

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE - MOHAMED BOUDIAF**

**FACULTE DE GENIE ELECTRIQUE
DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE**



Polycopie du module:

PROPAGATION D'ONDES ET ANTENNES

Mr BENMESSAOUD MOHAMMED TARIK

Department d'électronique, Université des sciences et de la technologie Mohammed
Boudiaf –Oran – Algérie.

3^{ème} année Licence – Electronique
2017-2018

Avant propos

La polycopie que vous tenez entre vos mains est essentiellement destinée aux étudiants qui abordent les modules d'électromagnétisme, propagation d'ondes et antennes

Ces enseignements sont dispensés dans les filières de tronc commun science et technique, certaines filières d'ingénieurs, de licence et de master.

L'objectif de cet ouvrage est essentiellement de mettre à la disposition de l'étudiant un document de travail qui lui permet d'illustrer le cours sur la propagation d'onde et antenne via une série d'exercices d'application type de degré de difficulté variable.

Les pages qui suivent constituent un traité complet de ces deux domaines, depuis l'illustration des équations de Maxwell, jusqu'à la description des antennes les plus développées (Antenne dipôle, Antenne monopole, antenne Yagi-Uda, antenne hélice, antenne cornet, antenne parabolique, antenne imprimée), en passant par l'analyse de la propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux diélectriques.

Oran, 28 août 2017

Chapitre I

EQUATIONS DE MAXWELL

I.1. Analyse Vectorielle

Définition 1. On considère un point M de coordonnées (x, y, z) , dans un repère orthonormé $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, alors le vecteur

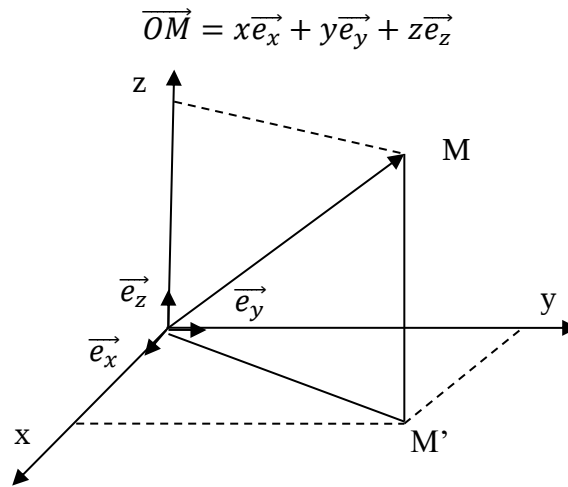


Figure 1.1 Coordonnées cartésiennes.

Et on a :

$$\|\vec{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Soient deux vecteurs :

$$\vec{u} = x_1\vec{e}_x + y_1\vec{e}_y + z_1\vec{e}_z$$

$$\vec{v} = x_2\vec{e}_x + y_2\vec{e}_y + z_3\vec{e}_z$$

Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est donnée par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

et que deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.
On remarque aussi que : $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$

Si $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ désigne l'angle orienté formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a aussi la relation :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$$

D'autre part, le produit vectoriel de deux vecteurs est un vecteur qui est orthogonal $\vec{u}$ et à $\vec{v}$ est qui est donné par :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (y_1 z_2 - z_1 y_2) \vec{e}_x + (z_1 x_1 - x_1 z_2) \vec{e}_y + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \vec{e}_z$$

Si $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ désigne l'angle orienté formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a aussi la relation :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$$

Propriétés : soient trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$, nous avons :

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \wedge \vec{u}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})$$

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{v} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{w}) - \vec{w} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

Définition 1. Champ scalaire. Si a tout point de l'espace, on peut associer une grandeur locale scalaire $F(x, y, z)$, on définit une fonction de point a valeur scalaire $F(M) = F(x, y, z)$. L'ensemble des valeurs prises par $F(M)$ en tout point de l'espace constitue un champ scalaire, comme le Potentiel électrique $V(M)$.

Définition 2. Champ vectoriel. Si a tout point de l'espace, on peut associer une grandeur locale vectorielle $\vec{A}(x, y, z)$, on définit une fonction de point a valeur vectorielle $\vec{A}(M) = \vec{A}(x, y, z)$.

L'ensemble des valeurs prises par $\vec{A}(M)$ en tout point de l'espace constitue un champ vectoriel. le champ électrique $\vec{E}$, le champ magnétique $\vec{B}$. Le champ vectoriel peut être également fonction d'autre variables et en particulier du temps (noté : $\vec{A}(M, t) = \vec{A}(x, y, z, t)$).

A. Gradient et potentiel scalaires

Gradient

Si $F(x, y, z)$ est une fonction à valeurs réelles, dans un repère orthonormé $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, son **gradient** est le vecteur :

$$\overrightarrow{Grad}(F) = \vec{\nabla}(F) = \frac{\partial F}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial F}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{e}_z$$

On peut exprimer également le gradient à l'aide de l'opérateur « nabla » est l'opérateur $\vec{\nabla} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$$

L'opérateur gradient transforme un champ scalaire $F(M)$ en un champ vectoriel $\overrightarrow{Grad}(F)$.

Propriétés de gradient : Si α est une constante réelle, si $F(M)$ et $G(M)$ sont deux fonctions à valeurs réelles différentiables, on a :

$$\overrightarrow{Grad}(F + G) = \overrightarrow{Grad}(F) + \overrightarrow{Grad}(G)$$

$$\overrightarrow{Grad}(\alpha F) = \alpha \overrightarrow{Grad}(F)$$

$$\overrightarrow{Grad}(F \cdot G) = F \overrightarrow{Grad}(G) + G \overrightarrow{Grad}F$$

B. Rotationnel

Le rotationnel d'une fonction vectorielle au point $M(x, y, z)$:

$$\overrightarrow{rot} \vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$$

Le rotationnel peut être également donnée à partir de l'opérateur Nabla comme :

$$\overrightarrow{rot} \vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$$

L'opérateur rotationnel transforme donc un champ vectoriel $\vec{F}$ en un champ également vectoriel $\overrightarrow{rot} \vec{F}$.

Propriétés 1 : Si f est une fonction différentiable, si α est une constante, si $\vec{A}, \vec{A}_1, \vec{A}_2$ sont des champs de vecteurs différentiables, on a les relations :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{rot}(\vec{A}_1 + \vec{A}_2) &= \overrightarrow{rot}(\vec{A}_1) + \overrightarrow{rot}(\vec{A}_2) \\ \overrightarrow{rot}(\alpha \vec{A}) &= \alpha \overrightarrow{rot}(\vec{A}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{rot}(f\vec{A}) &= f\overrightarrow{rot}(\vec{A}) + \overrightarrow{Grad}(f) \wedge \vec{A} \\ \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{Grad}f) &= 0\end{aligned}$$

Propriétés 2 : Soit $\vec{A}$ un champ de vecteurs, supposons que $\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = 0$, alors il existe une fonction f qui vérifie $\overrightarrow{Grad}f = \vec{A}$.

C. Divergence

L'opérateur de divergence transforme donc un champ vectoriel $\vec{F}$ en scalaire, donnée par :

$$div(\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \quad \text{ou} \quad \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$$

Propriété 1

Si f est une fonction, si α est une constante, si $\vec{A}_1, \vec{A}_2$ sont des champs de vecteurs, on a les relations :

$$div(\vec{A}_1 \wedge \vec{A}_2) = \vec{A}_1 \overrightarrow{rot}(\vec{A}_2) - \vec{A}_2 \overrightarrow{rot}(\vec{A}_1)$$

$$div(\alpha \vec{A}) = \alpha \overrightarrow{rot}(\vec{A})$$

$$div(f \vec{A}) = f div(\vec{A}) + \overrightarrow{Grad}(f) \cdot \vec{A}$$

$$div(\vec{A}_1 + \vec{A}_2) = div(\vec{A}_1) + div(\vec{A}_2)$$

Propriété 2 : Champ dérivant d'un potentiel vecteur

On dit que le champ de vecteurs $\vec{A}$ dérive d'un potentiel vecteur, s'il existe un champ de vecteurs $\vec{B}$ deux fois continûment différentiable qui vérifie :

$$\vec{A} = \overrightarrow{rot}(\vec{B})$$

D. Laplacien

C'est un opérateur de second ordre, noté $\vec{\nabla}^2$, qui peut agir sur un champ scalaire ou vectoriel. Laplacien scalaire s'écrit :

$$\nabla^2 F(M) = div[\overrightarrow{grad}F(M)] = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

La notation ∇^2 , pour désigner le laplacien, découle du formalisme utilisant l'opérateur $\vec{\nabla}$.

$$div[\overrightarrow{grad}F(M)] = \vec{\nabla} \cdot [\vec{\nabla}F(M)] = \vec{\nabla}^2 F(M) = \nabla^2 F(M)$$

Laplacien vectoriel s'écrit :

$$\nabla^2 \vec{F}(M) = \overrightarrow{\text{grad}}[\text{div} \vec{F}(M)] - \overrightarrow{\text{rot}} \vec{F}[\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F}(M)] = \nabla^2 F_x \vec{e}_x + \nabla^2 F_y \vec{e}_y + \nabla^2 F_z \vec{e}_z$$

Propriété 1 : Si α est une constante réelle, si f et g sont deux fonctions, on a :

$$\Delta(f + g) = \Delta f + \Delta g$$

$$\Delta(\alpha f) = \alpha \Delta f$$

$$\text{div}[\overrightarrow{\text{grad}} f] = \Delta f$$

$$\text{div}[f \overrightarrow{\text{grad}} g - g \overrightarrow{\text{grad}} f] = f \Delta g - g \Delta f$$

E. Opérateurs en coordonnées cylindriques et sphériques

En physique, pour des raisons de symétrie du système étudié, les coordonnées cylindriques ou sphériques sont souvent utilisées. Il est donc nécessaire de connaître l'expression des opérateurs vectoriels pour de tels systèmes.

1. Coefficients métriques

Soit (x, y, z) les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque exprimées comme des fonctions de (q_1, q_2, q_3) par :

$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2, q_3) \\ y = y(q_1, q_2, q_3) \\ z = z(q_1, q_2, q_3) \end{cases}$$

Supposons que l'équation ci-dessus puisse se résoudre en q_1, q_2 et q_3 comme fonctions de x, y et z c'est-à-dire :

$$\begin{cases} q_1 = q_1(x, y, z) \\ q_2 = q_2(x, y, z) \\ q_3 = q_3(x, y, z) \end{cases}$$

Les fonctions x, y, z, q_1, q_2 et q_3 sont supposées prendre une seule valeur en chaque point et posséder des dérivées continues, de sorte que la correspondance entre (x, y, z) et (q_1, q_2, q_3) soit unique.

Etant donnée un point de coordonnées rectangulaires nous pouvons lui associer un seul ensemble de coordonnées (q_1, q_2, q_3) appelées les coordonnées curvilignes du point $M(x, y, z)$.

Les deux équations ci-dessous définissent un changement de coordonnées. Les coefficients $\{h_i\}$ ($i = \{1, 2, 3\}$) sont appelés coefficients métriques ou coefficients multiplicateurs, qui dépendent du système de repérage utilisée. Ils peuvent être déterminés géométriquement ou analytiquement par :

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$$

Pour les systèmes de coordonnées cylindrique et sphérique nous obtenons alors le tableau sous dessous. Calcule des coefficients métriques $\{h_i\}$ en coordonnées cylindriques et sphériques.

Désignation	coordonnées cylindriques	coordonnées sphériques
Définitions	$\begin{cases} x = r \cos\theta \\ y = r \sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} q_1 = r \\ q_2 = \theta \\ q_3 = z \end{cases}$	$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} q_1 = r \\ q_2 = \theta \\ q_3 = \varphi \end{cases}$
Base locale	$(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$	$(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$
Coefficients métriques	$\begin{aligned} h_1 &= h_r = 1 \\ h_2 &= h_\theta = r \\ h_3 &= h_\varphi = 1 \end{aligned}$	$\begin{aligned} h_1 &= h_r = 1 \\ h_2 &= h_\theta = r \\ h_3 &= h_\varphi = r \sin\theta \end{aligned}$
Déplacement métriques	$\begin{cases} dx = dr \\ dy = r d\theta \\ dz = dz \end{cases}$	$\begin{cases} dx = dr \\ dy = r d\theta \\ dz = r \sin\theta d\varphi \end{cases}$

Tableau 1. Coefficients métriques.

2. Expression des opérateurs vectoriels

Dans un système de coordonnées curvilignes orthogonales ($\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 0$) et ($\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3$), l'opérateur gradient s'exprime comme

$$\overrightarrow{Grad}(F) = \sum_{i=1}^{i=3} \frac{1}{h_i} \frac{\partial F}{\partial q_i} \vec{e}_i$$

L'opérateur divergence s'exprime comme

$$div(\vec{A}) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^{i=3} \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(h_1 h_2 h_3 \frac{A_i}{h_i} \right)$$

L'opérateur rotationnel s'exprime comme

$$\overrightarrow{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{bmatrix} h_1 \vec{e}_1 & h_2 \vec{e}_2 & h_3 \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 A_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (h_2 A_2) \right] \\ \frac{1}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 A_1) - \frac{\partial}{\partial q_1} (h_3 A_3) \right] \\ \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 A_2) - \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 A_1) \right] \end{bmatrix}$$

Opérateur Nabla

$$\vec{\nabla} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\left[\frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial F}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial F}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial F}{\partial q_3} \right) \right] \right]$$

A l'aide de du tableau

a. Cartesian. $dl = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z$ et $d\tau = dxdydz$

Gradient

$$\overrightarrow{Grad}(F) = \vec{\nabla}(F) = \frac{\partial F}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial F}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{e}_z$$

Divergence

$$div(\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Curl

$$\overrightarrow{rot} \vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$$

Laplacian

$$\nabla^2 F(M) = \text{div}[\overrightarrow{\text{grad}} F(M)] = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

b. Sphériques

$$dl = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin\theta d\varphi \vec{e}_\varphi \text{ et } d\tau = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

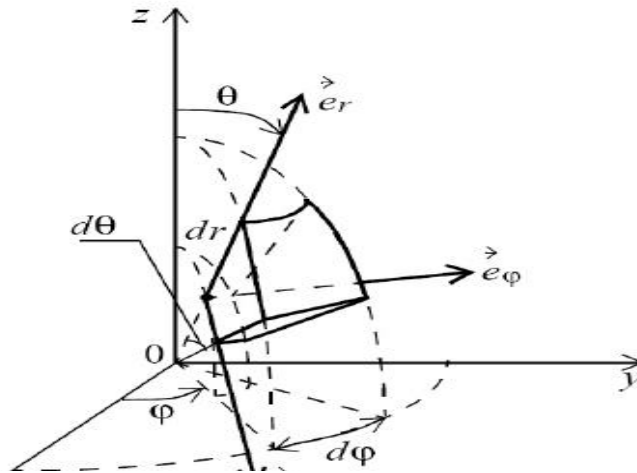


Figure 1.2. Coordonnées sphériques.

Gradient

$$\overrightarrow{\text{Grad}}(F) = \vec{\nabla}(F) = \frac{\partial F}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

Divergence

$$\text{div}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (A_\varphi)$$

Curl

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = & \frac{1}{r \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right] \vec{e}_\theta \\ & + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

Laplacian

$$\begin{aligned}\nabla^2 F(M) &= \text{div}[\overrightarrow{\text{grad}} F(M)] \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial F}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \right]\end{aligned}$$

c. Cylindrical

$$dl = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z \text{ et } d\tau = r dr d\theta dz$$

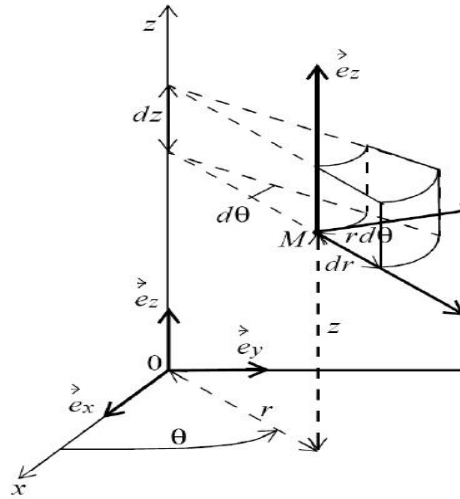


Figure 1.3. Coordonnées cylindriques.

Gradient

$$\overrightarrow{\text{Grad}}(F) = \vec{\nabla}(F) = \frac{\partial F}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{e}_z$$

Divergence

$$\text{div}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Curl

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right] \vec{e}_r + \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right] \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \vec{e}_z$$

Laplacian

$$\nabla^2 F(M) = \text{div}[\overrightarrow{\text{grad}} F(M)] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial F}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}$$

d. Cordonnées polaires

$$g\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

I.2. Théorème de Stokes-Théorème de Gauss**I.2.1. Circulation d'un champ vectoriel**

On définit la circulation d'un vecteur $\vec{V}$ le long d'un contour (C), par l'intégrale curviligne :

$$C_{\overrightarrow{AB}} = \int_{\overrightarrow{AB}} \vec{V} \cdot \overrightarrow{dl}$$

La circulation de long d'un contour fermé est notée :

$$C(\vec{A}) = \oint \vec{V} \cdot \overrightarrow{dl}$$

I.2.2. Flux d'un champ vectoriel

On définit le flux d'un vecteur $\vec{V}$ à travers une surface (S) par l'intégrale double:

$$\phi/(s) = \iint_{(s)} \vec{V} \cdot \vec{n} \, ds$$

Lorsque la surface (S) est fermée, le vecteur unitaire $\vec{n}$ est dirigé de l'intérieur vers l'extérieur

I.2.3. Théorème de Stokes

La circulation d'un vecteur le long d'un contour fermé (C) limitant une surface (S) est égal au flux de son rotationnel à travers cette surface.

$$C(\vec{A}) = \phi/(s) \overrightarrow{rot}(\vec{V})$$

$$\oint \vec{V} \cdot \overrightarrow{dl} = \iint_{(s)} \overrightarrow{rot}(\vec{V}) \cdot \vec{n} \, ds$$

Le vecteur unitaire $\vec{n}$ est orienté selon la convention du tire-bouchon de Maxwell.

I.2.4 Théorème de Gauss-Ostrogradski (ou théorème de la divergence)

Un volume délimité par une surface (s) fermée et orientée. Soient $\vec{n}$ le vecteur unitaire normal vers l'extérieur et $\vec{V}$ un champ de vecteurs. Le flux d'un champ vectoriel à travers une surface fermée (s) est égal à l'intégrale de sa divergence dans le volume (τ) limité par la surface fermée (s).

$$\oiint_{(s)} \vec{V} \cdot \vec{n} = \iiint_{(\tau)} \text{div}(\vec{V}) d\tau$$

I.2.5. Exemple d'application

Une particule chargée fixée à l'origine O d'un repère de l'espace crée un champ électrique autour d'elle qui a pour valeur au point M :

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}$$

Ou $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

1. Exprimer le champ de vecteurs $\vec{E}$ en coordonnées cartésiennes.
2. Calculer son rotationnel $\overrightarrow{rot} \vec{E}$.
3. Déterminer un champ scalaire ϕ tel que $\vec{E} = \overrightarrow{grad} \phi$.
4. Déterminer les surfaces d'équipotentiel ou surfaces de niveaux $\phi = \text{constante}$.

Une autre particule chargée se déplaçant dans le champ $\vec{E}$ est soumise à la force électrique $\vec{F} = q' \cdot \vec{E}$.

5. Calculer le travail de la force $\vec{F}$ lorsque la particule suit les courbes paramétrées suivantes :

- (a) $\gamma(t) = (t, t, t) \quad t \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right]$.
- (b) $\gamma(t) = (2 + \cos t, \sin t, 0) \quad t \in [-\pi, 0]$.

Pourquoi obtient-on la même valeur dans les deux cas ?

Solution

Pour le cours correspondant, on pourra se référer au complément de cours de la troisième semaine.

Nous d'échantillons la solution de cet exercice en mettant en correspondance la terminologie mathématique usuelle et la terminologie physique

La première question est immédiate puisque : $\vec{r} = (x, y, z)$ et $\|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ \frac{\partial}{\partial z} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \begin{pmatrix} \frac{-3yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{-3yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \\ \frac{-3xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} - \frac{-3xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \\ \frac{-3xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} - \frac{-3xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Puisque le rotationnel du champ vectoriel $\overrightarrow{rot}\vec{E} = 0$ est nul, il existe un champ scalaire $\overrightarrow{grad}\phi = \vec{E}$.

Déterminons la fonction ϕ . L'équation différentielle

$$\frac{\partial}{\partial x} \phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

donne en intégrant :

$$\phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{-1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} + \varphi(y, z)$$

En dérivant par rapport à y cette égalité, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial y} \phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{\partial}{\partial y} \varphi(y, z)$$

En égalité

$$\frac{\partial}{\partial y} \phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

Donne

$$\frac{\partial}{\partial y} \varphi(y, z) = 0$$

Soit $\varphi(y, z) = \varphi(z)$. On recommence une dernière fois la dérivation par rapport à z :

$$\frac{\partial}{\partial z} \phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{\partial}{\partial z} \varphi(z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

On trouve : $\varphi'(z) = 0$, soit $\varphi(z) = c$, ou c est une constante indéterminée.

Finalement on peut écrire :

$$\phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{-1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$$

Les surfaces de potentiel constant sont donc les lignes de niveaux de la fonction ϕ c'est-à-dire les surfaces d'équation cartésienne

$$\phi(x, y, z) = c^{cte}$$

$$(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = c^{cte}$$

Ce sont des sphères centrées sur la particule.

(a) Le travail de la force $\vec{F}$ est la circulation du champ de vecteurs $\vec{F}$ le

Le long de la courbe γ . On calcule :

$$\begin{aligned} T &= \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \vec{F} \cdot \vec{\gamma}(t) dt = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 3 \frac{t}{(3t^2)^{3/2}} dt = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{t}{\sqrt{3}t^3} dt = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{t} \right]_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{qq'}{6\pi\epsilon_0} \end{aligned}$$

Le long de la courbe δ . On calcule :

$$\begin{aligned}
 T &= \int_{-\pi}^0 \vec{F} \cdot \vec{\gamma}(t) dt \\
 &= \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\pi}^0 \frac{2 + \cos t}{[(\sin t)^2 + (2 + \cos t)^2]^{1/2}} (-\sin t) dt \\
 &\quad + \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\pi}^0 \frac{2 + \cos t}{[(\sin t)^2 + (2 + \cos t)^2]^{1/2}} (\cos t) dt \\
 T &= \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\pi}^0 \frac{-2\sin t}{[(4 + 5\cos t)]^{3/2}} dt = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-1}{[(4 + 5\cos t)]^{1/2}} \right]_{-\pi}^0 = \frac{qq'}{6\pi\epsilon_0}
 \end{aligned}$$

On constate que l'on obtient le même résultat. Ceci s'explique par le fait que les origines et les extrémités des deux courbes γ et δ sont respectivement sur les mêmes surfaces équipotentielles, à savoir la sphère de centre O et de rayon 1 pour les origines, et la sphère de centre O et de rayon 3 pour les extrémités. Dans les deux cas, le travail peut se calculer par la différence de potentiel :

$$T = q'[\phi(3,0,0) - \phi(1,0,0)] = \frac{qq'}{6\pi\epsilon_0}$$

I.3. Les équations de Maxwell

Les équations de Maxwell sont des modèles mathématiques exprimées par des équations différentielles liant le champ électromagnétique aux sources, apparaissant sous la forme de densités de courant et de densités de charges. Grâce aux outils d'analyse vectorielle, il est possible de démontrer, à partir des équations de Maxwell, différents théorèmes qui apparaissent comme indispensables lors de l'étude des antennes.

Dans ces équations, il n'apparaît que des sources électriques qui sont les seules ayant une existence réelle. Ces sources sont constituées de particules chargées électriquement. Cependant, un artifice mathématique consiste à introduire des sources magnétiques dans les équations de Maxwell.

La force exercée par une distribution volumique de charge et de courants $(\rho(M, t), j(M, t))$ sur une charge ponctuelle q , située à l'instant t en un point M et possédant un vecteur vitesse $\vec{V}(M, t)$, est donnée par la formule de Lorentz. :

$$F = q[\vec{E}(M, t) + \vec{V}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t)]$$

ou $[\vec{E}(M, t), \vec{B}(M, t)]$ est le champ électromagnétique crée au point M par la distribution .Ce champ est solution des équations locales de Maxwell :

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \text{div} \vec{B} &= 0 \\ \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} &= \mu_0 \left(j + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \\ \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} &= -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

II.3.1. Descriptions des équations de Maxwell

Equation de Maxwell-Gauss : exprime le fait que le flux de champ électrique à travers une surface fermée est relie a la charge électrique contenue a l'intérieur de cette surface.

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

La deuxième équation exprime que le flux du champ magnétique à travers n'importe quelle surface fermée est nul. Il n'existe pas de monopoles magnétiques.

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

La troisième équation, dite de **Maxwell-Ampère**, exprime la relation entre la circulation du champ magnétique sur un contour fermé et le flux décorant à travers une surface s'appuyant sur ce contour.

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

La quatrième équation, dite de **Maxwell-Faraday**, donne la relation entre la circulation du champ électrique sur un contour ferme et la variation temporelle du flux du champ magnétique à travers une surface qui s'appuie sur ce contour. C'est le phénomène d'induction.

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left(j + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Ces quartes équations sont compatibles avec l'équation locale de conservation de la charge :

$$\begin{aligned} 0 &= \text{div}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = \mu_0 \text{div} j + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \text{div} \vec{E}}{\partial t} \\ 0 &= \mu_0 \left(\text{div} j + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

I.3.2. Version intégrale des équations de Maxwell

La divergence du vecteur $\vec{V}$ vérifie à l'échelle d'un volume élémentaire $d\tau$ entouré par la surface ds que $\text{div}(\vec{V})d\tau$ est égal au flux du champ $\vec{V}$ sortant de $d\tau$ à travers ds . En intégrant cette égalité on obtient la forme intégrale pour tout volume limité par une surface fermée

$$\oiint_{(\Sigma)} \vec{V} \cdot \vec{n} = \iiint_{(V)} \text{div}(\vec{V}) d\tau$$

La forme intégrale de l'équation locale de Maxwell $\text{div}E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ donne le théorème de Gauss pour le champ électrique :

$$\oiint_{(\Sigma)} E \cdot ds = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

où ρ est la charge comprise dans le volume (V) limitée par une surface fermée (Σ) .

La forme intégrale de l'équation locale de Maxwell $\text{div}B = 0$ donne le caractère conservatif du flux de champ magnétique.

$$\oiint_{(\Sigma)} \vec{B} \cdot \vec{s} = 0$$

Le rotationnel du champ de vecteurs vérifie que, $\vec{V}$ à l'échelle de surface élémentaire dS soutenue par un contour orienté ds , la circulation du champ $\vec{V}$ sur le contour dC vaut $\text{rot}(\vec{V}) \cdot \vec{ds}$. En intégrant cette égalité on obtient la forme intégrale pour toute surface (s) soutenue par un contour fermé orienté (C) :

$$\iint_{(s)} \text{rot}(\vec{V}) \cdot \vec{ds} = \oint_{(C)} \vec{V} \cdot d\vec{l}$$

La forme intégrale de l'équation locale de Maxwell $\text{rot}\vec{B} = \mu_0 \left(j + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$ donne le théorème d'Ampère qui exprime que la circulation du champ magnétique sur un contour fermé (C) est égale au flux de courant à travers une surface (s) soutenue par ce contour :

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(I_{(s)} + \epsilon_0 \iint_{(s)} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{ds} \right)$$

Le deuxième terme dans le membre de droite de l'équation est souvent appelé courant de déplacement. Enfin, la forme intégrale de l'équation locale de Maxwell $\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ donné en version intégrale la loi de Faraday sur un contour fermé (C) s'appuyant sur une surface (s):

$$\oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_{(s)} -\frac{d\vec{B}}{dt} ds = -\frac{d\phi}{dt}$$

En définissant la force électromotrice dans un circuit fermé comme la circulation du champ E , nous voyons que cette force est égale à la variation temporelle du flux de champ magnétique à travers une surface soutenue par le circuit.

I.3.3. Propriétés et conséquences des équations de Maxwell

A. Le théorème de superposition

Les équations de Maxwell sont des équations linéaires en $\vec{E}$, $\vec{B}$, ρ et $\vec{j}$

B. Cohérence des équations

Si jusqu'à présent, les équations de Maxwell ont été séparément, chacune a permis de rendre compte d'un effet physique : la création d'un champ électrique par les charges électriques, l'absence de charge magnétique, la création d'un champ magnétique par un courant électrique et le phénomène d'induction. Le génie de Maxwell a été de comprendre qu'il s'agit d'un tout et que ces équations doivent être considérées comme un ensemble.

Prises ensembles plutôt qu'individuellement, ces équations contiennent beaucoup plus que ces phénomènes.

L'exemple le plus simple s'obtient en combinant Maxwell Ampère et Maxwell Gauss : on écrit Maxwell Ampère. On applique la divergence :

$$div[\overrightarrow{rot}\vec{B}] = div\left[\mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)\right] = \mu_0 div\vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial div\vec{E}}{\partial t}$$

Nous avons : $div[\overrightarrow{rot}\vec{B}] = 0$

$$\mu_0 div\vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial div\vec{E}}{\partial t} = 0$$

$$div\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

On obtient l'équation qui rend compte de la conservation de la charge. Ainsi, cette Propriété n'est pas à ajouter, elle est déjà contenue dans les équations de Maxwell.

I.3.4. Existence d'ondes électromagnétiques

En électrostatique, le champ électrique est dû à la présence de charges électriques : sans charge électrique, pas de champ électrique. En magnétostatique le champ magnétique est dû à la présence de courants électriques : sans courant électrique, pas de champ magnétique.

Lorsque l'on étudie des situations dynamiques où les différentes grandeurs dépendent du temps, on peut écrire Maxwell Faraday.

$$\overrightarrow{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Si le champ magnétique dépend du temps on peut avoir un champ électrique avec une densité de charge électrique ρ nulle. Il suffit qu'il y ait un courant électrique :

$$\vec{j} = f(t), \quad \vec{E} = f(t) \quad \text{et} \quad \vec{B} = f(t)$$

On peut encore avoir plus et imaginer l'existence d'un champ électrique et d'un champ magnétique en l'absence de charge et de courant.

Maxwell Faraday dit que $\vec{B} = f(t)$ qui dépend du temps crée $\vec{E} = f(t)$ Et Maxwell Ampère dit que $\vec{E} = f(t)$ qui dépend du temps crée $\vec{B} = f(t)$. Le champ électromagnétique acquiert une existence autonome par rapport aux charges. Il est bien sûr nécessaire d'avoir initialement des charges et des courants pour créer une onde électromagnétique, mais dès que celle-ci est émise, son existence ne dépend plus de ces charges et courants.

I.3.5. Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide

Dans toute cette partie, on se place en l'absence de charges et de courants.

I.3.5.1. Equation de propagation du champ électrique

Les équations de Maxwell couplent l'évolution du champ électrique et du champ magnétique. En les combinant on peut obtenir une équation d'évolution pour le champ électrique seul. Prenons la dérivée temporelle de Maxwell-Ampère :

$$\overrightarrow{rot} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Exprimons la dérivée temporelle de $\vec{B} = f(t)$ à l'aide de Maxwell-Faraday

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot} \vec{E}) = -\overrightarrow{grad}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E}$$

Enfin Maxwell Gauss nous dit qu'en l'absence de charge la divergence du champ électrique est nulle. L'équation d'évolution du champ électrique est une équation de d'Alembert qui décrit la propagation d'ondes :

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

I.4. Energie électromagnétique

I.4.1. Densité volumique d'énergie électromagnétique

L'énergie d'interaction d'un système de charges. Deux charges q_1 et q_2 séparées d'une distance r ont une énergie d'interaction $U_{q_1 q_2}$ égale à :

$$U_{q_1 q_2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \varepsilon_0 r}$$

Le potentiel électrostatique V crée par une distribution de charges. L'énergie potentielle d'une charge q placée dans ce potentiel au point r est alors :

$$U = q_1 V(\vec{r})$$

L'énergie d'interaction d'un système de N charges est :

$$U_T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i$$

ou V_i est le potentiel électrostatique crée par toutes les autres charges au point où se trouve la charge i .

I.4.2. Densité locale d'énergie électrostatique

L'énergie électrostatique d'un condensateur de capacité C est :

$$E_c = \frac{1}{2} C U^2$$

La capacité d'un condensateur plan dont les armatures sont séparées par du vide est :

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{e}$$

ou S est la surface des armatures et e l'épaisseur du condensateur. L'énergie électrostatique s'écrit donc

$$E_c = \frac{1}{2} \varepsilon_0 S e \left[\frac{U}{e} \right]^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 |\vec{E}|^2 \nu$$

Où ν est le volume se trouvant entre les armatures du condensateur et $\vec{E}$ le champ électrique qui y règne. Puisque le champ électrique est uniforme à l'intérieur du condensateur et nul ailleurs, on peut donner une nouvelle interprétation à l'énergie électrostatique. Il s'agit d'une énergie stockée dans le champ lui même.

La densité volumique d'énergie électrostatique u_e stockée dans le champ est ainsi:

$$u_e = \frac{\varepsilon_0 |\vec{E}|^2}{2}$$

$$\varepsilon_e = \iiint u_e d\tau$$

I.4.3. Energie magnétique

L'énergie magnétique d'un solénoïde.

$$E_m = \frac{1}{2} L I^2$$

L'inductance L d'un solénoïde de longueur l , dont la surface de la section est S et qui comporte N spires est :

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S$$

L'intensité du champ magnétique $\vec{B}$ qui règne par l'intérieur est :

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I$$

Par conséquent, tout comme pour l'énergie du condensateur, on peut mettre l'énergie de la bobine sous forme d'un produit de son volume ν par une densité d'énergie magnétique :

$$E_e = \frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0} \nu$$

La densité volumique d'énergie magnétique u_m stockée dans le champ est ainsi :

$$u_m = \frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0}$$

$$\varepsilon_m = \iiint u_m d\tau$$

Les expressions que nous venons d'écrire pour le champ électrique et ou le champ magnétique nous permettront d'interpréter l'expression que nous allons obtenir en réalisant le bilan énergétique complet du champ électromagnétique.

I.4.4. Le vecteur de *Poynting*

En présence de charges et de courants, il peut y avoir un échange d'énergie entre la matière : l'énergie électromagnétique est transformée en énergie mécanique ou réciproquement. En l'absence de charges et de courants, l'énergie électromagnétique est une quantité qui se conserve. Vecteur de *Poynting* et il est noté $\vec{\Pi}$. Si l'on note u la densité volumique d'énergie électromagnétique, la relation de conservation est :

$$\frac{d}{dt} \iiint_V u d\tau = - \oiint_{\Sigma} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}$$

La relation de conservation locale s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{div} \vec{\Pi} = 0$$

La puissance électromagnétique $\vec{\Pi}$ qui traverse une surface $d\vec{S}$ est le flux du vecteur de *Poynting* à travers cette surface :

$$p = \iint_{\Sigma} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}$$

I.4.5. Expression de l'énergie électromagnétique

Calculons la divergence du produit vectoriel du champ électrique et du champ magnétique :

$$\text{div}(\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot} \vec{B}$$

Soit, en utilisant *Maxwell Ampère* et *Maxwell Faraday* dans le vide :

$$\operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) - \vec{E} \cdot \left(\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_0 |\vec{E}|^2}{2} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{|\vec{B}|^2}{2} \right) - \mu_0 \vec{E} \cdot \vec{j}$$

ou encore, en divisant par

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_0 |\vec{E}|^2}{2} + \varepsilon_0 \frac{|\vec{B}|^2}{2} \right) + \operatorname{div} \left(\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \right) = -\vec{E} \cdot \vec{j}$$

En l'absence de courants, $\vec{j} = 0$ nous pouvons reconnaître l'énergie électrostatique et déduire l'expression du vecteur de Poynting.

Dans les régimes dynamiques dépendant du temps, l'énergie électromagnétique a la même expression que dans les régimes statiques : c'est la somme de l'énergie électrique et de l'énergie magnétique.

$$u_{em} = \left(\frac{\varepsilon_0 |\vec{E}|^2}{2} + \frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0} \right)$$

Le vecteur de *Poynting* est proportionnel au produit vectoriel du champ électrique et du champ magnétique.

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$$

Le terme $-\vec{E} \cdot \vec{j}$ est un terme source. $\vec{E} \cdot \vec{j}$ est la puissance cédée par le champ électromagnétique aux charges par unité de volume.

$$\frac{\delta p}{\delta v} = \frac{1}{\delta v} \sum_{i \in \delta v} [q_i \vec{E}(\vec{r}_i)] \cdot \vec{v}_i = \vec{E}(\vec{r}_i) \frac{1}{\delta v} \sum_{i \in \delta v} [q_i \vec{v}_i] = \vec{E} \cdot \vec{j}$$

La conservation de l'énergie est une conséquence des équations de Maxwell- Faraday, Maxwell-Ampère et de l'expression de la force de Lorentz.

Chapitre II

PROPAGATION DES ONDES ELECTROMAGNETIQUES DANS LES MILIEUX DIELECTRIQUES

II.1. Électromagnétisme dans les milieux matériels diélectriques, non magnétiques, Linéaires, Homogènes, Isotropes (LHI)

La polarisation d'un diélectrique apparaît dans les milieux qui comprennent des charges électriques dites libres. Dans un diélectrique parfait, il n'existe pas de charges électriques libres ; il ne présente donc aucune polarisation. En particulier, un champ électrique appliqué ne provoque pas de courant électrique.

Mais les charges électriques localisées ou libres sont susceptibles de se déplacer autour des atomes ou de vibrer sous l'influence d'un champ électrique : il y a alors apparition d'une polarisation. Cependant, les porteurs de charges (électrons des atomes) peuvent se déplacer autour des atomes sous l'effet d'un champ électrique, ce qui entraîne une polarisation locale de la matière.

La polarisation est une grandeur physique macroscopique utilisée dans l'étude des propriétés des matériaux diélectriques. Elle désigne la densité de dipôles électriques. Son unité dans le Système international est le C/m². Ce concept a été introduit par Faraday alors qu'il étudiait le comportement des isolants électriques dans des champs électrostatiques

1) Vecteur polarisation

Rappel : Pour un système neutre: Dipôle : **Moment dipolaire** : $\vec{p} = q\overrightarrow{NP}$

avec : N barycentre des charges négatives $-q$ et P barycentre des charges positives $+q$

Dans un milieu matériel, on définit un vecteur "densité volumique de moments dipolaires", appelée **vecteur polarisation**, noté $\vec{P}$, par $\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{d\tau}$, ou $d\vec{p}$ est le moment dipolaire du volume $d\tau$.

2) Charges de polarisation (charges liées)

A l'échelle macroscopique, la description du milieu matériel diélectrique en terme de polarisation $\vec{P}$ peut être remplacée par une description équivalente en terme de densité de **charges liées** à $\vec{P}$, appelés aussi **charges de polarisation**.

Ces charges liées peuvent être volumiques ρ_p ou surfaciques σ_p (à la surface du milieu matériel) ; elles sont reliées à la polarisation $\vec{P}$ par : (ces relations se démontrent d'après le champ créé par un dipôle)

$$\rho_p = -\text{div}\vec{P}$$

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$$

L'équation de Maxwell Gauss s'écrit : $\text{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_p + \rho)$

avec ρ la densité de **charges libres** (non liées à la polarisation du milieu matériel diélectrique).

D'après (1) et (2) :

$$\text{div}(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho$$

D'où :

$$\text{div} \vec{D} = \rho \quad (3)$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (4)$$

3) Milieu (diélectrique) linéaires, homogènes, isotrope (LHI), non magnétiques

De façon générale la polarisation d'un milieu neutre est provoquée par un champ électrique extérieur, mais $\vec{P}$ et $\vec{E}$ ne sont pas forcément parallèles.

- Si le milieu est **isotrope** : $\vec{E} // \vec{P}$
- Si $\|\vec{P}\|$ suffisamment petit, on peut en général supposer que le lien entre $\|\vec{P}\|$ et $\|\vec{E}\|$ est **linéaire**.
- Si le milieu est **homogène** le coefficient de proportionnalité entre $\|\vec{P}\|$ et $\|\vec{E}\|$ est une constante indépendante de la position.

Ainsi dans un milieu LHI : $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$, avec χ la **susceptibilité diélectrique**.

et $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$, ϵ_r la **permittivité relative** du milieu.

et l'équation de Maxwell-Gauss (3) devient : $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon_r}$

ou ρ sont uniquement les charges libres (c'est à dire les charges non liées à la polarisation de la matière).

Dans un milieu LHI, non magnétique, de permittivité relative ϵ_r , les équations de Maxwell et toutes les lois de cours d'électromagnétisme sont applicables en remplaçant ϵ_0 et μ_0 sont des constantes universelles, mais ϵ_r et μ_r dépendent du milieu matériel.

II.2. Équations de Maxwell dans un milieu matériel LHI, non-magnétique

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_r \epsilon_0} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} &= \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_r \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

où ρ et $\vec{j}$ sont les charges et les courants qui ne sont pas liées à la polarisation du milieu matériel

II.3. Ondes électromagnétiques dans un milieu LHI non magnétique

A. Equation de propagation du champ électrique

Les équations de Maxwell couplent l'évolution du champ électrique et du champ magnétique. En les combinant on peut obtenir une équation d'évolution pour le champ électrique seul. Prenons la dérivée temporelle de *Maxwell-Ampère* :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_r \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Exprimons la dérivée temporelle de $\vec{B} = f(t)$ à l'aide de Maxwell-Faraday

$$\mu_0 \epsilon_r \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E}) = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E}$$

Enfin *Maxwell Gauss* nous dit qu'en l'absence de charge la divergence du champ électrique est nulle.

L'équation d'évolution du champ électrique est une équation de d'Alembert qui décrit la propagation d'ondes :

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_r \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

avec $n = \sqrt{\epsilon_r}$ l'indice du milieu.

Ainsi la vitesse d'une onde plane progressive monochromatique est : $v = \frac{c}{n}$.
Les ondes électromagnétiques se propagent dans le vide avec la célérité c :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 299\,792\,458 \text{ m.s}^{-1}$$

Il s'agit d'une valeur exacte depuis la définition du mètre adoptée en 1983. La valeur de la perméabilité magnétique du vide μ_0 est aussi une valeur exacte car elle repose sur la définition de l'Ampère.

Par conséquent, la valeur de la permittivité électrique du vide ϵ_0 est elle aussi exacte.

II.4. La propagation d'ondes scalaires

II.4.1. Propagation a une dimension

L'équation de propagation à une dimension d'un champ scalaire ϕ est :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Les solutions de cette équation sont :

$$\phi(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

Une méthode de résolution qui permet de s'assurer que l'on a bien toutes les solutions consiste à effectuer le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned} \psi(u, v) &= \phi(x, t) \\ u &= x - vt \\ v &= x + vt \end{aligned}$$

La fonction ψ vérifié alors l'équation

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} = 0$$

Description des solutions

La solution f correspond à une onde qui se propage sans se déformer vers les x croissants. La solution g est une onde qui se propage vers les x décroissants.

II.4.2. Propagation a trois dimensions

A trois dimensions les solutions sont beaucoup plus compliquées qu'à une dimension. En particulier, il n'est pas possible de simplifier le problème à l'aide d'un changement de variables. On peut toutefois trouver des solutions particulières qui vérifient certaines propriétés de symétrie.

Ondes planes progressives

Le champ ne dépend que d'une coordonnée. Il peut s'agir d'un axe, par exemple l'axe x

$$\phi(x, y, z, t) = \varphi(u, t)$$

ou bien d'un axe quelconque de vecteur unitaire $\vec{u}$.

$$\phi(x, y, z, t) = \varphi(\vec{u} \cdot \vec{r}, t)$$

Le champ ϕ est constant sur des plans orthogonaux à la direction de propagation $\vec{u}$.

Le champ $\phi(x, y, z, t)$ vérifié l'équation de propagation a une dimension dont nous connaissons toutes les solutions. Si l'on choisit de ne conserver que les solutions qui vont dans la direction et le sens du vecteur unitaire u , les solutions en onde plane s'écrivent.

$$\phi(x, y, z, t) = \varphi(\vec{u} \cdot \vec{r} - vt)$$

Ondes sphériques

Le champ ne dépend que de la distance r du point considère avec l'origine.

$$\phi(\vec{r}, t) = \varphi(r, t)$$

Pour une fonction qui ne dépend que de r le Laplace a une forme relativement simple :

$$\Delta\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\varphi(r, t))$$

La fonction φ vérifié l'équation d'évolution suivante.

Par conséquent la fonction $r\varphi$ vérifié l'équation de d'Alembert a une dimension dont nous connaissons les solutions. Nous en déduisons la solution en ondes sphériques :

$$\varphi(r, t) = \frac{f(r - vt)}{r} + \frac{g(r + vt)}{r}$$

Le premier terme (*fonction f*) correspond a une onde qui s'éloigne de l'origine. Cette onde est appelée onde sortante. Le second correspond à une onde qui converge vers l'origine, il s'agit d'une onde entrante.

Solutions stationnaires

Le théorème de superposition, qui necessitent une base, nous permet de construire divers solutions vectoriel comme combinaison linéaire de deux solutions. Diverses techniques permettent de trouver de telles bases. Celles ci reposent sur l'utilisation de la transformée

de Fourier ou l'analyse harmonique. Dans ce cas, il s'agit de trouver les solutions stationnaires.

II.4.3. Ondes électromagnétiques planes progressives

Onde plane

Mathématiquement, chacune des composantes du champ électrique et du champ magnétique vérifie l'équation de d'Alembert. Intéressons nous aux solutions particulières pour lesquelles toutes ces composantes sont des ondes planes progressives se dirigeant selon la direction et le sens d'un vecteur unitaire $\vec{u}$:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{e}(\vec{u} \cdot \vec{r} - vt)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{b}(\vec{u} \cdot \vec{r} - vt)$$

C'est une condition nécessaire pour être solution de l'équation de Maxwell, mais cette condition n'est pas suffisante. Il nous faut maintenant revenir aux équations de Maxwell pour extraire des propriétés physiques.

Pour des ondes planes progressives, nous avons:

$$\frac{\partial}{\partial x} \vec{E}(\vec{r}, t) = -c \vec{e}'(\vec{u} \cdot \vec{r} - vt)$$

$$\text{div} \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{u} \cdot \vec{e}'(\vec{u} \cdot \vec{r} - vt)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{u} \times \vec{e}'(\vec{u} \cdot \vec{r} - vt)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \vec{B}(\vec{r}, t) = -c \vec{b}'(\vec{u} \cdot \vec{r} - vt)$$

$$\text{div} \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{u} \cdot \vec{b}'(\vec{u} \cdot \vec{r} - vt)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{u} \times \vec{b}'(\vec{u} \cdot \vec{r} - vt)$$

Dans les intégrations, nous considérerons que les constantes d'intégration qui interviennent sont nulles (elles correspondent à un champ statique uniforme dans tout l'espace).

$$\text{div} \vec{E} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{e}' = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{b}' = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{e}' = c \vec{b}' \quad \rightarrow \quad \vec{u} \times \vec{E} = c \vec{B}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{b}' = -\frac{1}{c} \vec{e}' \quad \rightarrow \quad \vec{u} \times \vec{B} = -\frac{1}{c} \vec{E}$$

Nous pouvons donc récapituler les propriétés physiques du champ électrique et du champ magnétique pour une onde plane progressive.

1. Le champ électrique et le champ magnétique sont orthogonaux à la direction de propagation. On dit que ce sont des champs *transverses*.
2. Le champ électrique et le champ magnétique sont orthogonaux entre eux.
3. Le trièdre $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$. Formé de la direction de propagation, du champ électrique et du champ magnétique est un trièdre direct.
4. Le module du champ électrique est c fois plus grand que celui du champ magnétique.

II.4.4. Onde électromagnétique plane progressive monochromatique polarisée linéairement

Structure du champ électrique

Pour discuter précisément de la structure du champ électrique et du champ magnétique on considère une onde qui se propage dans la direction Oz vers les z croissants et dont le champ électrique est aligné selon Ox.

$$\vec{E} = E_0 \cos\left(\frac{\omega}{c}(z - ct) + \varphi_0\right) \vec{u}_x = E_0 \cos((kz - \omega t) + \varphi_0) \vec{u}_x$$

1. Il s'agit d'une onde monochromatique dont la pulsation est ω .
2. L'évolution du champ électrique est périodique de période T .

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

3. La dépendance spatiale est harmonique, elle est caractérisée par le nombre d'onde

$$k = \frac{\omega}{c}$$

4. A un instant donné, la distribution du champ électrique est spatialement périodique.

La période spatiale est la longueur d'onde λ .

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

L'onde plane se propage à la célérité c sans se déformer. Le champ électrique redevient égal à sa valeur initiale

- après s'être propagé sur une distance égale à la longueur d'onde λ
- au bout d'une période temporelle T . C'est à dire après s'être propagé de cT .

On en déduit la relation entre longueur d'onde et période spatiale

$$\lambda = cT$$

En un point donnée le champ électrique oscille selon un segment de droite parallèle à $\vec{u}_x$. On dira que l'onde est polarisée linéairement selon l'axe Ox .

Plus généralement, on appelle polarisation l'évolution de la direction du champ électrique en fonction du temps en un point donné de l'espace.

Pour une onde électromagnétique plane monochromatique polarisée linéairement, le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E} = E_0 \cos((kz - \omega t) + \varphi_0) \vec{u}_x$$

Le vecteur $\vec{k}$ est le *vecteur d'onde*, il définit la direction de propagation de l'onde.

Le vecteur $\vec{u}_x$ est un vecteur unitaire orthogonal à la direction de propagation, il définit la direction du champ électrique c'est à dire la polarisation de l'onde.

Champ magnétique

Le champ magnétique se déduit de l'équation de Maxwell Faraday

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_0 \cos((kz - wt) + \varphi_0) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -k E_0 \sin((kz - wt) + \varphi_0) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{B} = \frac{k}{w} E_0 \cos((kz - wt) + \varphi_0) \vec{u}_y$$

II.2.5. Ondes monochromatiques

Ondes monochromatiques et notation complexe

Une onde monochromatique, ou onde harmonique, est une onde qui peut être modélisée par une fonction sinusoïdale en fonction du temps. Sa densité spectrale d'énergie ne présente qu'une seule fréquence, ou qu'une seule longueur d'onde. On parle également d'onde monoénergétique.

La réponse du champ électromagnétique à une excitation sinusoïdale est elle-même sinusoïdale. L'application combinée de la transformation de Fourier et du théorème de superposition permet de décomposer toute onde électromagnétique en composantes de Fourier qui correspondent à des ondes monochromatiques.

Représentation complexe d'une O.P.P.M

Considérons un champ électrique de type O.P.P.M ou O.P.P.H (« onde plane progressive monochromatique ou harmonique ») se propageant selon Ox ; on pourra écrire :

$$\vec{E} = \begin{cases} E_x = E_{ox} \cos(wt - kx + \varphi_x) \\ E_y = E_{oy} \cos(wt - ky + \varphi_x) \\ E_z = E_{oz} \cos(wt - kz + \varphi_x) \end{cases}$$

En injectant cette expression dans l'équation de d'Alembert, il vient, selon Ox par exemple :

$$-k^2 E_x + \left(\frac{w^2}{c^2}\right) E_x = 0 \quad \forall E_x \Rightarrow k^2 = \frac{w^2}{c^2} \quad : \text{Relation de dispersion}$$

Nous avons double périodicité :

- Aspect temporelle : $T = \frac{2\pi}{\omega}$; T (s)

- Aspect spatiale : $\lambda = cT = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{2\pi}{k}$; λ (m)

k correspond à une « pulsation spatiale » (en m^{-1}) : la grandeur $\vec{k} = k \vec{e}_x$ est appelée « vecteur d'onde »

Pour une onde se propageant selon une direction quelconque de vecteur unitaire $\vec{u}$, on aura :

$$\vec{k} = k\vec{u} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z$$

et pour la composante selon Ox :

$$E_x = E_{ox} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_x)$$

Nous allons donner une représentation complexe de $\vec{E}$:

$$\underline{\vec{E}} = \begin{cases} \underline{E}_x = \underline{E}_{ox} \exp(i(\omega t - kx)) \\ \underline{E}_y = \underline{E}_{oy} \exp(i(\omega t - kx)) \\ \underline{E}_z = \underline{E}_{oz} \exp(i(\omega t - kx)) \end{cases}$$

Avec

$$\underline{E}_x = E_{ox} \exp(i\varphi_x)$$

$$\underline{E}_y = E_{oy} \exp(i\varphi_y)$$

$$\underline{E}_z = E_{oz} \exp(i\varphi_z)$$

$$\vec{E} = \Re[\underline{\vec{E}}]$$

Expression des opérateurs en fonction de k et de la pulsation

On remarque que l'opérateur symbolique « nabra » (à n'utiliser qu'en coordonnées cartésiennes) appliqué au champ complexe $\underline{\vec{E}}$ s'écrit :

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ik \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -ik \vec{e}_x$$

$$\vec{\nabla} \leftrightarrow -ik$$

De même : $\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow i\omega$

Remarque : bien entendu, avec une convention en $\exp(i(\omega t - kx))$, on aurait $\vec{\nabla} \leftrightarrow -ik$ et : $\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow i\omega$

dans ces conditions, il vient :

$$\text{div} \vec{E} = i\vec{k} \cdot \vec{E}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -i\vec{k} \wedge \vec{E}$$

$$\Delta \vec{E} = -k^2 \vec{E}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\omega \vec{E}$$

Structure de l'O.P.P.M électromagnétique

Nous pouvons maintenant appliquer les résultats précédents aux équations de Maxwell :

$$\text{div} \vec{E} = i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} \perp \vec{k}$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} \perp \vec{k}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow -i\vec{k} \wedge \vec{E} = -i\omega \vec{B} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E} = \frac{\vec{u}}{c} \wedge \vec{E}$$

$$\vec{k} = k\vec{u}$$

Les relations (1) et (2) montrent qu'une onde plane électromagnétique dans le vide a une structure « TRANSVERSE ».

La relation (3), appelée « relation de structure » d'une O.P.P électromagnétique, nous indique que $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ forment un trièdre DIRECT ; de plus, elle montre que $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont en phase et que :

$$\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$$

II.2.5. Polarisation d'une onde plane progressive monochromatique électromagnétique

Une onde plane progressive monochromatique présente un « état de polarisation ». si, lorsqu'on regarde face à la direction de propagation, l'extrémité du vecteur champ électrique (ou magnétique) décrit une courbe fermée.

Exemples d'états de polarisation

Considérons une O.P.P.M se propageant selon la direction Ox :

$$\vec{E} = \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_{oy} \cos(wt - ky) \\ E_z = E_{oy} \cos(wt - kz + \varphi) \end{cases}$$

Pour simplifier les calculs, on se place dans le plan x=0 ; donc :

$$\vec{E} = \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_{oy} \cos(wt - ky) \\ E_z = E_{oy} \cos(wt - kz + \varphi) \end{cases}$$

$$\frac{E_y}{E_{oy}} = \cos(wt); \frac{E_z}{E_{oz}} = \cos(wt) \times \cos(\varphi) + \sin(wt) \times \sin(\varphi)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos(wt) \times \cos(\varphi) = \frac{E_z}{E_{oz}} - \frac{E_y}{E_{oy}} \cos(wt) \\ \sin(wt) \times \sin(\varphi) = \frac{E_y}{E_{oy}} \sin(wt) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{E_y}{E_{oy}} \right]^2 + \left[\frac{E_z}{E_{oz}} \right]^2 - 2 \left[\frac{E_y}{E_{oy}} \right] \left[\frac{E_z}{E_{oz}} \right] \cos\varphi = \sin^2 \varphi$$

L'extrémité du vecteur $\vec{E}$, dans le cas d'une onde plane progressive monochromatique électromagnétique, décrit une ELLIPSE : pour une telle onde, la polarisation la plus générale est donc de type ELLIPTIQUE.

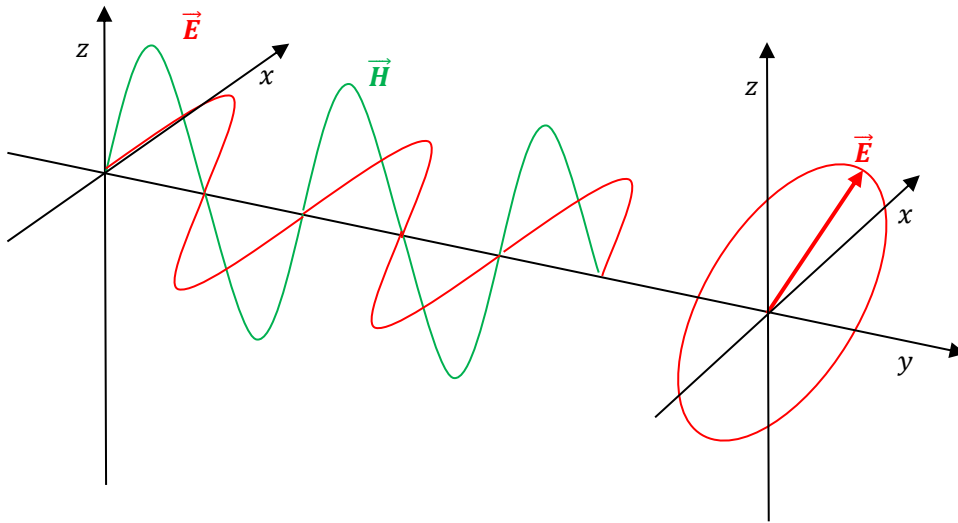


Figure 2.1. La polarisation type ELLIPTIQUE.

Si pour un observateur placé FACE à la direction de propagation, l'ellipse est décrite dans le sens TRIGO, la polarisation est dite elliptique « GAUCHE » ; pour un sens de parcours HORAIRE, la polarisation est elliptique « DROITE ».

Cas particuliers : Pour :

$$\varphi = 0 \text{ ou } \pi$$

$$\frac{E_z}{E_y} = \mp \frac{E_{oz}}{E_{oy}} = Cte$$

⇒ la polarisation est RECTILIGNE.

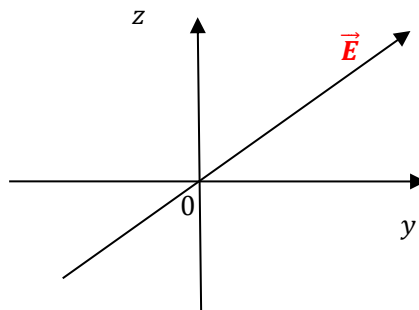


Figure 2.2 La polarisation type RECTILIGNE.

Pour

$$\varphi = \mp \frac{\pi}{2}$$

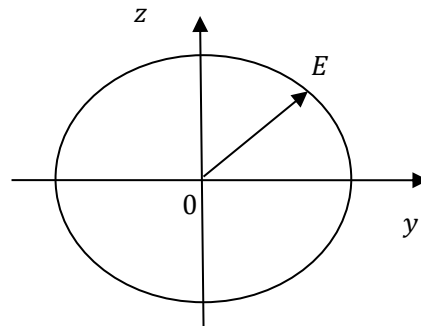
Il vient

$$\left[\frac{E_y}{E_{oy}} \right]^2 + \left[\frac{E_z}{E_{oz}} \right]^2 = 1$$

⇒ Équation d'une ellipse d'axes oy et oz

Si de plus $E_{oy} = E_{oz}$;

la polarisation est CIRCULAIRE (droite ou gauche)



$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

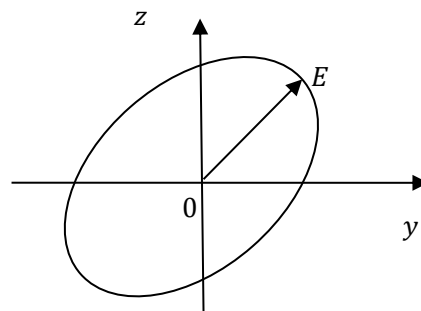


Figure 2.3 la polarisation type CIRCULAIRE.

II.3. Exercices d'applications

Exercice d'application N° 1

1. Rappeler les équations de Maxwell pour un milieu linéaire homogène isotrope sans charges ni courants libres.
2. Etablir les équations de propagation du champ électrique $\vec{E}$ et de l'induction magnétique $\vec{B}$ dans le vide.

Dans le cas de propagation d'une onde plane progressive monochromatique dans le vide, les équations de propagation de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ admettent comme solutions : $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ et $\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$; où E_0 et B_0 sont deux vecteurs constants.

3. Déterminer les expressions de $\text{div} \vec{E}$, $\text{div} \vec{B}$, $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}$ et $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}$.
4. Montrer que le champ électrique et l'induction magnétique $\vec{B}$ sont transversaux.
5. Montrer que les vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont orthogonaux.

On considère, maintenant, l'onde électromagnétique plane progressive 1 dont le champ électrique : $\vec{E}_1$ est donnée, en notation réelle, par : $\vec{E}_1(z, t) = E_{01} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x$

6. Déterminer le sens, la vitesse et la direction de propagation de cette onde.
7. Déterminer l'expression de son induction magnétique $\vec{B}_1$.

A l'onde $\Omega 1$, on superpose l'onde électromagnétique plane progressive $\Omega 2$ dont le champ électrique $\vec{E}_2$ est donnée, en notation réelle, par : $\vec{E}_2(z, t) = E_{02} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y$

8. Déterminer le sens et la vitesse de propagation de l'onde résultante.
9. Quel est la nature de sa polarisation.
10. Déterminer l'expression de son induction magnétique $\vec{B}$.

Solution

1. Les équations de Maxwell pour un milieu linéaire homogène isotrope sans charges ni courants libres $\rho = 0$ et $\vec{j} = 0$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{E} &= 0 \\ \text{div} \vec{B} &= 0 \\ \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

ou ε_0 représente la permittivité diélectrique du milieu et μ_0 la perméabilité magnétique du vide.

2. Dans le vide les équations restent valides avec $\varepsilon = \varepsilon_0$. Cependant, étant donné que l'opérateur $\frac{\partial}{\partial t}$ sur le temps commute avec l'opérateur $\overrightarrow{rot}$ sur l'espace, alors :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{rot}\vec{B} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial^2t} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial^2t}$$

Or :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{E}) = \overrightarrow{grad}(\text{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E}$$

ou aussi, puisque $\text{div}\vec{E} = 0$

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{E}) = -\Delta\vec{E}$$

Cependant, on peut écrire :

$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial^2t}$$

De la même manière, on montre que :

$$\Delta\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial^2t}$$

3. Les expressions du champ électrique $\vec{E}$ et de l'induction magnétique $\vec{B}$ suivantes :

$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$. et $\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$; ou $\vec{E}_0$ et $\vec{B}_0$ sont deux vecteurs constants. sont des solutions des équations de propagation obtenues des équations de Maxwell.

Alors, elles vérifient ces équations :

$$\begin{aligned} \text{div}\vec{E} &= 0 \\ \text{div}\vec{B} &= 0 \\ \overrightarrow{rot}\vec{E} &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -i\omega\vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \\ \overrightarrow{rot}\vec{B} &= \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = i\omega\vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \end{aligned}$$

Les composantes du champs électrique $\vec{E}$ de l'onde en question s'écrivent :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = \begin{vmatrix} E_{0x} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \\ E_{0y} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \\ E_{0z} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \end{vmatrix}$$

alors :

$$\overrightarrow{rot} \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_{ox} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \\ E_{oy} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \\ E_{oz} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \end{vmatrix}$$

soit :

$$\overrightarrow{rot} \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -i \begin{vmatrix} k_y E_{oz} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} - k_z E_{oy} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \\ k_z E_{ox} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} - k_x E_{oz} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \\ k_x E_{oy} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} - k_y E_{ox} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \end{vmatrix}$$

ou encore :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{rot} \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -i \begin{vmatrix} k_y E_z - k_z E_y \\ k_z E_x - k_x E_z \\ k_x E_y - k_y E_x \end{vmatrix} \\ \overrightarrow{rot} \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -i \vec{k} \wedge \vec{E} \end{aligned}$$

On a aussi, d'après les équations de Maxwell :

$$\overrightarrow{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -i\omega \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = -i\omega \vec{B}$$

On constate des deux dernières équations que :

$$\begin{aligned} -i \vec{k} \wedge \vec{E} &= -i\omega \vec{B} \\ \vec{k} \wedge \vec{E} &= \omega \vec{B} \end{aligned}$$

En reprenant le même raisonnement pour l'induction magnétique $\vec{B}$, on montre que :

$$\vec{k} \wedge \vec{B} = -\frac{\omega}{c^2} \vec{E}$$

4. Les deux dernières équations impliquent que les vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{E}$ sont perpendiculaire au vecteur d'onde $\vec{k}$ et par conséquent l'onde est transversale.

5. A partir de l'une des deux dernières équations de la dernière question, on peut conclure que les vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{E}$ sont orthogonaux.

L'onde électromagnétique plane progressive Ω_1 dont le champ électrique $\vec{E}_1$ est donné par $\vec{E}_1(z, t) = E_{01} \cos(wt - kz) \vec{u}_x$ se propage suivant la direction Oz et elle a pour vitesse :

6. L'onde électromagnétique plane progressive 1 est polarisée suivant la direction Ox car son champ électrique $\vec{E}_1$ est orienté parallèlement à la direction Ox.

7. Pour une onde électromagnétique plane progressive monochromatique on a (voir ci-dessus) :

$$\vec{k} \wedge \vec{E}_1 = w \vec{B}_1$$

soit :

$$\vec{B}_1 = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}_1}{w}$$

alors :

$$\vec{B}_1(z, t) = \frac{1}{w} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_{01} \cos(wt - kz) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soit

$$\vec{B}_1(z, t) = B_{01} \cos(wt - kz) \vec{u}_y$$

Avec

$$B_{01} = \frac{E_{01}}{v_\phi} \text{ (ou } v_\phi = \frac{w}{k} \text{)}$$

8. Le champ électrique $\vec{E}$ de l'onde résultante s'écrit :

$$\vec{E}(z, t) = E_{01} \cos(wt - kz) \vec{u}_x + E_{02} \sin(wt - kz) \vec{u}_y.$$

Cette onde se propage suivant la direction Oz avec la vitesse de phase :

$$v_\phi = \frac{w}{k}$$

9. Les composantes de l'onde en question vérifient l'égalité suivante :

$$\left(\frac{E_x}{E_{01}} \right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{02}} \right)^2 = 1$$

Le champ électrique décrit une ellipse dont les axes principaux sont les axes Ox et Oy. L'ellipse est parcourue selon le sens trigonométrique ; car pour un z donnée, quand le temps augmente la première composante évolue comme un cos et la deuxième comme un sin. Alors, La polarisation est elliptique gauche.

10. Pour une onde électromagnétique plane progressive monochromatique on a :

$$\vec{k} \wedge \vec{E} = w \vec{B}$$

alors :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{w}$$

$$\vec{B}(z, t) = \frac{1}{w} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_{01} \cos (wt - kz) \\ E_{02} \sin (wt - kz) \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit :

$$\vec{B}_1(z, t) = -B_{02} \sin(wt - kz) \vec{u}_z + B_{01} \cos (wt - kz) \vec{u}_y$$

$$B_{01} = \frac{E_{01}}{v_\phi} \left(\text{ou } v_\phi = \frac{w}{k} \right) \text{ et } B_{02} = \frac{E_{02}}{v_\phi}$$

Exercice d'application N° 2

Soit une onde d'expression réelle $\vec{E}(z, t) = E_0 \cos[wt - kz] \vec{e}_x$ qui pénètre dans un milieu considéré comme un très bon isolant. Ce milieu est caractérisé par une constante diélectrique relative ϵ_r réelle. De plus le milieu est non magnétique (effets du magnétisme négligés : $\mu = \mu_0$) et neutre.

1. Ecrire dans ce cas les quatre équations de Maxwell.
2. Déterminer l'équation de propagation pour le champ magnétique en fonction de ϵ_r et de c (vitesse de propagation d'une onde dans le vide).
3. En déduire l'équation de dispersion en fonction de ϵ_r , ω et c .
4. En déduire l'indice de réfraction.

Solution : Soit une onde d'expression réelle $\vec{E}(z, t) = E_0 \cos[wt - kz] \vec{e}_x$ qui pénètre dans un milieu considéré comme un très bon isolant. Ce milieu est caractérisé par une constante diélectrique relative ϵ_r réelle. De plus le milieu est non magnétique (effets du magnétisme négligés : $\mu = \mu_0$) et neutre.

1. Les équations de Maxwell pour un milieu diélectrique s'écrivent :

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{E} &= 0 \\ \text{div} \vec{B} &= 0 \\ \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} &= - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

2. Déterminer l'équation de propagation pour le champ magnétique en fonction de ϵ_r et de c (vitesse de propagation d'une onde dans le vide).

Nous avons

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{rot}\vec{B} = -\mu_0\epsilon_0\epsilon_r\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial^2t}$$

Or :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{B}) = \overrightarrow{grad}(\text{div}\vec{B}) - \Delta\vec{B}$$

ou aussi, puisque $\text{div}\vec{E} = 0$

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{B}) = -\Delta\vec{B}$$

Cependant, on peut écrire :

$$\Delta\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\epsilon_r\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial^2t}$$

De la même manière, on montre que :

$$\Delta\vec{E} = \left(\frac{n}{c}\right)^2\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial^2t}$$

L'indice du milieu

$$n = \sqrt{\epsilon_r}$$

3. En déduire l'équation de dispersion en fonction de ϵ_r , ω et c .

$$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mu_0\epsilon_0\epsilon_r\frac{\partial}{\partial t}E_0\cos[wt - kz]\vec{e}_x = -\mu_0\epsilon_0\epsilon_rwE_0\sin[wt - kz]\vec{e}_y$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{B} = -\int \overrightarrow{rot}\vec{E} dt$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -i\vec{k} \wedge \vec{E} = -i \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 0 & 0 & k \\ E_0\cos[wt - kz] & 0 & 0 \end{vmatrix} = -ikE_0\cos[wt - kz]\vec{e}_y$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{B} = \int ikE_0\cos[wt - kz]\vec{e}_y dt = \frac{ikE_0}{w}\sin[wt - kz]\vec{e}_y$$

En dérivant deux fois par rapport au temps :

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = ikE_0\cos[wt - kz]\vec{e}_y$$

$$\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = -ikE_0w\sin[wt - kz]\vec{e}_y$$

et en dérivant deux fois par rapport à z :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{B}}{\partial z} &= \frac{ik^2 E_0}{w} \cos[wt - kz] \vec{e}_y \\ \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial z^2} &= -\frac{ik^3 E_0}{w} \sin[wt - kz] \vec{e}_y\end{aligned}$$

En remplaçant dans l'équation d'onde, il vient :

$$\begin{aligned}\Delta \vec{B} &= \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \\ \frac{ik^3 E_0}{w} \sin[wt - kz] \vec{e}_y &= (\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r) ik E_0 w \sin[wt - kz] \vec{e}_y \\ \frac{k^2}{w^2} &= (\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r)\end{aligned}$$

Alors, $\vec{E}(z, t) = E_0 \cos[wt - kz] \vec{e}_x$ est solution de l'équation d'onde à la condition que $k = \mp \frac{w}{c} n$ c'est la relation de dispersion.

II.4. Réflexion et réfraction

II.4.1. Relations de continuité au niveau d'un dioptré (interface)

On proposera ici une interface plane entre un premier milieu 1, représenté par un indice de milieu n_1 situé dans le demi-espace $z > 0$ et un second milieu 2, représenté par un indice de milieu n_2 situé dans le demi-espace. Nous exploitons les équations de Maxwell à l'interface des deux milieux. On obtient alors *les relations de continuité*.

On représentera l'indice 1 les champs en $z = 0^+$ c'est à dire dans le milieu 1 juste au dessus de l'interface et de l'indice 2 les champs en $z = 0^-$. Ces relations sont :

$$\vec{D}_{N2} - \vec{D}_{N1} = \sigma \vec{n}_{12}$$

$$\vec{B}_{N2} - \vec{B}_{N1} = 0$$

$$\vec{E}_{T2} - \vec{E}_{T1} = 0$$

$$\vec{H}_{T2} - \vec{H}_{T1} = \vec{j}_S \times \vec{n}_{12}$$

Les indices N et T correspondent aux composantes du champ normales à la surface et tangentielles. σ et $\vec{j}_S$ sont des densités surfaciques de charge et de courant $\vec{n}_{12}$ est la normale à la surface dirigée du milieu 1 vers le milieu 2.

Quelque soit la situation, la composante $\vec{E}_T$ parallèle à la surface du champ électrique $\vec{E}$ est continue, ainsi que la composante normale $\vec{B}_N$ du champ magnétique $\vec{B}$.

En l'absence de charges libres de surfaces et de courants surfaciques, la composante $\vec{D}_N$ perpendiculaire à la surface du champ $\vec{D}$ est continue, ainsi que la la composante $\vec{H}_T$ parallèle à la surface du champ électrique $\vec{H}$.

On suppose maintenant d'une part que chacun de ces milieux est homogène et isotrope et d'autre part qu'il n'y a aucune charge libre de surface ni courant libre de surface. Ces équations deviennent alors :

$$\varepsilon_2 \vec{D}_{N2} - \varepsilon_1 \vec{D}_{N1} = 0$$

$$\vec{B}_{N2} - \vec{B}_{N1} = 0$$

$$\vec{E}_{T2} - \vec{E}_{T1} = 0$$

$$\frac{1}{\mu_2} \vec{B}_{T2} - \frac{1}{\mu_1} \vec{B}_{T1} = 0$$

II.4.2. Réflexion et transmission par un dioptré

Nous considérons deux demi-espaces séparés par un dioptré plan.

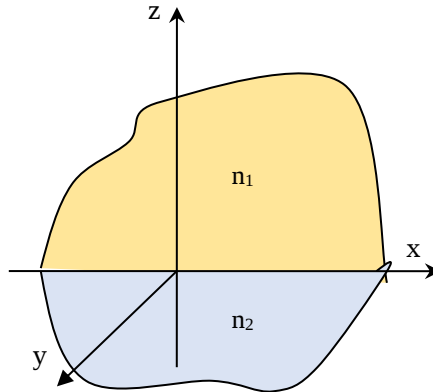


Figure 2.4. Un dioptré plan.

Le dioptré est le plan xOy . Le demi-espace correspondant à $y < 0$ est rempli d'un milieu 1 d'indice optique n_1 le demi espace correspondant à $y > 0$ est rempli d'un milieu d'indice optique n_2 .

II.4.3. Ondes incidente, réfléchi et transmise

Nous considérons une onde plane progressive de vecteur d'onde $\vec{k}_i$ se dirigeant vers le dioptré. Le vecteur d'onde k_i fait un angle θ_i (angle d'incidence) avec l'axe Oy qui est normal à l'interface. A l'interface entre les deux milieux, on constate deux phénomènes :

– Après la traversée du dioptré, l'onde est déviée. C'est le phénomène de réfraction.

L'onde transmise est toujours une onde plane progressive. Son vecteur d'onde $\vec{k}_t$ fait un angle θ_t avec l'axe Oy .

– Une onde plane est renvoyée par le dioptré vers le milieu 1. C'est le phénomène de réflexion. Cette onde réfléchi est elle aussi une onde plane progressive. Son vecteur d'onde est $\vec{k}_r$ fait un angle θ_r avec l'axe Oy .

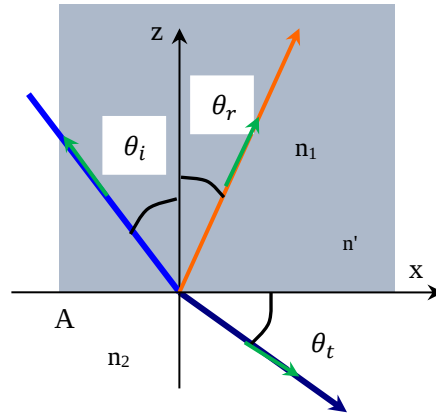


Figure 2.5. Les vecteurs d'onde incident, transmis et réfléchi sont dans un même plan : le plan d'incidence. Ce plan est perpendiculaire à l'interface.

II.4.4. Le champ électromagnétique dans les deux demi-espaces.

Dans le demi-espace $y > 0$ le champ électrique $\vec{E}(r, t)$ est la superposition des champs des ondes incidente et réfléchi :

$$\vec{E}(r, t) = \vec{E}_{i0} e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)} + \vec{E}_{r0} e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

Tandis que dans le demi espace $y < 0$ une seule onde est présente. Le champ électrique est donc celui de l'onde transmise :

$$\vec{E}(r, t) = \vec{E}_{t0} e^{i(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

Comme chacune des trois ondes (incidente, réfléchie et transmise) est une onde plane, le champ magnétique s'exprime simplement en fonction des vecteurs d'onde et du champ électrique. En notant α l'indice qui correspond à chacune des ondes ($\alpha = i, e$ ou t)

$$\vec{E}_\alpha = \vec{E}_{\alpha 0} e^{i(\vec{k}_\alpha \cdot \vec{r} - \omega t)} = \frac{\vec{k}_\alpha}{\omega} \vec{E}_{\alpha 0} e^{i(\vec{k}_\alpha \cdot \vec{r} - \omega t)} = \frac{n}{c} \frac{\vec{k}_\alpha}{|k_\alpha|} \vec{E}_{\alpha 0} e^{i(\vec{k}_\alpha \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

II.4.5. Les conditions de passage

Les relations de passage entre deux milieux ont été rappelées dans la section précédentes, elles sont au nombre de 4 et portent sur les composantes normales à l'interface de $\vec{D}$ et $\vec{E}$ et les composantes tangentielles de $\vec{E}$ et $\vec{H}$. En pratique, pour résoudre complètement le problème, il suffira de considérer les composantes tangentielles de $\vec{E}$ et $\vec{H}$.

On peut alors vérifier que, dans le problème que nous traitons ici, si ces conditions sont remplies, il en est de même de celles qui concernent les composantes normales. Nous noterons avec la lettre T les composantes parallèles à l'interface ($\vec{E}^T, \vec{H}^T$).

L'interface est ici le plan $y = 0$. Nous noterons $\vec{r}_0 = x\vec{e}_x + z\vec{e}_z$ les coordonnées d'un point $P(x, y = 0, z)$ quelconque de ce plan. Les relations de passage pour $\vec{E}$ et $\vec{H}$.

$$\begin{aligned} \vec{E}_{i0}^T e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r}_0 - \omega t)} + \vec{E}_{r0}^T e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r}_0 - \omega t)} &= \vec{E}_{t0}^T e^{i(\vec{k}_t \cdot \vec{r}_0 - \omega t)} \\ \frac{1}{\mu_1} [\vec{B}_{i0}^T e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r}_0 - \omega t)} + \vec{B}_{r0}^T e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r}_0 - \omega t)}] &= \frac{\vec{B}_{t0}^T}{\mu_2} e^{i(\vec{k}_t \cdot \vec{r}_0 - \omega t)} \end{aligned}$$

II.4.6. Les relations de Snell-Descartes : une condition sur le vecteur d'onde.

Ces relations doivent être vérifiées en tout point de l'interface entre ces deux milieux. Multiplions la première équation par $\exp(-i(\vec{k}_i \cdot \vec{r}_0 - \omega t))$:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{i0}^T &= \vec{E}_{t0}^T e^{i((\vec{k}_t - \vec{k}_i) \cdot \vec{r}_0 - \omega t)} - \vec{E}_{r0}^T e^{i((\vec{k}_r - \vec{k}_i) \cdot \vec{r}_0 - \omega t)} \\ &= \vec{E}_{t0}^T e^{i((\vec{k}_{tx} - \vec{k}_{ix})x + (\vec{k}_{tz} - \vec{k}_{iz})z)} - \vec{E}_{r0}^T e^{i((\vec{k}_{rx} - \vec{k}_{ix})x + (\vec{k}_{rz} - \vec{k}_{iz})z)} \end{aligned}$$

Le membre de gauche de cette équation est différent de zéro et constant, il en est donc de même du membre droite. Par conséquent, les exponentielles complexes doivent elles aussi être constantes sur tout le plan $y = 0$. Par conséquent, les composantes du vecteur d'onde parallèles à l'interface du milieu sont identiques :

$$k_{ix} = k_{rx} = k_{tx}$$

$$k_{iz} = k_{rz} = k_{tz}$$

Supposons le vecteur d'onde de l'onde incidente dans le plan xOy ($k_{iz} = 0$), nous déduisons immédiatement que les deux autres vecteurs d'onde sont dans ce même plan ($k_{rz} = k_{tz} = k_{iz} = 0$) et nous pouvons exprimer la relation sur la composante x en fonction des nombres d'ondes $k_\alpha = |\vec{k}_\alpha|$ et des angles θ_α que font ces vecteurs d'onde avec l'axe, normal à l'interface.

$$k_{\alpha x} = k_\alpha \sin \theta_\alpha$$

$$k_i \sin \theta_i = k_r \sin \theta_r = k_t \sin \theta_t$$

N'oublions pas qu'en outre, le module des trois vecteurs d'ondes est directement relié à la pulsation de l'onde et à l'indice du milieu dans laquelle l'onde se propage.

Si nous notons $k_0 = \frac{\omega}{c}$ le nombre d'onde dans le vide. Les modules des vecteurs d'onde sont :

$$|\vec{k}_i| = |\vec{k}_r| = n_1 \frac{\omega}{c} = n_1 k_0$$

$$|\vec{k}_t| = n_2 \frac{\omega}{c} = n_2 k_0$$

A. Onde réfléchie

L'onde réfléchie et l'onde transmise se propagent dans le même milieu, leurs vecteurs d'onde ont donc le même module. Comme, en outre, leurs composantes selon l'axe Ox sont les mêmes, nous déduisons que l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence :

$$n_1 k_0 \sin \theta_i = n_1 k_0 \sin \theta_r$$

soit

$$\theta_i = \theta_r$$

La réflexion est dite *spéculaire*.

B. Onde transmise

Pour l'onde transmise, l'égalité des composantes selon l'axe Ox des vecteurs d'onde s'écrit :

$$n_1 k_0 \sin \theta_i = n_2 k_0 \sin \theta_t$$

ou encore :

$$n_1 \sin \theta_r = n_2 \sin \theta_t$$

Il s'agit de la loi de *Snell-Descartes*. Notons que l'obtention de cette relation est valable quel que soit le type d'onde considéré : seul compte la vitesse de propagation des ondes dans les milieux considérés.

C. Angle critique et réflexion totale

Poursuivons en déterminant la composante selon l'axe Oy du vecteur d'onde transmis. Puisque nous connaissons le module du vecteur d'onde et sa composante selon l'axe Ox , il est immédiat de connaître la composante selon Oy :

$$k_t^2 = k_{tx}^2 + k_{ty}^2$$

soit

$$k_{ty}^2 = k_t^2 - k_{tx}^2 = k_0^2(n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i)$$

Si $n_2 > n_1 \sin \theta_i$, k_{tz}^2 est positif et donc k_z est toujours réel.

Si $n_2 < n_1 \sin \theta_i$, k_{tz}^2 peut être négatif. Tout dépend de l'angle d'incidence que nous devons comparer à l'angle θ_c appelé angle critique et défini par :

$$\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1}$$

Si $\theta_i < \theta_c$, k_{ty}^2 est positif. Le vecteur d'onde est réel et l'onde transmise est une onde plane progressive.

Si $\theta_i > \theta_c$, k_{ty}^2 est négatif. La composante k_y est imaginaire pur. On a dans le milieu 2, une onde évanescente. Par conséquent, aucune onde plane progressive ne se propage dans le milieu 2. Nous verrons dans la section suivante que la réflexion est totale.

D. L'amplitude réfléchie : les formules de *Fresnel*

Les lois de *Snell-Descartes* permettent de déterminer la direction des ondes réfléchies et transmises. Elles ne donnent en revanche aucunes informations sur les amplitudes respectives de ces ondes. Il faut pour cela expliciter les relations de passage. Pour cela nous écrivons ces relations à l'origine des coordonnées et à l'instant $t = 0$. Ceci permet d'éliminer les facteurs de phase $\exp[i(\vec{k}_i \cdot \vec{r}_0 - \omega t)]$. Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} E_{ix} + E_{rx} &= E_{tx} \\ E_{iz} + E_{rz} &= E_{tz} \\ B_{ix} + B_{rx} &= B_{tx} \\ B_{iz} + B_{rz} &= B_{tz} \end{aligned}$$

Nous distinguons maintenant deux cas selon que la polarisation de l'onde incidente est parallèle ou perpendiculaire au plan d'incidence.

II.4.7. Onde incidente polarisée perpendiculairement au plan d'incidence

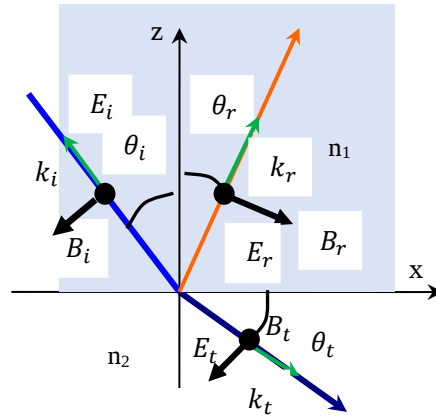


Figure 2.6. Cas où le champ électrique est perpendiculaire au plan d'incidence.

Le champ électrique est selon l'axe Oz , il est perpendiculaire au plan d'incidence et donc parallèle à l'interface entre les deux milieux. Le champ magnétique est dans le plan xOy . Les composantes parallèles à l'interface des champs magnétiques incident, réfléchi et transmis sont :

$$\begin{aligned} B_{ix} &= -B_i \cos \theta_i \\ B_{rx} &= B_r \cos \theta_r \\ B_{tx} &= -B_t \cos \theta_t \end{aligned}$$

Les relations de continuité sont donc :

$$\begin{aligned} E_i + E_r &= E_t \\ -\frac{B_i}{\mu_1} \cos \theta_i + \frac{B_r}{\mu_1} \cos \theta_r &= -\frac{B_t}{\mu_2} \cos \theta_t \\ -\frac{n_1}{\mu_1} \cos \theta_i (E_i - E_r) &= -\frac{n_2}{\mu_2} E_t \cos \theta_t \end{aligned}$$

Nous prendrons dans la suite les perméabilités magnétiques égales ($\mu_1 = \mu_2$) en nous souvenant que lorsqu'elles sont différentes, il faut remplacer dans les formules l'indice par le rapport de l'indice et de la perméabilité.

De ces équations il ressort que les amplitudes E_r du champ réfléchi et E_t du champ transmis sont proportionnels à l'amplitude E_i du champ incident. Les coefficients de proportionnalité sont appelés coefficients de réflexion $r_{\perp}$ et de transmission $t_{\perp}$. Ils sont définis par les relations :

$$r_{\perp} = \frac{E_r}{E_i}$$

$$t_{\perp} = \frac{E_t}{E_i}$$

L'indice $\perp$ correspond à la direction de la polarisation par rapport au plan d'incidence.

Ces coefficients vérifient les équations suivantes :

$$1 + r_{\perp} = t_{\perp}$$

$$n_1 \cos \theta_i (1 - r_{\perp}) = -n_2 t_{\perp} \cos \theta_t$$

On en déduit :

$$r_{\perp} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}$$

$$t_{\perp} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}$$

Onde incidente polarisée parallèlement au plan d'incidence

Dans cette situation, les rôles des champs électrique et magnétique sont inversés.

Le champ magnétique est selon Ox . Le champ magnétique est dans le plan xOy et les amplitudes sont :

$$\begin{aligned} E_{ix} &= E_i \cos \theta_i \\ E_{rx} &= -E_r \cos \theta_r \\ E_{tx} &= E_t \cos \theta_t \end{aligned}$$

Les relations de continuité sont donc :

$$E_i \cos \theta_i - E_r \cos \theta_r = E_t \cos \theta_t$$

$$B_i - B_r = B_t$$

Soit

$$\cos \theta_i (E_i - E_r) = E_t \cos \theta_t$$

$$n_1(E_i + E_r) = E_t n_2$$

On définit alors les coefficients de réflexion et de transmission par :

$$r_{\parallel} = \frac{E_r}{E_i}$$

$$t_{\parallel} = \frac{E_t}{E_i}$$

Ces coefficients vérifient les équations suivantes :

$$\cos\theta_i(1 - r_{\parallel}) = E_t \cos\theta_t t_{\parallel}$$

$$n_1(1 + r_{\parallel}) = n_2 t_{\parallel}$$

On en déduit

$$r_{\parallel} = \frac{n_2 \cos\theta_i - n_1 \cos\theta_t}{n_2 \cos\theta_i + n_1 \cos\theta_t}$$

$$t_{\parallel} = \frac{2n_1 \cos\theta_i}{n_1 \cos\theta_i + n_2 \cos\theta_t}$$

II.4.8. Discussion physique

A. Incidence normale

Dans le cas de l'incidence normale il n'y a pas de distinction selon la polarisation. Mais attention, à cause de la convention que nous avons choisie, lorsque le champ électrique est dans le plan d'incidence, les directions de référence pour le champ électrique sont opposées. Par conséquent un signe – apparaît :

$$r_{\perp} = -r_{\parallel} = r = \frac{n_1 - n_2}{n_2 + n_1}$$

$$t_{\perp} = t_{\parallel} = t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

La polarisation reste la même à la réflexion et à la transmission.

Lorsque l'indice du milieu sur lequel on se réfléchit est plus grand que l'indice du milieu dans lequel se propage l'onde incidente, le coefficient de réflexion est négatif, c'est à

dire qu'il y a un déphasage de π . Ce déphasage est nul si le milieu sur lequel on se réfléchit est d'indice inférieur.

Pour une interface air verre le coefficient de réflexion est :

$$r = \frac{1 - 1.5}{1 + 1.5} = -0.2$$

C'est un coefficient de réflexion en amplitude. Si l'on s'intéresse à la puissance, c'est à dire au vecteur de *Poynting* il faut prendre le carré soit :

$$R = |r|^2 = 0.04$$

4% de la puissance lumineuse est réfléchi. Si l'on s'intéresse à une vitre, c'est-à-dire deux interfaces, la puissance réfléchi est 8% de la puissance incidente.

B. Incidence oblique pour $n_2 > n_1$

Dans ce cas le vecteur d'onde est toujours réel. Les coefficients de réflexion des composantes de la polarisation du champ parallèle et perpendiculaires au plan d'incidence sont différents, il y a donc un changement de polarisation à la réflexion. Le coefficient de réflexion tend vers 1 lorsque l'on se rapproche d'une incidence rasante.

C. Angle de Brewster Le coefficient de réflexion de la polarisation parallèle au plan d'incidence $r_{\parallel}$ s'annule pour une certaine valeur de l'angle d'incidence appelé angle de Brewster θ_{Bi}

$$n_2 \cos \theta_i = n_1 \cos \theta_t$$

On multiplie par $\sin \theta_t$

$$n_2 \sin \theta_t \cos \theta_i = n_1 \sin \theta_t \cos \theta_t$$

$$\begin{aligned} \sin \theta_t \cos \theta_i &= \sin \theta_t \cos \theta_t \\ \sin 2\theta_i &= \sin 2\theta_t \end{aligned}$$

Soit

$$2\theta_t = 2\theta_i \text{ ou } \pi - 2\theta_i = 2\theta_t$$

Soit

$$\theta_i + \theta_t = \frac{\pi}{2}$$

L'angle de Brewster est l'angle pour lequel l'onde réfléchie et l'onde transmise sont perpendiculaires.

$$n_2 \cos \theta_i = n_1 \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta_i \right)$$

$$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1}$$

L'onde réfléchie dans le milieu 1 est due à l'émission des dipôles du milieu 2. A l'angle de Brewster, lorsque l'onde incidente est polarisée dans le plan d'incidence, les dipôles induits dans le milieu 2 sont alignés avec la direction de l'onde réfléchie. Puisqu'un dipôle n'émet pas selon son axe, cela signifie que la puissance réfléchie est nulle. Lorsque de la lumière arrive de l'air sur une surface d'eau (indice $n = 1.5$) l'angle de Brewster est :

$$\theta_B = \arctan 1.5 = 56.3^\circ$$

En revanche pour le même angle d'incidence, lorsque la polarisation est perpendiculaire au plan d'incidence, la réflexion se fait sans problème. Dans ce cas le vecteur d'onde selon z est toujours réel. Les propriétés sont similaires au cas précédent :

Les coefficients de réflexion des composantes de la polarisation du champ parallèle et perpendiculaires au plan d'incidence sont différents, il y a donc un changement de polarisation à la réflexion.

Le coefficient de réflexion tend vers 1 lorsque l'on se rapproche de l'angle critique. On a aussi un angle de Brewster

$$\tan \theta_B = \frac{n_1}{n_2}$$

D. Incidence oblique pour $n_1 > n_2$ et $\theta_i = \theta_t$: réflexion totale

Dans ce cas le vecteur d'onde selon z est imaginaire. On peut utiliser les mêmes formules que précédemment en utilisant les égalités suivantes.

$$k_{tz} > k_t \cos \theta_t$$

Or

$$k_{tz}^2 = k_0^2 (k_2^2 - k_1^2 \cos^2 \theta_t)$$

$$\cos^2 \theta_t = (n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i)$$

on a donc les mêmes formules avec $\cos \theta_t$ imaginaire. Le module du coefficient de réflexion est 1. La réflexion déphase l'onde.

Chapitre III

GENERALITES SUR LES ANTENNES

III.1. Les Antennes

Les premières antennes sont apparues à la fin du XIXe siècle, à une phase où les recherches dans les domaines électromagnétiques et l'électronique ont connu des développements remarquables.

Le britannique James Maxwell, en 1870, réalise de très importants progrès lors de ses études des ondes électromagnétiques en démontrant que celles-ci voyagent aussi bien dans le vide que dans la matière. Cela a permis de réaliser les premières expériences de la radio (transmission sans fil) en 1895, par le physicien Marconi, lauréat du prix Nobel de physique de 1909 « en reconnaissance de ses contributions au développement de la télégraphie sans fil ».

Ainsi, le développement de ces réseaux sans fil nécessite des avancées technologiques au niveau des composants électroniques, des logiciels informatiques, des techniques de codage ou encore des antennes. Les antennes sont un des points clés des réseaux sans fil puisque cet élément est un facteur clé de la chaîne permettant l'émission, la transmission et la réception du signal et donc de l'information contenue dans celui-ci. L'antenne utilisée pour une station de communication doit être adaptée à chaque liaison en fonction de la couverture souhaitée.

Une antenne sert à convertir une puissance électrique en une puissance rayonnée, c'est-à-dire transportée par une onde électromagnétique, qui peut se propager dans toutes les directions de l'espace. Les directions dans lesquelles cette puissance va dépendre des caractéristiques de l'antenne. Commençons par exprimer la puissance rayonnée par une antenne quelconque, dont le centre est placé au centre d'un repère sphérique (Fig. 3.1) et connectée à une source qui lui fournit une puissance électrique P_A .

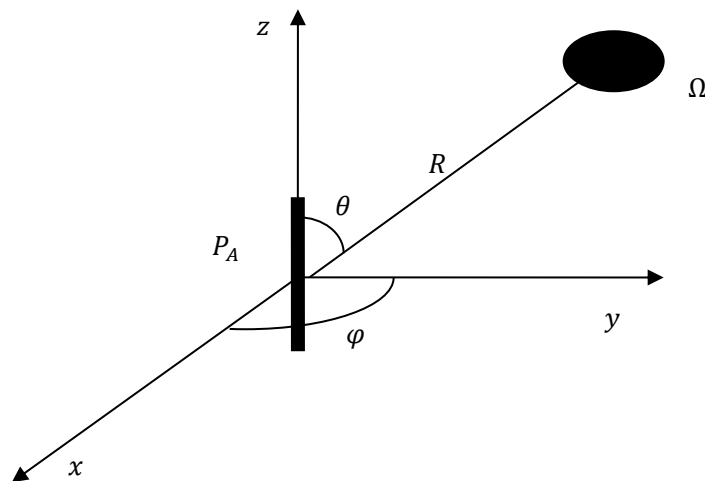


Figure 3.1. Puissance rayonnée par une antenne dans une direction de l'espace

Remarque : soit un repère cartésien où l'axe z correspond à l'axe vertical. On appelle plan horizontal le plan repéré dans le repère sphérique par les coordonnées $(\theta = \frac{\pi}{2}; \varphi \in [0, 2\pi])$.

On appelle plan vertical tous les plans repérés dans le repère sphérique par les coordonnées

$$(\theta \in [0, 2\pi]; \varphi = Cte)$$

La puissance rayonnée dans une direction quelconque (θ, φ) dans un angle solide Ω (exprimé en stéradian - sr)

$$P(\theta, \varphi) = \frac{P_A}{\Omega} (W \text{ ou } W/sr)$$

La puissance fournie à une surface élémentaire située à une distance R

$$p(\theta, \varphi) = \frac{P_A}{\Omega R^2} (W/m^2)$$

La puissance rayonnée totale correspond à la somme des puissances rayonnées dans toutes les directions de l'espace.

$$P_{tot} = \int_{\theta} \int_{\varphi} P(\theta, \varphi) d\varphi d\theta (W/sr)$$

III.2. Une antenne omnidirectionnelle (isotrope)

Une antenne isotrope est une source ponctuelle qui rayonne une onde sphérique, c'est-à-dire de manière constante dans toutes les directions de l'espace la puissance P_A fournie par l'alimentation, sans pertes et d'une propagation dans un milieu homogène et isotrope. Puissance rayonnée par unité d'angle solide :

$$P(\theta, \varphi) = \frac{P_A}{4\pi}$$

Puissance rayonnée par unité de surface :

$$p(R, \theta, \varphi) = \frac{P_A}{4\pi R^2}$$

A partir de la mesure de la puissance rayonnée, il est possible de déterminer la valeur du champ électrique. En espace libre et en champ lointain, la puissance transportée par l'onde est donnée par le vecteur de Poynting (équation 19) et les champs E et H sont

perpendiculaires, en phase et reliés par l'impédance d'onde. On peut en déduire la relation suivante :

$$p = \frac{1}{2}EH = \frac{1}{2} \frac{E^2}{\eta} = \frac{P_A}{4\pi R^2}$$

$$E = \sqrt{\frac{P_A}{4\pi\eta R^2}} = \sqrt{\frac{60P}{R}}$$

III.3. Diagramme de rayonnement

Le diagramme de rayonnement représente les variations de la puissance rayonnée par l'antenne dans les différentes directions de l'espace. Il indique les directions de l'espace (θ_0, φ_0) dans lesquelles la puissance rayonnée est maximale. Il est important de noter que le diagramme de rayonnement n'a de sens que si l'onde est sphérique.

On trace dans le diagramme de rayonnement la fonction caractéristique de rayonnement $r(\theta, \varphi)$, qui varie entre 0 et 1 selon la direction. Celui-ci peut se représenter sous différentes formes (Fig. 3.2). En général, le diagramme de rayonnement d'une antenne est représenté dans les plans horizontaux ($\theta = 90^\circ$) et verticaux ($\varphi = \text{constante}$), ou bien dans les plans E et H.

$$r(\theta, \varphi) = \frac{P(\theta, \varphi)}{P_0(\theta_0, \varphi_0)}$$

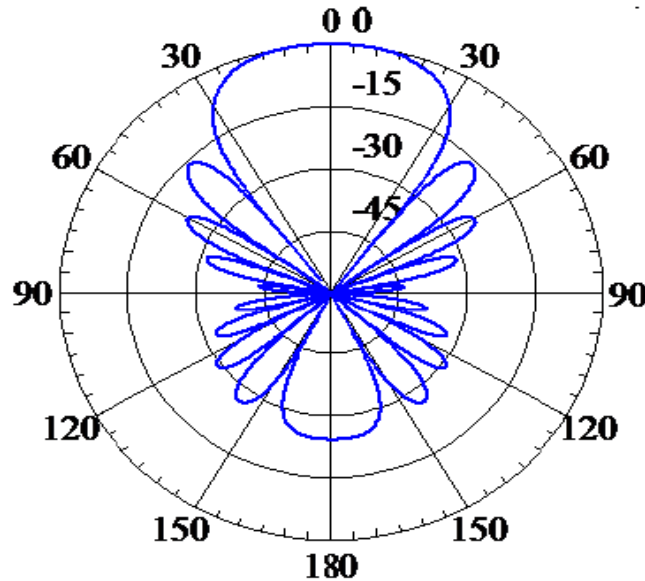


Figure 3.2. Représentation du diagramme de rayonnement d'une antenne.

- diagramme polaire.

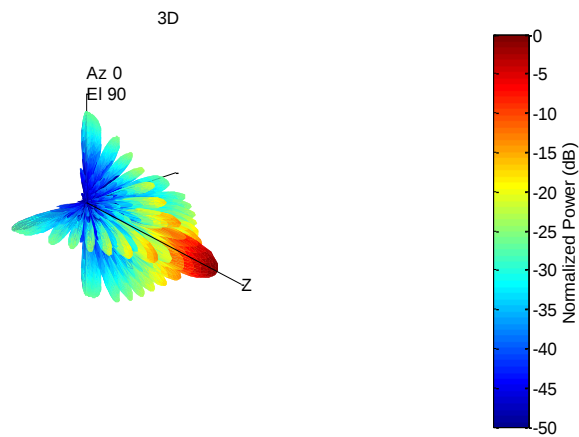


Figure 3.4. Représentation du diagramme de rayonnement d'une antenne
- diagramme de rayonnement 3D.

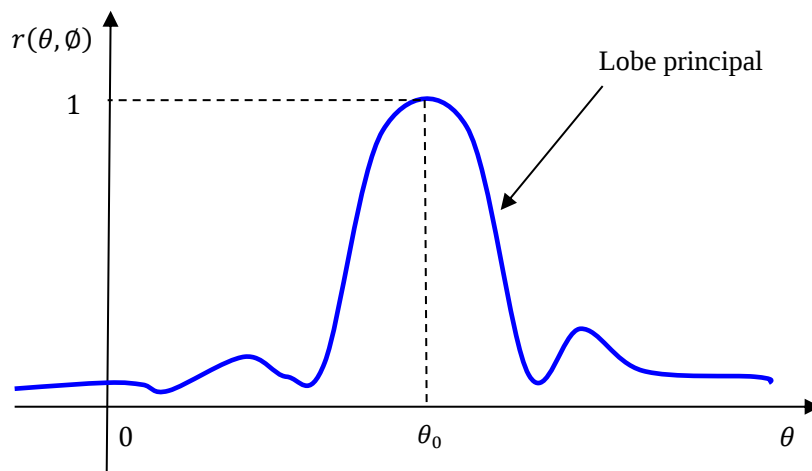


Figure 3.5. Représentation du diagramme de rayonnement d'une antenne -diagramme cartésien.

Un **diagramme de rayonnement** ou **d'émission** est la représentation géométrique de la distribution angulaire d'une grandeur caractérisant le rayonnement d'une antenne radioélectrique. Le diagramme de rayonnement d'une antenne permet de visualiser les lobes d'émission dans les trois dimensions, dans le plan horizontal ou dans le plan vertical incluant le lobe le plus important.

Le diagramme de rayonnement d'une antenne est principalement relié à sa géométrie mais peut aussi varier avec la fréquence. Hormis les antennes omnidirectionnelles, les

antennes ne rayonnent pas la puissance de manière uniforme dans l'espace. Dans ce cas, la fonction caractéristique de rayonnement est égale à 1 quel que soit la direction considérée. En général, la puissance est concentrée dans un ou plusieurs « lobes ». Le lobe principal correspond à la direction privilégiée de rayonnement. Les lobes secondaires sont généralement des lobes parasites. Dans ces directions, l'énergie rayonnée est perdue donc on cherche à les atténuer.

III.4. Angle d'ouverture

L'angle d'ouverture (beamwidth) caractérise la largeur du lobe principal. L'angle d'ouverture à 3 dB $2\theta_3$ représente la portion de l'espace dans lequel la majeure partie de la puissance est rayonnée.

Il s'agit de l'angle entre les 2 directions autour du lobe principal où la puissance rayonnée est égale à la moitié de la puissance rayonnée dans la direction de rayonnement maximal.

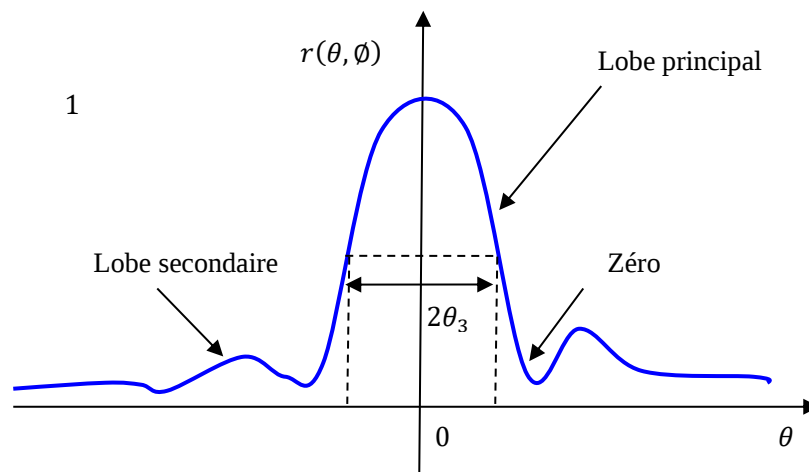


Figure 3.6. Diagramme de rayonnement et angle d'ouverture.

D'autres grandeurs sont utilisées pour caractériser l'ouverture d'une antenne et sa capacité à focaliser la puissance rayonnée dans une direction donnée. On trouve l'angle entre la direction de rayonnement maximale et le premier zéro.

Pour les stations de base, on trouve aussi les paramètres suivants : l'ouverture horizontale ou *azimuth beamwidth* et l'ouverture verticale ou *elevation beamwidth*.

Celles-ci sont conçues pour couvrir une portion donnée du sol, dont l'ouverture horizontale dépend du secteur qu'elles ont à couvrir (120° par exemple). L'ouverture verticale doit rester faible et ne couvrir que le sol à proximité de l'antenne (moins de 10°).

III.5. Directivité, gain et rendement d'une antenne

Ces 3 grandeurs permettent de caractériser la façon dont une antenne convertit la puissance électrique incidente en puissance électromagnétique rayonnée dans une direction particulière. Le gain et la directivité permettent de comparer les performances d'une antenne par rapport à l'antenne de référence qu'est l'antenne isotrope.

1. Directivité

La directivité de l'antenne dans le plan horizontal est une caractéristique importante dans le choix d'une antenne. Elle possède un ou quelques lobes nettement plus importants que les autres qu'on nomme « lobes principaux ». La directivité $D(\theta, \varphi)$ d'une antenne dans une direction (θ, φ) est le rapport entre la puissance rayonnée dans une direction donnée (θ, φ) et la puissance que rayonnerait une antenne isotrope.

$$D(\theta, \varphi) = \frac{P(\theta, \varphi)}{P_R/4\pi} = 4\pi \frac{P(\theta, \varphi)}{P_R}$$

2. Gain

Le gain définit l'augmentation de puissance émise ou reçue dans le lobe principal. Le gain est généralement exprimé en dB ou en dBi car une antenne isotrope est utilisée comme référence. On trouve aussi parfois le gain exprimé en dBd, lorsqu'une antenne dipôle est utilisée comme référence. Le gain $G(\theta, \varphi)$ d'une antenne dans une direction (θ, φ) est le rapport entre la puissance rayonnée dans une direction donnée $P(\theta, \varphi)$ sur la puissance que rayonnerait une antenne isotrope sans pertes. En général, le gain G correspond au gain dans la direction de rayonnement maximal (θ_0, φ_0) . Cette propriété caractérise la capacité d'une antenne à focaliser la puissance rayonnée dans une direction.

$$G(\theta, \varphi) = 4\pi \frac{P(\theta, \varphi)}{P_A} \Rightarrow G = 4\pi \frac{P(\theta_0, \varphi_0)}{P_A}$$

Si l'antenne est omnidirectionnelle et sans pertes, son gain vaut 1 ou 0 dB.

3. Rendement

Le rendement η d'une antenne traduit sa capacité à transmettre la puissance électrique en entrée P_A sous forme de puissance rayonnée P_R . On le définit comme le rapport entre la puissance totale rayonnée par une antenne et la puissance qui lui est fournie. Le rendement est lié aux pertes dans le réseau de polarisation et dans les éléments rayonnants. En comparant les équations 27 et 28, on voit que le rendement relie le gain et la directivité.

$$P_R = \eta P_A \Rightarrow G = \eta D$$

4. Lien entre gain et angle d'ouverture

Intuitivement, on voit que le gain est dépendant de l'ouverture d'une antenne. Plus le gain d'une antenne est grand, plus l'angle d'ouverture du lobe principal est faible, ce que montre le résultat suivant.

$$G = \eta 4\pi \frac{P(\theta_0, \varphi_0)}{P_R} \text{ et } P_R = \int_0^{4\pi} P(\theta, \varphi) d\Omega = \int_0^{4\pi} r(\theta, \varphi) P(\theta_0, \varphi_0) d\Omega$$

$$G = \eta \frac{4\pi}{\int_0^{4\pi} r(\theta, \varphi) d\Omega}$$

a. Une antenne à symétrie de révolution

Des antennes comme les antennes dipôles ont une symétrie de révolution, c'est-à-dire que le diagramme de rayonnement est invariant après toute rotation d'angle φ . Dans ce cas, le gain peut s'écrire :

$$G = \frac{\eta 4\pi}{\int_{\theta} \int_{\varphi} r(\theta, \varphi) d\varphi d\theta} = \frac{\eta 4\pi}{\int_{\theta} \int_{\varphi} r(\theta) \sin(\theta) d\varphi d\theta} = \frac{2\eta}{\int_0^{4\pi} r(\theta) \sin(\theta) d\theta}$$

Dans le cas idéal où l'antenne émet uniformément dans un cône ($r(\theta) = 1$ si $0 < \theta < \theta_0$, $= 0$ ailleurs), le gain est égale à :

$$G = \frac{2\eta}{\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)}$$

Par exemple, pour une antenne sans pertes, si l'antenne rayonne dans une demi sphère ($\theta_0 = \pi/2$); $G = 2 = 3dB$. Pour un cône très étroit ($\theta_0 \rightarrow 0$), $G \sim \frac{4}{\theta_0^2}$. Pour $\theta_0 = 1^\circ$, $G = 13000 = 41dB$

4.2 Antenne à lobe étroit

Pour des lobes étroits $2\theta_0 < 10^\circ$, la relation entre le gain G et les angles d'ouvertures dans les plans E et H sont :

$$G = \frac{25000}{(2\theta_3)_E (2\theta_3)_H}$$

5. Puissance isotrope rayonnée équivalente (PIRE)

La puissance isotrope rayonnée équivalente d'une antenne (PIRE ou EIRP en anglais) est un terme souvent utilisé en télécommunications qui définit, dans la direction de rayonnement maximal, la puissance électrique qu'il faudrait apporter à une antenne isotrope pour obtenir la même puissance rayonnée dans cette direction. Elle se calcule selon l'équation 33.

$$PIRE = G \times P_A$$

6. Réciprocité de réception

Une caractéristique fondamentale du diagramme de rayonnement est qu'il est également celui de réception de l'antenne. Cette réciprocité électromagnétique permet lors de la conception de l'antenne de simuler numériquement à la fois l'émission et la réception. Elle permet également d'utiliser la même antenne pour les deux fonctions, comme dans le cas d'un radar.

III.1.6. Modèle électrique d'une antenne

une antenne est un dispositif permettant de rayonner (émetteur) ou de capter (récepteur) les ondes électromagnétiques. Une antenne rayonne efficacement sur une bande de fréquence étroite qui correspond à sa fréquence de résonance.

Lorsqu'un signal variable excite une antenne, des charges sont mis en mouvement le long de l'antenne donnant naissance à un rayonnement.

La résonance correspond à une situation où ces charges sont en oscillation permanente. Pour représenter ce comportement résonant qui varie avec la fréquence, il est possible de modéliser l'antenne par un circuit passif *RLC* équivalent.

La connaissance de ce modèle est cruciale pour déterminer le comportement de l'antenne et comment l'antenne va convertir la puissance électrique incidente en puissance rayonnée. Afin d'éviter toute perte liée à la désadaptation entre la source électrique et l'antenne, il est nécessaire d'assurer les conditions d'adaptation.

1. Modèle électrique d'une antenne

On peut résumer le comportement de l'antenne passive (qui présente un comportement linéaire) ainsi : une antenne stocke des charges (comportement capacitif = stockage sous forme d'énergie électrique).

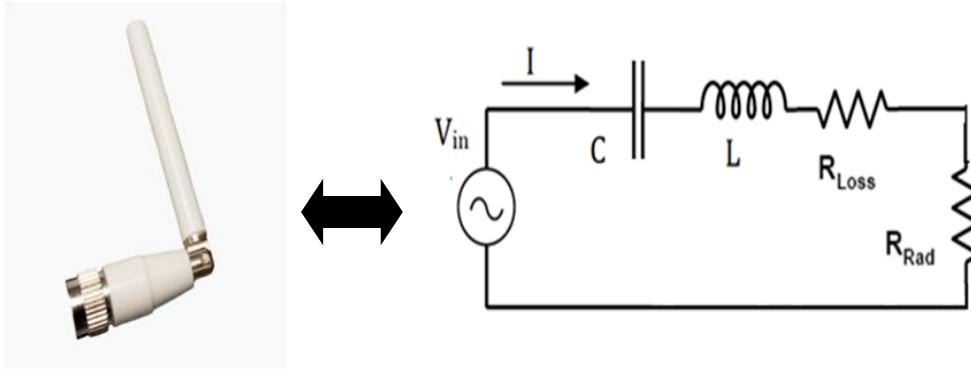


Figure 3.7. Modèle d'impédance complexe d'une antenne

S'oppose aux variations des courants qui y circulent (comportement inductif = stockage sous forme d'énergie magnétique) et dissipe une partie de l'énergie (pertes ohmiques et par rayonnement). D'un point de vue électrique, une antenne passive peut donc être modélisée par un circuit équivalent RLC (Fig. 3.7, valable pour une antenne dipôle) et l'impédance Z_{in} vue à l'entrée de l'antenne est donnée par l'équation 34. A noter que les valeurs du modèle ne sont valides que sur des bandes étroites.

2. Résistance de rayonnement

Du point de vue de la théorie des circuits, une antenne à l'émission correspond à un élément passif linéaire dissipatif, possédant une impédance d'entrée complexe Z_{in} qui est une fonction de la fréquence. Si cette antenne est excitée par un courant de valeur efficace I , la puissance fournie à l'antenne est :

$$P_f = I^2 \Re(Z_{in})$$

Si l'on admet que l'antenne est faite en matériaux idéaux sans pertes, la conservation de l'énergie implique que cette puissance soit égale à la puissance électromagnétique rayonnée P_{rad} . On peut donc obtenir la partie réelle de l'impédance d'entrée d'une antenne idéale, dite résistance de rayonnement R_{rad} , comme :

$$R_{rad} = \Re(Z_{in}) = \frac{P_{rad}}{I^2}$$

En revanche, le calcul de la partie imaginaire de l'impédance d'entrée est beaucoup plus délicat. La réactance n'est pas liée au rayonnement mais plutôt au champ proche. Elle est très sensible à la géométrie et à la façon dont l'antenne est connectée au générateur. Sauf pour des antennes à géométrie très simple, des calculs numériques à l'ordinateur sont nécessaires pour son évaluation. Mais souvent, on se contente d'une estimation empirique approchée.

3. Adaptation et condition d'adaptation

Une antenne est reliée à la source par une ligne de transmission d'impédance caractéristique Z_C (en général, $Z_C = 50 \text{ Ohm}$). Pour assurer un transfert maximal de puissance entre l'alimentation et l'antenne, il est nécessaire d'assurer une adaptation d'impédance. L'adaptation permet d'annuler le coefficient de réflexion Γ_{in} ou S_{11} en entrée de l'antenne.

$$\eta = \frac{P_{Rad}}{P_A} = \frac{P_{Rad}}{P_{Rad} + P_{Loss}}$$

Le coefficient de réflexion est le rapport entre l'onde réfléchie en entrée de l'antenne et l'onde incidente. Il dépend de l'impédance d'entrée de l'antenne et de l'impédance caractéristique.

$$P_A = P_S(1 - |\Gamma_{in}|^2)$$

$$S_{11} = \Gamma_{in} = \frac{Z_{in} - Z_C}{Z_{in} + Z_C}$$

Si l'adaptation n'est pas assurée, une partie de la puissance ($P_{mismatch} = \Gamma^2 P_A$) est renvoyée vers la source (ou re-rayonnée par l'antenne dans le cas de la réception), appelée en anglais mismatch loss (pertes de désadaptation). En pratique, soit on cherchera à concevoir l'antenne de telle manière à ce qu'elle présente une impédance égale à Z_C à la fréquence de travail, soit on disposera en entrée de l'antenne un circuit de transformation d'impédance qui modifiera l'impédance d'entrée de l'antenne vue depuis la source et assurera l'adaptation d'impédance. Ce réseau est composé d'éléments passifs (filtres à base d'inductances et de capacités) ou de lignes de transmission (à haute fréquence).

Remarque

Bien que les pertes par désadaptation réduisent l'efficacité d'une antenne, celles-ci (ainsi que les pertes par polarisation) ne sont généralement pas incluses dans le calcul de l'efficacité η .

Dans les notes d'application d'antennes, l'adaptation de l'antenne est souvent caractérisée par le rapport d'onde stationnaire (ROS) ou Voltage Standing Wave Ratio (VSWR). Lorsqu'il y a désadaptation, la réflexion d'une partie de l'onde incidente et l'addition avec l'onde incidente conduit à l'apparition d'une onde stationnaire dans la ligne qui relie l'antenne à la source (ou au récepteur).

L'amplitude de cette onde stationnaire n'est pas constante le long de la ligne : l'amplitude est maximale en certains endroits (ventres) et minimale à d'autres (noeuds). Le rapport d'onde stationnaire est le rapport entre l'amplitude maximale et l'amplitude

minimale de cette onde stationnaire, et est lié au coefficient de réflexion par l'équation 37. Outre l'indication des pertes par désadaptation, il s'agit aussi d'une notion importante du point de vue électronique. Ainsi, si le VSWR est supérieur à 1, la tension obtenue en un ventre dépasse la tension nominale, ce qui peut conduire à une dégradation des équipements électroniques présents. Le VSWR est souvent noté de la manière suivante : 1.9 : 1, qui signifie un VSWR = 1.9, c'est-à-dire que le rapport entre l'amplitude max. de l'onde stationnaire est 1.9 fois plus grande que l'amplitude min. Le coefficient de réflexion est alors de 0.31. La perte de puissance par désadaptation sera alors de 10 % de la puissance incidente, soit une perte de 0.44 dB.

$$VSWR = \frac{V_{max}}{V_{min}} = \frac{1 + \Gamma_{in}}{1 - \Gamma_{in}}$$

4. Bande passante et facteur de qualité

La bande passante d'une antenne correspond à la bande de fréquence où le transfert d'énergie de l'alimentation vers l'antenne (ou de l'antenne vers le récepteur) est maximale. La largeur de bande ou bande passante en adaptation d'une antenne peut être définie comme une bande de fréquences pour laquelle le coefficient de réflexion est inférieur à un seuil donné. Elle peut être définie comme correspondant à la bande de fréquence où le transfert d'énergie de l'alimentation vers l'antenne (ou de l'antenne vers le récepteur) est supérieur à un seuil.

$$BP = \Delta F = F1 - F2$$

La bande passante peut être définie en fonction du coefficient de réflexion, à condition que le diagramme de rayonnement ne change pas sur cette bande. Il n'y a pas de critères précis pour la limite du coefficient de réflexion. Un critère typique d'avoir un coefficient de réflexion inférieure à -10 dB ou -15 dB sur la bande passante.

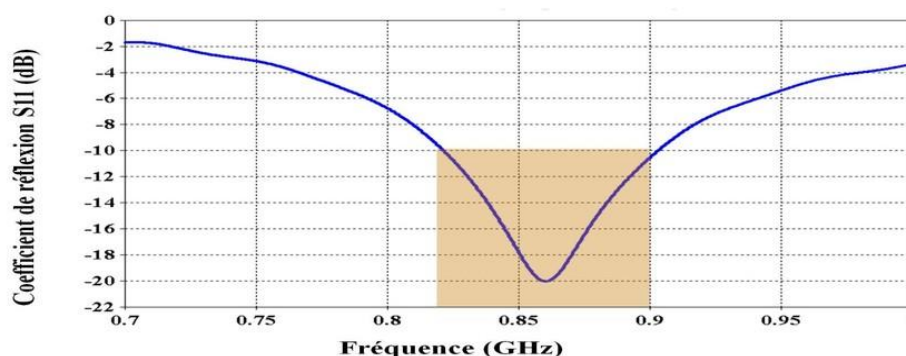


Figure 3.8. Bande passante et coefficient de réflexion.

D'un point de vue électrique, nous avons vu que l'antenne pouvait être vue comme un circuit résonant RLC. La bande passante BW (bande passante à 3 dB de la valeur du

champ) est liée au facteur de qualité Q du circuit RLC à la fréquence de résonance f_{Res} . Le facteur de qualité représente la quantité de résistance présente lors de la résonance.

$$Q = \frac{f_{Res}}{BW}$$

$$\frac{1}{Q} = \frac{R_{ant}}{2\pi f_{Res} L_{ant}}$$

Une antenne avec un fort facteur de qualité rayonne très efficacement à la fréquence de rayonnement sur une bande de fréquence très étroite, ce qui peut limiter les interférences hors bande. Cependant, si la bande passante est trop étroite, tout signal émis ou reçu près des bornes de la bande de fréquence de fonctionnement sera atténué. Une antenne avec un faible facteur de qualité est large bande mais collecte le bruit présent sur la bande de fonctionnement, dégradant ainsi la qualité du signal reçu.

III.1.6. Exemple d'application

Considérons une antenne qui émet une onde plane suivant la direction $\vec{u}_r$. On suppose que, dans la zone lointaine, le champ électrique est porté par l'axe $\vec{u}_\varphi$ et a pour expression :

$$\vec{E}(r, \theta, \varphi) = E_{Max} \cos(\pi \cos(\theta)) e^{-jkr} \vec{u}_\varphi$$

E_{Max} : Amplitude maximum de E .

1. Déterminer le champ magnétique dans le cas où l'onde se propage dans le vide.
2. Calculer la densité de puissance normalisée.
3. Déterminer les caractéristiques suivantes :
 - A. Direction des maximums de rayonnement.
 - B. Direction des minimums de rayonnement.
 - C. Ouvertures à -3dB pour chaque lobes.

Solution

Considérons une antenne qui émet une onde plane suivant la direction $\vec{u}_r$. On suppose que, dans la zone lointaine, le champ électrique est porté par l'axe $\vec{u}_\varphi$ et a pour expression :

$$\vec{E}(r, \theta, \varphi) = E_{Max} \cos(\pi \cos(\theta)) e^{-jkr} \vec{u}_\varphi$$

E_{Max} : Amplitude maximum de E .

4. Déterminer le champ magnétique dans le cas où l'onde se propage dans le vide.

Onde plane : $\vec{H} = \frac{\vec{E}_\phi}{z_0} \vec{u}_\theta$

5. Calculer la densité de puissance normalisée.

6.

$$\vec{p} = \vec{E} \wedge \vec{H}^* = E_\phi H_\theta^* \vec{u}_r$$

$$p_r = \frac{|E_0|^2}{z_0} = \frac{[E_{Max} \cos(\pi \cos(\theta))]^2}{z_0}$$

$$p_{rNor} = \cos^2(\pi \cos(\theta))$$

7. Déterminer les caractéristiques suivantes :

▪ Direction des maximums de rayonnement.

$$\frac{\partial p_{rNor}}{\partial \theta} = -2\pi \sin(\theta) \sin(2\pi \cos(\theta)) \cos(2\pi \cos(\theta)) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = \text{ArcCos}\left(\frac{m}{2}\right) \\ \theta_2 = m\pi \end{cases}$$

m	-2	-1	0	1	2
θ	180°	120°	90°	60°	0°
p_{rNor}	1	0	1	0	1

▪ Direction des minimums de rayonnement.

$$p_{rNor}(-3db) = \cos^2(\pi \cos(\theta)) = 0.5 \Rightarrow \theta = \text{ArcCos}\left(\frac{2m+1}{4}\right)$$

m	-2	-1	0	1	2
θ	-	104°5	75°5	41°4	138°6

▪ Ouvertures à -3dB pour chaque lobes.

θ	0	90°	180°	270°
$\theta(-3db)$	82°8	29°	82°8	29°

Chapitre 4

CARACTERISTIQUES DE QUELQUES ANTENNES USUELLES

IV.1. Introduction

Des antennes de base ou développées utilisées pour les télécommunications sont présentées dans cette partie. Les principes de fonctionnement, les structures, les performances et les formules mathématiques pour le dimensionnement sont proposées.

Le rayonnement d'une onde électromagnétique est créée par la circulation d'un courant électrique.

A partir de la structure géométrique de ce dernier, nous pouvons classer les antennes en deux catégories :

1. Les antennes filaires.
2. Les antennes à surfaces rayonnantes.

Les antennes filaires et les boucles constituent les antennes classiques les plus courantes car les plus simples et les moins onéreuses, leurs performances sont parfois limitées et il est nécessaire de concevoir des éléments rayonnants plus performants pour obtenir de gains meilleurs, des bandes passantes plus larges.

Le développement des applications sans fils embarquées et mobiles augmentent l'exigence en termes de miniaturisation des antennes et efficacité.

IV.2. Différents types d'antennes

A. Antennes élémentaires

A.1. Dipôle élémentaire ou dipôle d'Hertz

Un dipôle élémentaire ou dipôle de Hertz ou doublet électrique est un fil de longueur h très inférieure à la longueur d'onde ($h < \lambda/10$).

Cette antenne élémentaire est généralement considérée pour calculer le rayonnement d'une antenne de longueur quelconque considérée comme la succession de plusieurs éléments dont chacun constitue un doublet de Hertz.

Connecté à une source d'excitation (I), on considère que l'amplitude du courant est constante le long de l'antenne.

$$\vec{I}(z) = I_0 e^{j\omega t} \vec{u}_z$$

A.1.1. Champ électromagnétique crée

Considérons doublet de Hertz, dans le système d'axe $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. Un point M de l'espace peut toujours être repéré par rapport aux axes par un système de coordonnées sphériques.

A.1.2. Potentiel vecteur A

La circulation du courant $\vec{I}(z)$, le long d'une antenne filaire quelconque (portée par l'axe oz) crée au point M un potentiel vecteur $\vec{A}$ donné par :

$$\vec{A}(r) = \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r} \int_{dl} \vec{J}(z) dz$$

k : Nombre d'onde

μ : permeabilité du milieu de propagation ($\mu = \mu_0$).

r : distance qui sépare la source $\vec{J}$ du point où l'on veut déterminer le potentiel (dépend des coordonnées cartésiennes x, y et z).

dl : longueur de l'antenne

$\vec{J}(z)$: courant traversant l'antenne.

Le doublet de Hertz est parcouru par un courant constant J_0 , nous pouvons écrire :

$$\vec{A}(r) = \frac{\mu dl J_0 e^{-jkr}}{4\pi r} \vec{u}_z$$

Le potentiel $\vec{A}(r)$, crée par l'antenne, garde toujours la même direction qui lui donnée la naissance.

On peut écrire $\vec{A}(r)$ en cordonnées sphériques :

$$\vec{A}(r, \theta, \varphi) = A(r, \theta, \varphi) \vec{u}_z = \begin{cases} A_r(r, \theta, \varphi) = A_z(r) \cos(\theta) \\ A_\theta(r, \theta, \varphi) = -A_z(r) \sin(\theta) \\ A_\varphi(r, \theta, \varphi) = 0 \end{cases}$$

La connaissance de vecteur $\vec{A}(r)$ permet de déterminer le champ électrique $\vec{E}$ et le champ magnétique $\vec{H}$ créés. En effet, ces deux champs s'obtiennent à partir des relations suivantes :

$$\vec{E} = -j\omega \vec{A} - j \frac{\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{A})}{\omega \mu \epsilon}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{A}$$

A.1.3. Champ magnétique $H(r, \theta, \varphi)$

$$A_\varphi(r, \theta, \varphi) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$$

Le calcul du rotationnel de $\vec{A}$, en cordonnées sphériques, nous donne :

$$H(r, \theta, \varphi) = \begin{cases} H_r(r, \theta, \varphi) = 0 \\ H_\theta(r, \theta, \varphi) = 0 \\ H_\varphi(r, \theta, \varphi) = J_0 \frac{dl}{4\pi} \sin\theta \left[\frac{1}{r^2} + \frac{jk}{r} \right] e^{-jkr} \end{cases}$$

A.1.4. Champ électrique $E(r, \theta, \varphi)$

$$E(r, \theta, \varphi) = \begin{cases} E_r(r, \theta, \varphi) = -J_0 \frac{dl}{j\omega\epsilon 4\pi} \cos\theta \left[\frac{1}{r^3} + \frac{jk}{r^2} \right] e^{-jkr} \\ E_\theta(r, \theta, \varphi) = J_0 \frac{dl}{4\pi} \sin\theta \left[\frac{1}{r^3} + \frac{k^2}{r} - \frac{jk}{r^2} \right] e^{-jkr} \\ E_\varphi(r, \theta, \varphi) = 0 \end{cases}$$

Remarque : le champ électrique possède une composante suivant la direction de propagation $\vec{u}_r$, il est toujours perpendiculaire au champ magnétique. Dans le cas général, on ne peut pas considérer cette onde comme étant plane.

$$\text{Si } r \gg \lambda \Rightarrow r \gg \frac{\lambda}{2\pi} \Rightarrow \frac{1}{r} \ll k \Rightarrow \frac{k}{r} \gg \frac{1}{r^2} \Rightarrow \frac{k}{r^2} \gg \frac{1}{r^3}$$

Dans ces conditions, les termes en $\frac{1}{r}$ seront prédominants et le champ dans la zone de rayonnement lointain s'écrit :

$$H(r, \theta, \varphi) = \begin{cases} H_r(r, \theta, \varphi) = 0 \\ H_\theta(r, \theta, \varphi) = 0 \\ H_\varphi(r, \theta, \varphi) = J_0 \frac{dl}{4\pi} \sin\theta \left[\frac{jk}{r} \right] e^{-jkr} \end{cases}$$

$$E(r, \theta, \varphi) = \begin{cases} E_r(r, \theta, \varphi) = 0 \\ E_\theta(r, \theta, \varphi) = J_0 \frac{dl}{4\pi} \sin\theta \left[\frac{k^2}{r} \right] e^{-jkr} \\ E_\varphi(r, \theta, \varphi) = 0 \end{cases}$$

Nous pouvons dire que, dans la zone de rayonnement lointain, le champ électrique $\vec{E}$ et le champ magnétique $\vec{H}$ vibrent en phase, sont perpendiculaires entre eux et à la direction de propagation $\vec{u}_r$. Dans ce cas, les ondes qui se propagent peuvent être considérées comme étant planes.

$$E_\theta(r, \theta, \varphi) = J_0 \frac{dl}{4\pi} \sin\theta \left[\frac{k^2}{r} \right] e^{-jkr} = jZ_0 \frac{J_0 dl}{4\lambda r} \sin\theta e^{-jkr}$$

$$H_\varphi(r, \theta, \varphi) = \frac{E_\theta(r, \theta, \varphi)}{Z_0}$$

$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$ et $k = w\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ sont respectivement l'impédance du vide et le nombre d'onde.

A.1.5. Densité de puissance

$$\vec{p}(r, \theta, \varphi) = \vec{E}(r, \theta, \varphi) \wedge \vec{H}^*(r, \theta, \varphi)$$

$\vec{H}^*(r, \theta, \varphi)$ est le conjugué du champ magnétique $\vec{H}(r, \theta, \varphi)$.

$$\vec{p}(r, \theta, \varphi) = \begin{bmatrix} \vec{u}_r & \vec{u}_\theta & \vec{u}_\varphi \\ E_r(r, \theta, \varphi) & E_\theta(r, \theta, \varphi) & E_\varphi(r, \theta, \varphi) \\ H_r^*(r, \theta, \varphi) & H_\theta^*(r, \theta, \varphi) & H_\varphi^*(r, \theta, \varphi) \end{bmatrix}$$

Dans la zone lointaine, les seules composantes non nulles sont $E_\theta(r, \theta, \varphi)$ et $H_\varphi(r, \theta, \varphi)$. Dans ces conditions, la densité de puissance n'a de composante que suivant la direction de propagation $\vec{u}_r$.

$$\vec{p}(r, \theta, \varphi) = E(r, \theta, \varphi) \cdot H^*(r, \theta, \varphi) \vec{u}_r$$

$$\vec{p}(r, \theta, \varphi) = \frac{|E_\theta(r, \theta, \varphi)|^2}{Z_0} \cdot \vec{u}_r = p(r, \theta, \varphi) \vec{u}_r$$

En remplaçant $E_\theta(r, \theta, \varphi)$ par sa valeur nous aurons :

$$\vec{p}(r, \theta, \varphi) = \frac{|E_\theta(r, \theta, \varphi)|^2}{Z_0} \cdot \vec{u}_r = \left[\frac{J_0 dl}{4\lambda r} \sin\theta \right]^2 \vec{u}_r = P_{Max} \sin^2 \theta \vec{u}_r$$

A.1.6. Caractéristique principales du doublet de Hertz

1. Surface caractéristique de rayonnement

La surface caractéristique de rayonnement se détermine à partir de la fonction caractéristique :

$$r(r, \theta, \varphi) = \sin^2 \theta$$

2. Diagramme de rayonnement dans le plan perpendiculaire au doublet de Hertz ($\theta = cte, \varphi$ variable)

On remarque que, quelque soit le plan horizontal considéré (fixé par θ), la fonction $r(\theta, \varphi)$ est indépendante de l'azimut. Dans ces conditions, le diagramme de rayonnement est un cercle sur le dipôle (l'antenne est omnidirectionnelle dans ce plan).

3. Diagramme de rayonnement dans le plan perpendiculaire au doublet de Hertz ($\theta = variable, \varphi = cte$)

Le diagramme de rayonnement s'obtient en traçant la fonction en fonction de l'élevation θ .

Direction des maximums de rayonnement : $\theta = \pi/2$ et $\varphi = 3\pi/2$

Direction des minimums de rayonnement : $\theta = 0$ et $\varphi = \pi$

4. Directivité

A. Directivité maximum

Le calcul de l'intégrale de relation nous donne :

$$D_{Max} = 1.5$$

B. Directivité

Le calcul de l'intégrale de relation nous donne :

$$D(\theta, \varphi) = 1.5 \sin^2 \theta$$

C. Angle d'ouverture à -3dB

L'angle d'ouverture à -3dB se définit comme étant l'angle pour lequel la puissance chute de moitié de part et d'autre du lobe principale.

Dans le cas du doublet de Hertz nous pouvons écrire que :

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - 2\cos(\theta)}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = \pi/4 \\ \theta_2 = 3\pi/4 \end{cases}$$

Ce qui conduit à un angle d'ouverture :

$$\theta_{-3dB} = \theta_2 - \theta_1 = \pi/2$$

5. Puissance totale émise

L'intégrale de surface du vecteur de conduit au calcul de la puissance totale émise.

$$P_E = \iint_{\Sigma} \vec{p}(r, \theta, \varphi) d\vec{\Sigma}$$

Ou : Σ : Surface d'une sphère centrée sur le doublet.

$d\vec{\Sigma}$: Element de surface, définie par un vecteur unitaire dirigé vers l'extérieur.
Dans la zone lointaine, on a :

$$\vec{p}(r, \theta, \varphi) = p(r, \theta, \varphi) \vec{u}_r$$

$$d\vec{\Sigma} = d\Sigma \vec{u}_r$$

$$P_E = \iint_{\Sigma} \frac{|E_{\theta}(r, \theta, \varphi)|^2}{Z_0} d\Sigma$$

En coordonnées sphériques, l'élément de surface de surface $d\Sigma$ s'écrit :

$$d\Sigma = r d\theta r d\varphi \sin\theta$$

Ou φ varie entre 0 et 2π et θ entre 0 et π .

$$P_E = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{|E_{\theta}(r, \theta, \varphi)|^2}{Z_0} r^2 \sin^2 \theta d\theta d\varphi = 80 \left[\frac{J_0 \pi dl}{\lambda} \right]^2$$

6. Resistance de rayonnement

La résistance de rayonnement de l'antenne est la valeur de la résistance qui, parcourue par le même courant J_0 , dissiperait la même puissance que celle rayonnée par l'antenne.

$$P_E = R_r J_0^2 \Rightarrow R_r = 80 \left[\frac{\pi dl}{\lambda} \right]^2$$

A.2. Antenne Monopôle

Le monopôle est un cylindre conducteur perpendiculaire à un plan réflecteur (figure 11). Il est équivalent au dipôle de longueur double sans plan réflecteur. Ses principales caractéristiques sont les suivantes.

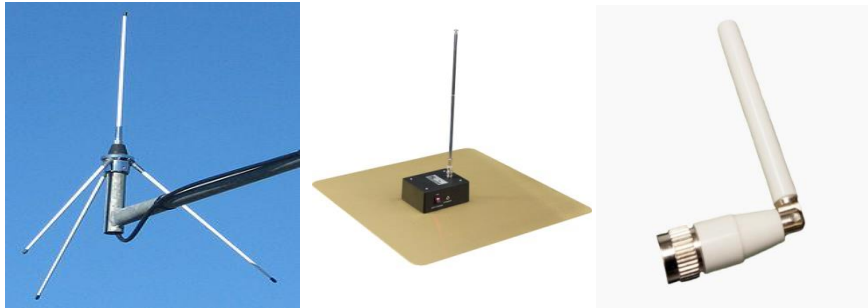


Figure 4.2. Antenne Monopôle.

1. **Diagramme de rayonnement** : il est identique à celui du dipôle $l/2$ (figure 2, courbe $f_2(q)$), soit :

$$f(\theta) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}$$

pour le rayonnement dans le demi-plan supérieur (et 0 pour le demi-plan inférieur)

2. **Directivité** : elle est égale au double de celle d'un dipôle $l/2$ (en raison du rayonnement dans un seul demi-espace), soit 3,28 (4,64 dB).
3. **Impédance** : elle est la moitié de celle du dipôle $l/2$, soit d'après la relation (2) :

$$Z = (36.5 + j.21)\Omega$$

A.3. Antenne Yagi

L'antenne Yagi ou antenne Yagi-Uda est une antenne à éléments parasites utilisable des V HF aux UHF. Utilisée pour la réception des émissions de télévision en modulation de fréquence.

C'est une antenne à rayonnement longitudinal. Elle est constituée de :

1. Un dipôle d'excitation de longueur $\frac{\lambda}{2}$.
2. Un réflecteur placé à $\frac{\lambda}{4}$ du dipôle et possédant une longueur légèrement supérieure.
3. Un ou de plusieurs directeurs de longueur(s) légèrement inférieure(s) à celle du dipôle.

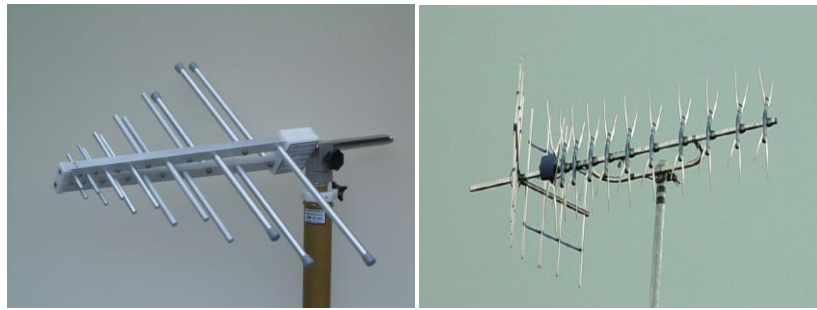


Figure 4.3. Antenne YAGI.

A.3.1 Caractéristiques

- A. Diagramme de rayonnement :** il est unidirectionnel, le maximum de rayonnement (sensiblement) est dirigé vers les directeurs.
- B. Gain :** il est fonction du nombre de direction.
- C. Bande passante :** elle est rectiligne et dépend de l'orientation du dipôle (par exemple, la polarisation horizontale est obtenue lorsque le dipôle est placé horizontalement).

A.4. Antenne Hélice

Il est formé :

- D'un réflecteur servant également de plan de mass.
- D'un brin conducteur sous forme d'une hélice cylindrique

A. Caractéristiques : il dépend du nombre de spires et du pas de l'hélice.

B. Polarisation : il existe deux types de polarisations dont l'existence dépend du rapport entre le diamètre de l'hélice et la longueur d'onde.

Polarisation rectiligne - Le mode « normal »- lorsque le diamètre de l'hélice ou très petit devant la longueur d'onde et la longueur d'onde sont du même ordre de grandeur ($D \ll \lambda$).

Polarisation circulaire - Le mode axial- dans le cas où le diamètre de l'hélice et la longueur d'onde sont du même ordre de grandeur. Dans ce cas, le type de polarisation (droit ou gauche) est imposé par l'enroulement de l'hélice.

Bande passante : assez grande.

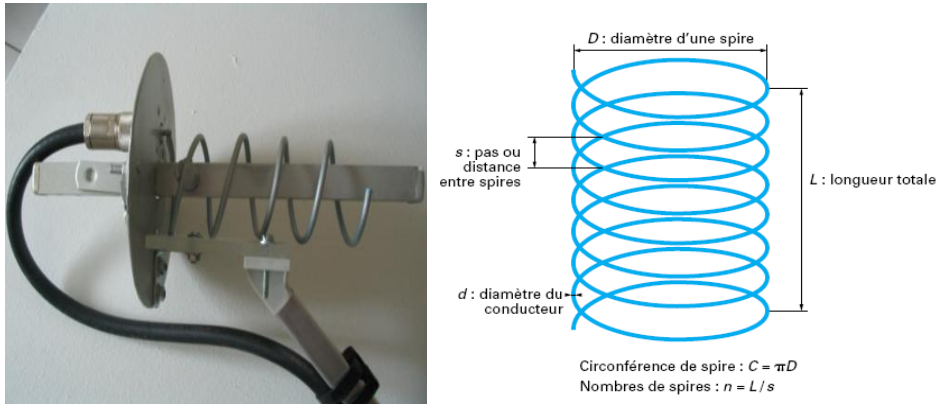


Figure 4.4. Géométrie d'une hélice à spires constantes.

A.4.1. Caractéristiques d'une hélice en mode axial

Il a été établi des relations simples donnant les caractéristiques d'une hélice en mode axial :

- A. **Impédance** : $R_r = 140 \frac{L}{\lambda}$
- B. **Directivité** : $D = 12 \left(\frac{C}{\lambda} \right)^2 \frac{L}{\lambda}$
- C. **Largeur à 3 dB** : $\theta_{3dB} = \frac{52}{\frac{C}{\lambda} \sqrt{\frac{L}{\lambda}}}$

Avec

R_r résistance de rayonnement de l'hélice,
 θ_{3dB} (°) largeur à 3 dB.

Ces relations sont valables sous les **conditions** suivantes :

- ✓ nombre de spires : $n > 3$
- ✓ circonférence C : $\frac{3}{4}\lambda < C < \frac{4}{3}\lambda$
- ✓ pas s : voisin de $\frac{1}{4}\lambda$

A.5. Cornet

L'antenne cornet (*horn*) tient son nom de son aspect caractéristique en forme de cornet. La partie évasée peut être à angle droit, rectangulaire, cylindrique ou conique. La direction du rayonnement maximum correspond à l'axe du cornet. Elle est facilement

alimentée avec un guide d'ondes, mais peut être alimentée avec un câble coaxial et une transition appropriée.



Figure 4.5. Géométrie d'une hélice à spires constantes.

Les antennes cornet sont généralement utilisées comme élément actif dans une antenne parabolique. Le cornet est pointée vers le centre du réflecteur. L'utilisation d'une antenne cornet, plutôt qu'une antenne dipolaire ou n'importe quel autre type d'antenne au point focal du réflecteur, réduit au minimum la perte d'énergie autour des bords du réflecteur. À 2,4 gigahertz, une antenne cornet faite avec une boîte de conserve a un gain de l'ordre de 10 à 15 dBi.

B. Antennes microrubans

Antennes patch (**microrubans**) sont intégrés au plus près des circuits électroniques en occupant un volume réduit et se conformant à différents types de surface. Les **antennes imprimées** à une ou plusieurs couches de plans conducteurs gravés, collés sur des plaques de diélectrique sont en pleine expansion. En effet, par un procédé d'usinage très simple, très précis et très répétitif, la photogravure, on réalise à la fois les lignes d'alimentation et les antennes élémentaires dans une technologie légère. Avantage de patch, réside dans leur faible coût de fabrication. Les antennes patch sont utilisées dans de nombreuses applications à partir des bandes VHF.

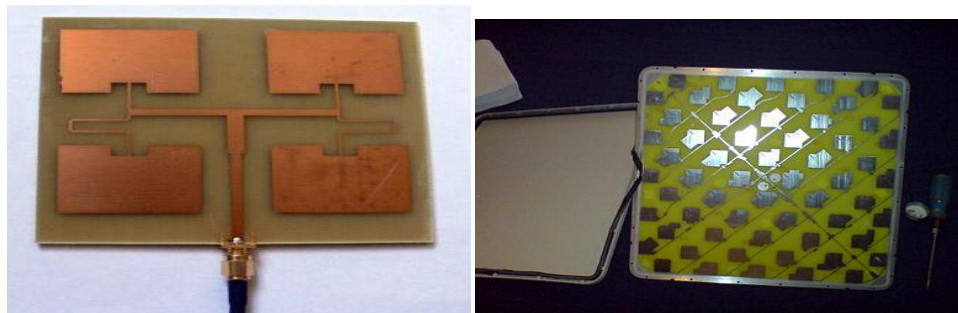


Figure 4.6. Géométrie d'une Patch.

B.1. Structure

L'antenne micro-ruban est constituée d'une mince couche métallique d'épaisseur e très petite par rapport à la longueur d'onde dans l'espace libre λ_0 ($e \ll \lambda_0$) imprimée sur un diélectrique de hauteur h très faible devant λ_0 ($h \ll \lambda_0$) au dessus d'un plan de masse (Figure 4.7).

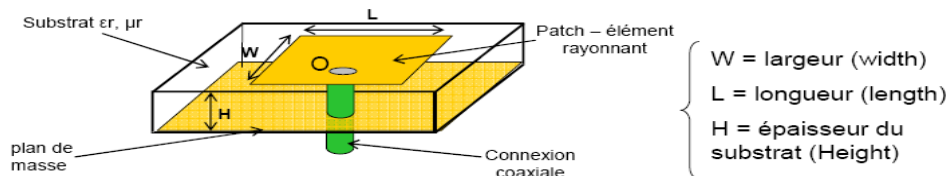


Figure 4.7. Structure d'une antenne patch rectangulaire.

A sa résonance, l'excitation du résonateur donne naissance à des champs électriques diffractés en phase sur les bords de l'antenne. Très souvent, cet élément rayonnant (patch) prend une forme géométrique simple comme un carré, un rectangle, un cercle ou encore un triangle, etc.

Les performances électriques de ce résonateur sont intrinsèquement liées à la géométrie et les dimensions du patch, de la hauteur et de la nature du substrat support.

Il existe des antennes à polarisation linéaire, circulaire ou elliptique. Par exemple, si le vecteur du champ électrique en un point d'espace est toujours dirigé suivant un seul axe, on parle alors d'une polarisation linéaire. Par contre, s'il change de direction en fonction du temps alors on parle d'une polarisation circulaire ou elliptique.

B.2. Facteur de qualité

Le facteur de qualité est défini par le rapport entre l'énergie stockée et l'énergie perdue par le circuit.

De façon générale, le facteur de qualité représente l'ensemble des pertes de l'antenne, entre autre, les pertes dues au rayonnement que l'on cherche à maximiser, à la conductance ohmique, aux pertes diélectriques et aux ondes de surface qu'il convient de minimiser. Ainsi, le facteur de qualité total est influencé par toutes ces pertes et s'écrit, généralement, comme suit :

Il faut noter que les pertes dues aux ondes de surface sont liées à la hauteur du substrat h . En effet, plus le substrat est mince plus ces pertes sont faibles mais elles augmentent au fur et à mesure qu'on augmente l'épaisseur du substrat.

Elles doivent alors être prise en considération. Cela est d'autant plus important que lorsqu'elles existent, ces ondes peuvent être rayonnantes et donc de modifier de manière significative le diagramme de rayonnement global de l'antenne.

B.3. Principe de fonctionnement

L'élément rayonnant le plus classique est un rectangle et nous ne nous concentrerons que sur ce type d'antennes. Deux modèles sont utilisés pour comprendre le fonctionnement d'une antenne patch et déterminer des formules analytiques de leur rayonnement et de leur impédance d'entrée. Une antenne patch peut être vue comme une ligne de transmission (ligne microruban) ouverte à chacune de ses extrémités. Ces deux discontinuités se comportent comme deux extrémités rayonnantes. La deuxième manière de traiter une antenne patch est de la considérer comme une cavité résonante, formée par le patch, le plan de masse et les quatres bords. En basse fréquence, la cavité peut être considérée comme une capacité qui stocke des charges et dans laquelle un champ électrique uniforme est créé entre le patch et le plan de masse. Tant que l'épaisseur du substrat est faible, le champ électrique est orienté selon l'axe z et indépendant de z . En pratique, l'épaisseur doit rester telle que :

$$h \leq \frac{c}{4f\sqrt{\epsilon_r - 1}}$$

Au fur et à mesure que la fréquence augmente, la distribution des charges sur le patch n'est plus uniforme, et celle du courant et du champ électrique dans le plan xy aussi. Un champ magnétique apparaît aussi. La distribution du champ électrique dans la cavité rectangulaire est donnée par l'équation suivante :

$$E_x = E_y = 0$$

$$E_z = E_0 \cos\left[\frac{m\pi}{L}\right] \cos\left[\frac{n\pi y}{W}\right]$$

Pour des fréquences particulières (fréquences de résonance de cavité, équation 68) liées aux dimensions de la cavité rectangulaire, la distribution du champ électrique est telle que le rayonnement est optimisé.

$$F_{m,n} = \frac{c}{2\pi\sqrt{\epsilon_r}} \sqrt{\left(\frac{m}{L}\right)^2 + \left(\frac{n}{W}\right)^2}$$

Où m et n sont des entiers supérieurs ou égaux à 0, qui représentent les modes de cavités. Ces modes caractérisent la distribution du champ électrique le long d'un axe de la cavité. Le mode fondamental est le mode $((m,n) = (1,0))$ si $W > L$, indiquant que le champ électrique présente un minimum le long de l'axe parallèle à la largeur, et $((m,n) = (1,0))$

si $L > W$, indiquant que le champ électrique présente un minimum le long de l'axe parallèle à la longueur. Cette formule est valable uniquement si la hauteur de la cavité est négligeable. Si ce n'est pas le cas, il faudra prendre en compte une troisième composante dans le mode de résonance.

Prenons le cas où $L < W$ et étudions la distribution du champ électrique dans la cavité (Fig.4.8). Lorsque la longueur L de la cavité est environ égale à $\lambda/2$, l'antenne entre en résonance, à la manière d'un dipôle demi onde. Le champ électrique est maximal et en opposition de phase aux deux extrémités séparées par L . Le long de l'axe Y (parallèle à W), le champ électrique est quasiment uniforme. Par contre, le champ électrique n'est pas uniforme le long de l'axe W (parallèle à L). Il présente un minimum et un maximum et passe par un zéro le long des extrémités séparées par W .

Cette distribution de champ électrique est liée à une accumulation de charges de signes opposées sur les bords séparés par L et un courant orienté le long de l'axe X .

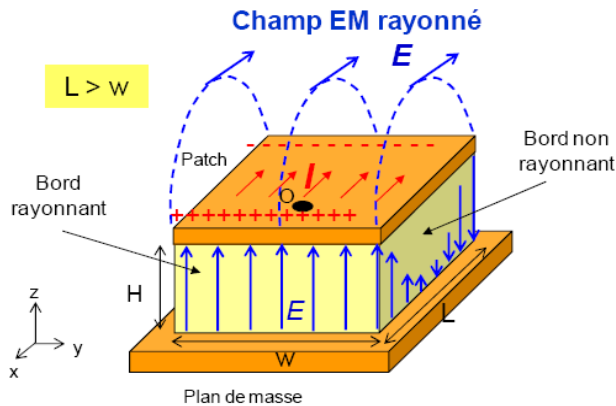


Figure 4.8. Rayonnement d'une antenne patch rectangulaire.

Le champ présent entre les bords du patch et le plan de masse va déborder et contribuer à générer le champ électromagnétique rayonné : ceux générés par les bords séparés par L étant maximum et en opposition de phase vont avoir tendance à s'additionner de manière constructive et optimale, et générer un rayonnement inscrit dans le plan YZ . Ces deux bords sont donc appelés bords rayonnants.

Ceux générés par les bords séparés par w présentant un zéro, ils ne vont pas contribuer au rayonnement.

Cependant, en raison de ce débordement du champ électrique, la résonance ne se fait pas parfaitement lorsque la fréquence est telle que la longueur du patch est égale à la demi longueur d'onde, mais lorsque $L \approx 0.49\lambda$.

Le calcul des performances de l'antenne n'est pas trivial et repose sur soit sur un calcul analytique et plusieurs hypothèses simplificatrices, soit sur l'utilisation de méthodes

numériques exactes. Pour des géométries simples, les méthodes analytiques sont facilement utilisables. Pour des géométries plus complexes, il est nécessaire d'employer des méthodes numériques.

B.5. Bande passante

La bande passante peut être définie par un ou plusieurs critères physiques. Par conséquent, elle n'a pas de définition unique et il est important à chaque fois de spécifier le critère utilisé (l'impédance, la polarisation ou encore le rayonnement).

La bande passante est la plage de fréquence (entre f_{min} et f_{max}) dans laquelle le critère spécifié est respecté. De façon générale, la bande passante relative est donnée par l'expression suivante :

$$BP = \frac{2(f_{max} - f_{min})}{f_{max} + f_{min}} \times 100\%$$

Les définitions les plus répandues sont données en termes de rayonnement, de polarisation et le plus généralement en terme d'impédance.

- Bande passante définie en terme du rayonnement

L'angle d'ouverture, le niveau des lobes secondaires et le gain d'une antenne varient tous avec la variation de la fréquence. Si on spécifie l'une de ces grandeurs comme minimum ou maximum, la bande passante relative à cette grandeur peut être alors déterminée.

- Bande passante en terme de polarisation

Les propriétés de la polarisation (linéaire ou circulaire) d'une antenne sont souvent liées à une fréquence fixe. La spécification d'un maximum de polarisation croisée ou d'un niveau de rapport axial peut être utilisée pour définir la bande passante.

- Bande passante définie par l'impédance

L'impédance d'entrée d'une antenne varie en fonction de la fréquence. La plage de fréquences dans laquelle cette impédance reste adaptée au générateur est définie comme bande passante en terme d'impédance. Celle-ci est généralement exprimée à partir du coefficient de réflexion S_{11} ou du rapport d'onde stationnaire (ROS). L'adaptation d'impédance peut être traduite par un coefficient de réflexion inférieur à un niveau spécifique (en général, -10 dB ou -15 dB) ou un ROS typiquement inférieur à 2 ou 1.5. En outre, la bande passante est inversement proportionnelle au facteur de qualité de l'antenne, donnée par la relation suivante :

$$BP = \frac{ROS - 1}{Q\sqrt{ROS}}$$

Pour la suite de l'étude, le critère du coefficient de réflexion inférieur à -10 dB est retenu pour définir la bande passante de l'antenne. Nous veillerons cependant à vérifier le comportement des autres paramètres sur la bande ainsi définie. Comme nous le montrerons un peu plus loin dans ce manuscrit, la maîtrise de la bande passante est l'un des facteurs limitant des antennes résonantes. Il est alors souvent nécessaire de faire appel à des techniques permettant l'élargissement de cette bande passante.

B.6. Facteur de qualité

Le facteur de qualité est définie par le rapport entre l'énergie stockée et l'énergie perdue par le circuit.

$$Q = \frac{E_{stockée}}{2\pi E_{perdue}}$$

Le facteur de qualité représente l'ensemble des pertes de l'antenne, entre autre, les pertes dues au rayonnement que l'on cherche à maximiser, à la conductance ohmique, aux pertes diélectriques et aux ondes de surface qu'il convient de minimiser. Ainsi, le facteur de qualité total est influencé par toutes ces pertes et s'écrit, généralement, comme suit :

$$\frac{1}{Q_t} = \frac{1}{Q_{ray}} + \frac{1}{Q_c} + \frac{1}{Q_d} + \frac{1}{Q_{os}}$$

Q_t Facteur de qualité total.

Q_{ray} Facteur de qualité dû au rayonnement.

Q_c Facteur de qualité dû à la conductance (ohmique).

Q_d Facteur de qualité dû au diélectrique.

Q_{os} Facteur de qualité dû aux ondes de surface.

Il faut noter que les pertes dues aux ondes de surface sont liées à la hauteur du substrat h . En effet, plus le substrat est mince plus ces pertes sont faibles mais elles augmentent au fur et à mesure qu'on augmente l'épaisseur du substrat. Elles doivent alors être prise en considération. Cela est d'autant plus important que lorsqu'elles existent, ces ondes peuvent être rayonnantes et donc de modifier de manière significative le diagramme de rayonnement global de l'antenne.

B.7. Diagramme de rayonnement et polarisation

La figure 4.9 montre la direction du champ électrique rayonné. Le rayonnement d'une antenne patch rectangulaire est similaire à celui d'un dipôle orienté dans l'axe x . La

polarisation du champ rayonnée est rectiligne. Le rayonnement est dépendant de θ et φ . Il est concentré dans un lobe principal orienté vers la verticale du patch ($\theta = 0^\circ$). En raison du plan de masse, le rayonnement ne se fait que dans le demi-plan au dessus du plan de masse. La figure 32 illustre le diagramme de rayonnement de cette antenne. La directivité d'une antenne patch est approximée par les relations suivantes :

$$D = \frac{1}{50G_f} \left[\frac{W}{\lambda_0} \right]^2$$

$$\text{Si } \frac{W}{\lambda_0} \gg 1 : G_f \approx \frac{W}{100\lambda_0} \Rightarrow D \approx \frac{8W}{\lambda_0}$$

$$\text{Si } \frac{W}{\lambda_0} \gg 1 : G_f \approx \frac{W^2}{90\lambda_0^2} \Rightarrow D \approx 6$$

$$\text{Si } \frac{1}{3} < \frac{W}{\lambda_0} < 3 : G_f \approx \frac{W}{120\lambda_0} - \frac{1}{60\pi^2}$$

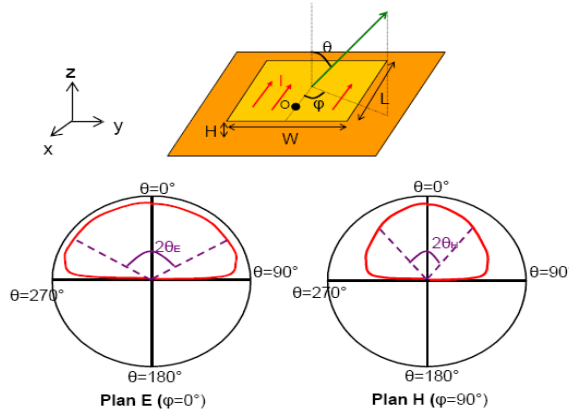


Figure 4.9. Diagramme de rayonnement d'une antenne patch rectangulaire.

Les angles d'ouverture sont donnés par les relations suivantes. Le gain d'une antenne patch est généralement compris entre 6 et 8 *dBi*, les angles d'ouverture à 3 *dB* entre 70° et 70° .

$$2\theta_{E2db} = 2\arccos \left[\frac{1}{7} [3\beta_0^2 L^2 + \beta_0^2 h^2] \right]^{-0.5}$$

$$2\theta_{H2db} = 2\arccos \left[2 \left[1 + \frac{\pi W}{\lambda_0} \right] \right]^{-0.5}$$

B.8. Impédance d'entrée et bande passante

L'impédance d'entrée d'une antenne patch est assez difficile à calculer et de nombreuses formules approchées existent pour l'évaluer. L'impédance d'entrée dépend de plusieurs paramètres, tels que la constante diélectrique, l'épaisseur et la largeur du substrat, ainsi que de la position du point d'alimentation.

Les équations ci-dessous permettent de déterminer approximativement la résistance d'entrée d'une antenne patch rectangulaire :

$$R_{in} = \frac{1}{2G_1}$$

$$G_1 = \frac{w^2}{90\lambda_0^2} \text{ si } \frac{w}{\lambda_0} \ll 1$$

$$G_1 = \frac{w^2}{120\lambda_0^2} \text{ si } \frac{w}{\lambda_0} \gg 1$$

L'effet de la position du point d'alimentation peut être pris en compte et déterminé à partir de l'équation. Comme le montre la figure 4.10, placer le point de polarisation au milieu du patch conduit à une impédance d'entrée nulle et à une dégradation du rayonnement.

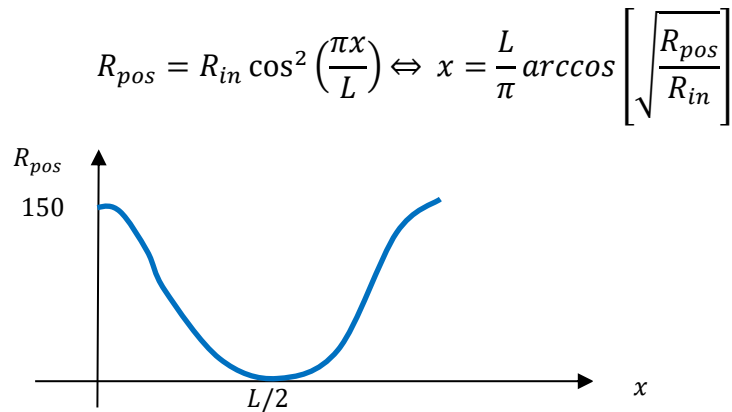


Figure 4.10. Variation de la résistance d'entrée d'une antenne patch rectangulaire en fonction de la position du point d'alimentation.

La bande passante d'une antenne patch est relativement faible, seulement quelques % de la fréquence centrale.

B.9. Dimensionnement d'une antenne patch rectangulaire

Les données d'entrée sont : le substrat (permittivité électrique, tangente de pertes, épaisseur), la fréquence de fonctionnement. On considère un plan de masse parfait et infini.

- a. Calcul de la largeur du patch :

$$w = \frac{\lambda_0}{2} \sqrt{\frac{2}{1 + \epsilon_r}}, \lambda_0 = \frac{c}{F_{res}}$$

- b. Calcul de la longueur d'onde effective λ_e et de la constante diélectrique effective ϵ_e :

$$\lambda_e = \frac{c}{f \sqrt{\epsilon_e}}$$

$$\epsilon_e = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \left(1 + \frac{12h}{w}\right)^{-0.5}, \frac{w}{h} \geq 1$$

- c. Calcul de l'extension de longueur du patch ΔL :

$$\Delta L = 0.412h \left(\frac{\epsilon_e + 0.5}{\epsilon_e - 0.258} \right) + \frac{h}{\frac{w}{h} + 0.8}$$

En pratique, on trouve :

$$0.005 \frac{\lambda_e}{2} < \Delta L < 0.01 \frac{\lambda_e}{2}$$

- d. Calcul de la longueur du patch L :

$$L = L_e - 2\Delta L = \frac{\lambda_e}{2} - 2\Delta L$$

- e. Calcul de la position du point d'alimentation : à partir de l'équation 75.

C.1. Antenne parabolique

Les antennes basées sur des réflecteurs paraboliques sont le type le plus commun d'antennes directives quand un gain élevé est exigé. Leur avantage principal réside dans le fait qu'elles peuvent être construites afin de disposer d'un gain et d'une directivité

aussi grands que souhaités. L'inconvénient principal est que ce type d'antenne est difficile à installer et se retrouve souvent à la merci du vent.

Les paraboles, jusqu'à un mètre, sont habituellement faits de matériel solide. L'aluminium est fréquemment employé pour l'avantage qu'il confère par rapport à son poids, sa longévité et ses bonnes caractéristiques électriques.



Figure 4.11. Un réflecteur d'antenne parabolique solide.

L'effet du vent s'accroît rapidement avec la taille de la parabole et peut rapidement devenir un grave problème. Des paraboles d'une surface réfléchissante employant un maillage ouvert sont fréquemment employées. Ceux-ci ont un moins bon rapport avant-arrière mais sont plus sûrs et plus faciles à construire. Le cuivre, l'aluminium, le laiton, l'acier galvanisé et le fer peuvent être utilisés lors de la construction d'une parabole maillée.

REFERENCES

1. H. Djelouah, Electromagnétisme, Cours & Exercices, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène, Faculté de Physique, 2009-2010.
2. Béatrice de Tilière, Analyse vectorielle, 13 janvier 2009
3. Antennes Techniques, Joseph ROGER, Ingénieur de l'École Nationale Supérieure des Télécommunications, Techniques de l'Ingénieur, traité Électronique
4. CH. GUILBERT, Cours Electronique Pratique Des Antennes Tv Fm Reception Emission.
5. Odile Picon *et coll.* Les Antennes Théorie, conception et applications, edition DUNOD.
6. Alexandre Boyer, Antennes & outils et modeles pour la transmission, support de cours enonce de travaux diriges, Institut national des sciences appliquees de toulouse, 4eme annee informatique & reseaux.
7. Thierry Ditchi, Eléments d'Electromagnétisme et Antennes, université pière et marie curie, France.
8. J-M Courty, Notes de cours version 0.3 UPMC - L3 - Physique – PGA, 2005-2006.
9. Sidi Ali Mebarek Zerrouk, Antennes filaires et antennes a surfaces rayonnantes. ZERROUK SIDI ALI Mebarek, Office Publique Universitaire. ISBN/ISSN/EAN : 978-9961-0-1095-2.