Modélisation de système couplés rayonnement conduction

Exposé de mémoire de Master en Physique

Présenté par:

F. Belhacine H. Daho

Sous la direction de

M^{me} **D. Bourega Remaoun**

Départ de Génie Physique. USTO. 26 juin 2018

Plan

1. Introduction et généralités sur le rayonnement
2. Modélisation de l'ETR simplifiée
3. Résolution numérique et analytique
4. Conclusion et Perspectives

Introduction

- Un grand nombre de problèmes de la physique sont modélisés par des équations intégro-différentielles. ([3]) ;

Introduction

- Un grand nombre de problèmes de la physique sont modélisés par des équations intégro-différentielles. ([3]) ;
- On va se familiariser avec le calcul numérique en simulant un cas de l'équation du transfert radiatif.([5]) ;

Introduction

- Un grand nombre de problèmes de la physique sont modélisés par des équations intégro-différentielles. ([3]) ;
- On va se familiariser avec le calcul numérique en simulant un cas de l'équation du transfert radiatif.([5]) ;
- Introduite par Chandrasekhar en 1950 ([1]), l'**ETR** modélise, entre autres, le comportement des processus émissifs, absorbants et diffusants ;

Introduction

- Un grand nombre de problèmes de la physique sont modélisés par des équations intégro-différentielles. ([3]) ;
- On va se familiariser avec le calcul numérique en simulant un cas de l'équation du transfert radiatif.([5]) ;
- Introduite par Chandrasekhar en 1950 ([1]), l'**ETR** modélise, entre autres, le comportement des processus émissifs, absorbants et diffusants ;
- Pour la détermination des propriétés radiatives, les matériaux sont pris sous la forme d'échantillons minces. Ainsi on va se ramener à un problème aux limites simplifié. ([8]).

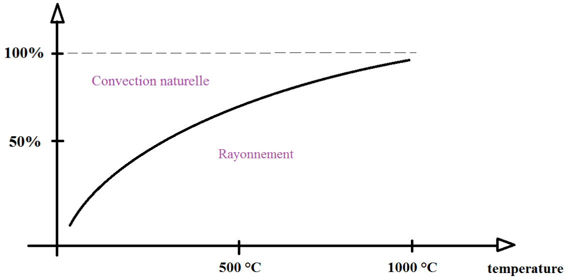
Transfert de Chaleur

On parle de transfert thermique pour décrire un échange de chaleur lié à une différence de température. Il existe plusieurs modes de transfert. On peut définir la puissance transmise entre deux points de températures différentes $T1 > T2$

Transfert de Chaleur

On parle de transfert thermique pour décrire un échange de chaleur lié à une différence de température. Il existe plusieurs modes de transfert. On peut définir la puissance transmise entre deux points de températures différentes $T1 > T2$

$$p = hS(T1 - T2) \tag{1.1}$$



Loi de Fourier

Le transfert se fait de molécule à molécule, le gradient de température $(dT)/dx$ est la variation de la température par unité de longueur, lorsqu'on se déplace dans la direction de propagation de la chaleur. La conservation d'énergie au sein du volume défini par dx se traduit par l'équation

Loi de Fourier

Le transfert se fait de molécule à molécule, le gradient de température $(dT)/dx$ est la variation de la température par unité de longueur, lorsqu'on se déplace dans la direction de propagation de la chaleur. La conservation d'énergie au sein du volume défini par dx se traduit par l'équation

$$k\left(\frac{d^2T}{dx^2}\right) + Q = \rho C\frac{dT}{dt} \tag{1.2}$$

Loi de Fourier

Le transfert se fait de molécule à molécule, le gradient de température $(dT)/dx$ est la variation de la température par unité de longueur, lorsqu'on se déplace dans la direction de propagation de la chaleur. La conservation d'énergie au sein du volume défini par dx se traduit par l'équation

$$k\left(\frac{d^2T}{dx^2}\right) + Q = \rho C \frac{dT}{dt} \tag{1.2}$$

- ρ : est la masse volumique (Kgm^{-3}),

Loi de Fourier

Le transfert se fait de molécule à molécule, le gradient de température $(dT)/dx$ est la variation de la température par unité de longueur, lorsqu'on se déplace dans la direction de propagation de la chaleur. La conservation d'énergie au sein du volume défini par dx se traduit par l'équation

$$k\left(\frac{d^2T}{dx^2}\right) + Q = \rho C \frac{dT}{dt} \tag{1.2}$$

- ρ : est la masse volumique (Kgm^{-3}),
- k : est la conductivité thermique $(Wm^{-1\circ}C^{-1})$,

Loi de Fourier

Le transfert se fait de molécule à molécule, le gradient de température $(dT)/dx$ est la variation de la température par unité de longueur, lorsqu'on se déplace dans la direction de propagation de la chaleur. La conservation d'énergie au sein du volume défini par dx se traduit par l'équation

$$k\left(\frac{d^2T}{dx^2}\right) + Q = \rho C\frac{dT}{dt} \tag{1.2}$$

- ρ : est la masse volumique (Kgm^{-3}),
- k : est la conductivité thermique $(Wm^{-1}{}^{\circ}C^{-1})$,
- C : est la chaleur spécifique $(JKg^{-1}{}^{\circ}C^{-1})$,

Loi de Fourier

Le transfert se fait de molécule à molécule, le gradient de température $(dT)/dx$ est la variation de la température par unité de longueur, lorsqu'on se déplace dans la direction de propagation de la chaleur. La conservation d'énergie au sein du volume défini par dx se traduit par l'équation

$$k\left(\frac{d^2T}{dx^2}\right) + Q = \rho C\frac{dT}{dt} \tag{1.2}$$

- ρ : est la masse volumique (Kgm^{-3}),
- k : est la conductivité thermique $(Wm^{-1\circ}C^{-1})$,
- C : est la chaleur spécifique $(JKg^{-1\circ}C^{-1})$,
- t : est le temps caractéristique (s).

Convection et Rayonnement

- La convection caractérise la propagation de la chaleur dans un fluide gazeux ou liquide en mouvement.

Convection et Rayonnement

- La convection caractérise la propagation de la chaleur dans un fluide gazeux ou liquide en mouvement.
- Le rayonnement thermique est un phénomène se caractérisant par un échange d'énergie électromagnétique, sans que le milieu ne participe forcément à cet échange.

Convection et Rayonnement

- La convection caractérise la propagation de la chaleur dans un fluide gazeux ou liquide en mouvement.
- Le rayonnement thermique est un phénomène se caractérisant par un échange d'énergie électromagnétique, sans que le milieu ne participe forcément à cet échange.
- Un exemple : le rayonnement solaire est capable d'échauffer la terre bien que le milieu traversé soit à une température plus basse que la terre.

Dualité onde particule

Pour décrire le rayonnement, On a deux théories.

Dualité onde particule

Pour décrire le rayonnement, On a deux théories.

La théorie ondulatoire : Toute radiation est considérée comme la superposition d'ondes électromagnétiques.

Dualité onde particule

Pour décrire le rayonnement, On a deux théories.
La théorie ondulatoire : Toute radiation est considérée comme la superposition d'ondes électromagnétiques.
La théorie corpusculaire : est basée sur l'idée que la lumière est composée de particules, les photons.

Dualité onde particule

Pour décrire le rayonnement, On a deux théories.

La théorie ondulatoire : Toute radiation est considérée comme la superposition d'ondes électromagnétiques.

La théorie corpusculaire : est basée sur l'idée que la lumière est composée de particules, les photons.

A chaque photon est associée une onde électromagnétique. C'est ce que l'on appelle la dualité onde particule

Dualité onde particule

Pour décrire le rayonnement, On a deux théories.
La théorie ondulatoire : Toute radiation est considérée comme la superposition d'ondes électromagnétiques.
La théorie corpusculaire : est basée sur l'idée que la lumière est composée de particules, les photons.
A chaque photon est associée une onde électromagnétique. C'est ce que l'on appelle la dualité onde particule
Chaque photon transporte une énergie individuelle E suivant la relation de Planck :

Dualité onde particule

Pour décrire le rayonnement, On a deux théories.
La théorie ondulatoire : Toute radiation est considérée comme la superposition d'ondes électromagnétiques.
La théorie corpusculaire : est basée sur l'idée que la lumière est composée de particules, les photons.
A chaque photon est associée une onde électromagnétique. C'est ce que l'on appelle la dualité onde particule
Chaque photon transporte une énergie individuelle E suivant la relation de Planck :

$$E = h\nu \quad \text{Où :} \tag{1.3}$$

Dualité onde particule

Pour décrire le rayonnement, On a deux théories.
La théorie ondulatoire : Toute radiation est considérée comme la superposition d'ondes électromagnétiques.
La théorie corpusculaire : est basée sur l'idée que la lumière est composée de particules, les photons.
A chaque photon est associée une onde électromagnétique. C'est ce que l'on appelle la dualité onde particule
Chaque photon transporte une énergie individuelle E suivant la relation de Planck :

$$E = h\nu \quad \text{Où :} \tag{1.3}$$

- h est la constante de Planck ($h = 6,620755.10^{-34} J.s$).

Dualité onde particule

Pour décrire le rayonnement, On a deux théories.
La théorie ondulatoire : Toute radiation est considérée comme la superposition d'ondes électromagnétiques.
La théorie corpusculaire : est basée sur l'idée que la lumière est composée de particules, les photons.
A chaque photon est associée une onde électromagnétique. C'est ce que l'on appelle la dualité onde particule
Chaque photon transporte une énergie individuelle E suivant la relation de Planck :

$$E = h\nu \quad \text{Où :} \tag{1.3}$$

- h est la constante de Planck ($h = 6,620755.10^{-34} J.s$).
- E est l'energie qui exprimée en $Joule(J)$.

Dualité onde particule

Pour décrire le rayonnement, On a deux théories.
La théorie ondulatoire : Toute radiation est considérée comme la superposition d'ondes électromagnétiques.
La théorie corpusculaire : est basée sur l'idée que la lumière est composée de particules, les photons.
A chaque photon est associée une onde électromagnétique. C'est ce que l'on appelle la dualité onde particule
Chaque photon transporte une énergie individuelle E suivant la relation de Planck :

$$E = h\nu \quad \text{Où :} \tag{1.3}$$

- h est la constante de Planck ($h = 6,620755.10^{-34} J.s$).
- E est l'energie qui exprimée en $Joule(J)$.
- ν est la fréquence exprimée en Hertz (Hz ou s^{-1}).

Spectre du rayonnement

- Le rayonnement est composé d'ondes se propageant à la vitesse de la lumière $C = 3 \times 10^8 ms^{-1}$ dans le vide.

Spectre du rayonnement

- Le rayonnement est composé d'ondes se propageant à la vitesse de la lumière $C = 3 \times 10^8 ms^{-1}$ dans le vide.
- Avec un indice de réfraction $n = \frac{C}{c_m}$, c_m la vitesse de lumière dans le milieu.

Spectre du rayonnement

- Le rayonnement est composé d'ondes se propageant à la vitesse de la lumière $C = 3 \times 10^8 ms^{-1}$ dans le vide.
- Avec un indice de réfraction $n = \frac{C}{c_m}$, c_m la vitesse de lumière dans le milieu.
- On peut les distinguer par leur longueur d'onde λ ou leur fréquence ν, reliées par

$$C = \lambda\nu \qquad \textit{avec} \qquad \overline{\nu} = \frac{1}{\lambda}.$$

Spectre du rayonnement

- Le rayonnement est composé d'ondes se propageant à la vitesse de la lumière $C = 3 \times 10^8 ms^{-1}$ dans le vide.
- Avec un indice de réfraction $n = \frac{C}{c_m}$, c_m la vitesse de lumière dans le milieu.
- On peut les distinguer par leur longueur d'onde λ ou leur fréquence ν, reliées par

$$C = \lambda\nu \qquad avec \qquad \overline{\nu} = \frac{1}{\lambda}.$$

- Le rayonnement visible occupe une bande étroite du spectre aux longueurs d'ondes comprises entre $0,4$ et $0,76$ μm.

Spectre du rayonnement

- Le rayonnement est composé d'ondes se propageant à la vitesse de la lumière $C = 3 \times 10^8 ms^{-1}$ dans le vide.
- Avec un indice de réfraction $n = \frac{C}{c_m}$, c_m la vitesse de lumière dans le milieu.
- On peut les distinguer par leur longueur d'onde λ ou leur fréquence ν, reliées par

$$C = \lambda\nu \qquad avec \qquad \overline{\nu} = \frac{1}{\lambda}.$$

- Le rayonnement visible occupe une bande étroite du spectre aux longueurs d'ondes comprises entre $0,4$ et $0,76$ μm.
- Les longueurs d'ondes plus courtes (fréquences plus élevées) forment le rayonnement **ultraviolet**, puis X et γ.

L'angle solide

L'angle solide sous lequel depuis un point O on voit une surface S est l'aire de la surface intersection de la sphère de rayon unité et du cône de sommet O s'appuyant sur le contour de la surface S.

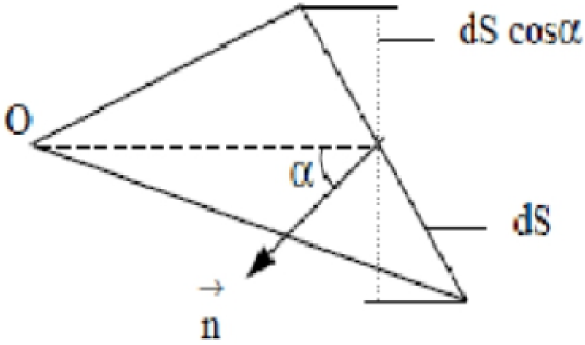


Figure: Schéma de l'angle solide

Luminance et intensité énergétique

Soit l'angle fait par la normale $\vec{n}$ à la surface émettrice S avec la direction Ox. La projection de dS sur le plan perpendiculaire à Ox définit la surface émettrice $dS_x = dS \cos \alpha$.

Luminance et intensité énergétique

Soit l'angle fait par la normale $\vec{n}$ à la surface émettrice S avec la direction Ox. La projection de dS sur le plan perpendiculaire à Ox définit la surface émettrice $dS_x = dS \cos \alpha$.
L'intensité énergétique élémentaire dI_x dans la direction Ox par unité de surface émettrice apparente dS_x s'appelle la luminance énergétique L_x.

Luminance et intensité énergétique

Soit l'angle fait par la normale $\vec{n}$ à la surface émettrice S avec la direction Ox. La projection de dS sur le plan perpendiculaire à Ox définit la surface émettrice $dS_x = dS \cos\alpha$.
L'intensité énergétique élémentaire dI_x dans la direction Ox par unité de surface émettrice apparente dS_x s'appelle la luminance énergétique L_x.

$$L_x = \frac{I_x}{ds_x} = \frac{I_x}{ds\cos\alpha} = \frac{d^2\phi}{d\Omega ds\cos\alpha} \qquad (1.4)$$

Luminance et intensité énergétique

Soit l'angle fait par la normale $\vec{n}$ à la surface émettrice S avec la direction Ox. La projection de dS sur le plan perpendiculaire à Ox définit la surface émettrice $dS_x = dS \cos\alpha$.
L'intensité énergétique élémentaire dI_x dans la direction Ox par unité de surface émettrice apparente dS_x s'appelle la luminance énergétique L_x.

$$L_x = \frac{I_x}{ds_x} = \frac{I_x}{ds \cos\alpha} = \frac{d^2\phi}{d\Omega ds \cos\alpha} \qquad (1.4)$$

On déduit l'expression du flux $d^2\phi$ envoyé par dS_i de luminance L_x sur dS_k

$$d^2\phi_x = I_x d\Omega = L_x dS_i \cos\alpha_i d\Omega$$

Luminance et intensité énergétique

Soit l'angle fait par la normale $\vec{n}$ à la surface émettrice S avec la direction Ox. La projection de dS sur le plan perpendiculaire à Ox définit la surface émettrice $dS_x = dS \cos\alpha$.
L'intensité énergétique élémentaire dI_x dans la direction Ox par unité de surface émettrice apparente dS_x s'appelle la luminance énergétique L_x.

$$L_x = \frac{I_x}{ds_x} = \frac{I_x}{ds\cos\alpha} = \frac{d^2\phi}{d\Omega ds\cos\alpha} \quad (1.4)$$

On déduit l'expression du flux $d^2\phi$ envoyé par dS_i de luminance L_x sur dS_k

$$d^2\phi_x = I_x d\Omega = L_x dS_i \cos\alpha_i d\Omega$$

Où I_x représente l'intensité énergétique

luminance d'équilibre et Absorption

Dans le cas d'un rayonnement dans un milieu semi-transparent dont l'indice de réfraction n_ν est uniforme, la luminance monochromatique du rayonnement d'équilibre est isotrope.

luminance d'équilibre et Absorption

Dans le cas d'un rayonnement dans un milieu semi-transparent dont l'indice de réfraction n_ν est uniforme, la luminance monochromatique du rayonnement d'équilibre est isotrope.
Elle est en fonction de la température du milieu .

luminance d'équilibre et Absorption

Dans le cas d'un rayonnement dans un milieu semi-transparent dont l'indice de réfraction n_ν est uniforme, la luminance monochromatique du rayonnement d'équilibre est isotrope.
Elle est en fonction de la température du milieu .
Elle est aussi appelée fonction de Planck et s'écrit

luminance d'équilibre et Absorption

Dans le cas d'un rayonnement dans un milieu semi-transparent dont l'indice de réfraction n_ν est uniforme, la luminance monochromatique du rayonnement d'équilibre est isotrope.
Elle est en fonction de la température du milieu .
Elle est aussi appelée fonction de Planck et s'écrit

$$L_\nu^0(T) = \frac{2h_p c^2 \nu^3}{exp^{\left(\frac{h_p c \nu}{K_B T}\right)} - 1}$$

luminance d'équilibre et Absorption

Dans le cas d'un rayonnement dans un milieu semi-transparent dont l'indice de réfraction n_ν est uniforme, la luminance monochromatique du rayonnement d'équilibre est isotrope.
Elle est en fonction de la température du milieu .
Elle est aussi appelée fonction de Planck et s'écrit

$$L_\nu^0(T) = \frac{2h_p c^2 \nu^3}{exp^{\left(\frac{h_p c \nu}{K_B T}\right)} - 1}$$

L'atténuation par absorption de l'énergie L_{ν}, a provenant d'une luminance $L_\nu(\vec{r}, \vec{\Delta}, t)$ s'écrit

luminance d'équilibre et Absorption

Dans le cas d'un rayonnement dans un milieu semi-transparent dont l'indice de réfraction n_ν est uniforme, la luminance monochromatique du rayonnement d'équilibre est isotrope.
Elle est en fonction de la température du milieu .
Elle est aussi appelée fonction de Planck et s'écrit

$$L_\nu^0(T) = \frac{2h_p c^2 \nu^3}{exp^{\left(\frac{h_p c \nu}{K_B T}\right)} - 1}$$

L'atténuation par absorption de l'énergie L_ν, a provenant d'une luminance $L_\nu(\vec{r}, \vec{\Delta}, t)$ s'écrit

$$dL_{\nu,a}(s + ds, \vec{\Delta}, t) = -k_{\nu,a} L_{\nu,a}(s, \vec{\Delta}, t) \qquad (1.5)$$

luminance d'équilibre et Absorption

Dans le cas d'un rayonnement dans un milieu semi-transparent dont l'indice de réfraction n_ν est uniforme, la luminance monochromatique du rayonnement d'équilibre est isotrope.
Elle est en fonction de la température du milieu .
Elle est aussi appelée fonction de Planck et s'écrit

$$L_\nu^0(T) = \frac{2h_p c^2 \nu^3}{exp^{\left(\frac{h_p c \nu}{K_B T}\right)} - 1}$$

L'atténuation par absorption de l'énergie L_ν, a provenant d'une luminance $L_\nu(\vec{r}, \vec{\Delta}, t)$ s'écrit

$$dL_{\nu,a}(s + ds, \vec{\Delta}, t) = -k_{\nu,a} L_{\nu,a}(s, \vec{\Delta}, t) \qquad (1.5)$$

$k_{\nu,a}$ le coefficient d'absorption monochromatique

luminance d'équilibre et Absorption

Dans le cas d'un rayonnement dans un milieu semi-transparent dont l'indice de réfraction n_ν est uniforme, la luminance monochromatique du rayonnement d'équilibre est isotrope.
Elle est en fonction de la température du milieu .
Elle est aussi appelée fonction de Planck et s'écrit

$$L_\nu^0(T) = \frac{2h_p c^2 \nu^3}{exp^{\left(\frac{h_p c \nu}{K_B T}\right)} - 1}$$

L'atténuation par absorption de l'énergie L_ν, a provenant d'une luminance $L_\nu(\vec{r}, \vec{\Delta}, t)$ s'écrit

$$dL_{\nu,a}(s + ds, \vec{\Delta}, t) = -k_{\nu,a} L_{\nu,a}(s, \vec{\Delta}, t) \tag{1.5}$$

$k_{\nu,a}$ le coefficient d'absorption monochromatique
$L_a = \frac{1}{k_{\nu,a}}$ la longueur d'absorption.

Emission ; Diffusion

Sur l'épaisseur ds le long de $\vec{\Delta}$ et une fraction $dL_{\nu,e}$ d'énergie.
L'équilibre donne le terme source par émission

Emission ; Diffusion

Sur l'épaisseur ds le long de $\vec{\Delta}$ et une fraction $dL_{\nu,e}$ d'énergie.
L'équilibre donne le terme source par émission

$$dL_{\nu,e}(s+ds,\vec{\Delta},t) = +k_{\nu,e}L_{\nu}^{0}(s,\vec{\Delta},t) \tag{1.6}$$

Emission ; Diffusion

Sur l'épaisseur ds le long de $\vec{\Delta}$ et une fraction $dL_{\nu,e}$ d'énergie. L'équilibre donne le terme source par émission

$$dL_{\nu,e}(s+ds,\vec{\Delta},t) = +k_{\nu,e}L_{\nu}^{0}(s,\vec{\Delta},t) \tag{1.6}$$

Une fraction d'énergie qui se propage vers $\vec{\Delta}$ est diffusée dans $\vec{\Delta}'$ avec un coefficient de diffusion σ_ν ; d'inverse $l_d = \frac{1}{\sigma_\nu}$ crée la variation $dL_{\nu,out}$ de la luminance à la traversée de ds et s'écrit

Emission ; Diffusion

Sur l'épaisseur ds le long de $\vec{\Delta}$ et une fraction $dL_{\nu,e}$ d'énergie. L'équilibre donne le terme source par émission

$$dL_{\nu,e}(s+ds,\vec{\Delta},t) = +k_{\nu,e}L_{\nu}^{0}(s,\vec{\Delta},t) \tag{1.6}$$

Une fraction d'énergie qui se propage vers $\vec{\Delta}$ est diffusée dans $\vec{\Delta}'$ avec un coefficient de diffusion σ_ν ; d'inverse $l_d = \frac{1}{\sigma_\nu}$ crée la variation $dL_{\nu,out}$ de la luminance à la traversée de ds et s'écrit

$$dL_{\nu,out}(s+ds,\vec{\Delta},t) = -\sigma_\nu L_\nu(s,\vec{\Delta},t) \tag{1.7}$$

Emission ; Diffusion

Sur l'épaisseur ds le long de $\vec{\Delta}$ et une fraction $dL_{\nu,e}$ d'énergie. L'équilibre donne le terme source par émission

$$dL_{\nu,e}(s+ds,\vec{\Delta},t) = +k_{\nu,e}L_{\nu}^{0}(s,\vec{\Delta},t) \qquad (1.6)$$

Une fraction d'énergie qui se propage vers $\vec{\Delta}$ est diffusée dans $\vec{\Delta}`$ avec un coefficient de diffusion σ_ν ; d'inverse $l_d = \frac{1}{\sigma_\nu}$ crée la variation $dL_{\nu,out}$ de la luminance à la traversée de ds et s'écrit

$$dL_{\nu,out}(s+ds,\vec{\Delta},t) = -\sigma_\nu L_\nu(s,\vec{\Delta},t) \qquad (1.7)$$

$$dL_{\nu,in}(s+ds,\vec{\Delta},t) = +\frac{\sigma}{4\pi}\int_{\Omega`} P_\nu(s,\vec{\Delta},\vec{\Delta}`)L_\nu(s,\vec{\Delta},\vec{\Delta}`)d\Omega`ds \qquad (1.8)$$

Emission ; Diffusion

Sur l'épaisseur ds le long de $\vec{\Delta}$ et une fraction $dL_{\nu,e}$ d'énergie. L'équilibre donne le terme source par émission

$$dL_{\nu,e}(s+ds,\vec{\Delta},t) = +k_{\nu,e}L^0_\nu(s,\vec{\Delta},t) \tag{1.6}$$

Une fraction d'énergie qui se propage vers $\vec{\Delta}$ est diffusée dans $\vec{\Delta}`$ avec un coefficient de diffusion σ_ν ; d'inverse $l_d = \frac{1}{\sigma_\nu}$ crée la variation $dL_{\nu,out}$ de la luminance à la traversée de ds et s'écrit

$$dL_{\nu,out}(s+ds,\vec{\Delta},t) = -\sigma_\nu L_\nu(s,\vec{\Delta},t) \tag{1.7}$$

$$dL_{\nu,in}(s+ds,\vec{\Delta},t) = +\frac{\sigma}{4\pi}\int_{\Omega`} P_\nu(s,\vec{\Delta},\vec{\Delta}`)L_\nu(s,\vec{\Delta},\vec{\Delta}`)d\Omega`ds \tag{1.8}$$

où $P_\nu(s,\vec{\Delta},\vec{\Delta}`)$ est la fonction de phase.

L'ETR

nous effectuons le bilan d'énergie radiative dans un volume élémentaire dV. L'émission et la diffusion contribuent positivement et l'extinction contribue négativement. Le bilan est basé sur la densité d'énergie monochromatique $L_{\nu}^{\backslash}(s, u, t)$ définie par

L'ETR

nous effectuons le bilan d'énergie radiative dans un volume élémentaire dV. L'émission et la diffusion contribuent positivement et l'extinction contribue négativement. Le bilan est basé sur la densité d'énergie monochromatique $L^{\backprime}_{\nu}(s, u, t)$ définie par

$$L^{\backprime}_{\nu}(s, \vec{\Delta}, t) = \frac{L_{\nu}(s, \vec{\Delta}, t)}{c} \tag{1.9}$$

$$\frac{1}{C}\frac{\partial}{\partial t}L_{\nu}(S, \vec{\Delta}, t) + \frac{\partial}{\partial S}L_{\nu}(S, \vec{\Delta}, t) = \overbrace{-[k_{\nu}(S) + \sigma_{\nu}(S)]L_{\nu}(S, \vec{\Delta}, t)}^{extinction=absorption+diffusion} + \overbrace{+k_{\nu}(S)L^{0}_{\nu}(T)}^{mission}$$

$$+ \underbrace{\frac{\sigma_{\nu}(S)}{4\pi}\int_{\Omega^{\backprime}} P_{\nu}(S, \vec{\Delta}, \vec{\Delta}^{\backprime})L_{\nu}(S, \vec{\Delta}', t)d\Omega'}_{diffusion}$$

grandeurs physiques utiles

Plusieurs grandeurs physiques sont utiles en science des transferts :

♦Densité radiative $D(x) = \oint_{\Omega(\mu)} I(x,\mu) d\Omega(\mu)$ avec μ direction

$$(1.10)$$

grandeurs physiques utiles

Plusieurs grandeurs physiques sont utiles en science des transferts :

♦Densité radiative $D(x) = \oint_{\Omega(\mu)} I(x,\mu)d\Omega(\mu)$ avec μ direction (1.10)

♦Vecteur flux radiatif $\phi_r(x) = \oint_{\Omega(\mu)} I(x,\mu)\mu d\Omega(\mu)$ (1.11)

grandeurs physiques utiles

Plusieurs grandeurs physiques sont utiles en science des transferts :

♦Densité radiative $D(x) = \oint_{\Omega(\mu)} I(x,\mu)d\Omega(\mu)$ avec μ direction (1.10)

♦Vecteur flux radiatif $\phi_r(x) = \oint_{\Omega(\mu)} I(x,\mu)\mu d\Omega(\mu)$ (1.11)

Au niveau d'une surface, définie par sa normale $\overrightarrow{n}$, on définit les flux :

♦entrant$\phi_r^+(x) = \int_{\mu.n<0} I(x,\mu)|\mu.n|d\mu$; sortant$\phi_r^-(x) = \int_{\mu.n>0} I(x,\mu)|\mu.n|d\mu$ (1.12)

grandeurs physiques utiles

Plusieurs grandeurs physiques sont utiles en science des transferts :

♦Densité radiative $D(x) = \oint_{\Omega(\mu)} I(x,\mu)d\Omega(\mu)$ avec μ direction (1.10)

♦Vecteur flux radiatif $\phi_r(x) = \oint_{\Omega(\mu)} I(x,\mu)\mu d\Omega(\mu)$ (1.11)

Au niveau d'une surface, définie par sa normale $\overrightarrow{n}$, on définit les flux :

♦entrant$\phi_r^+(x) = \int_{\mu.n<0} I(x,\mu)|\mu.n|d\mu$; sortant$\phi_r^-(x) = \int_{\mu.n>0} I(x,\mu)|\mu.n|d\mu$ (1.12)

♦ L'éclairement $E(x) = \phi_r^+(x)$.

Milieux stratifiés

L'**ETR** est compliquée ;
On suppose des symétrie plane ou sphérique.
On suppose le milieu constitué de couches horizontales,
L'axe *oz* est orienté vers l'intérieur, et les angles sont repérés par rapport à une normale intérieure au milieu.
On a $ds = \frac{dz}{\mu}$ et l'équation s'écrit :

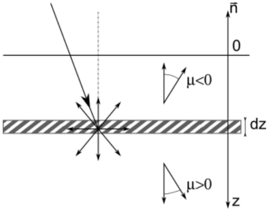


Figure: M. stratifiés

Milieux stratifiés

L'**ETR** est compliquée ;
On suppose des symétrie plane ou sphérique.
On suppose le milieu constitué de couches horizontales,
L'axe *oz* est orienté vers l'intérieur, et les angles sont repérés par rapport à une normale intérieure au milieu.
On a $ds = \frac{dz}{\mu}$ et l'équation s'écrit :

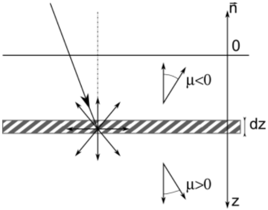


Figure: M. stratifiés

$$\mu \frac{dI_e}{dz} = -\kappa \left(I_e + \int_{\Omega'} p \left[\mu.\mu' + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}\cos(\varphi - \varphi') \right] I_e(\tau, \mu', \varphi') \frac{d\mu' d\varphi'}{4\pi} \right) \quad (2.1)$$

$$d\tau = \kappa(z)dz \Rightarrow \mu \frac{dI_e(z,\mu,\varphi)}{dz} = -I_e(z,\mu,\varphi) + \int_{\Omega'} p[(\cos\Theta)] I_e(\tau,\mu',\varphi') \frac{d\mu' d\varphi'}{4\pi} \quad (2.2)$$

Conditions aux limites

Pour compléter le modèle ; On suppose une luminance incidente collimatée dans la direction μ_0 , notée $\widetilde{I}(\tau, \mu)$.

Conditions aux limites

Pour compléter le modèle ; On suppose une luminance incidente collimatée dans la direction μ_0 , notée $\tilde{I}(\tau, \mu)$.
Quand les photons associés entrent dans le domaine D, ceux-ci sont en partie réfractés vers la direction $\xi(\mu_0)$ et diffusés dans toutes les directions entrantes.

Conditions aux limites

Pour compléter le modèle ; On suppose une luminance incidente collimatée dans la direction μ_0 , notée $\widetilde{I}(\tau, \mu)$.
Quand les photons associés entrent dans le domaine D, ceux-ci sont en partie réfractés vers la direction $\xi(\mu_0)$ et diffusés dans toutes les directions entrantes.
$\widetilde{I}(\tau, \mu_0)$ voir ([4]) est une des conditions aux limites, c'est la condition de Dirichlet.

Conditions aux limites

Pour compléter le modèle ; On suppose une luminance incidente collimatée dans la direction μ_0 , notée $\tilde{I}(\tau, \mu)$.
Quand les photons associés entrent dans le domaine D, ceux-ci sont en partie réfractés vers la direction $\xi(\mu_0)$ et diffusés dans toutes les directions entrantes.
$\tilde{I}(\tau, \mu_0)$ voir ([4]) est une des conditions aux limites, c'est la condition de Dirichlet.
On ajoute Les réflexions internes $I_{int}(\tau, \mu)$ sont aussi à prendre en compte. Ce qui s'écrit

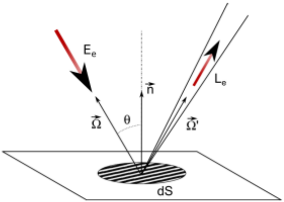
Conditions aux limites

Pour compléter le modèle ; On suppose une luminance incidente collimatée dans la direction μ_0 , notée $\widetilde{I}(\tau, \mu)$.
Quand les photons associés entrent dans le domaine D, ceux-ci sont en partie réfractés vers la direction $\xi(\mu_0)$ et diffusés dans toutes les directions entrantes.
$\widetilde{I}(\tau, \mu_0)$ voir ([4]) est une des conditions aux limites, c'est la condition de Dirichlet.
On ajoute Les réflexions internes $I_{int}(\tau, \mu)$ sont aussi à prendre en compte. Ce qui s'écrit

$$I(\tau, \mu) = \widetilde{I}(\tau, \mu) + I_{int}(\tau, \mu), \quad \mu : \mu.n < 0 \tag{2.3}$$

Exemple de Conditions aux limites

A
titre d'exemple , nous avons trouvés dans ([2]) une manière de d'imposer les conditions aux limites .
Pour déterminer la l'**BRDF** on impose un flux incident collimaté dans la direction $(\mu_0 > 0, \varphi_0 = 0)$, donné par :



$I_e(\tau = 0, \mu_0 > 0, \varphi) = F\delta(\mu - \mu_0)\delta(\varphi)$ En intégrant l'équation du transfert sur l'angle φ, on obtient une équation sans dépendance azimutale

$$\mu \frac{dI(\tau,\mu)}{d\tau} = -I(\tau,\mu) + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} p(\mu,\mu')I(\tau,\mu')d\mu' + \overbrace{\frac{F}{4\pi}p(\mu,-\mu_0)\exp\left(\frac{-\tau}{\mu_0}\right)}^{\text{terme source}} \quad (2.4)$$

Cas isotrope ETR simplifiée

Si fonction de phase est isotrope $p = \omega_0$
les conditions aux limites sur le flux diffus et la partie diffuse du flux sont indépendante de φ On aboutit ici à

Cas isotrope ETR simplifiée

Si fonction de phase est isotrope $p = \omega_0$
les conditions aux limites sur le flux diffus et la partie diffuse du flux sont indépendante de φ On aboutit ici à

$$\mu \frac{dI(\tau,\mu)}{d\tau} = -I(\tau,\mu) + \frac{\omega_0}{2}\int_{-1}^{1} I(\tau,\mu')d\mu' + \frac{F}{4\pi}\omega_0 \exp\left(\frac{-\tau}{\mu_0}\right) \quad (2.5)$$

L'équation (2.5) présente plusieurs propriétés intéressantes :

- Elle est soluble et constitue donc un bel exemple pour toutes les méthodes numériques.

Cas isotrope ETR simplifiée

Si fonction de phase est isotrope $p = \omega_0$
les conditions aux limites sur le flux diffus et la partie diffuse du flux sont indépendante de φ On aboutit ici à

$$\mu \frac{dI(\tau,\mu)}{d\tau} = -I(\tau,\mu) + \frac{\omega_0}{2}\int_{-1}^{1} I(\tau,\mu')d\mu' + \frac{F}{4\pi}\omega_0 \exp\left(\frac{-\tau}{\mu_0}\right) \qquad (2.5)$$

L'équation (2.5) présente plusieurs propriétés intéressantes :

- Elle est soluble et constitue donc un bel exemple pour toutes les méthodes numériques.
- Malgré sa simplicité, elle a un intérêt physique : à basse énergie, la diffusion se fait en onde s, et est donc isotrope.

Cas isotrope ETR simplifiée

Si fonction de phase est isotrope $p = \omega_0$
les conditions aux limites sur le flux diffus et la partie diffuse du flux sont indépendante de φ On aboutit ici à

$$\mu \frac{dI(\tau,\mu)}{d\tau} = -I(\tau,\mu) + \frac{\omega_0}{2}\int_{-1}^{1} I(\tau,\mu')d\mu' + \frac{F}{4\pi}\omega_0 \exp\left(\frac{-\tau}{\mu_0}\right) \qquad (2.5)$$

L'équation (2.5) présente plusieurs propriétés intéressantes :

- Elle est soluble et constitue donc un bel exemple pour toutes les méthodes numériques.
- Malgré sa simplicité, elle a un intérêt physique : à basse énergie, la diffusion se fait en onde s, et est donc isotrope.
- Même dans les cas où la diffusion n'est pas isotrope, un grand nombre de diffusions produit un résultat équivalent.

Cas isotrope ETR simplifiée

Si fonction de phase est isotrope $p = \omega_0$
les conditions aux limites sur le flux diffus et la partie diffuse du flux sont indépendante de φ On aboutit ici à

$$\mu \frac{dI(\tau,\mu)}{d\tau} = -I(\tau,\mu) + \frac{\omega_0}{2} \int_{-1}^{1} I(\tau,\mu')d\mu' + \frac{F}{4\pi}\omega_0 \exp\left(\frac{-\tau}{\mu_0}\right) \quad (2.5)$$

L'équation (2.5) présente plusieurs propriétés intéressantes :

- Elle est soluble et constitue donc un bel exemple pour toutes les méthodes numériques.
- Malgré sa simplicité, elle a un intérêt physique : à basse énergie, la diffusion se fait en onde s, et est donc isotrope.
- Même dans les cas où la diffusion n'est pas isotrope, un grand nombre de diffusions produit un résultat équivalent.

Loi de Beer-Lambert

On Considére une épaisseur dx faible de matériau absorbant qui contient des confettis qui arrêtent la lumière.

Loi de Beer-Lambert

On Considére une épaisseur dx faible de matériau absorbant qui contient des confettis qui arrêtent la lumière.
Le flux entrant $I(x)$ diminue en raison d'absorption. La lumière rencontre en moyenne $CdxS$ particules, chacun de section efficace d'absorption σ_a.On a le bilan suivant

Loi de Beer-Lambert

On Considére une épaisseur dx faible de matériau absorbant qui contient des confettis qui arrêtent la lumière.
Le flux entrant $I(x)$ diminue en raison d'absorption. La lumière rencontre en moyenne $CdxS$ particules, chacun de section efficace d'absorption σ_a.On a le bilan suivant

$$\frac{\text{ce qui disparait}}{\text{ce qui rentre}} = \frac{I(x) - I(x+dx)}{I(x)} = \frac{\text{surface opaque}}{\text{surface faisceau}} = \frac{\sigma_a CdxS}{S} \tag{2.6}$$

$$\text{Ce qui s'écrit } \frac{dI(x)}{dx} = -\sigma_a CI(x) \tag{2.7}$$

On voit donc que le flux de lumière décroit de façon exponentielle

Loi de Beer-Lambert

On Considére une épaisseur dx faible de matériau absorbant qui contient des confettis qui arrêtent la lumière.
Le flux entrant $I(x)$ diminue en raison d'absorption. La lumière rencontre en moyenne $CdxS$ particules, chacun de section efficace d'absorption σ_a.On a le bilan suivant

$$\frac{\text{ce qui disparait}}{\text{ce qui rentre}} = \frac{I(x) - I(x+dx)}{I(x)} = \frac{\text{surface opaque}}{\text{surface faisceau}} = \frac{\sigma_a CdxS}{S} \tag{2.6}$$

$$\text{Ce qui s'écrit} \quad \frac{dI(x)}{dx} = -\sigma_a C I(x) \tag{2.7}$$

On voit donc que le flux de lumière décroit de façon exponentielle

$$I(x) = \exp\left(-\sigma_a Cx\right) \quad \text{et la transmittance} \quad T(\lambda) = \frac{I(L)}{I(0)} = \exp\left(-\sigma_a CL\right) \tag{2.8}$$

Méthode de séparation des variables

On s'intéresse à l'équation (2.5) ; On applique la méthode de séparation des variables On cherche une solution

Méthode de séparation des variables

On s'intéresse à l'équation (2.5) ; On applique la méthode de séparation des variables On cherche une solution

$$I(\tau, \mu) = h(\tau) f(\mu)$$

Méthode de séparation des variables

On s'intéresse à l'équation (2.5) ; On applique la méthode de séparation des variables On cherche une solution

$$I(\tau, \mu) = h(\tau)f(\mu) \tag{3.1}$$

En reportant dans(2.5), On arrive à la forme séparée :

$$\alpha = -\frac{h'(\tau)}{h(\tau)} = \frac{1}{\mu} - \frac{\omega_0}{2\mu f(\mu)} \int_{-1}^{1} f(\mu')d\mu'$$

Méthode de séparation des variables

On s'intéresse à l'équation (2.5) ; On applique la méthode de séparation des variables On cherche une solution

$$I(\tau,\mu) = h(\tau)f(\mu) \tag{3.1}$$

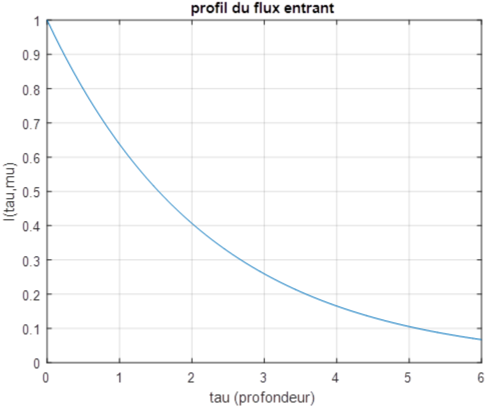
En reportant dans(2.5), On arrive à la forme séparée :

$$\alpha = -\frac{h'(\tau)}{h(\tau)} = \frac{1}{\mu} - \frac{\omega_0}{2\mu f(\mu)} \int_{-1}^{1} f(\mu')d\mu' \tag{3.2}$$

Elle varie exponentiellement avec la profondeur $h(\tau) = \exp(-\alpha\tau)$ (3.3)

Interprétation du modèle

On reconnait un profil angulaire elliptique (puisque : $\mu = cos(\theta)$, d'excentricité α, La solution montante $I \uparrow (\tau, \mu)$ est obtenue par le changement $\alpha \rightleftarrows -\alpha$.



Méthode à deux flux

L'idée est de décrire la diffusion par le couplage de deux flux diffus, l'un entrant et l'autre sortant.

Méthode à deux flux

L'idée est de décrire la diffusion par le couplage de deux flux diffus, l'un entrant et l'autre sortant.

$$\begin{cases} \dfrac{dI(x)}{dx} = -KI(x) + SJ(x) - SI(x) \\ -\dfrac{dJ(x)}{dx} = -KJ(x) + SI(x) - SJ(x) \end{cases} \tag{3.4}$$

K et S représentent section macro d'absorption et de diffusion.

Méthode à deux flux

L'idée est de décrire la diffusion par le couplage de deux flux diffus, l'un entrant et l'autre sortant.

$$\begin{cases} \dfrac{dI(x)}{dx} = -KI(x) + SJ(x) - SI(x) \\ -\dfrac{dJ(x)}{dx} = -KJ(x) + SI(x) - SJ(x) \end{cases} \tag{3.4}$$

K et S représentent section macro d'absorption et de diffusion. On cherche une base de 2 solutions exponentielles avec α valeur propre.

Méthode à deux flux

L'idée est de décrire la diffusion par le couplage de deux flux diffus, l'un entrant et l'autre sortant.

$$\begin{cases} \dfrac{dI(x)}{dx} = -KI(x) + SJ(x) - SI(x) \\ -\dfrac{dJ(x)}{dx} = -KJ(x) + SI(x) - SJ(x) \end{cases} \tag{3.4}$$

K et S représentent section macro d'absorption et de diffusion. On cherche une base de 2 solutions exponentielles avec α valeur propre.

$$\begin{pmatrix} I(x) \\ J(x) \end{pmatrix} = \exp(\alpha x) \begin{pmatrix} I_0 \\ J_0 \end{pmatrix} \quad \text{la solution générale :} \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} I(x) = A\left(1 - \sqrt{\frac{K}{K+2S}}\right)\exp(\alpha x) + B\left(1 + \sqrt{\frac{K}{K+2S}}\right)\exp(-\alpha x) \\ J(x) = A\left(1 + \sqrt{\frac{K}{K+2S}}\right)\exp(\alpha x) + B\left(1 - \sqrt{\frac{K}{K+2S}}\right)\exp(-\alpha x) \end{cases} \tag{3.6}$$

Conditions aux limites pour M. Deux flux

Pour compléter le système (3.4), on suppose qu'un faisceau d'intensité $\widetilde{I}$ entre normal à la surface, i.e $\widetilde{I}(0,1) = 1$.

Conditions aux limites pour M. Deux flux

Pour compléter le système (3.4), on suppose qu'un faisceau d'intensité $\tilde{I}$ entre normal à la surface, i.e $\tilde{I}(0,1) = 1$.
La partie du faisceau entrant vérifie $I(0,1) = 1 - \rho_s$ où ρ_s représente la propotion réflèchie. En comprenant les réflexions internes, les conditions aux limites peuvent s'écrire :

Conditions aux limites pour M. Deux flux

Pour compléter le système (3.4), on suppose qu'un faisceau d'intensité $\widetilde{I}$ entre normal à la surface, i.e $\widetilde{I}(0,1) = 1$.
La partie du faisceau entrant vérifie $I(0,1) = 1 - \rho_s$ où ρ_s représente la propotion réflèchie. En comprenant les réflexions internes, les conditions aux limites peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} I(0,\mu) & = & \rho_s(\mu) I(0,-\mu) + (1-\rho_s(\mu))\mathbb{I}_{[\mu=1]}, \\ I(\tau_0,-\mu) & = & \rho_s(\mu) I(\tau_0,\mu) \end{cases} \tag{3.7}$$

Nous avons résolu le problème de Cauchy (3.4, 3.19) avec la méthode de d'Euler modifiée appelée **RK2**.

Conditions aux limites pour M. Deux flux

Pour compléter le système (3.4), on suppose qu'un faisceau d'intensité $\tilde{I}$ entre normal à la surface, i.e $\tilde{I}(0,1)=1$.
La partie du faisceau entrant vérifie $I(0,1)=1-\rho_s$ où ρ_s représente la propotion réflèchie. En comprenant les réflexions internes, les conditions aux limites peuvent s'écrire :

$$\left\{\begin{array}{rcl} I(0,\mu) & = & \rho_s(\mu)I(0,-\mu)+(1-\rho_s(\mu))\mathbb{I}_{[\mu=1]}, \\ I(\tau_0,-\mu) & = & \rho_s(\mu)I(\tau_0,\mu) \end{array}\right. \tag{3.7}$$

Nous avons résolu le problème de Cauchy (3.4, 3.19) avec la méthode de d'Euler modifiée appelée **RK2**.
A partir de la, on peut tracer les profils des flux entrant et sortant dans le milieu, en fonction de la profondeur.

Interprétation du modèle

Un profil typique representé obtenu pour les valeurs $S = 0.9$, $K = 0.4$ et $\rho_s = 0.2$.

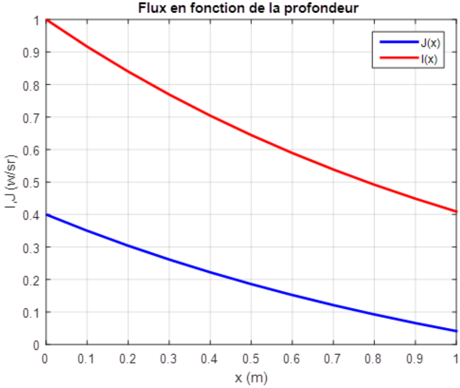


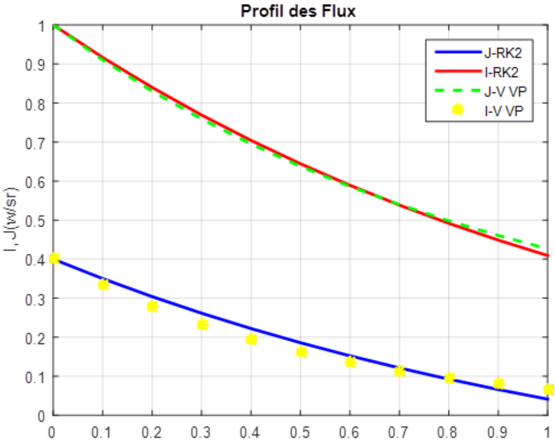
Figure: Profil des deuxflux

Comparaison pour la M. deux flux

on calcule les valeurs des flux $I(\tau)$ et $J(\tau)$ en appliquant la méthode des valeurs propres $I_i(t) = e^{\lambda_i t} V_i, \quad 1 \leq i \leq n$

Comparaison pour la M. deux flux

on calcule les valeurs des flux $I(\tau)$ et $J(\tau)$ en appliquant la méthode des valeurs propres $I_i(t) = e^{\lambda_i t} V_i, \quad 1 \leq i \leq n$



T et R en fonction l'indice de réfraction

Le modèle se réduit en supposant que la luminance peut se séparer en deux partie collimatée I_c diffuse I_d

T et R en fonction l'indice de réfraction

Le modèle se réduit en supposant que la luminance peut se séparer en deux partie collimatée I_c diffuse I_d

$$I(\tau,\mu) = I_c(\tau,\mu) + I_d(\tau,\mu) \tag{3.8}$$

On aura pour I_c
$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \frac{dI_c(\tau,\mu)}{d\tau} + I_c(\tau,\mu) = 0 \\ I_c(0,\mu) = \rho_s(\mu) I_c(0,-\mu) + (1-\rho_s(\mu))\mathbb{I}_{[\mu=1]}, \\ I_c(\tau_0,-\mu) = \rho_s(\mu) I_c(\tau_0,\mu) \end{array} \right. \tag{3.9}$$

De la loi de Beer Lambert
$$I_c(\tau,\mu) = \frac{1-\rho_{s1}}{1-\rho_{s1}C}\left(e^{-\tau}\mathbb{I}_{[\mu=1]} + Ce^{\tau}\mathbb{I}_{[\mu=1]}\right) \tag{3.10}$$

Avec $\rho_{s1} = \rho_s(1) = \dfrac{(1-n)^2}{(1+n)^2}$ $\quad C = \rho_{s1} e^{-2\tau_0}$

T et R en fonction l'indice de réfraction

Le modèle se réduit en supposant que la luminance peut se séparer en deux partie collimatée I_c diffuse I_d

$$I(\tau,\mu) = I_c(\tau,\mu) + I_d(\tau,\mu) \tag{3.8}$$

On aura pour I_c

$$\begin{cases} \mu \frac{dI_c(\tau,\mu)}{d\tau} + I_c(\tau,\mu) = 0 \\ I_c(0,\mu) = \rho_s(\mu) I_c(0,-\mu) + (1-\rho_s(\mu))\mathbb{I}_{[\mu=1]}, \\ I_c(\tau_0,-\mu) = \rho_s(\mu) I_c(\tau_0,\mu) \end{cases} \tag{3.9}$$

De la loi de Beer Lambert

$$I_c(\tau,\mu) = \frac{1-\rho_{s1}}{1-\rho_{s1}C}\left(e^{-\tau}\mathbb{I}_{[\mu=1]} + Ce^{\tau}\mathbb{I}_{[\mu=1]}\right) \tag{3.10}$$

Avec

$$\rho_{s1} = \rho_s(1) = \frac{(1-n)^2}{(1+n)^2} \quad C = \rho_{s1} e^{-2\tau_0} \tag{3.11}$$

T et R en fonction l'indice de réfraction

$$T_c = (1-\rho_{s1})I_c(\tau_0,1) = \frac{(1-\rho_{s1})^2}{1-\rho_{s1}C}e^{-\tau_0} \qquad (3.12)$$

$$R_c = \rho_{s1} + (1-\rho_{s1})I_c(0,-1) = \rho_{s1} + \frac{(1-\rho_{s1})^2 C}{1-\rho_{s1}C} \qquad (3.13)$$

On trouve après calcul

$$T_c = \frac{(4n^3+8n^2+4n)e^{-1/\tau_0}}{(1+n)^4-(1-n)^4 e^{-1/\tau_0}}$$

T et R en fonction l'indice de réfraction

$$T_c = (1-\rho_{s1})I_c(\tau_0,1) = \frac{(1-\rho_{s1})^2}{1-\rho_{s1}C}e^{-\tau_0} \tag{3.12}$$

$$R_c = \rho_{s1} + (1-\rho_{s1})I_c(0,-1) = \rho_{s1} + \frac{(1-\rho_{s1})^2 C}{1-\rho_{s1}C} \tag{3.13}$$

On trouve après calcul

$$T_c = \frac{(4n^3+8n^2+4n)e^{-1/\tau_0}}{(1+n)^4-(1-n)^4e^{-1/\tau_0}} \tag{3.14}$$

$$R_c = \frac{(1-n)^2}{(1+n)^4}\,\frac{16(n^4+n^2+2n)e^{-1/\tau_0}}{(1+n)^4-(1-n)^4e^{-1/\tau_0}}$$

T et R en fonction l'indice de réfraction

$$T_c = (1-\rho_{s1})I_c(\tau_0, 1) = \frac{(1-\rho_{s1})^2}{1-\rho_{s1}C}e^{-\tau_0} \tag{3.12}$$

$$R_c = \rho_{s1} + (1-\rho_{s1})I_c(0, -1) = \rho_{s1} + \frac{(1-\rho_{s1})^2 C}{1-\rho_{s1}C} \tag{3.13}$$

On trouve après calcul

$$T_c = \frac{(4n^3+8n^2+4n)e^{-1/\tau_0}}{(1+n)^4-(1-n)^4 e^{-1/\tau_0}} \tag{3.14}$$

$$R_c = \frac{(1-n)^2}{(1+n)^4}\frac{16(n^4+n^2+2n)e^{-1/\tau_0}}{(1+n)^4-(1-n)^4 e^{-1/\tau_0}} \tag{3.15}$$

on suppose que $K = 0,5cm^{-1}$, $\sigma_s = 1cm^{-1}$ et $n \in [1, 2]$.

Graphe de T et R

Lorsque l'indice de réfraction augmente, la réflectance R augmente.

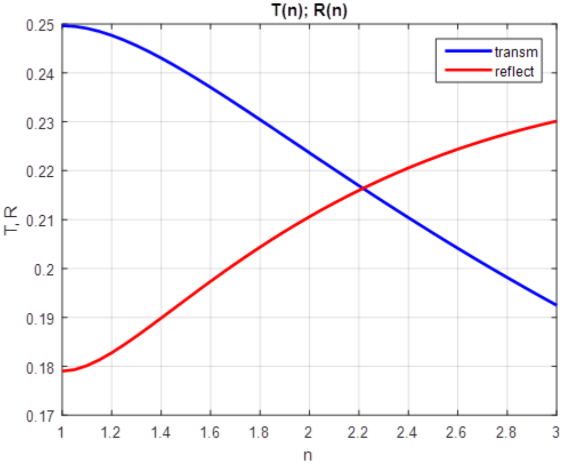
Graphe de T et R

Lorsque l'indice de réfraction augmente, la réflectance R augmente. la transmittance T décroît avec l'indice de

réfraction.

Graphe de T et R

Lorsque l'indice de réfraction augmente, la réflectance R augmente. la transmittance T décroît avec l'indice de



réfraction.

De l'ETR à l'équations de Fredholm

$$\begin{cases} \mu \frac{dI(\tau,\mu)}{d\tau} = -I(\tau,\mu) + S(\tau,\mu) \\ \\ S(\tau,\mu) = \frac{\omega_0}{2} \int_{-1}^{1} I(\tau,\mu')d\mu' + \frac{F}{4\pi}\omega_0 \exp\left(\frac{-\tau}{\mu_0}\right) \\ I(\tau = 0, \mu > 0) = 0 et I(\tau = L, \mu < 0) = 0 \end{cases}$$

De l'ETR à l'équations de Fredholm

$$\begin{cases} \mu \frac{dI(\tau,\mu)}{d\tau} = -I(\tau,\mu) + S(\tau,\mu) \\ \\ S(\tau,\mu) = \frac{\omega_0}{2} \int_{-1}^{1} I(\tau,\mu')d\mu' + \frac{F}{4\pi}\omega_0 \exp\left(\frac{-\tau}{\mu_0}\right) \\ I(\tau=0,\mu>0) = 0 et I(\tau=L,\mu<0) = 0 \end{cases} \tag{3.16}$$

$$I(\tau,\mu) = J(\tau,\mu)\exp\left(\frac{-\tau}{\mu}\right)$$

De l'ETR à l'équations de Fredholm

$$\begin{cases} \mu \frac{dI(\tau,\mu)}{d\tau} = -I(\tau,\mu) + S(\tau,\mu) \\ S(\tau,\mu) = \frac{\omega_0}{2} \int_{-1}^{1} I(\tau,\mu')d\mu' + \frac{F}{4\pi}\omega_0 \exp\left(\frac{-\tau}{\mu_0}\right) \\ I(\tau=0,\mu>0) = 0 et I(\tau=L,\mu<0) = 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

$$I(\tau,\mu) = J(\tau,\mu)\exp\left(\frac{-\tau}{\mu}\right) \quad (3.17)$$

$$\text{Où} \quad J \quad \text{vérifie} \quad \frac{dJ(\tau,\mu)}{d\tau} = \frac{\exp\left(\frac{\tau}{\mu}\right)}{\mu} S(\tau,\mu) \quad (3.18)$$

On peut donc intégrer l'équation (3.18)

Décomposition du flux

On obtient finalement pour les flux descendant et montant :

Décomposition du flux

On obtient finalement pour les flux descendant et montant :

$$\begin{cases} I\downarrow(\tau,\mu) &= \displaystyle\int_0^{\tau} \frac{(\exp(-(\tau-\tau')/\mu)}{\mu} S(\tau',\mu)d\tau' \quad \mu>0, \\ I\uparrow(\tau,\mu) &= \displaystyle -\int_{\tau}^{L} \frac{(\exp -(\tau-\tau')/\mu)}{\mu} S(\tau',\mu)d\tau' \quad \mu<0 \end{cases} \tag{3.19}$$

en permuttant les intégrales sur τ et sur μ on arrive à une équation de type **Fredholm** 2^{me} espèce

$$S(\tau) = \frac{F}{4\pi}\omega_0 \exp -\tau/\mu_0 + \frac{\omega_0}{2}\int_0^L K(\tau-\tau')S(\tau')d\tau' \tag{3.20}$$

avec le noyau donné par une exponentielle intégrale

$$K(\tau-\tau') = E_1(|\tau-\tau'|) = \int_0^1 \frac{\exp -|\tau-\tau'|/\mu}{\mu} \tag{3.21}$$

De l'ETR à Fredholm

Definition

On appelle équation intégrale de Fredholm d'inconnue $u(x)$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt, \tag{3.22}$$

$f(x)$, $K(x,t)$ (le noyau) sont des fonctions connues, λ donnée.

De l'ETR à Fredholm

Definition

On appelle équation intégrale de Fredholm d'inconnue $u(x)$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt, \tag{3.22}$$

$f(x)$, $K(x,t)$ (le noyau) sont des fonctions connues, λ donnée.

Example

$$u(x) = \frac{23}{6}x + \frac{1}{8}\int_0^1 xtu(t)dt, \quad u_{exa}(x) = 4x. \tag{3.23}$$

Application de la méthode de quadrature

L'équation (3.23), est vraie pour tout $x \in [a, b]$; en particulier pour tout $x_i = a + (i-1)h$, $i = 1, \cdots, n$ et $h = b - a/(n-1)$, on a

$$u(x_i) = f(x_i) + \int_a^b k(x_i, t)u(t)dt \tag{3.24}$$

Pour la partie intégrale de l'équation nous utilisons la méthode des Trapèzes

$$u_i = f_i + \frac{h}{2}\left[k_{i1}u_1 + k_{in}u_n + 2\sum_{j=2}^{n-1} k_{ij}u_j\right] \tag{3.25}$$

et on note : $f(x_i) = f_i$, $K(x_i, x_j) = K_{ij}$
Nous réorganisons les termes de l'équation (3.25) ; ce qui donne :

$$-\frac{h}{2}k_{i1}u_1 + u_i - h\sum_{j=2}^{n-1} k_{ij}u_j - \frac{h}{2}k_{in}u_n = f_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

Représentation graphique

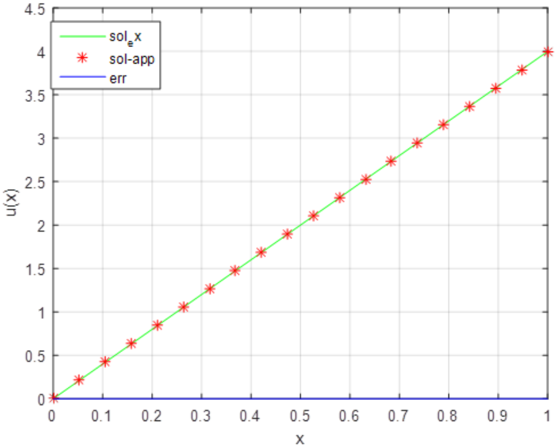


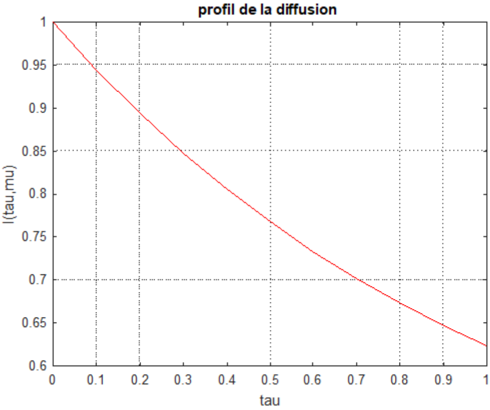
Figure: Résolution numérique de E.I.L.F

Résultats du calcul numérique

x	u_exa	u_app	erreur
0	0	0	0
0.0526	0.2105	0.2105	0.0000
0.1053	0.4211	0.4211	0.0000
0.1579	0.6316	0.6316	0.0000
0.2105	0.8421	0.8422	0.0001
0.2632	1.0526	1.0527	0.0001
0.3158	1.2632	1.2632	0.0001
0.3684	1.4737	1.4738	0.0001
0.4211	1.6842	1.6843	0.0001
0.4737	1.8947	1.8949	0.0001
0.5263	2.1053	2.1054	0.0001
0.5789	2.3158	2.3159	0.0001
0.6316	2.5263	2.5265	0.0002
0.6842	2.7368	2.7370	0.0002
0.7368	2.9474	2.9475	0.0002
0.7895	3.1579	3.1581	0.0002
0.8421	3.3684	3.3686	0.0002
0.8947	3.5789	3.5792	0.0002
0.9474	3.7895	3.7897	0.0002
1.0000	4.0000	4.0002	0.0002

Représentation du flux à partir de Fredholm

Pour finir revenons à l'équation de Fredholm (3.20) dont le noyau est donné par (3.21) et appliquons la méthode des trapèzes. Nous obtenons le résultat suivant



Conclusion et Perspectives

Les équations intégro différetielles modélisent plusieurs phénomènes, par exemple le transport radiatif.

Conclusion et Perspectives

Les équations intégro différetielles modélisent plusieurs phénomènes, par exemple le transport radiatif.
On ne prétend pas avoir résolu l'**ETR** mais on a détaillé sa modélisation dans des cas simple en appliquant des méthodes analytiques et numériques .

Conclusion et Perspectives

Les équations intégro différetielles modélisent plusieurs phénomènes, par exemple le transport radiatif.
On ne prétend pas avoir résolu l'**ETR** mais on a détaillé sa modélisation dans des cas simple en appliquant des méthodes analytiques et numériques .
On s'est intéressés aux méthodes numériques comme celles des quadratures trapèzes ainsi que la méthode de RK2.

Conclusion et Perspectives

Les équations intégro difféietielles modélisent plusieurs phénomènes, par exemple le transport radiatif.
On ne prétend pas avoir résolu l'**ETR** mais on a détaillé sa modélisation dans des cas simple en appliquant des méthodes analytiques et numériques .
On s'est intéressés aux méthodes numériques comme celles des quadratures trapèzes ainsi que la méthode de RK2.
Des exemples illustratifs nous ont permis de conclure et de comparer.

Conclusion et Perspectives

Les équations intégro différetielles modélisent plusieurs phénomènes, par exemple le transport radiatif.
On ne prétend pas avoir résolu l'**ETR** mais on a détaillé sa modélisation dans des cas simple en appliquant des méthodes analytiques et numériques .
On s'est intéressés aux méthodes numériques comme celles des quadratures trapèzes ainsi que la méthode de RK2.
Des exemples illustratifs nous ont permis de conclure et de comparer.
Comme perspective à ce modeste travail nous espèrons pouvoir mettre en oœuvre des méthodes numériques comme celle des volume fini permettant d'approcher la solution déterministe de l'**ETR** en choisissant un exemple concret convenable.

Bibliographie

- F. Ekvacioj ; Sur Certaines Equations Fonctionnelles de Volterra ; Seminaire Mathematique : A. Myller Universite de Jassy ; p 119-127 ; 1966.
- F. Geniet ; Introduction au transfert radiatif DEA. 2013, pp.59.
- M. Guesba ; Sur quelques équations intégrales non linéaires ; Université Kasdi Merbeh Ouragla ; Département de mathématiques ; Mémoire de Magistère ; 2012.
- D. Hardy ;Traitement des conditions aux limites spéculaires pour l'étude du transport radiatif dans des matériaux à géométrie complexe ; Thèse de Doctorat, 2017.
- T. Helie ; Series de Volterra pour la résolution d'équations aux dérivées partielles non linéaires ; INRIA Unité de Recherche de Rocquencourt ;CNRS UMR 9912 ; Centre Georges Pompidou, Paris ;

Bibliographie

- A. Rahmoune ; Sur la Résolution Numérique des Équations Intégrales en utilisant des Fonctions Spéciales ; Thèse de Doctorat ; Université de Batna ; Département de Mathématiques ; Juin 2011.
- J-L. Raimbault ; Equations différentielles ; Université de Paris 6 ; 2007.
- O. Remili ; Equationd intégrales de frontière exemples de résolution numérique ; Mémoire de Magister ; Université d'Oran Senia ; Département de mathématiques ; 2010.
- T. Sato ; Sur les équations intégrales non linéaires de Volterra ; Compositio Mathematica, tome 11, p 271-290 ; 1953.

Merci Pour Votre Attention