

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Maritime

Thèse de Doctorat en Sciences

Spécialité : Génie Maritime

Option : Energétique

Présentée par : **Mr.MILOUD Abdelkrim**

**Calcul de l'échange thermique dans une
conduite tournante. Application au
refroidissement des pales de turbines.**

Devant le jury composé de :

Pr. Imine Omar	Encadreur	USTO-MB
Pr. Mokhtari Abdellah	Président	USTO-MB
Pr. Draoui Belkacem	Examineur	Université de Béchar
Pr. Mehdaoui Razli	Examineur	Université de Béchar
Pr. Bouzit Mohamed	Examineur	USTO-MB
Dr.Dellil Ahmed Zineddine	Examineur	Université d'Oran

Année Universitaire 2014 – 2015

Table des Matières

Résumé	i
Liste des figures	ii
Liste des tableaux	iii
Nomenclature	iv
Chapitre 1 : Introduction	1
Chapitre 2 : Analyse bibliographique	5
2.1 Volet expérimental	5
2.2 Volet numérique	8
Chapitre 3 : Modélisation numérique	11
3.1 Introduction	11
3.2 Formulation du problème	12
3.3 Equations générales	14
3.4 Modèles de turbulence	15
3.4.1 Modèle de turbulence $k - \omega$ SST	18
3.4.2 Modèle de turbulence RSM	22
3.5 Code « Fluent »	26
3.5.1 Implémentation sous « Fluent »	26
3.5.2 Procédure sous « Fluent »	27
Chapitre 4 : Procédure de calcul et résultats numériques	31
4.1 Description géométrique des canaux testés	31
4.2 Procédure de calcul	32
4.3 Maillage	33

4.4 Résultats et discussion **36**

Chapitre 5 : Conclusion **44**

Références bibliographiques

Annexe

Résumé

Dans cette thèse, les résultats des simulations numériques de l'écoulement turbulent 3D avec transfert de chaleur sont présentés pour le cas de deux canaux en U tournant et de section rectangulaire. Le but de cette investigation est d'étudier l'effet des murs ondulés de la partie chauffée sur l'amélioration du refroidissement, en particulier l'influence de la longueur d'onde. Les calculs ont été effectués pour un nombre de Reynolds fixé à 10 000, deux valeurs du nombre de la rotation ($Ro = 0.0$ à 0.14) et un rapport la densité limité à 0.13 .

Dans ces simulations, le code ANSYS FLUENT a été utilisé pour résoudre les équations de Reynolds exprimant des relations entre les différents champs des variables moyennées dans le temps. Les performances du modèle k-oméga SST et le modèle RSM sont évalués à travers une comparaison des résultats numériques obtenus pour chaque modèle et les données expérimentales et numériques disponibles. Dans cette thèse, les prédictions détaillées de température moyenne, du champ de l'écoulement secondaire et les distributions du Nusselt local sont présentées. Il s'avère que la configuration ondulée exhorte davantage l'échange de chaleur à condition de réduire la vitesse du fluide caloporteur à l'intérieur du canal.

Mots clefs : Refroidissement des pales - Parois ondulées - Modèles k-oméga SST et RSM - Code Fluent – Effet de rotation

Abstract

In this thesis, the results of numerical simulations of turbulent flow 3D heat transfer are presented for the case of two channels U turn and rectangular. The purpose of this investigation was to study the effect of the corrugated walls of the heated portion on the improvement of cooling, in particular the influence of the wavelength. The calculations were performed for a Reynolds number of 10,000 set at two values of the number of rotation ($Ro = 0.0$ to 0.14) and a report of limited density to 0.13 .

In these simulations, ANSYS FLUENT code was used to solve the Reynolds equations expressing the relations between the different fields averaged variables over time. Model performance k-omega SST and model RSM are evaluated through a comparison of the numerical results obtained for each model and the experimental and numerical data. In this thesis, detailed average temperature predictions, the scope of the secondary flow and distributions of the local Nusselt are presented. It turns out that the corrugated configuration further urges the heat exchange provided to reduce the velocity of the coolant within the channel.

Keyword: Cooling blades - corrugated walls - Models k-omega SST and RSM - Fluent Code - Rotation Effect

Liste des figures

Fig. (2.1)	Equipement expérimental et cavité test	7
Fig. (2.2)	Cavité test avec partitions sur la paroi chaude	10
Fig. (3.1)	Illustration de la configuration géométrique de la cavité	16
Fig. (4.1)	Élément de discrétisation	38
Fig. (4.2)	Génération de maillage d'une cavité avec trois ondulations	47
Fig. (4.3)	Algorithme SIMPLE	50
Fig. (4.4)	Surface élémentaire de la paroi	55

Fig. (5.1)	Comparaison de la composante verticale de la vitesse à $y/H = 0.5$ pour la cavité carrée, $Ra = 1.58 \times 10^9$ et $\phi = 90^\circ$.	58
Fig. (5.2)	Comparaison de la température à $y/H = 0.5$ pour la cavité carrée, $Ra = 1.58 \times 10^9$ et $\phi = 90^\circ$.	58
Fig. (5.3)	Comparaison de l'énergie cinétique à $y/H = 0.5$ pour la cavité carrée, $Ra = 1.58 \times 10^9$ et $\phi = 90^\circ$.	59
Fig. (5.4)	Comparaison du nombre de <i>Nusselt</i> local le long de paroi chaude pour la cavité carrée, $Ra = 1.58 \times 10^9$ et $\phi = 90^\circ$.	60
Fig. (5.5)	Vecteur vitesse	61
Fig. (5.6)	Lignes isothermes	61
Fig. (5.7)	Influence du maillage sur l'évolution de la vitesse verticale (a) et l'évolution de la température (b) près de la paroi chaude, $y/H = 0.5$, $Ra = 1.58 \times 10^9$ et $\phi = 90^\circ$	63
Fig. (5.8)	Influence du maillage sur la distribution du nombre de Nusselt local le long de paroi chaude de la cavité ondulée, $Ra = 1.58 \times 10^9$ et $\phi = 90^\circ$.	63
Fig. (5.9)	Lignes de courant et lignes isothermes, $\phi = 90^\circ$	64
Fig. (5.10)	Vecteurs vitesse pour la cavité ondulée, $\phi = 90^\circ$	65
Fig. (5.11)	Lignes de courant et lignes isothermes, $\phi = 100^\circ$	66
Fig. (5.12)	Lignes de courant et lignes isothermes, $\phi = 110^\circ$	66
Fig. (5.13)	Lignes de courant et lignes isothermes, $\phi = 120^\circ$	67
Fig. (5.14)	Lignes de courant et lignes isothermes, $\phi = 130^\circ$	68
Fig. (5.15)	Lignes de courant et lignes isothermes, $\phi = 140^\circ$	69
Fig. (5.16)	Lignes de courant et lignes isothermes, $\phi = 150^\circ$	69
Fig. (5.17)	Lignes de courant et lignes isothermes, $\phi = 160^\circ$	70
Fig. (5.18)	Lignes de courant et lignes isothermes, $\phi = 170^\circ$	71
Fig. (5.19)	Lignes de courant et lignes isothermes, $\phi = 180^\circ$	72
Fig. (5.20)	Distribution de l'énergie cinétique turbulente et son taux de	73

dissipation pour la cavité ondulée, $Ra = 1.58 \times 10^9$ et $\phi = 90^\circ$.

- Fig. (5.21) Comparaison de l'énergie cinétique turbulente à $y/H = 0.5$ pour différent angles d'inclinaison, $Ra = 1.58 \times 10^9$ et $\phi = 90^\circ$. 74
- Fig. (5.22) Comparaison de la viscosité turbulente à $y/H = 0.5$, $Ra = 1.58 \times 10^9$ et $\phi = 90^\circ$. 74
- Fig. (5.23) Comparaison du nombre de *Nusselt* local le long de la paroi ondulée chaude, $Ra = 1.58 \times 10^9$ et $\phi = 90^\circ$. 75
- Fig. (5.24) Comparaison des lignes isothermes, $\phi = 90^\circ$ 76
- Fig. (5.25) Effet de l'angle d'inclinaison sur la distribution du nombre de *Nusselt* local, $Ra = 1.58 \times 10^9$ et $\phi = 90^\circ$. 77
- Fig. (5.26) Distribution du nombre de *Nusselt* moyen en fonction de l'angle d'inclinaison, $Ra = 1.58 \times 10^9$ 78
- Fig. (5.27) Effet du nombre de *Rayleigh* sur l'évolution du nombre de *Nusselt* moyen, $\phi = 90^\circ$ 79
- Fig. (5.28) Effet de l'amplitude sur l'évolution du nombre de *Nusselt* local, $Ra = 1.58 \times 10^9$ et $\phi = 90^\circ$. 80

Liste des tableaux

Tab. (2.1)	Distribution du nombre de <i>Nusselt</i> local	8
Tab. (3.1)	Valeurs des constantes du modèle bas nombre de Reynolds $k - \varepsilon$ (Chien)	23
Tab. (3.2)	Fonctions d'amortissement du modèle du modèle bas nombre de Reynolds $k - \varepsilon$ (Chien)	23
Tab. (3.3)	Valeurs des constantes du modèle bas nombre de Reynolds $k - \omega$ (Wilcox)	26
Tab. (3.4)	Valeurs des constantes du modèle bas nombre de Reynolds $k - \omega$ SST (Menter)	30
Tab. (3.5)	Conditions aux frontières	30
Tab. (3.6)	Conditions aux frontières	33
Tab. (4.1)	Les termes de la quantité scalaire transportée, de la diffusion et de source des équations de Navier Stokes	36
Tab. (4.2)	Valeurs des coefficients a_w, a_E, a_N, a_S et S	40

NOMENCLATURE

D	flux diffusif
F	flux convectif
g	accélération de la pesanteur
H	largeur de la cavité
k	énergie cinétique turbulente
n	normale à la paroi
Nu	nombre de Nusselt
Pr	nombre de Prandtl
q	densité de flux de chaleur
Ra	nombre de Rayleigh
Re	nombre de Reynolds
S	source
T	température absolue
U, V	composantes de la vitesse suivant x et y
u', v'	fluctuations de la vitesse suivant x et y
X, Y	coordonnées cartésiennes

Symboles grecs

α	diffusivité thermique
$\bar{\beta}$	coefficient de dilatation thermique
ε	taux de dissipation (modèle $k-\varepsilon$)
Φ	quantité scalaire transportée
ϕ	angle d'inclinaison
θ	température adimensionnelle
ν	viscosité cinématique

ρ masse volumique

ω taux de dissipation (modèles k- ω , k- ω SST)

Indices

- moyenne

e, w, n, s est, west, north, south

h, c chaud, froid

t turbulent

Chapitre 1

Introduction

Les performances des turbines à gaz et notamment leur efficacité thermique n'ont pas cessé de subir de spectaculaires progrès depuis la seconde guerre mondiale. En aéronautique, les applications militaires ont vu augmenter le rapport puissance/poids alors que dans l'aviation civile, la consommation du combustible a sensiblement diminué. La technologie dans le domaine des turbomachines est aussi importante dans les systèmes de production d'énergie, si bien que la dualité rendement des turbines/efficacité de refroidissement des aubes s'impose de la même manière qu'en aéronautique.

L'amélioration des performances et des rendements des turboréacteurs passe par l'augmentation de la température des gaz dans la chambre de combustion. Les températures imposées aux turbines sont très élevées et les effets thermiques néfastes qui en découlent poussent les constructeurs continuellement à améliorer les techniques de refroidissement des pièces sollicitées thermiquement, telles que: les chambres de combustion, les aubes des distributeurs des turbines haute et basse pression, les ailettes des turbines haute et basse pression, la pressurisation des paliers des compresseurs et des turbines, les accessoires, les carénages et les bras radiaux, autant de problèmes à résoudre qu'imposent ces processus.

Il est évident que pour augmenter le rendement des turbines à gaz, il est indispensable d'augmenter la température d'entrée de la turbine. De nos jours, les températures d'entrée des aubes de turbine à gaz, peuvent atteindre 1700°C et les matériaux employés dans ce cas sont capables de résister seulement à 1200°C à 1300°C . L'air de refroidissement extrait du compresseur est de l'ordre de 650°C , il peut être acheminé à travers de petits canaux percés à l'intérieur des aubes abaissant ainsi la température à environ 1000°C , ce qui est raisonnable pour un fonctionnement fiable du turboréacteur.

La courbure de l'aube et la rotation influent simultanément sur la stabilité de la couche limite. Une surface convexe empêche la génération de la turbulence alors qu'une surface concave augmente la génération de l'énergie turbulente. La conséquence est que le transfert de chaleur augmente dans la partie concave

(intrados) et diminue dans la partie convexe (extrados) et si on conjugue l'accroissement de la température au caractère fortement non uniforme du champ thermique, il devient indispensable d'adopter un procédé de refroidissement judicieusement optimisé afin d'assurer une répartition de température aussi uniforme que possible de telle façon que l'efficacité globale ne soit pas moins altérée.

L'adoption d'un procédé de refroidissement est indispensable si on veut garder une durée de vie acceptable de la turbine, puisqu'elle est directement liée à la charge thermique. En effet, le refroidissement des surfaces en contact avec les gaz chauds permet d'augmenter la température maximale du cycle tout en gardant la température des surfaces dans des limites acceptables. D'après Lakshminarayana, (1996), les progrès réalisés dans le domaine du refroidissement ainsi que la sélection des alliages métalliques utilisés ont permis un gain considérable au niveau du cycle thermodynamique des turbines à gaz (750°C en l'espace d'une vingtaine d'années). Il faut aussi souligner que la température d'une chambre de combustion d'un turboréacteur peut atteindre 1350°C dans le domaine du transport civil, et jusqu'à 1550°C dans le secteur militaire.

Depuis les années 1960, l'évolution des techniques de refroidissement a été importante. Au début les aubes étaient refroidies grâce à des tuyaux radiaux. Dans les années 1970, des systèmes à alimentation multiple avec film cooling ont été mis au point. Pour les turbines à gaz actuelles, les techniques de transferts thermiques externes par film cooling et par convection interne ont été nettement améliorées : canaux multi passes avec promoteurs de turbulence, ailettes fines du type aiguilles et refroidissement par jets impactants. L'analyse du transfert de chaleur par convection d'une aube de turbine à gaz peut être scindée en trois grandes parties (Lakshminarayana, 1996) : le transfert interne pour une aube stationnaire, le transfert interne pour une aube en rotation et le transfert de chaleur externe. Parmi toutes les méthodes de refroidissement qui existent aujourd'hui dans les turbomachines, les constructeurs emploient la technique du refroidissement interne par convection forcée, qui continue toujours à avoir un intérêt certain, même s'il s'agit historiquement de l'approche la plus ancienne.

L'étude de la convection forcée dans les canaux de refroidissement des turbomachines a inspirée de nombreux travaux scientifiques. Cette configuration de

transfert de chaleur intervient dans de nombreuses applications technologiques. Il est pratiquement très difficile et coûteux d'obtenir des données expérimentales sur le transfert de chaleur et sur les pertes de charge dans les canaux de refroidissement des aubes des turbines qui sont caractérisées par des températures et des vitesses de rotation très élevées. La modélisation de la convection forcée dans ce type de canaux constitue une branche importante parmi les travaux menés actuellement au sein des laboratoires spécialisés. Dans ce contexte ces laboratoires travaillent depuis quelques années pour fournir des outils de modélisation utilisables pour le calcul portant sur les écoulements et les transferts thermiques basés sur des approches purement numériques. Ces outils offrent du moins une base solide afin d'améliorer les échanges thermiques de la convection dans ces canaux. Les situations principalement examinées se rapportent aux cas des canalisations droites à section rectangulaire.

Dans la littérature qui a été consacrée à l'étude du refroidissement des aubes des turbines, les canaux à deux passes et à section rectangulaire sont peut-être les configurations qui ont attiré le plus l'attention de la communauté scientifique. Dans plusieurs études, l'intensité des échanges convectifs a été caractérisée en fonction de la vitesse de rotation de l'aube ou en fonction de la position de l'aube par rapport à l'axe de rotation. Paradoxalement, de tous ces travaux, peu d'études traitent des effets de la géométrie des parois interne de refroidissement sur le comportement général de l'écoulement et sur les échanges de chaleur au sein de ces canalisations. Bien que quelques études complètes aient apporté plusieurs éclaircissements sur le refroidissement interne des aubes à travers des canaux à parois lisses et à plusieurs passes, il est tout même clair que le problème est très différent et qu'il existe toutefois une différence notable en ce qui concerne un canal à paroi lisse et un canal à paroi ondulée.

Compte tenu de l'état actuel des connaissances concernant le refroidissement des aubes des turbines, il est donc apparu pertinent de proposer une étude permettant de tenir compte des effets de la géométrie des parois. La recherche proposée s'inscrit donc pleinement dans l'axe de développement souhaitable en ce qui concerne l'amélioration des échanges thermiques par la recherche d'une forme géométrique optimale de la paroi interne du canal de refroidissement. L'utilisation de ce type de configurations modifie de façon importante les écoulements et les

transferts. L'objectif recherché est d'améliorer le transfert de chaleur dans de tels canaux par comparaison au canal droit.

Pour atteindre cet objectif, de nombreuses simulations numériques de l'écoulement à l'intérieur du canal de refroidissement de l'aube mobile de la turbine ont été effectuées et cela pour différentes configurations géométriques. Toutes les configurations testées sont caractérisées essentiellement par la longueur d'onde et l'amplitude de la forme ondulée de la paroi interne considérée.

L'étude envisagée dans la présente thèse est structurée en cinq chapitres. Le premier est une introduction sur le refroidissement des aubes de turbines, qui n'a pas pour but d'être exhaustive mais de rappeler l'état des connaissances dans lequel la présente étude se développe. Ce chapitre contient tout naturellement le contexte scientifique et les objectifs de l'étude. Le deuxième chapitre concerne la recherche bibliographique.

Le troisième chapitre traite de la résolution numérique des équations de conservation de la convection forcée dans un canal de refroidissement d'une aube mobile de turbomachine. Les méthodes de simulation les plus utilisées sont brièvement décrites au début de ce chapitre. Un développement détaillé de la méthode de calcul adoptée dans ce travail, basée sur la méthode des volumes finis, est présenté également. Le quatrième chapitre contient les solutions obtenues pour les différentes configurations testées. Les applications effectuées pour un certain nombre de cas concrets y sont décrites puis les résultats obtenus y sont commentés. Dans la conclusion, les principaux résultats sont repris et les directions possibles dans lesquelles la présente étude peut se poursuivre sont recommandées.

Chapitre 2

Analyse bibliographique

L'étude de la convection forcée dans les canaux de refroidissement des aubes de turbines a fait l'objet d'un grand nombre de travaux scientifiques pendant les cinq dernières décennies. De nombreuses études expérimentales et numériques lui ont été consacrées en raison des applications multiples dans lesquelles elle intervient. Les premières études ont été conduites par Boelter (1948), Eckert (1953) et Clifford (1984). Depuis, que ces travaux ont mis en évidence les effets conjugués des forces centripètes de flottabilité et de Coriolis sur le transfert de chaleur, il est très vite apparu indispensable de comprendre et de caractériser les écoulements et les transferts de chaleur qui se développent à l'intérieur de ce type de canaux.

Il existe actuellement une quantité impressionnante de publications scientifiques portant sur l'étude du refroidissement des aubes de turbomachines. Des efforts de recherche soutenus ont été déployés depuis déjà plusieurs années afin de comprendre le phénomène de la convection forcée au sein de ces canaux en régime turbulent. La turbulence posait et pose encore aujourd'hui beaucoup de problèmes due principalement à son non linéarité intrinsèque. Une synthèse complète de tous ces travaux étant ici hors de portée. Parmi les nombreux travaux dont la publication amena à comprendre et caractériser les écoulements et les transferts de chaleur qui se développent à l'intérieur des canaux de refroidissement des aubes de turbomachines en régime turbulent il faut noter:

2.1 Volet Expérimental

Wagner & al. (1991) ont mené une étude expérimentale pour déterminer les effets conjugués du nombre de Reynolds, du nombre de rotation et de la flottabilité sur le transfert de chaleur à l'intérieur d'un canal de refroidissement d'aubes de turbine en mode orthogonal de rotation. Le canal est un canal multi-passes caractérisé par une paroi lisse et une section carrée. Les expériences ont été réalisées pour les deux sens de rotation avant et arrière. Les auteurs ont montré que le transfert de chaleur dépend de quatre paramètres : la différence entre les températures de la paroi et du fluide, du nombre de Rossby, du nombre de Reynolds

et du diamètre hydraulique du canal. Les auteurs ont montré que les forces de Coriolis et les forces de la flottabilité due à la rotation affectent considérablement le transfert de chaleur dans ce type de canaux. Ils ont montré aussi que l'effet de la rotation sur le transfert de la chaleur dépend plus de la direction de l'écoulement. Les essais effectués ont démontré que le transfert de chaleur dépend aussi de l'inclinaison du canal, le taux de transfert peut diminuer plus de 60% ou augmenter de 250% par comparaison au canal non-tournant. Les auteurs ont également proposé des corrélations basées des paramètres obtenus à partir de l'adimensionalisation des équations gouvernantes qui permettent de prédire le nombre de *Nusselt* en tenant compte des effets de la force de Coriolis et des forces centripètes de flottabilité.

James & al(1993) ont étudié l'influence des conditions de réchauffement des parois sur le coefficient local du transfert de chaleur des canaux de refroidissement à paroi lisse et à paroi rugueuse munis de partitions droites. Les canaux sont du type à deux passes. L'expérience a été menée pour des nombres de *Reynolds* allant de 2500 à 25 000 et des nombre de rotation de 0 à 0.352. Trois conditions de frontières ont été analysées : (a) les quatre parois du canal sont isothermes, (b) les quatre parois sont soumises au même flux thermique, (c) les parois dite « avant » et « arrière » sont différentiellement chauffées et les deux autres étant adiabatiques. Les auteurs ont montré que dans le cas (a) le coefficient du transfert de chaleur est deux à trois fois supérieur pour le canal à paroi rugueuse par comparaison à celui à paroi lisse. Les auteurs ont montré que l'augmentation du nombre de rotation conduit à l'atténuation du transfert de chaleur dans les premières passes et à son intensification dans les dernières passes. Les auteurs ont déduit aussi que pour les cas (b) et (c) le gain du coefficient de transfert de chaleur est de 50% par rapport au cas (a).

Johnson & al (1994) ont effectué des expériences pour étudier l'effet des forces centripètes de flottabilité et la force de Coriolis sur le transfert de chaleur à l'intérieur d'un canal de refroidissement d'aubes de turbine. L'étude a été effectuée pour un canal multi passes à différents angles d'inclinaison par rapport à l'axe de rotation de la turbine allant de 0° à 45°. Les résultats obtenus ont démontré que le transfert de chaleur dans la première passe est deux fois plus intense lorsque le canal est incliné à 45° par rapport à 0°. Les résultats ont montré aussi que les effets des forces de flottabilité et de Coriolis affectent moins le transfert de chaleur global

lorsque le canal est incliné à 45°. Ils ont montré aussi que le transfert de chaleur démunie de moitié si on change le sens de rotation de l'aube.

Morris & Chang (1996) ont étudié expérimentalement le transfert de chaleur dans un canal de refroidissement d'aubes de turbine à paroi lisse et à section circulaire. Le canal tourne en mode orthogonal. Les auteurs ont apporté entre autres quelques éclaircissements sur le transfert de chaleur axial et circonférentiel des surfaces internes du canal. Les résultats rapportés ont permis de mettre en évidence les effets combinés de la force de Coriolis et des forces centripètes de flottabilité sur la convection forcée.

Une autre contribution significative à l'étude du refroidissement des aubes de turbomachines est présentée par *Iacovides & al (1999)*. Les auteurs ont étudié et analysé la structure spatiale des écoulements de la convection forcée dans un canal en U à paroi lisse et à section carrée muni de partitions équidistantes. Le canal en U tourne autour d'un axe parallèle au rayon de courbure reliant les deux passes. L'expérience a été menée pour des nombres de *Reynolds* allant jusqu'à 100 000. Les auteurs ont montré que la rotation génère des mouvements secondaires dans la section droite du canal et que le transfert de chaleur s'intensifie substantiellement sur la paroi dite « avant » et « arrière » par opposition aux parois dites « inférieure » et « supérieure ». Les résultats rapportés par les auteurs constituent une base de données pour la comparaison et la validation des études numériques.

Dans le même contexte, *Iacovides & al (2001)* ont réalisé un dispositif expérimental à *UMIST (Manchester)* pour mesurer les vitesses et quantifier les transferts de chaleur à l'intérieur d'un canal de refroidissement en U muni de partitions inclinées à 45° et tournant en mode orthogonal. Les distributions du nombre de Nusselt ont été déterminées pour un nombre de *Reynolds* = 36000 et des nombres de rotation ($R_0 = D \cdot \Omega / U$) de 0.1 et 0.2. Les auteurs ont montré que la rotation n'affecte pas considérablement le nombre de Nusselt moyen mais elle contribue à atténuer les concentrations thermiques dans les régions caractérisées par des gradients élevés de températures.

Chang & Morris (2002) ont étudié et analysé l'écoulement de la convection forcée dans un canal de refroidissement d'une aube de turbine de section carrée et muni de partitions transversales. Le dispositif expérimental très précis a permis de mettre en évidence les effets mutuels de la force de Coriolis et des forces centripètes de flottabilité sur le transfert de chaleur global. Les auteurs ont proposé une corrélation

pour déduire les effets mutuels et interactifs des partitions, des forces convectives, de la force de Coriolis et des forces centripètes de flottabilité sur le nombre de Nusselt.

2.2 Volet Numérique

Mohammad Al-Qahtani & al. (2001) ont mené une étude numérique sur un canal rectangulaire lisse à deux passes et avec un coefficient d'allongement géométrique égal à 2 en utilisant le modèle de turbulence RSM. Les auteurs ont montré que la rotation génère des mouvements secondaires dans la section droite du canal et que le transfert de chaleur s'intensifie substantiellement sur la paroi dite « avant » et « arrière » par opposition aux parois dites « inférieure » et « supérieure ». Les auteurs ont montré aussi que le nombre de Nusselt local augmente substantiellement dans la première passe de la face arrière pour des nombres de rotation et des rapports de densité élevés.

Guoguang & al. (2004) ont présenté une étude numérique sur l'écoulement tridimensionnel du transfert de chaleur dans un canal à paroi lisse, à section rectangulaire et à deux passes tournant autour d'un axe orthogonal pour des coefficients d'allongement géométrique différents (1:1, 1:2, 1:4). Les vitesses et les températures moyennes ainsi que le nombre de Nusselt moyen ont été déterminés pour deux nombres de Reynolds, $Re = 10\ 000$ et $Re = 100\ 000$. Plusieurs simulations numériques basées sur la formulation RANS ont été effectuées pour différents nombre de rotation (0.0 à 0.28) et rapport de densité (0.13 à 0.40). Les résultats obtenus ont montré que le nombre de Nusselt diminue avec l'augmentation du nombre de Reynolds et que le transfert de chaleur s'intensifie sur la dernière passe du canal. Les auteurs ont également conclu que le nombre de Nusselt est plus affecté par le nombre de rotation dans le cas des canaux caractérisés par un faible coefficient d'allongement géométrique.

Li & al(2005) ont effectué une investigation numérique pour l'étude des coefficients de transfert de chaleur locaux dans un canal à paroi lisse et à section carrée tournant autour d'un axe orthogonal pour différents angles d'inclinaison. Les simulations ont été effectuées en utilisant le modèle de turbulence k- ϵ à deux équations. Les auteurs ont montré que l'orientation du canal autour de l'axe de rotation affecte considérablement la structure de l'écoulement et la distribution de turbulence.

Aroon & al. (2006) ont étudié numériquement le problème de la convection forcée en régime turbulent dans un canal de refroidissement à section carrée tournant à vitesse élevée en mode orthogonal. Les simulations numériques ont été effectuées en modélisant la turbulence par le modèle bas nombre de *Reynolds* $k-\varepsilon$ puis par le modèle *RSM (Reynolds Stress Model)*. L'étude a montré que le modèle *RSM* est nécessaire pour saisir les effets anisotropes et qu'il prédit mieux l'énergie cinétique turbulente.

D'autres études étendues à la convection forcée en régime turbulent dans un canal de refroidissement d'aubes de turbine ont été conduites par *Zhaohui & al(2006)*. Les auteurs ont présenté une étude numérique sur le transfert de chaleur dans un canal à paroi lisse et à section carré tournant en mode orthogonal. Dans l'étude proposée plusieurs modèles de turbulence ont été testés. Les résultats obtenus ont montré que le modèle *RSM* donne une modélisation plus réaliste près des parois par rapport au modèle isotrope de viscosité turbulente simple $k-\varepsilon$. Les composantes normales du tenseur de Reynolds sont caractérisées par une forte anisotropie capable de prédire raisonnablement les écoulements et les transferts de chaleur dans les régions soumises à l'action simultanée des forces de Coriolis et des forces centripètes de flottabilité. Les auteurs ont montré plutôt que d'utiliser des hypothèses dans la sous-couche visqueuse, le modèle *RSM* arrive à résoudre les équations de l'écoulement près de la paroi. Ils ont montré aussi que les coefficients de transfert de chaleur et les coefficients de frottement peuvent être évalués correctement à partir de gradients de température et de vitesse sur la paroi solide.

Kim & al. (2006) ont mené une étude numérique sur l'écoulement et le transfert de chaleur à l'intérieur d'un canal à section rectangulaire ($AR = 4:1$) muni de nervures en forme de V, tournant en mode orthogonal. Leurs résultats obtenus ont été confrontés avec satisfaction aux résultats expérimentaux de *Lee & al. (2003)*. Les auteurs ont montré que le modèle de fermeture du deuxième ordre *RSM* est bien adapté pour le calcul des écoulements à l'intérieur des canaux de refroidissement tournants.

Iacovides & al. (2007) ont effectué une investigation numérique pour l'étude de la modélisation de la turbulence dans un canal tournant à deux

passes (coude à 180 °). Les auteurs ont utilisé le modèle standard k-ε. En négligeant les effets de la flottabilité, ils ont conclu que les effets de rotation ne sont pas aussi importants dans le canal rectangulaire comme dans le cas du canal carré. Ils ont suggéré l'utilisation d'un modèle de turbulence basé sur une approche bi-couche au lieu du modèle RSM. La méthode proposée pour le calcul du refroidissement à l'intérieur du canal peut être utilisée pour l'estimation de l'efficacité du refroidissement et le choix des matériaux.

Récemment, l'excellente étude de *Basha & al* (2009) a complété ces travaux systématiques. Les auteurs ont effectué des simulations numériques de la convection forcée dans un canal de refroidissement d'aubes de turbine à gaz pour évaluer le taux de génération d'entropie pour différents nombres de rotation et rapports de densité. Dans les simulations, les parois dites « avant » et « arrière » sont isothermes et les équations gouvernantes sont discrétisées par la méthode des finis. Le modèle de turbulence RSM a été adopté pour la fermeture des équations. Les auteurs ont montré que le taux de génération d'entropie volumétrique atteint des valeurs élevées à l'entrée du canal en raison du gradient élevé de températures dans cette zone. Ils ont aussi montré que l'augmentation du nombre de rotation et du rapport de densité augmente le taux de génération volumétrique d'entropie dans le canal.

Chapitre 3

Modélisation Numérique

3.1 Introduction

La convection forcée turbulente est le régime d'écoulement obtenu lorsque la chaleur se sert du fluide en mouvement comme véhicule pour se déplacer, la diffusivité apparente du fluide augmente et les transferts de chaleur s'en trouvent intensifiés dus à la présence des tourbillons dans le fluide, la thermique et la dynamique sont alors fortement couplées.

La résolution des équations différentielles modélisant les écoulements de la convection forcée a fait l'objet d'un examen plus détaillé que de coutume et a séduit l'intention de beaucoup de chercheurs. Historiquement, la complexité de ces équations a conduit à la mise au point de méthodes numériques de plus en plus sophistiquées. Une analyse complète de ces méthodes étant ici hors de portée, elle peut être accessible dans les références Jones (1979) et Mallinson (1973).

L'essor rapide des calculateurs de plus en plus performants et les techniques numériques mises au point ces dernières années font que la simulation numérique des écoulements (la CFD) a atteint un tel degré de développement qu'elle s'est érigée en science indépendante.

Les équations algébriques sont résolues pour chaque nœud du maillage. Le plus souvent, une méthode itérative est appliquée et les calculs sont exécutés à l'aide d'un code CFD.

La valorisation pratique des progrès obtenus dans les techniques numériques requiert une attention particulière à la prise en compte des erreurs d'approximation qui dépendent essentiellement de la méthode de résolution et du choix du schéma de discrétisation. Trois méthodes bien distinctes peuvent être proposées dans la résolution des équations régissant les écoulements. Contrairement à la méthode des différences finies qui met en jeu des approximations des dérivées, les méthodes des volumes finis et des éléments finis exploitent des approximations d'intégrales.

Toutefois, la méthode des volumes finis se base directement sur la forme dite forte de l'équation à résoudre, alors que la méthode des éléments finis se fonde sur une formulation variationnelle de l'équation.

La méthode des volumes finis est probablement la méthode la plus robuste dans la résolution des équations différentielles régissant les écoulements de la convection forcée. Elle repose sur l'hypothèse d'une subdivision du domaine de calcul en un nombre fini de volumes élémentaires adjacents discrétisant le domaine physique, Patankar (1972).

L'intégration des équations différentielles s'effectue sur chacun de ces volumes en assurant le principe de conservation. L'avantage réel de cette méthode est de ne pas nécessiter de transformation de coordonnées, de ce point de vue, elle possède la même flexibilité tout comme la méthode des éléments finis.

Les méthodes de volumes finis ont été initialement mises au point pour des lois de conservation hyperbolique, mais des développements récents permettent à présent de les utiliser pour des équations elliptiques et paraboliques. Ces méthodes assurent une discrétisation conservative de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie et elles s'appliquent aisément dans le cas d'un maillage non structuré (très apprécié pour les géométries complexes). En revanche, les caractéristiques géométriques du maillage peuvent jouer un rôle prépondérant lorsque des flux diffusifs entrent en jeu.

Parmi les nombreux travaux dont la publication amena à l'application de cette méthode, il faut noter les articles de Chorin(1968) et de Girault et Raviart(1986).

3.2 Formulation du problème

La présente étude porte sur le refroidissement par convection forcée entre un fluide caloporteur et la paroi interne ondulée d'un canal à section rectangulaire et à deux passes, tournant à une vitesse angulaire Ω , figure 1. Le canal, caractérisé par une forme de fer à cheval, possède les mêmes caractéristiques géométriques du canal rectangulaire de Guoguang(2004). La longueur totale du canal L est égale à 37.47cm, elle est composée en amont d'une section non chauffée lisse de longueur $L_1 = 22,23$ cm puis d'une section ondulée chauffée de longueur $L_2 = 15,24$ cm. La

largeur de canal W est égale 1,27 cm et la hauteur de canal H est fixé à 5,08 cm, le coefficient d'allongement géométrique correspondant est $AR = W / H = 1 : 4$.

Le nombre des ondulations est égal à 10 et l'amplitude est fixée à $0,05 W$. La distance entre l'entrée du canal et l'axe de rotation de l'aube est $R_r = 40,64\text{cm}$. Le rayon de courbure reliant les deux passes est $r_i = 0,635\text{ cm}$ et l'écart minimum entre la surface interne ondulée et l'extrémité du canal est $G = 1,27\text{ cm}$. Les deux parois latérales parallèles à l'axe de rotation sont dénommées surfaces avant et arrière, tandis que les deux autres sont appelées entrée et sortie. La paroi chaude est caractérisée par une forme géométrique ondulée définie suivant la loi :

$$f(y) = [1 - b + b(\cos 2 \pi n y)] \quad (3.1)$$

n : est le nombre d'ondulations.

b : est l'amplitude de l'ondulation.

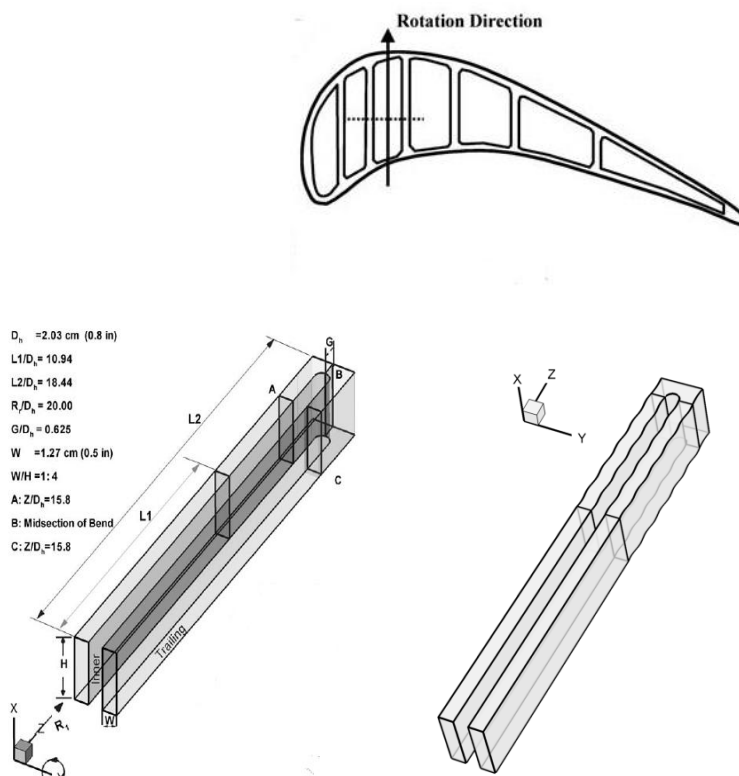


Fig. (3.1) Illustration de la configuration géométrique de la canalisation.

L'étude consiste en la recherche des formes géométriques de canaux caractérisés par des parois internes ondulées qui modifient les écoulements et les

transferts de chaleur. L'objectif recherché est d'intensifier le transfert de chaleur dans de telles canalisations par comparaison à la canalisation rectangulaire classique.

3.3 Equations générales

L'écoulement dans les canaux de refroidissement des aubes de turbomachines est caractérisé par des variations temporelles et spatiales aléatoires de la vitesse, de la pression et de la température. Bien qu'il s'agit de canaux relativement petits, les nombres de Reynolds qui leurs sont associés sont suffisamment grands pour produire des écoulements turbulents en raison de la rotation de l'aube et de l'effet de la flottabilité des forces centripètes.

Les équations fondamentales modélisant l'écoulement à l'intérieur de ces canaux expriment les principes de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. En considérant que l'écoulement est incompressible et turbulent, et que le canal tourne à une vitesse angulaire Ω autour de l'axe de rotation, en coordonnées cartésiennes (x, y, z) , ces équations s'écrivent de la manière suivante, Yoji Okita (2003) :

Equation de conservation de la masse

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho U_i) = 0 \quad (3.2)$$

Equation de conservation de quantité de mouvement

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho U_i U_j) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \overline{\rho u_i u_j} \right] - 2\rho \varepsilon_{ijp} \Omega_p U_j - \rho [\Omega_j X_j \Omega_i - \Omega_j X_i \Omega_j] \quad (3.3)$$

Equation de conservation de l'énergie

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho U_j T) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial T}{\partial x_j} - \overline{\rho u_j t} \right) \quad (3.4)$$

Equation d'état

$$P = \rho RT \quad (3.5)$$

Ω désigne la vitesse angulaire

X : représente la distance par rapport à l'axe de rotation.

T : est la température moyenne

t : représente la fluctuation de la température.

ε_{ijk} : est le tenseur alternatif d'ordre trois.

3.5 Modèles de turbulence

En définissant la turbulence par opposition à l'écoulement laminaire, on peut dire que l'écoulement turbulent est caractérisé par des variations temporelles et spatiales aléatoires de la vitesse, de la pression et de la température. L'autre caractéristique de l'écoulement turbulent est que les fluctuations du champ de vorticité sont très fortes et le mélange est intense. Au contact d'une paroi solide, le coefficient de frottement et d'échange thermique sont augmentés par rapport au régime laminaire.

Le problème des écoulements et du transfert de chaleur relève de la résolution des équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Actuellement, il existe deux techniques pour approcher le problème de la turbulence dans le fluide. La première méthode est dite "modélisation de la turbulence". Elle consiste à décomposer le champ de la vitesse et de la température en une composante moyenne et une fluctuation turbulente. Le système d'équations résultant (**Reynolds Averaged Navier-Stokes  quations, RANS**) quantifie ainsi le comportement de l'écoulement moyen. Mais la non-linéarité des équations fait apparaître un nouveau terme, reflétant l'effet de la turbulence sur le champ moyen, qu'il faut modéliser. Ce problème est connu sous l'acronyme de "problème de fermeture" où l'on dispose d'un nombre d'équations inférieur au nombre d'inconnues. Une variété de modèles est à présent disponible dans la littérature, allant du plus simple (  zéro équation) au plus complexe (**Reynolds Stress Model, RSM**). Malheureusement aucun de ces modèles n'est optimisé pour tous les cas de figures. La règle générale consiste à adapter le modèle au problème posé. Toutefois, le modèle à deux équations $k - \varepsilon$ de Launder et Spalding (1974) est de loin le modèle le plus utilisé et considéré comme étant universel. Malgré un certain nombre de limites que nous développerons un peu plus loin, ce modèle est pratiquement implémenté dans tous les codes de calcul commerciaux.

L'idée maîtresse derrière la modélisation de la turbulence repose sur l'analogie que l'on fait avec la phénoménologie de celle-ci : on se base ainsi sur la description des structures dont les tailles des plus grosses pouvant avoir celles de la géométrie du domaine de l'écoulement aux plus petites dites de Kolmogorov. Les premières sont appelées structures énergétiques parce qu'elles transmettent l'énergie reçue aux structures de taille plus faible (phénomène de cascade). Elles sont fortement anisotropes. Les plus petites sont appelées structures dissipatrices (ou de Kolmogorov) ; Ainsi l'énergie reçue des macrostructures est directement dissipée sous forme de chaleur. Les microstructures sont par contre isotropes et indépendantes de la spécificité de l'écoulement. L'approche par cette logique indique que la turbulence peut être définie par deux échelles : une échelle de longueur et une deuxième de temps. La première est en rapport avec la taille des structures turbulentes, et la deuxième avec leur durée de vie, et c'est principalement l'idée des modèles de turbulences conventionnels.

La seconde méthode est la simulation directe (**D**irect **N**umerical **S**imulation, **DNS**). Dans laquelle toutes les structures de la turbulence (macro- et micro-structures) sont résolues directement et sans le recours à des approximations. Ceci n'est possible que par le biais d'une résolution très fine des équations instantanées de Navier-Stokes. C'est à dire que l'algorithme utilisé devra être suffisamment précis (en espace et en temps) pour capter toutes les échelles de longueur et de temps de la turbulence. Malheureusement, le spectre des échelles de la turbulence est tellement large (proportionnel au nombre de Reynolds) que les pas de discrétisation (espace et temps) indispensables dépassent de loin les capacités de stockage et de calcul des meilleurs calculateurs actuels.

Une autre méthode aussi sophistiquée que la DNS, mais moins onéreuse est connue sous le nom de "simulation des macro-échelles" (**LES**, **L**arge **E**ddy **S**imulation). Elle consiste à filtrer (en espace) les échelles de la turbulence pour ne résoudre "directement" que les macro structures, et modéliser les petites structures par le biais de modèles plus ou moins simples, dits "modèles de sous-maille" (subgridmodels). Cette technique (LES) a le mérite de donner des résultats d'une précision comparable à celle de la DNS, mais à moindre coût. Pour des raisons strictement techniques (puissance de calcul) les méthodes de simulation (DNS et LES) sont réservées aux écoulements à faible nombre de Reynolds et pour des configurations géométriques simples. Pour les applications pratiques et industrielles

les méthodes statistiques de modélisation à partir des équations moyennes de Reynolds sont incontournables et le seront probablement pour assez longtemps.

La turbulence des écoulements convectifs est caractérisée par deux échelles liées à l'espace et au temps qui varient d'une manière significative. Pour cela, les modèles doivent être formulés en fonction d'une autre échelle indépendante qui est l'échelle de vitesse. Dans la plupart des modèles à deux équations, cette échelle est associée à l'énergie cinétique turbulente. En combinant les échelles de vitesse et de longueur, une autre échelle peut être définie, il s'agit de la dissipation de l'énergie turbulente $\varepsilon \equiv V_0^3 / l_0$. Bien que le recours à d'autres échelles que ε est possible, il y a plus d'une raison pour choisir la dissipation. La plus importante sans doute est que cette quantité apparaît explicitement dans les équations de transport des tenseurs de Reynolds et de l'énergie cinétique turbulente. Cette quantité a également un sens physique facilitant son interprétation et sa comparaison.

Pour fermer le système d'équations, plusieurs modèles de turbulence sont disponibles: Spalart-Allmaras, $k-\varepsilon$ Standard et ses variantes RNG et Realizable, $k-\omega$, $k-\omega$ SST, Reynolds Stress RSM et la Simulation des Grandes Echelles (Large Eddy Simulation, LES).

Le modèle de Spalart-Allmaras basé sur une seule équation de transport est sans doute le modèle le plus simple et le moins gourmand en temps de calcul. Tous les modèles à deux équations de transport nécessitent à peu près le même temps de calcul, sauf le modèle $k-\varepsilon$ RNG qui requiert entre 10 et 15 % de temps supplémentaire. Comparativement aux modèles à deux équations, le modèle RSM à sept équations de transport, nécessite de 50 à 60 % de temps en plus par itération et 15 à 20 % en mémoire vive. Le modèle LES est le plus gourmand en temps de calcul et en mémoire vive, son utilisation pour des applications industrielles est dans sa phase de développement et au rythme actuel d'augmentation en puissance de calcul, ce modèle ne serait utilisable pour ce genre d'applications qu'à partir de 2045, Spalart(2012).

Du point de vue de stabilité de la solution, le modèle le plus stable est $k-\varepsilon$ Standard. En contrepartie, ce modèle surestime les termes diffusifs. Le modèle $k-\varepsilon$ RNG a été conçu pour réduire la viscosité turbulente et pouvoir ainsi répondre aux contraintes visqueuses élevées présentes dans les écoulements rotatifs. Il est plus

sensible aux instabilités physiques instationnaires, telles que les détachements tourbillonnaires formés derrière un obstacle. Il est donc légèrement moins stable que le modèle $k-\varepsilon$ Standard.

Diverses approches numériques ont été utilisées pour la modélisation de la turbulence des écoulements dans les canaux de refroidissement des aubes mobiles de turbines. Toutes les approches ne répondent pas aux mêmes attentes et les scientifiques ont des points de vue divergents. Cependant les principales approches utilisées sont basées sur les deux modèles de turbulence $k-\omega$ SST et RSM. Il est à noter que le fort couplage entre les corrélations des fluctuations de vitesse et l'écoulement moyen fait du modèle RSM un modèle moins stable que le modèle $k-\omega$ SST.

3.5.1 Modèle $k-\omega$ SST

Le modèle Shear-Stress Transport $k-\omega$ SST a été élaboré par Menter(1994). Il ressemble au modèle $k-\omega$ de Wilcox (1998). Le principe de ce modèle repose sur la combinaison des deux modèles $k-\omega$ et $k-\varepsilon$. Le premier modèle est utilisé dans les régions situées à proximité de la paroi, le second est appliqué pour le traitement des autres régions lointaines. L'appellation donnée au modèle est justifiée par le fait que la viscosité turbulente est modifiée de telle façon que les équations de transports tiennent compte des contraintes du cisaillement turbulentes (Shear-Stress). Ce modèle se caractérise principalement par le terme de diffusion introduit dans l'équation de la dissipation turbulente ω et par la fonction d'amortissement assurant un meilleur comportement aussi bien que dans les zones proches de la paroi que dans les régions éloignées. Ceci procure au modèle de meilleures performances par rapport aux deux modèles standards $k-\omega$ et $k-\varepsilon$.

Afin de rendre le modèle $k-\omega$ SST plus précis et plus fiable que le modèle $k-\omega$ standard pour une large gamme d'écoulements, les modifications suivantes doivent être prises en compte :

- Le modèle $k-\omega$ standard et le modèle $k-\varepsilon$ modifié sont multipliés par une fonction d'amortissement puis rajoutés l'un à l'autre. Près de la paroi, la fonction d'amortissement prend la valeur de l'unité et le modèle $k-\omega$ standard est activé.

Loin des surfaces, la fonction d'amortissement prend la valeur zéro et le modèle $k - \varepsilon$ modifié est activé.

- Le modèle $k - \omega$ SST introduit un terme d'amortissement de la diffusion dans l'équation du taux de dissipation ω .

- La viscosité turbulente est modifiée pour prendre en considération les contraintes turbulentes du cisaillement (Shear-Stress) dans les équations de transport.

- Les constantes du modèle sont différentes.

L'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente du modèle $k - \omega$ SST est identique à celle du modèle standard et l'équation du taux de dissipation diffère principalement par l'addition d'un nouveau terme D_ω . Mathématiquement, le modèle $k - \omega$ SST est formulé de la manière suivante :

Equation de transport de l'énergie cinétique turbulente

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k + Y_k + S_k \quad (3.6)$$

P_k est la production de d'énergie turbulente, ou plus exactement le transfert d'énergie entre l'écoulement moyen et fluctuant :

$$P_k = \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (3.7)$$

Equation de transport de la dissipation turbulente

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + P_\omega + Y_\omega + D_\omega + S_\omega \quad (3.8)$$

la viscosité turbulente est donnée par la relation suivante :

$$\mu_t = \frac{\rho k}{\omega} \frac{1}{\max \left[\frac{1}{\alpha^*}, \frac{\Omega F_2}{a_1 \omega} \right]} \quad (3.9)$$

$$\Omega \equiv \sqrt{2 \Omega_{ij} \Omega_{ij}} \quad (3.10)$$

$$\sigma_k = \frac{1}{F_1/\sigma_{k,1} + (1-F_1)/\sigma_{k,2}} \quad (3.11)$$

$$\sigma_\omega = \frac{1}{F_1/\sigma_{\omega,1} + (1-F_1)/\sigma_{\omega,2}} \quad (3.12)$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.13)$$

$$\alpha^* = \alpha_\infty^* \left(\frac{\alpha_0^* + \text{Re}_t/R_k}{1 + \text{Re}_t/R_k} \right) \quad (3.14)$$

Les fonctions F_1 et F_2 sont données par :

$$F_1 = \tanh(\Phi_1^4) \quad (3.15)$$

$$\Phi_1 = \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{0.09 \omega y}, \frac{500 \mu}{\rho y^2 \omega} \right), \frac{4 \rho k}{\sigma_{\omega,2} D_\omega^+ y^2} \right] \quad (3.16)$$

$$D_\omega^+ = \max \left[2 \rho \frac{1}{\sigma_{\omega,2}} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-20} \right] \quad (3.17)$$

$$F_2 = \tanh(\Phi_2^2) \quad (3.18)$$

$$\Phi_2 = \max \left[2 \frac{\sqrt{k}}{0.09 \omega y}, \frac{500 \mu}{\rho y^2 \omega} \right] \quad (3.19)$$

Le terme de production de l'énergie cinétique turbulente P_k est calculé par la même équation du modèle $k - \omega$ standard. Concernant le terme de production du taux de dissipation P_ω , il est donné par la relation suivante:

$$P_\omega = \frac{\alpha}{V_t} G_k \quad (3.20)$$

La différence entre les deux modèles existe notamment dans la définition du α_∞ qui prend la valeur de 0.52 dans le modèle standard et dans le modèle $k - \omega$ SST, elle est évaluée par la formulation suivante:

$$\alpha_\infty = F_1 \alpha_{\infty,1} + (1-F_1) \alpha_{\infty,2} \quad (3.21)$$

$$\alpha_{\infty,1} = \frac{\beta_{i,1}}{\beta_{\infty}^*} - \frac{\kappa^2}{\sigma_{\omega,1} \sqrt{\beta_{\infty}^*}} \quad (3.22)$$

$$\alpha_{\infty,2} = \frac{\beta_{i,2}}{\beta_{\infty}^*} - \frac{\kappa^2}{\sigma_{\omega,2} \sqrt{\beta_{\infty}^*}} \quad (3.23)$$

avec: $\kappa = 0.41$, $\beta_{i,1} = 0.075$, $\beta_{i,2} = 0.0828$

Les dissipations Y_k et Y_{ω} de l'énergie cinétique et de son taux de dissipation correspondent à $f_{\beta^*} = 1$, elles sont définies par les équations suivantes :

$$Y_k = \rho \beta^* k \omega \quad (3.24)$$

$$Y_{\omega} = \rho \beta \omega^2 \quad (3.25)$$

β_i est défini comme suit:

$$\beta_i = F_1 \beta_{i,1} + (1 - F_1) \beta_{i,2} \quad (3.26)$$

Le terme $k - \omega$ du modèle $k - \omega$ SST diffère de celui du modèle standard, il est donné par l'expression suivante :

$$D_{\omega} = 2(1 - F_1) \rho \sigma_{\omega,2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \quad (3.27)$$

Les valeurs des différents coefficients du modèle $k - \omega$ SST sont rapportées dans le tableau suivant :

$\sigma_{k,1}$	$\sigma_{\omega,1}$	$\sigma_{k,2}$	$\sigma_{\omega,2}$	a_1	$\beta_{i,1}$	$\beta_{i,2}$
1.176	2.0	1.0	1.168	0.31	0.075	0.0828

Tab. (3.1) Valeurs des constantes du modèle bas nombre de Reynolds $k - \omega$ SST *Menter* (1994)

Il est à noter que les constantes (α_∞^* , α_∞ , α_0 , β_∞^* , R_β , R_k , R_ω , ζ^* , M_{t0}) sont celles du modèle $k - \omega$ standard.

α_∞^*	α_∞	α_0	β_∞^*	β_i	R_β	R_k	R_ω	ζ^*	M_{t0}	σ_k	σ_ω
1	0.52	1/9	0.09	0.072	8	6	2.95	1.5	0.25	2.0	2.0

Tab. (3.2) Valeurs des constantes du modèle bas nombre de Reynolds $k - \omega$ Wilcox(1998)

3.4.2 Modèle de Turbulence RSM

Le modèle de turbulence classique le plus complexe est celui des contraintes de Reynolds RSM, aussi appelé deuxième ordre ou deuxième modèle. Ce modèle est utilisé pour pallier aux insuffisances du modèle $k-\epsilon$ dans le cas des écoulements caractérisés par des champs de contraintes complexes ou des forces considérables. Sous de telles conditions les contraintes de Reynolds sont sous-estimées dans l'équation de l'énergie cinétique turbulente :

$$-\rho \overline{u_i' u_j'} = \mu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} = 2\mu_t E_{ij} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (\text{modèle } k-\epsilon) \quad (3.28)$$

Le recours à l'équation exacte de transport des contraintes de Reynolds en revanche peut expliquer les effets directionnels du champ de contraintes de Reynolds. La stratégie de la modélisation provient des travaux Launder (1975). Le terme $R_{ij} = -\tau_{ij} / \rho = \overline{u_i' u_j'}$ est appelé « contrainte de Reynolds » dans la littérature bien que le terme « cinématique » serait plus approprié. L'équation exacte pour le transport de R_{ij} prend la forme suivante:

$$\frac{DR_{ij}}{Dt} = P_{ij} + D_{ij} - \epsilon_{ij} + \pi_{ij} + \Omega_{ij} \quad (3.29)$$

Taux de variation de R_{ij} + Transport de R_{ij} = Taux de production + Transport de R_{ij}
 de $AR_{ij} = \overline{u_i' u_j'}$ par convection de R_{ij} R_{ij} par diffusion

- Taux de dissipation de + Transport de R_{ij} dû à + Transport de R_{ij}
 $R_{ij}R_{ij}$ l'interaction turbulente due à la rotation
 Pression contrainte

L'équation (3.28) décrit six équations aux dérivées partielles pour le transport de chaque contrainte de Reynolds indépendante $\overline{u_1^2}, \overline{u_2^2}, \overline{u_3^2}, \overline{u_1 u_2}, \overline{u_1 u_3}$ et $\overline{u_2 u_3}$ sachant que : $\overline{u_2 u_1} = \overline{u_1 u_2}, \overline{u_3 u_1} = \overline{u_1 u_3}$ et $\overline{u_3 u_2} = \overline{u_2 u_3}$

Si elle est comparée à l'équation du transport de l'énergie cinétique turbulente, deux nouveaux termes apparaissent dans les équations des contraintes de Reynolds: le terme de la corrélation pression- contrainte Π_{ij} dont l'effet sur l'énergie cinétique peut être montré comme nul, et le terme de rotation Ω_{ij} .

Lors des calculs de la CFD, les équations de transport des contraintes de Reynolds retiennent le terme de la production dans sa forme exacte

$$P_{ij} = - \left(R_{im} \frac{\partial U_j}{\partial x_m} + R_{jm} \frac{\partial U_i}{\partial x_m} \right) \quad (3.29)$$

Le terme de diffusion D_{ij} peut être modélisé en supposant que le taux de transport des contraintes de Reynolds par diffusion est proportionnel aux gradients des contraintes de Reynolds. Ce principe est appliqué dans toutes modélisations de la turbulence. Les codes commerciaux CFD optent souvent en faveur de la forme la plus simple

$$D_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_m} \right) = \text{div} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \text{grad} (R_{ij}) \right) \quad (3.30)$$

Avec $\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$; $C_\mu = 0.09$ et $\sigma_k = 1.0$

Le taux de la dissipation ε_{ij} est modélisé en prenant en considération l'isotropie des faibles turbulences dissipatives. Ceci pour affecter les contraintes normales de Reynolds ($i=j$), dans ce cas il est admis que :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} \quad (3.31)$$

Où ε est le taux de la dissipation d'énergie cinétique turbulente défini par $\varepsilon = 2\nu \overline{e'_{ij} \cdot e'_{ij}}$.

L'opérateur delta, δ_{ij} est donné par $\delta_{ij} = 1$ si $i=j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

Les interactions pression contrainte constituent en même temps le terme le plus difficile à modéliser correctement. Il s'agit de redistribuer le terme global des contraintes de pression sur les contraintes normales de Reynolds ($i=j$), de les rendre plus isotropiques et de réduire les contraintes tangentielles de Reynolds ($i \neq j$).

Des corrections sont nécessaires pour tenir compte de l'effet de paroi sur les termes de pression-contrainte. Ces corrections diffèrent des fonctions d'amortissement utilisées dans le modèle k- ε , elles doivent être appliquées indépendamment de la valeur du nombre de Reynolds moyen de l'écoulement. L'effet de la paroi augmente l'anisotropie des contraintes normales de Reynolds et diminue l'amplitude des contraintes de cisaillement de Reynolds.

Un modèle complet qui tient compte de tous ces effets a été proposé par Launder et al (1975). Il présente aussi la forme la plus simple adoptée par plusieurs codes commerciaux CFD:

$$\Pi_{ij} = -C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(R_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right) - C_2 \left(P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right) \quad (3.32)$$

$$C_1 = 1.8 \text{ et } C_2 = 0.6$$

Le terme rotationnel est donné par :

$$\Omega_{ij} = -2\omega_k \left(R_{jm} e_{ikm} + R_{im} e_{jkm} \right) \quad (3.33)$$

ω_k est le vecteur rotation et

e_{ijk} est le symbole alternatif; $e_{ijk} = 1$ si i, j et k sont différents et en ordre cyclique,

$e_{ijk} = -1$ si i, j et k sont différents et dans l'ordre anti-cyclique enfin $e_{ijk} = 0$ si les deux indices sont égaux.

L'énergie cinétique turbulente k est obtenue en ajoutant les trois contraintes normales.

$$k = \frac{1}{2}(R_{11} + R_{22} + R_{33}) = \frac{1}{2}(\overline{u_1'^2} + \overline{u_2'^2} + \overline{u_3'^2}) \quad (3.34)$$

Avec

$$C_{1\varepsilon} = 1.44 \text{ et } C_{2\varepsilon} = 1.92$$

Taux de variation de k + Transport de ε = Transport de k + Taux de production ε par convection ε par diffusion de ε

- Taux de destruction de ε

En l'absence de toute information pour l'approximation de la distribution des R_{ij} à l'entrée, les conditions aux limites peuvent être calculées à partir de l'intensité turbulente T_i et d'une longueur caractéristique L (par exemple rayon équivalent du canal) avec les relations suivantes:

$$k = \frac{3}{2}(U_{ref} T_i)^2 ; \quad \varepsilon = C_\mu^{3/4} \frac{k^{3/2}}{l} ; \quad \overline{u_1'^2} = k ;$$

$$\overline{u_2'^2} = \overline{u_3'^2} = \frac{1}{2}k ; \quad \overline{u_i' u_j'} = 0 (i \neq j)$$

Pour les calculs à hauts nombres de Reynolds, les conditions aux limites de paroi peuvent être appliquées similairement à ceux du modèle k - ε . Les valeurs des contraintes de Reynolds en proche paroi sont calculées par la formule tel que $R_{ij} = \overline{u_i' u_j'} = c_{ij} k$ où les c_{ij} sont obtenus à partir des mesures expérimentales.

Les modifications dues aux bas nombres de Reynolds peuvent être incorporées pour ajouter les effets de viscosité moléculaire au terme de diffusion afin de prendre en considération l'anisotropie dans le terme du taux de dissipation dans les équations R_{ij} . La fonction d'amortissement de paroi pour ajuster les constantes de l'équation ε

et un taux de dissipation modifié variables, $\tilde{\varepsilon} \left(\cong \varepsilon - 2\nu \left(\frac{\partial k^{1/2}}{\partial y} \right)^2 \right)$ donnent une

modélisation plus réaliste près des parois solides So et al (1991).

3.5 Code « Fluent »

3.5.1 Implémentation sous « Fluent »

Le code « Fluent » est un code commercial très performant qui permet le calcul des écoulements des fluides par la méthode des volumes finis. Il est écrit en langage de programmation C et bénéficie pleinement de la flexibilité et de la puissance offertes par ce langage telle que l'allocation de la mémoire dynamique. En outre, il est basé sur une architecture qui lui permet de s'exécuter simultanément par plusieurs processus sur le même poste ou sur des postes séparés.

Le code « Fluent » est utilisé à travers une interface graphique, le logiciel propose de nombreux modèles physiques et schémas numériques pour modéliser la quasi-totalité des problèmes de base de la mécanique des fluides. Il permet aussi d'adapter ou d'augmenter au besoin l'interface en écrivant des macros et des fonctions de menu, afin d'automatiser certaines procédures qui permettent par exemple de spécifier des conditions initiales et les conditions aux limites, d'ajouter des termes sources à certaines équations, de modifier des lois de comportement au niveau des parois.

La discrétisation dans le code « Fluent » est basée sur la méthode des volumes finis. Les équations intégrales qui gouvernent l'écoulement tels que l'équation de continuité, l'équation de conservation de la quantité de mouvement, celle de l'énergie ainsi que d'autres scalaires, comme la turbulence, sont discrétisées puis résolues par cette méthode. Les principales étapes de calcul peuvent être résumées comme suit :

- Division du domaine en volumes élémentaires de contrôle discrets en utilisant une grille de calcul (maillage).
- Intégration des équations gouvernantes sur les volumes élémentaires de contrôle, afin de construire les équations algébriques pour les variables discrètes dépendantes (les inconnues), telles que les vitesses, pression, température, etc.
- Linéarisation des équations discrétisées et solution du système linéaire des équations qui en résulte.

3.5.2 Procédure sous « Fluent »

L'option « Simple précision ou double précision »

Le logiciel « Fluent » offre deux options de calcul : double précision ou simple précision.

Dans le mode « double précision », les nombres à virgule flottante sont représentés en utilisant 64 bits, alors que le mode « simple précision » utilise une représentation à 32 bits. L'inconvénient de cette précision est que le premier mode de calcul nécessite beaucoup de mémoire dynamique.

Choix de la formulation du solveur

Pour la résolution numérique, « Fluent » offre le choix entre deux options du solveur :

L'option « Segregated », ou individuel (implicite), cette option résout les équations de continuité de mouvement et éventuellement celle de l'énergie, séquentiellement et de manières isolées les unes des autres, cette option est proposée par défaut. Le solveur implicite est classiquement utilisé pour les écoulements incompressibles et modérément compressibles.

L'option « Coupled », ou couplée nommée explicite dans les menus, cette option effectue la résolution des équations gouvernantes simultanément, en d'autres termes couplées les unes aux autres, cependant, les autres scalaires, tels que les quantités de turbulence, sont traitées séparément. Cette option est utilisée pour les écoulements compressibles à grandes vitesses, ce qui lui procure un avantage pour le traitement des écoulements hautement couplés (forte interdépendance entre la densité, l'énergie et les moments) avec des forces de volumes (ex. flottabilité et forces de rotation). Le solveur couplé implicite nécessite presque le double de la mémoire qu'utiliserait le solveur isolé, alors que le solveur couplé explicite conviendra mieux, en terme de besoins en ressource, mais convergera plus lentement que la formulation implicite et n'est conseillé que pour les écoulements instationnaires.

Schémas de discrétisation

Sous le logiciel « Fluent », les variables stockées au centre de la cellule doivent être interpolées aux faces du volume de contrôle.

$$\frac{(\rho\phi)^{t+\Delta t} - (\rho\phi)^t}{\Delta t} \Delta V + \sum_{Forces} \rho_f \phi_f V_f A_f = \sum_{Forces} \Gamma_f (\nabla\phi)_f A_f + S_\phi \Delta V \quad (3.35)$$

Les termes convectifs des équations gouvernantes peuvent être discrétisés par différents schémas proposés, tandis que les termes visqueux sont implicitement discrétisés au second ordre pour plus de précision. Le schéma du second ordre « Upwind » est le plus adapté pour les écoulements convectifs et d'autres choix sont proposés, comme :

- Le schéma « QUICK » (Quadratic Upwind Interpolation for Convective Kinetics), ce schéma est plus précis que le schéma du second ordre pour les écoulements rotationnels et tourbillonnaires (Swirling) dans le cas d'un maillage structuré. Cependant, il ne s'applique pas aux maillages non structurés.
- Le schéma « Power Law » est plus précis que le « First Order Upwind Schem's » pour les écoulements à très bas nombre de Reynolds (<5). Sinon il procure généralement le même degré de précision.

Choix du schéma d'interpolation de la pression

Le schéma « standard » est généralement utilisé pour une grande partie des écoulements et dans le cas des écoulements complexes, il est possible de choisir parmi les options suivantes :

- Le schéma force de volume pondéré « Body-Force-Weighed » est recommandé pour les écoulements avec des forces de volume importantes (ex. convection naturelle).
- Le schéma « PRESTO » (Pressure Staggering Option) est adapté pour les écoulements hautement tourbillonnaires, à grande vitesse de rotation ou des écoulements fortement courbés.
- Le schéma au second ordre convient aux écoulements compressibles, il peut améliorer la précision dans le cas des écoulements incompressibles.

Choix de la méthode de couplage Pression-Vitesse

Si les vitesses sont définies aux nœuds d'un volume de contrôle ordinaire (comme les autres scalaires, pression, température), il est démontré qu'un champ de

pression hautement non uniforme agira comme un champ uniforme sur les équations de quantité de mouvement discrétisées, Versteeg (1995). La solution passe par la définition des vitesses sur une grille décalée « Staggered grid » et l'emploi d'algorithmes tels que « SIMPLE » sert à assurer ce lien ou couplage entre la pression et la vitesse.

La famille d'algorithmes « SIMPLE » est réellement une procédure d'estimation et correction pour le calcul de la pression sur la grille décalée des composantes de la vitesse.

Le code « Fluent » propose trois méthodes pour le couplage pression-vitesse dans le cas de la formulation « isolé ».

- Les deux premières, très similaires, sont la méthode « SIMPLE » (Semi-Implicit Method for a pressure Linked Equation) et la méthode « SIMPLER » (Simple Consistent), cette dernière méthode se différencie de la première par le fait qu'on peut lui assigner un facteur de relaxation (correction) de pression proche de 1, ce qui accélère la convergence dans la plupart des cas, mais peut conduire à des instabilités de la solutions si elle n'est pas choisie judicieusement.
- Méthode « PISO » (Pressure-Implicit with Splitting of Operation) qui fait partie des algorithmes de la famille "SIMPLE". Elle est recommandée pour les écoulements instationnaires ou pour les maillages à éléments très déformés (High lyskewed).

Chapitre 4

Procédure de calcul et résultats numériques

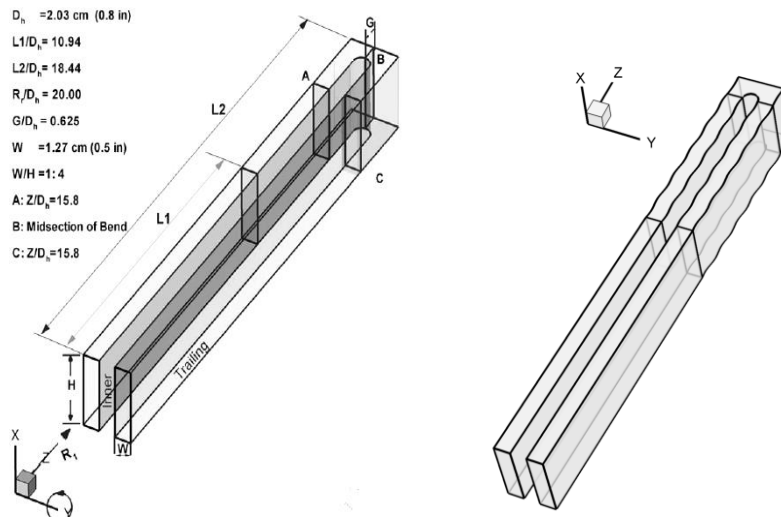
4.1 Description géométrique des canaux testés

La figure 1 montre une vue des deux variantes des canaux testés dans la présente étude pour un même rapport $AR = 1: 4$. Tous les paramètres géométriques, à l'exception de l'ondulation, sont identiques à ceux du canal rectangulaire traité par Guoguang (2004). La longueur totale du canal, L , est égale à 37.47cm, divisée en une section non chauffée lisse de départ ($L_1 = 22,23$ cm) et une section ondulée chauffée ($L_2 = 15,24$ cm). La largeur de canal W est maintenue à 1,27 cm et la hauteur de canal H à 5,08 pour obtenir un rapport d'aspect $AR = W / H = 1: 4$. Le nombre des ondulations et son amplitude ont été fixés dans cette étude à 10 et 0,05 respectivement. La distance de l'orifice d'entrée du canal à l'axe de rotation est donnée par $R_r = 40.64$ cm. Le rayon du coude à 180° est $r_i = 0,635$ cm et la distance minimale G entre les surfaces interne et externe de la courbure est de 1,27 cm. Les deux parois latérales en regard du sens de rotation sont désignées comme des surfaces avant et arrière, tandis que les deux autres sont désignées en tant que surfaces intérieures et extérieures.

Le profil de la surface ondulée est produit par la fonction ci-dessous :

$$f(y) = [1 - b + b(\cos 2\pi n y)] \quad (4.1)$$

où n et b sont respectivement le nombre d'ondulations et de l'amplitude.



(a) Parois lisses (b) Parois ondulées

Fig.(4.1) Géométrie et vue détaillée du canal rectangulaire à deux passes

4. 2 Procédure de calcul

L'écoulement turbulent, moyen et incompressible est décrit par les équations de Reynolds auxquelles sont associées respectivement l'équation de l'énergie et celle du modèle de turbulence choisi. Dans la présente étude, deux modèles de turbulence ont été testés, il s'agit des modèles ; kw SST et le modèle des tensions de Reynolds RSM. Pour la commodité des calculs, toutes les équations sont écrites dans le cas d'un repère tournant en considérant donc un champ de vitesses relatives. Cette approche de calcul, décrite par les équations citées ci-dessus, est justifiée par le fait que :

- le nombre de Mach à l'entrée du canal est assez faible, d'où l'hypothèse de fluide incompressible.
- les variations de densité dues aux différences de température sont estimées à environ 1.1% dans tout le canal. Donc, il est réaliste de négliger la variation de densité provoquée par les gradients de pression induits par la rotation du canal.

Une vitesse constante est fixée à l'entrée du canal ($Z = 0$). L'air de refroidissement devient pleinement développé avant de pénétrer dans la section chauffée du fait que le canal non chauffée ($L1$) est suffisamment long. A la sortie de la conduite, les conditions aux limites de gradient zéro ne sont définies que pour la vitesse moyenne et toutes les quantités de turbulences. Le fluide de refroidissement à l'entrée du canal a une température uniforme $T = T_0$ ou $(\theta = (T - T_0)/(T_w - T_0) = 0)$.

La température de la paroi des sections non chauffées est maintenue constante à $T = T_0$ ($\theta = 0$), tandis que la température de la paroi de la section chauffée est maintenue constante à $T = T_w$ ($\theta = 1$).

Toutes les simulations sont effectuées avec le code de calcul ANSYS Fluent 6.3.26 utilisant la méthode des volumes finis. Un schéma décentré du deuxième ordre est utilisé pour les termes convectifs dans les équations de quantité de mouvement, de l'énergie et de la turbulence. Le couplage pression-vitesse est assuré en utilisant l'algorithme SIMPLE. Les résidus de calcul doivent être inférieurs à 10^{-5} pour parvenir à une solution totalement convergente.

4.3 Maillage

Le domaine de calcul consiste en une grille rectangulaire non uniforme avec un espacement des lignes très fin près des parois afin de résoudre correctement les équations à l'intérieur de la couche limite. La géométrie et le maillage sont générés à l'aide du logiciel Gambit. La figure 2 représente une vue du maillage grossier dans le cas du canal rectangulaire ondulée avec $AR = 1:4$. La hauteur de la première cellule adoptée pour les calculs correspond la valeur y^+ souhaitée (de l'ordre de 5) après avoir effectué un calcul exploratoire à l'aide des modèles de turbulence. Il est également souhaitable d'obtenir une solution de la grille-asymptotiquement indépendante au moyen de la grille raffinée.

Pour déterminer la précision de la solution numérique, l'étude utilise les deux modèles de turbulence sur trois grilles dont le nombre de cellules hexaédriques sont

respectivement: 514 560, 1 165 056 et 1 916 928. Le tableau 1 montre la température de l'air à la sortie pour un nombre de $Re = 10\,000$, deux nombres de rotation ($Ro = 0.0$, $Ro = 0,14$) et un rapport de densité $\Delta\rho / \rho$.

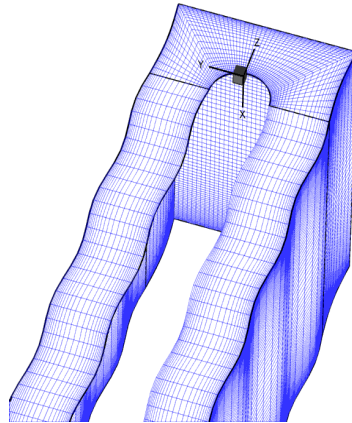


Fig. (4.2) La grille grossière hexaédrique du canal rectangulaire ondulé

Comme on peut le voir, une légère différence de la température de l'air à la sortie du canal rectangulaire est observée entre le maillage moyen et fin. Puisqu'il n'existe pas de différence appréciable entre les solutions des différentes grilles testées, la grille de 1 165 056 est retenue pour la suite des calculs.

La figure 4.3 montre la distribution de y^+ sur la paroi de la partie chauffée du canal obtenue en utilisant le modèle SST $k-\omega$. Cette figure montre que dans l'ensemble du domaine la valeur moyenne de y^+ est de 5 à 7, ce qui assure une bonne résolution des équations dans la couche limite. Cependant la figure montre une valeur de y^+ légèrement élevée dans le côté intérieur du coude du fait sans doute de l'accélération de l'écoulement du fluide.

Géométrie	R_0	Modèles	Maillage grossier	Maillage moyen	Maillage fin
Canal lisse	0.0	SST	313.80	314.55	314.22
		RSM	317.37	320.95	321.27
	0.14	SST	314.65	314.25	314.19
		RSM	318.50	316.80	316.15
Canal ondulé	0.0	SST	314.90	314.50	314.81
		RSM	320.04	321.46	320.34
	0.14	SST	315.18	315.10	314.50
		RSM	321.03	319.20	318.86

Tab. (4.1) Les prévisions de température de sortie en comparaison entre le canal rectangulaire lisse et ondulée ($Re = 10\ 000$, $\Delta p / \rho = 0,13$) pour les différentes grilles

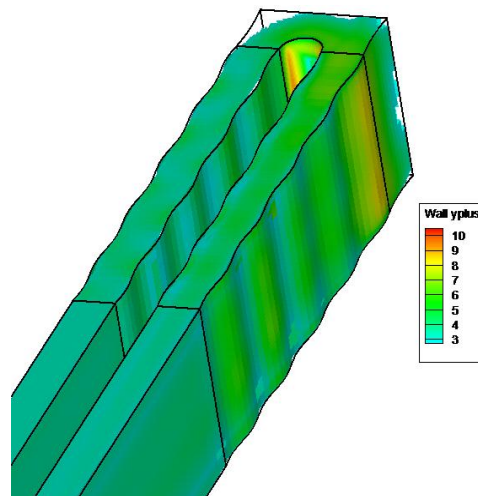


Fig.(4.3) Distribution de y^+ sur la partie chauffée du canal par le modèle SST-k- ω

4.3 Résultats et discussion

Cette section présente l'écoulement tridimensionnel moyen, le champ de température et les ratios de nombre de Nusselt pour les conduites testées. La figure 4.4 représente la variable adimensionnelle θ du contour de la température et le champ de vecteurs de vitesse dans la section chauffée au plan médian du canal pour un nombre de Reynolds $Re = 10\ 000$, un nombre de rotation $R0 = 0,14$ et le rapport de densité $\Delta\rho / \rho = 0,13$. On voit clairement que la région de l'air froid diminue au niveau du coude et se concentre encore au centre du premier passage. Le transfert de chaleur est sensiblement différent de la seconde passe par la présence des écoulements secondaires induits par le coude.

Aux angles de la courbure, de minces couches limites thermiques sont formés. On peut voir que le fluide à grande vitesse entrant dans le coude cogne la paroi extérieure. Comme le flux tourne dans le second passage, la circulation à grande dynamique frappe à nouveau la paroi extérieure. Ces empiétements de flux produit deux régions d'enrichissement de transfert distincts à haute température le long de la paroi extérieure qui sera discuté en détail dans la section suivante. Dans le premier passage, le profil de vitesse indique un écoulement pleinement développé, au début du coude à 180° , l'écoulement semble être accéléré près de la face interne et une séparation se produit pratiquement au même emplacement de la limite thermique couche. Lors du second passage, le débit est plus accéléré dans le côté extérieur.

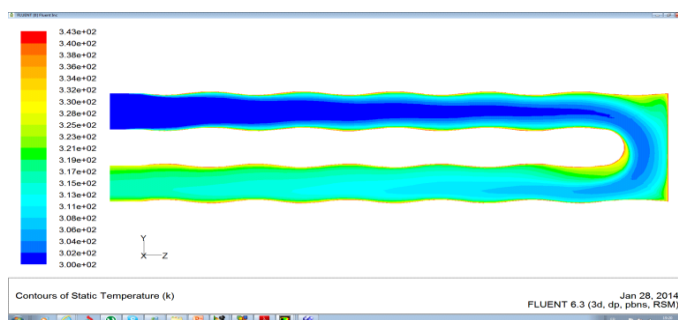


Fig.(4.4) (a) Température sans dimension dans le plan médian du canal en rotation ($R0= 0,14$; $\Delta\rho/ \rho = 0,13$)

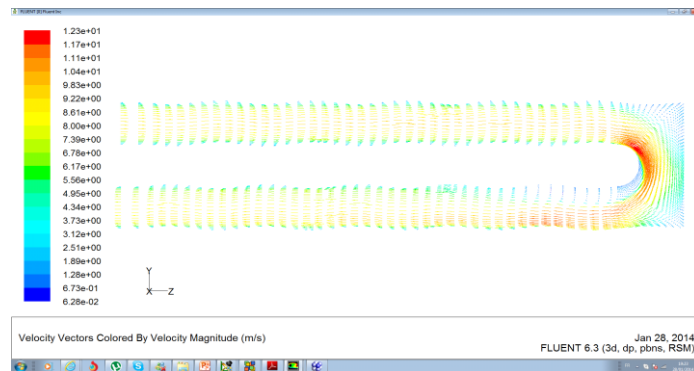
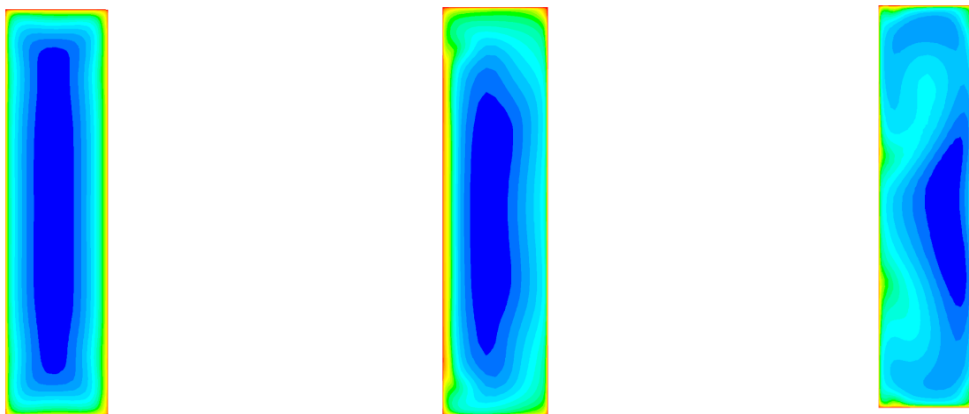


Fig.(4.4)(b) Vecteurs vitesse dans le plan médian du canal en rotation
 ($Ro = 0,14$; $\Delta\rho / \rho = 0,13$)

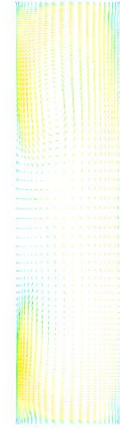
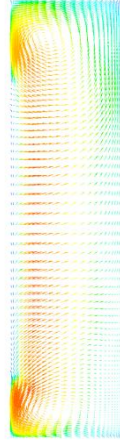
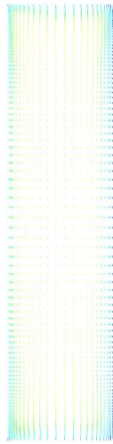
La figure 4.5 montre le contour de la variable θ et le champ de vitesse pour $Re = 10\ 000$, $Ro = 0,14$ et $\Delta\rho / \rho = 0,13$ pour trois positions axiales (A) ($Z / Dh = 15,8$), (B) (section médiane de la courbure), et C ($Z / Dh = 15,8$) comme il est noté dans la figure. On remarque une parfaite symétrie dans la distribution de température à la section A, et presque pas d'écoulement secondaire. A la section B, située exactement au milieu du coude à 180° , la distribution de la température est différente à celle de la section précédente. L'air froid est concentré au centre et le transfert de chaleur se produit derrière la surface extérieure. L'anisotropie des contraintes de Reynolds turbulent produit de petits tourbillons de coin secondaires dans cette section. Lorsque le fluide s'écoule à travers le coude à 180° , la section de passage se rétrécit à cause des tourbillons et le fluide est poussé vers la surface intérieure comme on le voit dans la section (B).



Station (A)

Station (B)

Station (C)



Station (A)

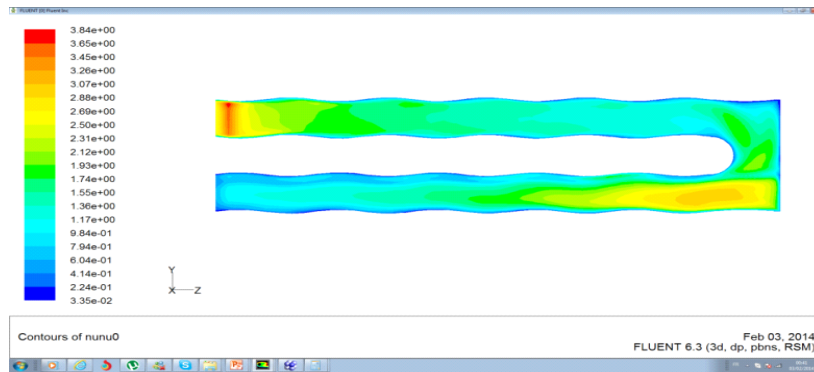
Station (B)

Station (C)

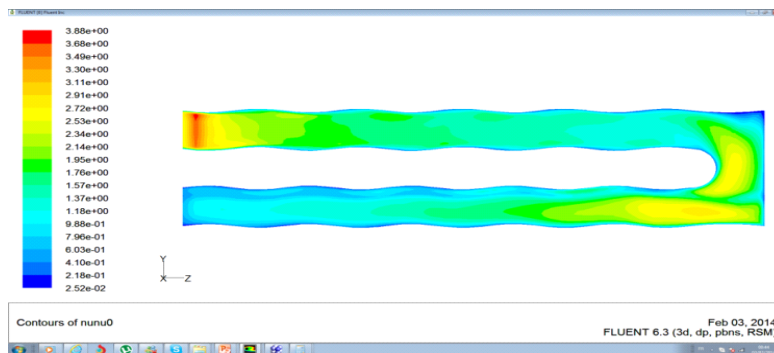
Fig. (4.5) Temperatures et vecteurs vitesse dans le plan médian du canal en rotation
($Re=10\ 000$, $Ro = 0,14$, $\Delta\rho/\rho = 0,13$)

La figure 4. 6 montre les contours Nu / NU_0 sur les surfaces avant et arrière du canal ondulé avec un rapport $AR = 1: 4$ pour le cas de rotation ($Re=10\ 000$, $Ro= 0,14$; $\Delta\rho/\rho=0,13$). Dans le premier passage du canal, le rapport du nombre de Nusselt est élevé près de l'entrée du fait des couches limites thermiques minces. Le transfert de chaleur dans le coude est élevé en raison des écoulements secondaires induits par les forces centrifuges et les gradients de pression associée. En aval, dans le second passage, le coefficient de transfert de chaleur diminue et asymptotiquement se rapproche de celui de la valeur du cas de l'écoulement pleinement développé.

Dans le premier passage, le rapport du nombre de Nusselt sur la surface arrière est supérieur à celui trouvé sur la surface d'attaque. En revanche, dans le second passage, le rapport du nombre de Nusselt sur la surface d'attaque est plus élevé que celle sur la surface arrière. Ceci est en bon accord avec l'analyse des champs de flux et de température. Le rapport du nombre de Nusselt augmente de manière significative dans le coude. Pour la surface de fuite, le ratio de nombre de Nusselt augmente fortement dans le sens de l'écoulement et atteint une valeur maximale dans la région de courbure. Dans le deuxième passage, le rapport du nombre de Nusselt diminue progressivement le long du canal.



Surface arrière



Surface avant

Fig. (4.6) Nombre de Nusselt canal chauffé ($Re = 10\ 000$, $Ro = 0,14$, $\Delta\rho / \rho = 0,13$)

La figure 4.7 présente les nombres de Nusselt moyens sous forme de rapport numérique du canal lisse sans rotation prédit par les deux modèles de turbulence $k-\omega$ SST et RSM par rapport aux données expérimentales obtenues par Fu et al. (2004). La présente simulation est réalisée avec les conditions opératoires suivantes ($Re = 10\ 000$; $Ro = 0$; $\Delta\rho / \rho = 0,13$). Pour les deux surfaces arrière et avant, on voit que les prédictions numériques obtenus par le modèle $k\omega$ SST sont en accord avec les données expérimentales dans le premier passage alors que le modèle RSM prédit bien le transfert de chaleur dans le second passage. La différence peut être due au fait que les conditions d'écoulement et les conditions aux limites thermiques ne sont pas complètement compatibles avec l'état idéalisé dans la prévision numérique. Au niveau du coude à 180° et du second passage, le RSM semble être mieux que le modèle SST $k-\omega$ et il sera retenu pour les calculs suivants.

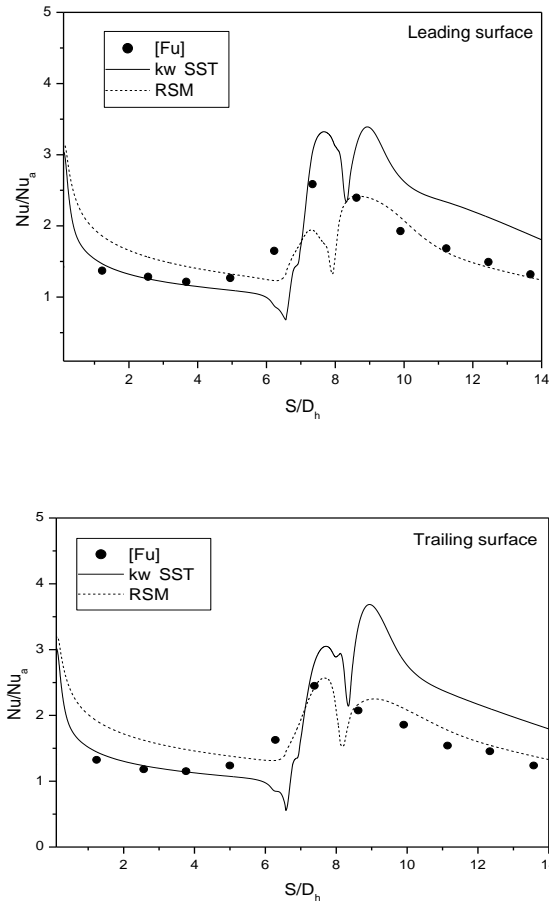


Fig.(4. 7) Comparaison entre le nombre de Nusselt calculé et mesuré pour le canal lisse sans rotation et en rotation ($Re = 10\ 000$, $Ro = 0.0$, $\Delta\rho / \rho = 0.13$)

La figure 4.8 compare le rapport de transfert de chaleur sur l'arrière et les surfaces principales du canal rectangulaire à la fois lisse et ondulée dans les mêmes conditions de fonctionnement ($Re = 10\ 000$, $Ro = 0,14$, $\Delta\rho / \rho = 0,13$). On voit clairement que le canal ondulé avec une amplitude de 0,05 améliore le transfert de chaleur au niveau des bords extérieurs et intérieurs de la conduite en particulier dans la région du coude à 180° où une augmentation nette du nombre de Nusselt est constatée.

Comme on peut le voir sur cette figure, l'effet de l'ondulation augmente le nombre de Nusselt local et par conséquent le transfert de chaleur. En plus, le transfert de chaleur est plus intensifié à la sortie. Physiquement, l'écoulement turbulent est plus freiné à l'intérieur du canal par la présence des crêtes d'ondulation d'accumulation de transfert de chaleur supplémentaire et donc une nette augmentation de la température de l'air à la sortie.

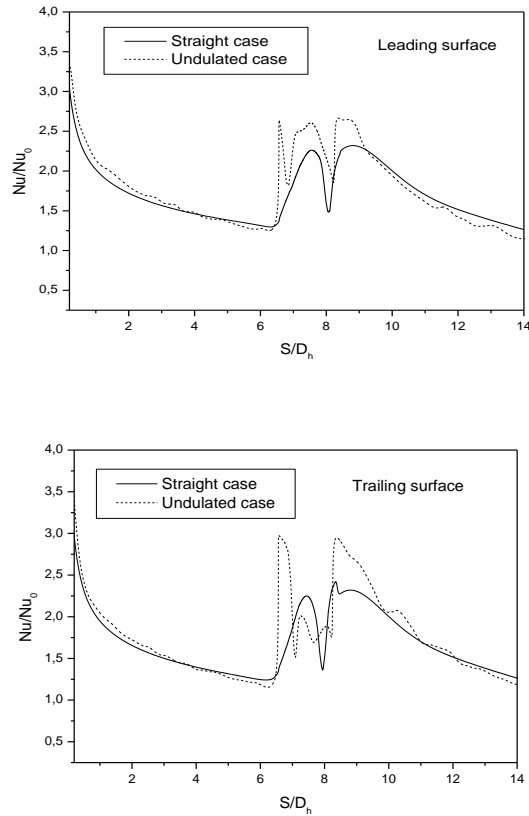


Fig.(4.8). Comparaison des rapports du nombre de Nusselt le canal lisse et ondulé en rotation ($Re = 10\ 000$, $Ro = 0,14$, $\Delta\rho / \rho = 0,13$)

Le tableau 4.2 montre l'amélioration quantitative de la proportion de transfert de chaleur en comparant le nombre de Nusselt sur l'arrière et les surfaces principales des deux configurations; lisse et ondulée. Un gain net est obtenu allant de 4,8% sur la surface arrière et pratiquement la valeur double de 9,6% sur la surface d'attaque.

La comparaison de la température de l'air à la sortie de la seconde passe, montre une différence de 2,4 K est améliorée grâce à des parois ondulées.

	Lisse	Ondulée
Nu Surface arrière	143.45	150.34
Nu Surface avant	140.61	154.11

Sortie Température (K)	316.8	319.2
---------------------------	-------	-------

Tab.(4.2) Comparaison des caractéristiques de transfert de chaleur entre le canal lisse et ondulé

La figure 4.9 illustre les distributions locales des coefficients de pression pour le canal rectangulaire au plan médian et les sections A, B et C dans les conditions d'exploitation ($Re=10\ 000$, $Ro = 0,14$, $\Delta\rho / \rho = 0,13$). On remarque que le gradient de pression dans la direction X n'est présent que dans la partie coude. Aucune différence significative n'est observée pour les sections A et C contrairement à la section B, où la variation de pression est considérable. La diminution de la pression dans la partie intérieure du coude a tendance à augmenter la magnitude de vitesse dans cette région. Sur la partie extérieure du coude à 180° , où l'écoulement semble être arrêté, la pression atteint son maximum.

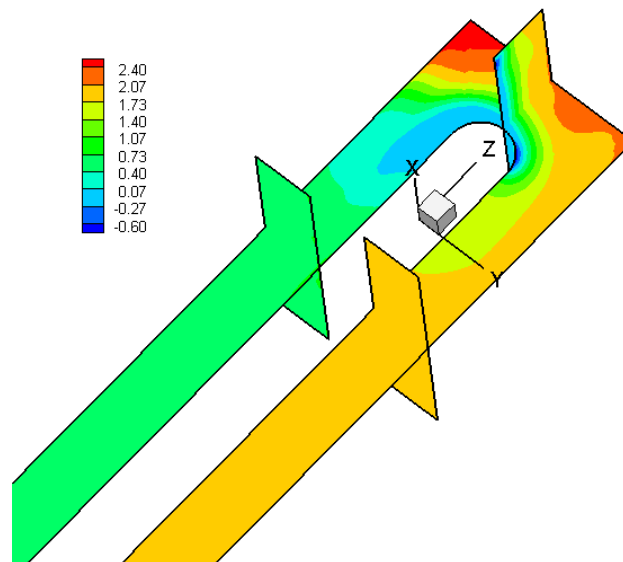


Fig.(4.9) Distribution du coefficient de pression sur les sections A, B et C du plan médian ($Re=10000, Ro=0,14 ; \Delta\rho/\rho=0,13$)

Chapitre 5

Conclusion

L'écoulement de l'air froid à travers un canal en U, de petite section, tournant à une vitesse de rotation constante et dont les parois supérieure et inférieure sont chauffées à température constante, est simulé numériquement. Cette étude trouve son application dans divers domaines d'ingénierie en particulier le secteur de l'aéronautique.

Dans cette investigation, deux configurations de canaux ont été choisies pour la simulation. La première est un canal à parois lisses idem à celui expérimenté par d'autres chercheurs et servant à la validation de l'approche numérique proposée dans cette étude. La deuxième est un canal dont les dimensions sont identiques au canal lisse mais ses parois chauffantes sont ondulées.

L'étude consiste à calculer pour les deux configurations la température de sortie de l'air introduit à l'intérieur du canal dans le but d'absorber le maximum de chaleur dégagée par les parois supérieure et inférieure. L'écoulement à l'intérieur des deux canaux est réputé être turbulent, permanent et tridimensionnel auquel est associé un transfert de chaleur par convection forcée. Le calcul est effectué pour un rapport AR de 1: 4 à l'aide du code Fluent en utilisant deux modèles de turbulence en l'occurrence SST k-oméga et RSM.

Les résultats des calculs relatives à la configuration lisse ont été comparés avec succès aux résultats à la fois numériques et expérimentales obtenus par d'autres chercheurs. En outre, il semble que le modèle de turbulence RSM est plus apte à prédire correctement l'échange de chaleur dans le canal et en particulier dans la région du coude à 180°.

Pour la configuration ondulée, il s'avère que le fluide qui circule à l'intérieur du canal absorbe plus de chaleur que la configuration lisse. Ceci est bien visible en comparant les distributions du nombre de Nusselt local pour les deux configurations. Cependant l'écart de température à la sortie est faible entre les deux configurations. Bien que les surfaces ondulées dans le canal ont permis de retarder légèrement l'avance de l'air dans le canal, lui permettant de capter plus de chaleur, la vitesse de l'écoulement, si importante, a causé un décollement de couche limite dans les creux

des ondulations qui a eu pour effet d'obstruer ces zones au fluide circulant. L'effet escompté des ondulations ne se fera probablement sentir qu'en diminuant la vitesse de l'air à l'intérieur du canal dans le but d'éviter la formation des zones de recirculation dans les creux des ondulations qui ferment le passage au fluide et écourtent la durée de contact entre le fluide caloporteur et la paroi. Autrement dit l'écoulement de l'air à l'intérieur du canal devrait être laminaire pour tirer le maximum d'avantages de la surface ondulée.

Références bibliographiques

- Al-Qahtani, M. S., Jang. Y. J., Chen, H. C., 2002, "Prediction of flow and heat transfer in rotating two-pass rectangular channels with 45-deg rib turbulators", *Journal of Turbomachinery* 124 (2), pp.242-250.
- Aroon K. Viswanathan, Danesh K Tafti
"Detached eddy simulation of flow and heat transfer in fully developed rotating internal cooling channel with normal ribs"
Int.J.Heat.Fluid.Flox 27(2006) 351-370.
- Azzi A., "Thèse de Doctorat d'état " Investigation numérique du refroidissement par film appliqué aux aubes des turbines à gaz " 2001.
- Basha M., Al-Qahtani M., Yilbas. Shadana B. S. , "Entropy generation in a channel resembling gas turbine cooling passage : Effect of rotation number and density ratio on

entropy generation” *Sadhana* Vol. 34 pp : 439-454, 2009

- Boelter L.M.K, Young G. and Iverson H.W., 1948, “An investigation of aircraft heaters- Distribution of heat transfer rate in the entrance section of a circular tube” NACA TN 1451, Washington DC.
- Bu-Yang Li, Nan-Sheng Liu, Xi-Yun Lu “Direct numerical simulation of wall-normal rotating turbulent channel flow with heat transfer”. *Int. J. Heat. and Mass. Transfer* 49 (2006) 1162-1175.
- Chang S.W and Morris” Heat transfer in a radially rotating square duct fitted with in-line transverse ribs” *Inter.J. of Thermal Sciences* 42 (2003) 267-282.
- *Chen, H. C., Jang, Y. J., Han, J. C., 2000, "Near-wall second-moment closure for rotating multi-pass cooling channels", Journal of Thermophysics and Heat Transfer* 14 (2), pp. 201-209.

- *Chorin A. J., Numerical solution of the Navier-Stokes equations, Math.*

Comput., Vol. 22, 1968.

- Clifford R.J. Morris W.D and Harasgama S.P., 1984 “ An experimental study of local and mean heat transfer in a triangular-sectioned duct rotating in the orthogonal mode” ASME J. of Engineering for gas turbines and power, Vol. 106.pp.661-667.
- Dutta, S., Andrews, M. J., Han J. C., 1996, "Prediction of turbulent heat transfer in rotating smooth square ducts", International Journal of Heat and Mass Transfer 39(12), pp. 2505-2514.
- *Fu, W.L., Wright L., Han, J. C., 2004, "Heat transfer in two-pass rotating rectangular channels (AR = 1:2 and AR = 1:4) with 45° angled rib turbulators” ASME Paper GT2004- 53261.*
- *Hong-Min K, Kwang-Yong K “Shape optimization of three-dimensional channel roughened by angled ribs with RANS analysis of turbulent heat transfer” Inter.J. of Heat and Mass Transfer 49 (2006) 4013-4022.*

- Iacovides, H., Launder, B.E., Li, H.Y., 1996, "The computation of flow development through stationary and rotating U-ducts of strong curvature", *Int. J. Heat Fluid Flow* 17 (1), pp. 22–33.
- Iacovides H., Kelemenis G., Raisee M. "Flow and heat transfer in straight cooling passages with inclined ribs on opposite walls: an experimental and computational study" *Experimental Thermal and Fluid Science* 27 (2003) 283–294.
- Lakshminarayana B. (1996) *Fluid Dynamics and Heat Transfer in Turbomachinery*, Wiley, New York.
- Johnson, B. V., Wagner, J. H, Steuber, G. D., 1994, "Heat transfer in rotating serpentine passages with trips skewed to the flow", *Journal of Turbomachinery* 116(1), pp.113-123.
- Jones, J. P., 1979. *A Comparison Problem for Numerical Method in Fluid Dynamics: The Double Glazing Problem. Numerical Methods in Thermal Problem*, Pine ridge Press, Swansea, UK, pp: 338-348.
- Girault V., P.A. Raviart, *Finite element methods for Navier –Stokes equations*, Springer Verlag, 1986.
- Guoguang, S., Hamn-Ching, C., Je- Chin, H., 2004, "Computation of flow and heat transfer in rotating two-pass rectangular channels (AR = 1:1, 1:2, and 1:4) with smooth walls by a Reynolds stress turbulence model", *Int. J. Heat Mass Transfer* (47), pp. 5665–5683.
- Launder B.E, Reece G.J et Rodi W., "Progress in the development of a Reynolds stress turbulence closure" *J.Fluid Mech* (1975)
- Lee E, Wright L.M., Han, 2003 J.C., "Heat transfer in rotating rectangular channels (AR = 4:1) with V-shaped and angled rib turbulators with and without gaps", *ASME Paper Number GT-2003-38900*.

- Mallinson, G. D. and De Vahl Davis, G., 1973. *The Method for the False Transient for the Solution of Coupled Partial Differential Equation*. *J. Computation Physics*, 12, pp: 435-445.
- Menter F. R.. *Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications*. *AIAA Journal*, 32(8):1598-1605, August 1994.
- McGrath D.M. Tse D.G.N, 1995, "A combined experimental/ computational study of flow in turbine blade cooling passage. Part 2.Numerical simulations", Paper 95-GT-149, ASME.
- Morris W.D and Chang S.W. "An experimental study of heat transfer in a simulated turbine blade cooling passage", *Int. J. Heat Mass Transfer*. Vol 40 No.15.pp.3703-3716,1997.
- Parsons JA, Chin Han J. and Zhang Yuming "Wall heating effect on local heat transfer in a rotating two-pass square channel with 90° rib turbulators" *Int.J.Heat ass ransfer* . Vol.37 No 9 pp.1411-1420, 1994.
- Patankar S. V. & D. B. Spalding, *A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows*, *Int. J. Heat Mass Transfer* Vol. 15, (1972) 1787-1806.
- Prakash, C., and Zerkle, R., 1992, " Prediction of Turbulent Flow and Heat Transfer in a Radially Rotating Square Duct.," *ASME J. Turbomach.*, 114, pp. 835–846.
- Spalart Philippe, *Reflections on RANS* Modeling*, Boeing Commercial Airplanes, Spalart, June-August 2012
- Su G., Teng S., Chen H.C., Han, 2003 J.C., "Computation of flow and heat transfer in rotating rectangular channels (AR = 4) with V-shaped ribs by a Reynolds stress turbulence model", *ASME Paper GT2003-38348*.
- Wagner, J. H, Johnson, B. V., Han, J. C., 1991, "Heat transfer in rotating passages with smooth walls and radial outward flow", *Journal of Turbomachinery*, 113(1),pp. 42-51.

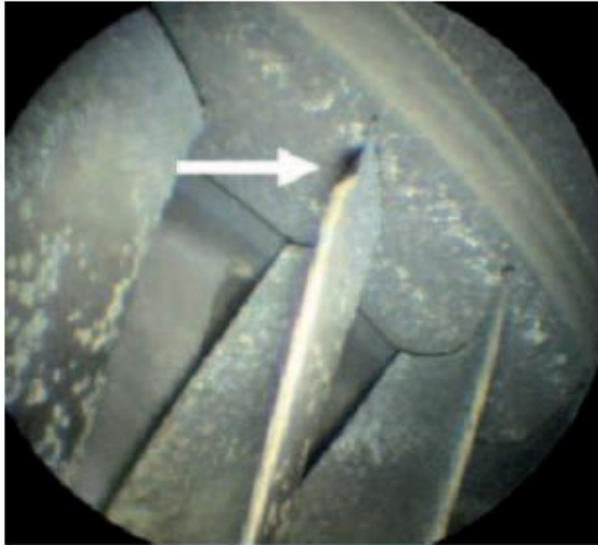
- *Wagner, J. H., Johnson, B. V., Kopper, F. C., 1991, "Heat transfer in rotating serpentine passages with smooth walls", Journal of Turbomachinery, 113(3), pp. 321-330.*

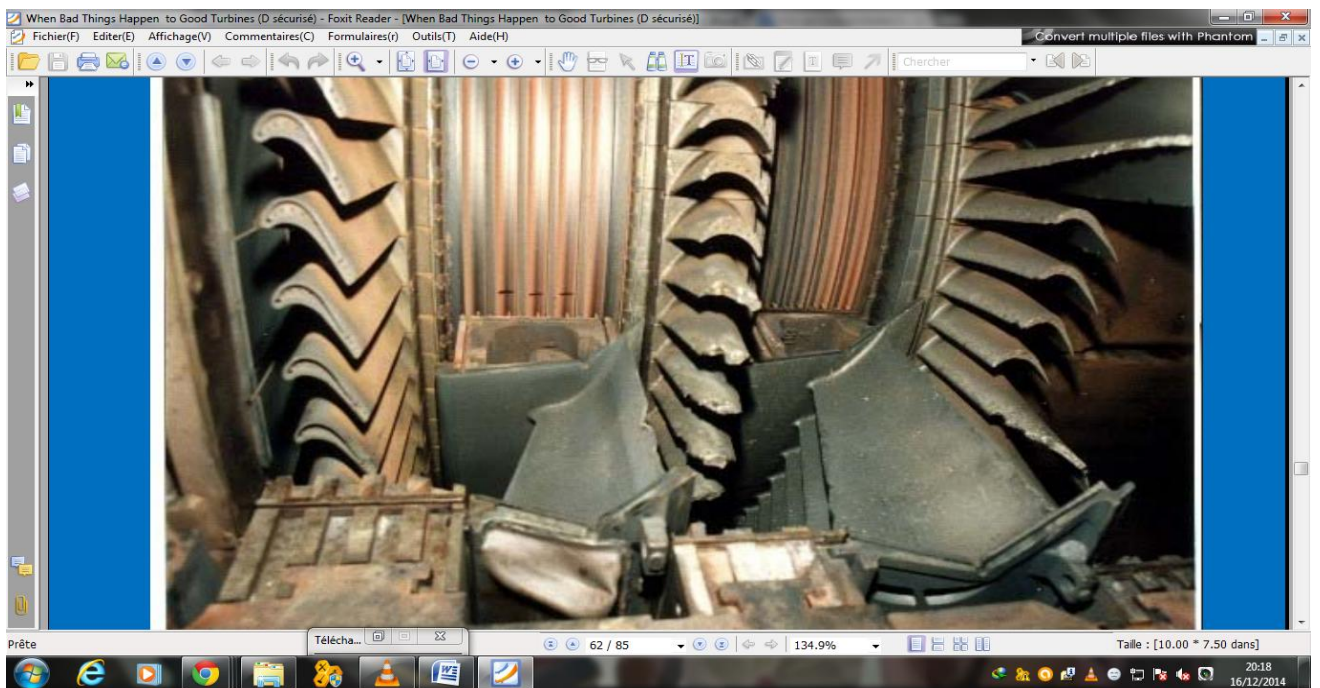
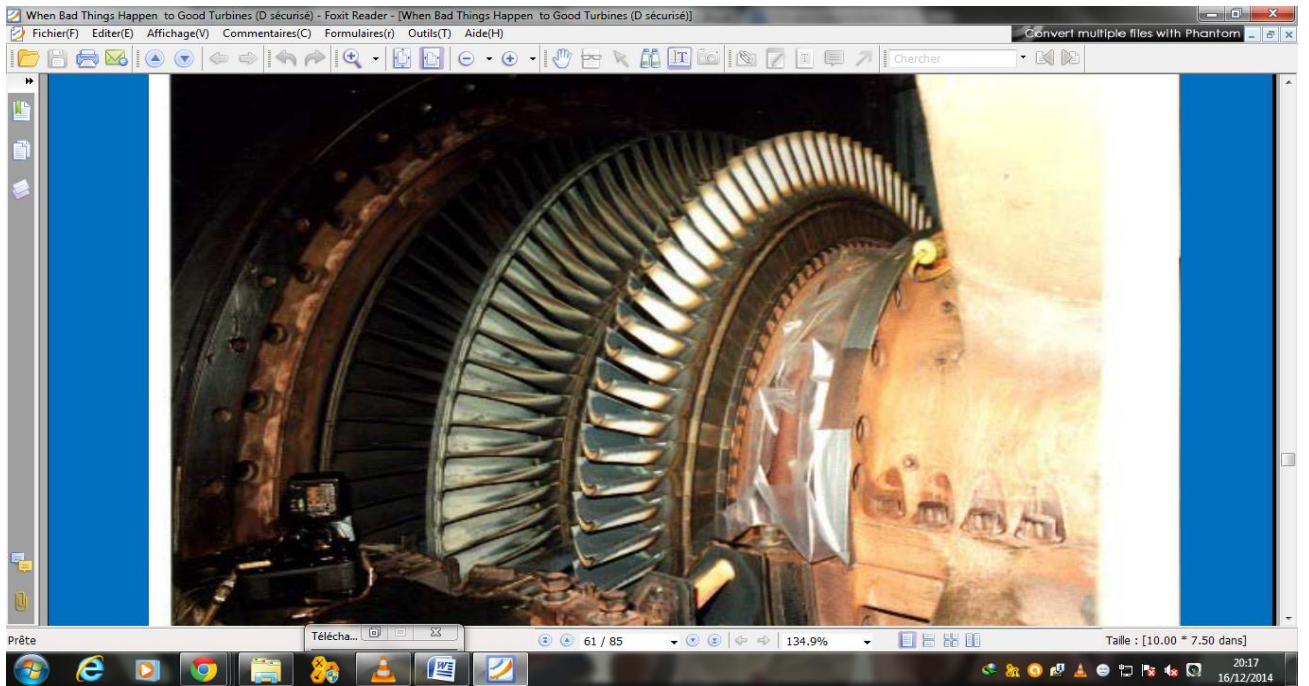
- **Wilcox D. C. . Turbulence Modeling for CFD.
DCW Industries, Inc., La Canada, California,
1998.**

- *Yoji O. and Shigemichi Y. (2003) Book "Gas Turbine Engine".*

Annexe 1 :









Annexe 2 :

Les différentes techniques de refroidissement utilisées pour les aubes des turbines à gaz sont présentées sur la figure (1).

Bien évidemment, l'air constitue le fluide refroidissant employé dans le domaine de l'aviation. Ce sera aussi la seule variante considérée dans cette étude. L'air de refroidissement est généralement soutiré à la sortie du compresseur introduisant ainsi, suivant le cas, soit une diminution du rendement de la machine, soit une augmentation de la consommation en combustible. Il est ainsi requis des ingénieurs d'optimiser la quantité d'air extraite de sorte que la performance globale du turboréacteur n'en serait que légèrement affectée, tout en gagnant sur la protection des aubes par le biais du refroidissement.

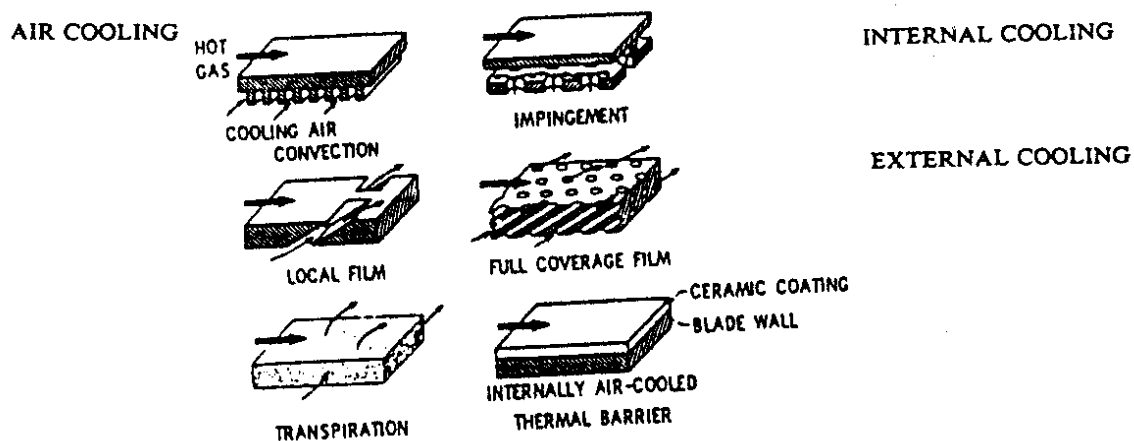


Figure 1 : Différentes techniques de refroidissement des aubes de turbines à gaz.

(Lakshminarayana, 1996)

Les travaux de Lakshminarayana (1996), classent les procédés de refroidissement en deux grandes catégories : les refroidissements internes et les refroidissements externes. La première catégorie englobe la convection forcée et le jet interne. Ces procédés sont moins efficaces que le refroidissement externe et sont par conséquent utilisés pour les turbines dont la température amont varie entre 1300 et 1600°K. Ceci est en partie imputé au fait que les caractéristiques thermiques de l'air sont assez limitées. Le refroidissement externe, tel que le refroidissement par film et par transpiration à travers des surfaces poreuses, sont plus efficaces et sont par conséquent réservés pour des températures amont dépassant 1600°K.

1. Refroidissement par convection

Le refroidissement par convection est la plus simple technique à réaliser. C'est d'ailleurs le premier procédé utilisé pour les premières générations des turbines à gaz. Le fluide refroidissant passe à plusieurs reprises à travers des conduites

judicieusement aménagées dans le corps des aubes et du rotor. Il est ensuite éjecté par des trous positionnés sur les bords de fuites des aubes. Le refroidissement se fait alors par convection forcée.

2. *Refroidissement par impact*

Ce procédé est une amélioration du refroidissement par convection, figure (1-3). Il est réalisé par un aménagement spécial à l'intérieur des aubes de telle manière à créer des jets internes permettant un refroidissement plus efficace que par convection. Cette technique est généralement utilisée dans la zone du bord d'attaque de l'aube, une région particulièrement vulnérable du fait qu'elle est exposée directement aux gaz à hautes températures.

3. *Refroidissement par film*

Dans ce cas, l'air de refroidissement est injecté directement dans l'espace inter-aube, figure (1). La fine couche de fluide froid ainsi formée sur la surface de l'aube joue le rôle d'un tampon protégeant la surface du fluide chaud. L'injection se fait à travers une ou plusieurs rangées de trous reliant le passage interne de l'air froid à la surface extérieure. Plusieurs configurations peuvent être envisagées : (i) forme et disposition variables des orifices d'injections, (ii) l'espacement entre trous, rangées et leurs angles d'injection par rapport à l'axe de l'aube.

4. *Refroidissement par transpiration*

Pour ce fait, on utilise un matériau poreux permettant à l'air de refroidissement de s'infiltrer à travers les parois à refroidir, figure (1). Ce procédé permet entre autre une distribution plus homogène du fluide refroidissant sur la surface que par le biais du refroidissement par film, d'où une meilleure efficacité de refroidissement. Néanmoins, à cause des difficultés de construction, ce procédé reste réservé à des applications très restreintes.

Une analyse des différents procédés de refroidissement introduits plus haut nous amène à dire que le principe le plus simple est sans doute celui effectué par convection, surtout que les autres procédés fragilisent l'aube et que les orifices sont susceptibles de provoquer des vibrations de la turbine. Des corps étrangers peuvent aussi obturer ces trous d'où une influence sur le comportement thermique de la turbine. Ces corps étrangers peuvent être dus à l'oxydation ou transportés par l'air lui-même. Néanmoins, les trois premiers procédés sont largement utilisés dans les turbines modernes et sont souvent utilisés conjointement comme le montre la figure (2).

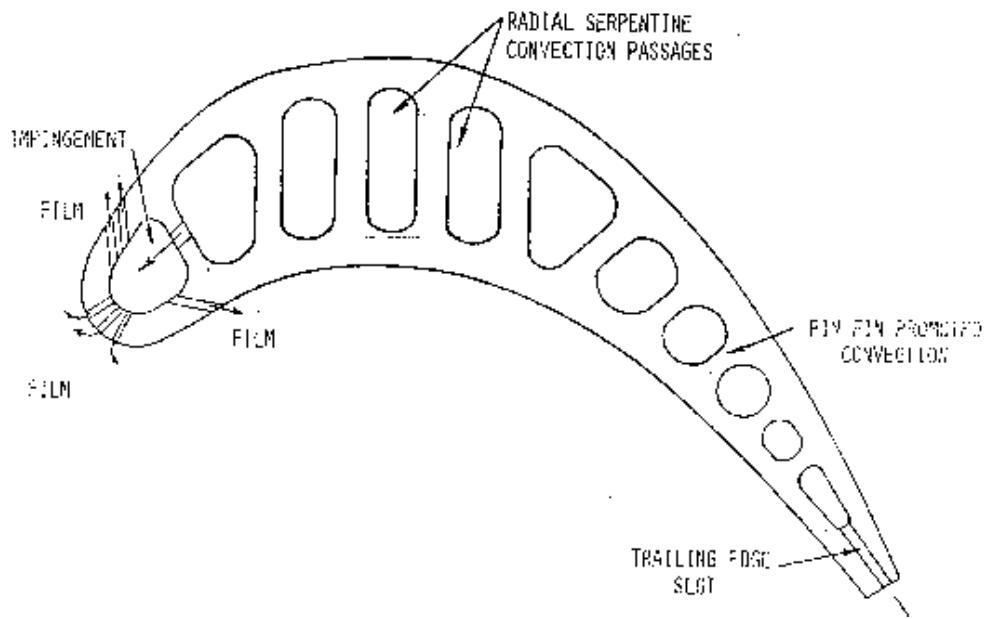


Figure 2 : Exemple typique d'une aube à haute pression utilisant conjointement le refroidissement par film, par jet interne et par convection, (Elovic, 1976).

1. Description de la turbulence

Le problème des écoulements et du transfert de chaleur relève de la résolution des équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Actuellement, il existe deux techniques pour approcher le problème de la turbulence dans le fluide. La première méthode est dite "modélisation de la turbulence". Elle consiste à décomposer le champ de la vitesse et de la température en une composante moyenne et une fluctuation turbulente. Le système d'équations résultant (*Reynolds Averaged Navier-Stokes equations, RANS*) quantifie ainsi le comportement de l'écoulement moyen. Mais la non-linéarité des équations fait apparaître un nouveau terme, reflétant l'effet de la turbulence sur le champ moyen, qu'il faut modéliser. Ce problème est connu sous l'acronyme de "problème de fermeture" où l'on dispose d'un nombre d'équations inférieur au nombre d'inconnues. Une variété de modèles est à présent disponible dans la littérature, allant du plus simple (à zéro équation) au plus complexe (*Reynolds Stress Model, RSM*). Malheureusement aucun de ces modèles n'est optimisé pour tous les cas de figures. La règle générale consiste à adapter le modèle au problème posé. Toutefois, le modèle à deux équations $k - \varepsilon$ de Launder & Spalding (1974) est de loin le modèle le plus utilisé et considéré comme étant universel. Malgré un certain nombre de limites que nous développerons un peu plus loin, ce modèle est pratiquement implémenté dans tous les codes de calcul commerciaux.

L'idée maîtresse derrière la modélisation de la turbulence repose sur l'analogie que l'on fait avec la phénoménologie de celle-ci : on se base ainsi sur la description des structures dont les tailles des plus grosses pouvant avoir celles de la géométrie du domaine de l'écoulement aux plus petites dites de Kolmogorov. Les premières sont appelées structures énergétiques parce qu'elles transmettent l'énergie reçue aux structures de taille plus faible (phénomène de cascade). Elles sont fortement anisotropes. Les plus petites sont appelées structures dissipatrices (ou de *Kolmogorov*) ; Ainsi l'énergie reçue des macro-structures est directement dissipée sous forme de chaleur. Les micro-structures sont par contre isotropes et indépendantes de la spécificité de l'écoulement. L'approche par cette logique indique que la turbulence peut être définie par deux échelles : une

échelle de longueur et une deuxième de temps. La première est en rapport avec la taille des structures turbulentes, et la deuxième avec leur durée de vie, et c'est principalement l'idée des modèles de turbulences conventionnels.

La seconde méthode est la simulation directe (*Direct Numerical Simulation, DNS*). Dans laquelle toutes les structures de la turbulence (macro- et micro-structures) sont résolues directement et sans le recours à des approximations. Ceci n'est possible que par le biais d'une résolution très fine des équations instantanées de Navier-Stokes. C'est à dire que l'algorithme utilisé devra être suffisamment précis (en espace et en temps) pour capter toutes les échelles de longueur et de temps de la turbulence. Malheureusement, le spectre des échelles de la turbulence est tellement large (proportionnel au nombre de Reynolds) que les pas de discretisation (espace et temps) indispensables dépassent de loin les capacités de stockage et de calcul des meilleurs calculateurs actuels.

Une autre méthode aussi sophistiquée que la DNS, mais moins onéreuse est connue sous le nom de "simulation des macro-échelles" (*LES, Large Eddy Simulation*). Elle consiste à filtrer (en espace) les échelles de la turbulence pour ne résoudre "directement" que les macro structures, et modéliser les petites structures par le biais de modèles plus ou moins simples, dits "modèles de sous-maille" (*subgrid models*). Cette technique (*LES*) a le mérite de donner des résultats d'une précision comparable à celle de la *DNS*, mais à moindre coût. Pour des raisons strictement techniques (puissance de calcul) les méthodes de simulation (*DNS* et *LES*) sont réservées aux écoulements à faible nombre de Reynolds et pour des configurations géométriques simples. Pour les applications pratiques et industrielles les méthodes statistiques de modélisation à partir des équations moyennes de Reynolds sont incontournables et le seront probablement pour assez longtemps.

Dans le but d'être explicite et plus complet nous évoquons certains chercheurs de renommée qui ont compilé des ouvrages plus ou moins complet sur la turbulence et les méthodes liées à son étude. Nous citons, à titre d'exemple : Launder (1972), Bradshaw (1981), Nallasamy (1987), Hinze (1975), Rodi (1980) etc. Dans les ouvrages de Schlichting (1979), et de Cousteix (1989), la couche limite turbulente est amplement étudiée. Alors que Mohammadi (1994), a consacré son ouvrage à la présentation mathématique du modèle $k - \varepsilon$. Lakehal (1999), dans son récent rapport a introduit pratiquement toutes les méthodes actuelles de traitement numérique de la turbulence, y compris les modèles algébriques et la *LES*.

Le but visé dans ce chapitre est de présenter le plus clairement possible et sans trop de détails le modèle mathématique utilisé dans ce travail ayant servi à la prédiction du refroidissement par film. Ce modèle repose sur les équations de Navier-Stokes et un modèle de turbulence, en l'occurrence le modèle $k - \varepsilon$. Nous consacrerons une attention particulière à la modification de Bergeles et cinq modèles algébriques de type *EASM* (*Explicit Algebraic Stress Model*).

2. Equations de transport

2.1 Equations de Navier- Stokes

Pour un fluide Newtonien, incompressible, isotherme et à propriétés constantes, les équations de Navier-Stokes s'écrivent sous la forme :

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0; \quad (II-1)$$

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 v_i + \rho g_i; \quad i = 1,2,3 \quad (II-2)$$

où $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ représente la dérivée substantielle (totale), ρ la masse volumique, g

l'accélération de la pesanteur, et μ la viscosité dynamique,

La sommation d'Einstein s'applique, dans le sens où pour chaque index i , une sommation

suivant l'index j est nécessaire. Par exemple, $\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \phi_i}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi_i}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi_i}{\partial x_3}$

Le premier terme de l'équation (II-2) correspond à l'accélération du fluide comprenant une première partie dépendante du temps et une deuxième décrivant la convection par la

vitesse v_i . Le terme non linéaire $\left(v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$ de l'équation (II-2) représente la principale difficulté dans la résolution de ce système.

2.2 Equation de l'énergie

Cette équation peut s'exprimer aussi bien en fonction de la température statique ou de l'enthalpie de stagnation. Pour un fluide incompressible on a :

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad (\text{II-3})$$

où c_p est la chaleur spécifique à pression constante, et λ la conductivité thermique du fluide. Cette équation traduit le bilan énergétique entre la convection et la conduction moléculaire à l'intérieur du fluide. L'équation est écrite pour un fluide incompressible (La déformation volumique est nulle, $v_{k,k} = 0$) où on a négligé l'augmentation de l'énergie interne par compression. On a aussi négligé l'augmentation de l'énergie interne par dissipation visqueuse qui est très faible dans le cas d'un fluide incompressible.

Si de surcroît la conductivité thermique est constante, l'équation (II-3) s'écrit sous la forme :

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad (\text{II-4})$$

$$\text{avec } \alpha = \frac{\lambda}{\rho c_p} = \frac{\nu}{\text{Pr}} \quad (\text{II-5})$$

où $\text{Pr} = \frac{c_p \mu}{\lambda}$ est le nombre de Prandtl laminaire.

Le transfert de chaleur par convection est un phénomène complexe et étroitement lié à la structure de l'écoulement (turbulence, géométrie de la paroi solide, état de surface). Dans tous les cas, la distribution de la température sera fonction de celle du champ de vitesse, mais si en plus ce dernier dépend de celui de la température, la convection est dite naturelle, sinon elle est dite forcée.

2.3 Equations de la turbulence

2.3.1 Méthodes statistiques de modélisation de la turbulence

Comme évoqué un peu plus haut, la modélisation de la turbulence est basée sur le principe de décomposition de chaque variable du champ dynamique et thermique en

une valeur moyenne et une fluctuation, décomposition de Reynolds, (Hinze, 1975). En pratique, on choisit un intervalle de temps T grand devant l'échelle de temps des fluctuations turbulentes et suffisamment petit devant l'échelle de temps des autres fluctuations (écoulement non stationnaire).

La moyenne temporelle de la variable ϕ s'écrit :

$$\bar{\phi} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \phi(t) dt \quad (\text{II-6})$$

$$\phi = \bar{\phi} + \phi' \quad \phi = v_i, p, T, \dots; \quad (\text{II-7})$$

$$v_i = \bar{v}_i + u_i'; \quad p = \bar{p} + p'; \quad T = \bar{T} + \theta' \quad (\text{II-8})$$

où $\bar{\phi}$ est la valeur moyenne de la variable ϕ et ϕ' sa fluctuation temporelle. Suivant la décomposition de Reynolds, les lois de la statistique impliquent les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \overline{\phi'} &= \overline{\psi'} = 0. \\ \overline{\phi\psi} &= \bar{\phi}\bar{\psi} + \overline{\phi'\psi'}, \\ \overline{\phi'\psi} &= \overline{\psi'\phi} = 0 \end{aligned} \quad (\text{II-9})$$

2.3.2 Equations moyennes de Navier-Stokes

L'application de la décomposition des variables aux équations de Navier-Stokes (II-1) et (II-2) conduit aux équations moyennes de Reynolds (*Reynolds Averaged Navier-Stokes - RANS*) :

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} = 0; \quad (\text{II-10})$$

$$\frac{D\bar{v}_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 \bar{v}_i - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}; \quad i = 1,2,3 \quad (\text{II-11})$$

où l'on voit apparaître le tenseur des tensions de Reynolds $\tau_{ij} \equiv \overline{u_i' u_j'}$, qui a une forme symétrique, $\tau_{ij} = \tau_{ji}$, et qui traduit la contribution de la turbulence au mouvement moyen.

Les tensions croisées, c'est à dire $\overline{u' v'}$, $\overline{v' w'}$, et $\overline{u' w'}$ dominent le mouvement turbulent, alors que les termes de la diagonale ($\overline{u'^2}$, $\overline{v'^2}$, et $\overline{w'^2}$) ne jouent qu'un rôle mineur.

2.3.3 Equation moyenne de l'énergie de Reynolds

En appliquant la décomposition précédente, l'équation de l'énergie (II-3), sera écrite pour le champ turbulent moyen de la température sous la forme :

$$\rho c_p \frac{D\bar{T}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} - \rho c_p \overline{u_j \theta'} \right) \quad (\text{II-12})$$

où $Q_j'' = -\rho c_p \overline{u_j \theta'}$ représente la densité du flux thermique turbulent.

Pour résoudre le nouveau système des équations moyennes de Reynolds (II-10), (II-11) et (II-12) nous disposons en général de deux approches : la première consiste à écrire une équation de transport pour chaque composante du tenseur de Reynolds et du flux thermique turbulent (six plus trois, ce qui fait neuf équations en plus des équations du mouvement d'origine), ou alors trouver un modèle de fermeture pour τ_{ij} et Q_j'' . Le modèle introduit doit représenter de façon cohérente la physique de la turbulence. Ceci est l'élément clé de la modélisation de la turbulence.

2.3.4 Equations de transport des tensions turbulentes de Reynolds

Ces équations sont déduites de la soustraction des équations (II-11) de (II-2), et en multipliant le résultat par u_j' . L'équation résultante est ensuite sommée à une équation similaire en inter-changeant les indices i et j , et en prenant la moyenne temporelle. L'équation finale aura la forme suivante:

$$\frac{D\tau_{ij}}{Dt} = P_{ij} + \Pi_{ij} - \varepsilon_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\nu \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} - C_{ijk} \right] \quad (\text{II-13})$$

où :

$$P_{ij} = -\tau_{ik} \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_k} - \tau_{jk} \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_k} \quad (\text{II-14})$$

$$\Pi_{ij} = p \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{II-15})$$

$$\varepsilon_{ij} \equiv 2\mu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \quad (\text{II-16})$$

$$C_{ijk} \equiv \overline{\rho u'_i u'_j u'_k} + \overline{p' u'_i} \delta_{jk} + \overline{p' u'_j} \delta_{ik} \quad (\text{II-17})$$

désignent respectivement, la production mécanique de la turbulence appelé aussi source des tensions de Reynolds P_{ij} , le terme de corrélation vitesse-pression Π_{ij} , le taux de dissipation de la turbulence (par viscosité) ε_{ij} et la diffusion de la turbulence $\partial(C_{ijk})/\partial x_k$. Le terme de corrélation vitesse-pression joue le rôle de redistribution de l'énergie cinétique turbulente suivant les trois directions ; il joue surtout en faveur d'un retour à l'isotropie (Hinze, 1975).

Le développement de l'équation de transport des tensions de Reynolds (II-13) conduit à six nouvelles équations, une pour chaque composante. L'ensemble de ces équations contient 22 nouveaux termes inconnus. A savoir, six pour Π_{ij} , six autres pour ε_{ij} , et dix pour $\overline{\rho u'_i u'_j u'_k}$ intervenants dans C_{ijk} . On note ici que dans l'équation (II-13), seul le terme production est déterminé directement sans le recours à un modèle. On remarque aussi d'après l'équation (II-17) l'apparition des fluctuations de troisième ordre $\overline{\rho u'_i u'_j u'_k}$, ce qui veut dire qu'on a encore besoin de développer de nouvelles équations de transport pour chacune de ses composantes. Cette procédure engendrera d'autres inconnues d'ordre plus élevées qu'il faudra impérativement modéliser pour fermer le système à un niveau donné. En somme, l'introduction de la moyenne de Reynolds dans les équations de Navier-Stokes conduit à un système ouvert hiérarchiquement.

Finalement, on a le choix d'introduire directement un modèle pour estimer τ_{ij} ou résoudre les équations complètes (II-13), sachant qu'on doit modéliser au moins trois termes des équations en question, à savoir le terme de corrélation vitesse-pression Π_{ij} , le terme de la diffusion de la turbulence C_{ijk} et le terme de dissipation ε_{ij} . Ce dernier niveau de fermeture est appelé modèle de fermeture du second ordre ou *Reynolds Stress Model (RSM)*. Ces modèles sont capables de capter plusieurs effets locaux puisqu'ils tiennent compte de la convection et de la diffusion des tensions de Reynolds. Ils sont malheureusement très lourds à utiliser, en particulier pour les configurations géométriques

tridimensionnelles. Le problème majeur avec ce type de fermeture réside dans leur faible performance près des parois solides. Les erreurs de prédiction dans la couche logarithmique peuvent aller jusqu'à 100%. La cause est attribuée à l'hypothèse d'homogénéité de la turbulence sur laquelle sont basés ces modèles, ce qui n'est pas le cas près des parois solides. Pour remédier à cette insuffisance, la plupart de ces modèles incorporent des termes additionnels appelés termes de réflexion de la paroi (Gibson et Launder, 1978) pour forcer la concordance avec les résultats expérimentaux.

En conclusion :

1. Les modèles de type RSM sont actuellement les plus sophistiqués, puisqu'ils prennent en considération la majorité des aspects de la turbulence, tel que la convection, la diffusion et les effets de "mémoire" de chaque composante de τ_{ij} et de $\overline{u_i \theta}$.
2. Ils souffrent de certaines instabilités numériques, selon la modélisation de la zone proche de la paroi solide.
3. Ils sont relativement encombrants, surtout pour les écoulements tridimensionnels et en présence de forces de flottabilité. En pratique, il faut résoudre 15 équations simultanément: une pour l'équation de continuité, trois pour les équations de la quantité de mouvement, une pour l'équation de l'énergie, six pour les tensions de Reynolds, une pour la dissipation, et trois pour le flux de chaleur turbulent. Ceci présente en effet une limitation majeure qui décourage les utilisateurs à employer de tels modèles. En pratique, les industriels préfèrent utiliser d'autres types de fermetures plus simples et moins coûteuses, tel que les modèles à deux équations que nous exposerons un peu plus loin.

Turbulence isotrope et homogène

Si en un point donné de l'écoulement turbulent, les composantes du tenseur de Reynolds sont indépendantes de l'orientation du repère de référence, la turbulence est dite isotrope. Si en plus, toutes les propriétés statistiques de la turbulence sont indépendantes du point d'espace, la turbulence est dite homogène (Cousteix, 1989). Par exemple, pour un écoulement turbulent isotrope et homogène l'égalité suivante se vérifie.

$$\overline{u'^2} = \overline{v'^2} = \overline{w'^2} = \frac{2}{3}k \quad (\text{II-18})$$

où $k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}$, représente l'énergie cinétique turbulente. En pratique il est très difficile de rencontrer un écoulement turbulent isotrope, bien qu'à très grand nombre de Reynolds les petites structures ont tendance à devenir isotropes ; alors que les macro-structures conservent leur anisotropie. En soufflerie, l'homogénéité et l'isotropie de la turbulence sont réalisées à travers des grilles appelées nid d'abeilles.

Equilibre: Production - Dissipation

Considérons un écoulement stationnaire et homogène où toutes les quantités moyennes sont indépendantes de la position et définissons le tenseur des taux de déformation :

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v}_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{II-19})$$

Dans ce cas l'équation de transport du tenseur des tensions de Reynolds (II-13) se réduit à:

$$-\tau_{ij} S_{ij} = 2\nu \overline{s'_{ij} s'_{ij}} \quad (\text{II-20})$$

où s'_{ij} est le tenseur du taux de déformation du champ fluctuant de vitesse

$s'_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v'_j}{\partial x_i} \right)$. L'équation (II-21) est souvent écrite sous forme de bilan comme :

$$P \equiv -\tau_{ij} S_{ij} \quad \text{et} \quad \varepsilon \equiv 2\nu \overline{s'_{ij} s'_{ij}} \quad (\text{II-21})$$

traduisant le principe de l'équilibre entre la production de l'énergie turbulente et sa dissipation. Des résultats récents obtenues par la méthode *DNS* (Lakehal, 1999) ont montré que cet équilibre est peu probable dans la sous couche visqueuse, mais il existe plutôt dans la région logarithmique.

Concept de la viscosité turbulente (Eddy Viscosity)

Au lieu de résoudre les équations de transport de chaque composante du tenseur de Reynolds, nous allons essayer de modéliser directement ces termes. La meilleure approximation connue est basée sur l'hypothèse de *Boussinesq* qui stipule que les contraintes de Reynolds peuvent être exprimées selon l'équation suivante :

$$\tau_{ij} = \frac{2}{3} \delta_{ij} k - 2\nu_t S_{ij} \quad (\text{II-22})$$

où $\delta_{ij} = 1$ pour $i = j$, et zéro autrement.

Le premier terme est isotrope, alors que le deuxième reliant linéairement τ_{ij} au tenseur du taux de déformation S_{ij} est symétrique. Le coefficient de proportionnalité ν_t désigne la viscosité turbulente qui contrairement à la viscosité cinématique est une caractéristique de l'écoulement et non pas du fluide. Ce concept est appelé *Eddy Viscosity Modelling (EVM)*. L'approche est développée par analogie au tenseur des contraintes de viscosité. L'introduction de l'équation (II-22) dans (II-11) conduit à :

$$\frac{D\bar{v}_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_{eff} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \right); \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{II-23})$$

où $\nu_{eff} = \nu + \nu_t$ est la viscosité effective comprenant la viscosité moléculaire et la viscosité turbulente. En pratique $\nu \ll \nu_t$, ceci reflète bien le fait que l'écoulement turbulent favorise le mélange du fluide et améliore l'échange par diffusion. On note ici que la pression \bar{p} dans l'équation (II-24) renferme implicitement la partie isotrope $2k/3$ de τ_{ij} .

Par analogie à l'hypothèse de *Boussinesq* appliquée ci-dessus, la corrélation vitesse-température est rendue proportionnelle au gradient de température par :

$$\overline{u_i \theta} = -\alpha_\theta \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \quad (\text{II-24})$$

où α_θ est le coefficient de diffusivité. Il est proportionnel à la viscosité turbulente :

$$\alpha_\theta = \frac{\nu_t}{Pr_t} \quad (\text{II-25})$$

Pr_t , est le nombre de Prandtl turbulent (par opposition au nombre de Prandtl laminaire Pr). Enfin, l'équation turbulente du transport de la chaleur s'écrit :

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha_{eff} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right) \quad (II-26)$$

où:

$$\alpha_{eff} = \frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_t}{Pr_t} \quad (II-27)$$

En résumé, on admet une similitude entre le transport turbulent de la quantité de mouvement et de la chaleur par analogie de Reynolds.

2.3.5 Equation de transport de la dissipation de la turbulence

Une méthode pratique pour modéliser la dissipation ε_{ij} dans l'équation (II-13) consiste à l'assumer isotrope (Hinze, 1975), ce qui donne:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \mathcal{E} \delta_{ij}; \quad \varepsilon \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{ii} = \nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} \quad (II-28)$$

Cette hypothèse est connue sous le nom d'approximation de *Kolmogorov* pour l'isotropie locale. Elle stipule que la dissipation de l'énergie turbulente associée aux petites structures de la turbulence n'a pas de direction privilégiée, elle est donc isotrope.

Une équation de transport de ε (et non de ε_{ij}) est ensuite construite, elle prend la forme suivante (Hinze, 1975) :

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = P_{\varepsilon 1} + P_{\varepsilon 2} + \Phi_{\varepsilon} + D_{\varepsilon} + \nu \nabla^2 \varepsilon \quad (II-29)$$

où:

$$P_{\varepsilon 1} = -2\nu \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \overline{\left(\frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right)} - 2\nu \overline{u'_k} \frac{\partial \bar{u}'_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j \partial x_k} \quad (II-30)$$

$$P_{\varepsilon 2} = -2\nu \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \quad (II-31)$$

$$\Phi_{\varepsilon} = -2\nu^2 \overline{\left(\frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2} \quad (II-32)$$

$$D_\varepsilon = -2\nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\overline{\partial p' \partial u_j'}}{\partial x_i \partial x_i} + \frac{\overline{u_j' \partial u_i' \partial u_i'}}{2 \partial x_k \partial x_k} \right) \quad (\text{II-33})$$

représentent respectivement les processus physiques suivants: la production par l'écoulement moyen $P_{\varepsilon 1}$, le taux de génération de la fluctuation de la vorticité $P_{\varepsilon 2}$, la destruction de la dissipation par action de la viscosité Φ_ε et la diffusion turbulente de la dissipation D_ε . La diffusion moléculaire est représentée par le terme $\nu \nabla^2 \varepsilon$. A part la diffusion visqueuse tous les autres termes de l'équation (II-30) nécessitent l'introduction de modèles pour les représenter. Une description des différentes approximations de ces termes est disponible dans (Hanjalic et Launder, 1972)

La modélisation de l'équation (II-30) basée sur une hypothèse de turbulence homogène est donnée par l'équation suivante :

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = -C_{\varepsilon 1} \tau_{ij} \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} \frac{\varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + C_\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{k}{\varepsilon} \tau_{ij} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + \nu \nabla^2 \varepsilon \quad (\text{II-34})$$

où $C_{\varepsilon 1}$ et $C_{\varepsilon 2}$ sont des constantes du modèle que nous verrons plus loin lors du traitement des modèles à deux équations. C_ε est une autre constante qui vaut approximativement 0.15 . Elle est calibrée de façon à retrouver la valeur exacte de la constante de *Von Karman* dans la couche limite (Lakehal, 1999).

2.3.6 Equation de transport de l'énergie cinétique turbulente

Elle est déduite de l'équation (II-14), en posant $k \equiv \tau_{ii}/2$

$$\frac{Dk}{Dt} = \underbrace{-\tau_{ij} \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j}}_P - \varepsilon - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \overline{u_i' u_i' u_j'} + \overline{p' u_j'} \right) + \nu \nabla^2 k \quad (\text{II-35})$$

où $P \equiv P_{ii}/2$ représente la production mécanique de la turbulence due à l'interaction entre les contraintes turbulentes et le gradient des vitesses moyennes. Notons ici que dans l'équation (II-14) le terme Π_{ij} disparaît dans l'équation (II-36), à cause de $\overline{u_{i,i}'} = 0$. Cette simplification est la plus importante concession faite par les RSM en faveur des EVM basés sur l'équation de k , puisque le terme corrélation vitesse-

pression est responsable de la redistribution de l'énergie entre les composantes des contraintes de Reynolds. Le terme de dissipation dans l'équation (II-36), ainsi que les termes d'ordre deux et trois doivent être modélisé pour rendre cette équation utilisable. Les propositions suivantes sont retenues (Hinze, 1975) :

$$-\left(\frac{1}{2}\overline{u_i u_i u_j} + \overline{p u_j}\right) = \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \quad (\text{II-36})$$

$$\varepsilon = C_\Delta k^{3/2} / l_0 \quad (\text{II-37})$$

où σ_k , C_Δ sont des constantes du modèle et l_0 l'échelle de longueur de la turbulence. L'équation (II-38) est connue sous le nom de relation de Prandtl-Kolmogorov.

2.4 Modèles de turbulence à deux équations

Comme il a été précisé plus haut, les deux échelles de turbulence l_0 et τ_0 varient d'une manière significative dans l'espace et le temps. Pour bien représenter le processus de convection/diffusion dans la turbulence, les modèles doivent être formulés en fonction d'une autre échelle indépendante qui est l'échelle de vitesse v_0 . Dans la plus part des modèles à deux équations, cette échelle est associée à l'énergie cinétique turbulente k dont il faut une équation de transport. En combinant v_0 et l_0 , on peut définir une autre échelle, en l'occurrence la dissipation de l'énergie turbulent, $\varepsilon \equiv v_0^3 / l_0$ donnée par l'équation (II-34). Bien que le recours à une deuxième quantité autre que ε est possible, il y a plus d'une raison pour choisir la dissipation comme deuxième quantité turbulente. La plus importante, est que cette même quantité apparaît explicitement dans l'expression de transport de τ_{ij} et k . Cette quantité a également un sens physique facilitant son interprétation et sa comparaison.

2.4.1 Modèle de turbulence $k - \varepsilon$ standard (à haut nombre de Reynolds)

C'est le modèle standard proposé par Launder et Spalding (1974), où une combinaison des deux échelles turbulentes (de longueur et de temps) $l_0 \approx k^{3/2}/\varepsilon$ et $\tau_0 \approx k/\varepsilon$ aboutit à la forme isotrope de la viscosité turbulente :

$$\nu_t = C_\mu k^2 / \varepsilon \quad (\text{II-38})$$

où C_μ est une constante, prise généralement égale à 0.09.

L'énergie cinétique de la turbulence k et son taux de dissipation sont déterminés par des équations de transports déduites de (II-35) et (II-36) où la diffusion visqueuse est négligée :

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + P_k - \varepsilon \quad , \quad (\text{II-39})$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) + C_{\varepsilon 1} P_k \frac{\varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad , \quad (\text{II-40})$$

$$P_k = \nu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Les constantes empiriques du modèle standard sont : $C_\mu = 0.09$; $C_{\varepsilon 1} = 1.44$; $C_{\varepsilon 2} = 1.92$; $\sigma_k = 1.0$ et $\sigma_\varepsilon = 1.3$. Ces constantes ont été fixées suivant des observations expérimentales et d'autres intuitives (Launder et Spalding, 1974). La turbulence est supposée être en équilibre, isotrope et surtout évoluant loin des frontières solides. Un traitement spécial pour les zones proches des parois est nécessaire et est discuté ci-après.

2.4.2 Approche 'loi de paroi'

La couche limite près d'une paroi solide est composée de trois sous couches (Schlichting, 1979) :

La sous couche visqueuse, où l'effet de viscosité est dominant ; les contraintes

tangentielles s'expriment par : $\tau_w = -\mu \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|_w$.

Une couche (tampon) de transition, où les contraintes visqueuses et turbulentes sont de même ordre de grandeur.

La région de turbulence pleinement développée, où l'effet de la turbulence l'emporte sur la viscosité, et où la contrainte pariétale s'exprime par $\tau_w = -\rho \overline{u'v'}$

Dans cette dernière sous couche le profil de la vitesse répond expérimentalement à une loi logarithmique :

$$\frac{\overline{u}}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B \quad (\text{II-41})$$

où $u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$ est la vitesse de frottement, $y^+ = \frac{u_\tau y_p}{\nu}$ est la distance à la paroi adimensionnelle, y_p la distance normal à la paroi, et B une constante d'intégration égale à 5.25 pour une paroi lisse.

L'équation (II-41) peut aussi s'exprimer par $\frac{\overline{u}}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln(E y^+)$ où $E = 9$.

Les conditions aux limites appliquées à une paroi solide imperméable sont normalement celles d'adhérence. Elles consistent à annuler toutes les composantes de la vitesse sur les points de calcul qui se confondent avec la paroi solide.

La technique de l'approche 'loi de paroi' initiée par Launder et Spalding (1974), consiste à éviter d'intégrer la zone pariétale qui est une zone fortement complexe nécessitant un très grand nombre de points d'intégration afin de reproduire correctement le fort gradient de ε . L'idée consiste à placer le premier point de calcul dans la zone logarithmique (la troisième sous couche citée plus haut), et de fixer directement la vitesse parallèle à la paroi à partir de l'équation (II-41). Ce traitement est basé sur deux suppositions principales : (i) l'écoulement dans cette zone est en équilibre si bien que la production de la turbulence est égale à sa dissipation ($P = \varepsilon$), (ii) le profil de la vitesse suit la loi logarithmique citée plus haut (eq. II-41).

Dans ces conditions d'équilibre, nous avons :

$$\frac{k_p}{u_\tau^2} = \frac{1}{C_\mu^{1/2}}; \quad u_\tau = \sqrt{\tau_w / \rho} \quad (\text{II-42})$$

Des résultats expérimentaux indiquent que pour une paroi lisse $k_p / u_\tau^2 \approx 3.3$, d'où : $C_\mu = 0.09$. En utilisant (II-37) et (II-38), nous pouvons estimer les contraintes tangentielles retardatrice par:

$$\overrightarrow{\tau}_w = -\lambda_w \overrightarrow{V}_p \quad (\text{II-43})$$

où:

$$\lambda_w \begin{cases} \mu/y_p & \text{si } y_p^+ < 11.6 \\ \rho C_\mu^{1/4} k_p^{1/2} y_p / \mu & \text{autrement} \end{cases} \quad (II-44)$$

$$y_p^+ = \rho C_\mu^{1/4} k_p^{1/2} y_p / \mu \quad (II-45)$$

Les contraintes tangentielles appliquées à la distance $d_p = 2y_p$ à partir de la paroi (appliquées sur tout le volume de contrôle) sont responsables du taux de production de l'énergie turbulente suivant (transfert d'énergie de l'écoulement moyen vers la turbulence):

$$P_w = -\frac{1}{d_p} \int_{y_w}^{d_p} \rho \overline{u'v'} \bigg|_w \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \bigg|_w dy = -\rho \overline{u'v'} \bigg|_w \frac{(\bar{u}_p - \bar{u}_w)}{d_p} \quad (II-46)$$

Cette nouvelle expression de la production doit remplacer celle de l'équation de transport de k (équation II-39). Dans la sous couche pleinement turbulente, où la dissipation de k est donnée par l'équation (II-37), une valeur moyenne de ε_w peut être obtenue par intégration de l'équation (II-37) sur le volume de contrôle.

$$\varepsilon_w = \frac{1}{d_p} \int_{y=0}^{d_p} C_\Delta \frac{k_p^{3/2}}{y} dy \quad (II-47)$$

où k est supposée être uniforme dans le volume de contrôle. Finalement la production et la dissipation prennent les expressions suivantes :

$$P_w = \frac{\tau_w^2}{\kappa \mu y_p^+}; \quad \varepsilon_w = \frac{C_\mu^{3/4} k_p^{3/2}}{\kappa y_p} \quad (II-48)$$

En résumé, l'application des conditions aux limites suivant l'approche de la 'loi de paroi' consiste à imposer les conditions suivantes :

Les contraintes tangentielles de l'équation (II-43) sont incorporées dans l'équation de quantité de mouvement comme forces retardatrices.

La production dans l'équation de transport de k , est remplacée par celle donnée par (II-48).

Au lieu de résoudre l'équation de transport de ε , cette quantité est déterminée par (II-48).

Puisque le principe de l'équilibre sur lequel est basée cette théorie n'est pas valable dans la sous couche visqueuse, une attention très particulière doit être consacrée à la position du centre du premier volume de contrôle sur lequel les conditions aux limites sont appliquées. Il doit impérativement se situer dans la zone $11.6 \leq y_p^+ \leq 200$.

La valeur 11.6 n'est autre que l'intersection du profil linéaire et la loi logarithmique. Notons aussi que certains auteurs repoussent cette limite jusqu'à 500.

2.4.3 Modèle de turbulence $k - \varepsilon$ à bas nombre de Reynolds.

Comme il a été dit précédemment, les équations du modèle $k - \varepsilon$ ne sont valables que dans les régions où les effets de la turbulence (inertie) l'emportent largement sur ceux de la viscosité, c'est à dire loin des parois solides. Pour tenir compte des effets bas-nombre de Reynolds sans utiliser l'approche 'loi de paroi' on introduit un certain nombre de fonctions, $f_{\varepsilon 1}$, $f_{\varepsilon 2}$ et f_{μ} pour modifier les constantes, $C_{\varepsilon 1}$, $C_{\varepsilon 2}$ et C_{μ} . Des termes sources additifs D et E sont aussi incorporés aux deux équations du modèle.

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{v_i}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + P_k - \varepsilon + D \quad (II-49)$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{v_i}{\sigma_{\varepsilon}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) + C_{\varepsilon 1} f_{\varepsilon 1} P_k \frac{\varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2} f_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + E \quad (II-50)$$

$$v_i = C_{\mu} f_{\mu} k^2 / \varepsilon \quad (II-51)$$

Les différents modèles à bas nombre de Reynolds diffèrent dans l'expression des coefficients introduits ci-dessus et qui sont généralement donnés en fonction des nombres suivants :

$$R_t = \rho k^2 / \mu \varepsilon \quad (II-52)$$

$$R_y = \rho \sqrt{k} y / \mu \quad (II-53)$$

2.4.4 Approche " bi-couche".

L'approche à bas nombre de Reynolds citée plus haut présente l'inconvénient de nécessiter un très grand nombre de volume d'intégration près des parois solides en vue de refléter fidèlement le profil de la dissipation dans cette zone critique. Cet inconvénient rend l'application de cette technique pour les configurations à frontières complexes et tri dimensionnelles très lourde. L'approche bi-couche proposée apporte le remède à cette situation en divisant le domaine de calcul en deux zones : dans la première zone, loin des

parois solides, on applique le model standard à haut nombre de Reynolds, et dans la seconde zone, proche de la paroi, on utilise un modèle à une seule équation (Norris et Reynolds, 1975). Dans le modèle à une seule équation, la viscosité turbulente est calculée proportionnellement à une échelle de vitesse et une échelle de longueur l_μ . L'échelle de longueur est déterminée algébriquement alors que celle de la vitesse est calculée à travers la résolution de l'équation de k . La dissipation qui apparaît dans l'équation de k est calculée en fonction de k et d'une échelle de longueur notée l_ε . Cette dernière est aussi déterminée algébriquement. Les modèles qui existent dans la littérature utilisent des variantes pour introduire l'échelle de vitesse et celles des longueurs mentionnées ci-dessus. L'approche de Rodi (1991) utilisant $k^{1/2}$ comme échelle de vitesse sera notée dorénavant modèle *TLK*.

$$\mu_t = \rho C_\mu k^{1/2} l_\mu \quad (\text{II-54})$$

$$\varepsilon = k^{3/2} / l_\varepsilon \quad (\text{II-55})$$

$$l_\mu = \kappa y C_\mu^{-3/4} f_\mu \quad (\text{II-56})$$

$$f_\mu = 1 - \exp(-R_y / A_\mu) \quad (\text{II-57})$$

$$l_\varepsilon = \frac{\kappa C_\mu^{-3/4} y}{1 + 13.2 / (R_y \kappa C_\mu^{-3/4})} \quad (\text{II-58})$$

Dans ce modèle C_μ prend la valeur 0.082 et la limite entre la région influencée par les effets de la viscosité et le reste du domaine de calcul est fixée à $f_\mu = 0.95$.

Une seconde variante de Rodi (1993), exposée par Lakehal (1997), utilise comme échelle de vitesse la fluctuation normale à la paroi solide $\sqrt{v'^2}$. Ce modèle sera noté dorénavant le modèle TLV et sera formulé comme suit :

$$\varepsilon = \sqrt{v'^2} k / l_{\varepsilon,v} \quad (\text{II-59})$$

$$v_t = \sqrt{v'^2} l_{\mu,v} \quad (\text{II-60})$$

$$\text{avec, } l_{\mu,v} = 0.33y \text{ et } l_{\varepsilon,v} = 1.3y / \left[1 + 2.12v' / \sqrt{v'^2} y \right] \quad (\text{II-61})$$

Cette composante de fluctuation de la vitesse est supposée être plus déterminante dans les échanges de quantité de mouvement dans les zones proche des parois

solides. Le grand avantage de ce modèle est qu'il tire la distribution de cette échelle de vitesse directement des calculs *DNS* de Kim et al. (1987).

$$\overline{v^2}/k = 4.65 \times 10^{-5} (R_y)^2 + 4.0 \times 10^{-4} (R_y) \quad (\text{II-62})$$

Les deux zones critiques sont séparées par la valeur du nombre de Reynolds turbulent $R_y = 80$.

Une reformulation de ce modèle pour ré-introduire l'énergie cinétique de turbulence $k^{1/2}$ comme échelle de vitesse et retrouver une forme similaire au modèle TLK, permet de ré-écrire le modèle comme suit (Azzi et Lakehal, 2001) :

$$\mu_t = \rho C_\mu k^{1/2} l_\mu \quad (\text{II-63})$$

$$l_\mu = \kappa y C_\mu^{-3/4} f_\mu \quad (\text{II-64})$$

$$\varepsilon = k^{3/2} / l_\varepsilon \quad (\text{II-65})$$

$$l_\varepsilon = \frac{\kappa C_\mu^{-3/4} y}{2 + 17.29 / (R_y \kappa C_\mu^{-3/4} f_\mu)} \quad (\text{II-66})$$

Maintenant, c'est f_μ qui va suivre une distribution inspirée des résultats *DNS*.

$$f_\mu = \frac{1}{32} \sqrt{0.116 \times R_y^2 + R_y} \quad (\text{II-67})$$

L'application de la procédure bi-couche est liée à la manière de séparer la zone proche de la paroi affectée par la viscosité du reste de l'écoulement. Comme évoqué précédemment cette séparation est faite sur la base d'un critère (f_μ ou R_y). Elle peut être fixée au début du calcul ou bien réactualiser à chaque itération (ou un certain nombre d'itération). Cette dernière technique qui permet de suivre la couche visqueuse d'une manière dynamique, a été choisi lors de l'application de ce type de modèles.

2.5 Faiblesses des modèles de viscosité turbulentes (EVM)

Comme indiqué plus haut, les modèles à une et deux équations s'appuient sur l'approximation de *Boussinesq*. Cette approximation est elle-même basée sur une hypothèse d'isotropie de la turbulence qui est loin d'être le cas dans beaucoup de situations pratiques. Plusieurs exemples peuvent être cités, entre autres : l'écoulement

stagnant avec séparation, en présence d'un écoulement secondaire, les jets dans un écoulement transversal, l'écoulement en rotation, l'écoulement dans des conduites de section non circulaire, etc. La qualité des prédictions de cette classe de modèles peut être améliorée en utilisant les options des modèles à faible nombre de Reynolds ou à bi-couches (*two layer models*), où on étend les calculs jusqu'à la sous couche visqueuse. Ceci est surtout vrai lors du calcul du champ thermique en convection forcée. Cette tendance a été largement explorée dans les années 80 et 90, et a abouti à plusieurs types de modèles. Malheureusement, cette catégorie de modèles est difficilement applicable pour les configurations tri-dimensionnelles, du fait que l'intégration totale de la sous couche visqueuse nécessite l'emploi de grilles de calcul très denses à la paroi ($y^+ < 1$).

Écoulements fortement déformés

Les écoulements avec contraction brusque (stagnation) ou avec élargissement brusque (accélération de la couche limite) sont des exemples d'écoulements à forte dilatation. Dans le cas où la production de la turbulence est déterminée par l'expression isotrope de $\overline{u_i u_j}$, cette quantité sera inconditionnellement positive,

$$P \equiv -\overline{u_i u_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = C_\mu \varepsilon S^2 \quad (\text{II-68})$$

$$\text{où } S = \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{2} S_{kl} S_{kl}}, \quad S_{kl} = \frac{1}{2} (\overline{u_{k,l}} + \overline{u_{l,k}}) \quad (\text{II-69})$$

Il s'ensuit que dans le cas d'un point de stagnation (S^2 étant très grand), la production peut être largement surestimée. Comme remède à ce problème le modèle de Kato et Launder (1993), tirant profit du fait que près d'un point de stagnation la vorticité tend vers zéro, reformule le terme de production en fonction de la vorticité

$$\Omega = \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{2} \Omega_{kl} \Omega_{kl}} \quad (\text{II-70})$$

$$P = C_\mu \varepsilon S \Omega \quad (\text{II-71})$$

$$(\overline{S_{k,l}} + \overline{\Omega_{k,l}} = \overline{u_{k,l}}) \quad (\text{II-72})$$

$$\overline{\Omega_{kl}} = \frac{1}{2} (\overline{u_{k,l}} - \overline{u_{l,k}}) \quad (\text{II-72})$$

Principe de réalisabilité (Realizability Principe)

Le principe de réalisabilité impose que les tensions normales $\overline{u_i' u_i'}$ soient toujours positives, et l'application de l'égalité de Schwarz pour les composantes diagonales $\overline{u_i' u_j'}$ ($i \neq j$);

$$\left(\overline{u_i' u_j'}\right)^2 \leq \overline{u_i'^2} \overline{u_j'^2} \quad (\text{II-73})$$

Or l'expression de *Boussinesq*, $\overline{u_i' u_i'} = \frac{2}{3}k - \nu_t S_{ii}$, peut donner des valeurs négatives à $\overline{u_i' u_i'}$ dans le cas où S_{ii} est significatif (par exemple : accélération de la couche limite).

Le principe de réalisabilité est dans ce cas violé. Ce cas peut se poser lors d'un écoulement freiné, où $S_{11} = u_{,x}$ (dans la direction longitudinale) est très important.

Puisque l'équation (II-68) surestime la production de la turbulence, la valeur de ν_t a tendance d'augmenter dangereusement, $\nu_t S_{ii} > \frac{2}{3}k$. Wilcox (1993), présente une revue de plusieurs exemples où la théorie de l'*EVM* échoue.

2.6 Modèles algébriques des tensions turbulentes ASM

La principale défaillance des modèles basés sur l'hypothèse de *Boussinesq* est la dépendance linéaire entre les contraintes turbulentes et le tenseur des taux de déformation. Cette linéarité rend les modèles complètement isotropes et aucune différence n'est faite entre les différentes composantes normales du tenseur de Reynolds. Evidemment, les modèles de second ordre (*RSM*) transcendent naturellement cette défaillance, puisqu'ils tiennent compte de l'historique (convection et diffusion) de toutes les composantes du tenseur de Reynolds. Malheureusement, en plus de leur lourdeur mathématique, ils comportent beaucoup de termes encore non maîtrisables. Les chercheurs se sont donc retournés vers les modèles à deux équations en essayant de les perfectionner. La première alternative consiste à essayer de trouver des expressions plus évoluées pour les différentes constantes

empiriques. En effet, Rodi (1980), a postulé que les capacités prédictives du modèle $k - \varepsilon$ peuvent être sensiblement améliorées si au lieu de considérer C_μ comme une constante, on la remplace par une expression dépendante de (P/ε) . Leschziner et Rodi (1981), ont proposé une expression tenant compte de la courbure des lignes de courant. Récemment, Yakhot (1986), et ses coauteurs ont proposé un modèle baptisé RNG (*ReNormalization Group*), qui n'est autre que le modèle standard $k - \varepsilon$, où les différentes constantes empiriques ont été remplacés par des expressions déduites théoriquement.

Une autre tendance d'amélioration des modèles à deux équations est de généraliser l'expression de *Boussinesq* pour la rendre anisotrope. En éliminant les termes de convection et de diffusion des équations du modèle *RSM*, Rodi (1976), a proposé une expression algébrique anisotrope pour chaque composante du tenseur de Reynolds. Les modèles ainsi construits sont appelés *ASM* (*Algebraic Stress Models*). Bien que les premiers résultats étaient prometteurs, ces modèles avaient le grand inconvénient d'être implicites. C'est à dire que le terme des tensions turbulentes apparaît dans les deux parties de leurs formulations. En conséquence, leur utilisation nécessite la résolution d'un système d'équations à chaque itération de calcul. Cet handicap a fait que ces modèles ont tout de suite été abandonnés pendant plus d'une décennie en faveur du modèle standard $k - \varepsilon$ et ses autres versions.

Récemment, et en se basant sur des techniques d'analyse dimensionnelle, des chercheurs comme Gatski et Speziale (1993), ont proposé des formulations explicites de ces modèles baptisés *Explicit ASM*. Bien que les hypothèses de déduction de ce type de modèles sont basées sur une turbulence homogène proche de l'équilibre, ils retiennent une grande majorité des éléments physiques de la turbulence, notamment la précieuse faculté de distinction entre les composantes du tenseur de Reynolds. Les nouvelles expressions du tenseur de Reynolds sont ainsi composées d'une partie linéaire qui correspond exactement à l'approximation de *Boussinesq* et une deuxième partie non linéaire formée d'une combinaison des termes de déformation et de vorticité S_{ij} et Ω_{ij} .

La forme générale de ces modèles est tronquée à sept termes linéairement indépendants:

$$u_i u_j = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - 2 \nu_t S_{ij} + C_1 4 \nu_t \frac{k}{\varepsilon} T_{ij}^1 + C_2 4 \nu_t \frac{k}{\varepsilon} T_{ij}^2 + C_3 4 \nu_t \frac{k}{\varepsilon} T_{ij}^3 \quad \text{partie quadratique}$$

$$+ C_4 8\nu_t \frac{k^2}{\varepsilon^2} T_{ij}^4 + C_5 8\nu_t \frac{k^2}{\varepsilon^2} T_{ij}^5 + C_6 8\nu_t \frac{k^2}{\varepsilon^2} T_{ij}^6 + C_7 8\nu_t \frac{k^2}{\varepsilon^2} T_{ij}^7 \quad \text{partie cubique (II-74)}$$

où :

$$T_{ij}^1 = S_{ik} S_{jk} - \frac{1}{3} S_{kl} S_{kl} \delta_{ij} \quad (\text{II-75})$$

$$T_{ij}^2 = \Omega_{ik} S_{jk} + \Omega_{jk} S_{ik} \quad (\text{II-76})$$

$$T_{ij}^3 = \Omega_{ik} \Omega_{jk} - \frac{1}{3} \Omega_{kl} \Omega_{kl} \delta_{ij} \quad (\text{II-77})$$

$$T_{ij}^4 = S_{ki} \Omega_{lj} + S_{kj} \Omega_{li} \quad (\text{II-78})$$

$$T_{ij}^5 = \Omega_{il} \Omega_{lm} S_{mj} + S_{il} \Omega_{lm} \Omega_{mj} - \frac{2}{3} S_{lm} \Omega_{mn} \Omega_{nl} \delta_{ij} \quad (\text{II-79})$$

$$T_{ij}^6 = S_{ij} S_{kl} S_{kl} \quad (\text{II-80})$$

$$T_{ij}^7 = S_{ij} \Omega_{kl} \Omega_{kl} \quad (\text{II-81})$$

L'équation générale précédente peut ainsi s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \overline{u_i u_j} = & \frac{2}{3} k \delta_{ij} - 2\nu_t \left(S_{ij} - \frac{k}{\varepsilon} (2C_1 T_{ij}^1 + 2C_2 T_{ij}^2 + 2C_3 T_{ij}^3) \right. \\ & \left. - 2 \frac{k^2}{\varepsilon^2} (2C_4 T_{ij}^4 + 2C_5 T_{ij}^5 + 2C_6 T_{ij}^6 + 2C_7 T_{ij}^7) \right) \end{aligned} \quad (\text{II-82})$$

Le coefficient C_5 étant généralement nul, l'équation précédente prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} \overline{u_i u_j} = & \frac{2}{3} k \delta_{ij} - 2\nu_t \left(S_{ij} + \frac{k}{\varepsilon} (-2C_1 T_{ij}^1 - 2C_2 T_{ij}^2 - 2C_3 T_{ij}^3) \right. \\ & \left. + 2 \frac{k^2}{\varepsilon^2} (-2C_4 T_{ij}^4 - 2C_6 T_{ij}^6 - 2C_7 T_{ij}^7) \right) \end{aligned} \quad (\text{II-83})$$

Les différents termes ci-dessus sont développés en annexe et l'expression des coefficients pour différents modèles de type *EASM* est donnée au tableau (II-1) (Shih et al, 1993; Shih et al, 1995; Lien et al, 1996; Craft et al, 1996; Lakehal et Thiele, 2001).

Ce type de modèles différencie entre les différentes composantes des contraintes turbulentes bien qu'il ne retient pas leur historique. Ils sont classés parmi les modèles anisotropes puisque l'expression de C_μ est basée sur l'invariant du tenseur des taux

de la déformation et/ou de la vorticité. Ils peuvent être utilisés avec la loi de paroi ou avec les variantes des modèles à faible nombre de Reynolds.

2.7 Modèle anisotropique de Bergeles

Une autre méthode, pour remédier à l'isotropie de la version standard du modèle $k-\varepsilon$ consiste à multiplier les composantes latérales du tenseur des contraintes de turbulence par des coefficients appropriés. Cette technique a été initialement appliquée aux modèles mathématiques du refroidissement par film par Bergeles et al. (1978). Les calculs du refroidissement par film et du jet dans un écoulement transversal ont montré que la dispersion latérale calculée avec la version standard du modèle $k-\varepsilon$ est systématiquement sous-estimée. Ainsi, dans la modification de Bergeles, la viscosité turbulente affectée à la composante latérale du tenseur des contraintes turbulentes et du flux thermique turbulent

$$-\overline{u'w'} = \frac{\mu_t}{\rho} \frac{\partial u}{\partial z} ; \quad -\overline{w'\theta'} = \frac{\mu_t}{\rho \text{Pr}_t} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (II-84)$$

est remplacée par une valeur amplifiée, calculée par :

$$\mu_t^a = \mu_t [1.0 - f(1.0 - y/\delta)] \quad (II-85)$$

où μ_t est la viscosité turbulente calculée suivant le modèle standard, y est la distance à la paroi solide et δ l'épaisseur de la couche limite. La formule ci-dessus a été déduite à partir des équations des contraintes turbulentes en supposant un équilibre local de la turbulence et en négligeant les composantes $\overline{v'w'}$ par rapport à $\overline{u'v'}$ et $\overline{u'w'}$. Le facteur d'amplification est inspiré des mesures expérimentales et a été fixé par Bergeles à $f = 3.5$. Ce modèle a été aussi utilisé par Demuren et al. (1986a), et Zhou et al. (1993), pour la prédiction numérique d'un jet tri dimensionnel dans un écoulement transversal. Notons aussi que l'application de cette technique a été limitée à la procédure "loi de paroi" et la modification appliquée aux seules équations moyennes de l'écoulement et de la température.

2.8 Modèle anisotrope bi-couche.

Dans des études récentes Lakehal et al. (2001), ont élargie l'application de la modification anisotrope de Bergeles aux deux équations du modèle de turbulence $k - \varepsilon$. Mieux encore, en appliquant une procédure bi-couche pour résoudre la sous couche visqueuse, ils se sont inspiré des résultats des calculs DNS pour proposer une distribution anisotrope du coefficient d'amplification f .

En effet, puisqu'on se rapprochant de la paroi $\overline{v'^2}$ tend vers zéro plus rapidement que la fluctuation latérale $\overline{w'^2}$, le rapport $\overline{w'^2}/\overline{v'^2}$ atteint des valeurs plus grande que celle adopté par Bergeles à la limite de la sous couche ($f = 4.5$). Une loi de distribution reproduisant les résultats DNS, a été proposée par Lakehal et al. (2001). Elle s'écrit :

$$\frac{\overline{w'^2}}{\overline{v'^2}} = \frac{10^3 (y^+)^{0.42}}{2.682 (y^+)^2 - 5.463} \quad (II-86)$$

Cette relation traduit la forte anisotropie qui existe près de la paroi solide. Elle est valable jusqu'à $y^+ > 1.5$ et seulement pour une couche limite attachée. L'isotropie ($\overline{w'^2} = \overline{v'^2}$), est retrouvé dans la zone logarithmique à $y^+ = 43$. Pour des raisons de stabilité de calcul, il est conseillé de limiter le rapport à 60. Pour compléter la formulation du modèle, une relation entre R_y et y^+ est elle aussi, inspirée des résultats DNS.

$$y^+ = 0.00442 R_y^2 + 0.294 R_y + 0.545 \quad (II-87)$$

L'application de ce modèle sous sa forme bi-couche passe par l'amplification de la viscosité turbulente ($\nu_t \times \overline{w'^2}/\overline{v'^2}$) pour l'équation de quantité de mouvement relative à la vitesse latérale et l'équation de k . Le terme de production de l'énergie cinétique turbulente renferme aussi l'effet de la modification.

Tableau II-1 : Constantes des modèles EASM.

Modèle, Code	C_μ	C_1	C_2	C_3	C_4	C_6	C_7
Shih et al., 1995 SZL95	$\frac{1}{6.5 + A_r} \frac{U^* k}{\varepsilon}$.0	$\sqrt{\frac{1 - 9C_\mu^2 \left(\frac{S^* k}{\varepsilon} \right)^2}{1 + 6 \frac{S^* k \Omega^* k}{\varepsilon \varepsilon}}}$.0	.0	.0	.0
Shih et al., 1993 SZL93	$\frac{2/3}{1.25 + S + 0.9\Omega}$	$\frac{0.75/C_\mu}{1000 + S}$	$\frac{3.8/C_\mu}{1000 + S}$	$\frac{4.8/C_\mu}{1000 + S}$.0	.0	.0
Lien et al., 1996 LCL96	$\frac{2/3}{1.25 + S + 0.9\Omega}$	$\frac{0.75/C_\mu}{1000 + S}$	$\frac{3.8/C_\mu}{1000 + S}$	$\frac{4.8/C_\mu}{1000 + S}$	$-10C_\mu^2$	$-5C_\mu^2$	$5C_\mu^2$
Craft et al., 1996 CLS96	$\frac{0.3f_3}{1 + 0.35(\max(S, \Omega))^{1.5}}$	-0.1	0.1	0.26	$-10C_\mu^2$	$-2C_\mu^2$	$2C_\mu^2$
Gatski et Speziale, 1993 Lakehal et Thiele, 1999 GS/LT99	$\frac{3.CCl.(1 - \eta^4)}{3 + \eta^4(3 - 6\xi^2) - 2\eta^2 + 6\xi^2}$	$\frac{2 - \alpha_3}{g^*}$	$\frac{1 - \alpha_4/2}{g^*}$.0	.0	.0	.0

$$f_3 = 1 - \exp\left(\frac{-0.36}{\exp(-0.75 \max(S, \Omega))}\right), \quad A_r = \sqrt{6} \cos \phi, \quad \phi = \frac{1}{3} \arccos(\sqrt{6} W^*), \quad W^* = \frac{S_\theta^* S_\mu^* S_\mu^*}{(S^*)^3}, \quad S_\theta^* = S_\theta - \frac{1}{3} S_{ik} \delta_{ij}, \quad S^* = \sqrt{S_\theta^* S_\theta^*},$$

$$U^* = \sqrt{S_\theta^* S_\theta^* + \Omega_\theta^* \Omega_\theta^*}, \quad \Omega_\theta^* = \Omega_\theta, \quad \alpha_1 = 3.4, \quad \alpha_2 = 0.36, \quad \alpha_3 = 1.25, \quad \alpha_4 = 0.4,$$

$$\alpha_5 = 0.5 S^2 / (4.8 + 0.25 * 1.3 * \max(S, \Omega)), \quad g^* = \alpha_1 + \alpha_5 - 1, \quad CCl = (0.67 - 0.5 * \alpha_2) / g^*, \quad \eta^2 = (C_2 S^*)^2 / 2, \quad \eta^4 = \eta^2 S^2,$$

$$\xi^2 = (C_2 \Omega)^2 / 2, \quad S = \sqrt{2 S_\theta S_\theta}, \quad \Omega = \sqrt{2 \Omega_\theta \Omega_\theta}$$

