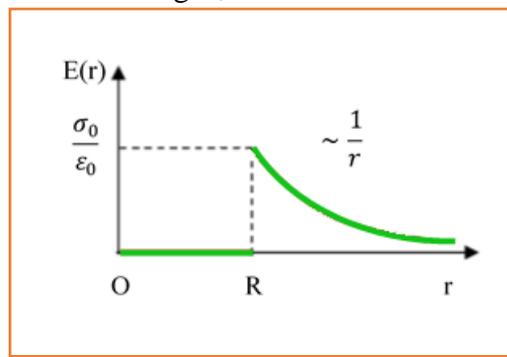


Figure I-17

c) Calcul du potentiel électrostatique V(M)

$$V(r) = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} \text{ avec } d\vec{l} = dr\vec{u}_r$$

$$\text{D'où } V(r) = -\int E(r) dr$$

☞ Si M est à l'**extérieur** du cylindre chargé:  $r \geq R$

$$V(r) = -\frac{\sigma_0 R}{\epsilon_0} \int \frac{dr}{r} = -\frac{\sigma_0 R}{\epsilon_0} \ln r + cste$$

Dans le cas d'une distribution surfacique portée par le cylindre infiniment long, on prendra l'origine des potentiels, à une distance finie  $r_0$  de l'axe du cylindre ( par exemple  $r_0 > R$ ;  $V(r_0) = 0$ ).

$$V(r = r_0) = -\frac{\sigma_0 R}{\epsilon_0} \ln r_0 + cste = 0$$

$$cste = \frac{\sigma_0 R}{\epsilon_0} \ln r_0$$

Ainsi, on aura

$$V(r \geq R) = -\frac{\sigma_0 R}{\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r}$$

☞ Si M est à l'**intérieur** du cylindre chargé:  $r \leq R$

$$V(r \leq R) = cste$$

La constante est déterminée par continuité du potentiel en  $r = R$  :

$$\text{Ainsi, on aura : } V(r \geq R)_{r=R} = V(r \leq R)_{r=R} = \frac{\sigma_0 R}{\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{R}$$

### 3- Sphère chargée uniformément en surface

#### 3-1 Enoncé

Soit une sphère (S) de centre O et de rayon R, chargée uniformément avec une densité surfacique de charge  $\sigma > 0$ . Calculer le champ électrostatique puis le potentiel en tout point de l'espace.

#### 3-2 Solution

a) Variable dont dépend  $\vec{E}$  et sa direction

La sphère chargée est invariante par double rotation, l'une d'angle  $\theta$  autour de  $\vec{u}_z$  et l'autre d'angle  $\varphi$  autour de  $\vec{u}_\varphi$ . On dit que la sphère a le point O : On dit que la sphère a le point O comme centre de symétrie ( figure I-18). Le système de coordonnées le plus adapté est le système sphérique de base  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ .

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(r, \theta, \varphi) = \vec{E}(r)$$

Le plan méridien  $\Pi_1 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  est plan de symétrie pair.  $\vec{E} \in \Pi_1$ , ainsi  $\vec{E} = \vec{E}_r + \vec{E}_\theta$ .

Le plan  $\Pi_2 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$  passant par M et perpendiculaire à l'axe (Oz) est plan de symétrie pair.  $\vec{E} \in \Pi_1 \cap \Pi_2$ , ainsi on aura un champ radial de la forme  $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$  avec  $\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$

Le champ  $\vec{E}$  créé par cette distribution à **symétrie sphérique** en un point M est porté par le vecteur  $\vec{u}_r$  et ne dépend que de la variable d'espace  $r = \|\overrightarrow{OM}\|$ .

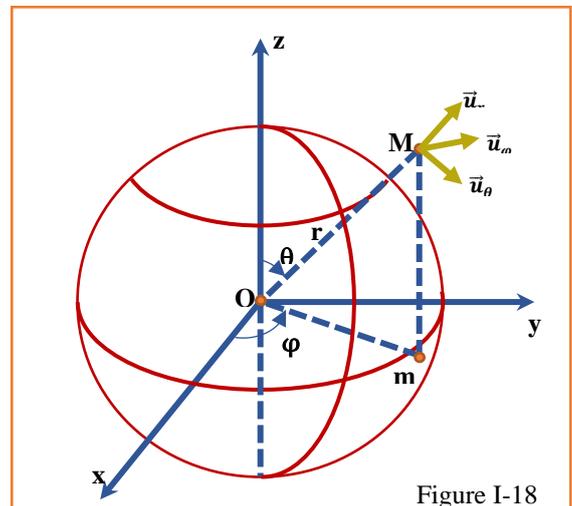


Figure I-18

b) Calcul du champ électrostatique  $\vec{E}(M)$

La surface fermée  $\Sigma$  que nous choisissons pour calculer le flux de  $\vec{E}$  est une sphère de centre O, de rayon r : surface de même type que la surface chargée ( figure I-19).

Le flux de  $\vec{E}$  à travers  $\Sigma$  est donné par:

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} \quad \text{avec,} \quad \vec{E}(M) = E(r) \vec{u}_r \quad \text{et}$$

$$d\vec{\Sigma} = dS \vec{u}_r = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{u}_r$$

Le champ  $\vec{E}$  est en tout point de  $\Sigma$  porté par la normale « sortante »  $\vec{u}_r$  et sa norme est **constante** en tout point de  $\Sigma$ .

$$\begin{aligned} \Phi &= E(r)r^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi E(r)r^2 [-\cos \theta]_0^\pi \\ &= 4\pi r^2 E(r) \end{aligned}$$

Le théorème de GAUSS s'écrit :

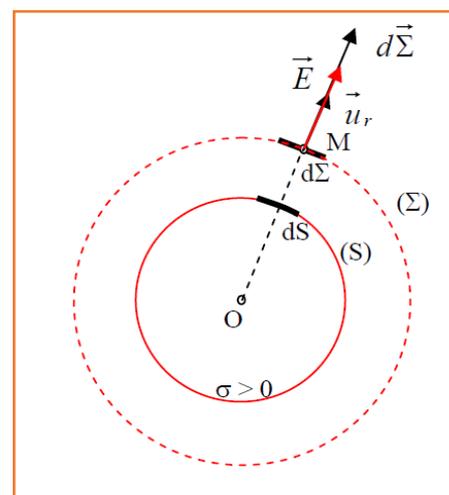


Figure I-19

$$\Phi = 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface de GAUSS  $\Sigma$  dépend de la position de  $M$ . Deux cas peuvent être distingués :  $M$  est extérieur à la sphère chargée ( $S$ ) ou  $M$  est intérieur à ( $S$ ).

📌 Si  $M$  est à l'**extérieur** de la sphère ( $S$ ) :  $r > R$

La charge à l'intérieur de la sphère  $\Sigma$  de rayon  $r > R$  est :

$Q_{int} = \iint_S \sigma dS$  avec  $dS = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$  et puisque  $\sigma$  est uniforme, on a :

$$Q_{int} = \sigma R^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi R^2 \sigma$$

Le théorème de GAUSS s'écrit donc :

$\Phi = 4\pi r^2 E(r) = \frac{4\pi R^2 \sigma}{\epsilon_0}$  et en simplifiant par  $4\pi$ , la norme du champ s'écrit :

$$E(r > R) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}$$

Par raison de symétrie, le champ  $\vec{E}(M)$  est porté par  $\vec{u}_r$  : on obtient finalement :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(r > R) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r^2}$$

Si on pose  $Q_{int} = \iint_S \sigma dS = 4\pi R^2 \sigma$  alors on aura :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(r > R) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

📌 Le champ est **identique** au champ créé en  $M$  par une charge **ponctuelle** égale à la charge totale de la sphère,  $Q$  concentrée en  $O$ .

📌 Si  $M$  est à l'**intérieur** de la sphère ( $S$ ) :  $r < R$

Dans ce cas, la charge à l'intérieur de la sphère de rayon  $r < R$  est nulle :  $Q_{int} = 0$ .

Le théorème de GAUSS conduit à :

$\Phi = 4\pi r^2 E(r) = 0$  et ainsi la norme du champ est nulle.

$E(r < R) = 0$ , ce qui implique que :  $\vec{E}(r < R) = \vec{0}$

Le champ électrostatique  $E(r)$  subit une traversée de la surface chargée une **discontinuité** égale à  $\sigma/\epsilon_0$  ( figure I-20).

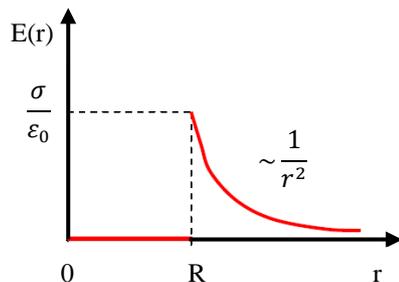


Figure I-20

c) Calcul du potentiel électrostatique V(M)

$$V(r) = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \overline{\text{grad}V(M)} \text{ ce qui donne en projetant sur } \vec{u}_r$$

$$E(r) = \vec{E} \cdot \vec{u}_r = - \frac{dV}{dr}, \text{ d'où } V(M) = - \int E(r) dr$$

📌 Si M est à l'**extérieur** à (S) :  $r \geq R$

$$V(M) = - \int E(r) dr = \frac{\sigma_0 R^2}{\epsilon_0 r} + cste$$

En choisissant l'**origine** des potentiels à l'infini ( $V(r = \infty) = 0$ ), on obtient :

$$V(M) = - \int E(r) dr = \frac{\sigma_0 R^2}{\epsilon_0 r} + cste$$

Ainsi, on aura

$$V(M) = V(r \geq R) = \frac{\sigma_0 R^2}{\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

📌 Le champ est **identique** au champ créé en M par une charge **ponctuelle** égale à la charge totale de la sphère,  $Q$  concentrée en  $O$

📌 Si M est à l'**intérieur** à (S) :  $r \leq R$

Le champ est en tout point **intérieur** à S est **nul** : Le potentiel est donc  $V(r \leq R) = cste$ .

Pour déterminer la constante, nous pouvons utiliser la **continuité** du potentiel pour ( $r = R$ ).

$$V(r \leq R)_{r=R} = V(r \geq R)_{r=R} = \frac{\sigma_0 R}{\epsilon_0}$$

Nous pouvons trouver cette **constante** en écrivant :

$V(r \leq R) = V(r = 0)$ , avec  $V(r = 0)$  est le potentiel au centre  $O$  de la sphère  $S$  obtenu à partir d'un calcul direct suivant la relation :

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} \text{ avec, } r = \|\vec{PM}\| = R$$

$$\text{Et } V(r \leq R) = V(r = 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma dS}{R} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0 R} \iint_S dS = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}$$

Alors le champ est discontinu à la traversée de la charge ( figure I-20), le potentiel électrostatique est **continu** ( figure I-21).

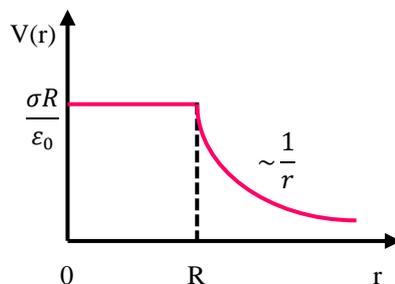


Figure I-21

#### 4- Sphère chargée uniformément en volume

##### 4-1 Enoncé

Soit une sphère (S) de centre O et de rayon R, chargée en surface de densité volumique  $\rho$  uniforme. Calculer le champ électrostatique puis le potentiel en tout point de l'espace.

##### 4-2 Solution

a) Variable dont dépend  $\vec{E}$  et sa direction

Les mêmes considérations de symétrie évoquées précédemment suggèrent que :

$$\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$$

b) Calcul du champ électrostatique  $\vec{E}(M)$

Pour une sphère fermée  $\Sigma$  de centre O et de rayon r, le flux sortant est :

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} \text{ avec, } d\vec{\Sigma} = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{u}_r$$

Le champ  $\vec{E}$  est en tout point de  $\Sigma$  porté par la normale « sortante »  $\vec{u}_r$  et sa norme est **constante** en tout point de  $\Sigma$ .

$$\Phi = E(r)r^1 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 1\pi E(r)r^1 [-\cos \theta]_0^\pi = 4\pi r^2 E(r)$$

Le théorème de GAUSS s'écrit :

$$\Phi = 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

📌 Si M est à l'**extérieur** de la sphère (S) :  $r > R$

La charge volumique à l'intérieur de la sphère de rayon  $r \geq R$  est donnée par :

$$Q_{int} = \iiint_{\tau} \rho d\tau \text{ avec } d\tau = R^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$Q_{int} = \rho R^2 \int_0^r dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$$

Le théorème de GAUSS s'écrit donc :

$$\Phi = 4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \text{ et en simplifiant par } 4\pi, \text{ la norme du champ s'écrit}$$

$$E(r) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}$$

Par raison de symétrie, le champ  $\vec{E}(M)$  est porté par  $\vec{u}_r$  : on obtient finalement :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(r \geq R) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r^2}$$

📌 Le champ est **identique** au champ créé en M par une charge **ponctuelle** égale à la charge totale de la sphère, Q concentrée en O.

📌 Si M est à l'**intérieur** à (S) :  $r \leq R$

La charge volumique à l'intérieur de la sphère de rayon  $r \geq R$  est donnée par :

$$Q_{int} = \iiint_{\tau} \rho \, d\tau \text{ avec } d\tau = r^2 \, dr \, \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$Q_{int} = \rho \int_0^r r^1 \, dr \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$$

Le théorème de GAUSS s'écrit donc :

$$\Phi = 4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi r^3 \rho \text{ et en simplifiant par } 4\pi r^2, \text{ la norme du champ s'écrit}$$

$$E(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r$$

Par raison de symétrie, le champ  $\vec{E}(M)$  est porté par  $\vec{u}_r$  : on obtient finalement :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(r \leq R) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{u}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r\vec{u}_r}{R^3}$$

On peut remarquer que pour ( $r \geq R$ ), le champ est le même que si la charge  $Q_{int} = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$  était concentrée au centre de la sphère O ( figure I-22)

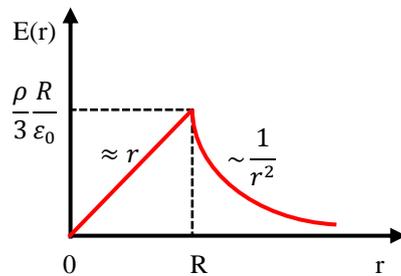


Figure I-22

### c) Calcul du potentiel électrostatique V(M)

$$V(r) = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \overline{grad} V(M) \text{ ce qui donne en projetant sur } \vec{u}_r$$

$$E(r) = \vec{E} \cdot \vec{u}_r = - \frac{dV}{dr}, \text{ d'où } V(M) = - \int E(r) \, dr$$

📌 Si M est à l'**extérieur** à (S) :  $r \geq R$

$$V(M) = V(r \geq R) = - \int E(r) \, dr = - \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \int_0^r - \frac{1}{r^2} \vec{u}_r \, dr \vec{u}_r = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r}$$

📌 Si M est à l'**intérieur** à (S) :  $r \leq R$

$$V(M) = V(r \leq R) = - \int E(r) \, dr = - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \int_0^r r \vec{u}_r \, dr \vec{u}_r = - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{r^2}{2} + cste$$

Pour déterminer la constante, nous pouvons utiliser la **continuité** du potentiel pour ( $r = R$ ).

$$V(r \leq R)_{r=R} = V(r \geq R)_{r=R} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} R^2 = - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^2}{2} + cste$$

Ce qui donne :

$$cste = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left( R^2 + \frac{R^2}{2} \right) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} R^2 \text{ d'où}$$

$$V(M) = V(r \leq R) = - \frac{\rho}{6\epsilon_0} r^2 + \frac{\rho}{1\epsilon_0} R^2 = \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2)$$

Ainsi pour  $r \geq R$ , le champ et le potentiel sont les mêmes que si toute la charge  $Q$  était concentrée en O ( figure I-23)

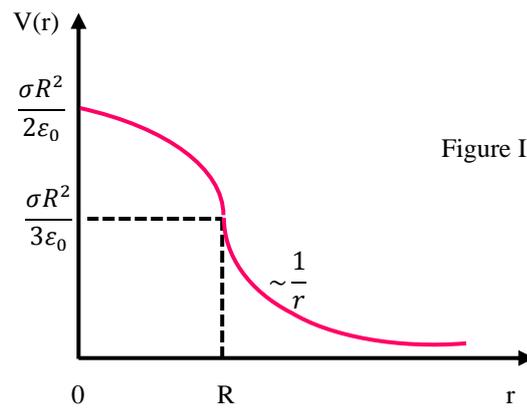


Figure I-23

## CHAPITRE 2

### ELECTROKINÉTIQUE

#### 2.1 Densité de courant

Considérons une distribution de porteurs de charge dans laquelle chaque porteur  $p_i$  a une masse  $m$ , et une vitesse  $v_i$  par rapport au référentiel du laboratoire  $\mathcal{R}$ . Admettons que ces porteurs soient ponctuels, ce qui revient à négliger leurs structures internes.

En chaque point  $P$  de la distribution, la charge volumique macroscopique  $\rho$  est définie par:

$$\rho = \frac{1}{\Delta \mathcal{V}} \sum_{i=1}^{\Delta N} q_i$$

où la sommation est effectuée sur les  $\Delta N$  charges contenues dans un élément de volume  $\Delta \mathcal{V}$  entourant  $P$ ; les dimensions de cet élément sont grandes devant les distances interatomiques, mais faibles devant la distance d'observation (Fig. II.1).

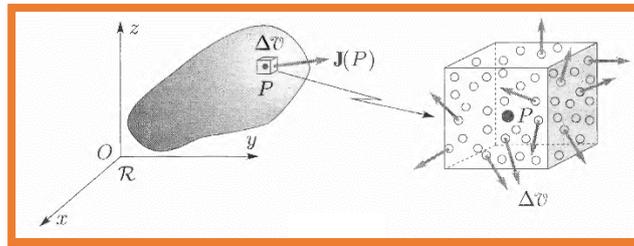


Figure II-1

Les différents porteurs de charge peuvent être répartis en plusieurs groupes (électrons, protons, anions ou cations particuliers) caractérisés par une même valeur  $q_0$ : de la charge. La charge volumiques  $\rho_\alpha$ : associée à un type déterminé de particules s'écrit alors :

$$\rho_\alpha = \frac{1}{\Delta \mathcal{V}} \Delta N_\alpha q_\alpha = n_\alpha q_\alpha$$

$\Delta N_\alpha$ : étant le nombre de porteurs  $\alpha$  contenus dans l'élément  $\Delta \mathcal{V}$  et  $n_\alpha = \Delta N_\alpha / \Delta \mathcal{V}$  leur densité volumique. La charge volumique totale  $\rho$  est donc la somme des charges volumiques partielles  $\rho_\alpha$ :

$$\rho = \frac{1}{\Delta \mathcal{V}} \sum_{\alpha} q_\alpha \Delta N_\alpha = \sum_{\alpha} q_\alpha \frac{\Delta N_\alpha}{\Delta \mathcal{V}} = \sum_{\alpha} q_\alpha n_\alpha = \sum_{\alpha} \rho_\alpha \quad \text{avec} \quad \rho_\alpha = n_\alpha q_\alpha$$

Remarquons que, dans un milieu neutre ( $\rho = 0$ ), les densités volumiques de charges  $\rho_\alpha$ : de signes opposés, peuvent atteindre des valeurs très élevées.

#### 2.2 - Courant volumique

On caractérise le transport de matière associé à une particule de masse  $m_i$  animée d'une vitesse  $v_i$  par sa quantité de mouvement  $m_i v_i$ . De même, on caractérise le transport de charge en

introduisant la quantité  $q_i v_i$ : Il est alors naturel de définir, en chaque point P de la distribution, le vecteur courant volumique  $\mathbf{J}$  par:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\Delta \mathcal{V}} \sum_{i=1}^{\Delta N} q_i \mathbf{v}_i$$

Le calcul de  $\mathbf{J}$  s'effectue en plusieurs étapes. D'abord, on sépare les divers types  $\alpha$  de porteurs :

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\Delta \mathcal{V}} \sum_{\alpha} q_{\alpha} \sum_{j=1}^{\Delta N_{\alpha}} \mathbf{v}_{\alpha,j}$$

On définit ensuite la vitesse moyenne, appelée aussi vitesse de dérive de l'ensemble des porteurs, par:

$$\mathbf{v}_{\alpha} = \frac{1}{\Delta N_{\alpha}} \sum_{j=1}^{\Delta N_{\alpha}} \mathbf{v}_{\alpha,j}$$

Il en résulte que  $\vec{\mathbf{J}}$  peut se mettre sous la forme:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\Delta \mathcal{V}} \sum_{\alpha} \Delta N_{\alpha} q_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \mathbf{J}_{\alpha}$$

Avec  $\mathbf{J}_{\alpha} = n_{\alpha} q_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} = \rho_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}$

Le vecteur courant volumique total apparaît ainsi comme la somme vectorielle des courants volumiques partiels. Notons que, parmi les différents types de porteurs  $\alpha$ , seuls participent au courant électrique ceux dont la vitesse de dérive  $v_{\alpha}$ : n'est pas nulle, alors que tous contribuent à la charge volumique.

### 2.3 - Intensité du courant électrique

Dans les matériaux conducteurs, on distingue habituellement deux catégories de charge. Les unes fixes ou liées, dont l'amplitude des déplacements reste microscopique, ne participent pas au courant volumique macroscopique en régime stationnaire. Les autres, mobiles ou libres, peuvent se déplacer dans l'ensemble du matériau ; aussi sont-elles seules à contribuer au courant macroscopique.

Ainsi, dans le cuivre, en moyenne, un électron par atome se déplace librement dans le réseau des ions  $\text{Cu}^+$  fixes.

Si  $\rho$ ,  $\rho_f$  et  $\rho_m$  représentent respectivement les charges volumiques totale, fixe et mobile, on a évidemment :

$$\rho = \rho_f + \rho_m$$

Notons que les lois de l'électrostatique, théorème de Gauss par exemple, font intervenir la charge volumiques totale  $\rho$ , alors que les lois qui régissent le mouvement macroscopique des charges ne font intervenir que  $\rho_m$ . Dans un milieu neutre ( $\rho = 0$ ) , la densité des charges mobiles, souvent très importante, est compensée en tout point par celle des charges fixes ( $\rho_f = -\rho_m$ ) .

Lorsqu'il n'existe qu'un seul type de charges mobiles de densité  $\rho_m$  et de vitesse de dérive moyenne  $\mathbf{v}$ , le vecteur courant volumique s'écrit simplement :

$$\mathbf{J} = \rho_m \mathbf{v}$$

L'intensité du courant électrique qui traverse une surface orientée  $S$  est définie par le flux du vecteur  $\mathbf{J}$ , à travers cette surface :

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

Pour un élément de surface  $dS$  autour d'un point  $P$  dans un milieu matériel, le courant élémentaire correspondant à pour expression :

$$dI = \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, dS = \rho_m \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

si la distribution ne contient qu'un type de charge mobile. Ainsi, l'intensité d'un courant est une grandeur algébrique : elle est positive si le sens positif arbitrairement choisi pour  $\mathbf{n}$  coïncide avec le sens de déplacement des charges positives ; sinon elle est négative :

pour  $\rho_m > 0$   $dI = \rho_m \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS > 0$  si  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} > 0$

L'unité SI d'intensité est l'ampère (A), du nom du physicien français A.M. Ampère. La définition de cette unité s'appuie sur l'interaction entre deux courants rectilignes, distants de 1 m.

Le courant volumique s'exprime donc en  $A \cdot m^{-1}$ . La norme de  $\mathbf{J}$  représente le courant qui traverse l'unité de surface perpendiculaire à  $\mathbf{J}$  (Fig. II.1) :

$$J = \|\mathbf{J}\| = \frac{dI}{d\Sigma} \quad \text{avec} \quad d\Sigma = dS \cos \theta \quad \text{et} \quad \theta = (\mathbf{n}, \mathbf{J})$$

L'intensité  $dI$ , qui traverse l'élément de surface  $dS$ , est donc:

$$dI = \rho_m v \, dS \cos \theta$$

Dans cette expression,  $\rho_m v \, dS \cos \theta dt$  est la charge mobile  $\delta q_m$  contenue dans un cylindre d'axe parallèle à  $\mathbf{v}$ , s'appuyant sur l'élément de surface  $dS$  et de longueur  $v dt$ . L'intensité  $dI$  représente donc la charge  $\delta q_m$  : qui traverse  $dS$  pendant l'unité de temps:  $dI = \delta q_m / dt$

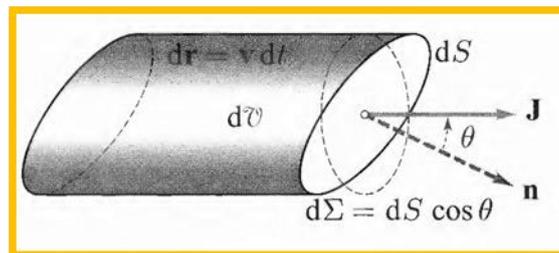


Figure II-2

Pour une surface quelconque  $S$ , l'intensité  $I$  représente la charge mobile totale  $\delta q_m$  qui traverse cette surface, dans le sens défini par la normale  $\mathbf{n}$ , pendant l'unité de durée:

## 2.4 Équation locale du bilan de charge

En tenant compte de l'expression de la charge totale contenue dans le volume  $V$ , l'équation précédente s'écrit:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \, d\mathcal{V} = - \oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, dS = - \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{J} \, d\mathcal{V}$$

en utilisant la formule d' Ostrogradsky.

Comme, en général, la densité volumique de charge  $\rho$  dépend à la fois du temps et de la position,  $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$ , et que la surface  $S$  est fixe, on a :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\mathcal{V} \quad \text{d'où} \quad \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\mathcal{V} = - \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{J} \, d\mathcal{V}$$

Cette relation étant vraie quel que soit  $\mathcal{V}$ , on en déduit l'équation locale traduisant le caractère conservatif de la charge électrique; appelée aussi équation de continuité relative à la charge:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{J}$$

## 2.5 Loi d'Ohm

La loi d'Ohm, établie par le physicien allemand G. Ohm en 1816, est une relation liant les courants qui apparaissent dans un conducteur aux causes qui les produisent. Une telle loi ne présente pas le caractère universel des lois de l'électromagnétisme. On dit que c'est une loi constitutive ou une relation de milieu.

### 2.5.1 - Loi d'Ohm locale. Conductivité

L'apparition d'un courant électrique dans un milieu conducteur traduit la rupture d'un équilibre. Expérimentalement, on constate qu'un courant circule dans un conducteur s'il existe un gradient de température, de potentiel électrique ou de concentration de porteurs. Nous ne considérons que le cas d'un courant provoqué par un gradient de potentiel, c'est-à-dire par un champ macroscopique  $\vec{E}$ , la concentration des porteurs et la température étant supposées uniformes.

Le lien entre le vecteur courant volumique  $\vec{J}$  et le champ  $\vec{E}$  dépend du milieu considéré et de la valeur de  $\vec{E}$ . L'expérience montre que, si l'écart par rapport à la situation d'équilibre est assez faible, ce qui est réalisé si  $\vec{E}$  n'est pas trop grand, le vecteur  $\vec{J}$  est, en première approximation, proportionnel au champ  $\vec{E}$  qui lui a donné naissance :

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

où le coefficient  $\sigma$ , qui ne dépend pas de  $\vec{E}$ , s'appelle la conductivité du milieu. Cette relation linéaire est connue sous le nom de loi d'Ohm locale. Lorsqu'elle est vérifiée expérimentalement, le milieu est dit linéaire. Si le milieu est homogène,  $\sigma$  est en outre uniforme. Dans la plupart des matériaux,  $\vec{J}$  est parallèle à  $\vec{E}$  : le milieu est isotrope, sa conductivité est représentée par un scalaire réel positif. L'unité légale de conductivité est le siemens par mètre ( $S \cdot m^{-1}$ ), du nom de l'ingénieur allemand

W. Siemens. On introduit parfois l'inverse de la conductivité,  $1/\gamma$ , ou résistivité, noté souvent  $\rho$ , à ne pas confondre avec la charge volumique ou la masse volumique.

## Exercices résolus

### 🔧 Exercice.1 :

Un conducteur de cuivre a un diamètre de 2,05mm. Une longueur de 15 m est parcourue par un courant d'intensité 20 A. Trouver l'intensité du champ électrique  $\vec{E}$ , la vitesse d'entraînement U des charges, la chute de tension et la résistance d'une longueur de 15 m.

### 🔧 Exercice.2 :

On se place dans un conducteur de conductivité  $\gamma$ .

- 1- Rappeler la loi d'Ohm locale et l'équation de conservation de la charge.
- 2- En déduire l'équation aux dérivées partielles satisfaite par la densité volumique de charges  $\rho$  présente dans le conducteur.
- 3- Résoudre cette équation différentielle, en appelant  $\rho_o(M)$  la valeur de  $\rho$  en tout point M à l'origine des temps  $t = 0$ .
- 4- Pour un point M quelconque de l'espace, tracer l'allure de la courbe  $\rho(t)$ , décrire le phénomène qui a lieu et en donner une durée caractéristique  $\tau$ .
- 5- Application numérique pour un bon conducteur :  $\gamma = 10^6 SI$ ,  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} SI$ .  
Calculer  $\tau$ . En déduire qu'un bon conducteur ne peut être chargé que sur sa surface.

## Solutions

### 🔧 Exercice.1:

La surface de la section droite est :

$$A = \pi \left( \frac{2,05 \times 10^{-3} \text{m}}{2} \right)^2 = 3,30 \times 10^{-6} \text{m}^2$$

On en déduit  $J = \frac{I}{A} = \frac{20}{3,30 \times 10^{-6}} = 6,06 \times 10^6 \text{ A/m}^2$

La conductivité du cuivre est  $\sigma = 5,8 \times 10^7 \text{ S/m}$ . Donc

$$E = \frac{J}{\sigma} = \frac{6,06 \times 10^6}{5,8 \times 10^7} = 1,04 \times 10^{-1} \text{ V/m}$$

$$V = El = (1,04 \times 10^{-1})(15) = 1,56 \text{ V}$$

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1,56}{20} = 7,80 \times 10^{-2} \Omega$$

La mobilité des électrons dans le cuivre est  $\mu = 0,0032 \text{ m}^2/\text{V} \cdot \text{S}$  et puisque  $\sigma = \rho\mu$ , la densité de charge est

$$\rho = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{5,8 \times 10^7}{0,0032} = 1,81 \times 10^{10} \text{ C/m}^1$$

A partir de  $J = \rho U$ , on trouve que la vitesse d'entraînement des charges

$$U = \frac{J}{\rho} = \frac{6,06 \times 10^6}{1,81 \times 10^{10}} = 3,35 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

### ■ Exercice.2:

1- La loi d'Ohm locale s'écrit :

$$\vec{j}(M, t) = \gamma \vec{E}(M, t),$$

Où  $\vec{j}(M, t)$  représente la densité de courant volumique qui traverse le conducteur en un point M à l'instant  $t$  et  $\vec{E}(M, t)$  le champ électrique au point M à l'instant  $t$ .

L'équation de conservation de la charge s'écrit :

$$\text{div } \vec{j}(M, t) + \frac{\partial \rho}{\partial t}(M, t) = 0,$$

Où  $\rho(M, t)$  représente la densité volumique de charges présentes au point M à l'instant  $t$ .

2- On peut écrire une relation entre le champ électrique et la densité volumique de charge :

$$\gamma \text{div } \vec{E}(M, t) + \frac{\partial \rho}{\partial t}(M, t) = 0,$$

Il faut alors trouver une relation entre le champ électrique  $\vec{E}(M, t)$  et la densité volumique de charge. Il s'agit de l'équation de Maxwell-Gauss qui permet d'écrire :  $\text{div } \vec{E}(M, t) = \frac{\rho(M, t)}{\epsilon_0}$ ,

On en déduit :  $\frac{\gamma}{\epsilon_0} \rho(M, t) + \frac{\partial \rho}{\partial t}(M, t) = 0$ .

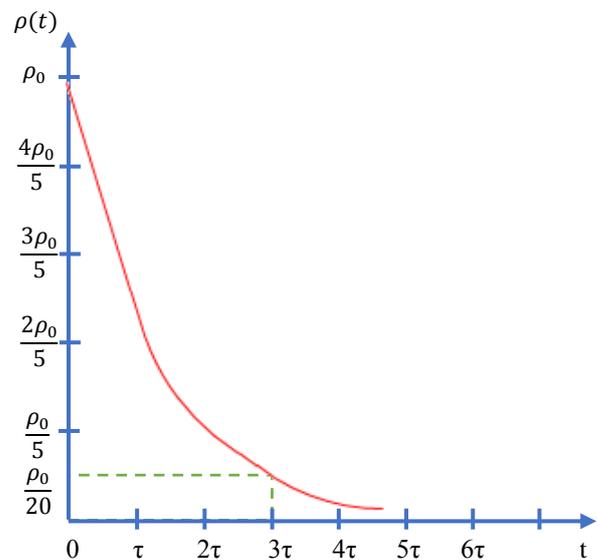
3. On retrouve là une question différentielle du premier degré qui se résout sous la forme :

$$\rho(M, t) = \rho_0(M) e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ avec } \tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma}.$$

4. La courbe représentant l'évolution de la densité  $\rho$  volumique de charges a une forme exponentielle décroissante. L'étude de la fonction exponentielle décroissante nous permet de dire qu'au bout d'un temps

$t = 3\tau$  on a  $\rho(M, t) = 0,05\rho_0$  et au bout d'un temps  $t = 5\tau$ ,  $\rho(M, t) \leq 0,01\rho_0$

5. Application numérique :  $\tau = 8,85 \cdot 10^{-18} \text{ s}$



# CHAPITRE 3

## MAGNÉTOSTATIQUE

### 3.1 Champ D'induction Magnétique D'un Courant Stationnaire.

La présence, au niveau d'un point P, point moyen d'un volume élémentaire  $d\tau_P$ , d'un courant stationnaire de densité  $\vec{j}(P)$ , entraîne l'apparition au point d'observation M d'un champ d'induction magnétique élémentaire :

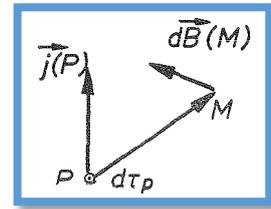


Figure III.1

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{j}(P) \wedge \overline{PM}}{PM^3} \cdot d\tau_P \quad (3.1)$$

( Ici les longueurs sont en mètres,  $j$  en Ampère/mètre carré; la constante  $\mu_0$ , perméabilité magnétique du vide, vaut

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$$

ce qui définit l'unité d'induction magnétique : le Tesla.)

On admet (ce que suggère l'expérience) qu'il y a superposition des champs magnétiques créés par des éléments de courants distincts. S'il y a des courants stationnaires, définis par le champ de vecteur  $\vec{j}(P)$  à l'intérieur d'un volume  $\Omega$ , l'induction magnétique totale qu'ils créent en M sera donc :

$$\vec{B}(M) = \iiint_{\Omega} \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{j}(P) \wedge \overline{PM}}{PM^3} \cdot d\tau_P \quad (3.2)$$

Un cas particulier important est celui où les courants sont confinés à des circuits filiformes de dimensions transverses négligeables (négligeables devant les dimensions longitudinales des circuits, ou les distances point du circuit-point d'observation). La répartition du courant sur une section d'un de ces circuits perd son intérêt : seule subsiste la notion d'intensité  $I$  parcourant le circuit.

Le volume élémentaire  $d\tau_P$  de (3-2) est en fait un petit cylindre de longueur  $dl$ , taillé dans le circuit, et entourant le point P. Si  $s$  est l'aire d'une section droite du fil, on a :  $d\tau_P = dl \cdot s$ .

Le vecteur  $\vec{j}(P)$  est nécessairement longitudinal au fil : les charges mobiles suivent le circuit. Ce vecteur est donc perpendiculaire à la section droite  $s$ . Son flux à travers  $s$  est simplement  $j(P) \cdot s$ , et c'est l'intensité  $I$  dans le fil.

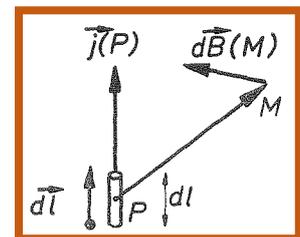


Figure III.2

On voit ainsi que le module du vecteur  $\vec{j} \cdot d\tau$  qui intervient dans (3-1) peut se transformer en :

$$j \cdot d\tau = j \cdot s \cdot dl = I \cdot dl$$

Si au segment  $dl$ , nous associons un vecteur  $\vec{dl}$  élémentaire de longueur  $dl$ , orienté dans le sens de  $\vec{j}$ ,

nous aurons, vectoriellement cette fois-ci :

$$I. d\vec{l} = \vec{j}. d\tau$$

(3.1) se transforme alors en :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I. d\vec{l} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} \quad (3.3)$$

et (3.1) en

$$\vec{B}(M) = \sum_i \oint_{C_i} \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I_i. d\vec{l}_i \wedge \overrightarrow{P_iM}}{P_iM^3} \quad (3.4)$$

où  $C_i$  représente le  $i^{\text{ème}}$  circuit, de point courant  $P_i$ , parcouru par l'intensité  $I_i$  (Remarquons qu'un circuit, en régime stationnaire est nécessairement fermé, d'où la notation de l'intégrale curviligne :  $\oint_{C_i}$ ). (3.3) et (3.4) constituent la loi de Biot et Savart. Nous étendrons cette dénomination aux relations plus générales (3.1) et (3-2). L'induction magnétique étant définie, nous entreprenons le calcul de sa divergence, et de son rotationnel.

### 3.2. Calcul De Div $\vec{B}$ : Potentiel Vecteur.

Calculons directement la divergence du champ élémentaire (3.1) dans un système d'axes centré en P, l'axe Oz étant colinéaire à  $\vec{j}$ ; x, y et z sont les coordonnées de M;  $r = PM$ . Il vient :

$$\begin{aligned} dB_x &= \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot j d\tau\right) \cdot \left(-\frac{y}{r^3}\right) \\ dB_y &= \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot j d\tau\right) \cdot \left(\frac{x}{r^3}\right) \\ dB_z &= 0 \end{aligned}$$

Et

$$\text{div } \vec{dB} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot j d\tau\right) \left[ \left(-y \left(-\frac{3}{r^4}\right) \cdot \left(\frac{x}{r}\right) + (+x) \cdot \left(-\frac{3}{r^4}\right) \cdot \left(\frac{y}{r}\right) \right) \right]$$

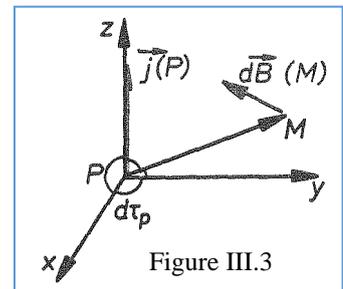


Figure III.3

Pour  $r \neq 0$ , on a donc  $\text{div}(\vec{dB}) = 0$ . N'y a-t-il pas une singularité à l'origine (comme pour le champ électrique d'une charge ponctuelle), avec une  $\text{div}(\vec{dB})$  finalement proportionnelle à  $\delta_p(M)$ ?

Dans ce cas, l'intégrale triple de  $\text{div}(\vec{dB})$  sur un volume limité par une surface fermée S entourant P serait non nulle : or cette intégrale est égale au flux de  $\vec{dB}$  à travers S. Prenons pour S une sphère de centre P;  $\vec{dB}$  est tangent à la sphère en tout point de sa surface et son flux à travers elle est nul. Nous ne rencontrerons pas ici les anomalies vues pour le champ coulombien ; on a partout :  $\text{div}(\vec{dB}) = 0$ , et de même, pour l'induction magnétique totale :

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = 0} \quad (3.5)$$

Ainsi apparaît une propriété fondamentale : l'induction magnétique en régime stationnaire est à flux conservatif.

On sait alors qu'il existe, pour le champ  $\vec{B}$ , des potentiels vecteurs  $\vec{A}$  dont il dérive, c'est-à-dire qui satisfont :

$$\boxed{\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}} \quad (3.6)$$

C'est ainsi que le  $\vec{dB}$  de (3.1) dérive du potentiel vecteur

Dans le système d'axes utilisé plus haut,  $\vec{dA}$  n'a de composante non nulle que  $dA_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot j \cdot dr \cdot \left(\frac{1}{r}\right)$ . Il vient

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_x(\vec{dA}) &= \frac{\partial A_z}{\partial y} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot j \cdot d\tau\right) \cdot \left(-\frac{1}{r^2} \cdot \frac{y}{r}\right) = dB_x \\ \operatorname{rot}_y(\vec{dA}) &= \frac{\partial A_z}{\partial x} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot j \cdot d\tau\right) \cdot \left(\frac{1}{r^2} \cdot \frac{y}{r}\right) = dB_y \\ \operatorname{rot}_z(\vec{dA}) &= 0 = dB_z \end{aligned}$$

En sommant sur tous les points sources, nous obtenons un potentiel vecteur pour le champ de (3.1) :

$$\boxed{\vec{A}(M) = \iiint_{\Omega} \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{j}(P) \wedge \vec{PM}}{PM^3} \cdot d\tau_P} \quad (3.7)$$

Comme nous l'avons noté, la condition (3.6) ne suffit pas à déterminer  $\vec{A}$  pour  $\vec{B}$  donné : le passage d'un potentiel vecteur à un autre porte le nom traditionnel de transformation de jauge. La jauge (3.7) bénéficie des propriétés suivantes :

1°  $\vec{A}(M)$  s'annule quand  $M$  tend vers l'infini, au moins dans les cas (seuls réalisés de fait) où le volume  $\Omega$  est borné.

1° La divergence de  $\vec{A}$  est elle-même nulle :

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{A} = 0} \quad (3.8)$$

Le potentiel vecteur (3.7) porte le nom de **jauge de Coulomb**.

Remarquons pour terminer que dans le cas de courants limités à des circuits filiformes, on peut transformer (3.7) en :

$$\vec{A}(M) = \sum_i \oint_{C_i} \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I_i \cdot d\vec{l}_i}{P_i M} \quad (3.9)$$

### 3.3. Calcul De $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}$ Théorème D'Ampère.

Toujours pour des courants stationnaires, calculons  $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}$ .

De (3.6) et de la relation  $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{V}) - \Delta\vec{V}$  nous tirons

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A}$$

Si nous utilisons la jauge de Coulomb (3.7) et (3.8), il reste  $-\Delta\vec{A}$ . On a ainsi :

$$\text{rot}_x\vec{B}(M) - \Delta_M A_x(M) = - \iiint_{\Omega} \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \Delta_M \left( \frac{j_x(P)}{PM} \right) \cdot d\tau_P$$

(une fois de plus, on permute l'ordre de la dérivation par rapport à M, et de l'intégration par rapport à P). Dans  $\Delta_M \left( \frac{j_x(P)}{PM} \right)$ ,  $j_x(P)$  est une constante vis-à-vis de M : on peut la sortir du Laplacien. Il reste à calculer :

$$- \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} d\tau_P \cdot j_x(P) \cdot \Delta_M \left( \frac{1}{PM} \right).$$

D'après la relation  $\Delta_M \left( \frac{1}{PM} \right) = -4\pi \cdot \delta_p(M)$ , il vient :

Un calcul analogue montrerait que les deux autres composantes de  $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}$  sont de même proportionnelles aux deux composantes de même nom de  $\vec{j}$  (tous ces champs de vecteurs étant pris au point M). D'où la relation fondamentale :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}} \quad (3.10)$$

qui constitue *la forme locale du théorème d'Ampère*.

(Celui-ci s'obtiendrait, sous sa forme « intégrale », en prenant les flux des deux membres de (3.10) à travers une surface S limité par une courbe C. On aurait ainsi :

$$\iint_S \overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} \cdot \overrightarrow{dS} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot \overrightarrow{dS}$$

Le théorème du rotationnel permet de transformer le membre de gauche en la circulation de  $\vec{B}$  sur la courbe C. L'intégrale qui figure au membre de droite, représente, d'après la relation  $I = \frac{dQ}{dt} \iint_S \vec{j} \cdot \overrightarrow{dS}$  l'intensité I qui traverse S. D'où l'égalité :

$$\oint_C \vec{B} \cdot \overrightarrow{dM} = \mu_0 \cdot I \quad (3.11)$$

Contrairement à (3.10), (3.11) fait intervenir le champ  $\vec{B}$  en tous les points de C : il ne s'agit donc pas d'une relation locale. On retrouve une distinction analogue à celle qu'on a notée entre

$$\iiint_V \text{div}_M \vec{E} \cdot d\tau_M = \iiint_V \frac{\rho(M)}{\epsilon_0} d\tau_M \text{ et } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Notons enfin que, de (3.6) et (3.10), nous tirons une équation reliant directement le potentiel vecteur à la densité de courant :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

Pour la jauge de Coulomb, le terme en  $\text{div} \vec{A}$  disparaît : il reste simplement

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \quad (3.12)$$

dont on remarquera l'analogie formelle avec l'équation de Laplace :  $\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$

### 3.4. Champ D'induction Magnétique dû à Une Charge Ponctuelle En Mouvement.

La magnétostatique, concernée par des courants stationnaires, ne considère que les champs magnétiques totaux (3.2) ou (3.4) produits par l'ensemble des courants ou des circuits : c'est en effet à ce niveau que se manifeste la stationnarité du régime de déplacement des charges.

On dit par suite assez souvent que les champs élémentaires définis par (3.2) ou (3.3) n'ont pas de « réalité physique » : il faut reconnaître que, puisque les éléments de volume  $d\tau$  ou de circuit  $dl$  ne peuvent être isolés du reste du système de charges en mouvement sans en interrompre le caractère stationnaire, on ne mesure jamais que les champs totaux (3.2) et (3.4). Il serait cependant tout à fait contre la nature de supposer que le champ  $d\vec{B}$  de (3.1) n'est pas effectivement la contribution au  $\vec{B}$  de (3.2) des charges mobiles présentes dans l'élément de volume  $d\tau_p$  (charges qui ont une réalité physique parfaite) et qu'en ajoutant des champs élémentaires dépourvus de réalité, on obtienne, par le jeu de compensations miraculeuses, le « bon » champ total.

Nous considérerons donc que les  $d\vec{B}$  de (3.1) ou (3.3) représentent effectivement les champs des charges présentes dans les  $d\tau$  ou  $dl$  considérés.

On peut même aller plus loin. Raisonnons sur (3.1) et supposons que des charges  $q$ , de vitesse  $\vec{v}$ , au nombre de  $n$  par unité de volume, sont celles qui, dans  $d\tau_p$ , transportent le courant.

De la relation  $\vec{j} = \rho \vec{v} = n \cdot q \cdot \vec{v}$  : nous tirons

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q \vec{v} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} \cdot (n d\tau_p)$$

Or  $n d\tau_p$  est le nombre de charges mobiles dans  $d\tau_p$ . Cette proportionnalité de  $d\vec{B}$  à ce nombre nous conduit à admettre que chacune des charges  $q$ , de vitesse  $\vec{v}$ , placée en P (ou infiniment voisine de ce point) produit en M le champ :

$$\vec{b}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q \vec{v} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} \quad (3.13)$$

Effectivement, on verra ultérieurement que (3.13) représente une approximation du champ magnétique produit par une charge ponctuelle en mouvement valable tant que sa vitesse  $v$  reste très inférieure à la vitesse  $c$  de la lumière ce qui est toujours le cas en Electrocinétique.

Remarquons que, comme l'a d'ailleurs suggéré la discussion qui précède, l'examen d'une charge ponctuelle isolée en mouvement nous fait complètement sortir du cadre de la Magnétostatique. Cependant l'analogie formelle de (3.1) et (3.13) nous permet de donner très rapidement certaines propriétés analytiques de  $\vec{b}$  :

$$\vec{b} \text{ est à flux conservatif } \operatorname{div} \vec{b} = 0 \quad (3.14)$$

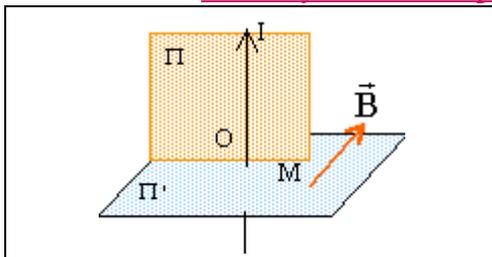
$$B \text{ dérive d'un potentiel vecteur } \vec{b} = \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{a}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{b} &= \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{a} \\ \vec{a} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \cdot \vec{v}}{r} \quad (r = PM) \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

### 3.5 Les propriétés de symétrie : Le champ magnétostatique et potentiel

Le champ magnétique  $\vec{B}$  est contenu dans un plan d'antisymétrie,  
Perpendiculaire à un plan de symétrie de la distribution de courant

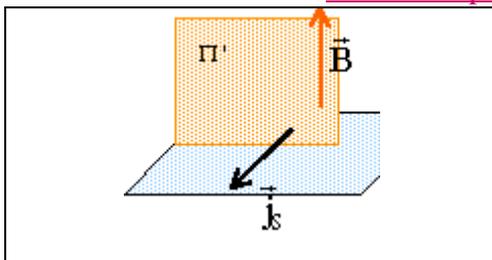
#### Fil ou cylindre infini parcouru par un courant uniforme



- Tout plan perpendiculaire au fil est plan d'antisymétrie.
- Tout plan contenant le fil est plan de symétrie invariant par translation le long de l'axe et invariant par translation le long de l'axe :

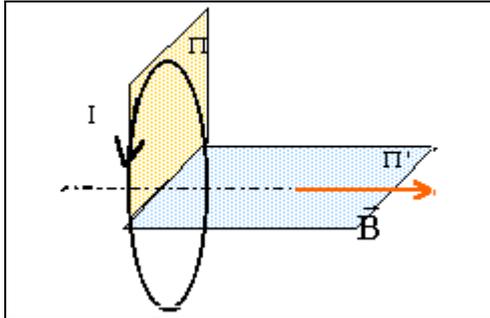
**Le champ dépend de la distance OM**

#### Plan infini parcouru par $j_S$ uniforme



- Tout plan parallèle à  $j_S$  est plan de symétrie.
- Tout plan perpendiculaire à  $j_S$  est plan d'antisymétrie.
- Le plan lui-même est plan de symétrie invariant par toute translation suivant  $j_S$  et pour toute translation perpendiculaire à  $j_S$ .

### Spire ou anneau parcouru par un courant uniforme



- L'axe du système est axe de symétrie.
- Le plan de la spire est plan de symétrie.
- Tout plan contenant l'axe de la spire est plan d'antisymétrie.
- Système invariant par rotation autour de l'axe.

### Solénoïde infini

- Tout plan contenant l'axe est plan d'antisymétrie donc le champ magnétique est porté par l'axe.
- Invariance par rotation autour de l'axe.
- Invariance par translation.

Soit  $M$  un point de l'espace où l'on souhaite calculer le champ magnétostatique  $\vec{B}$  créé par une distribution spatiale de courants électriques.

Si par le point  $M$ , passe un plan de symétrie pour la distribution des courants électriques, le champ magnétique  $\vec{B}$  est perpendiculaire à ce plan de symétrie.

Si par le point  $M$ , passe un plan d'antisymétrie pour la distribution des courants électriques, le champ magnétique  $\vec{B}$  est contenu dans ce plan d'antisymétrie.

### Le potentiel-vecteur

Soit  $M$  un point de l'espace où l'on souhaite calculer le potentiel-vecteur  $\vec{A}$  créé par une distribution spatiale de courants électriques.

Si par le point  $M$ , passe un plan de symétrie pour la distribution des courants électrique, le potentiel vecteur  $\vec{A}$  est contenu dans ce plan de symétrie.

Si par le point  $M$ , passe un plan d'antisymétrie pour la distribution des courants électriques, le champ vecteur  $\vec{A}$  est perpendiculaire à ce plan d'antisymétrie.

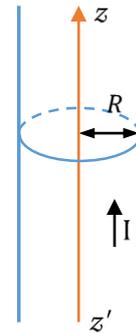
## Exercices résolus

### Exercice.1:

Déterminer le champ magnétique  $\vec{B}$  créé en tout point de l'espace où il est défini par un fil cylindrique rectiligne d'axe  $Oz$ , de section circulaire de rayon  $R$ , parcouru par un courant volumique d'intensité totale  $I$  et de densité de la forme  $\vec{j} = j_0 \frac{r}{R} \vec{u}_z$ , où  $r$  désigne la distance à l'axe  $Oz$ .

### Exercice.2:

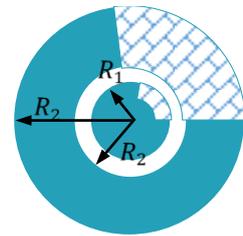
Montrer En utilisant les équations locales (de MAXWELL), déterminer, partout où il est défini le champ magnétique  $\vec{B}$  créé par un cylindre rectiligne infiniment long, à base circulaire de rayon  $R$  et parcouru par un courant d'intensité  $I$  dans la direction de l'axe et de densité de courant uniforme dans le volume du cylindre. Le milieu extérieur est assimilable au vide.



### Exercice.3:

Monter Un fil conducteur cylindrique, noté (1), non magnétique, de rayon  $R_1$ , d'axe  $\Delta = (Oz)$ , de très grande longueur, est parcouru par un courant continu., d'intensité  $I$ . Le milieu (1) est assimilable au vide. Le fil est entouré par un isolant et par un autre conducteur cylindrique noté (2), de rayon intérieur  $R_2$ , et de rayon extérieur  $R_3$ .

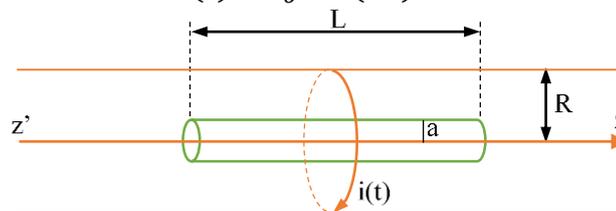
Le courant d'intensité  $I$  passe toujours dans le fil (1) et revient en sens inverse par le conducteur (2), la densité de courant étant toujours uniforme et parallèle à l'axe  $\Delta$  dans chacun des deux conducteurs.



En utilisant les équations locales de Maxwell, déterminer le vecteur champ magnétique  $\vec{B}$  créé par ce courant. Tracer la courbe  $B(r)$ .

### Exercice.4:

Soit un cylindre métallique de conductivité  $\gamma$ , de rayon  $a$  et de longueur  $L$ , est placé à l'intérieur d'un long solénoïde de même axe que le cylindre, de rayon  $R$ , ayant  $n$  spires par mètre, parcouru par un courant de basse fréquence d'intensité  $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ .



- 1- Rappeler l'expression du champ magnétique créé par ce solénoïde en tout point de l'espace.
- 2- En déduire que nécessairement, un champ électrique  $\vec{E}$  est créé. Le déterminer à l'intérieur du solénoïde.
- 3- En déduire la densité de courant volumique  $\vec{j}$  qui apparaît dans le cylindre conducteur.
- 4- Déterminer la puissance instantanée dissipée par effet joule dans la conducteur. Déterminer, à l'intérieur du cylindre, le champ magnétique variable  $\vec{B}'$ , supposé nul à l'extérieur du cylindre et créé par la densité de courant volumique.
- 5- Calculer le rapport des amplitudes des champs  $\vec{B}$  et  $\vec{B}'$ . Interpréter.

## Solutions

### ■ Exercice.1:

La distribution de courant a une forme cylindrique, on travaille alors en coordonnées cylindriques d'axe ( $Oz$ ).

$\vec{B}$  est dirigé selon le vecteur unitaire  $\vec{u}_\theta$  de la base cylindrique. Donc la distribution est invariante dans toute rotation autour de son axe, ainsi que dans toute translation selon axe. On en déduit  $B = B(r)$ .

Dans un système de coordonnées cylindriques, on a:

$$\vec{B}(M) = B(r)\vec{u}_\theta$$

On connaît le champ magnétique sur l'axe, on commence donc à étudier l'équation de Maxwell dans le cylindre.

🍌 Pour  $r \leq R$ ,  $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$  d'où  $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB(r))\vec{u}_z = \mu_0j_0\frac{r}{R}\vec{u}_z$

D'où  $\frac{\partial}{\partial r}(rB(r)) = \mu_0j_0\frac{r^2}{R}$ , qui donne  $rB(r) = \mu_0j_0\frac{r^3}{3R} + k$ , où  $k$  est constante d'intégration.

Le champ magnétique est nul sur l'axe  $B(r=0)$  donne  $k=0$ .

On en déduit alors l'expression du champ magnétique :

$$B(r \leq R) = \mu_0j_0\frac{r^3}{3R}$$

🍌 Pour  $r \geq R$ ,  $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \vec{0}$ , puisqu'il n'y a pas de courant à l'extérieur du cylindre d'où :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB(r))\vec{u}_z = \vec{0}$$

Donc  $\frac{\partial}{\partial r}(rB(r)) = 0$  donne  $rB(r) = k'$ , où  $k'$  est une constante d'intégration.

Or, le champ magnétique est continu à la surface du cylindre puisque l'on est en présence d'une distribution de courant volumique, d'où  $B(r=R) = \mu_0j_0\frac{R^3}{3R}$  donne  $\mu_0j_0\frac{R^2}{3} = k'$

On en déduit alors l'expression du champ magnétique :

$$B(r \geq R) = \mu_0j_0\frac{r^2}{3R}$$

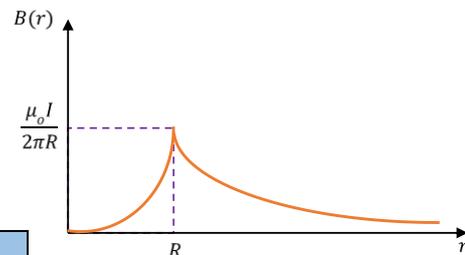
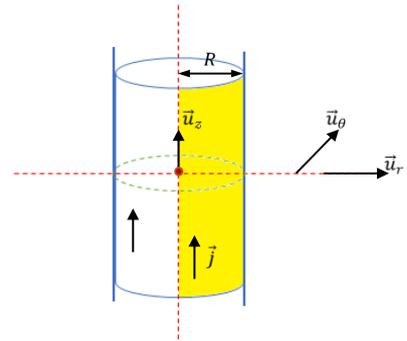
🍌 Enfin, on détermine  $j_0$  en fonction de  $I$ . Le courant dans le cylindre est  $I = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS}$  où  $S$  est la section circulaire de rayon  $R$  du cylindre, soit  $\vec{dS} = r dr d\theta \vec{u}_z$ .

On en déduit :  $I = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS} = \int_0^R j_0 \frac{r}{R} r dr \int_0^{2\pi} d\theta =$

$\frac{1}{3}\pi R^2 j_0$  soit  $j_0 = \frac{3I}{1\pi R^2}$ , d'où  $\vec{j} = \frac{3I}{1\pi R^3} r \vec{u}_z$ .

On obtient alors :

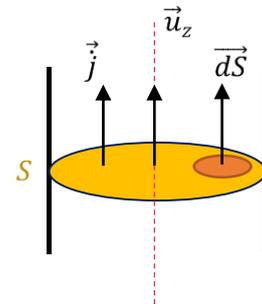
$$B(r \leq R) = \mu_0 \frac{I r^2}{2\pi R^3}$$



$$B(r \geq R) = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}$$

### Exercice.2:

✚ Dans un premier temps, on détermine  $\vec{j}$ . Le courant dans le cylindre a une direction parallèle à l'axe du cylindre. Donc  $I = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS}$  où  $\vec{j}$  est dirigé suivant l'axe ( $Oz$ ) et  $S$  est la section circulaire de rayon  $R$  du cylindre. On considère la section du cylindre donc  $\vec{dS} = dS \cdot \vec{u}_z$  et on suppose la répartition uniforme du courant donc  $\vec{j}$  a une même valeur en tout point du cylindre.



On en déduit :  $I = \vec{j} \times \pi R^2$ . D'où  $\vec{j} = \frac{I}{\pi R^2} \vec{u}_z$ .

✚  $\vec{B}$  est dirigé selon le vecteur unitaire  $\vec{u}_\theta$  de la base cylindrique. Donc la distribution est invariante dans toute rotation autour de son axe, ainsi que dans toute translation selon axe. On en déduit  $B = B(r)$ . Dans un système de coordonnées cylindriques, on a :

$$\vec{B}(M) = B(r)\vec{u}_\theta$$

✚ On utilise une équation de Maxwell qui permet de calculer le champ magnétique à partir de ces sources. Il s'agit évidemment de l'équation de Maxwell-Ampère que l'on écrit dans les domaines ( $r \leq R$ ) et ( $r \geq R$ ) où le milieu est assimilable au vide.

✚ On remarque que l'on est dans un problème de magnétostatique où il n'y a aucune distribution de charges fixes : le champ électrique  $\vec{E}$  est donc nul en tout point. Et on connaît le champ magnétique sur l'axe, on commence donc l'étude à l'intérieur du cylindre.

🌀 Pour  $r \leq R$ ,  $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$  d'où  $\text{rot} \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB(r)) \vec{u}_z = \mu_0 j \vec{u}_z$

Le champ magnétique satisfait donc l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial r} (rB(r)) = \mu_0 j r$$

Cela donne :  $rB(r) = \mu_0 j \frac{r^2}{2} + k$  où  $k$  est une constante d'intégration.

En plus, le champ magnétique étant nul sur l'axe  $B(r = 0) = 0$ , donne  $k = 0$ .

On en déduit alors l'expression du champ magnétique :

$$B(r \leq R) = \mu_0 j \frac{r}{2}$$

👉 Pour  $r \geq R$ ,  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \vec{0}$ , puisqu'il n'y a pas de courant à l'extérieur du cylindre d'où :

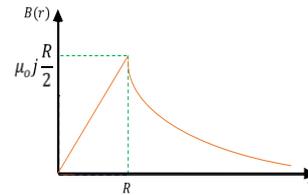
$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB(r)) \vec{u}_z = \vec{0}$$

Donc  $\frac{\partial}{\partial r} (rB(r)) = 0$  donne  $rB(r) = k'$ , où  $k'$  est une constante d'intégration.

Or, le champ magnétique est continu à la surface du cylindre puisque l'on est en présence d'une distribution de courant volumique, d'où  $RB(r = R) = \mu_0 j \frac{R^2}{2} = k'$

On en déduit alors l'expression du champ magnétique :

$$B(r \geq R) = \mu_0 j_0 \frac{R^2}{2r}$$



### ■ Exercice.3:

- Les cylindres (1) et (2) parcourus par un courant d'intensité  $I$  et de densité uniforme dans le volume du cylindre sont considérés comme des distributions de courant volumique notés respectivement  $\vec{j}_1$  et  $\vec{j}_2$ . Les distributions de courant ayant une forme cylindrique, on travaille en coordonnées cylindriques d'axe ( $Oz$ ) qui coïncide avec l'axe du cylindre.

Les distributions de courant sont volumiques donc le champ magnétique est défini et continue tout point.

- Dans un premier temps, on détermine  $\vec{j}_1$  et  $\vec{j}_2$ .

a- Pour le cylindre (1), :  $I = \iint_{S_1} \vec{j}_1 \cdot \vec{dS}$  où  $\vec{j}_1$  est dirigé suivant l'axe  $\Delta$  et  $S_1$  est la section circulaire de rayon  $R_1$  du cylindre. On considère la section du cylindre donc  $\vec{dS} = dS \cdot \vec{u}_z$ , et on suppose la répartition uniforme donc  $\vec{j}_1$  a même valeur en tout point du cylindre.

On en déduit  $I = j_1 \times \pi R_1^2$ . D'où :

$$\vec{j}_1 = \frac{I}{\pi R_1^2} \vec{u}_z$$

b- Pour le cylindre (2), :  $I = \iint_{S_2} \vec{j}_2 \cdot \vec{dS}$  où  $\vec{j}_2$  est dirigé suivant l'axe  $\Delta$  et  $S_{12}$  est la section circulaire de rayon intérieur  $R_2$  et de rayon extérieur  $R_3$ . On considère la section du cylindre donc  $\vec{dS} = dS \cdot \vec{u}_z$ , et on suppose la répartition uniforme donc  $\vec{j}_2$  a même valeur en tout point du cylindre.

On en déduit  $I = -j_2 \times \pi(R_3^2 - R_2^2)$ . D'où :

$$\vec{j}_2 = -\frac{I}{\pi(R_3^2 - R_2^2)} \vec{u}_z$$

- Dans un deuxième temps, on étudie les symétries et invariances du champ magnétique en un point  $M$  quelconque de l'espace.

✚  $\vec{B}$  est dirigé selon le vecteur unitaire  $\vec{u}_\theta$  de la base cylindrique. Donc la distribution est invariante dans toute rotation autour de son axe, ainsi que dans toute translation selon axe. On en déduit  $B = B(r)$ . Dans un système de coordonnées cylindriques, on a:

$$\vec{B} = B(r) \vec{u}_\theta$$

✚ Ensuite, il faut trouver un point où le champ magnétique a une valeur connue. Intéressons-nous à  $\vec{B}(r = 0)$ . Tous les plans contenant l'axe du cylindre **sont plans** de symétrie de la distribution de courant. Donc  $\vec{B}(r = 0)$  est orthogonal à tous ces plans. Ceci n'est pas réalisable que si le vecteur est nul. Donc  $\vec{B}(r = 0) = \vec{0}$ .

✚ Enfin, on utilise une équation de Maxwell qui permet de calculer le champ magnétique en statique. Il s'agit évidemment de l'équation de Maxwell-Ampère que l'on écrit dans les domaines  $\{r \leq R_1\}$ ;  $\{R_1 \leq r \leq R_2\}$ ;  $\{R_2 \leq r \leq R_3\}$  et  $\{r \geq R_3\}$  où le milieu est partout assimilable au vide. On connaît le champ magnétique sur l'axe donc on commence par l'étude du champ  $\vec{B}$  dans le cylindre (1).

🍷 Pour  $r \leq R_1$ ,  $\overrightarrow{rot\vec{B}} = \mu_0 \vec{j}_1$  d'où  $\overrightarrow{rot\vec{B}} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB(r)) \vec{u}_z = \mu_0 j_1 \vec{u}_z$

Le champ magnétique satisfait donc l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial r} (rB(r)) = \mu_0 j_1 r$$

Cela donne :  $rB(r) = \mu_0 j_1 \frac{r^2}{2} + k_1$  où  $k_1$  est une constante d'intégration.

En plus, le champ magnétique étant nul sur l'axe  $B(r = 0) = 0$ , donne  $k_1 = 0$ .

On en déduit alors l'expression du champ magnétique :

$$\vec{B}(r \leq R_1) = \mu_0 I \frac{r}{2\pi R_1^2} \vec{u}_\theta$$

🍷 Pour  $R_1 \leq r \leq R_2$ ,  $\overrightarrow{rot\vec{B}} = \vec{0}$  puisqu'il n'y a pas de courant dans l'isolant par définition d'où :  $\overrightarrow{rot\vec{B}} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB(r)) \vec{u}_z = \vec{0}$

Donc  $\frac{\partial}{\partial r} (rB(r)) = 0$  donne  $rB(r) = k_2$  où  $k_2$  est une constante d'intégration.

Or, le champ magnétique est continu à la surface du cylindre (1) puisque l'on est en présence d'une distribution de courant volumique, d'où  $B(r = R_1) = \mu_0 I \frac{1}{1\pi R_1} = \frac{k_2}{R_1}$  donne :  $k_2 = \frac{\mu_0 I}{1\pi}$

On en déduit alors l'expression du champ magnétique :

$$\vec{B}(R_1 \leq r \leq R_2) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

🍷 Pour  $R_2 \leq r \leq R_3$ ,  $\overrightarrow{rot\vec{B}} = \mu_0 \vec{j}_2$  d'où  $\overrightarrow{rot\vec{B}} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB(r)) \vec{u}_z = \mu_0 j_2 \vec{u}_z$

Le champ magnétique satisfait donc l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial r} (rB(r)) = \mu_0 j_2 r$$

Cela donne :  $rB(r) = \mu_0 j_2 \frac{r^2}{2} + k_3 = -\mu_0 \frac{I}{\pi(R_3^2 - R_2^2)} \frac{r^2}{2} + k_3$  où  $k_3$  est une constante d'intégration.

Par continuité à l'interface  $r = R_2$ ,  $R_2 B(r = R_2) = \frac{\mu_0 I}{1\pi} = -\mu_0 \frac{I}{\pi(R_3^2 - R_2^2)} \frac{R_2^2}{2} + k_3$ , donc  $k_3 =$

$$\mu_0 \frac{I}{\pi(R_3^2 - R_2^2)} \frac{R_2^2}{2}$$

On en déduit alors l'expression du champ magnétique :

$$\vec{B}(R_2 \leq r \leq R_3) = \mu_0 I \frac{(R_3^2 - r^2)}{2\pi R_2 (R_3^2 - R_2^2)} \vec{u}_\theta$$

👉 Pour  $r \geq R_3$ ,  $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \vec{0}$  puisqu'il n'y a pas de courant dans l'isolant par définition d'où :  $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB(r)) \vec{u}_z = \vec{0}$

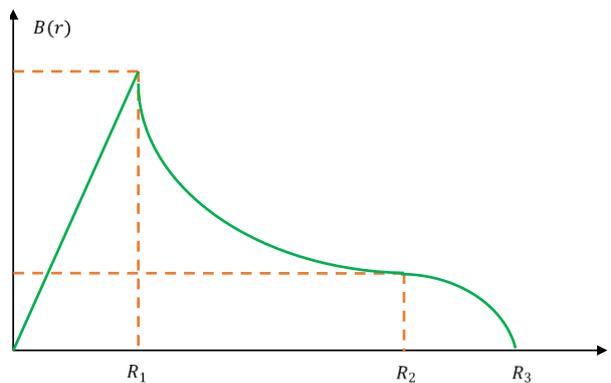
Donc  $\frac{\partial}{\partial r} (rB(r)) = 0$  donne  $rB(r) = k_4$  où  $k_4$  est une constante d'intégration.

Or, le champ magnétique est continu à la surface du cylindre (1) puisque l'on est en présence d'une distribution de courant volumique,  $B(r = R_3) = 0$  donne :  $k_4 = 0$ .

On en déduit alors l'expression du champ magnétique :

$$\vec{B}(r \geq R_3) = \vec{0}$$

On peut tracer l'évolution du champ magnétique en fonction de la distance  $r$  à l'axe ( $Oz$ ) :



#### ■ Exercice.4:

1- Le champ magnétique créé par le solénoïde infini est :

$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 n I_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z & \text{à l'intérieur du solénoïde} \\ \vec{0} & \text{à l'extérieur du solénoïde} \end{cases}$$

Où  $\vec{u}_z$  est le vecteur directeur de l'axe du solénoïde

2- ☺ Le champ magnétique est dépendant du temps. Donc  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  est non nul. L'équation de Maxwell-Faraday permet d'en déduire qu'il existe un champ électrique tel que :  $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ .

Afin de déterminer le champ électrique, on étudie les symétries et invariances du dispositif. Le solénoïde possède une symétrie cylindrique. On utilise les coordonnées cylindriques et la base associée

$(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  où  $\vec{u}_z$  est le vecteur directeur de l'axe du solénoïde. Donc le champ électrique est normal à ce plan soit  $\vec{E}(t) = E(t)\vec{u}_\theta$ .

Le solénoïde est invariant par translation selon son axe et par rotation d'angle  $\theta$  et  $z$ . On conclut que  $\vec{E}(M, t) = E(z, t)\vec{u}_\theta$ .

☺ Il reste à trouver un point particulier où le champ électrique nous est connu. Tous les plans contenant l'axe du solénoïde sont plans d'antisymétrie.

Or le champ électrique sur l'axe ( $Oz$ ) ne peut être orthogonal à tous ces points : il est donc nul en tout point  $M$  de l'axe du solénoïde :  $\vec{E}(r = 0, t) = \vec{0}$ .

☺ On a  $\overline{\text{rot}}\vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE(r))\vec{u}_z = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu_o n I_o \omega \sin(\omega t) \vec{u}_z$

On trouve alors :

$$rE(r) = \mu_o n I_o \omega \sin(\omega t) \frac{r^2}{1} + k \text{ où } k \text{ est une constante d'intégration.}$$

$E(r = 0) = 0$  donne donc :  $k = 0$ .

Ceci conduit à :

$$\vec{E}(r, t) = \mu_o n I_o \omega \sin(\omega t) \frac{r}{2} \vec{u}_\theta$$

3- D'après la loi d'Ohm, on a  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ , d'où :

$$\vec{j}(r, t) = \gamma \mu_o n I_o \omega \sin(\omega t) \frac{r}{2} \vec{u}_\theta$$

4- La puissance volumique dissipée par effet Joule est donnée par  $\vec{j} \cdot \vec{E}$ .

Donc la puissance  $P_j$  dissipée dans le conducteur est l'intégrale sur le volume  $V$  du conducteur de ce produit scalaire.

$$P_j = \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} \, d\tau$$

Où  $d\tau = r dr d\theta dz$  est un élément de volume conducteur en coordonnées cylindriques :

Donc :

$$P_j = \iiint_V \gamma \left( \mu_o n I_o \omega \sin(\omega t) \frac{r}{2} \right)^2 r dr d\theta dz = \gamma \left( \frac{\mu_o n I_o \omega \sin(\omega t)}{2} \right)^2 \int_0^a r^2 dr \times \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^z dz$$

On obtient :

$$P_j = \frac{\gamma}{8} \pi L a^2 [\mu_o n I_o \omega \sin(\omega t)]^2$$

5- Le champ magnétique variable  $\vec{B}'$  est le champ magnétique créé par la densité de courant volumique présente dans le conducteur. Il est obtenu à partir de l'équation de Maxwell-Ampère :  $\overline{\text{rot}}\vec{B}' = \mu_o \vec{j}$ .

☺ La distribution du courant volumique  $\vec{j}$  est invariante par translation selon son axe et par rotation d'angle  $\theta$  (on considère toujours  $L$  très grand). Donc le champ magnétique est indépendant des variables  $\theta$  et  $z$ . On en conclut que  $\vec{B}'(M, t) = B'(z, t)\vec{u}_z$ .

☺ Enfin, on utilise l'équation de Maxwell-Ampère que l'on écrit dans le conducteur ( $r \leq a$ ).

On a :

$$\overline{\text{rot}} \vec{B}' = \mu_o \vec{j} \quad \text{d'où} \quad \overline{\text{rot}} \vec{B}' = -\frac{\partial B'(r)}{\partial r} \vec{u}_\theta = \mu_o^2 n I_o \omega \sin(\omega t) \frac{r}{2} \vec{u}_\theta$$

On obtient :

$$B'(r) = \mu_o^2 \gamma n I_o \omega \sin(\omega t) \frac{r^2}{4} + k' \quad \text{où } k' \text{ est une constante d'intégration.}$$

La distribution de courant est à répartition volumique donc le champ magnétique est continu à l'interface  $r = a$  avec l'extérieur du conducteur où le champ magnétique  $\vec{B}'$  est nul.

On obtient donc  $k' = -\mu_o^2 \gamma n I_o \omega \sin(\omega t) \frac{a^2}{4}$ .

On trouve alors :

$$\vec{B}'(r) = \mu_o^2 \gamma n I_o \omega \sin(\omega t) \frac{(r^2 - a^2)}{4} \vec{u}_z$$

6- On calcule le rapport des amplitudes :

$$\frac{\text{Amplitude de } B'(r)}{\text{Amplitude de } B(r)} = \frac{\mu_o^2 \gamma n I_o \omega \frac{|r^2 - a^2|}{4}}{\mu_o n I_o} = \frac{|r^2 - a^2|}{\frac{4}{\mu_o \gamma \omega}} = \frac{|r^2 - a^2|}{\delta^2}$$

Où  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_o \gamma \omega}}$  est l'épaisseur de peau.

# CHAPITRE 4

## INTRODUCTION AU RÉGIME VARIABLE

### 4.1 Force de Lorentz

En électrostatique, une charge  $q$  placée dans un champ électrique (électrostatique)  $E$  subit une force :  $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$ . Si cette charge est mobile, dans un repère où sa vitesse est  $\vec{v}$ , elle subit une force de la forme:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (4.1)$$

*appelée force de Lorentz*, qui se décompose donc en :

- une force indépendante de  $\vec{v}$  :  $q\vec{E}$  (4.2)

- une force proportionnelle à  $\vec{v}$  :  $q\vec{v} \wedge \vec{B}$  (4.3)

(4.1), (4.2), (4.3), relations obtenues à partir d'observations expérimentales, définissent deux champs de vecteurs :  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ .

Si la particule est immobile, seule subsiste la force (4.2). Si l'on est dans une situation d'équilibre électrostatique, cette force (4.2) doit coïncider avec  $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$  et le champ  $\vec{E}$  avec le champ électrostatique. Par suite nous conviendrons

- d'appeler le champ  $\vec{E}$  défini par (4.2) champ électrique

(- d'appeler la force (4.2) :  $q\vec{E}$ , la force électrique)

- d'imposer au champ électrique de se confondre avec le champ électrique de l'Électrostatique quand les charges qui interviennent dans le problème, c'est-à-dire  $q$  et les charges avec lesquelles elle interagit, sont immobiles.

Si d'autre part les charges présentes dans le système sont mobiles et créent des courants stationnaires, on constate que le champ  $\vec{B}$  défini par (4.3) coïncide avec l'induction magnétique (magnétostatique) créée par ces courants. Par suite nous conviendrons :

- d'appeler le champ  $\vec{B}$  défini par (4.3) champ (ou induction) magnétique

(- d'appeler la force  $q\vec{v} \wedge \vec{B}$  de (4.3) force magnétique)

- d'imposer au champ  $\vec{E}$  de coïncider avec l'induction magnétostatique (4.1) ou (4.3) quand on est en régime de courants stationnaires.

### 4.2. Le Phénomène D'induction Électromagnétique.

#### 4.2.1 Circuit mobile dans une induction magnétostatique :

Soit ( $\Gamma$ ) un circuit électrique (c'est-à-dire une chaîne de conducteurs) filiforme, que nous orientons, d'ailleurs arbitrairement. Il est plongé dans une induction magnétique  $\vec{B}$  créée par des courants stationnaires : une induction « magnétostatique ». On le déplace dans ce champ d'induction. Un porteur de charge libre présent dans le conducteur, de charge  $q$ , (par exemple un électron) aura une vitesse de la forme  $\vec{u} + \vec{v}$  où :

-  $\vec{u}$  est la vitesse de déplacement du porteur dans le circuit ; le circuit ( $n$  étant filiforme,  $\vec{u}$  est porté par la tangente à ( $\Gamma$ ))

-  $\vec{v}$  est la vitesse d'entraînement du circuit au point où se trouve le porteur.

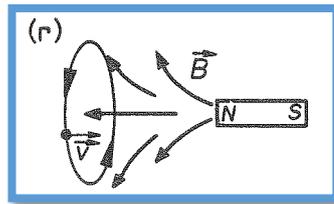


Figure IV.1

En l'absence, supposée, de champ électrique, e porteur subit une force magnétique :

$$\vec{F} = q(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{B} = q \cdot \vec{E}_m$$

Où  $\vec{E}_m$  joue le rôle d'un champ électrique : nous l'appellerons, conformément à l'usage, champ électromoteur d'induction. Par définition, on appellera force électromotrice d'induction sur  $(\Gamma)$  la circulation de  $\vec{E}_m$  sur  $(\Gamma)$  :

$$e = \oint_{(\Gamma)} \vec{E}_m \cdot d\vec{M} = \oint_{(\Gamma)} (\vec{u} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{M} + \oint_{(\Gamma)} (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{M}$$

Le produit mixte qui figure dans la première intégrale est nul :  $\vec{u}$  et  $d\vec{M}$  sont colinéaires. Il reste

$$e = - \oint_{(\Gamma)} (\vec{v} \wedge d\vec{M}) \cdot \vec{B} = - \frac{d\Phi_c}{dt} \quad (4.4)$$

Où  $d\Phi_c$  est le flux coupé par le circuit dans le temps dt, du fait de son déplacement. Le champ  $\vec{B}$  est à flux conservatif (nous sommes en Magnétostatique) : (4.4) est équivalente à :

$$e = - \left( \frac{d\Phi}{dt} \right)_{mvt} \quad (4.5)$$

Où  $\Phi$  est le flux de  $\vec{B}$  à travers  $(\Gamma)$  et  $\left( \frac{d\Phi}{dt} \right)_{mvt}$  caractérise la variation de ce flux qui résulte du mouvement de  $(\Gamma)$  dans le champ  $\vec{B}$  fixe.

#### 4.2.2 Circuit immobile dans une induction magnétique variable.

Le même circuit filiforme  $(\Gamma)$  est maintenant fixe. Par contre  $\vec{B}$  varie dans le temps : ce n'est plus une induction magnétique de la Magnétostatique. (Par exemple les courants qui créent  $\vec{B}$  ne sont plus des courants stationnaires. Ou encore, les circuits qui sont le siège de ces courants, dont l'intensité est maintenue constante, sont

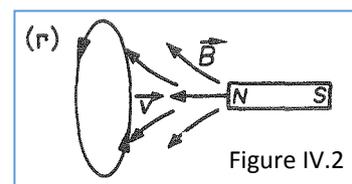


Figure IV.2

déplacés par rapport à  $(\Gamma)$ , d'où la variation de  $\vec{B}$  au niveau de  $(\Gamma)$ . L'expérience montre alors que  $(\Gamma)$  est encore le siège d'un courant induit, traduisant le déplacement dans  $(\Gamma)$  des porteurs libres qu'il contient, et qu'on peut caractériser par une force électromotrice d'induction :

$$e = - \left( \frac{d\Phi}{dt} \right)_{mag} \quad (4.6)$$

( Où  $\left( \frac{d\Phi}{dt} \right)_{mag}$  traduit la variation dans le temps du flux d'induction magnétique à travers  $(\Gamma)$  qui résulte de la variation de  $\vec{B}$ ).

$e$  ne peut plus résulter de l'action sur les porteurs de la force magnétique : avec les notations du (§ 4.2.1), celle-ci est en  $q\vec{u} \wedge \vec{B}$  ( $(\Gamma)$  étant fixe,  $\vec{v}$  s'annule) et sa circulation sur  $(\Gamma)$  est nulle. Si les porteurs libres sont entraînés autour de  $(\Gamma)$  c'est qu'une force électrique est apparue, produite par un champ électrique  $\vec{E}$  tel que :

$$e = \oint_{(\Gamma)} \vec{E} \cdot d\vec{M} = - \left( \frac{d\Phi}{dt} \right)_{mag} \quad (4.7)$$

(Si nous retenons la notion de champ électromoteur, nous voyons qu'il se confond ici avec le champ  $\vec{E}$ .)

Si  $\frac{d\Phi}{dt}$  est la dérivée par rapport au temps qui décrit l'ensemble de cette variation de  $\Phi$ , la f.e.m. d'induction nous est finalement donnée par la **loi de Faraday**

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (4.8)$$

### 4.3 La Forme Locale De La Loi De Faraday.

Dans (4.7) ou (4.8), comme dans (4.5) nous avons fait intervenir le flux  $\Phi$  de l'induction magnétique  $\vec{B}$  à travers le circuit  $(\Gamma)$ . Or nous savons qu'une telle expression n'a de sens que pour autant que  $\vec{B}$  est à flux conservatif : c'est le cas en magnétostatique (d'où (4.5)), mais, a priori, nous ne sommes pas sûrs que la propriété se conserve dans le cas général des régimes variables. Cependant toute l'étude expérimentale très succinctement décrite plus haut suggère très fortement qu'on peut extrapoler au cas général la relation fondamentale :

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

(sans quoi, la signification même du terme « flux du champ  $\vec{B}$  à travers le circuit » serait remise en cause).

Cette hypothèse étant faite,  $(S)$  étant une surface quelconque s'appuyant sur  $(\Gamma)$ , (4.7) donne:

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{E} \cdot d\vec{M} = - \frac{d}{dt} \left[ \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \right]$$

Dans le membre de droite, on peut permuter la dérivation par rapport au temps et l'intégration par rapport aux coordonnées spatiales. Si  $\frac{\partial B}{\partial t}$  désigne la dérivée de l'induction magnétique par rapport au temps en un point fixe (d'où le recours au  $\partial$  des dérivées partielles), nous obtenons :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{E} \cdot d\vec{M} = \left[ \iint_{(S)} \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \right] = \iint_{(S)} \overrightarrow{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

(grâce au théorème du rotationnel). (S) étant, comme (Γ), quelconque, l'identité des intégrales suppose celle des intégrandes. D'où la relation fondamentale reliant en régime variable les deux composantes du champ électromagnétique :

$$\overrightarrow{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.9)$$

Comme nous avons admis que  $\vec{B}$  reste à flux conservatif quand on passe aux régimes non stationnaires, on peut continuer à définir un potentiel vecteur  $\vec{A}$  avec :

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot} \vec{A}$$

(4.9) donne alors :

$$\overrightarrow{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{rot} \vec{A}) = -\overrightarrow{rot} \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right).$$

(on a permuté les dérivations spatiales du rotationnel et  $\frac{\partial}{\partial t}$ ). D'où

$$\overrightarrow{rot} \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Le vecteur  $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  dérive donc d'un potentiel scalaire V; d'où :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (4.10)$$

formule qui donne la forme générale du champ électrique : à un champ de « style » électrostatique (dérivant d'un potentiel scalaire) s'ajoute un champ qui ne satisfait pas à cette propriété, et qui traduit l'intervention du phénomène d'induction ; on pourra appeler cette composante  $\left( -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$  le champ (électromoteur) d'induction.

#### 4.4 Énergie Potentielle Magnétostatique D'un Système De Courants.

Soit une particule de charge  $q$ , vitesse  $\vec{v}$  participant au transport des courants étudiés. Dans un champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$  elle subit la force de Lorentz (4.1)

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Le régime restera stationnaire si l'extérieur exerce sur la charge une force  $\vec{\mathcal{F}} = -\vec{F}$ . Dans le temps  $dt$ , la particule se déplace de, et la force extérieure fournit le travail:

$$dW = \vec{\mathcal{F}} \cdot \vec{v} dt = -q\vec{E} \cdot \vec{v} dt$$

(la force magnétique, perpendiculaire à la vitesse, ne travaille pas: la force extérieure fournit un travail opposé à celui de la seule force électrique).

Dans un volume  $d\tau$ , on trouve  $n d\tau$  particules de ce type, et le travail total fourni par l'extérieur au niveau de  $d\tau$  est :

$$d^1W = -nq\vec{v} \cdot \vec{E} d\tau = -\vec{j} \cdot \vec{E} \cdot d\tau \cdot dt$$

en faisant intervenir la densité de courant donnée par  $\vec{j} = \rho\vec{v} = n \cdot q \cdot \vec{v}$

1° Si nous sommes en régime permanent, Il champ électrique (4.10) se réduit à un champ « de type électrostatique », dérivant d'un potentiel scalaire  $V$ . (4.11) donne, pour valeur de la puissance totale fournie par l'extérieur aux charges en mouvement :

$$\frac{dW}{dt} = \iiint_{\Omega} \vec{j} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} V d\tau \quad (4.11)$$

où l'intégration porte sur le volume auquel est limité le déplacement des porteurs de charge. Avec la relation  $\text{div}(f\vec{V}) = f \cdot \text{div} \vec{V} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f$  où  $f$  représente une fonction scalaire et  $\vec{V}$  étant un champ de vecteurs, l'intégrande de (4.11) devient :

$$\text{div}(V \cdot \vec{j}) - \vec{V} \cdot \text{div} \vec{j}$$

Le dernier terme disparaît car on est en régime stationnaire et  $\text{div} \vec{j} = 0$

Il reste :

$$\frac{dW}{dt} = \iiint_{\Omega} \text{div}(V \cdot \vec{j}) d\tau = \iint_{\Sigma} V \cdot \vec{j} \cdot \overrightarrow{dS}$$

Où  $\Sigma$ : est la surface qui limite  $Q$ ; comme les charges ne franchissent pas  $\Sigma$ ,  $\vec{j}$  n'a pas de composante normale à cette surface et le flux de  $\vec{j}$  (ou de  $V\vec{j}$ ) à travers elle est nul. Au total:

$$\frac{dW}{dt} = 0 \quad (4.12)$$

Ainsi, en régime permanent, il n'y a pas de transfert d'énergie, au total, entre l'extérieur et le système de courants.

1° Supposons maintenant que nous soyons dans une phase d'établissement du régime stationnaire ; nous supposerons cet établissement du courant suffisamment lent pour qu'à un instant donné le champ d'induction magnétique  $\vec{B}$  ou le potentiel vecteur  $\vec{A}$  dont il dérive soient encore donnés, en fonction de la densité de courant  $\vec{j}$  : par les relations linéaires de la Magnétostatique : (3.2) et (3.7).

Dans ces conditions, nous supposerons que si  $\vec{j}(\vec{r})$  est la densité de courant au point de rayon-vecteur  $\vec{r}$  une fois le régime stationnaire établi (pour les temps  $t > T$ ), la densité  $\vec{j}(\vec{r})$ , au même point, à un instant  $t$  de la phase d'établissement du courant (soit pour  $0 \leq t \leq T$ ) est en :

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \lambda(t) \cdot \vec{j}(\vec{r}) \quad (4.13)$$

où la fonction scalaire de  $t$   $\lambda(t)$  croît de 0 à 1 entre  $t = 0$  et  $t = T$ .

Si  $\vec{B}(\vec{r})$  et  $\vec{A}(\vec{r})$  sont les induction et potentiel vecteur en régime permanent, les mêmes quantités, pendant la phase d'établissement de ce régime, et du fait de leur dépendance linéaire vis-à-vis de la densité de courant, vaudront :

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \lambda(t) \cdot \vec{B}(\vec{r}) \quad ; \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \lambda(t) \cdot \vec{A}(\vec{r})$$

Reprenons (4.11), mais avec, maintenant, un champ électrique ayant la forme générale (4.10) :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \vec{A}(\vec{r}) \cdot \frac{d\lambda}{dt}$$

L'énergie fournie, entre les instants  $t$  et  $(t + dt)$ , par l'extérieur au système de charges mobiles vaut :

$$\begin{aligned} dW &= \iiint_{\Omega} -\vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \left[ -\overrightarrow{\text{grad}} V - \vec{A}(\vec{r}) \cdot \frac{d\lambda}{dt} \right] \cdot d\tau \cdot dt \\ &= d\lambda \cdot dt \iiint_{\Omega} -\vec{j}(\vec{r}) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\tau + \lambda(t) \cdot \frac{d\lambda}{dt} dt \iiint_{\Omega} \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\tau \end{aligned}$$

Ici encore  $\Omega$  est le volume où s'établissent les courants étudiés.  $\vec{j}(\vec{r})$  et  $\vec{A}(\vec{r})$  sont les grandeurs relatives au régime permanent final ; l'intégrale qui figure dans le premier terme n'est donc autre que (4.12) : ce terme est nul.

Il reste uniquement le terme introduit par le champ électromoteur d'induction, dont la prise en compte s'impose :

$$dW = \iiint_{\Omega} [\vec{j} \cdot \vec{A} \cdot d\tau] \lambda \cdot \frac{d\lambda}{dt} dt$$

L'énergie fournie par l'extérieur pendant toute la phase d'établissement des courants, et qui constitue l'énergie potentielle magnétostatique  $E_p$  de ceux-ci, est donc égale à :

$$E_p = W = \int_{t=0}^{t=T} dW = \int_{\lambda=0}^{\lambda=1} \left[ \iiint_{\Omega} \vec{j} \cdot \vec{A} \cdot d\tau \right] \cdot \lambda d\lambda$$

Soit

$$E_p = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \vec{j} \cdot \vec{A} \cdot d\tau \quad (4.14)$$

#### 4.5 Densité d'énergie magnétostatique.

La densité de courant  $\vec{j}$  et le potentiel vecteur  $\vec{A}$  de (4.14) sont, rappelons-le, ceux d'un régime stationnaire, de même que le champ magnétique  $\vec{B}$  correspondant. Nous avons ainsi :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} \\ \vec{j} \cdot \vec{A} &= \frac{1}{\mu_0} \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \end{aligned}$$

Or, on a  $\text{div}(\vec{B} \wedge \vec{A}) = \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} - \vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$

D'où

$$E_p = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\Omega} \text{div}(\vec{B} \wedge \vec{A}) d\tau + \frac{1}{1\mu_0} \iiint_{\Omega} \vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} d\tau$$

Le domaine d'intégration de (4.14) peut être, sans inconvénient, étendu à l'espace entier (disons à une sphère  $\Sigma$ , de rayon  $R$  tendant vers l'infini, et qui englobe  $\Omega$ ) : il suffit de prolonger  $\vec{j}$  par un champ de vecteurs partout nul hors de  $\Omega$ .

La première intégrale de  $E_p$  devient donc, grâce au théorème de la divergence :

$$\iint_{\Sigma} (\vec{B} \wedge \vec{A}) \cdot \vec{dS}$$

Il reste finalement:

$$E_p = \iiint_{\text{esp}} \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau \quad (4.15)$$

Ce résultat nous suggère que la présence d'une induction magnétique  $\vec{B}$ , indépendante du temps, se traduit par la présence d'une énergie répartie dans l'espace avec une densité

$$\frac{dE_p}{d\tau} = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (4.16)$$

Le parallélisme de toutes ces formules avec celles de l'Electrostatique est évident :

- dans les deux cas nous obtenons une première expression liée à la présence de charges fixes (resp. mobiles) dans un potentiel scalaire (resp. vecteur). Notons au passage, pour la première fois, la dualité entre les deux couples :

$$\frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ densité de charge}$$

$$\mu_0 \vec{j} \text{ densité de courant}$$

  $V$  potentiel scalaire

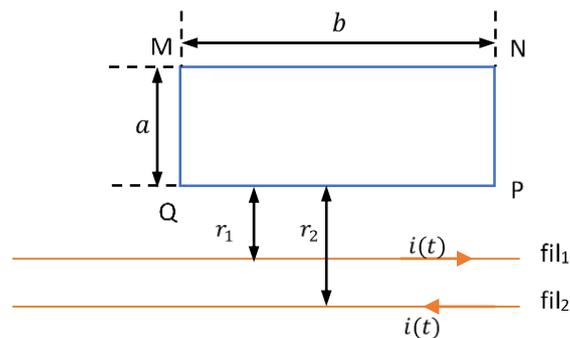
  $\vec{A}$  potentiel vecteur

## Exercices résolus

### Exercice.1:

Deux conducteurs 1 et 2 filiformes et parallèles, transportant un même courant d'intensité  $i(t) = I_0 \cos \omega t$ , dans des sens opposés. Un cadre rectangulaire MNPQ est fixé dans le plan des conducteurs.

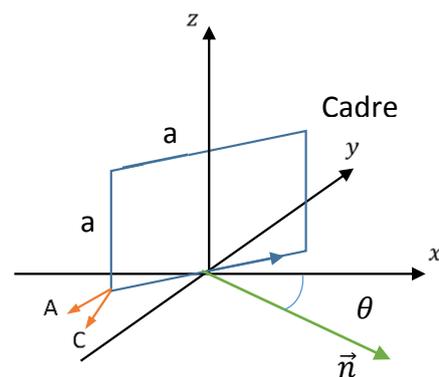
- 1- Déterminer le flux magnétique  $\varphi$  à travers le cadre.
- 2- Déterminer la force électromotrice induite  $e(t)$  dans le cadre et donner le sens conventionnel du courant induit  $i'$ .



### Exercice.2:

On dispose d'un cadre carré fixe de côté  $a$  comportant  $N$  spires d'un fil conducteur d'extrémités  $A$  et  $C$  dans un champ magnétique  $\vec{B} = B_0 \cos \omega t \vec{u}_z$ . La normale du cadre fait un angle  $\theta$  avec  $\vec{u}_z$ . L'angle  $\theta$  est orienté, il est donc négatif sur la figure.

- 1- Calculer la force électromotrice  $e(t)$  qui apparaît entre les bornes de sortie  $A$  et  $C$  du cadre.
- 2- Vérifier que le potentiel vecteur en un point  $M$  quelconque peut s'écrire
- 3- Calculer par une autre méthode la force électromotrice  $e(t)$ .
- 4- Etudier les variations de l'amplitude  $e_0$  de  $e(t)$  en fonction de la pulsation  $\omega$  du champ magnétique et de l'angle  $\theta$ . On tracera le graphe de l'amplitude de  $e(t)$  en fonction de  $\theta$ .
- 5- Application numérique :  $B_0 = 1 \mu T$ ,  $a = 10 \text{ cm}$ ,  $f = 150 \text{ kHz}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{1}$  et  $N = 100$ . Calculer  $e_0$ .



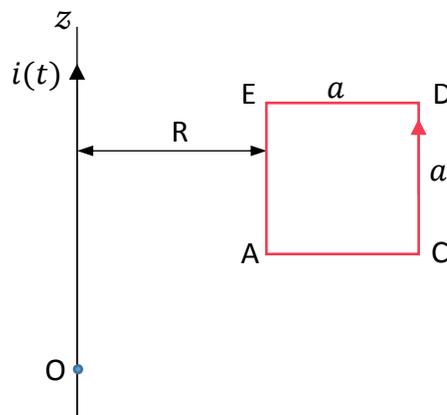
**Exercice.2:**

Un fil rectiligne infiniment long est parcouru par un courant d'intensité  $i(t) = I_0 \cos \omega t$ . On note  $(Oz)$  la direction du fil, on note positivement l'intensité dans le sens de  $z'z$ .

- 1- Déterminer le champ magnétique  $\vec{B}(M, t)$  en tout point M de l'espace.
- 2- Définir la direction et les variables dont dépend le potentiel-vecteur  $\vec{A}$  en M.

On donne la solution de l'équation de Poisson dans le cas d'un fil infini,  $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{fil}} \frac{i(t)}{PM} d\vec{l}(P)$  où  $d\vec{l}(P)$  est un déplacement élémentaire autour du point P situé sur le fil.

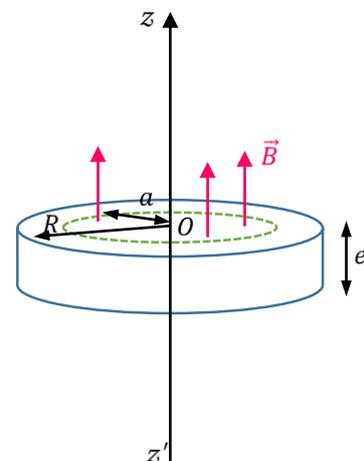
- 3- Calculer le potentiel-vecteur  $\vec{A}$  en M, que l'on prendra nul à la distance R de l'axe Oz.
- 4- En déduire le champ électromoteur  $\vec{E}_m$  en M.
- 5- Une bobine plane, de N spires, a la forme d'un carré ACDE de côté a. Deux cotés sont parallèles à l'axe Oz, à la distance R et R + a de l'axe. Le fil est dans le plan de la bobine. On note e la force électromotrice d'induction apparaissant dans la bobine.



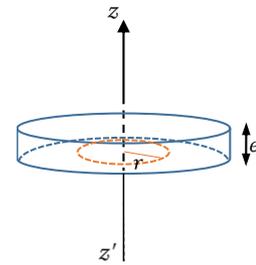
- a- Calculer e en utilisant le potentiel-vecteur.
- b- Calculer e en utilisant la loi de Faraday.
- c- Quel est le coefficient d'inductance mutuelle M entre le fil et la bobine ?

**Exercice.3:**

Un disque conducteur, de conductivité  $\gamma$ , de rayon R, d'épaisseur e, est placé dans un champ magnétique uniforme, parallèle à l'axe Oz du disque, de valeur  $B(t) = B_0 \cos \omega t$  dans la région  $r < a < R$  et de valeur nulle ailleurs. Il s'établit en tout point M du disque des courants volumiques induits de densité  $j(M, t)$  (courants de Foucault) dont on cherche l'expression.

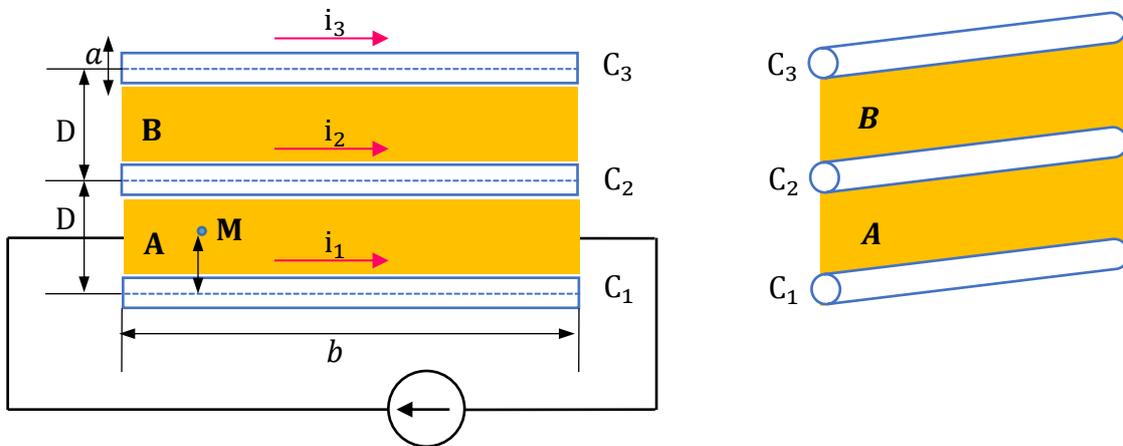


- 1- Montrer que cette densité de courant est de direction orthoradiale. De quelles variables dépend cette densité a priori ?
- 2- On imagine un cercle de rayon  $r$  tracé dans le disque. Quelle est la relation entre le champ électromoteur  $e$  induit qui existe sur ce cercle et le flux de  $\vec{B}$  à travers ? en déduire que  $j$  ne dépend que d'une seule variable d'espace.
- 3- En déduire la densité de courant volumique induit  $j(M, t)$  en tout point  $M$  du disque.
- 4- Exprimer la puissance volumique dissipée par effet joule dans le disque.
- 5- Exprimer la puissance moyenne dissipée par effet joule dans disque.



**Exercice.4:**

On considère trois conducteurs cylindriques  $C_1, C_2,$  et  $C_3$  supposés très longs de même longueur  $h$  et de même rayon  $a$ . Leurs axes sont parallèles et sont situés dans un même plan à une distance  $D$  les uns des autres. Les trois conducteurs ont chacun une résistance  $r$  par unité de longueur, ils sont disposés en parallèle et reliés entre eux par deux plaques conductrices A et B de résistance et d'inductance négligeable, et ils sont alimentés par une tension sinusoïdale de pulsation  $\omega: u(t) = U_0 e^{j\omega t}$ . Dans cette exercice, on suppose valables les équations des états quasi-stationnaires et on tient compte des phénomènes d'induction. En effet, il s'agit de modéliser de notre mieux ce qu'il se passe dans les fils électriques constitués de tresses (assemblage de fils de cuivre en parallèle) et utilisés partout.



- 1-  $i_1, i_2,$  et  $i_3$  désignent les trois courants apparaissant respectivement dans chacun des trois conducteurs. Montrer que l'on a nécessairement  $i_1 = i_3$ .
- 2- On s'intéresse à la plaque A se trouvant entre les conducteurs  $C_1$  et  $C_2$ . Calculer en fonction de  $i_1$  et  $i_2$  le champ magnétique total  $\vec{B}$  produit en un point  $M$  de A, à une distance  $x$  de l'axe du conducteur  $C_1$ .
- 3- Déterminer le flux magnétique  $\phi$  à travers la surface de A. On supposera que  $a \ll D \ll h$  : simplifier l'expression de  $\phi$ .

4- Quelle est la force électromotrice  $e$  d'induction apparaissant dans le circuit  $\Gamma$  formé par le bord de la plaque conductrice A ?

## Solutions

### ■ Exercice.1 :

1- Dans un premier temps, on détermine le champ magnétique dans tout l'espace en utilisant le théorème d'Ampère. Pour cela, on étudie le champ magnétique  $\vec{B}(M, t)$  créé par un fil infini parcouru par un courant  $i$ . On utilise les coordonnées cylindriques et la base associée  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ . On oriente le fil suivant  $\vec{u}_z$  de sorte que le courant soit aussi orienté dans le sens

Soit un point M de l'espace situé à une distance  $r$  du fil, on étudie les symétries et invariances afin de trouver la direction du champ magnétique et les variables dont il dépend.

Le plan  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$  est un plan de symétrie. Le champ magnétique  $\vec{B}$  est donc dirigé suivant  $\vec{u}_\theta$ . La direction de courant est invariante par rotation d'angle  $\theta$  et par translation suivant  $\vec{u}_\theta$ . Le champ  $\vec{B}$  ne dépend donc que de la variable  $r$ .

D'où : 
$$\vec{B}(M, t) = B(r, t)\vec{u}_\theta.$$

On applique le théorème d'Ampère sur un contour circulaire  $\Gamma$  de rayon  $r$  placée à une cote  $z$  constante. On oriente le contour de sorte que  $i$  soit dirigé dans le sens de la normale. Donc  $d\vec{l} = r d\theta \vec{u}_\theta$ . Ainsi, le théorème d'Ampère s'énonce :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r, t) \times 2\pi r = \mu_0 i$$

Ceci donne :

$$\vec{B}(M, t) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

On utilise les coordonnées cylindriques et la base associée  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ . Les fils sont dirigés suivant  $\vec{u}_z$  de sorte que le courant parcourant le fil 1 soit orienté dans le sens de  $\vec{u}_z$ .

On en déduit le champ magnétique en un point  $M$  situé à la distance  $r$  du fil 1 et à la distance  $r' = r + (r_1 - r_2)$  du fil 2 :

$$\vec{B}(M, t) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r + (r_2 - r_1)} \right) \vec{u}_\theta$$

On peut calculer le flux  $\Phi$  du champ magnétique à travers le cadre. Pour cela, on oriente la normale au cadre dans le sens de  $\vec{u}_\theta$  et donc le contour dans le sens  $MQPN$ .

On trouve alors  $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$  où  $S$  représente la surface du cadre, soit :

$$\Phi = \iint_S B(r, t) dr dz = \int_{r_1}^{r_1+a} B(r, t) dr \int_0^b dz = \frac{\mu_0 i}{2\pi} b \int_{r_1}^{r_1+a} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r + (r_1 - r_1)} \right) dr.$$

D'où  $\Phi = \frac{\mu_0 i}{2\pi} b \left( \ln \frac{r_1+a}{r_1} - \ln \frac{r_2+a}{r_2} \right).$

On a donc :

$$\Phi = \frac{\mu_0 i}{2\pi} b \ln \left( \frac{r_2(r_1 + a)}{r_1(r_2 + a)} \right)$$

2- D'après la loi de Faraday, applicable dans le cas d'un contour fermé :  $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ .

On en déduit :

$$e = -\frac{\mu_0}{2\pi} b \ln\left(\frac{r_2(r_1 + a)}{r_1(r_2 + a)}\right) \frac{di}{dt} = \frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi} b \ln\left(\frac{r_2(r_1 + a)}{r_1(r_2 + a)}\right) \sin \omega t$$

Dans ce cas,  $e$  est orienté dans le sens de contour.

Pour déterminer le courant  $i'$  induit, on utilise la relation  $0 = Ri' - e$  car le circuit est fermé.

Il reste donc :

$$i'(t) = \frac{e(t)}{R} = \frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi R} b \ln\left(\frac{r_2(r_1 + a)}{r_1(r_2 + a)}\right) \sin \omega t$$

### ■ Exercice.2 :

1- • On peut alors calculer le flux  $\Phi$  du champ magnétique  $\vec{B}$  à travers le cadre. D'après le sens de la normale, le cadre est orienté de c vers A.

Le flux à travers chaque spire du cadre est identique. Donc le flux à travers le cadre est égal à N fois le flux à travers une spire.

On a  $\Phi = N \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$  où S représente la surface du cadre et  $d\vec{S} = dS\vec{n} = dS(\cos\theta\vec{u}_x + \sin\theta\vec{u}_y)$ .

Soit :  $\Phi = NB_0 a^2 \sin\theta \cos\omega t$ .

• D'après la loi de Faraday,  $e = -\frac{d\Phi}{dt}$  lorsque la force électromotrice  $e$  est orienté de C vers A.

On en déduit :

$$e(t) = NB_0 a^2 \omega \sin\theta \cos\omega t.$$

2- On calcule le potentiel vecteur  $\vec{A}$  proposé, en un point  $M(x, y, z)$  quelconque dans la base cartésienne.

$$\vec{A} = \frac{\vec{B} \wedge \overrightarrow{OM}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ B \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} zB \\ 0 \\ -xB \end{pmatrix}$$

On vérifie qu'il est bien potentiel vecteur du champ magnétique  $\vec{B}$ .

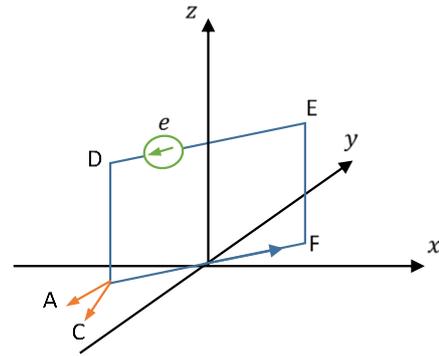
$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{zB}{2} \\ 0 \\ -\frac{xB}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ \frac{B}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{B}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{B}$$

On retrouve bien  $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} = \vec{B}$ .

3- Le champ électromoteur  $\vec{E}_m$  est défini par :

$$\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \begin{pmatrix} -\frac{z}{2} \frac{\partial B}{\partial t} \\ 0 \\ \frac{x}{2} \frac{\partial B}{\partial t} \end{pmatrix}, \text{ dans la base cartésienne}$$

On calcule la circulation de ce champ électromoteur entre les deux points C et A ( $d\vec{l}$  va de C vers A), et on obtient la force électromotrice d'induction  $e$ .



$$e(t) = \int_C^A \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \int_C^F \vec{E}_m \cdot d\vec{l} + \int_F^E \vec{E}_m \cdot d\vec{l} + \int_E^D \vec{E}_m \cdot d\vec{l} + \int_D^A \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$$

Sur FE et DA,  $d\vec{l} = dz \vec{u}_z$  et donc  $\vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \frac{x}{2} \frac{\partial B}{\partial t} dz$

$$\int_F^E \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \int_0^a -\frac{a \sin \theta}{2} \frac{\partial B}{\partial t} dz = -\frac{a^2 \sin \theta}{4} \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{a^2 \sin \theta}{4} B_o \omega \sin \omega t$$

$$\int_D^A \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \int_a^0 \frac{a \sin \theta}{2} \frac{\partial B}{\partial t} dz = -\frac{a^2 \sin \theta}{4} \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{a^2 \sin \theta}{4} B_o \omega \sin \omega t$$

Sur CF et ED,  $d\vec{l} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y$  et donc  $\vec{E}_m \cdot d\vec{l} = -\frac{z}{2} \frac{\partial B}{\partial t} dx$ , soit :

$$\int_C^F \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \int_{\frac{a \sin \theta}{2}}^{-\frac{a \sin \theta}{2}} 0 dx = 0 \text{ car le segment [CF] est à une altitude } z = 0.$$

$$\int_E^D \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \int_{\frac{a \sin \theta}{2}}^{-\frac{a \sin \theta}{2}} -\frac{a}{2} \frac{\partial B}{\partial t} dx = \frac{a^2 \sin \theta}{4} B_o \omega \sin \omega t$$

On obtient donc :

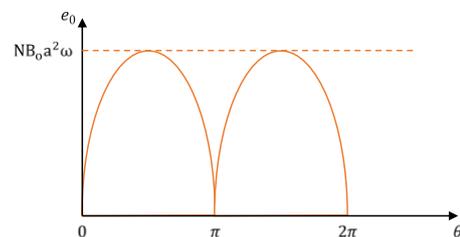
$$e(t) = NB_o a^2 \omega \sin \theta \cos \omega t$$

4- L'amplitude de la force électromotrice est une grandeur toujours positive.

Donc  $e(t) = NB_o a^2 \omega |\sin \theta|$

**La force électromotrice  $e$  est une fonction croissante de la fréquence du champ magnétique  $\vec{B}$  et varie en  $|\sin \theta|$ .**

Le graphe de l'amplitude en fonction de  $\theta$  est le suivant :



5- Application numérique :  $e_\theta = 942 \text{ mV}$ .

■ **Exercice.3 :**

Dans un premier temps, on détermine le champ magnétique dans tout l'espace en utilisant le théorème d'Ampère. Pour cela, on étudie le champ magnétique  $\vec{B}(M, t)$  créé par un fil infini parcouru par un courant  $i$ . On utilise les coordonnées cylindriques et la base associée  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ . On oriente le fil suivant  $\vec{u}_z$  de sorte que le courant soit aussi orienté dans le sens

Soit un point M de l'espace situé à une distance  $r$  du fil, on étudie les symétries et invariances afin de trouver la direction du champ magnétique et les variables dont il dépend.

Le plan  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$  est un plan de symétrie. Le champ magnétique  $\vec{B}$  est donc dirigé suivant  $\vec{u}_\theta$ . La direction de courant est invariante par rotation d'angle  $\theta$  et par translation suivant  $\vec{u}_\theta$ . Le champ  $\vec{B}$  ne dépend donc que de la variable  $r$ .

D'où : 
$$\vec{B}(M, t) = B(r, t)\vec{u}_\theta.$$

On applique le théorème d'Ampère sur un contour circulaire  $\Gamma$  de rayon  $r$  placée à une cote  $z$  constante. On oriente le contour de sorte que  $i$  soit dirigé dans le sens de la normale. Donc  $d\vec{l} = r d\theta \vec{u}_\theta$ . Ainsi, le théorème d'Ampère s'énonce :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r, t) \times 1\pi r = \mu_0 i$$

Ceci donne :

$$\vec{B}(M, t) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

2- **1<sup>ère</sup> méthode :**

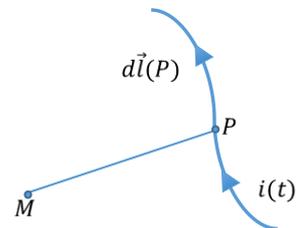
Le potentiel vecteur  $\vec{A}$  est la solution de l'équation de Poisson où :  $\Delta \vec{A} + \mu_0 \vec{j} = \vec{0}$  où  $\Delta$  est l'opérateur laplacien.

La solution est de la forme  $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{P \in \tau} \frac{\vec{j}(P)}{PM} d\tau$  pour une densité de courant volumique  $\vec{j}$ .

Pour un fil parcouru par un courant  $i(t)$ , on pourra écrire

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{fil} \frac{i(t)}{PM} d\vec{l}(P),$$

Où  $d\vec{l}(P)$  est un déplacement élémentaire autour du point P situé sur le fil.



Le vecteur déplacement élémentaire  $d\vec{l}(P)$  est dirigé suivant le vecteur  $\vec{u}_z$  qui ne dépend pas du point P, donc le potentiel vecteur  $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \int_{fil} \frac{i(t)}{PM} dl(P) \right) \vec{u}_z$  est aussi dirigé suivant  $\vec{u}_z$ .

**2<sup>ème</sup> méthode :**

Les plans  $z = Cte$  sont antisymétriques pour la distribution de courant. Par conséquent, comme le potentiel vecteur  $\vec{A}$  est un « vrai vecteur » ( par opposition au champ magnétique  $\vec{B}$  qui est un « pseudo-vecteur », il est orthogonal à ces plans et il est ainsi dirigé suivant  $\vec{u}_z$ .

Le fil est infini donc invariant par translation suivant  $\vec{u}_z$  et aussi invariant par rotation d'angle  $\theta$  des coordonnées cylindriques.

On en déduit :

$$\vec{A}(M) = A(r)\vec{u}_z$$

3- Le calcul du potentiel vecteur  $\vec{A}$  est évident en considérant  $\vec{B} = \overrightarrow{rot} \vec{A}$

On a :  $\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{u}_\theta = \overrightarrow{rot} \vec{A} = -\frac{\partial A(r)}{\partial r} \vec{u}_\theta$

On en déduit :  $A(r) = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln(r) + k$  où  $k$  est une constante d'intégration.

Le potentiel vecteur étant nul à la distance  $R$  de l'axe  $Oz$ , on a donc  $k = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln(R)$

On trouve alors :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{R}\right) \vec{u}_z$$

4- Par définition

$$\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}(M)}{\partial t} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{R}\right) \frac{di}{dt} \vec{u}_z$$

5- a/ Orientons tout d'abord le contour dans le sens ACDE. Par définition, on a :

$$e = N \oint_{ACDE} \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = N \left( \int_A^C \vec{E}_m \cdot d\vec{l} + \int_C^D \vec{E}_m \cdot d\vec{l} + \int_D^E \vec{E}_m \cdot d\vec{l} + \int_E^A \vec{E}_m \cdot d\vec{l} \right)$$

Car le cadre est constitué de  $N$  spires.

Sur les côtés AC et DE, le déplacement élémentaire  $d\vec{l}$  est dirigé selon  $\vec{u}_z$  soit  $\vec{E}_m \cdot d\vec{l} = 0$ .

D'où :

$$e = N \left( \int_C^D \vec{E}_m \cdot d\vec{l} + \int_E^A \vec{E}_m \cdot d\vec{l} \right) = N \left[ \int_0^a \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right) \frac{di}{dt} dz + \int_a^0 \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R}{R}\right) \frac{di}{dt} dz \right]$$

Puisque  $d\vec{l} = dz \vec{u}_z$  sur les côtes CD et EA.

D'où :

$$e = \frac{\mu_0 N a}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right) \frac{di}{dt}$$

b/ On calcule le flux du champ magnétique  $\vec{B}$  à travers la cadre  $\Phi = N \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ , où  $S$  représente la surface du cadre et  $d\vec{S} = -drdz \vec{u}_z$  si on conserve l'orientation ACDE du cadre.

On a donc :

$$\Phi = -N \int_0^a dz \int_R^{R+a} \frac{\mu_0 i}{2\pi r} dr = -\frac{\mu_0 N a i}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right)$$

On en déduit que

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 N a}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right) \frac{di}{dt}$$

On retrouve bien le même résultat par les deux méthodes.

6- Par définition, le coefficient d'inductance mutuelle est tel que  $\Phi = Mi$ , où  $\Phi$  désigne le flux magnétique engendré par le fil infini à travers le cadre.

Donc :

$$M = \frac{\mu_0 N a}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right)$$

■ **Exercice :4**

1- Le Disque est placé dans un champ magnétique variable et donc soumis à un phénomène d'induction engendrant un courant qui, du fait de la loi de Lenz, aura tendance par ses conséquences à s'opposer à ses causes.

Les conséquences de ce courant sont notamment l'apparition d'un champ magnétique  $\vec{B}'$  qui sera dirigé dans un sens opposé aux variations du champ  $\vec{B}$ . Donc  $\vec{B}'$  est dirigé suivant  $\vec{u}_z'$ . Ce champ est donc produit par des courants dirigés selon  $\vec{u}_z$  en coordonnées cylindriques.

Le champ magnétique et le disque sont invariant par rotation d'angle  $\theta$  des coordonnées cylindriques.

Donc la densité de courant  $\vec{j}$  est indépendante de  $\theta$ .

On en déduit 
$$\vec{j} = j(r, z, t)\vec{u}_\theta.$$

2- D'après l'équation de Maxwell-Faraday, on a  $\text{rot}\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ .

Donc  $-\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_S \text{rot}\vec{E}_m \cdot d\vec{S} = \oint_\Gamma \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$ , où  $\Gamma$  est le cercle de rayon  $r$  et  $S$  la surface du disque de rayon  $r$ .

D'après la loi d'Ohm, on  $\vec{j} = \gamma \vec{E}_m$ . D'où :  $\frac{2\pi r}{\gamma} j(r, z, t) = -\frac{d\Phi}{dt}(r, t)$ .

Cette relation est vérifiée quelque soit la côte  $z$  du cercle.

Donc : 
$$\vec{j} = j(r, t)\vec{u}_\theta$$

3- On a  $\oint_\Gamma \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \frac{j(r,t)}{\gamma} 2\pi r = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \omega B_0 \pi r^1 \sin\omega t$

Soit :

$$\vec{j}(M, t) = \frac{\gamma \omega B_0 r}{2} \sin\omega t \vec{u}_\theta$$

4- La puissance volumique dissipée par effet Joule est

$$\frac{dP}{dt} = \vec{j} \cdot \vec{E}_m = \frac{j^2}{\gamma} = \gamma \frac{(\omega B_0 r)^2}{4} (\sin\omega t)^2$$

5- La puissance moyenne dissipée est :

$$P = \iiint_{\text{disque}} (\vec{j} \cdot \vec{E}_m) d\tau = \int_0^a \gamma \frac{(\omega B_0 r)^2}{4} \frac{1}{2} r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a dz$$

On obtient :

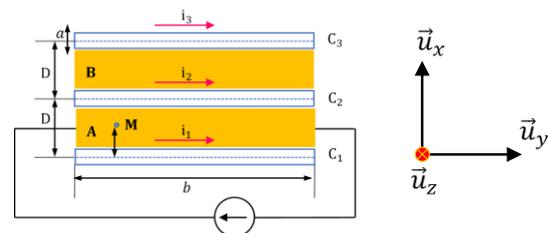
$$P = \gamma \frac{(\omega B_0)^2}{16} \pi a^2 e$$

■ **Exercice.5 :**

1- On place un repère cartésien sur la figure.

Le plan défini par l'axe du conducteur  $C_1$  et les vecteurs  $\vec{u}_y$  et  $\vec{u}_z$  est un plan de symétrie du système.

Les courants dans les conducteurs  $C_1$  et  $C_3$  sont donc identiques :  $i_1 = i_3$ .



2- Le champ magnétique créé par un en conducteur est obtenu grâce au théorème d'Ampère.

On trouve  $\vec{B}_1(M) = -\frac{\mu_0 i_1}{2\pi x} \vec{u}_z$  pour le champ magnétique créé par le conducteur  $C_1$  en M.

De même  $\vec{B}_2(M) = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi(D-x)} \vec{u}_z$  pour le champ magnétique créé par le conducteur  $C_2$  en M et

$\vec{B}_3(M) = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi(2D-x)} \vec{u}_z$  pour le champ magnétique créé par le conducteur  $C_3$  en M.

D'où :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{2\pi} \left( \frac{i_2}{(D-x)} + \frac{i_1}{(2D-x)} - \frac{i_1}{x} \right) \vec{u}_z$$

3- Le flux de ce champ magnétique à travers la surface  $S$  de  $A$  est égal à  $\Phi = N \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ .

On oriente la surface, par exemple, de sorte que la normale soit  $\vec{u}_z$  ( le courant  $i_1$  est alors orienté dans le sens inverse du contour  $\Gamma$  et  $i_2$  est orienté dans le sens du contour  $\Gamma$ ).

Donc :  $\Phi = \frac{\mu_0}{1\pi} \oint_a^{D-a} \left( \frac{i_2}{(D-x)} + \frac{i_1}{(1D-x)} - \frac{i_1}{x} \right) dx \oint_0^h dy$ .

Soit :

$$\Phi = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \left[ -i_2 \ln \left( \frac{a}{(D-a)} \right) - i_1 \ln \left( \frac{D+a}{(1D-a)} \right) - i_1 \ln \left( \frac{D-a}{a} \right) \right]$$

Avec l'approximation  $a \ll D \ll h$ , on obtient

$$\Phi = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \left[ (i_2 - i_1) \ln \left( \frac{a}{D} \right) + i_1 \ln 2 \right]$$

4- La force électromotrice induite  $e$  dans le circuit fermé  $\Gamma$  défini dans l'énoncé est donnée par la loi de Faraday.

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \left[ \left( \frac{di_2}{dt} - \frac{di_1}{dt} \right) \ln \left( \frac{a}{D} \right) + \frac{di_1}{dt} \ln 2 \right] \quad (1)$$

5- On considère le circuit fermé  $\Gamma$  comportant deux conducteurs  $C_1$  ( parcouru par le courant  $i_1$ ) et  $C_2$  ( parcouru par le courant  $i_2$ ), l'équation électrique dans le circuit donne :  $0 = rhi_2 - rhi_1 - e$  où  $rh$  représente la résistance équivalente de chaque conducteur.

On en déduit la relation :  $i_2 - i_1 = \frac{e}{rh}$  (2)

En notation complexe, les équations (1) et (2) donnent :

$$\underline{e} = j\omega \frac{\mu_0 h}{1\pi} \left[ (i_2 - i_1) \ln \left( \frac{a}{D} \right) + i_1 \ln 2 \right] \quad \text{et } i_2 - i_1 = \frac{e}{rh}$$

On trouve alors  $\frac{i_2}{i_1} = 1 - \frac{\ln 2}{\frac{2\pi r}{j\omega\mu_0} + \ln \left( \frac{a}{D} \right)}$ .

On a donc :

$$f(\omega) = \frac{2\pi r}{j\omega\mu_0} + \ln \left( \frac{a}{D} \right)$$

6- En courant continu,  $\omega = 0$ , on trouve  $\frac{i_2}{i_1} = 1$ .

En très haute fréquence,  $\omega = +\infty$ , on obtient :  $\frac{i_2}{i_1} = 1 - \frac{\ln 2}{\ln(\frac{a}{D})} < 1$ .

Les courants sont toujours en phase. Cependant le courant dans le conducteur du milieu devient inférieur aux courants dans les conducteurs extérieurs lorsque la fréquence augmente. Ce phénomène ressemble au phénomène d'effet de peau. Il est dû à l'induction dans les conducteurs.

# CHAPITRE 5

## ENERGIE ÉLECTROMAGNÉTIQUE : VECTEUR DE POYNTING

### 5.1 L'énergie du champ électromagnétique :

On sait que l'énergie est emmagasinée dans condensateur sous tension ou dans une bobine parcourue par un courant. On peut supposer que cette énergie est contenue dans le champ  $\vec{E}$  qui règne entre les armatures du condensateur ou dans le champ de  $\vec{B}$  qui règne à l'intérieur de la bobine.

Un volume  $d\tau$  dans lequel règne un champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$  possède une énergie  $dU_{em} = u_{em}d\tau$  où :

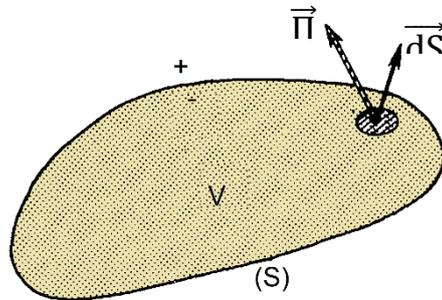
$$u_{em} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Pour un volume fin, on aura ainsi une énergie  $U_{em} = \iiint u_{em} d\tau$

### 5.2 L'équation de conservation de l'énergie

Nous avons l'équation  $div \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$  qui exprime le principe de conservation de la charge. Cette méthode très générale permet d'obtenir l'expression locale de toute loi de conservation.

Soit une surface fermée quelconque (surface de contrôle) qui limite le volume V où règne un champ électromagnétique ( figure. V.1)



Par analogie avec la densité de charge  $\rho$  nous définirons une *densité volumique d'énergie* électromagnétique :

$$w = \frac{dW}{d\tau}$$

(5.1)

Le volume V contient ainsi l'énergie électromagnétique:

$$W = \iiint_V w \, d\tau$$

Exprimons que la puissance fournie par une diminution de  $W$  se retrouve sous forme de puissance cédée à la matière contenue dans  $V$  et sous forme de puissance évacuée à travers  $S$  sous forme de rayonnement.

$$-\frac{dW}{d\tau} = \mathcal{P}_{\text{cédée à la matière}} + \mathcal{P}_{\text{rayonnée}} \quad (5.2)$$

**(C'est le principe de conservation de l'énergie)**

En appliquant la relation de l'expression de la densité volumique de puissance cédée par le champ électromagnétique à la matière, on aura :

$$\mathcal{P}_{\text{cédée à la matière}} = \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} \, d\tau$$

Par analogie avec la densité de courant  $\vec{j}$  qui est telle que

$$i_s = \iint \vec{j} \cdot \vec{dS}$$

Il tentant de chercher à identifier une « densité de courant d'énergie »  $\vec{\Pi}$  telle que :

$$\mathcal{P}_{\text{rayonnée}} = \oiint_S \vec{\Pi} \cdot \vec{dS} \quad (5.3)$$

L'usage est d'appeler  $\vec{\Pi}$  **vecteur de Poynting** ou vecteur radiant.

Nous pouvons maintenant écrire le principe de conservation de l'énergie sous la forme :

$$-\frac{d}{dt} \iiint_V w \, d\tau = \iiint_V -\frac{\partial w}{\partial t} \, d\tau = \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} \, d\tau + \oiint_S \vec{\Pi} \cdot \vec{dS}$$

Transformant la dernière intégrale par la formule de la divergence et remarquant que l'égalité obtenue est réalisé pour un domaine d'intégration quelconque, on obtient l'équation de conservation de l'énergie :

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \text{div } \vec{\Pi} + \vec{j} \cdot \vec{E} \quad (5.4)$$

**Remarque :** La comparaison avec l'équation de conservation de la charge montre que l'analogie entre les couples  $(\vec{j}, \rho)$  et  $(\vec{\Pi}, w)$  n'est pas totale. La présence du terme supplémentaire  $\vec{j} \cdot \vec{E}$  provient de

ce que l'énergie n'est pas intégralement conservée sous forme électromagnétique mais peut être cédée à la matière.

### 5.3 Identification du couple ( $\Pi$ , $w$ )

Multiplions scalairement l'équation de Maxwell-Ampère par  $\vec{E}$  pour faire apparaître  $\vec{J} \cdot \vec{E}$  :

$$\vec{E} \cdot \left( \vec{\nabla} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{J} \cdot \vec{E} + \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

En utilisant successivement la formule relatif aux opérateurs qui est :

$\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{b})$  et l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \vee \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \vee \vec{B}) = -\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \vee \vec{B})$$

En reportant  $\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \vee \vec{B})$  dans la première expression :

$$-\frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{J} \cdot \vec{E} + \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Soit encore

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right] = \vec{\nabla} \cdot \left[ \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right] + \vec{J} \cdot \vec{E}$$

La comparaison de cette expression avec l'équation de conservation de l'énergie ne permet pas de déterminer le **couple (  $\Pi$ ,  $w$  )** de manière unique.

Ainsi :

$$\boxed{\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}} : \text{vecteur de Poynting ( } W \cdot m^{-2} \text{)} \quad (5.5)$$

$$\boxed{w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}} : \text{Densité volumique d'énergie électromagnétique} \quad (5.6)$$

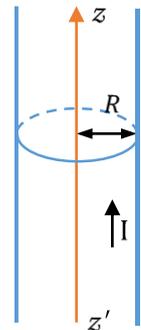
Remarque : Le vecteur de *Poynting* sera utilisé dans le cas des Ondes planes électromagnétiques.

## Exercices résolus

### Exercice.1 :

Monter Un cylindre conducteur de conductivité  $\gamma$ , de rayon  $R$ , de longueur  $h$ , est considéré comme infiniment long et est parcouru par un courant stationnaire uniformément réparti dans la direction de l'axe, d'intensité  $I$ .

- 1- Déterminer le champ électromagnétique en tout point de l'espace.
- 2- En déduire le vecteur de Poynting en tout point de l'espace et son flux à travers la surface cylindrique du conducteur. Commenter le résultat.
- 3- Vérifier l'équation locale de Poynting en tout point. Interpréter.



### Exercice.2 :

Un dispositif est formé de deux armatures sphériques, concentriques et conductrices, de rayons  $a$  et  $b > a$ . L'espace compris entre les armatures possède une conductivité  $\gamma$ . A l'instant  $t = 0$ , l'armature intérieure est chargée avec une charge  $Q_0$ , aucune charge n'est présente ailleurs. On supposera qu'il n'existe aucun champ statique.

- 1- Montrer que la densité volumique de charges  $\rho$  reste nulle au sein du conducteur inter-armatures.
- 2- Établir l'expression du champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$  dans le milieu conducteur.
- 3- Montrer qu'aucune puissance électromagnétique n'est rayonnée par le système. Établir le bilan local des puissances.
- 4- En déduire l'expression de la charge  $Q(t)$  de l'armature intérieure.
- 5- Établir le bilan intégral des puissances et l'intégrer entre les instants  $t = 0$  et  $t = +\infty$ .

### Exercice.3 :

On charge un condensateur plan de capacité  $C$  à travers une résistance  $R$  aux bornes d'un générateur idéal de forme électromotrice  $U$  constante (à  $t = 0$ , le condensateur est déchargé). On suppose que ses armatures sont circulaires de surface  $S$  mais qu'elles peuvent être considérées comme des plans infinis séparés par une distance  $d$  de vide (isolant parfait).

- 1- Représenter le schéma électrique et déterminer la loi  $q(t)$ , charge de l'armature positive.
- 2- Déterminer le champ  $\vec{E}(t)$  entre les armatures (on le suppose nul ailleurs). On suppose que la charge est uniformément répartie sur les armatures.
- 3- En déduire que, nécessairement, un champ magnétique  $\vec{B}$  existe entre les armatures. Quelle en est la source ?
- 4- Quelle est la topographie du champ magnétique  $\vec{B}$  (direction, variables) ? Pour cette étude, on ne suppose pas les armatures comme des plans infinis.
- 5- A l'aide de l'équation locale adéquate, montrer que :

$$B = \|\vec{B}\| = \frac{\mu_0 U r}{2RS} e^{-\frac{t}{RC}}$$

- 6- Utiliser le théorème d'Ampère généralisé pour retrouver  $\vec{B}$  entre les armatures.
- 7- Le modèle est-il en accord avec l'ensemble des équations de Maxwell ?
- 8- Bilan énergétique.
  - a- Dans l'étude électrique de ce circuit RC, quelle est la puissance  $P$  reçue par le condensateur ? On l'exprimera en fonction de  $U$ ,  $R$ ,  $C$  et  $t$ .
  - b- En déduire l'énergie  $W$  reçue par le condensateur entre l'origine des dates et l'instant  $t$ .
  - c- Rappeler l'équation locale de Poynting. Donner l'interprétation physique de chaque terme.
  - d- Déterminer l'expression du vecteur de Poynting à l'instant, en fonction de  $U$ ,  $r$ ,  $R$ ,  $S$ ,  $d$ ,  $C$  et  $t$ . On donne l'expression de la capacité de ce condensateur :  $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$ .
  - e- En utilisant le vecteur de Poynting, calculer la puissance  $P$  reçue par l'intérieur du condensateur à l'instant  $t$ . On note  $a$  le rayon des armatures. Conclure.

## Solutions

### ■ Exercice.1 :

1- Tout d'abord, le champ magnétique  $\vec{B}$  de cette distribution a été défini dans l'exercice 3. On avait d'ores et déjà trouvé les résultats suivants :

$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 j \frac{r}{2} \vec{u}_\theta = \mu_0 \frac{I r}{2\pi R^2} \vec{u}_\theta & \text{pour } r \leq R \\ \mu_0 j_0 \frac{R^2}{2r} \vec{u}_\theta = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} \vec{u}_\theta & \text{pour } r \geq R \end{cases}$$

🔍 Etudions maintenant le champ électrique  $\vec{E}$ .

La loi d'Ohm permet alors de déterminer le champ électrique dans le cylindre :  $\vec{E} = \frac{j}{\gamma}$ .

On a donc : pour

$$r \leq R, \vec{E} = \frac{I}{\gamma \pi R^2} \vec{u}_z.$$

Et comme il n'y a pas de distribution de charges, le champ électrique est nul à l'extérieur. On a donc : pour

$$r \geq R, \vec{E} = \vec{0}$$

2- A partir de ces résultats, on peut déterminer le vecteur de Poynting en tout point :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

Pour  $r \leq R$ , on a :  $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{I}{\gamma \pi R^2} \vec{u}_z \wedge \mu_0 \frac{I r}{2\pi R^2} \vec{u}_\theta = -\frac{I^2}{\gamma (\pi R^2)^2} \frac{r}{2} \vec{u}_r$

Pour  $r \geq R$ , on a :  $\vec{E} = \vec{0}$ , on a  $\vec{\Pi} = \vec{0}$

🔍 Le vecteur de Poynting de l'interface entre le conducteur et le vide est :

$$\vec{\Pi} = -\frac{I^2}{\gamma (\pi R^2)^2} \frac{R}{1} \vec{u}_r$$

Le flux du vecteur de Poynting à travers la surface du conducteur est le flux de  $\vec{\Pi}$  à travers la surface

$S$  dont le vecteur surface élémentaire est  $d\vec{S} = dS \vec{u}_r = R d\theta dz \vec{u}_r$

$$\iint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = \iint_S -\frac{I^2}{\gamma (\pi R^2)^2} \frac{R}{2} R d\theta dz = \frac{I^2}{2\gamma \pi^2 R^2} \int_0^h dz \times \int_0^{2\pi} d\theta$$

Donc

$$\iint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = -\frac{h}{\gamma \pi R^2} I^2 = -\frac{h}{\gamma S} I^2$$

### Remarque:

On retrouve que l'énergie électromagnétique cédée par le conducteur à l'extérieur à travers sa surface est négative. Il s'agit donc **d'une énergie reçue par le conducteur**.

Le conducteur ne peut emmagasiner d'énergie. Un bilan énergétique montre alors que cette énergie est forcément cédée à l'extérieur sous une autre forme. Cette énergie est ainsi cédée sous forme d'énergie thermique qu'on appelle « **effet joule** ».

La puissance perdue par effet joule est celle cédée par le champ aux porteurs de charges du conducteur :

$$P_J = \iiint_{\tau} \vec{j} \cdot \vec{E} \, d\tau = \iiint_{\tau} \frac{j^2}{\gamma} \, d\tau = \frac{I^2}{\gamma S^2} \tau = \frac{I^2 h}{\gamma S}$$

3- On distingue deux domaines :

☞ Pour  $r \leq R$ , l'énergie électromagnétique par unité de volume est :

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left( \frac{I^2}{\gamma \pi R^2} \right)^2 + \frac{\mu_0}{2} \left( \frac{Ir}{2\pi R^2} \right)^2$$

Le courant  $I$  est continu donc :  $\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{dW}{dt} \right) = 0$

On calcule  $div \vec{\Pi} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\Pi) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( -\frac{I^2}{\gamma(\pi R^2)^2} \frac{r^2}{2} \right) = \text{et} \frac{I^2}{\gamma(\pi R^2)^2} \quad \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\gamma} \left( \frac{I}{\pi R^2} \right)^2$

Le courant  $I$  est continu donc :  $\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{dW}{dt} \right) = 0$

On calcule  $div \vec{\Pi} + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$

On vérifie que :

$$div \vec{\Pi} + \vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{dW}{dt} \right) = 0$$

L'équation locale de Poynting est donc vérifiée en tout point.

### ☛ Exercice.2 :

1- En tout point  $M$  du conducteur, les équations locales  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$  et  $div \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  sont vérifiées.

On a donc  $\gamma div \vec{E}(M, t) + \frac{\partial \rho}{\partial t}(M, t) = 0$ , et comme  $div \vec{E}(M, t) = \frac{\rho(M, t)}{\epsilon_0}$  (équation de Maxwell-Gauss), on en déduit :

$$\frac{\gamma}{\epsilon_0} \rho(M, t) + \frac{\partial \rho}{\partial t}(M, t) = 0.$$

C'est une équation différentielle du premier degré qui se résout sous la forme :

$$\rho(M, t) = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad , \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma}$$

Or, à  $t = 0$ , on a  $\rho = 0$  (conducteur non chargé), donc  $\rho_0 = 0$ , soit  $\rho(M, t) = 0$

2- ☺ La distribution de charges est à symétrie sphérique, on utilisera donc les coordonnées sphériques et les vecteurs de base associés  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ .

☺ On cherche à déterminer en premier le champ électrique puisque l'on a une distribution de charges fixes à l'instant initial. On étudie les symétries et invariances du champ électrique en un point  $M$  de l'espace conducteur. Donc le champ électrique  $\vec{E}$  est dirigé selon  $\vec{u}_r$ .

La distribution de charge est invariante par les rotations d'angle  $\theta$  et  $\varphi$ . Le champ électrique n'est alors fonction que de la variable  $r$ .

Donc : 
$$\vec{E}(\mathbf{M}, t) = E(r, t)\vec{u}_r$$

☺ Afin d'établir l'expression du champ électrique, on utilise le théorème de GAUSS sur une surface  $S$  à  $r$  constant, c'est-à-dire une sphère:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Or l'élément de surface est orienté suivant  $\vec{u}_r$ , donc  $\vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r) dS$  où  $E(r)$  est constant sur la surface d'intégration.

D'où

$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_S E(r) dS = E(r) \oiint_S dS = E(r) S = \frac{Q(t)}{\epsilon_0}$  où  $S = 4\pi r^2$  et  $Q(t)$  est la charge de l'armature de rayon  $a$ .

On en déduit :

$$\vec{E}(a < r < b) = \frac{Q(t)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

☺ Le champ électrique est dirigé selon  $\vec{u}_r$  et ne dépend que de  $r$  : Donc  $\overrightarrow{rot} \vec{E} = \vec{0}$ .

Ce qui conduit, d'après l'équation de Maxwell-Faraday, à  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$ .

Comme il n'existe aucun champ électrique statique, on obtient :  $\vec{B}(a < r < b) = \vec{0}$ .

3- ☺ La puissance électromagnétique rayonnée par le système correspond au flux du vecteur de Poynting à travers la surface fermée entourant le volume du conducteur.

Or le champ magnétique est nul à l'intérieur du conducteur et sur l'interface puisqu'il n'y a pas de courant surfacique. Il en est donc de même du vecteur de Poynting.

On en conclut qu'**aucune puissance électromagnétique n'est rayonnée par le système.**

☺ Le bilan énergétique local est représenté par l'équation locale de Poynting qui s'écrit :

$$\text{div } \vec{R} + \vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{dW}{dt} \right) = 0 \text{ où } \frac{dW}{dt} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{Q(t)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2.$$

On calcule

$$\text{div } \vec{R} = 0 \text{ et } \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2 = \gamma \left( \frac{Q(t)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2.$$

On obtient alors

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{dW}{dt} \right) = -\text{div } \vec{R} - \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma \left( \frac{Q(t)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 = -\frac{\epsilon_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{Q(t)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{dQ(t)}{dt}$$

Ceci s'écrit alors sous la forme d'une équation différentielle traduisant le bilan énergétique en tout point du conducteur :

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{\gamma}{\epsilon_0} Q(t)$$

4- On en déduit l'expression de  $Q(t)$  qui est  $Q(t) = Q_0 e^{-\frac{\gamma}{\epsilon_0} t}$ .

5- ☺ La puissance dissipée par effet Joule est :

$$P_j = \iiint_{\tau} \vec{j} \cdot \vec{E} \, d\tau$$

Où  $\tau$  représente le volume du conducteur compris entre les armatures et  $d\tau$  est un élément de volume de ce conducteur.

Donc :

$$P_j = \iiint_{\tau} \vec{j} \cdot \vec{E} \, d\tau = \iiint_{\tau} \gamma \left( \frac{Q(t)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

D'où

$$P_j = \gamma \left( \frac{Q(t)}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \int_a^b \frac{dr}{r^2} \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\gamma}{4\pi} \left( \frac{Q(t)}{\epsilon_0} \right)^2 \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

Si on remplace  $Q(t)$  par son expression, on obtient :

$$P_j = \gamma \frac{Q_0^2}{4\pi\epsilon_0^2} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) e^{-2\frac{\gamma}{\epsilon_0}t}$$

☺ La puissance électromagnétique cédée par le champ est  $P_{res} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \iiint_{\tau} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \, d\tau \right)$  où  $\tau$  représente le volume du conducteur compris entre les armatures et  $d\tau$  est un élément de volume de ce conducteur.

Donc :

$$P_{res} = -\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{Q(t)}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \int_a^b \frac{dr}{r^2} \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \right] = -\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} \frac{Q(t)^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \right]$$

Si on remplace  $Q(t)$  par son expression, on obtient :

$$P_{res} = \gamma \frac{Q_0^2}{4\pi\epsilon_0^2} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) e^{-2\frac{\gamma}{\epsilon_0}t}$$

On retrouve le bilan de puissance. La puissance électromagnétique cédée au conducteur est transformée en puissance thermique par effet de joule :  $P_j = P_{res}$

☺ L'énergie dissipée par effet joule entre les instants  $t = 0$  et  $t = +\infty$  est  $W_j = \int_0^{+\infty} P_j \, dt$ .

$$W_j = \gamma \frac{Q_0^2}{4\pi\epsilon_0^2} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \int_0^{+\infty} e^{-1\frac{\gamma}{\epsilon_0}t} \, dt.$$

On a alors :

$$W_j = \frac{Q_0^2}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

☺ De même, on trouve que l'énergie électromagnétique cédée par le champ au conducteur est :

$$W_{res} = \frac{Q_0^2}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

■ **Exercice.3 :**

1- Le schéma électrique est celui d'un condensateur en série avec une résistance connectés à un générateur de tension U constante.

Par application de la loi des mailles, on obtient l'équation différentielle dont q(t) est solution :

$$U = u_R + u_c = Ri + \frac{q(t)}{C} = R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C}$$

D'où  $RC \frac{dq(t)}{dt} + q(t) = CU$

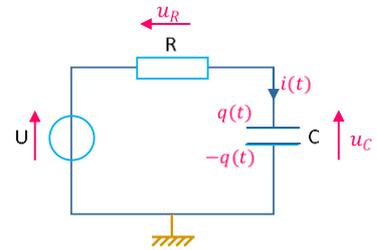
La solution de cette équation différentielle est la somme.

- La solution de l'équation sans second membre de la forme  $q_1(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}}$ , où A est une constante.
- La solution particulière de l'équation avec second membre de la forme  $q_1(t) = CU$ .

Le condensateur étant initialement déchargé ( $q(t = 0) = 0$ ), on détermine ainsi la constante A. On trouve  $A = -CU$ .

On a donc : pour  $t > 0$ ,

$$q(t) = CU(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$



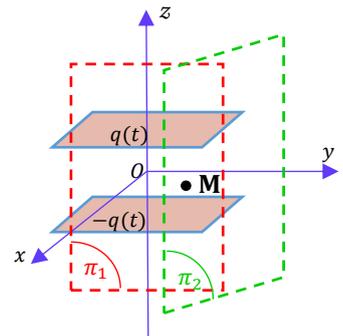
2- Afin de déterminer le champ électrique entre les armatures, on utilise le théorème de GAUSS.

■ Les armatures sont uniformément chargées et peuvent être considérées comme des plans infinis donc elles sont invariantes par les translations selon les axes (Ox) et (Oy). Le champ électrique est donc indépendant des variables x et y.

■ Soit un point M quelconque entre les armatures, les plans  $\pi_1 = (Myz)$  et  $\pi_2 = (Mxz)$  sont des plans de symétries de la distribution de charges.

Donc le champ électrique est dirigé selon l'axe intersection des deux plans, c'est-à-dire (Oz).

On a donc  $\vec{E}(M) = E(z)\vec{u}_z$

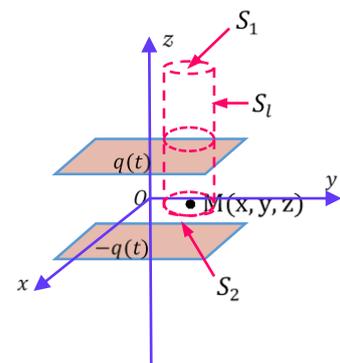


On peut alors appliquer le théorème de GAUSS. Pour cela, on définit une surface  $S_G$  de Gauss cylindrique dont les bases sont situées de part et d'autre de l'armature positive comme indiqué sur la figure ci-contre.

$S_1$  représente la section du cylindre qui se trouve en-dehors de l'espace inter-armatures,  $S_2$  représente la section où se trouve le point M d'étude et  $S_l$  représente la surface latérale du cylindre.

On a donc  $\oint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q(t)}{\epsilon_0}$  où  $S_G$  représente la surface fermée du cylindre,  $d\vec{S}$  est un élément de surface du cylindre et  $Q(t)$  est la charge contenue dans le cylindre.

Soit :  $\oint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_l} \vec{E} \cdot d\vec{S}$



Or, la surface latérale,  $d\vec{S}$  est orthogonal à  $\vec{E}$  donc  $\iint_{S_l} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ . De plus, le champ électrique est nul sur la surface  $S_1$  donc  $\iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ . Enfin le vecteur  $d\vec{S}$  est colinéaire à  $-\vec{u}_z$  sur la surface  $S_2$  et le champ électrique ne dépend que de la variable  $z$  donc :

$$\iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = -E(z)S_2$$

La surface de l'armature contenue dans le cylindre est identique à la surface  $S_2$  et chargée avec une densité  $\sigma(t)$ . Donc  $Q(t) = \sigma(t)S_2$

Il reste à déterminer  $\sigma(t)$ . On sait que la charge  $q(t)$  est répartie uniformément sur les armatures cylindriques de surface  $S$ . Donc  $\sigma(t) = \frac{q(t)}{S}$ .

D'où :  $\oiint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = -E(z)S_2 = \frac{Q(t)}{\epsilon_0} = \frac{q(t)}{\epsilon_0 S} S_2$

On en déduit :

$$\vec{E} = -\frac{q(t)}{\epsilon_0 S} \vec{u}_z = -\frac{CU(1 - e^{-\frac{t}{RC}})}{\epsilon_0 S} \vec{u}_z$$

3- D'après l'équation de Maxwell-Ampère,  $\overrightarrow{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ . Or, le milieu entre les armatures est un isolant parfait, il ne peut donc y avoir de densité de courant :  $\vec{j} = \vec{0}$ . Cependant, le champ électrique dépend du temps donc  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \neq 0$ . **Il existe donc un champ magnétique  $\vec{B}$  tel que  $\overrightarrow{rot} \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ . Champ magnétique est présent du fait des variations temporelles du champ électrique.**

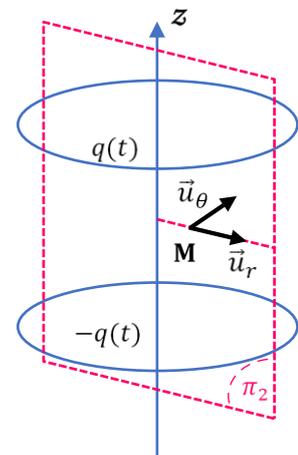
4- Pour l'étude du champ magnétique, on considère les armatures circulaires. On utilise alors les coordonnées cylindriques.

Soit M un point de l'espace entre les armatures, le plan  $\pi_1 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$  est un plan de symétrie de la distribution et du champ électrique donc le champ magnétique est normal à ce plan.

Les armatures et le champ électrique sont invariants par rotation d'angle  $\theta$ . Le champ magnétique est donc indépendant de l'angle  $\theta$ .

On trouve alors :

$$\vec{B} = B(r, z, t) \vec{u}_\theta$$



5- L'équation que l'on utilise est l'équation de Maxwell-Ampère en coordonnées cylindriques.

$$\overrightarrow{rot} \vec{B} = -\frac{\partial B(r, z, t)}{\partial z} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [rB(r, z, t)] \vec{u}_z = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{U e^{-\frac{t}{RC}}}{SR} \vec{u}_z.$$

On a  $\frac{\partial B(r, z, t)}{\partial z} = 0$  et  $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [rB(r, z, t)] = -\mu_0 \frac{U e^{-\frac{t}{RC}}}{SR}$

On en déduit que  $\vec{B}$  est indépendant de  $z$  et que :

$$rB(r, t) = -\mu_0 \frac{U e^{-\frac{t}{RC}} r^2}{2SR} + k \text{ où } k \text{ est une constante ( indépendante de } z)$$

Afin de déterminer la constante, on cherche une valeur particulière du champ magnétique. En tout point  $M$  de l'axe, tout plan contenant l'axe est plan de symétrie. Le champ magnétique est donc nul sur l'axe :  $\vec{B}(r = 0, t) = \vec{0}$ . D'où  $k = 0$ .

On a donc :

$$\vec{B}(r, t) = -\mu_0 \frac{Ur}{2SR} e^{-\frac{t}{RC}} \vec{u}_\theta$$

6- On applique le théorème d'Ampère sur un contour  $\Gamma$  circulaire de rayon  $r$  et placé à la cote  $z$ .

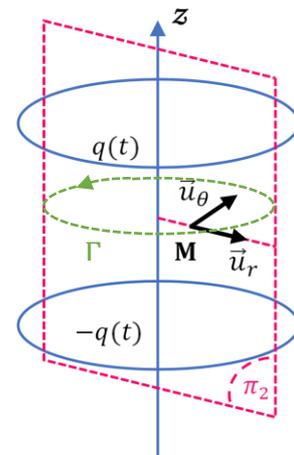
On se trouve dans un milieu isolant donc:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

Où  $S$  est une surface qui prend appui sur le contour. On suppose que cette surface est celle du disque du rayon  $r$ . Le contour est orienté dans le sens défini sur la figure donc  $d\vec{l} = r d\theta \vec{u}_\theta$ .

Le champ magnétique est constant sur le contour, voilà pourquoi on a :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r, t) \times 2\pi r.$$



La surface  $S$  est indiquée sur la figure précédente. C'est une surface à  $z$  constant et  $\vec{E}$  reste alors constant aussi. D'après l'orientation du contour,  $d\vec{S} = dS \vec{u}_z$ .

$$\text{Donc } \mu_0 \epsilon_0 \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \times \pi r^2$$

$$\text{On en déduit que } B(r, t) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \times \frac{r}{2} = -\mu_0 \frac{Ur}{2SR} e^{-\frac{t}{RC}}$$

On trouve alors :

$$\vec{B}(r, t) = -\mu_0 \frac{Ur}{2SR} e^{-\frac{t}{RC}} \vec{u}_\theta$$

7- L'équation de Maxwell-Ampère est forcément vérifiée.

🔊 L'équation de Maxwell-Gauss  $\text{div } \vec{E} = 0$  est vérifiée car le champ électrique est dirigé suivant  $\vec{u}_z$  et indépendant de  $z$ .

🔊 L'équation de Maxwell-flux  $\text{div } \vec{B} = 0$  est vérifiée car le champ magnétique est dirigé suivant  $\vec{u}_\theta$  et indépendant de  $\theta$ .

🔊 En revanche,  $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$  car  $\vec{E}$  est indépendant des coordonnées spatiales et  $\frac{\partial \vec{B}(r, t)}{\partial t} = \mu_0 \frac{Ur}{2SR^2 C} e^{-\frac{t}{RC}} \vec{u}_\theta \neq \vec{0}$ . **L'équation de Maxwell-Faraday n'est pas vérifiée.**

On conclut que le modèle est insuffisant pour rendre compte des caractéristiques des champs électrique et magnétique.

8- a/ L'étude électrique permet de déterminer la puissance reçue par le condensateur  $P = u_c(t)i(t)$  où  $u_c(t) = \frac{q(t)}{C}$  représente la tension aux bornes du condensateur et  $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$  est le courant traversant le condensateur compté positivement dans la convention récepteur.

On obtient  $P = \frac{q(t)}{C} \frac{dq(t)}{dt}$  où  $q(t) = CU(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$  :

Donc :

$$P(t) = \frac{U^2}{R} e^{-\frac{t}{RC}} (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

b/ L'énergie reçue par le condensateur est  $W = \int_0^t P(t) dt$

On trouve :

$$W(t) = \frac{CU^2}{2} (1 - 2e^{-\frac{t}{RC}} + e^{-2\frac{t}{RC}}) = \frac{CU^2}{2} (1 - e^{-\frac{t}{RC}})^2$$

c/ L'équation locale de Poynting est :

$$\text{div } \vec{R} + \vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{dW}{dt} \right) = 0$$

- $\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{dW}{dt} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} \right)$  représente la puissance électromagnétique volumique cédée par le champ électromagnétique et reçue par le système.
- $\vec{j} \cdot \vec{E}$  représente la puissance volumique cédée par le système aux porteurs de charges. Dans notre cas  $\vec{j} \cdot \vec{E} = \vec{0}$ .
- $\text{div } \vec{R} = -\text{div} \left( \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right)$  représente la puissance reçue par le système par le rayonnement électromagnétique.

d/ Le vecteur de Poynting est  $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = -\frac{CU^2 r}{2\epsilon_0 S^2 R} e^{-\frac{t}{RC}} (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \vec{u}_r$ .

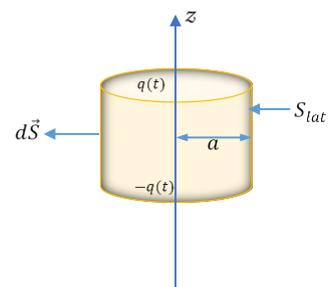
Or, on donne  $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$ .

Donc :

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = -\frac{U^2 r}{2SRd} e^{-\frac{t}{RC}} (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \vec{u}_r$$

e/ La puissance cédée par le condensateur est égal au flux du vecteur de Poynting à travers la surface délimitant le condensateur.

La puissance reçue correspond au flux de  $-\vec{R}$  à travers la surface latérale du condensateur puisque  $\vec{R}$  est dirigé selon  $\vec{u}_r$ . Cette surface latérale  $S_{lat}$  est la surface du cylindre de bases des deux armatures du condensateur. Tous les points de cette surface se trouvent à la distance  $a$  de l'axe et l'élément de surface est orienté suivant  $\vec{u}_r$ .



Donc  $P_{re\dot{c}ue} = - \iint_{S_{lat}} \vec{R} \cdot d\vec{S} = - \iint_{S_{lat}} \frac{U^2 a}{2SRd} e^{-\frac{t}{RC}} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) ad\theta dz$

$$P_{re\dot{c}ue} = \frac{U^2 a}{2SRd} e^{-\frac{t}{RC}} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-d/1}^{d/2} dz = \pi \frac{U^2 a^2}{SR} e^{-\frac{t}{RC}} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

Avec  $S = \pi a^2$ , on retrouve :

$$P(t) = \frac{U^2}{2} e^{-\frac{t}{RC}} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

On retrouve le même résultat qu'à la question 8) a/. Le modèle que l'on utilise semble donc être cohérent pour l'étude énergétique du condensateur.

## Annexe A

### RAPPEL DES POINTS IMPORTANTS

#### I : Les postulats de l'électromagnétisme classique.

##### 1°) Les équations de Maxwell relatives au champ électromagnétique.

Le champ électromagnétique  $\{\vec{E}, \vec{B}\}$  en un point M à la date  $t$  dû à une distribution caractérisée dans le référentiel d'étude supposé galiléen, par la densité volumique totale de charges  $\rho_{tot}$  et le vecteur densité volumique totale de courants  $\vec{j}_{tot}$  satisfait aux équations ci-dessous :

<u>Formulation locale</u>		<u>Les relations intégrales.</u>
$\text{div}\vec{E} = \frac{\rho_{tot}}{\epsilon_0}$ (équation de <u>Maxwell - Gauss</u> ). $\epsilon_0$ est la <u>permittivité absolue du vide</u> . Les lignes de champ $\vec{E}$ divergent à partir des charges + pour aboutir aux charges -.	①	$\oiint_{M \in \Sigma} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}_{ext}(M) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$ <u>théorème de Gauss</u> .
$\text{div}\vec{B} = 0$ ( $\vec{B}$ est un <u>champ de rotationnel</u> ). Les lignes de champ $\vec{B}$ sont des courbes fermées et ne peuvent jamais se couper (il n'existe pas de « monopôles magnétiques » comme il existe des charges électriques positives ou négatives).	②	$\oiint_{M \in \Sigma} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S}_{ext}(M) = 0$ $\vec{B}$ est à <u>flux conservatif</u> (Le flux de $\vec{B}$ à travers un circuit ne dépend que du circuit et non de la surface choisie pour calculer ce flux).
$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (équation de <u>Maxwell - Faraday</u> ).	③	$\oint_{M \in \Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{OM} = -\frac{d\Phi_s(\vec{B})}{dt}$ , S s'appuie sur $\Gamma$ . <u>Relation de Faraday</u> .
$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}_{tot} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (équation de <u>Maxwell - Ampère</u> ). $\mu_0$ est la <u>perméabilité absolue du vide</u> .	④	$\oint_{M \in \Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{OM} = \mu_0 \iint_{P \in S} \vec{j}_{tot} \cdot d\vec{S} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_s(\vec{E})}{dt}$ où S s'appuie sur $\Gamma$ orienté. Forme <u>généralisée</u> du <u>théorème d'Ampère</u> .

Il découle des relations précédentes que :

Le champ électrique  $\vec{E}$  se comporte comme un vecteur polaire (donc contenu dans tout plan de symétrie des sources) tandis que le champ magnétique  $\vec{B}$  se comporte comme un vecteur axial (donc perpendiculaire à tout plan de symétrie des causes).

Les équations de Maxwell sont linéaires vis-à-vis des sources : cette propriété valide le principe de superposition relatif à  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ . En particulier, cette linéarité permet d'utiliser la méthode complexe pour les calculs des champs.

□ **Unités et valeurs des constantes électromagnétiques du vide  $\epsilon_0$  et  $\mu_0$ .**

En u.s.i ,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$  et  $\epsilon_0 = \frac{1}{36 \cdot \pi \cdot 10^9} \text{ F.m}^{-1}$ .

□ **Mise en évidence du champ électromagnétique : loi de force.**

Le formalisme de l'électromagnétisme est complet à condition d'ajouter aux 4 équations locales la loi de force permettant de mettre en évidence la présence d'un champ électromagnétique.

**Loi de force de Lorentz** :  $\vec{F}_{Lorentz} = q[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}]$  : force agissant sur une particule chargée de charge  $q$ , en mouvement dans le référentiel d'étude à la vitesse  $\vec{v}$ , où règne le champ électromagnétique  $\{\vec{E}, \vec{B}\}$ .

✦ **Action d'un champ électromagnétique sur un conducteur : force de Laplace.**

La **force de Laplace** est la force exercée par le champ  $\{\vec{E}, \vec{B}\}$  sur l'ensemble des charges d'un conducteur. Elle correspond à la force magnétique exercée sur les porteurs mobiles du conducteur.

La **force de Laplace** par unité de volume s'écrit :  $\frac{d\vec{F}_{Laplace}}{d\tau} = \vec{j} \wedge \vec{B}$ .

Pour un circuit filiforme parcouru par un courant  $I$ , La **force de Laplace** élémentaire s'exerçant sur un élément de longueur  $d\vec{l}$  est  $d\vec{F}_{laplace} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$ .

**1°) Énergie du champ électromagnétique.**

Un champ électromagnétique contient et transporte de l'énergie. On définit :

□ **L'énergie électromagnétique volumique.**

La quantité  $\varpi = \frac{1}{2} \epsilon_0 \|\vec{E}\|^2 + \frac{\|\vec{B}\|^2}{2\mu_0}$ , homogène à une énergie volumique (exprimée en SI en  $\text{J/m}^3$ ) est appelée **énergie électromagnétique volumique** (ou improprement **densité volumique d'énergie électromagnétique**). Cette expression montre que l'énergie est localisée dans le champ électromagnétique lui-même.

En isolant les contributions dues à  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  on distingue:

$$\varpi_{el} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \|\vec{E}\|^2, \text{ énergie électrique volumique} \quad \text{et} \quad \varpi_{mag} = \frac{\|\vec{B}\|^2}{2\mu_0}, \text{ énergie magnétique volumique.}$$

□ **Le vecteur de Poynting.**

On note  $\vec{\Pi}$  le vecteur, appelé **vecteur de Poynting**, défini par :  $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$

$\|\vec{\Pi}\|$  est homogène à une **puissance surfacique**, exprimé en SI en  $\text{W.m}^{-2}$

□ **Puissance volumique cédée aux charges par le champ électromagnétique :**

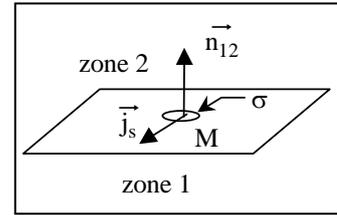
*Puissance Joule volumique* cédée à la matière par le champ électromagnétique :  $\frac{dP_J}{d\tau} = \vec{j}_{tot} \cdot \vec{E}$ .

**3°) Les relations de passage du champ électromagnétique.**

Soit M un point d'une surface S séparant deux milieux notés ① et ②. On définit le vecteur unitaire  $\vec{n}_{11} \perp$  à S de ① vers ②.

Soit  $\sigma(M)$  la densité surfacique de charges et  $\vec{j}_S(M)$  le vecteur densité de courants surfacique au point M.

On établit à partir des équations de Maxwell les relations de passage pour  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  à l'interface:



$$\vec{E}_2(M) - \vec{E}_1(M) = \frac{\sigma(M)}{\epsilon_0} \vec{n}_{12} \quad \text{et} \quad \vec{B}_2(M) - \vec{B}_1(M) = \mu_0 \vec{j}_s(M) \times \vec{n}_{12}.$$

On retient qu'il y a continuité de la *composante tangentielle pour  $\vec{E}$*  et *continuité de la composante normale pour  $\vec{B}$* .

NB : *Dans le cas d'une modélisation volumique de charges ou de courants, les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont définis et continus en tout point de l'espace.*

Des problèmes de discontinuité peuvent survenir lorsqu'on passe à une modélisation plus simpliste (surfactive ou encore linéique).

Rappelons les équivalences des distributions de charges et de courant au voisinage de M :

$$dq = \begin{cases} \rho \cdot d\tau \\ \sigma \cdot dS \\ \lambda \cdot d\ell \end{cases} \quad \text{et} \quad d\vec{C} = \begin{cases} \vec{j} \cdot d\tau \\ \vec{j}_S \cdot dS \\ i \cdot d\ell \end{cases}$$

**4°) Les lois de conservation déduites des équations de Maxwell.**

□ **Principe de conservation de la charge électrique.**

✦ *Sous forme intégrale :*

Le courant électrique total sortant d'une surface fermée  $\Sigma$  est égal à la diminution par unité de temps de la charge électrique totale contenue dans le volume V limité par  $\Sigma$  :  $I = \oiint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S}_{ext} = -\frac{dQ_{int}}{dt}$ .

✦ *Sous forme locale :*  $div \vec{j} + \frac{\partial \rho_{tot}}{\partial t} = 0$ . Cette dernière équation se retrouve à partir des

équations de Maxwell en écrivant que  $div(\overrightarrow{rot}(\vec{B})) = 0$ .

□ **Le cadre de l'A.R.Q.S.**

Dans le cadre de l'Approximation des Régimes Quasi Stationnaires (A.R.Q.S.), l'équation de conservation de la charge s'écrit :  $div \vec{j} = 0$  (sous forme locale) ou  $\oiint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S}_{ext} = 0$  (forme intégrale).

On reconnaît dans cette dernière relation **la loi des nœuds** établie en électrocinétique.

Le cadre de l'A.R.Q.S. consiste à négliger le terme  $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ , appelé **vecteur densité de courant de déplacement** devant les courants réels ( $\vec{j}$ ).

L'A.R.Q.S. couvre un large domaine de fréquences, allant du continu aux fréquences radioélectriques (à la limite de l'infra-rouge), du moins pour les milieux conducteurs.

Dans le cadre de l'A.R.Q.S. l'équation de Maxwell Ampère s'écrit :  $\overrightarrow{rot} \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j}$  sous forme locale, ou sous forme intégrale :  $\oint_{M \in \Gamma} \vec{B}(M) \cdot d\vec{OM} = \mu_0 (\underline{I})_\Gamma$ , où  $(\underline{I})_\Gamma$  est l'intensité algébrique enlacée par le contour  $\square$  orienté. Cette dernière relation est connue sous le nom de **théorème d'Ampère**.

### □ **Principe de conservation de l'énergie électromagnétique.**

On cherche une équation de conservation pour l'énergie comme on l'a fait pour la charge.

Sous forme intégrale: écrire que la diminution par unité de temps de l'énergie électromagnétique contenue dans un volume V est due d'une part à un transfert par rayonnement à travers la surface limitant le volume V, et d'autre part au transfert d'énergie à la matière contenue dans V (énergie cédée aux charges par le champ électromagnétique) :

$$\iint_{\Sigma} \|\vec{\Pi}\| \cdot d\vec{S}_{ext} + \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau = - \frac{d}{dt} \left( \iiint_V \varpi d\tau \right).$$

Sous forme locale:  $div \|\vec{\Pi}\| + \frac{\partial \varpi}{\partial t} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$ , obtenue à partir du bilan intégral, mais qu'on peut retrouver directement à partir des équations de Maxwell par identification du couple  $\{\varpi, \vec{P}\}$ .

## **II : Introduction du potentiel scalaire V et du potentiel vecteur A.**

### **1°) Expressions des champs en fonction des potentiels :**

On définit deux nouveaux champs, un **champ scalaire** noté V, et un **champ vectoriel** noté  $\vec{A}$  à

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

partir desquels on exprime le champ électromagnétique suivant les relations:

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot} \vec{A}$$

V est appelé le **potentiel scalaire** ; son unité SI est le **volt** (symbole **V**).

$\vec{A}$  est appelé le **potentiel vecteur** ; son unité SI est le **weber / mètre** (symbole **Wb.m<sup>-1</sup>**).

### **1°) L'indétermination des potentiels : choix de jauge.**

Le couple  $\{V, \vec{A}\}$  associé à un champ électromagnétique donné **n'est pas unique**. On profite de cette indétermination pour imposer aux potentiels une condition supplémentaire, appelée **condition de jauge**, permettant (si possible !) de simplifier les expressions obtenues pour V et  $\vec{A}$ .

Deux conditions de jauge sont à connaître :

① la **jauge de Coulomb**, pour laquelle on impose :  $div \vec{A} = 0$ .

② la **jauge de Lorentz** pour laquelle on impose :  $div \vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0$ .

☞ La jauge de Coulomb est utilisée dans le cadre des régimes stationnaires ou quasi stationnaires, alors que la jauge de Lorentz est bien adaptée au problème de la propagation du champ électromagnétique (les solutions obtenues pour  $V$  et  $\vec{A}$  sont connues sous le nom de potentiels retardés).

### 3°) Les équations vérifiées par les potentiels.

- ① En jauge de Coulomb :  $V$  est solution de l'équation de Poisson, comme en électrostatique.

$$\Delta \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial t^2} + \mu_0 \vec{j}_{tot} = \vec{0}$$

- ② En jauge de Lorentz :

$$\Delta V - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho_{tot}}{\epsilon_0} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{A} &= 0 \\ \Delta_M V + \frac{\rho(M)}{\epsilon_0} &= 0 \end{aligned}$$

## Annexe B

## QUELQUES THEOREMES UTILES EN ELECTROMAGNETISME

### B-1 Circulation et Flux d'un champ de vecteurs

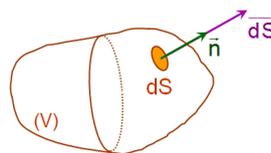
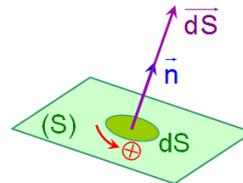
#### ➤ Orientation d'une surface

- Surface ouverte (S)

Le vecteur -surface  $\vec{dS} = \vec{n} \cdot dS$  :

$\vec{n}$  étant le vecteur unitaire normal à  $dS$

- Surface fermée : orientée de l'intérieur vers l'extérieur

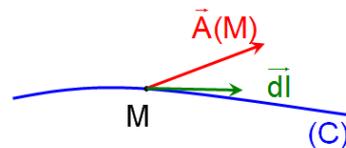


#### ➤ Circulation d'un vecteur

Le point d'application de  $\vec{A}(M)$  décrit la courbe (C).

Aussi,  $dC = \vec{A}(M) \cdot \vec{dl}$  = circulation élémentaire.

Ceci dit :  $C = \int_C \vec{A}(M) \cdot \vec{dl}$

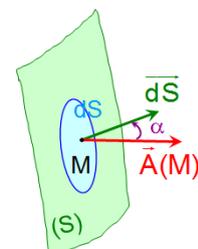


#### ➤ Flux d'un vecteur à travers une surface

Soit (S) surface orientée quelconque. Nous avons  $d\Phi = \vec{A}(M) \cdot \vec{dS}$  = flux élémentaire

$\Rightarrow \Phi = \iint_S \vec{A}(M) \cdot \vec{dS}$  avec  $\Phi = \iint_S |\vec{A}(M)| \cdot dS \cos \alpha$ .

Notons que  $\Phi = 0$  si  $\vec{A}(M) \perp \vec{dS}$



## Annexe C

### RELATIONS UTILES ET OPERATION VECTORIELLE EN COORDONNEES CARTESIENNES, CYLINDRIQUES ET SPHERIQUES.

On peut rappeler, sans le démontrer, quelques relations vectorielles utiles en électromagnétisme. Considérons pour cela :

- Les nombres complexes  $a$  et  $b$ .
- Les nombres scalaires  $U(M)$  et  $V(M)$ .
- Les fonctions vectorielles  $\vec{A}(M)$  et  $\vec{B}(M)$

$$\diamond \overrightarrow{\text{grad}} \left[ aU(M) + bV(M) \right] = a \overrightarrow{\text{grad}}U(M) + b \overrightarrow{\text{grad}}V(M)$$

$$\diamond \overrightarrow{\text{grad}} \left[ U(M)V(M) \right] = U(M) \overrightarrow{\text{grad}}V(M) + V(M) \overrightarrow{\text{grad}}U(M)$$

$$\diamond \overrightarrow{\text{grad}} \left[ \vec{A}(M) \cdot \vec{B}(M) \right] = \left[ \vec{A}(M) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right] \vec{B}(M) + \left[ \vec{B}(M) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right] \vec{A}(M) \\ + \vec{A}(M) \times \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}(M) + \vec{B}(M) \times \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}(M)$$

$$\bullet \text{div} \left[ a\vec{A}(M) + b\vec{B}(M) \right] = a \text{div} \vec{A}(M) + b \text{div} \vec{B}(M)$$

$$\bullet \text{div} \left[ U(M) \cdot \vec{A}(M) \right] = U(M) \text{div} \vec{A}(M) + \vec{A}(M) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}U(M)$$

$$\bullet \text{div} \left[ \vec{A}(M) \times \vec{B}(M) \right] = \vec{B}(M) \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}(M) - \vec{A}(M) \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}(M)$$

$$\bullet \overrightarrow{\text{rot}} \left[ a\vec{A}(M) + b\vec{B}(M) \right] = a \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}(M) + b \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}(M)$$

$$\bullet \overrightarrow{\text{rot}} \left[ U(M) \cdot \vec{A}(M) \right] = U(M) \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}(M) + \overrightarrow{\text{grad}}U(M) \times \vec{A}(M)$$

$$\bullet \overrightarrow{\text{rot}} \left[ \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}(M) \right] = \overrightarrow{\text{grad}} \left[ \text{div} \vec{A}(M) \right] - \Delta \vec{A}(M)$$

$$\bullet \overrightarrow{\text{rot}} \left[ \vec{A}(M) \times \vec{B}(M) \right] = \vec{A}(M) \cdot \text{div} \vec{B}(M) - \vec{B}(M) \cdot \text{div} \vec{A}(M) + \\ \left[ \vec{B}(M) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right] \vec{A}(M) - \left[ \vec{A}(M) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right] \cdot \vec{B}(M)$$

- $\overrightarrow{\text{rot}} \left[ \overrightarrow{\text{grad}} U(M) \right] = 0$
- $\text{div} \left[ \overrightarrow{\text{rot}} A(M) \right] = 0$
- $\text{div} \left[ \overrightarrow{\text{grad}} U(M) \right] = \Delta U(M)$
- $\Delta \left[ U(M) \cdot V(M) \right] = U(M) \cdot \Delta V(M) + 2 \left[ \overrightarrow{\text{grad}} U(M) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} V(M) \right] + V(M) \cdot \Delta U(M)$

	<i>Cartésiennes</i>	<i>Cylindriques</i>	<i>Sphériques</i>
	$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$	$\rho \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $-\infty \leq z \leq +\infty$	$r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi$ et $0 \leq \varphi \leq 2\pi$
	$d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$	$d\vec{l} = d\rho\vec{u}_\rho + \rho d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{k}$	$d\vec{l} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + r \sin\theta d\varphi\vec{u}_\varphi$
	$dV = dx dy dz$	$dV = \rho d\rho d\theta dz$	$dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$
$\overrightarrow{\text{grad}}$	$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$	$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$	$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi$
<i>div</i>	$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin\theta} \left\{ \frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right\}$
$\overrightarrow{\text{rot}}$	$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k}$	$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial(\rho A_\theta)}{\partial z} \right) \vec{u}_\rho + \left( \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial(\rho A_\theta)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} \right) \vec{k}$	$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left( \frac{\partial(r \sin\theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial \varphi} \right) \vec{u}_r + \frac{1}{r \sin\theta} \left( \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r \sin\theta A_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{k}$

# Bibliographie

- [1] Michel Hulin : "*1 -Electromagnétisme : équations de Maxwell*". Armand Colin, 1971
- [2] Hubert GIE. Jean-Pierre SARMANT : "*Electromagnétisme : volume 1*". Collection de sciences physiques, 1985
- [3] Emile Amzallag, Josseline Ben Aïm, Norbert Piccioli : " Electrostatique : Rappels de cours et exercices corrigés de physique". Ediscience, 1996
- [4] Joseph Edminister : "*Electromagnétisme : cours et problèmes*". Série Schaum, Ediscience International, 2000
- [5] José-Philippe Peres ; Robert Carles et Robert Fleckinger : "*Electromagnétisme : fondements et applications*". Dunod, 2002
- [6] <http://melusine.eu.org/syracuse/immae/mp/physique-chimie/electromagnetisme/11.pdf>