

**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**Centre universitaire de Rélizane Ahmed Zabana**  
**Faculté Des sciences et de la Technologie ST**  
**Département d'Electrotechnique**

NOTES DE COURS : TECHNIQUES DE  
COMMANDE AVANCÉE

- REPRÉSENTATION D'ÉTAT DES SYSTÈMES
- COMMANDE PAR RETOUR D'ÉTAT
- COMMANDE OPTIMALE
- TRANSFORMÉE EN Z
- COMMANDE ADAPTATIVE



**Dr. H. Merabet Boulouiha**

**Année : 2014/2015**

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

# Table des matières

## Chapitre 1 Représentation d'état des systèmes

1.1. INTRODUCTION .....	1
1.2. VARIABLES D'ETAT D'UN SYSTEME DYNAMIQUE .....	1
1.3. EQUATIONS D'ETAT .....	2
1.4. PASSAGE D'UNE REPRESENTATION D'ETAT VERS FONCTION DE TRANSFERT..	4
1.5. TRANSFORMATION D'UNE FONCTION DE TRANSFERT VERS L'ESPACE D'ETAT .	6
1.5.1. REPRESENTATION MODALE .....	6
1.5.2. REPRESENTATION SERIE OU CASCADE.....	7
1.5.3. REPRESENTATION COMPAGNE COMMANDABLE .....	8
1.5.4. REPRESENTATION COMPAGNE OBSERVABLE.....	10
1.6. COMMANDABILITE ET OBSERVABILITE D'UN SYSTEME.....	12
1.6.1. NOTION DE COMMANDABILITE.....	12
1.6.2. DEFINITION1.....	12
1.6.3. DEFINITION DE LA COMMANDABILITE PAR LA NOTION MODALE .....	12
1.6.4. CRITERE DE COMMANDABILITE.....	13
A. Théorème de Kalman .....	13
1.6.5. NOTION D'OSERVABILITE .....	14
1.6.6. DEFINITION.....	15
1.6.6. CRITERE D'OBSERVABILITE .....	15
A. Théorème de Kalman .....	15

## Chapitre 2 Commande par retour d'état

2.1. INTRODUCTION .....	17
2.2. PRINCIPE DE LA COMMANDE PAR RETOUR D'ETAT .....	17
2.3. RESOLUTION DU PROBLEME PAR PLACEMENT DE POLES .....	18
2.3.1. APPLICATION DE LA METHODE PLACEMENT DE POLES.....	19
2.3.2. FONCTION DE TRANSFERT EN BOUCLE FERMEE .....	20
2.3.2. DETERMINATION DU VECTEUR D'ETAT.....	21

<b>2.4. EXERCICES D'APPLICATION .....</b>	<b>21</b>
<b>A. EXERCICE N°1 .....</b>	<b>21</b>
<b>B. EXERCICE N°2 .....</b>	<b>22</b>
<b>C. EXERCICE N°3 .....</b>	<b>22</b>
<b>D. EXERCICE N°4 .....</b>	<b>23</b>
<b>E. EXERCICE N°5.....</b>	<b>23</b>

## **Chapitre 3 Commande adaptative**

<b>3.1. INTRODUCTION .....</b>	<b>24</b>
<b>3.2. CONTROLE OPTIMAL DES SYSTEMES.....</b>	<b>24</b>
<b>3.3. COMMANDE LINEAIRE QUADRATIQUE .....</b>	<b>28</b>
<b>3.3.1. SYNTHÈSE DU REGULTEUR LQR.....</b>	<b>28</b>
<b>3.3.2. CHOIX DES MATRICES DE PONDERATION .....</b>	<b>30</b>
<b>3.4. COMMANDE LINEAIRE GAUSSIENNE LQG .....</b>	<b>32</b>
<b>3.4.1. PRINCIPE DU FILTRE DE KALMAN .....</b>	<b>32</b>
<b>3.4.2. SYNTHÈSE DU REGULTEUR LINEAIRE QUADRATIQUE GAUSSIENNE LQG.....</b>	<b>33</b>
<b>3.4.2.1. SYNTHÈSE DU FILTRE DE KALMAN.....</b>	<b>34</b>
<b>3.4.2.2. CHOIX DES MATRICES DE COVARIANCES ET CALCUL DU GAIN.....</b>	<b>35</b>

## **Chapitre 4 Transformée en Z**

<b>4.1. INTRODUCTION .....</b>	<b>36</b>
<b>4.2. ECHANTILLONNAGE D'UNE FONCTION CONTINUE .....</b>	<b>37</b>
<b>4.2.1. DEFINITION.....</b>	<b>37</b>
<b>4.3. PROPRIETES DE LA TRANSFORMEE EN Z.....</b>	<b>38</b>
<b>4.4. FONCTIONS DE TRANSFERT EN Z.....</b>	<b>39</b>
<b>4.4.1. THEOREME DE SHANNON .....</b>	<b>41</b>
<b>4.4.2. CALCULE DE LA FONCTION DE TRANSFERT ECHANTILONNEE.....</b>	<b>42</b>
<b>4.5. SYSTEME A TEMPS DISCRET .....</b>	<b>44</b>
<b>4.5.1. EQUATION RECURRENTE.....</b>	<b>44</b>
<b>4.6. STABILITE DES SYSTEMES DISCRETS .....</b>	<b>45</b>

# Chapitre 5 Commande adaptative

5.1. INTRODUCTION .....	46
5.2. DIFFERENTS TOPOLOGIE DE LA COMMANDE ADAPTATIVE.....	47
5.2.1. COMMANDE ADAPTATIVE A GAIN PROGRAMME .....	47
5.2.2. COMMANDE ADAPTATIVE A CORRECTEUR AUTO-AJUSTABLE.....	48
5.2.3. COMMANDE ADAPTATIVE A MODELE DE REFERENCE (CAMR) .....	48
5.3. IDENTIFICATION PARAMETRIQUE PAR L'ALGORITHME DES MOINDRES CARRES RECURSIFS (MCR) .....	49
5.3.1. INTRODUCTION A L'ESTIMATION .....	49
5.3.2. METHODE DES MOINDRES CARRES .....	49
5.3. L'ALGORITHME DE MCR AVEC LE FACTEUR D'OUBLI .....	52
5.4. INITIALISATION DE L'ALGORITHME MCR.....	52

# Représentation d'état des systèmes

## 1.1. INTRODUCTION :

Toutes les méthodes étudiées jusqu'à présent de l'asservissement linéaire restent valables et efficaces jusqu'à ce que ces systèmes atteignent une complexité telle que l'on ne puisse plus se satisfaire de l'unique relation entrée - sortie (c'est-à-dire les systèmes mono-variables SISO: Single Input Single Output) pour les commander correctement. De même, ces modèles deviennent difficiles à mettre en œuvre lorsque les systèmes étudiés possèdent plusieurs entrées et plusieurs sorties cas d'un système multi-variable (MIMO : Multi Input Multi Output).

Les théories de commande avancées sont basées complètement sur les modélisations modernes sous la forme des variables d'état. La représentation d'état des systèmes est un outil puissant permettant de modéliser le fonctionnement de systèmes linéaires, en temps continu ou en temps discret et qui possède en outre, l'avantage de conserver la représentation temporelle des phénomènes.

## 1.2. VARIABLES D'ÉTAT D'UN SYSTÈME DYNAMIQUE

On définit l'état d'un système à l'instant  $t_0$  comme l'information sur le passé nécessaire et suffisante pour déterminer l'évolution ultérieure du système quand on connaît, pour  $t > t_0$ , les signaux d'entrée et les équations du système. Plus généralement, les variables d'état dans les systèmes physiques sont les éléments aptes à emmagasiner de l'énergie sous forme cinétique ou potentielle : inductances, capacités, masses, ressorts... Ce sont les éléments ayant une capacité de "mémoire".

**Exemple :** considérons l'exemple de la figure 1 décrit par les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} u(t) = (R_1 + R_2)i(t) + L \frac{di}{dt} + v(t) \\ i(t) = C \frac{dv}{dt} \\ y(t) = R_2 i(t) + v(t) \end{cases} \quad (1-1)$$

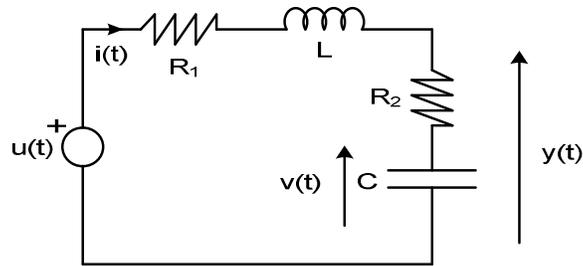


Figure (1-1) : Exemple d'un système électronique.

Dans le cas de l'exemple (figure (1-1)), l'information nécessaire et suffisante pour résoudre le système d'équations (1-1) est liée aux conditions initiales :  $i(t_0)$  et  $v(t_0)$ . Par conséquent, un ensemble possible de variables d'état est  $x(t)=[i(t), v(t)]^T$ . Où  $x(t)$  est vecteur d'état.

**Définition Un vecteur d'état :** est un ensemble *minimal* de variables d'état, c'est-à-dire de grandeurs temporelles, nécessaires et suffisantes pour déterminer l'évolution future d'un système quant on connaît les équations qui décrivent le fonctionnement du système et les entrées de ce système.

Dans ce qui suit, l'état d'un système est en général représenté par un *vecteur d'état* un sera noté :

$$x(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad \dots \quad x_n(t)]^T$$

Le nombre  $n$  de composantes correspond au degré de complexité du système. Il définit l'ordre du système.

### Remarques

- Le vecteur d'état n'est pas unique : il y a même une infinité de choix possibles (sur notre exemple (figure (1)),  $[i(t) \quad \frac{di}{dt}]^T$  est un autre vecteur d'état possible).  
On passe d'un vecteur d'état à un autre par simple changement de base.
- Les variables d'état sont généralement choisies pour leur signification physique et/ou leur simplicité dans les équations d'évolution qui leur sont associées.

## 1.3. EQUATIONS D'ETAT

Lorsqu'un système est modélisé sous la forme d'une représentation d'état, on montre qu'il est faisable d'exprimer l'état du système à un instant donné en fonction du signal d'entrée à ce même instant et en fonction de son « passé », autrement dit, de son état précédent. Comme nous avons affaire à des variables continues du temps, la notion

d'état précédent n'existe pas vraiment. En revanche, ce concept est à rapprocher de l'évolution du système, autrement dit des variations de chaque variable d'état.

La forme généralisée des équations de système sous forme d'état est :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad \text{Equation d'état} \quad (1-2)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad \text{Equation de sortie} \quad (1-3)$$

Dans le cas d'un système stationnaire, les matrices A, B, C et D sont indépendantes du temps.

Ce cas seul sera examiné par la suite.

- $x(t)$  est appelée vecteur d'état du système de dimension  $n$ .
- $u(t)$  est appelée vecteur d'entrée ou vecteur de commande du système de dimension  $\ell$ .
- $y(t)$  est appelée vecteur de sortie du système de dimension  $m$ .
- $A$  est appelée matrice d'état du système de dimension  $n \times n$ .
- $B$  est appelée matrice d'entrée ou de commande du système de dimension  $n \times \ell$ .
- $C$  est appelée matrice de sortie du système de dimension  $m \times n$ .
- $D$  est appelée matrice la matrice de transmission directe du système de dimension  $m \times \ell$ .

Cela signifie que, d'une manière générale, on peut exprimer l'évolution du système d'équations (1-2) et (1-3), modélisée par un vecteur constitué des dérivées premières des composantes du vecteur d'état de dimension  $n$ , en fonction du vecteur d'état du système.

Avec un vecteur de commande de dimension  $\ell$  et un vecteur de sortie de dimension  $m$ .

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1\ell} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2\ell} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{n\ell} \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_\ell(t) \end{bmatrix}}_{u(t)} \quad (1-4)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1\ell} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2\ell} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{m\ell} \end{bmatrix}}_D \underbrace{\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_\ell(t) \end{bmatrix}}_{u(t)} \quad (1-5)$$

**Exemple :**

Reprenons notre exemple de la figure (1-1), le système d'équations (1-1) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-(R_1 + R_2)}{L} & \frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [R_2 \quad 1] \begin{bmatrix} i(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

**Remarque :**

Dans le cas d'un système discret, ces équations prennent la forme suivante :

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) & \text{Equation d'état} \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) & \text{Equation de sortie} \end{cases}$$

#### 1.4. PASSAGE D'UNE REPRESENTATION D'ETAT VERS FONCTION DE TRANSFERT

On considère un système LTI décrit par sa représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1-6)$$

On se restreint au cas d'un système à une entrée et une sortie. Exprimons la fonction de transfert  $G(p)$  du système en fonction des matrices A, B, C et D.

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} \quad (1-7)$$

Dans le cas des systèmes multi-entrées multi-sorties (système MIMO), G est une matrice des fonctions de transfert entre une entrée et une sortie. Par exemple :

$$G_{ij}(p) = \frac{Y_i(p)}{U_j(p)} \quad (1-8)$$

En prenant les T.L (Transformée de Laplace) des équations d'état et de sortie, on obtient:

$$\begin{cases} pX(p) = AX(p) + BU(p) \\ Y(p) = CX(p) + DU(p) \end{cases} \quad (1-9)$$

En supposant les conditions initiales nulles.

$$\begin{cases} X(p) = (pI_n - A)^{-1}BU(p) \\ Y(p) = C[(pI_n - A)^{-1}B]U(p) + DU(p) = C[(pI_n - A)^{-1}B + D]U(p) \end{cases} \quad (1-10)$$

Finalement :

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = C[(pI_n - A)^{-1}B + D] \quad (1-11)$$

Avec  $I_n$  est la matrice identité de dimension  $n$ .

L'inverse d'une matrice est obtenu par :

$$(sI - A)^{-1} = \frac{adj(pI_n - A)}{\det(pI_n - A)} \quad (1-12)$$

En substituant à l'inverse sa définition, il vient :

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = C \left[ \frac{adj(pI_n - A)}{\det(pI_n - A)} B + D \right] \quad (1-13)$$

**Exemple :** on considère le système LTI représenté par les équations :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -7 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = [1 \quad 0]x(t)$$

La matrice  $(pI_n - A)$  dans cet exemple devient :

$$(pI_2 - A) = \begin{bmatrix} p & -1 \\ 10 & p + 7 \end{bmatrix}$$

Et son inverse est calculé par :

$$(pI_2 - A)^{-1} = \frac{adj(pI_n - A)}{\det(pI_n - A)} = \frac{\begin{bmatrix} p + 7 & 1 \\ -10 & p \end{bmatrix}}{p^2 + 7p + 10}$$

La fonction de transfert, donc, est donnée par :

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = C[(pI_n - A)^{-1}B] = \frac{[1 \quad 0] \begin{bmatrix} p + 7 & 1 \\ -10 & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{p^2 + 7p + 10} = \frac{1}{p^2 + 7p + 10}$$

Dans cet exemple, nous observons que le déterminant de la matrice  $(pI_2 - A)$  est égal au polynôme de dénominateur de  $G(p)$ . C'est-à-dire que les pôles de la fonction de transfert correspondent aux zéros de  $\det(pI_n - A)$  qui est aussi le polynôme caractéristique de la matrice d'état  $A$ . Par conséquent, les pôles de  $G(p)$  sont les valeurs propres de la matrice d'état  $A$ .

**Remarque :** Dans le cas d'un système à plusieurs entrées et/ou plusieurs sorties, on définit de manière analogue une *matrice de transfert*.

**Exemple :** on considère les deux systèmes LTI:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -7 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -7 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

Les fonctions de transfert respectivement pour les deux cas sont :

$$G_1(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p+7 & 1 \\ -10 & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{p^2 + 7p + 10} = \begin{bmatrix} \frac{1}{p^2 + 7p + 10} \\ \frac{p}{p^2 + 7p + 10} \end{bmatrix}$$

$$G_2(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p+7 & 1 \\ -10 & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{p^2 + 7p + 10} = \begin{bmatrix} \frac{\frac{1}{2}p + \frac{7}{2}}{p^2 + 7p + 10} & \frac{1}{p^2 + 7p + 10} \\ \frac{-5}{p^2 + 7p + 10} & \frac{p}{p^2 + 7p + 10} \end{bmatrix}$$

## 1.5. TRANSFORMATION D'UNE FONCTION DE TRANSFERT VERS L'ESPACE D'ETAT

Comme nous l'avons déjà cité, la représentation d'état d'un système n'est pas unique. Nous présentons ici des méthodes pour procéder un ensemble de représentation des variables d'état d'un système continu à partir d'une fonction de transfert  $G(p)$ . Le choix de la représentation peut dépendre de la forme disponible de la fonction de transfert ou du type d'étude que l'on souhaite réaliser à partir du modèle. Rappelons pareillement que la représentation d'état d'un système n'est pas unique et que les propriétés du système ne sont en aucun cas liées à la forme choisie.

### 1.5.1. REPRESENTATION MODALE

Ce type de représentation, encore désignée représentation parallèle, convient essentiellement bien à la représentation d'un système dont la fonction de transfert est placée sous la forme d'une somme. Soit le système monovariante LTI est modélisé par une fonction de transfert  $G(p)$ :

$$G(p) = \frac{Y(p)}{u(p)} = \frac{\alpha_1}{p-p_1} + \frac{\alpha_2}{p-p_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{p-p_n} \quad (1-14)$$

Cette écriture fait apparaître la somme de  $n$  fonctions de transfert et peut être matérialisée par le schéma de la figure (1-2) en faisant apparaître  $n$  blocs élémentaires.

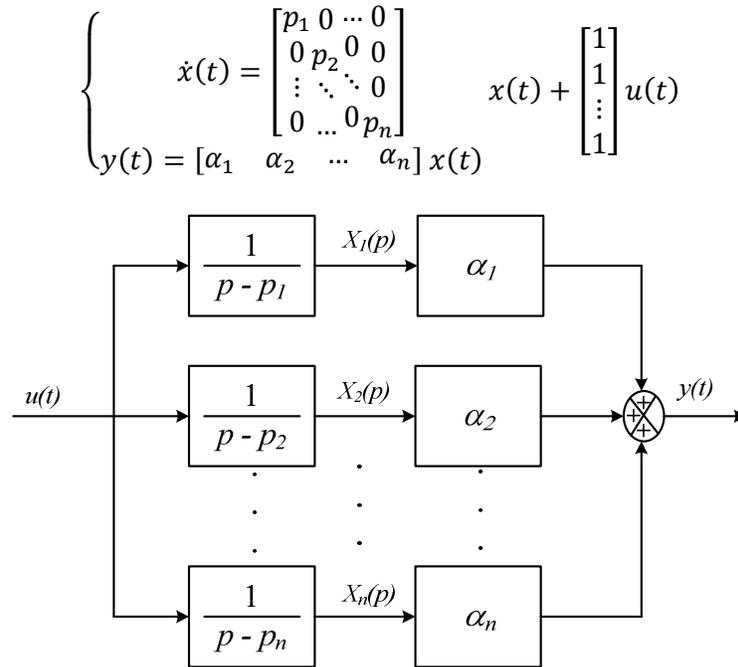


Figure (1-2) : Schéma bloc de la fonction de transfert.

**Remarques**

- $A$  est diagonale; les éléments diagonaux correspondent aux pôles du système.
- Si le système a des pôles multiples,  $A$  est diagonale par blocs.
- La présence d'un numérateur modifie les pondérations dans la décomposition en éléments simples; seules les matrices  $C$  et  $D$  sont affectées.

**1.5.2. REPRESENTATION SERIE OU CASCADE**

Le système est vu comme une mise en série de systèmes d'ordre 1. Pour mettre en évidence cette représentation, il suffit de factoriser le dénominateur de la fonction de transfert  $G(p)$ . Soit la fonction de transfert:

$$G(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{\alpha}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}$$

Cette graphisme fait apparaître le produit de  $n$  fonctions de transfert et peut être matérialisée par la mise en cascade de  $n$  blocs élémentaires.

Il vient alors la représentation schématique de la figure (1-3). On choisit comme variables d'état les sorties des systèmes élémentaires. La représentation d'état obtenue est dite sous forme cascade.

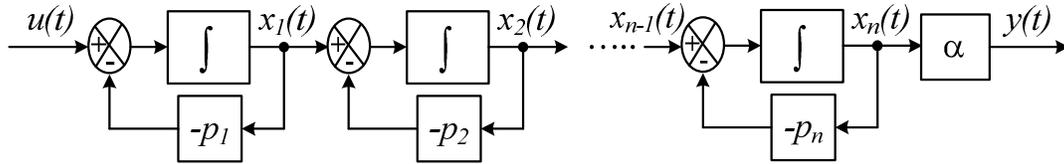


Figure (1-3) : Représentation d'état du système sous forme série.

Dans ce cas, elle s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = p_1 x_1(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = p_2 x_2(t) + x_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = p_n x_n(t) + x_{n-1}(t) \\ y(t) = \alpha x_n(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [0 \quad \dots \quad 0 \quad \alpha] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \end{cases}$$

**Remarque :**

- Si le numérateur n'est pas constant, on perd la forme cascade.
- Le traitement des pôles multiples ne pose aucune difficulté. La matrice d'état garde une forme similaire.

**Cas particulier :** soit une fonction de transfert  $G(p)$  possède des pôles complexes conjugués, autrement dit il peut exister des termes non décomposables du type :

$$G(p) = \frac{K \omega_n^2}{p^2 + 2\xi \omega_n p + \omega_n^2}$$

Dans ce cas, on utilise la représentation d'état proposée sur la figure (1-4).

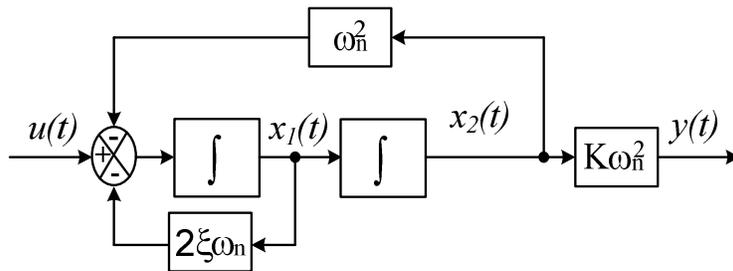


Figure (1-4) Représentation d'état d'un bloc du second ordre non décomposable.

### 1.5.3. REPRESENTATION COMPAGNE COMMANDABLE

Considérant un système d'écrit par sa fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} \text{ avec } m < n$$

Choisissons  $a_n = 1$  (ce qui revient à diviser le numérateur et le dénominateur par  $a_n$ ) et divisons le numérateur et le dénominateur par  $p^n$ . On obtient :

Choisissons  $a_n = 1$  (ce qui revient à diviser le numérateur et le dénominateur par  $a_n$ ) et divisons le numérateur et le dénominateur par  $p^n$ . On obtient :

$$G(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_m p^{m-n} + b_{m-1} p^{m-n-1} + \dots + b_1 p^{-n+1} + b_0 p^{-n}}{1 + a_{n-1} p^{-1} + \dots + a_1 p^{-n+1} + a_0 p^{-n}}$$

Dans tous les cas, il est plus simple de raisonner dans un premier temps sur le système sans numérateur, on peut alors écrire :

$$G_1(p) = \frac{1}{1 + a_{n-1} p^{-1} + \dots + a_1 p^{-n+1} + a_0 p^{-n}}$$

Avec :

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$$

$$G(p) = N(p) \times G_1(p); \quad G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} \quad \text{et} \quad G_1(p) = \frac{Y_1(p)}{U(p)}$$

Le système de la forme compagne pour la commande est vu comme une mise en série d'intégrateurs purs. A partir de l'expression de la fonction de transfert  $G(p)$ , on retrouve aisément l'équation associée au système :

$$Y_1(p)[1 + a_{n-1} p^{-1} + \dots + a_1 p^{-n+1} + a_0 p^{-n}] = U(p)$$

On obtient :

$$Y_1(p) = U(p) - \left[ a_{n-1} \left(\frac{1}{p}\right) + \dots + a_1 \left(\frac{1}{p}\right)^{n-1} + a_0 \left(\frac{1}{p}\right)^n \right] Y_1(p)$$

Il suit la représentation schématique de la figure (1-5). On choisit comme variables d'état les sorties des systèmes élémentaires, c'est-à-dire les dérivées successives de la sortie.

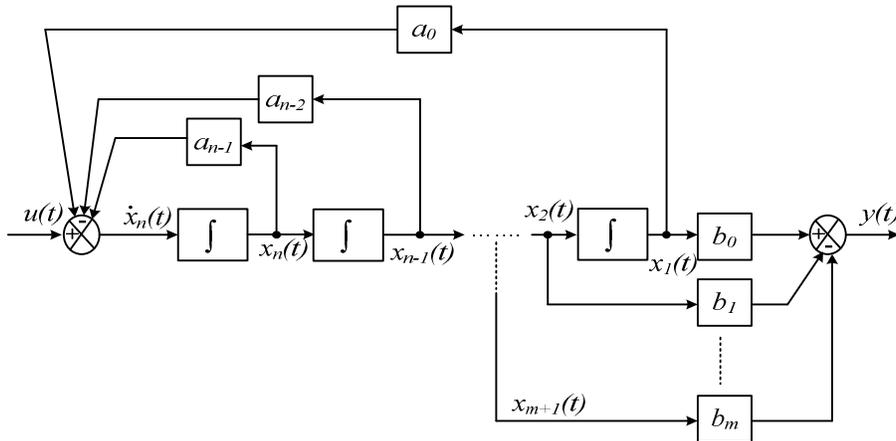


Figure (1-5) Représentation compagne commandable.

Les équations d'état se déduisent naturellement de cette représentation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = -a_0x_1 - a_1x_2 - \dots - a_{n-1}x_n + u \\ y = b_0x_1 + b_1x_2 + \dots + a_mx_{m+1} \end{array} \right.$$

La représentation d'état obtenue est dite sous forme compagne pour la commande; elle s'écrit (si  $m < n$ ) :

$$\text{D'où : } \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [b_0 \quad \dots \quad b_m \quad 0 \quad \dots \quad 0]x(t) \end{array} \right.$$

Cette forme de représentation est appelée forme compagne car la matrice de commande du système contient, en une seule ligne, l'ensemble des coefficients du dénominateur de la fonction de transfert. Elle est dite commandable car, bien que seule la variable  $x_n$  soit directement affectée par le signal d'entrée, toutes les variables d'état s'en trouvent influencées par intégrations successives. Si un système est complètement commandable, alors on peut le mettre sous forme compagne commandable.

### Remarques

- Si  $m, n$  alors  $D \neq 0$ .
- Toute l'information relative au dénominateur de la fonction de transfert est mémorisée dans la matrice d'état  $A$ .
- Toute l'information relative au numérateur de la fonction de transfert est mémorisée dans les matrices  $C$  et  $D$ .

### 1.5.4. REPRESENTATION COMPAGNE OBSERVABLE

Plus simple à appréhender, la représentation compagne observable peut être mise en évidence à partir de la forme de  $G(p)$  déjà transformée dans le paragraphe précédent :

$$G(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_m p^{m-n} + b_{m-1} p^{m-n-1} + \dots + b_1 p^{-n+1} + b_0 p^{-n}}{1 + a_{n-1} p^{-1} + \dots + a_1 p^{-n+1} + a_0 p^{-n}}$$

On peut alors écrire :

$$Y(p) = -[a_{n-1} p^{-1} + \dots + a_0 p^{-n}]Y(p) + [b_m p^{m-n} + \dots + b_0 p^{-n}]U(p)$$

Soit :  $Y(p) = -\left[a_{n-1}\left(\frac{1}{p}\right) + \dots + a_0\left(\frac{1}{p}\right)^n\right]Y(p) + \left[b_m\left(\frac{1}{p}\right)^{n-m} + \dots + b_0\left(\frac{1}{p}\right)^n\right]U(p)$

On peut alors proposer la représentation d'état de la figure (1-6).

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a_0x_n + b_0u(t) \\ \dot{x}_2 = x_1 - a_1x_n + b_1u(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{m+1} = x_m - a_mx_n + b_mu(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = x_{n-1} - a_{n-1}x_n \\ y(t) = x_n \end{cases}$$

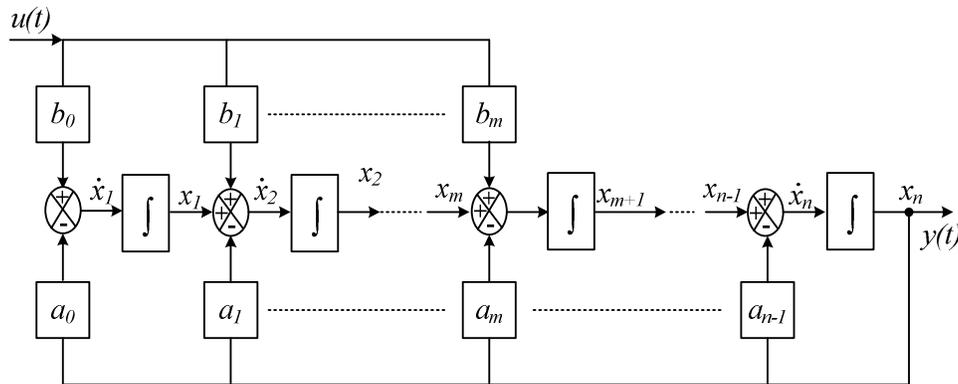


Figure (1-6) Représentation d'état du système sous forme compagne observable.

Les équations d'état se déduisent naturellement de cette représentation :

D'où :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -a_n \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1]x(t) \end{cases}$$

Cette forme de représentation est appelée forme compagne observable car, outre le fait que la matrice de commande du système contient, en une seule colonne, l'ensemble des coefficients du dénominateur de la fonction de transfert, on remarque que la sortie de ce système est égale à  $x_n$  qui, par intégrations successives, est bien influencée par toutes les variables d'état. Si un système est complètement observable, alors on peut le mettre sous forme compagne observable.

## 1.6. COMMANDABILITE ET OBSERVABILITE D'UN SYSTEME

La commandabilité et l'observabilité d'un système ne dépendent pas de la représentation choisie qui, rappelons-le une fois de plus, n'est pas unique. Si un système est commandable et/ou observable, il s'agit de propriétés intrinsèques au système qui ne sont pas remises en cause par la forme du modèle. Il ne faut donc pas confondre les formes compagnes avec des représentations sous lesquelles il faut impérativement placer le système pour qu'il possède telle ou telle caractéristique. En revanche, il est important de connaître ces formes remarquables car elles facilitent, sous certaines conditions, la mise en œuvre des systèmes. Les concepts de commandabilité et d'observabilité sont des concepts fondamentaux pour l'étude des systèmes. Ils décrivent respectivement comment les états d'un système sont influencés par les entrées et quelle information les sorties mesurées donnent sur les états du système. De plus, ces concepts (commandabilité et observabilité) sont utilisés pour avoir la possibilité du passage d'un système espace d'état vers un système fonction de transfert, puisque la représentation de fonction de transfert est validée seulement si elle remplit les conditions de la contrôlabilité et de l'observabilité des systèmes sous forme d'espace d'état.

### 1.6.1. NOTION DE COMMANDABILITE

La commandabilité a pour objet de caractériser la capacité d'un système à voir ses caractéristiques dynamiques modifiées par les entrées. Il est souvent intéressant de s'assurer de la commandabilité d'un système avant de chercher à mettre en œuvre la commande proprement dite. En d'autres termes, on demande de disposer d'une condition nécessaire et suffisante de commandabilité.

#### 1.6.2. DEFINITION1

Un état  $x_i$  est **commandable** en  $t_0$  s'il est possible de déterminer  $u(t)/ [t_0 t_f]$  conduisant tout état initial  $x_i(t_0)$  vers 0 en  $t_0 \leq t_1 \leq t_f$ .

Si cette propriété est vraie  $\forall t_0$  et  $\forall i = 1, \dots, n$  alors le système est **complètement commandable**.

### 1.6.3. DEFINITION DE LA COMMANDABILITE PAR LA NOTION MODALE

On appelle commande modale la commande qui consiste à déterminer une matrice de retour d'état  $L$  telle que les valeurs propres de la matrice  $(A - BL)$  soient

placées en des positions préfixées  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$  (valeurs complexes). L'existence d'une solution est étudiée à travers la notion de commandabilité.

Un système est commandable si et seulement si, pour toute contrainte modale  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ , il existe un retour d'état linéaire  $L$  satisfaisant. On montre que, dans le cas d'un système monovariante SISO (une entrée, une sortie), si le retour d'état  $L$  existe, il est unique.

### Remarques

- Si un système n'est pas complètement commandable alors pour certaines conditions initiales il n'existe pas d'entrée de commande pouvant ramener le système à l'origine.
- La commandabilité est une notion importante puisqu'elle établit le fait que l'on puisse commander le système afin de modifier son comportement (stabilisation d'un système instable, modification des dynamiques propres). Cette notion joue donc un rôle très important dans la théorie de la synthèse de systèmes de commande dans l'espace d'état.
- Un système trivialement non commandable est celui dont la matrice d'entrée est nulle,  $B = 0$ .

### 1.6.4. CRITERE DE COMMANDABILITE

Il est clairement difficile d'utiliser directement les définitions précédentes afin de décider de la commandabilité d'un système LTI donné. La commandabilité est une propriété caractéristique du couplage entre l'entrée et la sortie du système et fera donc intervenir les matrices  $A$  et  $B$ . Kalman a proposé un critère simple construit à partir de ces deux matrices.

#### A. Théorème de Kalman

Considérons un système LTI représenté par un vecteur d'état  $x$ , et une équation d'évolution de l'état :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Où  $A \in R^{n \times n}$ ,  $B \in R^{n \times \ell}$  est commandable si et seulement si **la matrice de commandabilité**,  $\mathcal{C}$  est de rang  $n$ , (avec  $\mathcal{C}$  est la matrice de commandabilité)

$$\text{rang}(\mathcal{C}) = \text{rang}([B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]) = n$$

Un système est commandable si  $\text{rang}(\mathcal{C}) = n$ . On définit plus généralement le degré de commandabilité d'un système comme le rang de la matrice de commandabilité. Si  $\text{rang}(\mathcal{C}) < n$ , alors le système est partiellement commandable. Nous verrons sur un exemple que l'idée, dans le cas d'un système partiellement commandable, consiste à rendre la partie non commandable du système inopérante afin de le contrôler entièrement via sa partie commandable.

**Exemple 1 :** on considère le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [1 \quad 0]x(t) \end{cases}$$

**Exemple 2 :** on considère la représentation s'état suivante.

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [2 \quad 0 \quad 4]x(t) \end{cases}$$

- 1) Tracer ce système sous forme schéma fonctionnel
- 2) Etudier la commandabilité de système.

**Exemple 3 :** Considérons un système représenté par les deux équations d'état:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 + u & \text{et} & \quad \dot{x}_2 = -3x_2 + dx_1 \\ y &= x_2 \end{aligned}$$

- 1) Présenter le système sous forme d'état.
- 2) Pour quelle valeur de  $d$  le système est non commandable.

### 1.6.5. NOTION D'OBSERVABILITE

Dans la seconde partie de cet ouvrage, nous avons vu combien il était important, notamment pour la commande des systèmes en boucle fermée, d'être capable de mesurer un signal de sortie. En représentation d'état, il nous importe d'être capable de connaître à chaque instant, l'état du système, autrement dit de pouvoir déterminer le vecteur d'état  $x(t)$ . Certaines variables d'état sont très faciles à mesurer. Un capteur

placé au bon endroit, à l'intérieur du système, peut nous donner accès à l'information recherchée. Dans ce cas, on dit que la variable d'état considérée est mesurable. Dans d'autres cas, cette investigation directe n'est pas possible. La grandeur est alors dite non mesurable.

En revanche, elle peut, tout en étant non mesurable, influencer la sortie  $y(t)$  du système. Il est alors possible, à partir de la mesure de la sortie, de déduire la grandeur considérée. On dit que celle-ci est observable.

### 1.6.6. DEFINITION :

Un état  $x_i$  est **observable** en  $t_0$  s'il est possible de déterminer  $x_i(t_0)$  connaissant  $y(t) / [t_0 t_f]$ .

Si cette propriété est vraie  $\forall t_0$  et  $\forall i = 1, \dots, n$  alors le système est **complètement observable**.

#### Remarques

Clairement, la notion d'observabilité est cruciale pour les systèmes où le vecteur d'état complet n'est pas accessible à la mesure mais doit être reconstruit, estimé ou filtré à partir des données fournies par la sortie.

### 1.6.7. CRITERE D'OBSERVABILITE

Un critère de Kalman existe également pour la notion d'observabilité et fait intervenir la matrice dynamique  $A$  et la matrice de sortie  $C$ .

#### A. Théorème de Kalman

Considérons un système LTI représenté par un vecteur d'état  $x$ , et une équation d'évolution de l'état :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Où  $A \in R^{n \times n}$ ,  $C \in R^{m \times n}$  est commandable si et seulement si la **matrice d'observabilité**  $O$  est de rang  $n$  :

$$\text{rang}(O) = \text{rang} \left( \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \right) = n$$

**Remarque :**

L'observabilité d'un système de matrices caractéristiques  $(A,C)$  sera appelée observabilité de la paire  $(A,C)$ .

**Exemple 4**

Soit le système modélisé par:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

- 1) Vérifier l'observabilité de système

**Exemple 5**

Si l'on mesure la vitesse angulaire, les matrices dynamiques et de sortie du satellite sont,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \quad 0]$$

**Exemple 6**

Considérer le système donné par :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 1]x(t)$$

- 1) Vérifier la contrôlabilité et l'observabilité de système.

## Commande par retour d'état

### 2.1. INTRODUCTION

La commande par retour d'état est à la commande des systèmes modélisés par leur représentation d'état, ce que la boucle fermée est aux systèmes représentés par une fonction de transfert. L'idée consiste toujours à piloter le système par un signal de consigne et à générer automatiquement le signal de commande en confrontant en permanence la valeur de la consigne et le comportement réel du système. L'écart entre consigne et comportement réel sert de base au signal de commande du système. Dans la commande par retour d'état, nous n'allons pas mesurer le signal de sortie pour le boucler sur l'entrée, mais nous allons nous servir du vecteur d'état complet pour prendre connaissance du comportement du système.

### 2.2. PRINCIPE DE LA COMMANDE PAR RETOUR D'ETAT

Le principe est de déterminer une commande telle que les pôles du système de la fonction de transfert du système bouclé soient convenablement placés dans le plan complexe et satisfasse des spécifications d'amortissement, de rapidité...

Les pôles de la fonction de transfert étant les valeurs propres de la matrice d'état, le but est donc de réaliser un asservissement modifiant convenablement la matrice d'état du système.



Figure (2-1) : *Système en boucle ouverte*

Soit un système décrit par l'équation d'état suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (2-1)$$

Dans le cadre de ce cours, on se restreint à la commande linéaire construite par rétroaction linéaire de l'état du système sur l'entrée :

$$u(t) = r(t) - Kx(t) \text{ (en boucle ouverte)} \quad (2-2)$$

Le signal de commande du système (autrement dit l'écart) doit être construit en soustrayant au signal de consigne un signal qui dépend du vecteur d'état. Ce vecteur d'état étant composé de  $n$  signaux  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ , on le multiplie par un vecteur ligne ( $K$ ) appelé vecteur de gain pour pouvoir effectuer cette soustraction. On a alors :

$$K = [k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_n] \quad (2-3)$$

Et :

$$u(t) = r(t) - Kx(t) = r(t) - [k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (2-4)$$

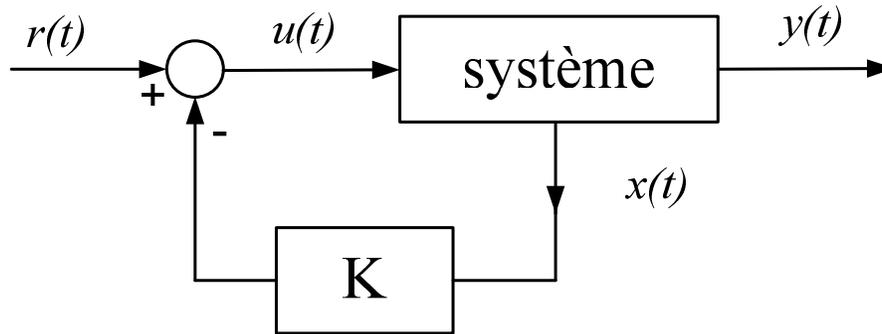


Figure (2-2) : Bouclage du système par un vecteur de gain.

Les équations du système en boucle fermé sont :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ u(t) = r(t) - Kx(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (2-5)$$

L'équation d'état du système en boucle fermé s'écrit :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B[r(t) - Kx(t)] = [A - BK]x(t) + Br(t) \quad (2-6)$$

Par conséquent, la matrice d'état du système en boucle fermé vaut :  $(A - BK)$ .

La dynamique du système bouclé est donc fixée par les valeurs propres de la matrice  $(A - BK)$ ; ces valeurs propres sont les racines de l'équation caractéristique :

$$\det(pI - (A - BK)) = Q(p)_{A-BK} = 0 \quad (2-7)$$

### 2.3. RESOLUTION DU PROBLEME PAR PLACEMENT DE POLES

On considère le système supposé commandable  $\dot{x} = Ax + Bu$  et on cherche un régulateur pour ce système de la forme  $u = r - Kx$ , où  $r$  est la nouvelle entrée. Il est légitime de vouloir choisir la matrice de régulation de façon à imposer

les pôles du système bouclé. Ce problème est équivalent à imposer le polynôme caractéristique du système. Soit  $\varphi(p)$  le polynôme désiré, que l'on supposera bien sûr de degré  $n$ . Il nous faut résoudre l'équation polynomiale :

$$\det(pI - (A - BK)) = \varphi(p) \quad (2-8)$$

Dite de placement de pôles. Cette équation peut se traduire en  $n$  équation scalaires. Rappelons en effet que deux polynômes de degré  $n$  et unitaire  $p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_0$  et  $p^n + b_{n-1}p^{n-1} + \dots + b_0$  sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont tous égaux, c'est-à-dire si  $a_{n-1} = b_{n-1}, \dots, a_0 = b_0$ . Noter système des  $n$  équations possède  $m \cdot n$  inconnues qui sont les coefficients  $k_{ij}, i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}$ . En fait, une seule matrice solution  $K$  nous suffit. On peut donc fixer  $(m - 1)$  éléments de  $K$  afin qu'il ne nous reste plus que  $n$  inconnues. Mais le système obtenu n'est pas toujours linéaire.

Tout est simple lorsque le système possède une seule entrée. En effet, l'équation polynomiale (2-8) se traduit forcément par un système de  $n$  équations linéaires à  $n$  inconnues qui admet une et une seule solution (car le système est commandable).

Dans le cas où le système possède  $m$  entrées, on peut choisir  $K$  de la forme :

$$K = \tilde{B}K_1$$

Où la matrice  $\tilde{B}(m \times 1)$  est choisie arbitrairement de façon à conserver la commandabilité et à solliciter les entrées les moins coûteuses. La quantité  $K_1 = [k_1, \dots, k_n]$  est la matrice  $1 \times n$  à déterminer. Le système polynomiale (2-8) se traduit alors par un système linéaire en  $k_1, \dots, k_n$ .

### 2.3.1. APPLICATION DE LA METHODE PLACEMENT DE POLES

Nous allons ici illustrer la résolution de l'équation polynomiale (2-8), lorsque le système n'admet qu'une seule entrée. Les méthodes proposées ici nécessitent des calculs assez fastidieux. Considérons par exemple le système :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 6 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} u$$

Que l'on cherche à stabiliser par un retour d'état de la forme :

$$u = r - Kx$$

Avec

$$K = (k_1 \quad k_2 \quad k_3)$$

Cherchons  $K$  de façon à ce que ce polynôme caractéristique  $\varphi(p)$  du système en boucle fermée ait pour racines  $-1, -1 - 2j, -1 + 2j$ , c'est-à-dire :

$$\varphi(p) = (p + 1)(p + 1 + 2j)(p + 1 - 2j)$$

$$\varphi(p) = p^3 + 3p^2 + 7p + 5$$

$$\det(pI - (A - BK)) = \varphi(p)$$

$$\det \left( \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 6 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix} \right) = p^3 + 3p^2 + 7p + 5$$

C'est-à-dire

$$\det \begin{pmatrix} p - 1 + 2k_1 & -4 + 2k_2 & 1 + 2k_3 \\ -6 + 3k_1 & p + 1 + 3k_2 & -3 + 3k_3 \\ -2 - k_1 & -2 - k_2 & p + 5 - k_3 \end{pmatrix} = p^3 + 3p^2 + 7p + 5$$

Ou encore

$$p^3 + (2k_1 + 3k_2 - k_3 + 5)p^2 + (25k_1 + 21k_2 + 10k_3 - 29)p + 41k_1 + 72k_2 + 71k_3 - 129 = p^3 + 3p^2 + 7p + 5$$

On obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 25 & 21 & 10 \\ 41 & 72 & 71 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -29 \\ -129 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 25 & 21 & 10 \\ 41 & 72 & 71 \end{pmatrix}^{-1} \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -29 \\ -129 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1.4227 \\ -0.94158 \\ 2.0206 \end{pmatrix}$$

Soit :

$$K = [1.4227 \quad -0.94158 \quad 2.0206]$$

### 2.3.2. FONCTION DE TRANSFERT EN BOUCLE FERMÉE

On peut calculer la fonction de transfert en boucle fermée du système à partir de la représentation d'état. Supposons que le système, en boucle ouverte, soit régi par les équations d'état suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

On a en boucle fermée :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B \underbrace{(r(t) - Kx(t))}_{u(t)}$$

Donc, on obtient :

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + Br(t)$$

Nous appliquons la transformée de Laplace aux équations d'état :

$$\begin{cases} pX(p) = (A - BK)X(p) + BR(p) \\ Y(p) = CX(p) \end{cases}$$



On tire :

$$(I_n p - A + BK)X(p) = BR(p)$$

Donc :

$$X(p) = (I_n p - A + BK)^{-1}BR(p)$$

D'où :

$$G_{BF}(p) = \frac{Y(p)}{R(p)} = C(I_n p - A + BK)^{-1}B \quad (2-9)$$

### 2.3.3. DETERMINATION DU VECTEUR D'ETAT

La commande par retour d'état suppose que l'on connaisse parfaitement le système, mais surtout, que l'on puisse accéder au vecteur d'état. Trois cas peuvent se présenter :

- tous les signaux internes composant le vecteur d'état sont accessibles à la mesure ; dans ce cas, les variables d'état sont mesurables et des capteurs judicieusement placés permettent d'accéder aux informations nécessaires au retour d'état ;
- toutes les variables d'état ne sont pas mesurables mais le système est complètement observable ; il est alors possible de reconstruire le vecteur d'état à un instant donné à partir de la connaissance du signal de sortie et du signal d'entrée du système sur un intervalle de temps précédent ; on utilise pour ce faire, un observateur d'état ;
- le système n'est pas complètement observable ; il est alors nécessaire d'estimer le vecteur d'état au moyen d'un estimateur d'état.

## 2.4. EXERCICES D'APPLICATION

### A. EXERCICE N°1

On considère un système régi par l'équation d'état :

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \quad \text{où } A = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Étudier la commandabilité de ce système et calculer le vecteur de gain (K) à introduire dans une boucle de retour d'état pour que le système, en boucle fermée et soumis à un échelon unitaire de consigne, soit caractérisé par un coefficient d'amortissement  $\xi=0.45$  et  $\omega_n=7.5\text{sec}$ .

**B. EXERCICE N°2**

On considère le système à une entrée, une sortie et d'ordre n associé à la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx \end{cases}$$

- 1) Quelles sont les dimensions des matrices A, B et C ?
- 2) Quel nom donne-t-on à la matrice A, B et C ?
- 3) Que représentent les valeurs propres de la matrice A ?
- 4) Que doit satisfaire A pour que le système soit stable ?
- 5) Donner l'expression de la fonction de transfert du système en fonction de A, B et C.
- 6) Donner la condition portant sur A et B pour que le système soit commandable.
- 7) Ecrire l'expression générale de la commande par retour d'état et donner une représentation schématique du coupe système retour d'état.
- 8) Donner la condition portant sur A et C pour que le système soit observable.

**C. EXERCICE N°3**

Soit le système d'écrit par le schéma de la figure 1.

On prend comme vecteur d'état, le vecteur X suivant:

$$X = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T$$

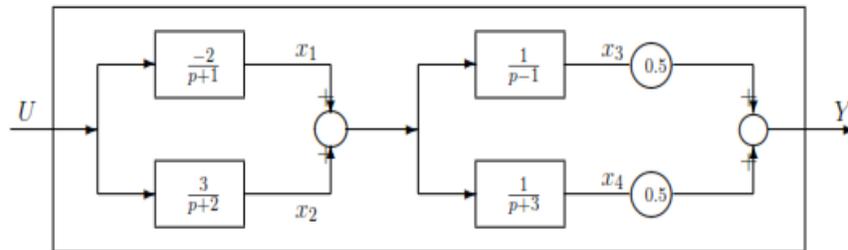


Figure : Schéma fonctionnel du système

- 1) Ecrire la représentation d'état de ce système.
- 2) Etudier la commandabilité et l'observabilité en utilisant les matrices de commandabilité et d'observabilité.
- 3) A partir du schéma fonctionnel de la figure 1, déterminer la fonction de transfert du système.
- 4) En effectuant un changement de variables d'état, déterminer la représentation d'état du système sous forme modale.

- 5) Donner le schéma fonctionnel correspondant à la forme modale (décomposition parallèle) et analyser la commandabilité et l'observabilité sur le schéma.

#### D. EXERCICE N°4

On considère le système ayant pour fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{1}{p(p+1)}$$

- 1) Donner la représentation d'état du système sous forme compagne pour la commande. On notera  $x$  le vecteur d'état associé à cette représentation.
- 2) Donner le schéma fonctionnel correspondant à cette représentation.
- 3) Déterminer le retour d'état  $K$  nécessaire pour imposer -2 et -5 comme pôles du système bouclé.
- 4) Déterminer la fonction de transfert du système bouclé.

#### E. EXERCICE N°5

On considère le système ayant pour fonction de transfert:

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{p+3}{p(p+1)(p+2)}$$

- 1) Donner la représentation d'état du système sous forme compagne pour la commande. On notera  $x$  le vecteur d'état. On précisera bien ce que vaut  $x$ .
- 2) Dessiner le schéma fonctionnel correspondant à cette représentation.
- 3) Déterminer le retour d'état  $K$  nécessaire pour imposer les valeurs -2, -5 et -10 comme pôles du système bouclé.
- 4) Déterminer la fonction de transfert du système bouclé.

# Commande optimale

## 3.1. INTRODUCTION

Les problèmes de commande optimale se rencontrent dans la vie de tous les jours : comment arriver à destination le plus rapidement possible, comment minimiser sa consommation... Pour un système dynamique donné et dont les équations sont connues, le problème de commande optimale consiste alors à trouver la commande minimisant un critère donné.

On s'intéressera dans une première partie à la commande optimale telle qu'elle a été posée initialement et dans le cas des systèmes les plus généraux. Dans une seconde partie, on s'intéressera plus particulièrement aux systèmes linéaires dans le cas d'un critère quadratique, cas connu sous le nom de commande linéaire quadratique (LQR : Linear Quadratic Regulator).

## 3.2. CONTROLE OPTIMAL DES SYSTEMES

La conception de contrôle optimal des systèmes est une fonction importante de l'automatique. Le but de la conception est de réaliser un système de contrôle de telle façon que le système en boucle fermée est identique à un système désiré (ce système est imposé selon des critères bien défini). L'exécution de ces critères désirés est obtenue par la minimisation d'un critère de performance ou l'indice de performance (noté  $J$ ). Les indices de performance sont normalement spécifiés dans le domaine temporel; donc, il est normal que nous souhaitons élaborer des procédures de conception dans le domaine temporel.

Dans cette section, nous considérerons la conception de système de contrôle optimal qui est décrit par une formulation de variable d'état. Nous considérerons que la mesure des variables d'état est utilisée pour calculer un signal de commande  $u(t)$  de sorte que l'exécution du système soit optimisée.

Soit un système à temps continu de représentation d'état :

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (3-1)$$

Et de condition initiale  $x(t_0) = x_0$ , où  $t \in \mathbb{R}$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  et  $x \in \mathbb{R}^n$ . Les signaux  $u$  et  $x$  sont des fonctions de  $\mathbb{R}$  vers respectivement  $\mathbb{R}^m$  et  $\mathbb{R}^n$ . Pour la condition initiale  $x_0$  et la commande  $u$ , l'équation d'état (3-1) définit une trajectoire unique  $x$  pour l'état sur  $[t_0; t_f]$ . Celle-ci est fonction de la condition initiale  $x_0$  et de la commande  $u$  sur  $[t_0; t_f]$ .

L'indice de performance  $J$  d'un système de contrôle peut être exprimé en général par :

$$J = \int_0^{t_f} f(x, u, t) dt \quad (3-2)$$

Où  $x$  est le vecteur d'état,  $u$  est le vecteur de commande, et  $t_f$  est le temps final

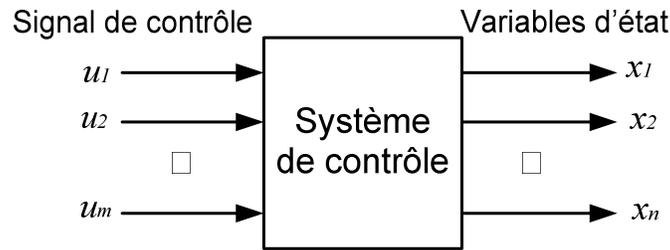


Figure (3-1) : Système de contrôle en termes  $x$  et  $u$ .

Le système de contrôle que nous considérerons est montré sur la figure (3-1) et peut être représenté par l'équation différentielle suivante:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3-3)$$

Il est intéressant de noter que la commande optimale obtenue s'écrit comme un retour d'état :

$$\hat{u}(t) = -Kx(t) \quad (3-4)$$

Par exemple, nous pourrions employer

$$\hat{u}_1 = -k_1 x_1, \quad \hat{u}_2 = -k_2 x_2, \quad \dots, \quad \hat{u}_m = -k_n x_n \quad (3-5)$$

Alternativement, nous pourrions choisir le vecteur de commande par :

$$\hat{u}_1 = -k_1(x_1 + x_2), \quad \hat{u}_2 = -k_2(x_2 + x_3), \quad \dots \quad (3-6)$$

La loi de commande est  $u = -Kx$ , où  $K$  est matrice de dimension  $m \times n$ . Par conséquent, sous la forme augmentée, nous avons :

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \vdots \\ \hat{u}_m \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{11} & \dots & k_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{m1} & \dots & k_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

Substituant l'équation (3-7) dans l'équation (3-3), nous obtenons :

$$\dot{x} = Ax - BKx = Hx \quad (3-8)$$

Où H est une matrice de dimension  $n \times n$  résultant de l'addition des éléments  $A - BK$ .

Dans ce cas, l'indice de performance  $J$  est l'intégral du carré d'erreur, donc le critère s'écrit alors :

$$J = \int_0^{t_f} [x_1(t)]^2 dt \quad (3-9)$$

Pour deux variables d'états  $x_1$  et  $x_2$ , l'indice de performance s'écrit par :

$$J = \int_0^{t_f} (x_1^2(t) + x_2^2(t)) dt \quad (3-10)$$

Puisque nous souhaitons définir le critère de performance en termes d'intégral de la somme des carrées des variables d'état, nous emploierons l'opération vectorielle suivante :

$$x^T x = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (3-11)$$

Où  $x^T$  est le transposé du vecteur  $x$ . L'indice de performance devient :

$$J = \int_0^{t_f} x^T x dt \quad (3-12)$$

Pour  $t_f$  tend vers l'infini, le principe de la commande optimale est de dériver l'indice de performance par rapport au temps (Pour obtenir la valeur minimum), on obtient :

$$\frac{d}{dt} (x^T P x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \quad (3-13)$$

Substituant l'équation (3-8), nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (x^T P x) &= (Hx)^T P x + x^T P (Hx) \\ &= x^T H^T P x + x^T P H x \\ &= x^T (H^T P + P H) x \end{aligned} \quad (3-14)$$

Avec  $(Hx)^T = x^T H^T$ . Si nous supposons que  $H^T P + PH = -I$ , alors l'équation (3-14) devient :

$$\frac{d}{dt}(x^T P x) = -x^T x \quad (3-15)$$

Substituant l'équation (3-15) dans l'équation (3-12), nous obtenons

$$J = \int_0^\infty -\frac{d}{dt}(x^T P x) dt = -x^T P x|_0^\infty = x^T(0) P x(0) \quad (3-16)$$

Dans l'évaluation de la limite à  $t = \infty$ , nous supposons que le système est stable, et par conséquent  $x(\infty) = 0$ . Par conséquent, pour réduire au minimum le critère de performance  $J$ , nous considérons les deux équations :

$$J = \int_0^\infty x^T x dt = x^T(0) P x(0) \quad (3-17)$$

Et :

$$H^T P + PH = -I \quad (3-18)$$

Les étapes de conception sont alors comme suit :

1. Déterminer la matrice  $P$  qui satisfait l'équation (3-18), où  $H$  est connu.
2. Réduire au minimum  $J$  en déterminant le minimum de l'équation (3-17) en ajustant un ou plusieurs paramètres de système non spécifiés

### Exemple : (résoudre au cours)

On considère le système à contrôler en boucle ouverte

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Où  $x_1$  et  $x_2$  sont les variables d'état.

Avec :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nous choisirons un système de contrôle de rétroaction de sorte que :

$$u(t) = -Kx(t) = [\kappa_1 \quad \kappa_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Si nous supposons que  $\kappa_1=1$  et les conditions initiales sont  $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ , calculer le gain optimal  $K$  et représenter l'allure de l'indice de performance  $J$ .

### 3.3. COMMANDE LINEAIRE QUADRATIQUE

On parle de commande linéaire quadratique : LQ ou LQR pour linear quadratic regulator. Le système est linéaire et la commande est quadratique. La commande optimale est un retour d'état. Le principe de la commande LQR est présenté dans la figure (3-2).

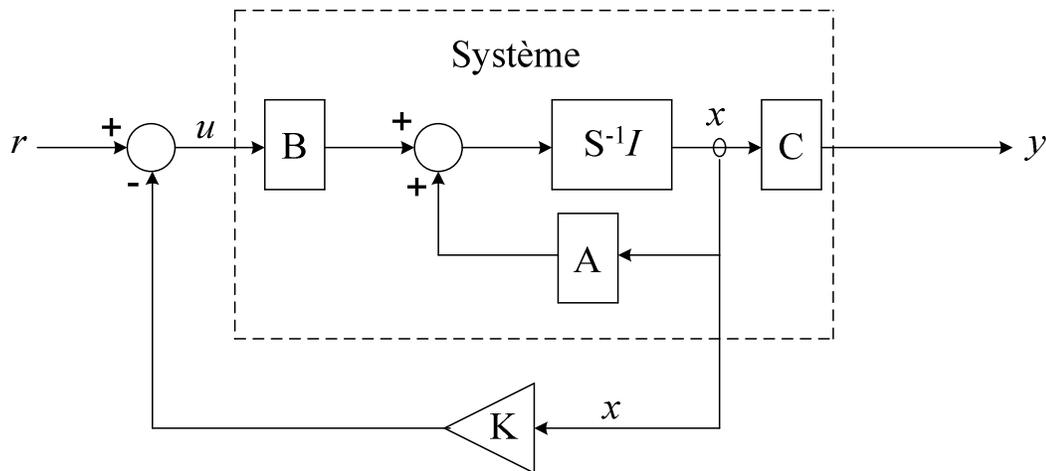


Figure (3-2) : principe d'une commande par retour d'état.

#### 3.3.1. SYNTHÈSE DU REGULATEUR LQR

Considérons un système linéaire sous forme d'équation d'état suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3-19)$$

Où on va supposés que La paire (A, B) est stabilisable, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de mode instable et ingouvernable dans le système.

Soit un régulateur par retour d'états dont le processus a pour équation d'état l'équation (3-19). Le problème simplifié du régulateur linéaire quadratique consiste à trouver la matrice du correcteur K qui minimise la fonction du coût (ou le critère de performance) suivante :

$$J(x_0, u) = \frac{1}{2} x^T(t_f) S x(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (x^T(t) Q(t) x(t) + u^T(t) R(t) u(t)) dt \quad (3-20)$$

Les matrices de pondération Q et R sont définies positives et symétriques. Et S est la matrice de solution de l'équation de Riccati (est définie positives et symétrique).

Le Lagrangien s'écrit alors :

$$L(x, u, p, t) = p^T A(t)x + p^T B(t)u + \frac{1}{2} (x^T Q(t)x + u^T R(t)u) \quad (3-21)$$

La loi de commande optimale est obtenue si le dérivé de lagrangien par rapport à la loi de commande est nul :

$$\frac{\partial L}{\partial u} = B^T(t)p + R(t)u = 0 \quad (3-22)$$

Donc, on peut tirer la optimale à partir d'équation (3-22) :

$$u_{opt} = -R^{-1}(t)B^T p(t) \quad (3-23)$$

Où :

$$p(t_f) = Sx(t_f) \quad (3-24)$$

Le principe du maximum donne la condition suivante :

$$\dot{p} = -\frac{\partial L}{\partial x} = -A^T(t)p - Q(t)x \quad (3-25)$$

Alors l'équation dynamique du système en boucle fermée s'écrit :

$$\dot{x} = A^T(t)x(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)p(t) \quad (3-26)$$

Les équations (3-24) et (3-26) peuvent se mettre sous la forme d'un système matriciel appelé système Hamiltonien :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) & -B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \\ -Q(t) & -A^T(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \end{pmatrix} \quad (3-27)$$

Ecrivons  $p(t) = P(t)x(t)$ , comme nous y incite (4-8), avec comme condition finale  $P(t_f)=S$ . L'équation (3-26) s'écrit alors :

$$\dot{p}(t) = -(A^T(t)P(t) + Q(t))x(t) \quad (3-28)$$

Avec  $\dot{p}(t) = \dot{P}(t)x(t) + P(t)\dot{x}(t)$  et l'équation d'état (3-19) du système, l'équation (3-28) s'écrit (en omettant la référence au temps au d'alléger les notations) :

$$(\dot{P} + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q)x = 0 \quad (2-29)$$

La solution est alors obtenue en résolvant l'équation (différentielle) de Riccati suivante:

$$\dot{P} + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (3-30)$$

Avec la condition finale  $P(t_f) = S$ . Remarquons que la condition :

$$x^T (P + PA + A^T \dot{P} - PBR^{-1}P + Q)x = 0 \quad (3-31)$$

S'écrit aussi :

$$\frac{d}{dt} (x^T P x) + x^T Q x + u^T R u \quad (3-32)$$

Il est intéressant de noter que la commande optimale obtenue s'écrit comme un retour d'état  $u = -K(t)x$  avec :

$$K = -R^{-1}B^T P \quad (3-33)$$

On peut récrire toutes les équations du système en temps continu par des équations en temps discret (voir le tableau ci-dessous) :

Type de système	Système continu	Système discret
équation N° (3-19)		devient : $\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cu(k) \end{cases}$
équation N° (3-20)		devient : $J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{k=N} x^T(k)Q(k)x(k) + u^T(k)R(k)u(k)$
équation N° (3-21)		devient : $L = \left( \sum_{k=0}^{k=N} \frac{1}{2} x^T(k)Q(k)x(k) + \frac{1}{2} u^T(k)R(k)u(k) + p^T(k+1)(-x(k+1)A(k)x(k) + B(k)u(k)) \right)$
équation N° (3-22)		devient : $\frac{\partial L}{\partial u(k)} = R(k)u(k) + B^T(k)p(k+1) = 0$
équation N° (3-23)		devient : $u(k) = -R^{-1}(k)B^T(k)p(k+1)$
équation N° (3-24)		devient : $p(k) = P(k)x(k)$
équation N° (3-25)		devient : $p(k+1) = -(A^T(k)P(k) + Q(k)x(x))$
équation N° (3-26)		devient : $x(k+1) = A^T(k)x(x) - B(k)R^{-1}(k)B^T(k)p(k)$
équation N° (3-27)		devient : $\begin{pmatrix} x(k+1) \\ p(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(k) & B(k)R^{-1}(k)B^T(k) \\ -Q(k) & A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ p(k) \end{pmatrix}$
équation N° (3-28)		$p(k+1) = -(A^T(k)P(k) + Q(k))x(x)$
équation N° (3-30)		devient : $P(k+1) + P(k)A(k) + A^T(k)P(k) - P(k)B(k)R^{-1}(k)B^T(k)P(k) + Q(k)$
équation N° (3-33)		devient : $K(k) = \tilde{R}^{-1}(k)B^T(k)P(k+1)A(k)$ où : $\tilde{R}^{-1}(k) = R(k) + B^T(k)P(k+1)B(k)$

### 3.3.2. CHOIX DES MATRICES DE PONDERATION

Il est intéressant de remarquer d'abord que la multiplication des pondérations Q et R par un même scalaire laisse inchangé le gain K. En effet, soit P solution de (3-30) et soit le nouveau problème basé sur les pondérations  $\tilde{Q} = \rho Q$  et  $\tilde{R} = \rho R$ . On vérifie que  $\tilde{P} = \rho P$  est solution de l'équation de Riccati correspondante. En effet :

$$\tilde{K} = -\tilde{R}^{-1}B^T\tilde{P} = -R^{-1}B^T P = K \quad (3-34)$$

Sans restriction, les pondérations peuvent être choisies symétriques. Elles sont généralement choisies diagonales. Ainsi, on se ramène au choix de  $n$  scalaires pour l'état et de  $p$  scalaires pour la commande. Voici une méthode simple de choix et de modification des pondérations en vue d'aboutir à un correcteur satisfaisant.

1. Au départ, on choisit généralement des pondérations égales aux matrices identité.
2. Dans une seconde étape, on accélère ou décélère globalement le système en multipliant la matrice  $Q$  par un scalaire  $\rho$  (accélération avec  $\rho > 1$  et décélération avec  $\rho < 1$ ), jusqu'à obtenir une dynamique moyenne adaptée.
3. Dans le cas où certains états auraient des dynamiques trop lentes par rapport à d'autres, on peut choisir d'augmenter la pondération de  $Q$  correspondant aux premiers.
4. Dans le cas où certains actionneurs seraient trop sollicités par rapport à d'autres, on peut choisir d'augmenter la pondération de  $R$  leur correspondant.

**Exemple : (résoudre au cours)**

Soit le système sous la forme d'espace d'état suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Me(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Où :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad -1]$$

Nous recherchons le régulateur ( $e(t)=0$ ) qui minimise le critère :

$$J = \int_0^{\infty} [y^2(t) + \rho u^2(t)] dt$$

En appliquant l'équation de Riccati :

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

Où on pose  $Q$ :

$$Q = C^T C$$

### 3.4. COMMANDE LINEAIRE GAUSSIENNE LQG

Le régulateur LQG est une combinaison entre un régulateur LQR et un estimateur de Kalman (LQG=LQR+filtre de Kalman). La synthèse LQG de retours dynamiques d'état, qui combine un retour d'état LQ et un filtre de Kalman. Nous présentons principalement les propriétés structurelles de la commande LQG (principe de séparation).

#### 3.4.1. PRINCIPE DU FILTRE DE KALMAN

Nous supposons donc que notre système perturbé peut être modélisé par le modèle d'état suivant appelé modèle de Kalman :

$$\begin{cases} x(t) = Ax(t) + Bu(t) + Mw(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) + v(t) \end{cases} \quad (3-35)$$

Où :  $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, w \in \mathbb{R}^q, y \in \mathbb{R}^p, v \in \mathbb{R}^p$

Où  $w$  et  $v$  représentent des bruits blancs, de moyenne nulle, indépendants, avec respectivement pour matrice de covariance  $W$  et  $V$ .

Auquel nous adjoindrons les hypothèses suivantes. Nous supposons que :

**H1** : La paire  $(A,C)$  est détectable, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de mode instable et inobservable dans le système,

**H2** : les signaux  $w(t)$  et  $v(t)$  sont des bruits blancs gaussiens centrés de Densité Spectrale de Puissance (DSP)  $W$  et  $V$  respectivement, c'est-à-dire :

$$E[w(t)w(t + \tau)^T] = W\delta(\tau)$$

$$E[v(t)v(t + \tau)^T] = V\delta(\tau)$$

$$E[w(t)v(t + \tau)^T] = 0 \quad (\text{cette dernière relation traduit}$$

l'indépendance stochastique des bruits  $w(t)$  et  $v(t)$  : cette hypothèse est introduite pour alléger les calculs qui vont suivre mais n'est pas nécessaire).

Avec :  $W \geq 0$  et  $V \geq 0$ .

Où :

$E$  : C'est espérance mathématique.

$\delta$  : Est le symbole de Kronecker.

**H3** :  $V$  est inversible (il y a autant de sources de bruits blancs indépendantes que de mesures dans l'équation de mesure).<sup>1</sup>

<sup>1</sup>  $V$  est donc une matrice définie positive et  $W$  est une matrice semi-définie positive.

### 3.4.2. SYNTHÈSE DU RÉGULATEUR LINÉAIRE QUADRATIQUE GAUSSIENNE LQG

Par rapport à la commande LQ, la commande LQG présente l'intérêt de s'appliquer à des systèmes dont l'état n'est pas mesuré. Développée au début de la seconde moitié du 20<sup>ème</sup> siècle et appliquée lors du programme spatial Apollo pour la stabilisation de lanceurs, elle est apparue comme la première méthode générale pour l'asservissement des systèmes multivariable. La commande LQG est composée d'une commande LQR avec un observateur des états par la méthode du filtre de Kalman. Où le schéma de principe de cette commande est illustré par la figure (3-3). On remarque d'après cette figure que le principe de la commande LQG est le même que la commande LQR seulement la loi de commande dans le régulateur LQG est la multiplication du gain de retour par l'état estimé par le filtre de Kalman :

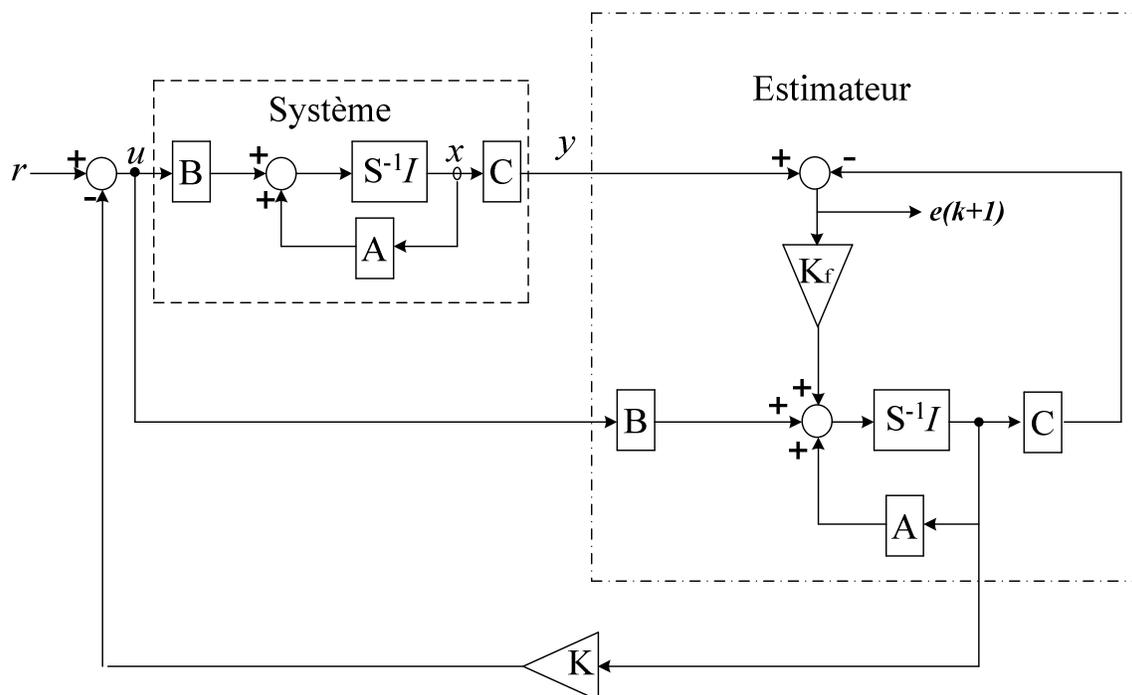


Figure (3-3) : La structure du correcteur LQG.

La loi de commande est obtenue par :

$$u_{opt}(t) = -K\hat{x}(t) \quad (3-36)$$

Avec :

$$K = -R^{-1}B^T P \quad (3-37)$$

### 3.4.2.1. SYNTHÈSE DU FILTRE DE KALMAN

On considère le système linéaire stationnaire et stochastique possédant la modélisation d'état suivante :

$$\begin{cases} x(t) = Ax(t) + Bu(t) + Mw(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) + v(t) \end{cases} \quad (3-38)$$

A partir du vecteur  $y$  de mesures bruitées (retour de sortie), nous recherchons une loi de commande qui minimise le critère :

$$J = \lim_{t \rightarrow \infty} E \left[ \int_0^t y^T Q_f y + u^T R_f u \right] \quad (3-39)$$

$Q_f$  et  $R_f$  deux matrices de pondération avec, comme précédemment :

$$Q_f = Q_f^T \geq 0 \quad \text{et} \quad R_f = R_f^T \geq 0$$

La solution de ce problème s'appuie sur le principe de séparation qui établit que la commande optimale est obtenue comme le montre dans figure (3-3).

Le principe de la commande LQG est basé sur les étapes suivantes :

- a) en recherchant l'estimé optimal  $\hat{x}$  (au sens de la variance d'erreur minimale) de l'état  $x$  par la méthode du Filtre de KALMAN, c'est-à-dire on estime l'état  $x$  par l'équation classique du filtre de KALMAN à condition que le triplet  $(A, MW^{\frac{1}{2}}, C)$  soit détectable et stabilisable.

$$\hat{\dot{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K_f(y - C\hat{x} - Du(t))$$

Avec :  $K_f = P_f C^T R_f^{-1}$  où obéit à l'équation de RICCATI suivante :

$$P_f A^T + A P_f - P_f C^T R_f^{-1} C P_f + Q_f = 0 \quad (3-40)$$

Avec :  $P_f = P_f^T \geq 0$

- b) en employant cet estimé comme s'il était la mesure exacte du vecteur d'état, pour résoudre le problème de commande optimale linéaire déterministe (méthode LQ) ; soit (si  $(A, B, Q^{\frac{1}{2}})$ ) est détectable et stabilisable) :

$$u = -K\hat{x}(t)$$

Avec :

$$\begin{cases} K = R^{-1}B^T P \\ PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \end{cases}$$

La figure (3-3) représente la structure du correcteur LQG dans la boucle de régulation. La représentation d'état du correcteur LQG s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \hat{x} \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK - K_f C + K_f DK & K_f \\ -K & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ y \end{bmatrix} \quad (3-41)$$

### 3.4.2.2. CHOIX DES MATRICES DE COVARIANCES ET CALCUL DU GAIN

Les différents états mesurés, prédits et estimés passent par ces matrices. Leurs buts sont de minimiser les erreurs liées à une modélisation approchée et à la présence de bruits sur les mesures. Ce réglage requiert une attention particulière et seul un réglage en ligne permet de valider le fonctionnement du filtre. Cependant quelques grandes lignes permettent de comprendre l'influence du réglage de ces valeurs par rapport à la dynamique et la stabilité du filtrage.

La matrice  $Q_f$  liée aux bruits entachant l'état, permet de régler la qualité estimée de notre modélisation et de sa discrétisation. Une forte valeur de  $Q_f$  donne une forte valeur du gain  $K_f$  réduisant l'importance de la modélisation et de la dynamique du filtre. La mesure possède alors un poids relatif plus important. Une trop forte valeur de  $Q_f$  peut cependant créer une instabilité de l'observation.

La matrice  $R_f$  règle quant à elle le poids des mesures. Une forte valeur indique une grande incertitude de la mesure. Par contre, une faible valeur permet de donner un poids important à la mesure. Cependant, il faut faire attention au risque d'instabilité aux faibles valeurs de  $R_f$ .

Les réglages de  $Q_f$  et de  $R_f$  ont été effectués afin d'assurer une stabilité dans toute la plage des états à estimer, tout en respectant un compromis avec la dynamique et les erreurs statiques. Ces réglages ne sont sûrement pas optimaux, mais les qualités de ce filtre assurent un fonctionnement correct.

En conséquence, nous fixons les matrices  $Q_f$  et  $R_f$  comme suit :

$$Q_f = MWM^T$$

$$R_f = V$$

#### Exemple :

Soit le système d'état suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Mw(t) \\ y(t) = Cx(t) + v(t) \end{cases}$$

Où :  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ;  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ;  $M = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ;  $C = [1 \quad -1]$

Avec :  $E[w(t)w^T(t)] = \alpha^2$  et  $E[v(t)v^T(t)] = \beta^2$  ( $\alpha = 10, \beta = 1$ )

1) Calculer le gain de Kalman  $K_f$ .  $K_f = [k_{f1} \quad k_{f2}]$

## Transformée en z

### 4.1. INTRODUCTION :

Jusqu'à présent, nous n'avons étudié que des systèmes linéaires continus, dont la principale fonction consistait à traiter continûment, en temps réel, des signaux eux-mêmes continus, c'est-à-dire des signaux représentés par des fonctions continues du temps. On parle alors de signaux et de systèmes à temps continu.

Dans la réalité industrielle, la complexité des systèmes, ainsi que celle des traitements à réaliser, nécessite souvent le recours à des outils numériques de traitement : ordinateurs, calculateurs, systèmes numériques en tout genre.

De tels outils ne peuvent en aucun cas s'accommoder de signaux continus ; ceux-ci doivent être transformés en suites de nombres pour pouvoir être traités. De même, ces systèmes délivrent, à leur sortie, des suites de valeurs numériques, autrement dit, des signaux numériques.

La problématique est alors de représenter les interactions entre des signaux physiques modélisés par des fonctions avec des signaux assimilables par des calculateurs numériques qui se présentent sous forme de suites. L'utilisation des calculateurs numériques utilisés en temps réel pour commander, piloter, guider...des procédés ou systèmes physiques qui par essence sont le plus souvent continus a donné naissance aux systèmes commandés échantillonnés (discrets/numériques).

Sans entrer dans les détails du fonctionnement des différents éléments, la commande par ordinateur, ou processeur, d'un procédé nécessite la mise en œuvre d'un certain nombre d'éléments (Figure (4-1)) :

- un actionneur, ou organe de commande qui reçoit les ordres du processeur à travers un convertisseur numérique-analogique,
- un capteur, ou organe de mesure qui transmet au processeur les informations recueillies sur le procédé, à travers un convertisseur analogique-numérique.

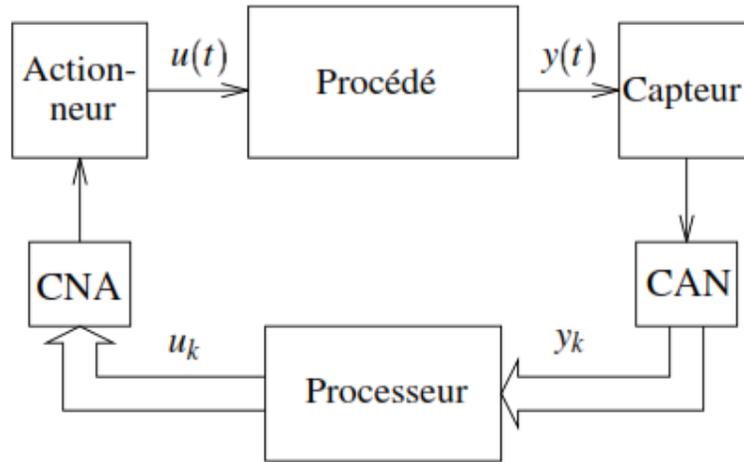


Figure (4-1) : Structure générale d'une commande de procédé par ordinateur

- ✓ Un processeur (calculateur) qui élabore la commande  $u_k$  et réalise l'échantillonnage.
- ✓ Des convertisseurs analogique-numériques, CAN<sup>1</sup>.
- ✓ Des capteurs ou organes de mesure qui transmettent au calculateur les informations recueillies sur le système continu, à travers les convertisseurs analogiques numériques,
- ✓ Des convertisseurs numérique-analogiques, CNA<sup>2</sup>.

Un convertisseur N/A consistera à maintenir constante sur l'intervalle  $[kT_e, (k+1)T_e]$  la commande soit :

$$u(t) = u(kT_e) \quad \forall t \in [kT_e, (k+1)T_e]$$

Un tel convertisseur est appelé Bloqueur d'Ordre Zéro (BOZ), de fonction de transfert :

$$B_0(p) = \frac{1 - e^{-T_e p}}{p}$$

## 4.2. ECHANTILLONNAGE D'UNE FONCTION CONTINUE.

### 4.2.1. DEFINITION

On appelle transformée en z d'un signal  $f(t)$  la transformée de Laplace  $F^*(p)$  du signal échantillonné  $f^*(t)$ , dans laquelle on effectue la substitution :

$$z = e^{T_e p} \quad (4-1)$$

L'échantillonnage d'un signal que nous noterons  $f^*(t)$  est le produit du signal causal

<sup>1</sup> CAN : Echantillonnage des variations mesurées sur le processus continu, transmis au calculateur.

<sup>2</sup> CNA : transforme le signal discret en signal continu (transmis au processus continu).

$f(t)$  par un peigne de Dirac d'une périodicité correspondante à la période d'échantillonnage.

$$f^*(t) = f(t) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k.T_e) \quad (4-2)$$

La fonction  $f^*(t)$  est une distribution constituée d'impulsions de Dirac aux instants d'échantillonnages et dont les 'surfaces' correspondent aux valeurs de  $f(t)$  à ces mêmes instants.

Notation :  $Z[F(p)]$  ou  $Z[f(t)]$

Pour trouver les valeurs numériques  $f(k.T_e)$  à un instant  $t = k.T_e$  il suffit d'intégrer l'impulsion de Dirac correspondante soit :

$$f(k.T_e) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \delta(t - k.T_e) \quad (4-3)$$

Sur la Figure (4-2) nous retrouvons les représentations des fonctions  $f(t)$  et  $f^*(t)$ .

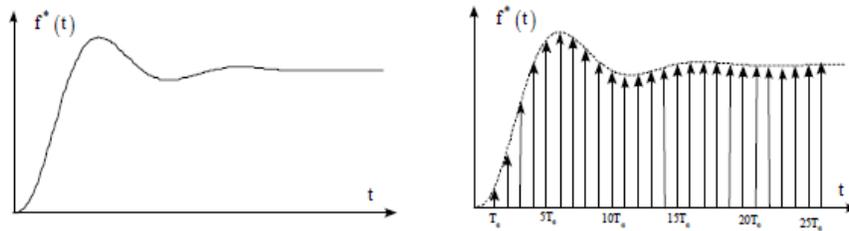


Figure (4-2) : Echantillonnage d'un signal continu

### 4.3. PROPRIETES DE LA TRANSFORMEE EN Z

Comme la transformée en z est la transformée de Laplace suivie d'un changement de variable, ses propriétés se déduisent de celles de la transformée de Laplace.

#### Linéarité

$$Z[af(t) + bg(t)] = aF(z) + bG(z) \quad (4-4)$$

Où a et b sont des constantes

Translations réelles

Retard de k périodes

$$Z[f(t - kT_e)U(t - kT_e)] = z^{-k}F(z) \quad (4-5)$$

Notez l'opérateur "retard"  $z^{-1}$

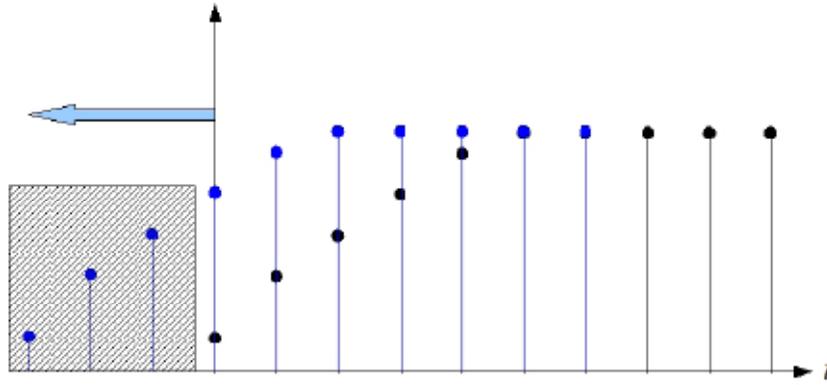


Figure (4-3) : Illustration de la propriété de l'avance.

Translation complexe

$$\mathcal{Z}[e^{-aT_e} f(t)] = \mathcal{Z}[F(p + a)] = F(ze^{-aT_e}) \quad (4-6)$$

Changement d'échelle en z

$$\mathcal{Z}[a^{-k} f(kT_e)] = F\left(\frac{z}{a}\right) \quad (4-7)$$

Théorème de la valeur finale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f^*(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(kT_e) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})F(z) \quad (4-8)$$

Théorème de la valeur initiale

$$\lim_{t \rightarrow 0} f^*(t) = \lim_{k \rightarrow 0} f(kT_e) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) \quad (4-9)$$

#### 4.4. FONCTIONS DE TRANSFERT EN Z

La restriction à des systèmes SISO, linéaires, invariants, au repos et échantillonnés rend possible l'utilisation de fonctions de transfert en z, plus simples à manipuler que la représentation par modèles d'état. Les fonctions de transfert seront généralement écrites sous forme de fonctions rationnelles de polynômes en l'opérateur d'avance z. On peut ainsi aisément écrire la réponse d'un signal filtré par une fonction de transfert, sans définir la transformée en z des signaux. L'opérateur d'avance z est à notre avis plus naturel que l'opérateur de retard  $z^{-1}$ ; en effet, les pôles et les zéros d'une fonction de transfert se définissent toujours par rapport à z. La transformée en  $\delta$  a l'avantage de conduire à une représentation mieux conditionnée numériquement, mais elle est peu répandue. Une fois la synthèse faite dans le domaine de la transformée en z, il est toujours possible, si des problèmes numériques se posent, de passer à une équation aux différences en  $\delta$  pour l'implantation du régulateur.

De la même manière que l'on associe à un système à temps continu, une fonction de transfert, par application de la transformation de Laplace à son équation différentielle, on peut associer à un système à temps discret, une fonction de transfert en  $z$ , par application de la transformation en  $z$  à son équation récurrente. Sous l'hypothèse que les conditions "initiales" sont nulles ( $y_0 = y_1 = \dots = y_{n-1} = u_0 = u_1 = \dots = u_{m-1} = 0$ ) il vient la relation suivante :

$$(a_0 + a_1z + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + a_nz^n)Y(z) = (b_0 + b_1z + \dots + b_{m-1}z^{m-1} + b_mz^m)U(z)$$

Soit encore :

$$Y(z) = \frac{N(z)}{D(z)}U(z) \quad (4-10)$$

Avec :

$$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1z + \dots + b_{m-1}z^{m-1} + b_mz^m}{a_0 + a_1z + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + a_nz^n} \quad (4-11)$$

qui est définie comme la **fonction de transfert** en  $z$  du système. Dans le cas général où les conditions initiales sont non nulles la représentation en  $z$  du système s'écrit plus exactement:

$$Y(z) = \frac{N(z)}{D(z)}U(z) + \frac{I(z)}{D(z)} \quad (4-12)$$

Où le polynôme  $I(z)$  ne dépend que des conditions initiales. Il influe sur la sortie du système sans modifier le comportement dû au signal d'entrée  $U(z)$ .

La factorisation du numérateur et du dénominateur conduit à la **forme pôles, zéros, gain** suivante :

$$G(z) = \frac{b_m (z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_m)}{a_n (z-p_1)(z-p_2)\dots(z-p_n)} \quad (4-13)$$

Avec :

$$p_{i=1\dots n} : \text{pôles} \quad z_{j=1\dots m} : \text{zéros} \quad k = \frac{b_m}{a_n} : \text{gain}$$

Par définition les **pôles** du système sont les racines du polynôme dénominateur et les **zéros** du système sont les racines du polynôme numérateur. Les uns et les autres ont par défaut des nombres soit réels soit complexes.

Certains auteurs préfèrent une **formulation en  $z^{-1}$**  de la fonction de transfert. On peut l'obtenir à partir de la formulation en  $z$  comme suit :

$$G(z) = \frac{b_m}{a_n} z^{m-n} \frac{1 + b_{m-1}^* z^{-1} + \dots + b_0^* z^{-m}}{1 + a_{n-1}^* z^{-1} + \dots + a_0^* z^{-n}} \quad (4-14)$$

Avec les notations suivantes :

$$b_j^* = \frac{b_j}{b_m} \quad a_i^* = \frac{a_i}{a_n} \quad (4-15)$$

Où  $z^{-1}$  représente l'opérateur "retard" qui est physiquement réaliste tandis que  $z$  suppose de prévoir les instants futurs. Bien entendu, les formulations en  $z$  et  $z^{-1}$  sont équivalentes.

L'écriture (4-15) fait apparaître non seulement le gain, les pôles, les zéros mais également un retard pur  $z^{m-n}$  entre une excitation en entrée du système et son effet sur la sortie.

Notons également que, comme dans le cas des systèmes à temps continu, le dénominateur de la fonction de transfert est appelé également **polynôme caractéristique** du système. Son degré  $n$  correspond à l'**ordre du système** et ses racines sont les pôles du système :

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = a_n (z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_n) \quad (4-16)$$

#### 4.4.1. THEOREME DE SHANNON

Parmi les préoccupations essentielles de l'échantillonnage, on a celle qui consiste à ne pas perdre d'informations lors de la discrétisation temporelle du signal continu. Pour que cela soit possible, une des conditions à remplir est que le signal  $e(t)$  que l'on doit échantillonner ait une **largeur spectrale** (exprimée en Hz ou rad/s) **finie**, on parle alors d'un *spectre de type passe-bas*. On rappelle que la largeur spectrale d'un tel signal est définie par l'intervalle  $[0, f_{\max}]$  où  $f_{\max}$  est la plus grande fréquence présente dans le spectre fréquentiel de ce signal.

Cette condition découle du phénomène de recouvrement (ou repliement) de spectre, pour préserver, lors de l'échantillonnage d'un signal  $e(t)$ , le contenu spectral de ce signal, la *fréquence d'échantillonnage*,  $f_e := 1/T_e$ , doit être supérieure au double de  $f_{\max}$ , la largeur spectrale du signal :

$$f_e > 2f_{\max}$$

En pratique, il est recommandé de choisir la fréquence d'échantillonnage dans une fourchette de l'ordre de 6 à 24 fois la fréquence de coupure du procédé.

#### Exemple :

Ainsi, pour un procédé d'ordre 1 :

$$G(p) = \frac{1}{1 + \tau p}$$

La fréquence de coupure est  $f_c = 1/(2\pi\tau)$ . La fréquence d'échantillonnage  $f_e = 1/T_e$  sera choisie telle que :

$$\frac{6}{2\pi\tau} < \frac{1}{T_e} < \frac{24}{2\pi\tau}$$

Soit approximativement :

$$\frac{\tau}{4} < T_e < \tau$$

#### 4.4.2. CALCULE DE LA FONCTION DE TRANSFERT ECHANTILLONNEE

Dans cette sous-section, la méthode de calcul qui permet à la donnée d'une fonction de transfert d'un système à temps continu de déduire le modèle en z du système à temps discret obtenu par échantillonnage est exposée. Elle se résume au théorème suivant.

##### Théorème

Soit un procédé continu modélisé par une fonction de transfert  $G(p)$ . Ce procédé, échantillonné suivant le schéma de la figure (4-4) admet une fonction de transfert en z telle que:

$$G(z) = Z[G(p)B_0(p)] = \frac{z-1}{z} Z\left[\frac{G(p)}{p}\right]$$

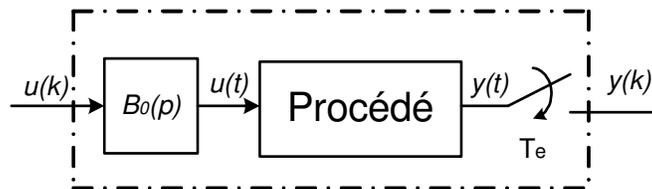


Figure (4-4) : Procédé échantillonné

##### Exemple

Considérons le système échantillonné représenté sur la figure (4-5) et pour lequel on veut calculer la fonction de transfert en z.

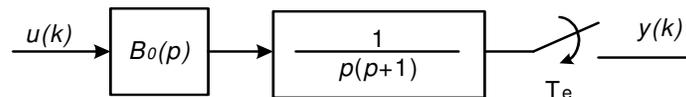


Figure (4-5) : Système échantillonné

La fonction de transfert continue étant :

$$G_c(p) = \frac{1}{p(p+1)}$$

La fonction de transfert échantillonnée est donnée par :

$$G_d(z) = \mathcal{Z}[G(p)B_0(p)] = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left[\frac{G_c(p)}{p}\right]$$

Avec la décomposition en éléments simples suivante:

$$\frac{G_c(p)}{p} = \frac{1}{p^2(p+1)} = \frac{-1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p+1}$$

En utilisant le tableau (4-1), il vient :

$$G_d(z) = \frac{z-1}{z} \left[ -\frac{z}{z-1} + \frac{T_e z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-e^{-T_e}} \right]$$

Soit :

$$G_d(z) = K \frac{(z-b)}{(z-1)(z-a)} \text{ avec } \begin{cases} K = e^{-T_e} - 1 + T_e \\ a = e^{-T_e} \\ b = 1 - \frac{T_e(1-e^{-T_e})}{T_e - 1 + e^{-T_e}} \end{cases}$$

Application numérique :

Soit  $T_e = 1\text{sec}$ . Il vient :

$$G_d(z) = 0.3679 \frac{z + 0.7183}{(z-1)(z-0.3679)}$$

Transformée de Laplace $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$	Signal continu $f(t)$	Signal échantillonné $f_k$	Transformée en z $f(z) = \mathcal{Z}[f_k]$
1	$\delta(t)$	$f_0 = 1, \forall k \neq 0 \quad f_k = 0$	1
$e^{-ap}$	$\delta(t-a)$		
$e^{-hT_s p}$	$\delta(t-hT_s)$	$f_h = 1, \forall k \neq h \quad f_k = 0$	$z^{-h}$
$\frac{1}{p}$	$u(t)$	1	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{p^2}$	$t$	$kT_s$	$T_s \frac{z}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{p^3}$	$t^3$	$k^2 T_s^2$	$T_s^2 \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
$\frac{1}{p+a}$	$e^{-at}$	$e^{-akT_s}$	$\frac{z}{z-e^{-aT_s}}$
$\frac{1}{(p+a)^2}$	$te^{-at}$	$kT_s e^{-akT_s}$	$\frac{T_s z e^{-aT_s}}{(z-e^{-aT_s})^2}$
$\frac{b-a}{(p+a)(p+b)}$	$e^{-at} - e^{-bt}$	$e^{-akT_s} - e^{-bkT_s}$	$\frac{z(e^{-aT_s} - e^{-bT_s})}{(z-e^{-aT_s})(z-e^{-bT_s})}$
		$a^k$	$\frac{z}{z-a}$
		$(-a^k)$	$\frac{z}{z+a}$
$\frac{a}{p(p+a)}$	$1 - e^{-at}$	$1 - e^{-akT_s}$	$\frac{z(1 - e^{-aT_s})}{(z-1)(z-e^{-aT_s})}$
$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\sin(\omega t)$	$\sin(\omega kT_s)$	$\frac{z \sin(\omega T_s)}{z^2 - 2z \cos(\omega T_s) + 1}$
$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\cos(\omega t)$	$\cos(\omega kT_s)$	$\frac{z(z - \cos(\omega T_s))}{z^2 - 2z \cos(\omega T_s) + 1}$

TAB (4.1) - Signaux échantillonnés et leurs transformées de Laplace.

## 4.5. SYSTEME A TEMPS DISCRET

Un système à temps discret se définit comme un opérateur entre deux signaux à temps discret. Considérons le système représenté sur la figure (4-6), où  $u(k)$  représente le terme général de la séquence d'entrée et  $y(k)$  le terme général de la séquence de sortie. Un modèle entrée-sortie, appelé aussi modèle externe, ne fait intervenir que les variables d'entrée  $u(k)$  et de sortie  $y(k)$ .

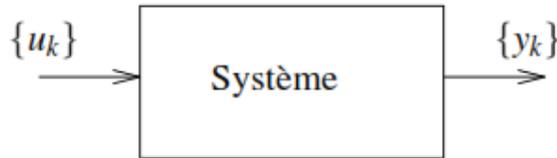


Figure (4-6) : Système à temps discret

Nous allons aborder dans ce cours deux types de modèles externes, complémentaires l'un de l'autre, que sont les équations récurrentes et les fonctions de transfert.

### 4.5.1. EQUATION RECURRENTE

La modélisation initiale d'un système à temps discret conduit souvent à l'écriture d'une équation récurrente entre différents termes des séquences d'entrée et de sortie. Une équation récurrente, pour une transmittance permet d'exprimer la sortie  $y(k)$  à l'instant courant en fonction de l'entrée  $u(k)$  au même instant et aux échantillons passés de la sortie et de l'entrée.

Le fait d'exprimer par convention, l'instant courant par rapport au passé nécessite que la fonction de transfert soit mise avec des puissances négatives de  $z$ .

Prenons comme forme générale d'un système discret :

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (4-17)$$

La forme générale d'une équation récurrente linéaire peut être donnée par :

$$Y(z) = b_0 U(z) + b_1 z^{-1} U(z) + b_2 z^{-2} U(z) + b_3 z^{-3} U(z) + \dots + b_m z^{-m} U(z) - a_1 z^{-1} Y(z) - a_2 z^{-2} Y(z) - a_3 z^{-3} Y(z) - \dots - a_n z^{-n} Y(z)$$

En identifiant les termes correspondants aux mêmes instants d'échantillonnage nous obtenons :

$$\left| \begin{array}{l} y(0) = b_0 u(0) \\ y(1) = b_0 u(1) + b_1 u(0) - a_1 y(0) \\ y(2) = b_0 u(2) + b_1 u(1) + b_2 u(0) - a_1 y(1) - a_2 y(0) \\ \vdots \\ y(k) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \dots + b_m u(k-m) - a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) - \dots - a_n y(k-n) \end{array} \right.$$

Cette dernière relation constitue l'équation récurrente qui permet le calcul de la sortie pour n'importe quelle entrée.

Comme nous venons de le voir (dans les travaux dirigés), l'équation récurrente issue d'une transmittance en z permet de calculer la sortie pour n'importe quelle entrée. Pour la transformée de Laplace, il est clair que le calcul de la sortie nécessite un développement algébrique spécifique, nous mesurons là le grand intérêt de la transformée en z.

### 4.6. STABILITE DES SYSTEMES DISCRETS

Si  $z = e^{pT_e}$ , avec  $p$  complexe, alors la partie réelle de  $p$  est strictement négative si et seulement si le module de  $z$  est strictement inférieur à un. Cela signifie géométriquement que  $z = e^{pT_e}$  envoie le demi-plan  $\{p: Re(p) < 0\}$  à l'intérieur du cercle unité  $\{z: |z| < 1\}$ .

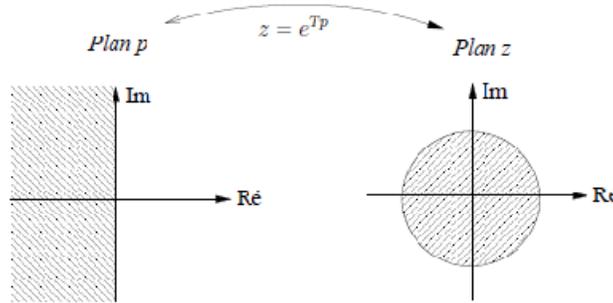


Figure (4-7) : Propriété géométrique

**Théorème :**

Un système numérique est stable si et seulement si tous les pôles de sa fonction de transfert sont situés à l'intérieur du cercle de rayon 1. Il est d'autant plus stable (amorti) que les pôles sont plus à l'intérieur du cercle.

Ceci est prévisible du fait de la relation de passage continu-discret :  $z = e^{pT_e}$  :

(Stabilité analogique)  $Re(p_i) < 0 \Leftrightarrow |z_i| < 1$  (Stabilité numérique).

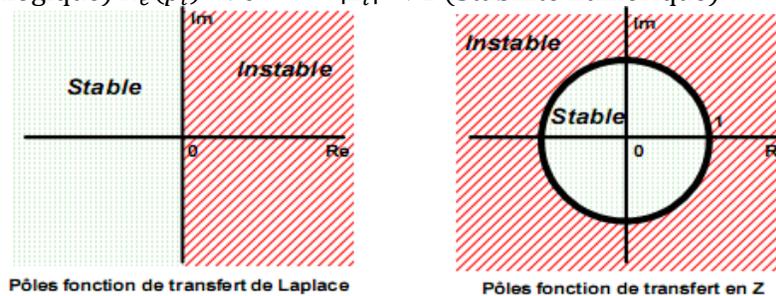


Figure (4-8) : Zone de stabilité

## Commande adaptative

### 5.1. INTRODUCTION :

Les variations paramétriques d'un processus réel dans le temps suivant les changements de l'environnement sont influés sur la régulation du système bouclé avec des contrôleurs à paramètres fixe. Dans ces conditions, il faut trouver un régulateur qu'il est le pouvoir de l'adaptation devant ces variations, parmi ces régulateurs on trouve les régulateurs adaptatifs qui sont basés essentiellement sur l'identification en ligne des paramètres du procédé. Ces techniques d'estimation sont connues depuis les années soixante. Elles permettent d'obtenir un modèle mathématique qui représente le plus fidèlement possible le comportement dynamique d'un processus. Donc, la commande adaptative fait partie d'un ensemble de techniques destinées à ajuster automatiquement les paramètres du correcteur des systèmes de commande lorsque les caractéristiques du processus et les perturbations sont inconnues ou varient dans le temps. Par principe, ce type de commande est non-linéaire puisqu'il comporte deux boucles de contre-réaction imbriquées : la boucle de correction et la boucle d'adaptation. Comme les preuves de stabilité sont extrêmement difficiles à établir, on utilise une générale de commande adaptative définie à partir du théorème de stabilité de Landau. Le début des recherches sur la commande adaptative (destinées à l'aéronautique) date des années 1950. Cependant à cause de l'insuffisance de résultats théoriques et de l'absence de moyens techniques performants, ces recherches furent très vite abandonnées. Les progrès rapides de l'électronique et les résultats théoriques fondamentaux établis dans les années 1960 (variables d'état, analyse de la stabilité, commande stochastique) devaient susciter de nouveau l'intérêt pour ce sujet durant les années 1970. Depuis lors des études considérables ont été réalisées et d'aujourd'hui elles sont mises en œuvre à l'aide de microprocesseurs, micro-ordinateurs ou circuits spécialisés (Digital Signal Processors). Concernant la commande adaptative on a choisi la méthode des moindres carrés récursive pour le bloc d'estimation paramétrique. Le principe de cette technique d'identification est la détermination d'un vecteur des inconnus à partir de l'information des signaux d'entries  $u(t)$  et les sorties mesurées  $y(t)$  du système.

## 5.2. DIFFERENTS TOPOLOGIES DE LA COMMANDE ADAPTATIVE

La commande adaptative est un ensemble de techniques destinées à ajuster automatiquement les paramètres du correcteur des systèmes de commande lorsque les caractéristiques du processus et les perturbations sont inconnues ou varient dans le temps. Son utilisation requiert la mesure d'un certain indice de performance qui est comparé à l'indice désiré. Suivant l'écart obtenu, le mécanisme d'adaptation (algorithme d'adaptation) modifie les paramètres du correcteur ajustable afin de maintenir l'indice de performance à la valeur désirée. Le principe des systèmes de la commande adaptative est illustré par la figure (5-1).

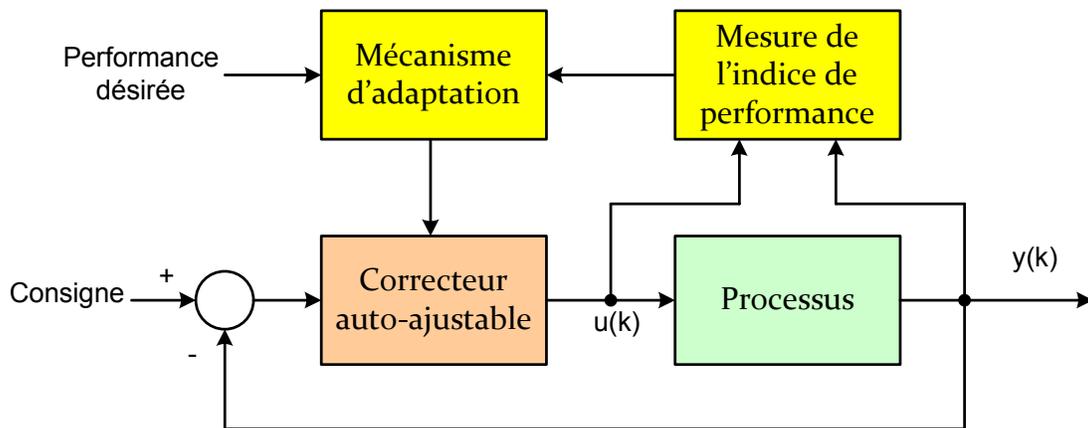


Figure (5-1) : Principe des systèmes de commande adaptative

La commande adaptative est dite directe (explicite), si les paramètres du correcteur sont évalués directement, et indirecte (implicite), si les paramètres du correcteur sont calculés après l'estimation des paramètres du processus. Cependant, il est toujours possible de passer d'un type de commande à l'autre en reparamétrant le problème.

Il existe essentiellement trois approches de la commande adaptative.

### 5.2.1. COMMANDE ADAPTATIVE A GAIN PROGRAMME

Cette méthode suppose que les non-linéarités sont connues, car il n'existe pas de correction pour compenser une programmation incorrecte (fonctionnement en boucle ouverte). Elle a cependant l'avantage d'ajuster rapidement les paramètres du correcteur lors de changements rapides de la dynamique du processus (voir la figure (5-2)).

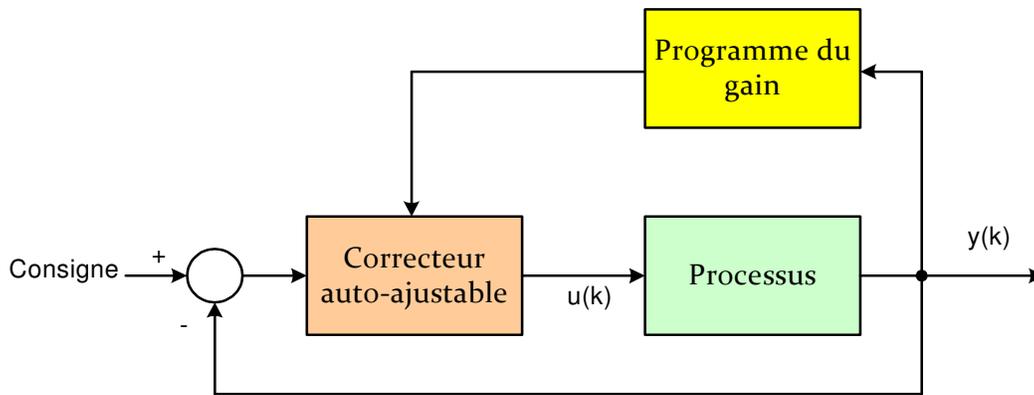


Figure (5-2) : Commande adaptative à gain préprogrammé.

### 5.2.2. COMMANDE ADAPTATIVE A CORRECTEUR AUTO-AJUSTABLE

Cette commande comporte une boucle interne, la boucle classique processus-correcteur, et une boucle externe comprenant un estimateur (identification des paramètres du processus) et un mécanisme d'adaptation qui minimise l'erreur entre la sortie du processus et son estimation comme le montre la figure (5-3).

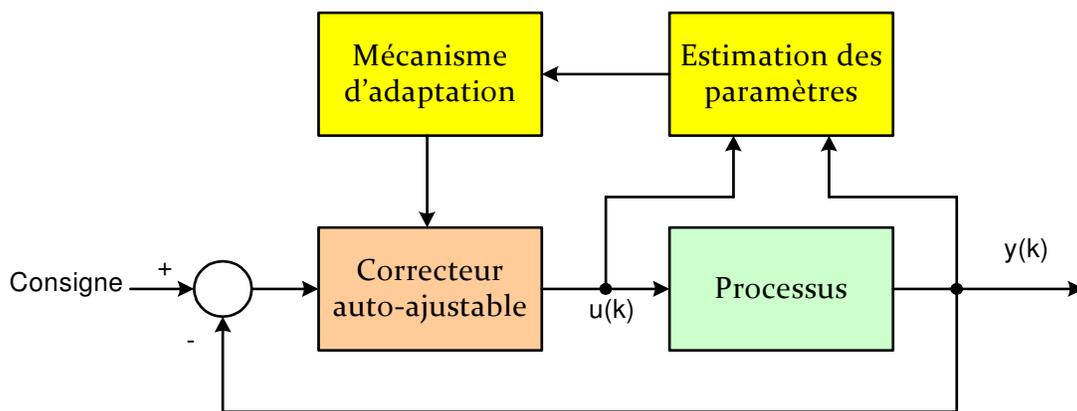


Figure (5-3) : correcteur auto-ajustable.

### 5.2.3. COMMANDE ADAPTATIVE A MODELE DE REFERENCE (CAMR)

Le comportement dynamique du processus est défini par le modèle de référence et les paramètres du correcteur sont ajustés par la boucle externe de façon à minimiser l'erreur de sortie processus-modèle. Pour la description mathématique du modèle de référence et du système ajustable deux méthodes sont généralement utilisées : les équations d'état ou les relations entrée-sortie. C'est la deuxième, appliquée à des systèmes discrets, qui sera considérée (voir la figure (5-4)).

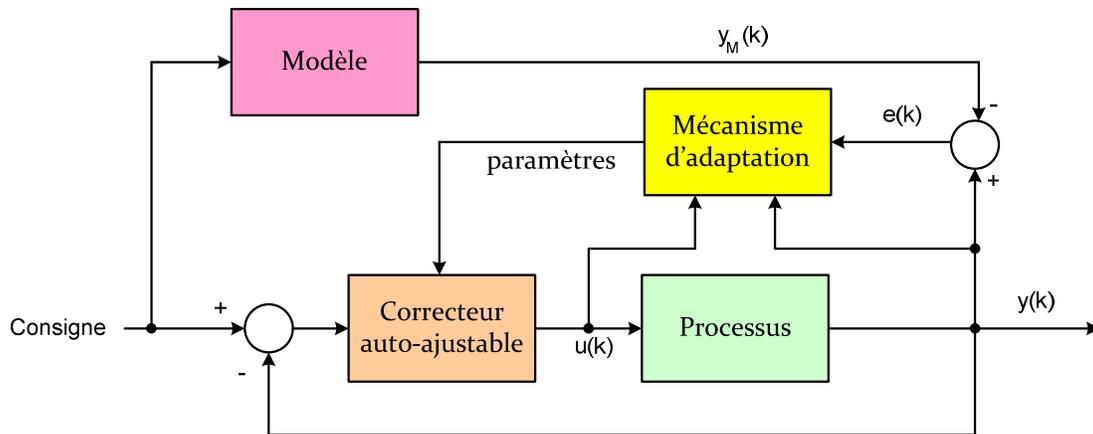


Figure (5-4) : Commande adaptative à modèle de référence.

A l'origine la CAMR traitait les problèmes d'asservissement alors que le correcteur auto-ajustable était destiné aux problèmes régulation, c'est pourquoi l'aspect de la régulation, pourtant inhérent à tout système de commande, a souvent été ignoré dans les études de CAMR.

### 5.3. IDENTIFICATION PARAMETRIQUE PAR L'ALGORITHME DES MOINDRES CARRÉS RECURSIFS (MCR) :

#### 5.3.1. INTRODUCTION A L'ESTIMATION

Estimer, c'est obtenir un ordre de grandeur sur certaines quantités d'un système à partir de mesures d'autres quantités de ce même système. Le problème d'estimation que nous allons considérer dans ce chapitre. Soit un système sur lequel on a effectué des mesures  $y = (y_1, \dots, y_p)$  et un modèle  $\mathcal{M}(p)$  dépendant d'un vecteur de paramètres  $\theta$ . Il nous faut estimer  $\theta$  tel que les sorties  $y_m(p)$  générées par  $\mathcal{M}(p)$  ressemblent le plus possible à  $y$ .

#### 5.3.2. Méthode des moindres carrés

Les paramètres d'un processus physique réel sont changés à cause des variations de l'environnement. Dans ce cas ces paramètres doivent être estimés en ligne. Le principe de l'algorithme des moindres carrés récursifs consiste à minimiser un critère quadratique au carré de l'erreur, entre l'entrée et la sortie du modèle comme le montre la figure (5-5).

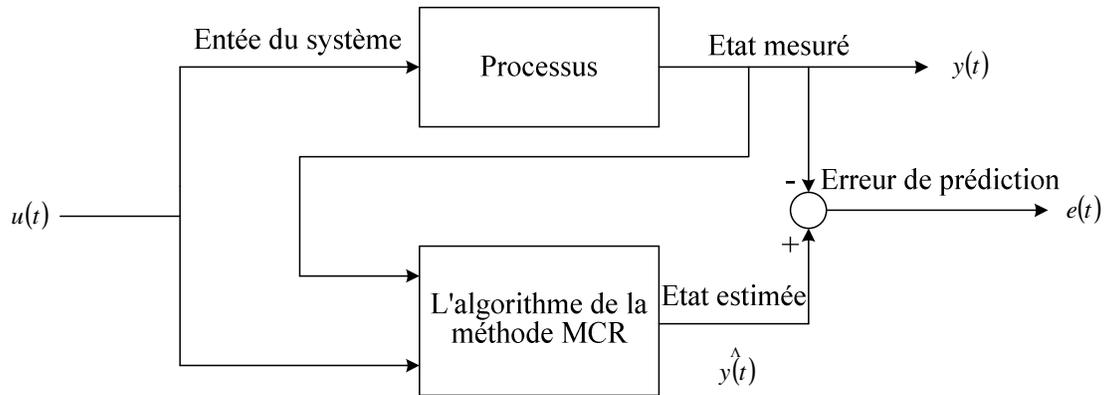


Figure (5-5) : Le schéma de principe pour l'indentification MCR.

Considérons le processus mono-entrée mono-sortie, linéaire-invariant-discret, décrit par :

$$A(z^{-1})y(k) = z^{-d}B(z^{-1})u(k) \quad (5-1)$$

Où  $z^{-1}$  est l'opérateur retard et  $d > 0$  le retard du processus

$$A(z^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^n a_i z^{-i} = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}$$

$$B(z^{-1}) = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i z^{-i} = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}; \quad b_0 \neq 0$$

La sortie à l'instant k est donnée par :

$$y(k) = \theta^T \Phi(k-d) \quad (5-2)$$

Où  $\theta^T = [a_1, a_2, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m]$

$$\Phi^T(k-d) = [-y(k-1), -y(k-2), \dots, y(k-n), u(k-d), u(k-d-1), u(k-d-m)]$$

Le critère quadratique à minimiser a pour expression :

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N e_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (y(k) - \theta(k)^T \Phi(k-1))^2 \quad (5-3)$$

Où :

$\Phi$  : est le vecteur de mesure.

$\theta$  : est le vecteur à estimer.

$y$  : est la sortie du système.

Le minimum du critère J est obtenu par le jeu de paramètres qui annule sa dérivée dans l'espace paramétrique.

$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} = \sum_{k=1}^N (y(k) - \theta(k)^T \Phi(k-1)) (-\Phi(k-1)) = 0 \quad (5-4)$$

Ceci donne :

$$\sum_{k=1}^N (\Phi(k-1)y(k)) - \sum_{k=1}^N \Phi(k-1)\Phi(k-1)^T \theta(k) \quad (5-5)$$

Donc le vecteur des coefficients à estimer est donné comme suit :

$$\theta(k) = (\sum_{k=1}^N \Phi(k-1)\Phi(k-1)^T)^{-1} (\sum_{k=1}^N \Phi(k-1)y(k)) \quad (5-6)$$

L'équation de vecteur à estimer s'écrit par :

$$\theta(k) = P(k-1) (\sum_{k=1}^N \Phi(k-1)y(k)) \quad (5-7)$$

Avec :

$P(k)$  : la matrice de variance de l'erreur d'estimation.

Où cette matrice est donnée par :

$$P(k) = (\sum_{k=1}^N \Phi(k)\Phi(k)^T)^{-1} \quad (5-8)$$

En utilisant le lemme d'inversion de matrice suivant :

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1} \quad (5-9)$$

La relation récursive de la matrice covariance est :

$$P(t) = P(t-1) - P(t-1)\Phi(t-1) \left( I + \Phi(t-1)P(t-1)\Phi(t-1)^T \right)^{-1} \Phi(t-1)P(t-1) \quad (5-10)$$

À partir de l'expression précédente du vecteur paramètres  $\theta(t)$ , on peut aboutir à sa forme récursive.

$$\theta(t) = P(t) \sum_{k=1}^t \Phi(k-1)y(k) = P(k)\Phi(k-1) = p(t)(\Phi(k-1)y(t) + \sum_{k=1}^t \Phi(k-1)y(k)) \quad (5-11)$$

D'où :

$$\theta(t) = P(t)(P(t-1)\theta(t-1) + \Phi(k-1)y(t)) \quad (5-12)$$

Or:

$$P(t) = P(t-1) + \Phi(k-1)\Phi(k-1)^T \quad (5-13)$$

Finalement on obtient l'algorithme des moindres carrés récursifs comme suit :

$$\begin{cases} \hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + K(t) (y(t) - \Phi(k)^T \hat{\theta}(t-1)) \\ K(t) = \frac{P(t-1)\Phi(k-1)}{I + \Phi(k-1)^T P(t-1)\Phi(k-1)} \\ P(t) = (I + K(t-1)\Phi(k-1))P(t-1) \end{cases} \quad (5-14)$$

Où :

$I$  : la matrice identité.

$K(t)$  : gain de Kalman.

**Remarque :**

L'algorithme des MCR donne de moins en moins de poids aux nouvelles mesures, il ne convient donc pour estimer des paramètres variables dans le temps. Pour obtenir un

algorithme capable de suivre les variations des paramètres, le critère à facteur d'oubli suivant est utilisé.

#### 5.4. L'ALGORITHME DE MCR AVEC LE FACTEUR D'OUBLI

Si le système est non stationnaire (c'est-à-dire si ses paramètres varient dans le temps), alors l'estimateur moindres carrés tel que nous l'avons défini jusqu'à présent ne convient pas. Il est nécessaire d'éliminer l'influence des anciennes données du vecteur d'observation pour que l'algorithme soit capable de suivre les variations éventuelles du processus. On va utiliser un critère affectant le poids maximal au dernier échantillon et permettant d'oublier progressivement les anciennes valeurs à un facteur d'oubli.

Le critère quadratique  $J$  défini par :

$$J_{\lambda}(\theta) = \sum_{k=1}^N \lambda^{N-k} (y(k) - \theta(k)^T \Phi(k-1))^2 \quad (5-15)$$

Plus le facteur d'oubli est voisin de zéro, plus on oublie rapidement les anciennes valeurs. Donc les valeurs typiques pour  $\lambda$  sont comprises entre 0.85 et 0.995.

L'expression de l'algorithme des moindres carrés récursive avec le facteur d'oubli s'écrit par :

$$\begin{cases} \hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + K(t) (y(t) - \Phi(k)^T \hat{\theta}(t-1)) \\ K(t) = \frac{P(t-1)\Phi(k-1)}{\lambda + \Phi(k-1)^T P(t-1)\Phi(k-1)} \\ P(t) = (I + K(t-1)\Phi(k-1)) \frac{P(t-1)}{\lambda} \end{cases} \quad (5-16)$$

Les gains d'adaptation à facteur d'oubli ont une capacité de poursuite (convergence exponentielle) dans le cas où les signaux d'entrée-sortie sont 'excitants'. Or cette condition n'est pas réalisée lorsque le régime stationnaire est atteint. Dans ce cas le gain d'adaptation tend à croître exponentiellement et conduit à 'l'explosion' du vecteur des paramètres. *Il est fondamental de ne pas utiliser un algorithme à facteur d'oubli dans le cas où les signaux ne sont pas 'excitants'.*

#### 5.5. INITIALISATION DE L'ALGORITHME MCR

L'algorithme des moindres carrés récursifs doit être initialisé de  $P(0)$  et  $\theta(0)$ . Si on ne dispose d'aucune information, on peut choisir  $\theta(0)=0$  sans porter préjudice à la convergence de l'algorithme. Par sa définition  $P(t) = (\Psi(t)^T \Psi(t))^{-1}$ .  $P(t)$  représente la

matrice de covariance de  $\theta(t)$  donc sa précision, les éléments situés sur la diagonale de  $P(t)$  représentent la variance instantanée de chaque paramètre. Cette remarque nous permet alors  $P(0)$  si on n'a aucune information sur  $\theta$  cela signifie que la variance de chaque paramètre est infinie on peut alors choisir  $P = \alpha I$  (matrice diagonale), la taille  $\alpha$  des éléments de la diagonale dépend de la confiance sur les valeurs initiales des paramètres  $\theta(0)$ .

# Bibliographie

- [1] C. Vachier, *Représentation d'état et commande dans l'espace d'état*, notes de cours, UNIVERSITÉ PARIS XII-VAL DE MARNE, 2007.
- [2] R.C. Dorf, R.H. Bishop, *Modern Control Systems*, Addison Wesley Publishing Company, Seventh Edition, 1995.
- [3] J. Bordebeuve-Guibé, *Représentation d'état des systèmes linéaires*, Polycopié de cours, ENSICA, 1997.
- [4] R.C. Dorf, R.H. Bishop, *Modern Control Systems*, Addison Wesley Publishing Company, Twelfth edition, 2011.
- [5] A. Tewari, *Modern Control Design With MATLAB and SIMULINK*, Indian Institute of Technology, Kanpur, India, 2002.
- [6] Y. Granjon, *AUTOMATIQUE Systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état*, 2<sup>e</sup> édition, Dunod, Paris, 2010.
- [7] O. H. Bosgra H. Kwakernaak, *Design Methods for Control Systems*, Notes for a course of the Dutch Institute of Systems and Control Winter term 2000–2001.
- [8] A. K. Mandal, *INTRODUCTION TO CONTROL ENGINEERING: Modeling Analysis and design*, Daryaganj, New Delhi – 110002, 2006.
- [9] E. Laroche, *Commande Optimale*, Polycopié de cours, Ecole Nationale Supérieure de Physique de Strasbourg, 2009-2010.
- [10] D. Xue, Y. Q. Chen, D. P. Atherton *Linear Feedback Control Analysis and Design with MATLAB*, Springer-Verlag, July 3, 2002.
- [11] L. C. Evans, *An Introduction to Mathematical Optimal Control Theory*, Version 0.2.
- [12] D. Alazard, *Régulation LQ/LQG*, Notes de cours.
- [13] D. Alazard, *Introduction au filtre de Kalman*, Notes de cours, Janvier 2005.
- [14] H. B. Merabet, A. Tahri et A. Allali, *Commande Multi-Variable d'un Compensateur Statique de Puissance Réactive Par L'utilisation d'un Régulateur Linéaire Quadratique LQR*, 2<sup>èmes</sup> Journées Internationales d'Electrotechnique, de Maintenance et de Compatibilité Electromagnétique à l'ENSET Oran, Conférence Internationale JIEMCEM' 2010, 25-27 Mai 2010.
- [15] R.E. Kalman, *Contributions to the theory of optimal control*, Bol. Sociedad Mat. Mex., 1960.
- [16] S. Tliba, M. Jungers et Y. Chitour, *COMMANDE DES PROCESSUS ASSERVISSEMENTS NUMÉRIQUES*, Notes de cours, Université Paris-Sud XI - ENS de Cachan, 2005.

[17] J.M Retif, *AUTOMATIQUE REGULATION*, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, Edition 2008.

[18] D. Peaucelle, *SYSTEMES A TEMPS DISCRET Commande numérique des procédés*, Notes de cours, Ecole Nationale des Sciences Appliquées, 7 avril 2003.

[19] Y. B. ENSICA, *Commande des systèmes par calculateur*, Notes de cours, 2007.

[20] J. L. Gonzales, *Commande Adaptative à Modèle de Référence de Systèmes Discrets*, Notes de cours, EUROPEAN ORGANIZATION FOR NUCLEAR RESEARCH, 8 Novembre 1988.

[21] I. D. Landau and G. Zito, *Digital Control Systems Design, Identification and Implementation*, Springer-Verlag London Limited 2006.

[22] H. Merabet Boulouiha, *Commande adaptative d'un compensateur statique de puissance réactive de type avancé*, *Thèse de Magistère*, Université des sciences et de la technologie Mohamed Boudiaf USTO-MB, Soutenu en 2009.