

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE D'ORAN USTO-MB



Faculté de Génie Electrique
Département d'Électronique

**Thèse en vue de l'obtention du diplôme de
Doctorat en Sciences**

Spécialité : Électronique

Option : Technique de communication moderne

Présentée par
Mr. Meche Abdelkrim

**Le filtre de Kalman et ses applications à la
poursuite et à la détection de voies**

Soutenue le : 02 Juillet 2013

Devant le jury composé de :

Prof.	Abdelaziz Ouamri	USTO-MB	Président
Prof.	Mokhtar Keche	USTO-MB	Rapporteur
Prof.	Nabil Boughanmi	USTO-MB	Examinateur
Prof.	Ali Djebbari	UDL-SBA	Examinateur
Dir. Rech.	Si Mohamed Arezki Mohamed	CDS Oran	Examinateur
Dr.	Hadjira Benoudnine	Univ. Mosta.	Examinateuse

Université des sciences et de la technologie d'Oran USTO-MB



**Faculté de Génie Electrique
Département d'Électronique
Laboratoire Signaux et Images**

Thème :

**Le filtre de Kalman et ses applications à la poursuite et à
la détection de voies**

par :

Mr. Meche Abdelkrim

Résumé

Dans ce mémoire nous avons présenté le filtre de Kalman, ce filtre est appliqué à la poursuite d'une cible qui se déplace dans le plan en utilisant les positions comme mesures fournies par un radar. Ensuite, on soulève certains problèmes posés en pratique et on présente les solutions envisagées pour répondre à leurs exigences. Effectivement, en pratique, les systèmes sont souvent non linéaires et le bruit est, en général, non Gaussien. À ces deux problèmes il se peut qu'il s'ajoute le problème du mode d'évolution de la dynamique de la cible. Pour remédier à tous ces problèmes, nous avons exposé certaines variantes du filtre de Kalman, les performances de ces techniques sont évaluées par des simulations. Enfin, et en s'inspirant de la formulation du problème de la poursuite, nous avons proposé une technique qui permet de détecter les voies ainsi que les virages en utilisant les marquages routiers....

Remerciements

Dieu merci,...

Tous mes remerciements à mes parents, ...

Je tien à remercier mon encadreur Mr *Keche M.* pour l'effort qui a fourni afin d'élaborer ce travail et le présent mémoire. Merci pour vos encouragements et vos recommandations.

Mes remerciements sont aussi pour le directeur du laboratoire LSI, Mr *Ouamri A.* qui m'a accueilli et qui m'a fait bénéficier de son expérience et aussi de son idée pour la détection de voies.

Merci aussi à tous mes amis et en particulier les membres de l'équipe tracking Mr *Dahmani M.* et Melle *Benoudnine H.* pour leur temps, leur disponibilité et les discussions très enrichissantes.

Je tien à remercier aussi Mr *Boughanmi N.*, Mr *Djebbari A.*, Mr *Arezki S.M.* et Melle *Benoudnine H.* d'avoir honoré ce travail en acceptant de faire partie des membres du jury.

Tous mes remerciements et mes sentiments à ma famille qui m'a beaucoup supportée et particulièrement ces derniers moments.

A tous ceux que je dois des remerciements,... merci.

Publications et communications

– Publications

1. **A. Meche, M. Dahmani, M. Keche and A. Ouamri.** A simplified $\alpha\beta$ based Gaussian sum filter. *AEÜ - International Journal of Electronics and Communications*, 67 :313-318, April 2013.
2. **M. Dahmani, M. Keche, A. Ouamri and A. Meche.** A new IMM algorithm using fixed coefficients filters (fastIMM). *AEÜ - International Journal of Electronics and Communications*, 64 :1123-1127, December 2010.
3. **A. Meche, M. Dahmani, M. Keche et A. Ouamri.** Application du filtrage statistique à la poursuite d'une cible non manœuvrante. *RADAR (Research And Development Air defense Review) publier par le CRD-CFDAT (Centre de Recherche du Commandement des Force de Défence Aérien sur le Territoire)*. pp. 32-36 no. 11 Octobre 2004.

– Communications

1. **M. Dahmani, A. Meche, M. Keche and A. Ouamri.** A Simplified Cubature Kalman filtering applied to Target Tracking. *International Conference on Advanced Communication and Information Systems (ICACIS'12)*, 12-13 Dec. 2012, Batna , Algeria.
2. **M. Dahmani, A. Meche, M. Keche, A. Ouamri et H. Benoudnine.** Une nouvelle approche floue pour l'amélioration des performances de l'algorithme IMM dans le problème de poursuite d'une cible manœuvrante, La 7ème conférence sur le génie électrique, EMP, . Bordj El Bahri, Alger 12-13 Avril 2011.
3. **A. Meche, A. Ait Darna et L. D. Mazzouz.** La Commande Optimale d'un Moteur à Courant Continu. *International Conference on Electronics Engineering, ICEE08, USTO-MB Oran, Algeria*.
4. **M. Dahmani, A. Meche, H. Benoudnine, M. Keche et A. Ouamri.** Application du filtre DCIMM à la poursuite d'une cible manœuvrante. *International Conference on Electronics Engineering, ICEE08, USTO-MB Oran, Algeria*.
5. **M. Dahmani, A. Meche, M. Keche, H. Benoudnine et A. Ouamri.** Poursuite angulaire d'une cible rayonnante à l'aide d'un estimateur pseudo

- linéaire modifié. 2ème Conférence sur les Techniques de Détections Architecture et Technologies (Centre de Recherche du Commandement des Force de Défonce Aérien sur le Territoire CRD CFDAT). (2004)
6. **A. Meche, M. Dahmani, M. Keche, A. Ouamri.** Azimuterie par l'application du filtrage statistique. Conférence Nationale sur les Technologies Naval (Centre de Recherche du commandement des Forces Naval CRD FN), (2004)
 7. **M. Dahmani, M. Keche, A. Ouamri, A. Meche et H. Benoudnine.** Utilisation de la logique floue dans les filtres $\alpha - \beta$ pour la poursuite adaptative d'une cible manœuvrante. Conférence Nationale sur les Technologies Naval (Centre de Recherche du commandement des Forces Naval CRD FN) (2004)

Table des matières

Résumé	i
Remerciements	ii
Publications et communications	iii
Table des matières	v
Liste des Figures	ix
Site des abréviations	xii
Introduction générale	1
1 La modélisation en pistage	6
1.1 Introduction	6
1.2 Définition de la modélisation	7
1.2.1 Choix du modèle	7
1.2.2 Choix du vecteur d'état	9
1.3 Equation de la dynamique du mouvement rectiligne	11
1.3.1 Mouvement à vitesse constante (CV)	12
1.3.2 Mouvement à accélération constante (CA)	13
1.4 Equation de la dynamique du mouvement circulaire	14
1.4.1 Mouvement circulaire à vitesse de rotation connue	14
1.4.2 Mouvement circulaire à vitesse de rotation inconnue	15
1.5 Equation de la mesure	16
1.5.1 Mesure cartésienne	16
1.5.2 Mesure polaire	17
1.6 Le prétraitement de la mesure	17
1.6.1 Effet de la transformation non linéaire	18
1.6.2 Etude de la validité de la linéarisation classique	20
1.6.2.1 Statistiques réelles de l'erreur	20
1.6.2.2 Linéarisation des statistiques réelles de l'erreur	21
1.6.2.3 Limite de la validité de la linéarisation	21
1.7 Conclusion	23

2 Le filtre de Kalman appliqué à la poursuite	24
2.1 Introduction	24
2.2 Le Filtre de Kalman (KF)	25
2.2.1 Algorithme du filtre de Kalman	26
2.2.2 Avantages du filtre de Kalman	29
2.2.3 Extension du filtre de Kalman	29
2.3 Les filtres $\alpha\beta$ et $\alpha\beta\gamma$ appliqués à la poursuite	30
2.3.1 Principe de dérivation du filtre $\alpha\beta$	30
2.3.2 Dérivation du filtre $\alpha\beta$	31
2.3.3 Caractéristiques en régime permanent	35
2.3.4 Paramètres du filtre $\alpha\beta\gamma$	36
2.4 Variantes du filtre $\alpha\beta$	38
2.4.1 Approximation d'ordre un	38
2.4.2 Approximation récursive	39
2.5 Critères de performances	40
2.5.1 L'erreur d'estimation quadratique normalisée (NEES)	41
2.5.2 Le carré normalisé de l'innovation (NIS)	41
2.5.3 La racine carrée de l'erreur quadratique moyenne (RMSE)	42
2.6 Applications	42
2.6.1 Comparaison entre le KF et le filtre $\alpha\beta$	43
2.6.2 Utilisation du filtre $\alpha\beta$ adaptatif	46
2.7 Conclusion	47
3 Extension du filtre de Kalman au cas non linéaire	48
3.1 Introduction	48
3.2 L'estimateur optimal	50
3.3 Le Filtre de Kalman étendu (EKF)	51
3.3.1 Etape de prédiction	52
3.3.2 Etape de mise à jour	54
3.3.3 Remarques	54
3.4 Le filtre de Kalman Unscented (UKF)	56
3.4.1 Les transformations unscented	56
3.4.2 Algorithme du filtre UKF	58
3.4.3 Variantes de la transformation unscented	63
3.4.4 Le filtre de Kalman Cubature (CKF)	65
3.5 Le filtre de Kalman Quadrature (QKF)	65
3.5.1 Etape de prédiction	66
3.5.2 Etape de mise à jour	67
3.6 Simulations	68
3.6.1 Evaluation des performances	68
3.6.2 Effet des paramètres en régime statique	70
3.6.3 Robustesse des filtres vis-à-vis de l'erreur croisée	72
3.7 Le filtre de Kalman à mesure convertie (CMKF)	73
3.7.1 Analyse de l'erreur de mesure (notion du biais aditif)	74

3.7.2	Analyse de l'erreur de mesure (notion du biais multiplicatif)	77
3.7.3	Implémentation du filtre de Kalman à mesure convertie	79
3.7.4	Remarques pour l'implémentation	81
3.7.5	Comparaison entre les différentes versions du CMKF	81
3.8	Conclusion	83
4	Extension du filtre de Kalman au cas non Gaussien	85
4.1	Introduction	85
4.2	Approximation d'une densité par une somme de Gaussiennes	87
4.2.1	Théorème	88
4.2.2	Implémentation de l'approximation	89
4.3	Les filtres à somme Gaussiennes (GSF)	90
4.3.1	Application du GSF pour le cas linéaire non Gaussien	91
4.3.2	Application du GSF dans le cas d'une mesure non linéaire .	93
4.4	Description du filtre $\alpha\beta$ -GSF appliqué au cas linéaire et un bruit non Gaussien	96
4.5	Simulations	98
4.5.1	Types du bruit non Gaussien	99
4.5.2	Limites du filtre de Kalman en présence d'un bruit non Gaussien	101
4.5.3	Comparaison entre l'EKF et l'AGSF	103
4.5.4	Comparaison entre l'GSF et le $\alpha\beta$ -GSF	106
4.6	Conclusion	112
5	Application du filtre de Kalman au cas de cible manœuvrante	113
5.1	Introduction	113
5.2	Poursuite de cible manœuvrante par un algorithme à modèle unique	114
5.2.1	Méthodes basées sur la détection de la manœuvre	114
5.2.2	Modélisation de la manœuvre par un bruit	115
5.3	Poursuite de cible manœuvrante par un algorithme à modèles mul- tiples (MM)	116
5.3.1	Structure d'un algorithme MM	117
5.3.2	Variantes de l'algorithme MM	118
5.4	Description de l'algorithme à modèles multiples interagissant (IMM)	120
5.5	Paramètres de l'algorithme IMM	124
5.5.1	Choix des modèles décrivant la dynamique du mobile	124
5.5.2	Détermination des intensités des bruits de processus inter- venant dans chaque modèle	125
5.5.3	Sélection de la matrice de transition	125
5.6	L'algorithme FastIMM	126
5.7	Simulations	127
5.7.1	Description du scénario	127
5.7.2	Poursuite à l'aide d'un seul filtre	128
5.7.3	Utilisation de l'IMM pour la poursuite d'une cible manœu- vrante	129

5.8	Conclusion	132
6	Application du filtre de Kalman à la détection de voies	134
6.1	Introduction	134
6.2	Les systèmes de transport intelligents	136
6.3	Les systèmes d'aide à la conduite	137
6.3.1	Affichage frontal	137
6.3.2	Régulation adaptative de vitesse	137
6.3.3	Système de surveillance du conducteur	138
6.3.4	Les systèmes de détection de voie	138
6.3.5	Autres systèmes	138
6.3.6	Perspectives	138
6.4	Caractéristiques de la voie	139
6.5	La modélisation du marquage routier	139
6.5.1	Définition des repères	139
6.5.2	Modèle du marquage routier	141
6.6	Détection de voies par les techniques de poursuite	142
6.6.1	Utilisation de l'IMM pour la détection de voies et de virages	143
6.7	L'algorithme proposé	144
6.7.1	Initialisation de la trajectoire	144
6.7.2	Détection du marquage et localisation du début de virage .	145
6.7.3	Lissage de la trajectoire estimée	146
6.7.3.1	Principe	146
6.7.3.2	Algorithme de lissage	147
6.8	Résultats d'expérimentations	149
6.9	Conclusion	154
	Conclusion générale	154
A	Moments d'une variables aléatoire Gaussienne après transformation non linéaire	158
B	dérivation des équations du filtre AGSF	160
B.1	Dérivation de l'équation (4.32)	160
B.2	Démonstration de l'équation (4.33)	162
	Bibliographie	166

Table des figures

1	Synoptique du processus d'estimation.	2
2	Organigramme d'enchaînement des chapitres du mémoire.	5
1.1	Géométrie du modèle.	10
1.2	Effet de la transformation non linéaire de deux variables aléatoires uniformes (r, θ) sur la moyenne et la matrice de covariance de (x, y)	19
1.3	Valeur absolue de la différence des biais réel et linéarisé en x pour différents valeurs de r et σ_θ	23
2.1	Un cycle du filtre de Kalman	28
2.2	Les coefficients $\alpha\beta$ du gain statique pour le modèle DWNA.	35
2.3	Les coefficients $\alpha\beta\gamma$ du gain statique pour le modèle DWPA.	37
2.4	Initialisation du filtre $\alpha\beta$ à paramètres optimaux.	39
2.5	Trajectoire de la cible	43
2.6	RCEQM en (a) position et (b) vitesse, des deux filtres $\alpha\beta$ et KF pour $\sigma_w = 0.1m/s^2$	44
2.7	RCEQM en (a) position et (b) vitesse, des deux filtres $\alpha\beta$ et KF pour $\sigma_w = 0.03m/s^2$	45
2.8	RCEQM (a) en position, des deux filtres $\alpha\beta$ et KF pour $\sigma_w = 0.03m/s^2$, (b) zoom en régime statique de (a).	46
2.9	RCEQM en (a) position et (b) vitesse, des deux filtres $\alpha\beta$, KF et $\alpha\beta$ adaptatif pour $\sigma_w = 0.1m/s^2$	46
2.10	RCEQM en (a) position et (b) vitesse, des deux filtres $\alpha\beta$, KF et $\alpha\beta$ adaptatif pour $\sigma_w = 0.03m/s^2$	47
3.1	Un cycle du filtre de Kalman Etendu (EKF)	55
3.2	Estimation de la moyenne et de la covariance par la transformation unscented.	59
3.3	Comportement des points sigma avant (a) et après (b) transformation.	59
3.4	Trajectoire de la cible	68
3.5	Evaluations des performances des trois estimateurs en termes de (a) RCEQM position, (b) RCEQM vitesse, (c) ANEES et (d) ANIS, pour $\sigma_r = 50m$ et $\sigma_\theta = 1.5^\circ$	69
3.6	Evaluations des performances des trois estimateurs en termes de (a) RCEQM position, (b) RCEQM vitesse, (c) ANEES et (d) ANIS, pour $\sigma_r = 50m$ et $\sigma_\theta = 3^\circ$	70

3.7	RCEQM en position (a) et en vitesse (b) du dernier scan en fonction de l'écart type en azimut σ_θ	71
3.8	RCEQM en position (a) et en vitesse (b) du dernier scan en fonction du temps de mise à jour T	71
3.9	RCEQM en position (a) et en vitesse (b) du dernier scan en fonction de l'écart type du bruit de système σ_w	71
3.10	Présentation des six scénarios les plus proches de l'origine.	72
3.11	La RCEQM en position (a) et le GDOP (b) pour le dernier scan des 56 trajectoires.	73
3.12	Coefficients de pondération des conversions dé-biaisée et non-biaisée.	80
3.13	Moyenne sur 10000 réalisations de l'erreur de mesure en x pour : (a) $-(x, y) = (1000m, 1000m)$, (b) $-(x, y) = (50000m, 50000m)$ en fonction de σ_θ	80
3.14	Trajectoire de la cible.	82
3.15	La RCEQM en (a) position et (b) vitesse pour $\sigma_v = 0.1^\circ$	82
3.16	La RCEQM en (a) position et (b) vitesse pour $\sigma_v = 5^\circ$	82
3.17	La RCEQM en (a) position et (b) vitesse pour $\sigma_v = 10^\circ$	83
4.1	Approximation de la densité de Rayleigh de paramètre d'échelle $b = 2$ par la somme de deux Gaussiennes.	91
4.2	Architecture de l'algorithme $\alpha\beta$ -GSF.	98
4.3	Trajectoire de la cible.	99
4.4	Illustration d'un bruit Gaussien contaminé par un bruit des reflets.	100
4.5	Approximation d'une densité uniforme par une mixture à 2, 4 et 10 composantes Gaussiennes.	101
4.6	RCEQM en position du filtre de Kalman pour $\rho = 10$	102
4.7	RCEQM en position du filtre de Kalman pour $\varepsilon = 0.01$	103
4.8	La RCEQM en (a) position, (b) vitesse et (c) ANEES des filtres EKF et AGSF, pour $\varepsilon = 0.25$, $\sigma_{\theta_1} = 0.01^\circ$, $\sigma_{\theta_2} = 0.1^\circ$, $\sigma_{R_1} = \sigma_{R_2} = 50m$	104
4.9	La RCEQM en (a) position, (b) vitesse et (c) ANEES des filtres EKF et AGSF, pour $\varepsilon = 0.25$, $\sigma_{\theta_1} = 0.1^\circ$, $\sigma_{\theta_2} = 1^\circ$, $\sigma_{R_1} = \sigma_{R_2} = 50m$	105
4.10	Les RCEQM en (a) position et (b) vitesse des filtres GSF et $\alpha\beta$ -GSF pour $\varepsilon = 0.01$	107
4.11	Les RCEQM en (a) position et (b) vitesse des filtres GSF et $\alpha\beta$ -GSF pour $\varepsilon = 0.1$	108
4.12	Les RCEQM en (a) position et (b) vitesse des filtres GSF et $\alpha\beta$ -GSF pour $\varepsilon = 0.25$	109
4.13	La RCEQM en position du filtre $\alpha\beta$ -GSF en fonction du nombre de composantes.	111
4.14	Rapport entre les temps d'exécution des filtres GSF et $\alpha\beta$ -GSF en fonction du nombre de composantes.	112
5.1	Exemple de la fonction $s(t)$ à trois modes.	117
5.2	Structure générale d'un algorithme MM à deux modes.	119
5.3	Un cycle de l'algorithme IMM à deux modes.	121

5.4	Diagramme de l'algorithme FastIMM à deux modes.	127
5.5	Trajectoire de la cible.	128
5.6	RCEQM en (a) position et (b) vitesse du filtre de Kalman pour différentes valeurs de l'écart type du bruit de système σ_w	129
5.7	RCEQM en (a) position et (b) vitesse du filtre de Kalman avec différentes valeurs de l'écart type du bruit de système σ_w attribuées à chaque tranche d'intervalle.	129
5.8	RCEQM en (a) position et (b) vitesse des trois estimateurs IMM. .	131
5.9	Probabilités d'action des trois estimateurs (a) IMM_L, IMM_CT et (b) IMM_CT2.	131
6.1	Certaines fonctionnalités des véhicules intelligents.	137
6.2	Marquage dans les repaires réel (a) et celui de la trame (b).	141
6.3	Représentation des voies de la route par des cibles fictives en déplacement.	142
6.4	Algorithme proposé pour la détection des voies.	144
6.5	Décomposition de la première trame en quatre zones, et choix des points pour l'initialisation.	146
6.6	Trajectoires estimées des cibles fictives et détection des débuts des virages.	147
6.7	Le marquage estimé et ses paramètres : (a) les bordures et la courbure détectées, (b) probabilités d'action pour la trajectoire de droite, (c) probabilités d'action pour la trajectoire de gauche, (d) vitesse de rotation de la cible fictive.	150
6.8	Résultats d'estimation des marquages et détection des virages en absence de l'ombre.	152
6.9	Résultats d'estimation des marquages et de détection des virages en présence de l'ombre.	153
6.10	Résultats d'estimation des marquages et de détection des virages en l'absence partielle du marquage routier.	153

AGSF	<i>Adaptive Gaussian Sum Filter</i>	Filtre à somme Gaussienne adaptative
AMM	<i>Autonomous Multiple Model</i>	Algorithmes multimodal autonomes
ANES	<i>Average Normalized (state) Estimation Error Squared</i>	Moyenne de l'erreur d'estimation quadratique normalisée
ATC	<i>Air Traffic Control</i>	Contrôle du trafic aérien
AVG	<i>Autonomous Guided Vehicule</i>	Véhicule à guidage autonome
BOT	<i>Bearing Only Tracking</i>	Poursuite à l'aide de mesures angulaires seulement
CA	<i>Constant Acceleration model</i>	Modèle à accélération constante
CCS	<i>Camera Coordinate System</i>	Système de coordonnes de la caméra
CKF	<i>Cubature Kalman Filter</i>	Filtre de Kalman Cubature
CMKF-D	<i>Debiased Converted Measurement Kalman Filter</i>	Filtre de Kalman à mesure convertie débiaisée
CRE	<i>Cross Range Error</i>	Erreur croisée
CT	<i>Constant Turn rate model</i>	Modèle à vitesse de rotation constante
CTR	<i>Constant Turn Rate</i>	Vitesse de rotation constante
CV	<i>Constant Velocity model</i>	Modèle à vitesse constante
DAS	<i>Driver's Assistance System</i>	Systèmes d'aide à la conduite
DWNA	<i>Discrete White Noise Acceleration model</i>	Modèle discret à accélération modélisée par un bruit blanc
DWPA	<i>Discrete Wiener Process Acceleration model</i>	Modèle discret à accélération modélisée par un processus de Wiener
EKF	<i>Extended Kalman Filter</i>	Filtre de Kalman étendu
EM	<i>Expectation Maximisation</i>	Maximisation de la Moyenne (algorithme)
BGF	<i>Grid Based Filter</i>	Filtre à base de Grille
GHF	<i>Gauss-Hermite Filter</i>	Filtre Gauss-Hermite
GPS	<i>Global Positioning System</i>	Système de positionnement global
GSF	<i>Gaussian Sum Filter</i>	Filtre à somme Gaussienne
IE	<i>Input Estimation</i>	Estimation d'entrée (algorithme)
IMM	<i>Interacting Multiple Model</i>	Modèles multiples interagissant (algorithme)
IMU	<i>Inertial measurement unit</i>	Unité de mesure inertielle
IKF	<i>Iterated Kalman Filter</i>	Filtre de Kalman itéré
KF	<i>Kalman Filter</i>	Filtre de Kalman
ITS	<i>Intelligent Transportation Systems</i>	Systèmes de transport intelligents
MCF	<i>Mixed Coordinates Filter</i>	Filtre à coordonnées mixte
MM	<i>Multiple Model</i>	Modèle multiple
MMSE	<i>Minimum Mean Square Error</i>	Erreur quadratique moyenne minimale
NEES	<i>Normalized (state) Estimation Error Squared</i>	l'erreur d'estimation quadratique normalisée
NCA	<i>Nearly Constant Acceleration model</i>	Modèle à accélération quasi-constante
NCV	<i>Nearly Constant Velocity model</i>	modèle à vitesse quasi-constante
NIS	<i>Normalized Innovation Square</i>	Carré normalisé de l'innovation
PF	<i>Particle Filter</i>	Filtre particulaire
RMSE	<i>Root Mean Square Error</i>	(RCEQM) Racine Carrée de l'Erreur Quadratique Moyenne
SLR	<i>Statistical Linear Regression</i>	Régression statistique linéaire
SNR	<i>Signal to Noise Ratio</i>	Rapport signal sur bruit
SPKF	<i>Sigma-Point Kalman Filter</i>	Filtre de Kalman à base des points Sigma
SUT	<i>Scaled Unscented Transformation</i>	Transformation unscented mise à l'échelle

TR	<i>Turn Rate</i>	Vitesse de rotation
TWS	<i>Track While-Scan radar system</i>	Systèmes radar de poursuite pendant le scan
UCM	<i>Unbiaised Converted Measurement</i>	Mesure convertie non-biaisée
UKF	<i>Unscented Kalman Filter</i>	Filtre de Kalman unscented
UT	<i>Unscented Transform</i>	Transformée unscented
WCC	<i>World Coordinate System</i>	Système de coordonnées réel

Introduction générale

Le problème de la poursuite, appelé aussi pistage, consiste en l'estimation des composantes du vecteur d'état à des instants donnés. Ces composantes sont souvent la position, la vitesse et l'accélération. On utilise pour cela un modèle décrivant le comportement du mobile et une mesure bruitée acquise par un capteur tel que le radar 'RAdio Detection And Ranging' ou le sonar 'SOund Navigation And Ranging'. La poursuite est par conséquent considérée comme étant un problème de filtrage où on cherche à estimer l'état en éliminant les bruits.

Suivant l'application et la technologie utilisée, on trouve plusieurs types de radar et de sonar (actif ou passif, à balayage électronique ou mécanique, ... etc). Parmi les domaines d'utilisations civiles du radar on peut citer :

- La météorologie
- La navigation maritime et fluviale
- La circulation routière
- La radarastronomie
- La trajectographie
- Les véhicules intelligents
- Le contrôle aérien
- ...

Les systèmes de surveillance aérien, '*Air Traffic Control (ATC)*', reçoivent en plus de la position relative mesurée de l'avion des informations supplémentaires tels que le niveau de vol, le numéro d'identification, et ainsi de suite. Un prétraitement est alors effectué au sein de la station radar pour faire le lien entre les mesures et

les pistes. Ces systèmes doivent satisfaire certaines exigences ; à titre d'exemple, effectuer une estimation précise de la vitesse, ce qui permet de prévoir les collisions. Lorsqu'il donne des ordres au pilote de l'avion, le contrôleur aérien doit vérifier si ses ordres ont été effectivement respectés. A cet effet le système ATC doit détecter rapidement les éventuelles manœuvres effectuées par l'avion, et un indicateur de manœuvre doit être mis en place tout en évitant les fausses alarmes.

Le pistage est un problème d'estimation hybride. En effet, les incertitudes liées à la dynamique du système ainsi qu'à la mesure sont représentées par des bruits ; cela représente les incertitudes continues. Cependant dans le cas de présence de manœuvres, la dynamique du système n'est pas unique, on dit qu'on a une incertitude sur le mode d'évolution ; cela représente les incertitudes discrètes. Le processus d'estimation d'état peut être schématisé comme suit :

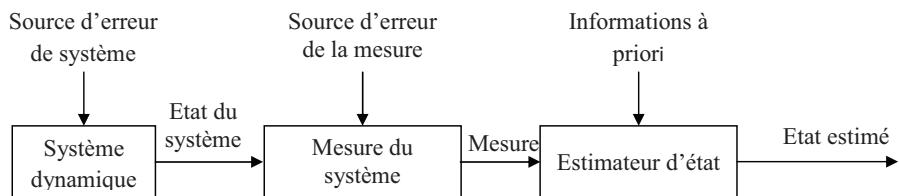


FIGURE 1: Synoptique du processus d'estimation.

Nous ne disposons pas d'accès aux deux premiers blocs, ils sont considérés comme une seule boîte noire. L'unique variable qui est à notre portée est la mesure ; le problème qui s'ajoute est que cette dernière est affectée par différentes sources de bruits.

L'estimateur le plus utilisé dans la littérature est l'estimateur de *Bayes*. Dans le modèle de Bayes, toutes les quantités incertaines sont représentées par des variables aléatoires. Les méthodes traditionnellement utilisées dans l'approche de *Bayes*, se basent sur la manipulation de la distribution de ces variables aléatoires. Un problème principal du procédé d'inférence statistique est comment représenter ces distributions. Dans le cas du modèle linéaire Gaussien, toutes les distributions sont Gaussiennes et peuvent par conséquent être représentées exactement par leur,

moyenne et leur variance, c'est le cas du filtre de Kalman. Malheureusement, c'est presque le seul cas où on peut obtenir une solution simple et exacte, car dans beaucoup d'applications pratiques ces suppositions ne sont pas satisfaites.

Cette thèse de doctorat a pour but de présenter le filtre de Kalman, et de montrer son extension aux cas non linéaire et/ou non Gaussien. Deux principales applications sont envisagées : la poursuite de cible et la détection de voies. Le présent manuscrit est organisé comme suit :

Le premier chapitre présente les notions de base qui doivent être soigneusement considérer pour toute personne ayant l'intention de s'investir dans le domaine de la poursuite. Après une présentation des modèles et des vecteurs d'état utilisés pour la poursuite de cible, on aborde la description des mouvements rectiligne et circulaire. Ensuite on passe au traitement de la mesure issue du radar. Cette mesure est souvent donnée dans le repère polaire (porté et azimute), alors qu'on préfère que la poursuite s'effectue dans le repère cartésien. Dans ce cas la mesure doit subir un prétraitement et l'équation de mesure doit être linéarisée, ce qui nécessite une étude de la validité de la linéarisation.

Dans le deuxième chapitre, on présentera la formulation du filtre de Kalman dans le cas d'un système linéaire en présence d'un bruit Gaussien. Ce filtre réalise une régression linéaire incrémentale et présente, dans ce cas particulier, l'estimée optimale du vecteur d'état au sens de la minimisation de la variance d'erreur. La pratique a montré que le filtre de Kalman passe d'un régime transitoire vers un régime statique, où il est similaire au filtre nommé $\alpha\beta$. Ce dernier sera détaillé avant la présentation de ses différentes variantes. En dernier lieu, on présentera certains critères qui permettent l'évaluation des performances des estimateurs.

La première extension du filtre de Kalman fera l'objet du troisième chapitre. Dans la pratique, on est souvent confrontés à des problèmes non linéaires. Ce cas se manifeste lorsque la non linéarité est, indifféremment, dans l'équation du système ou celle de la mesure. Le problème avec les systèmes non linéaires, c'est qu'il est difficile de calculer la densité de probabilité d'une variable aléatoire ayant subie une transformation non linéaire quelconque. Parce qu'en général l'implémentation

de l'estimateur optimal n'est pas évidente, on doit recourir aux estimateurs sous optimaux. Le filtre le plus connu parmi ceux-ci est le filtre de Kalman étendu, '*Extended Kalman Filter (EKF)*'. L'EKF se base sur le développement en séries de *Taylor* autour d'une certaine quantité. On considère que la moyenne et la covariance, obtenues après linéarisation, sont très proches des vraies valeurs. Dans certains cas l'EKF est inapproprié et ne donne pas de résultats satisfaisants, il arrive même qu'il diverge. Pour remédier à cela d'autres versions ont été introduites. On présentera, en particulier, le filtre de Kalman unscented, '*Unscented Kalman Filter (UKF)*' et le filtre de Kalman Quadrature, '*Quadrature Kalman Filter (QKF)*'. On présentera également le filtre de Kalman à mesure convertie, '*Converted Measurement Kalman Filter (CMKF)*'. Contrairement aux filtres précédents, ce dernier filtre s'applique en poursuite lorsque le système est linéaire alors que la mesure est non linéaire et est donnée en coordonnées polaires.

Le quatrième chapitre est consacré à l'extension du filtre de Kalman aux cas non Gaussiens et/ou non linéaires. En premier lieu on présentera la théorie qui permet d'approximer une densité de probabilité quelconque par une somme de densités Gaussiennes. Ensuite, on présentera le filtre à somme Gaussiennes, '*Gaussian Sum Filter (GSF)*', connu aussi sous l'appellation filtre à mixture de Gaussiennes. Ce filtre se base sur la théorie de Bayes et s'applique au problème général du filtrage non linéaire et/ou non-Gaussien. Le filtre GSF peut être vu comme étant un ensemble, ou banc, de filtres de Kalman qui fonctionnent en parallèle. On poursuit par la présentation de notre contribution dans ce domaine, qui est le filtre qu'on a baptisé $\alpha\beta$ -GSF. Ce filtre représente en fait la version en régime permanent du filtre GSF, puisqu'il est conçu en intégrant dans ce dernier le filtre $\alpha\beta$. A la fin de ce chapitre on présentera les résultats des simulations que nous avons menées pour évaluer ses performances.

En pratique, pour modéliser le mouvement d'une cible on doit utiliser plusieurs modèles, cela est du au fait que la cible peut changer de dynamique en se déplaçant. Dans l'avant dernier chapitre on va étendre le problème de poursuite au cas où une entrée inconnue apparaît subitement. On dit alors que la cible effectue une manœuvre. On exposera alors les solutions proposées pour un tel problème. Ces

solutions se divisent en deux grandes catégories, celles qui se basent sur un seul modèle, et celles qui se basent sur l'utilisation de plusieurs modèles. Dans notre étude, on se limite à cette deuxième catégorie, et en particulier, on mettra l'accent sur le filtre à modèles multiples interagissant, '*Interacting Multiple Model (IMM)*'. Ce dernier est connu comme étant le filtre qui réalise le meilleur compromis entre performances et complexité. Enfin on présentera les résultats de simulations, portant sur un scénario d'ATC, où on effectue la poursuite d'une cible manœuvrante par un seul filtre et par l'algorithme IMM.

Dans le sixième chapitre, on s'intéresse au problème de la détection de voies en utilisant le marquage routier. La détection de voie est l'une des principales fonctions pour un système d'aide à la conduite. Effectivement pour qu'un véhicule circule en toute sécurité et n'entre pas en collision avec les autres véhicules, on doit au minimum détecter les changements de voie qu'il opère. Après une présentation des nouvelles technologies utilisées dans les véhicules qualifiés d'intelligents, on présentera certains modèles utilisés pour décrire le marquage routier. Ensuite nous montrerons comment faire le lien entre la détection du marquage routier et les techniques de poursuite de cible. Enfin nous présenterons notre algorithme de détection de voies, qui se base sur l'utilisation de l'IMM à base du filtre de Kalman, et nous montrerons que les résultats d'expérimentation obtenus sont très satisfaisants.

Pour une bonne assimilation de la matière de ce mémoire, on oriente le lecteur à suivre cet organigramme :

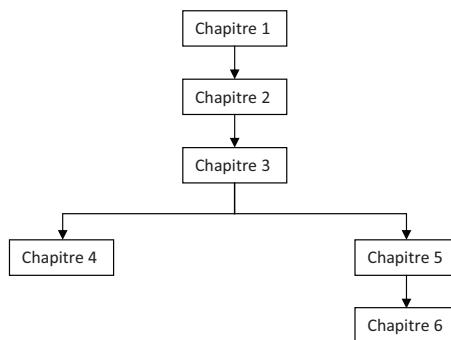


FIGURE 2: Organigramme d'enchaînement des chapitres du mémoire.

Chapitre 1

La modélisation en pistage

1.1 Introduction

Le but de la fonction pistage, '*tracking function*', d'un système de surveillance aérien, '*Air Traffic Control (ATC)*', est de mettre à jour les éléments de la piste (position, vitesse,...) de chaque avion en utilisant les informations issues d'une station radar. Ces informations consistent en plusieurs données : la position relative de l'avion (portée et azimut), le niveau de vol, le numéro d'identification, et ainsi de suite. Un prétraitement est effectué au sein de la station radar pour faire le lien entre les mesures et les pistes. Contrairement aux systèmes de pistage militaires, cette association est le plus souvent viable. Les aspects les plus importants de la fonction pistage pour un système ATC sont [1] :

- Une estimation précise des éléments de la cinématique de l'avion pendant le vol à vitesse constante, cette phase est la plus fréquente. L'estimation de la vitesse est d'une importance particulière car elle permet de prévoir les collisions.
- Une détection rapide des manœuvres, cela permet aux contrôleurs aériens de voir si leurs ordres sont effectivement respectés par les pilotes. Un indicateur de manœuvre doit être mis en place, tout en évitant les fausses alertes.
- La charge de calcul doit être compatible avec les performances de l'ordinateur mis en place.

Le pistage est un problème d'estimation hybride. En effet, les incertitudes liées à la dynamique du système ainsi qu'à la mesure sont représentées par des bruits ; cela représente les incertitudes continues. Cependant dans le cas de présence de manœuvres, la dynamique du système n'est pas unique, on dit qu'on a une incertitude sur le mode d'évolution ; cela représente les incertitudes discrètes. On note que dans ce travail on ne considère pas le cas des incertitudes relevant du nombre de pistes, c'est-à-dire la poursuite de plusieurs cibles, ni celle dues à l'origine des mesures, c'est-à-dire le problème d'association de données. La méconnaissance du mode d'évolution se pose lorsque la piste effectue une manœuvre connue ou inconnue pendant une durée inconnue. On note que le choix d'un mauvais modèle engendre des résultats non satisfaisants [2].

1.2 Définition de la modélisation

La modélisation est un concept général ; il a pour but de représenter un phénomène physique par des formules mathématiques. Le modèle doit représenter aussi fidèlement que possible le phénomène étudié, autrement toute technique d'estimation serait sans intérêt. Dans ce qui suit on considère que :

- Le mobile est représenté par un point matériel, c'est-à-dire qu'on ne s'intéresse pas à la représentation spatiale de l'objet (géométrie ou forme). Cela, ne signifie en aucun cas qu'on exclut la combinaison des deux techniques dans certaines applications.
- Le déplacement est limité dans un plan 2D, la généralisation au mouvement dans l'espace 3D, peut se faire de façon systématique.

1.2.1 Choix du modèle

En pistage, on opte souvent pour la représentation dans l'espace d'état, ainsi le modèle repose essentiellement sur deux équations différentielles (scalaires ou vectorielles). La première est l'équation décrivant la dynamique du système, tandis

que la deuxième est l'équation de la mesure. Le modèle continu est donné par les équations (1.1) et (1.2), respectivement.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{w}(t), t) \quad (1.1)$$

$$\mathbf{z}(t) = h(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t), t) \quad (1.2)$$

Le vecteur d'état $\mathbf{x}(t)$, de dimension $n_{\mathbf{x}}$, est constitué des paramètres d'évolution de la dynamique du mobile. Le vecteur $\mathbf{u}(t)$ est le vecteur d'entrée, de dimension $n_{\mathbf{u}}$, il représente en automatique la commande et peut représenter en pistage la position de l'observateur ou encore l'amplitude de la manœuvre effectuée. Le vecteur de mesure $\mathbf{z}(t)$ est de dimension $n_{\mathbf{z}}$. Pour des raisons de simplicité, les bruits $\mathbf{w}(t)$ et $\mathbf{v}(t)$ sont considérés comme deux séquences blanches, de moyennes nulles, et mutuellement indépendantes, et souvent on les considère additives et Gaussiennes. Le bruit $\mathbf{w}(t)$ appelé bruit de système, est introduit pour représenter les erreurs de modélisation. Il peut également représenter la méconnaissance du modèle [3], par exemple, si une cible effectue une manœuvre alors qu'on utilise un modèle de mouvement du deuxième ordre, voir plus bas, on doit introduire un bruit de système dont la variance est grande. Contrairement au bruit de système qui est fixé par le concepteur, le bruit $\mathbf{v}(t)$ est relié par nature au dispositif de mesure ainsi qu'à d'autres phénomènes naturels, tels que la température, l'humidité, ... etc. $f(\cdot)$ et $h(\cdot)$ sont des fonctions en général non linéaires, mais pour des raisons de simplification et/ou d'implémentation on opte pour quelles soient linéaires. Si le système est par nature discret, ou si on procède à la désertisation des deux équations précédentes on obtient [4] :

$$\mathbf{x}_{k+1} = f_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k) \quad (1.3)$$

$$\mathbf{z}_k = h_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k) \quad (1.4)$$

l'indice k représente le temps discret. Pour alléger l'écriture on a omis le temps d'échantillonnage T dans ces deux dernières équations, en remplaçant kT par k . En toute rigueur, le mouvement du mobile est continu tandis que la mesure est

prise souvent de façon discrète. Pour cette raison, dans certains travaux on préfère utiliser un modèle appelé mixte ou hybride. Dans ce cas, les équations du modèle deviennent :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{w}(t), t) \quad (1.5)$$

$$\mathbf{z}_k = h_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k) \quad (1.6)$$

Pour notre cas on considère uniquement le modèle discret. Par conséquent, les équations (1.3) et (1.4) seront utilisées dans le présent manuscrit. Particulièrement le modèle linéaire discret, présente beaucoup d'intérêts et s'applique, en pratique, à une grande variété d'applications. Ce modèle est donné par les équations aux différences suivantes [3] :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{G}_k \mathbf{u}_k + \boldsymbol{\Gamma}_k \mathbf{w}_k \quad (1.7)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (1.8)$$

Où, \mathbf{F}_k représente la matrice de transition de l'instant k à l'instant $k + 1$, et \mathbf{G}_k est la matrice de pondération de l'entrée \mathbf{u}_k ; en l'absence de cette dernière la matrice \mathbf{G}_k est nulle. La matrice \mathbf{H}_k est appelée matrice de mesure. La séquence \mathbf{w}_k , est souvent supposée Gaussienne et centrée, de matrice de covariance égale à la matrice identité multipliée par σ_w^2 , ainsi, le bruit de système est centré et ayant une matrice de covariance $\mathbf{Q}_k = E[(\boldsymbol{\Gamma}_k \mathbf{w}_k)(\boldsymbol{\Gamma}_k \mathbf{w}_k)'] = \sigma_w^2 \boldsymbol{\Gamma}_k \boldsymbol{\Gamma}'_k$, où $E[.]$ représente la moyenne statistique. De même, au bruit de mesure centré \mathbf{v}_k est associée la matrice de covariance $\mathbf{R}_k = E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}'_k]$.

1.2.2 Choix du vecteur d'état

Dans la littérature, on trouve souvent trois représentations du vecteur d'état. La première est en coordonnées cartésiennes, à accélération nulle (1.9) ou à accélération non nulle (1.10), la seconde est en coordonnées polaires (1.11), et la troisième est une combinaison entre les deux premières (1.12), et s'applique au cas de la vitesse de rotation constante, 'Constant Turn Rate (CTR)'. Pour alléger l'écriture on va

omettre l'indice dans les équations, sauf si on le juge nécessaire.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & v_x & y & v_y \end{bmatrix}' \quad (1.9)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & v_x & a_x & y & v_y & a_y \end{bmatrix}' \quad (1.10)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} r & \theta & v & c \end{bmatrix}' \quad (1.11)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & v_x & y & v_y & \omega \end{bmatrix}', \quad \omega = \dot{\theta} \quad (1.12)$$

La figure 1.1, montre la géométrie de la représentation du vecteur d'état ; elle permet aussi de décrire le passage entre les deux repères cartésien et polaire. Ce passage s'effectue par des transformations classiques :

$$\begin{bmatrix} x & v_x & y & v_y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} r \cos(\theta) & v \cos(c) & r \sin(\theta) & v \sin(c) \end{bmatrix}' \quad (1.13)$$

$$\begin{bmatrix} r & v & \theta & c \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} & \sqrt{v_x^2 + v_y^2} & \tan^{-1}(y/x) & \tan^{-1}(v_y/v_x) \end{bmatrix}' \quad (1.14)$$

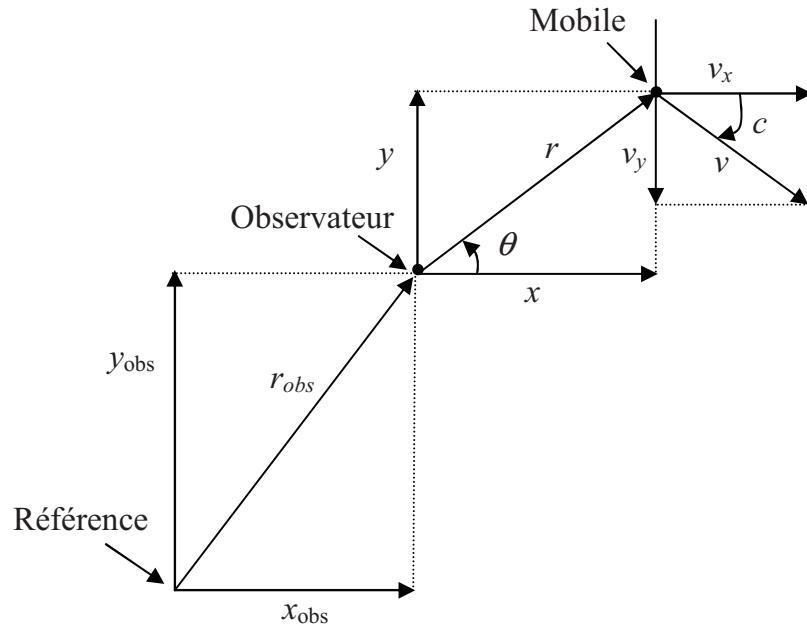


FIGURE 1.1: Géométrie du modèle.

On mentionne que la plupart des travaux optent pour la représentation du vecteur d'état en coordonnées cartésiennes, cela est dû au fait qu'elle présente l'avantage d'être adaptée à la représentation du modèle dynamique linéaire, voir équation

(1.17) ; malheureusement cette représentation souffre de deux inconvénients majeurs :

- Le premier est que la portée doit être disponible afin de transformer la mesure polaire en coordonnées cartésiennes, cela n'est pas toujours possible. Citons l'exemple, du SONAR passif ou du capteur à infra rouge IR où on effectue la poursuite à l'aide de mesures angulaires seulement, '*Bearing Only Tracking* (BOT)' [5].
- Le second problème est que les erreurs de mesure sont corrélées, cela complique l'obtention des équations des filtres [6], et si l'on traite les coordonnées x et y comme étant indépendantes, le résultat du filtrage serait inexact.

1.3 Equation de la dynamique du mouvement rectiligne

En pistage, on distingue souvent entre un mobile manœuvrant et un mobile non manœuvrant [7]. Un mobile qui se déplace à vitesse constante est désigné comme étant en mode non manœuvrant, si non il sera considéré en mode manœuvrant. Dans le chapitre 5, on examinera le cas où le mobile peut basculer entre ces deux modes, ce qui est souvent le cas en pratique. En appliquant les règles de la mécanique à un mobile qui se déplace à accélération constante, et si on suppose que la somme des forces agissant sur le mobile de masse m à un instant donné t est \vec{F} alors on a [8] :

$$\begin{bmatrix} \vec{x}(t) \\ \vec{y}(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} \vec{F}_x(t) \\ \vec{F}_y(t) \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

Lorsque l'accélération est nulle, ou plus précisément quasiment nulle, on dit que le mobile n'est pas en phase de manœuvre. Dans ce cas, les forces se réduisent généralement aux frottements. On dit que le mobile est en phase de manœuvre lorsqu'il opère une accélération volontaire (produite par la poussée des moteurs). Considérons uniquement la composante x , et désignons l'accélération par $a_x(t) =$

$F_x(t)/m$ on obtient :

$$\ddot{x}(t) = a_x(t) \quad (1.16)$$

1.3.1 Mouvement à vitesse constante (CV)

Le vecteur d'état d'un mobile qui se déplace, dans le plan, à une vitesse quasi-constante est constitué des positions dans les deux directions ainsi que leurs vitesses respectives, voir l'équation (1.9). En l'absence de la commande, en supposant une dé-corrélation entre les deux coordonnées, et en considérant un modèle discret à accélération modélisée par un bruit blanc¹, '*Discrete White Noise Acceleration model (DWNA)*', l'équation aux différences régissant ce mouvement est [3] :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_{CV}\mathbf{x}_k + \boldsymbol{\Gamma}_{CV}\mathbf{w}_k \quad (1.17)$$

avec :

$$\mathbf{F}_{CV} = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_{CV} = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} & T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T^2}{2} & T \end{bmatrix}' \quad (1.19)$$

La matrice de covariance du bruit de système correspondant à ce modèle est :

$$\mathbf{Q}_{CV} = \sigma_w^2 \begin{bmatrix} \frac{T^4}{4} & \frac{T^3}{2} & 0 & 0 \\ \frac{T^3}{2} & T^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T^4}{4} & \frac{T^3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{T^3}{2} & T^2 \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

Pratiquement, σ_w doit être compris dans l'intervalle $[0.5a_{\max}, a_{\max}]$ où a_{\max} représente l'accélération maximale possible pendant un incrément de temps [3]. Pour l'obtention de l'équation (1.17) [8] :

1. Ce modèle est discret par nature et non pas obtenu par discrétisation d'un modèle continu.

- On fait l'hypothèse que, l'accélération (1.16) est constante entre deux instants de discréttisation Tk et $T(k + 1)$.
- On suppose que les deux composantes sont indépendantes entre deux instants de discréttisation.
- Finalement, on intègre deux fois l'équation (1.16) entre ces mêmes instants.

Ce modèle est très populaire, il est connu sous l'appellation, modèle discret à vitesse constante, '*discrete-time Constant-Velocity model (CV)*', ou plus précisément, modèle discret à vitesse quasi-constante, '*discrete-time Nearly-Constant-Velocity model (NCV)*' [3]. Cela est du au fait qu'une faible accélération dans les deux directions est (systématiquement) modélisée par le bruit de système.

1.3.2 Mouvement à accélération constante (CA)

Le vecteur d'état d'un mobile qui se déplace, dans le plan, à une accélération constante est constitué de la position, vitesse et de l'accélération dans les deux directions, voir l'équation (1.10). En l'absence de la commande et en considérant une dé-corrélation entre les deux coordonnées, et un modèle discret à accélération modélisée par un processus de *Wiener*, '*Discrete Wiener Process Acceleration model (DWPA)*', l'équation aux différences régissant ce mouvement est la suivante :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_{CA}\mathbf{x}_k + \boldsymbol{\Gamma}_{CA}\mathbf{w}_k \quad (1.21)$$

avec :

$$\mathbf{F}_{CA} = \begin{bmatrix} 1 & T & \frac{T^2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & T & \frac{T^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_{CA} = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} & T & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{T^2}{2} & T & 1 \end{bmatrix}' \quad (1.23)$$

La matrice de covariance du bruit de système correspondant à ce modèle est :

$$\mathbf{Q}_{CA} = \sigma_w^2 \begin{bmatrix} \frac{T^4}{4} & \frac{T^3}{2} & \frac{T^2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{T^3}{2} & \frac{T^2}{2} & T & 0 & 0 & 0 \\ \frac{T^2}{2} & T & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{T^4}{4} & \frac{T^3}{2} & \frac{T^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{T^3}{2} & \frac{T^2}{2} & T \\ 0 & 0 & 0 & \frac{T^2}{2} & T & 1 \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

En pratique, σ_w doit être compris dans l'intervalle $[0.5\Delta a_{\max}, \Delta a_{\max}]$ où Δa_{\max} représente l'accroissement de l'accélération maximal possible pendant un incrément de temps [3].

1.4 Equation de la dynamique du mouvement circulaire

Pour un mobile qui se déplace dans le plan et effectue des rotations, on trouve des modèles plus au moins complexes décrivant son mouvement [7]. Dans le présent mémoire, on se limite à un mobile qui effectue une rotation à une vitesse constante. On distingue alors entre les deux cas suivants : soit la vitesse de rotation est connue soit elle est inconnue.

1.4.1 Mouvement circulaire à vitesse de rotation connue

Dans ce cas on considère que le mobile se déplace à vitesse quasi-constante et une vitesse de rotation quasi-constante ω . Le fait que ω soit connue conduit à l'utilisation du vecteur d'état (1.9). L'équation d'état du modèle discret correspondante est donnée par [3, 7] :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_{CT}^0 \mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}_{CT}^0 \mathbf{w}_k \quad (1.25)$$

avec :

$$\mathbf{F}_{CT}^0 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sin(\omega T)}{\omega} & 0 & -\frac{1-\cos(\omega T)}{\omega} \\ 0 & \cos(\omega T) & 0 & -\sin(\omega T) \\ 0 & \frac{1-\cos(\omega T)}{\omega} & 1 & \frac{\sin(\omega T)}{\omega} \\ 0 & \sin(\omega T) & 0 & \cos(\omega T) \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

La matrice $\boldsymbol{\Gamma}_{CT}^0$ et la matrice de covariance du bruit de système \mathbf{Q}_{CT}^0 sont identiques aux matrices $\boldsymbol{\Gamma}_{CV}$ et \mathbf{Q}_{CV} , respectivement.

1.4.2 Mouvement circulaire à vitesse de rotation inconnue

Le vecteur d'état correspondant à cette représentation est donné par l'équation (1.12). Dans ce cas en plus des coordonnées et de leurs vitesses, le vecteur d'état est augmenté par la vitesse de rotation ω_k . Le bruit de mesure est augmenté à son tour pour englober l'erreur commise sur la vitesse de rotation avec une variance σ_ω^2 [3]. L'équation d'état est donnée par :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_{CT}\mathbf{x}_k + \boldsymbol{\Gamma}_{CT}\mathbf{w}_k \quad (1.27)$$

avec :

$$\mathbf{F}_{CT} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sin(\omega_k T)}{\omega_k} & 0 & -\frac{1-\cos(\omega_k T)}{\omega_k} & 0 \\ 0 & \cos(\omega_k T) & 0 & -\sin(\omega_k T) & 0 \\ 0 & \frac{1-\cos(\omega_k T)}{\omega_k} & 1 & \frac{\sin(\omega_k T)}{\omega_k} & 0 \\ 0 & \sin(\omega_k T) & 0 & \cos(\omega_k T) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_{CT} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_{CT}^0 & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

$$\mathbf{Q}_{CT} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{CT}^0 & 0 \\ 0 & T^2\sigma_\omega^2 \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

1.5 Equation de la mesure

La mesure représente en poursuite l'image de la position vue par le dispositif de mesure. Dans les systèmes Radar et Sonar actifs, la mesure de la position d'un mobile est soit donnée en coordonnées polaires (portée et azimut dans le cas 2D, plus l'angle d'élévation dans le cas 3D), soit elle est donnée en coordonnées cartésiennes pour des systèmes plus complexes.

1.5.1 Mesure cartésienne

En l'absence du bruit de mesure, la relation qui relie le vecteur d'état au vecteur de mesure dans le cas cartésien est donnée par :

$$\bar{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{H}\mathbf{x} \quad (1.31)$$

avec $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{CV}$ dans le cas du modèle CV et $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{CA}$ pour le modèle CA :

$$\mathbf{H}_{CV} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}' \quad (1.32)$$

$$\mathbf{H}_{CA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}' \quad (1.33)$$

Dans ce cas, pour l'estimation du mouvement, on se base sur l'hypothèse de la dé-corrélation entre les deux coordonnées x et y .

1.5.2 Mesure polaire

En l'absence du bruit de mesure, la relation qui relie le vecteur d'état au vecteur de mesure dans le cas polaire est donnée, dans le cas 2D, par :

$$\bar{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} r \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan^{-1}(\frac{y}{x}) \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

1.6 Le prétraitement de la mesure

La poursuite de cibles en coordonnées cartésiennes en utilisant des mesures polaires peut être réalisée par deux méthodes :

- La première méthode consiste à convertir la mesure en coordonnées cartésiennes. Dans ce cas, les composantes obtenues selon x et y sont corrélées. Etant donné qu'on a un système linéaire, on peut utiliser le filtre de Kalman, '*Kalman Filter (KF)*' [9–11]. Cependant, la matrice de covariance de la mesure convertie doit être recalculée à chaque itération.
- La seconde méthode incorpore la mesure originale d'une façon non linéaire dans l'estimateur d'état. On obtient ainsi un filtre à coordonnées mixtes, '*Mixed Coordinates Filter (MCF)*'. On peut dans ce cas utiliser le filtre de Kalman étendu, '*Extended Kalman Filter (EKF)*' [3].

l'utilisation de chacune de ces méthodes nécessite la prise en considération des erreurs dues au passage aux coordonnées cartésiennes. Pour cela, considérons que la mesure fournie par le capteur à l'instant k est donnée par la relation :

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} r_m \\ \theta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r + \tilde{r} \\ \theta + \tilde{\theta} \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

où :

- r_m et θ_m représentent, respectivement, la portée et l'azimut mesurées à l'instant k .

- r et θ représentent, respectivement, les valeurs exactes de la portée et de l'azimut à l'instant k données par l'équation (1.34).
- \tilde{r} et $\tilde{\theta}$ sont les bruits aditifs associés à la portée et à l'azimut, respectivement. Ces bruits sont représentés par des variables aléatoires dont les écarts types sont σ_r et σ_θ , respectivement.

Si on utilise les transformations données dans l'équation (1.13), alors le passage du repère polaire au repère cartésien donne :

$$\begin{bmatrix} x_m \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_m \cos(\theta_m) \\ r_m \sin(\theta_m) \end{bmatrix} \quad (1.36)$$

Ce passage du repère polaire au repère cartésien, requiert une attention particulière. Effectivement, les séquences de bruit subissent des transformations non linéaires. Pour savoir pourquoi on a recours au prétraitement de la mesure, on doit répondre à la question très importante : est-il possible d'utiliser la linéarisation pour obtenir les composantes x_m et y_m ? ou d'une autre façon, comment varie la moyenne et la matrice de covariance lorsqu'on effectue le passage du repère polaire au repère cartésien ? Par la suite, on va voir que cette question a des conséquences lors de la dérivation du filtre de Kalman étendu, '*Extended Kalman filter (EKF)*', et permet ainsi d'avoir une idée complète sur la nature du problème qui peut surgir, et qui a donné naissance à d'autres versions de ce filtre. Plus de détails seront fournis dans [la section 3.7 du chapitre 3](#) du présent mémoire.

1.6.1 Effet de la transformation non linéaire

Dans cette partie on montre comment la linéarisation conduit à une erreur sur la moyenne et la covariance lorsqu'une variable aléatoire subit une transformation non linéaire. Considérons pour cela deux variables aléatoires r et θ , indépendantes et uniformément distribuées dans les intervalles 1 ± 0.01 et $\frac{\pi}{2} \pm 0.35 \text{ rad}$, respectivement. La figure 1.2 montre l'effet de la transformation non linéaire (1.36) sur la moyenne et la covariance des deux variables aléatoires x et y .

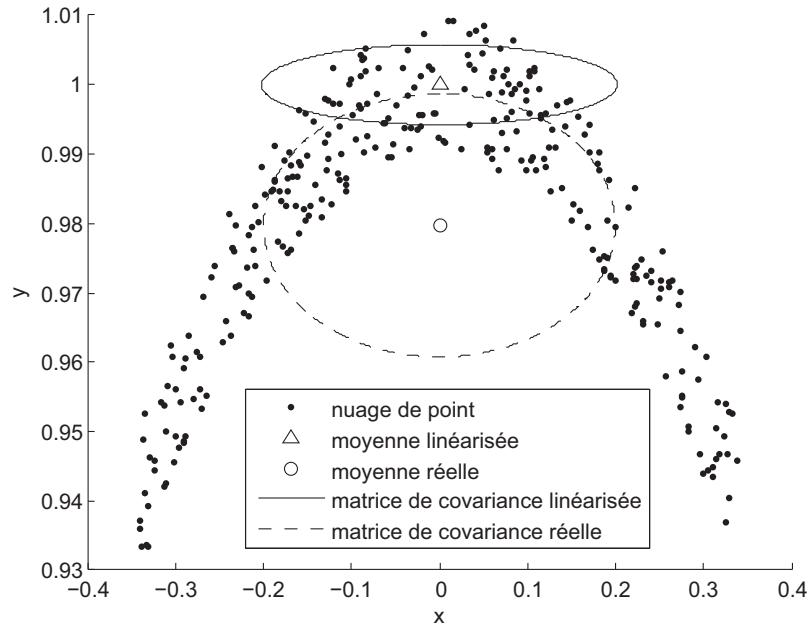


FIGURE 1.2: Effet de la transformation non linéaire de deux variables aléatoires uniformes (r, θ) sur la moyenne et la matrice de covariance de (x, y) .

La moyenne $\bar{\mathbf{z}}_l$ après linéarisation, qui représente le développement en série de *Taylor* du premier ordre de la transformation (1.36), et la moyenne réelle $\bar{\mathbf{z}}_t$ sont données par :

$$\bar{\mathbf{z}}_l = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}' \quad (1.37)$$

$$\bar{\mathbf{z}}_t = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sin(\theta_m)}{\theta_m} \end{bmatrix}' \quad (1.38)$$

La matrice de covariance obtenue par linéarisation \mathbf{P}_l et la matrice de covariance réelles \mathbf{P}_t sont données par :

$$\mathbf{P}_l = \begin{bmatrix} \sigma_\theta^2 & 0 \\ 0 & \sigma_r^2 \end{bmatrix} \quad (1.39)$$

$$\mathbf{P}_t = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 + \sigma_r^2) \left(1 - \frac{\sin 2\theta_m}{2\theta_m}\right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1 + \sigma_r^2) \left(1 + \frac{\sin 2\theta_m}{2\theta_m}\right) - \left(\frac{\sin \theta_m}{\theta_m}\right)^2 \end{bmatrix} \quad (1.40)$$

Il est clair que la moyenne et la matrice de covariance trouvées théoriquement ne correspondent pas aux valeurs réelles, que dans le cas d'un faible azimut.

1.6.2 Etude de la validité de la linéarisation classique

1.6.2.1 Statistiques réelles de l'erreur

Supposons que les vraies valeurs dans le repère cartésien sont (x, y) , et définissons les erreurs :

$$\begin{aligned}\tilde{x}_m &= x_m - x \\ \tilde{y}_m &= y_m - y\end{aligned}\tag{1.41}$$

En remplaçant (1.35) et (1.36) dans (1.41), on trouve :

$$\begin{aligned}\tilde{x}_m &= r \cos \theta.(\cos \tilde{\theta} - 1) - \tilde{r} \sin \theta. \sin \tilde{\theta} - r. \sin \theta. \sin \tilde{\theta} + \tilde{r}. \cos \theta. \cos \tilde{\theta} \\ \tilde{y}_m &= r \sin \theta.(\cos \tilde{\theta} - 1) + \tilde{r} \cos \theta. \sin \tilde{\theta} + r. \cos \theta. \sin \tilde{\theta} + \tilde{r}. \sin \theta. \cos \tilde{\theta}\end{aligned}\tag{1.42}$$

Ces deux erreurs ne sont pas indépendantes, et sont fonction des vraies valeurs r et θ ainsi que de leurs erreurs respectives \tilde{r} et $\tilde{\theta}$. En considérant uniquement le cas particulier où r et θ sont indépendantes et centrées, la moyenne réelle de (1.41) est donnée par :

$$\mu_t(r, \theta) = \begin{bmatrix} E[\tilde{x}_m/r, \theta] \\ E[\tilde{y}_m/r, \theta] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \theta (E[\cos \tilde{\theta}] - 1) \\ r \sin \theta (E[\cos \tilde{\theta}] - 1) \end{bmatrix}\tag{1.43}$$

D'après les équations (1.42) et (1.43), lorsque l'erreur croisée, 'Cross Range Error (CRE)', définie par le produit $r\tilde{\theta}$, devient significative, c'est à dire longue portée et/ou une grande erreur sur l'azimut, la mesure convertie introduit un large biais. A son tour, la matrice de covariance réelle de la mesure convertie est donnée par :

$$\mathbf{R}_t = \begin{bmatrix} R_t^x & R_t^{xy} \\ R_t^{yx} & R_t^y \end{bmatrix}\tag{1.44}$$

avec :

$$\begin{aligned}R_t^x &= r^2 e^{-\sigma_\theta^2} [\sin^2 \theta [\cosh(\sigma_\theta^2) - 1] + \cos^2 \theta \sinh(\sigma_\theta^2)] + \\ &\quad \sigma_r^2 e^{-\sigma_\theta^2} [\sin^2 \theta \cosh(\sigma_\theta^2) + \cos^2 \theta \sinh(\sigma_\theta^2)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_t^y &= r^2 e^{-\sigma_\theta^2} [\cos^2 \theta [\cosh(\sigma_\theta^2) - 1] + \sin^2 \theta \sinh(\sigma_\theta^2)] + \\
&\quad \sigma_r^2 e^{-\sigma_\theta^2} [\cos^2 \theta \cosh(\sigma_\theta^2) + \sin^2 \theta \sinh(\sigma_\theta^2)] \\
R_t^{xy} = R_t^{yx} &= \text{cov}(\tilde{x}, \tilde{y}/r, \theta) = \cos \theta \sin \theta \left[\sigma_r^2 e^{-2\sigma_\theta^2} + r^2 \left(1 - 2e^{-\sigma_\theta^2/2} + e^{-2\sigma_\theta^2} \right) \right]
\end{aligned}$$

1.6.2.2 Linéarisation des statistiques réelles de l'erreur

En utilisant le développement en série de Taylor, on obtient l'approximation du biais μ_t et de sa matrice de covariance associée \mathbf{R}_t , données respectivement par :

$$\mu_l = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}r\sigma_\theta^2 \cos \theta \\ -\frac{1}{2}r\sigma_\theta^2 \sin \theta \end{bmatrix} \quad (1.45)$$

$$\mathbf{R}_l = \begin{bmatrix} R_l^{11} & R_l^{12} \\ R_l^{21} & R_l^{22} \end{bmatrix} \quad (1.46)$$

où :

$$R_l^{11} = \text{var}(\tilde{x}_l) = r^2 \sigma_\theta^2 \cos^2 \theta + \sigma_r^2 \sin^2 \theta$$

$$R_l^{22} = \text{var}(\tilde{y}_l) = r^2 \sigma_\theta^2 \sin^2 \theta + \sigma_r^2 \cos^2 \theta$$

$$R_l^{12} = R_l^{21} = \text{cov}(\tilde{x}_l, \tilde{y}_l) = (\sigma_r^2 - r^2 \sigma_\theta^2) \cos \theta \sin \theta$$

Comme il est mentionné dans [12], μ_l est presque nulle vu les hypothèses citées en haut, et la matrice \mathbf{R}_l ne peut être exploitée en pratique car elle se base sur les vraies valeurs de la portée et de la l'azimut. Le seul recours, avant la proposition de [9], était de remplacer r et θ par leurs estimées obtenues à partir de l'estimée du vecteur d'état. Cette proposition qui consiste à éliminer le biais sera examinée dans le chapitre 3.

1.6.2.3 Limite de la validité de la linéarisation

Afin de quantifier la limite de la validité de linéarisation de la mesure convertie, on définit le biais significatif β , comme étant le rapport du maximum du biais sur le minimum de l'écart type de la matrice de covariance [9]. Le maximum que peut

atteindre l'amplitude du vecteur μ_l est : $\|\mu_l\|_{\max} = \frac{r\sigma_\theta^2}{2}$, tandis que le minimum de l'écart type de la matrice de covariance est $\sqrt{\lambda_{\min}(\mathbf{R})} = \min(\sigma_r, r\sigma_\theta)$, où $\lambda_{\min}(\mathbf{R})$ représente la valeur propre minimale. Ainsi :

$$\beta = \frac{r\sigma_\theta^2}{2 \min(\sigma_r, r\sigma_\theta)} \quad (1.47)$$

A titre d'exemple, pour une cible qui se trouve à $10^5 m$ et si $\sigma_r = 50 m$, on peut démontrer par simulation que l'écart type de l'azimut donnant un résultat *consistant* pour la linéarisation classique est approximativement égale à $0.8 rad$, ainsi $\beta_{\max} \approx 0.2$. Suivant (1.47) et β_{\max} , la limite de la validité de la conversion classique est donnée par [3] :

$$\frac{r\sigma_\theta^2}{\sigma_r} < 0.4 \quad (1.48)$$

Il est montré [9] que la validité de la linéarisation classique est donnée pour :

$$\sigma_\theta < 0.4 \quad rad \approx 23^\circ \quad (1.49)$$

En pratique l'inégalité (1.49) est satisfaite dans la plupart des systèmes Radar, alors que l'inégalité (1.48) est toujours satisfaite [3]. Par ailleurs, dans le cas des systèmes Sonar, les deux équations ne sont généralement pas satisfaites. En conclusion, ces deux équations permettent de situer les limites de validité de la linéarisation, pour une conversion consistante.

Afin de montrer par simulation l'effet de la transformation non-linéaire, on a considéré un objet fictif avec différentes portées. La figure 1.3 montre clairement que la transformation linéaire devient inadéquate lorsque le CRE dépasse une certaine valeur.

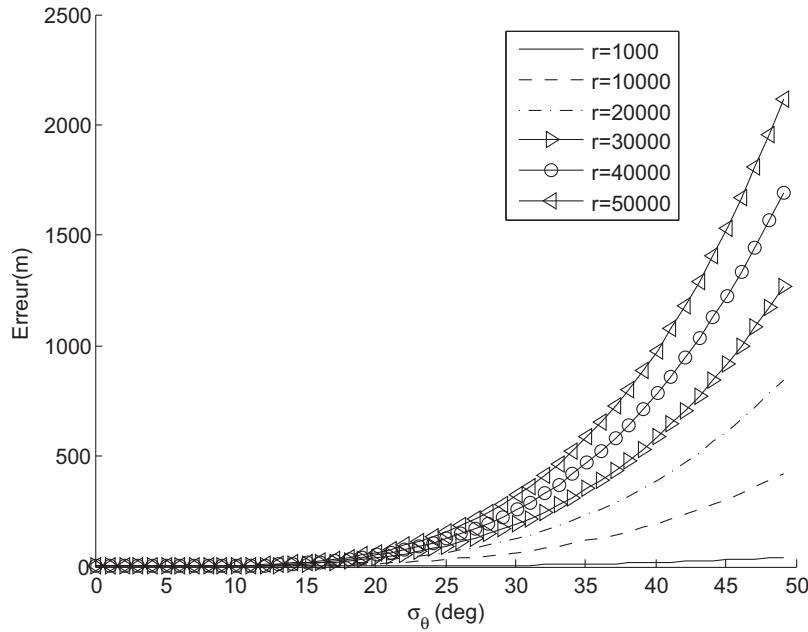


FIGURE 1.3: Valeur absolue de la différence des biais réel et linéarisé en x pour différents valeurs de r et σ_θ .

1.7 Conclusion

La poursuite d'un mobile, est un problème d'estimation des composantes de son vecteur d'état à des instants donnés. Le mouvement d'un mobile non manœuvrant dans le plan, est totalement décrit par les composantes du vecteur d'état qui sont les positions et vitesses selon les axes x et y : x , v_x , y et v_y . Dans le cas manœuvrant, on augmente le vecteur d'état par les accélérations selon les deux axes a_x et a_y , ou encore par la vitesse de rotation ω . Il est préférable que le pistage s'effectue dans le repère cartésien, alors que la majorité des systèmes d'acquisition fournissent les positions en coordonnées polaires, c'est-à-dire la portée r et l'azimut θ . Le passage entre les deux repères fournit, impérativement, des variables aléatoires dépendantes les unes des autres, ce qui complique la dérivation des équations. On est alors contraint à recourir à des approximations, qui sont sujettes à certaines restrictions. On démontre qu'on est limité par l'erreur croisée qui est définie par le produit entre la portée et l'erreur sur l'azimut.

Chapitre 2

Le filtre de Kalman appliqué à la poursuite

2.1 Introduction

Dans les problèmes d'estimation, on suppose toujours connu et fixe un échantillon de données. L'estimation est donc, un travail *à posteriori* à partir de cet échantillon. Dans certains contextes (lorsque l'échantillon est très grand ou, qu'il correspond à un échantillonnage continu, donc sans fin réelle) on sera amené à estimer les paramètres sans attendre d'avoir la totalité de l'échantillon. En 1950, des travaux débutent pour remplacer '*the covariance knowledge*', requise pour le filtre de Wiener, par la représentation d'état. Le résultat de ces travaux est similaire à celui du filtre de Kalman connu actuellement [4]. A chaque nouvelle donnée acquise, on cherchera à mettre à jour la valeur de l'estimée (il n'est pas question de recommencer l'estimation à chaque fois, car cela serait trop coûteux). On parle alors de *l'estimation incrémentale*.

Dans ce chapitre on présente la technique la plus classique qui réalise une régression linéaire incrémentale, à savoir le filtre de Kalman, puis une étude approfondie portera sur le filtre de Kalman en régime statique connu sous l'appellation : filtre $\alpha\beta$ dans le cas du modèle CV et $\alpha\beta\gamma$ lorsque le système suit le modèle CA. En dernier

lieu on présentera certains critères utilisés pour l'évaluation de performances des estimateurs.

2.2 Le Filtre de Kalman (KF)

Le système d'équations pour le filtre de Kalman, '*Kalman Filter (KF)*', repose sur la définition de deux modèles décrivant le processus et la mesure. Le modèle du processus qui décrit l'évolution du système observé repose sur l'équation d'état linéaire récursive (1.7) réécrite ici [3, 4] :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{G}_k \mathbf{u}_k + \boldsymbol{\Gamma}_k \mathbf{w}_k \quad (2.1)$$

Où, \mathbf{F}_k représente la matrice de transition de l'instant k à l'instant $k+1$, souvent considérée stationnaire, et \mathbf{G}_k est la matrice de pondération de l'entrée \mathbf{u}_k . En l'absence de cette dernière la matrice \mathbf{G}_k est nulle, ce cas sera considéré pour des raisons de simplicité. La séquence \mathbf{w}_k est souvent supposée Gaussienne et centrée, de matrice de covariance égale à la matrice identité multipliée par σ_w^2 ; ainsi, le bruit de système est centré et a une matrice de covariance $\mathbf{Q}_k = E[(\boldsymbol{\Gamma}_k \mathbf{w}_k)(\boldsymbol{\Gamma}_k \mathbf{w}_k)'] = \sigma_w^2 \boldsymbol{\Gamma}_k \boldsymbol{\Gamma}'_k$, où $E[.]$ représente la moyenne statistique.

Le modèle de mesure décrit l'information fournie par le(s) capteur(s) en une équation liant les paramètres de l'état, de la mesure et du bruit. L'équation de mesure ou d'observation (1.8) est reproduite ici [3, 13] :

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (2.2)$$

La matrice \mathbf{H}_k est appelée matrice de mesure, cette matrice est souvent considérée stationnaire. La mesure est affectée par un bruit centré \mathbf{v}_k dont la matrice de covariance associée est $\mathbf{R}_k = E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}'_k]$.

Remarques

- Les bruits \mathbf{w}_k et \mathbf{v}_k ont des significations typiquement différentes : \mathbf{w}_k est considéré comme un bruit agissant sur le processus, tandis que \mathbf{v}_k est un bruit de mesure.
- Pour des raisons de simplicité, on suppose que les bruits \mathbf{w}_k et \mathbf{v}_k sont mutuellement indépendants. L'extension au cas où ces bruits sont corrélés, ne présente pas de difficultés majeures.
- Il n'est pas nécessaire de faire l'hypothèse que les bruits et la condition initiale sont Gaussiens [14, 15]. Sans cette hypothèse, les estimées de Kalman sont des estimées à variance minimale ; avec cette hypothèse ils sont en plus des estimées optimales au sens de la moyenne conditionnelle.
- Lors de l'utilisation de ce filtre, les hypothèses sont faites telles que les bruits d'état et de mesure ont des distributions Gaussiennes connues a priori, indépendantes, blanches et indépendantes de l'état initial du système. L'indépendance des bruits permet de simplifier la dérivation des équations du filtre de Kalman.
- L'état initial ainsi que sa matrice de covariance sont supposés connus.

2.2.1 Algorithme du filtre de Kalman

Après une étape d'initialisation, le filtre de Kalman est utilisé en réitérant récursivement une étape de prédiction puis une étape de mise à jour. Cela permet de suivre et d'estimer l'évolution de l'état d'un système. Un cycle du KF est illustré dans la figure 2.1. Deux hypothèses simplificatrices sont considérées : l'absence de la commande et la stationnarité du modèle.

Initialisation L'état initial est supposé une variable aléatoire Gaussienne, indépendante des bruits, de moyenne et de matrice de covariance connue données par [16] :

$$\hat{\mathbf{x}}_{0|0} = E [\mathbf{x}_0] \quad (2.3)$$

$$\mathbf{P}_{0|0} = E \left[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_{0|0}) (\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_{0|0})' \right] \quad (2.4)$$

Étape de prédiction Etant donné l'état estimé et sa matrice de covariance à l'instant k , on effectue la prédiction de l'état et de sa précision à l'instant $k + 1$ ainsi que la prédiction de la mesure. On obtient l'état prédict $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$ avec sa matrice de covariance associée [16] :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}_{k|k} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{P}_{k+1|k} = \mathbf{F}\mathbf{P}_{k|k}\mathbf{F}' + \mathbf{Q} \quad (2.6)$$

La prédiction de la mesure est donnée par l'équation :

$$\hat{\mathbf{z}}_{k+1|k} = \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} \quad (2.7)$$

Étape de mise à jour Une fois la mesure \mathbf{z}_{k+1} disponible, on calcule l'innovation $\hat{\mathbf{s}}_{k+1}$ qui représente l'erreur de prédiction de l'observation, dont la matrice de covariance associée est \mathbf{S}_{k+1} . L'état prédict peut alors être corrigé par cette innovation pondérée par le gain du filtre \mathbf{K}_{k+1} . On en déduit alors l'estimée de l'état, $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}$, avec sa matrice de covariance associée $\mathbf{P}_{k+1|k+1}$ [3, 4] :

$$\hat{\mathbf{s}}_{k+1} = \mathbf{z}_{k+1} - \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k} \quad (2.8)$$

$$\mathbf{S}_{k+1} = \mathbf{H}\mathbf{P}_{k+1|k}\mathbf{H}' + \mathbf{R} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1|k}\mathbf{H}'\mathbf{S}_{k+1}^{-1} \quad (2.10)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1}\hat{\mathbf{s}}_{k+1} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{P}_{k+1|k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{H})\mathbf{P}_{k+1|k} \quad (2.12)$$

Le gain de Kalman, \mathbf{K}_{k+1} tient compte des incertitudes relatives de l'estimation courante et de la donnée. Si l'incertitude \mathbf{R} de la donnée, est négligeable devant celle du modèle $\mathbf{P}_{k+1|k}$, on devra avoir un gain fort, c'est-à-dire la donnée est fiable. A l'inverse, si l'incertitude de la donnée est grande par rapport à celle de l'estimation, le gain doit être très faible, c'est-à-dire la donnée est peu fiable ; il est normal alors qu'elle ne modifie pas ou peu l'estimation courante.

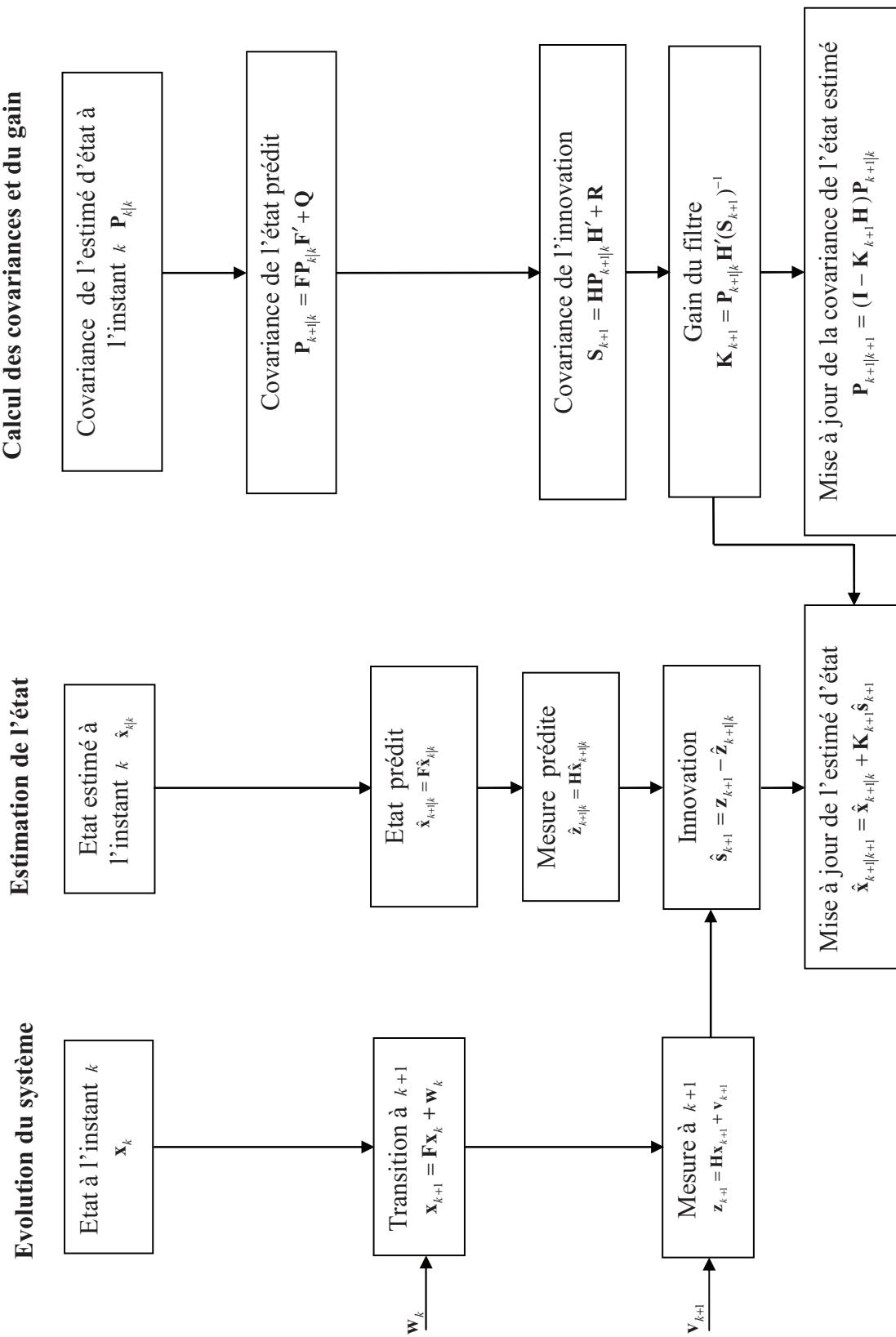


FIGURE 2.1: Un cycle du filtre de Kalman

2.2.2 Avantages du filtre de Kalman

Le filtre de Kalman n'utilise que les deux premiers moments de l'état à savoir la moyenne et la covariance et ignore les moments d'ordres supérieurs, cette approximation offre de nombreux avantages pratiques [14] :

- La moyenne et la covariance d'une distribution nécessite uniquement une petite quantité d'information, alors que cette information est suffisante pour couvrir une large gamme d'applications. Ainsi on peut dire que le KF offre un compromis idéal entre complexité de calcul et flexibilité de représentation.
- La moyenne et la covariance ou sa racine carrée sont des quantités linéairement translatables. Cela signifie que la moyenne et la covariance peuvent être effectivement évaluées lorsqu'elles subissent une transformation linéaire. On note ici que cette caractéristique ne reste pas valable pour les autres moments de la distribution.
- Dans certaines situations on peut utiliser la moyenne et la covariance pour déterminer d'autres caractéristiques de la distribution. Ce cas se manifeste, par exemple, lors de la poursuite en multi-modes. Le filtrage s'opère alors en prenant en compte les estimées basées sur plusieurs moyennes et covariances ; cela inclus les filtres à somme Gaussiennes, '*Gaussian Sum filter (GSF)*' [17–19]. Cette variante sera détaillée au [chapitre 4](#).

2.2.3 Extension du filtre de Kalman

Le filtre de Kalman suppose que les équations du système et de la mesure sont linéaires en fonction du vecteur d'état. Si on peut souvent admettre que le système évolue de façon linéaire, la mesure par contre n'est pas en pratique linéaire dans la plus part des cas. Cependant, la facilité et la finesse du filtre de Kalman a mené les chercheurs à trouver une alternative à cette mesure ; cette étude fera l'objet du [troisième chapitre](#).

2.3 Les filtres $\alpha\beta$ et $\alpha\beta\gamma$ appliqués à la poursuite

Au milieu des années 50, les systèmes radar qualifiés de poursuite pendant le scan, '*Track While-Scan radar system* (TWS)', ont connu l'avènement de la structure de poursuite de cible à base du filtre $\alpha\beta$ [20]. On note que le filtre de Kalman n'est apparu qu'en 1960 [15]. Si le système est bien conçu pour fournir l'estimée de l'état alors on peut obtenir une bonne prédiction du prochain scan pour garantir la corrélation en poursuite, '*track-correlation*'[21]. Pour concevoir ce système, on doit trouver le meilleur compromis entre le filtrage intense (régime permanent) et la capacité de suivi d'une éventuelle manœuvre (régime transitoire). Benedict et Bordner ont proposé une topologie du filtre $\alpha\beta$ qui se base sur la détermination d'un seul paramètre assurant ce compromis et ont établit la première relation entre les paramètres α et β soit $\beta = \alpha^2/(2 - \alpha)$ [21]. Le meilleur choix de la valeur de α demeurait inconnu jusqu'au 1984 où Kalata a introduit un facteur qu'il a nommé indice de poursuite, '*tracking index*'. Ce facteur est fonction de la période de scrutation ainsi que des variances du bruit de système et de mesure [22].

2.3.1 Principe de dérivation du filtre $\alpha\beta$

La dérivation du filtre $\alpha\beta$ est possible de deux façons, la première proposée par Benedict-Bordner [21] se base sur la théorie du filtrage et la stabilité des systèmes appliquée aux systèmes linéaires invariants dans le temps et a comme objectif une bonne réduction du bruit et une bonne poursuite pendant la manœuvre. Les équations obtenues se basent sur le calcul des variations. La seconde technique, qui est la plus connue, tire profit des équations du filtre de Kalman. En effet, il est démontré que ce filtre converge vers un état d'équilibre ou état statique [3, 4]. Le filtre $\alpha\beta$ est utilisé dans le cas du modèle CV tandis que pour le cas du modèle CA c'est le filtre $\alpha\beta\gamma$ qui est utilisé. Dans le présent mémoire on ne considère que la démarche suivie par Kalata [3, 22] pour la dérivation de ces deux filtres.

2.3.2 Dérivation du filtre $\alpha\beta$

On considère dans cette partie un modèle cinématique à deux dimensions uniquement. L'équation d'état et de la mesure pour la composante x sont données par :

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \dot{x}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \dot{x}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix} w_k^x \quad (2.13)$$

$$z_k = \mathbf{H} \begin{bmatrix} x_k \\ \dot{x}_k \end{bmatrix} + v_k, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

On note la covariance du bruit de système \mathbf{Q} et la variance du bruit de mesure R . Les matrices de covariance de l'état estimé et celle de l'état prédit en régime permanent sont notées respectivement :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{k|k} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{k+1|k} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

L'existence, l'unicité et la positivité de la matrice (2.15) est garantie tant que les conditions d'observabilité et de contrôlabilité sont satisfaites [3]. A son tour, le gain du filtre $\alpha\beta$ est :

$$\mathbf{W} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{W}_k \triangleq \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta/T \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Les paramètres α et β tels que définis dans cette équation n'ont pas de dimension. L'expression de la covariance de l'innovation (2.9) est :

$$S = \mathbf{H} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \mathbf{H}' + R = m_{11} + R \quad (2.18)$$

Le gain (2.10) devient :

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \mathbf{H}' S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{m_{11}}{m_{11}+R} & \frac{m_{12}}{m_{11}+R} \end{bmatrix}' \quad (2.19)$$

De (2.17) et (2.19) on tire :

$$g_1 = \frac{m_{11}}{m_{11} + R} \quad (2.20)$$

$$g_2 = \frac{m_{12}}{m_{11} + R} = g_1 \frac{m_{12}}{m_{11}} \quad (2.21)$$

La matrice de covariance devient :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} &= (\mathbf{I}_2 - \mathbf{WH}) \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1-g_1)m_{11} & (1-g_1)m_{12} \\ (1-g_1)m_{12} & m_{22} - g_2 m_{12} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

où \mathbf{I}_n désigne la matrice identité de dimension n . L'équation (2.6) peut être réécrite comme suit :

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{F}^{-1} [\mathbf{P}_{k+1|k} - \mathbf{Q}] (\mathbf{F}^{-1})', \quad \mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

La solution statique pour le gain et la covariance est donnée par les équations non linéaires (2.20) à (2.23), et cela en utilisant l'expression adéquate de la matrice de covariance du bruit de système. Ce développement peut être appliqué aussi à un modèle obtenu par discrétisation de l'équation continue d'état, mais dans notre cas on s'est limité au modèle DWNA, voir [section 1.3.1 du chapitre 1](#). En utilisant l'équation (1.20), correspondant à la matrice de covariance du modèle DWNA, dans l'équation (2.23), on obtient :

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} - 2Tm_{12} + T^2m_{22} - \frac{1}{4}T^4\sigma_w^2 & m_{12} - Tm_{22} + \frac{1}{2}T^3\sigma_w^2 \\ m_{12} - Tm_{22} + \frac{1}{2}T^3\sigma_w^2 & m_{22} - T^2\sigma_w^2 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Par identification entre (2.22) et (2.24) on obtient :

$$g_1 m_{11} = 2T m_{12} - T^2 m_{22} + \frac{1}{4} T^4 \sigma_w^2 \quad (2.25)$$

$$g_1 m_{12} = T m_{22} - \frac{1}{2} T^3 \sigma_w^2 \quad (2.26)$$

$$g_2 m_{12} = T^2 \sigma_w^2 \quad (2.27)$$

A cette étape on dispose du système d'équations (2.20), (2.21), (2.25), (2.26) et (2.27) avec les cinq inconnues g_1, g_2, m_{11}, m_{12} et m_{22} . Ce système se résolu comme suit :

De (2.20) et (2.21) on a :

$$m_{11} = \frac{g_1}{1 - g_1} \sigma_v^2 \quad (2.28)$$

$$m_{12} = \frac{g_2}{1 - g_1} \sigma_v^2 \quad (2.29)$$

De (2.26) et (2.27) on obtient :

$$m_{22} = \frac{g_1 m_{12}}{T} + \frac{1}{2} T^2 \sigma_w^2 = \left(\frac{g_1}{T} + \frac{g_2}{2} \right) m_{12} \quad (2.30)$$

L'utilisation de (2.27) à (2.30) dans (2.25) donne :

$$\frac{g_1^2}{1 - g_1} \sigma_w^2 = 2T \frac{g_2}{1 - g_1} \sigma_w^2 - T^2 \left(\frac{g_1}{T} - \frac{g_2}{2} \right) \frac{g_2}{1 - g_1} \sigma_w^2 + \frac{1}{4} T^4 \frac{g_2^2}{1 - g_1} \sigma_w^2 \quad (2.31)$$

ce qui donne après réarrangement :

$$g_1^2 - 2Tg_2 + Tg_1g_2 + \frac{T^2}{4}g_2^2 = 0 \quad (2.32)$$

En utilisant (2.17), l'équation (2.32) devient :

$$\alpha^2 - 2\beta + \alpha\beta + \frac{\beta^2}{4} = 0 \quad (2.33)$$

Cette dernière équation donne la première relation entre α et β , soit :

$$\alpha = \sqrt{2\beta} - \frac{\beta}{2} \quad (2.34)$$

La deuxième équation entre ces deux paramètres se déduit directement de (2.27) et (2.29) :

$$m_{12} = \frac{T^2 \sigma_w^2}{\beta/T} = \frac{\beta/T}{1-\alpha} \sigma_v^2, \quad (2.35)$$

d'où :

$$\frac{\beta^2}{1-\alpha} = \frac{T^4 \sigma_w^2}{\sigma_v^2} \quad (2.36)$$

Par définition on note :

$$\lambda \triangleq \frac{T^2 \sigma_w^2}{\sigma_v^2} \quad (2.37)$$

La quantité λ a été introduite par Kalata [22], elle est appelée indice de manœuvre de la cible, '*Target Maneuvering Index*', ou indice de la poursuite de cible, '*Target Tracking Index*'. Ces appellations sont dues au fait que cette quantité est proportionnelle au rapport de :

- l'incertitude sur le mouvement, désignée par l'écart type du bruit du système,
- l'incertitude sur la mesure, désignée par l'écart type du bruit de mesure.

L'élimination de α entre (2.34) et (2.36) donne :

$$\beta = \frac{1}{4} \left(\lambda^2 + 4\lambda - \lambda\sqrt{\lambda^2 + 8\lambda} \right), \quad (2.38)$$

et en fin de (2.34) et (2.38) on obtient :

$$\alpha = -\frac{1}{8} \left(\lambda^2 + 8\lambda - (\lambda + 4)\sqrt{\lambda^2 + 8\lambda} \right) \quad (2.39)$$

Remarques

- Pour un bruit de processus important relativement au bruit de mesure, on a un grand indice de manœuvrabilité λ . Ce cas engendre un grand gain en position α et le filtre donne un poids important à la plus récente mesure et, un faible poids aux anciennes données, engendrant ainsi une faible réduction de bruit.
- Un faible λ donne un petit α et une importante réduction du bruit. Cependant prendre une petite valeur arbitraire pour α ne réduit pas d'avantage le bruit, sauf si ce coefficient est déterminé suivant λ de façon optimale.

- Les coefficients α et β , ne peuvent pas être choisis indépendamment l'un de l'autre, la figure 2.2 présente la relation qui existe entre ces deux coefficients.

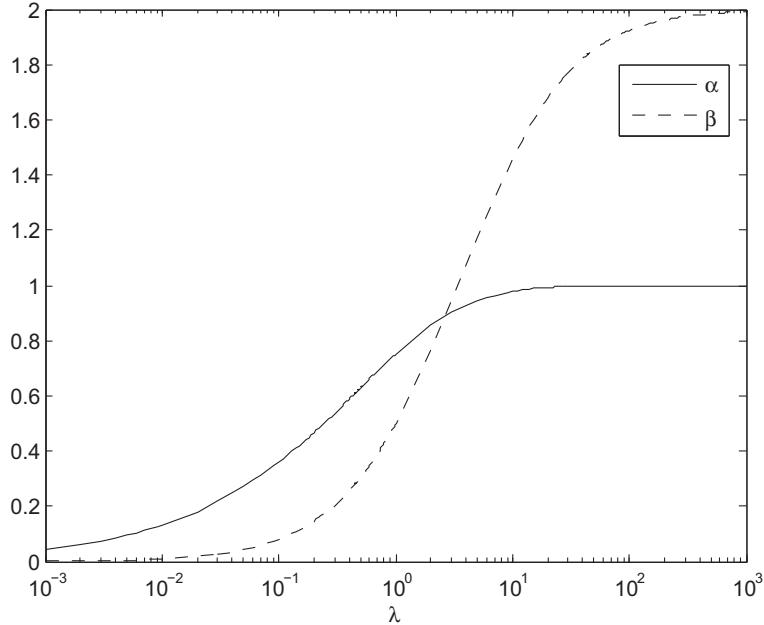


FIGURE 2.2: Les coefficients $\alpha\beta$ du gain statique pour le modèle DWNA.

2.3.3 Caractéristiques en régime permanent

1. Variance de l'erreur d'estimation

Les éléments de la matrice de covariance d'état estimée permanente deviennent :

$$p_{11} = \alpha \sigma_v^2 \quad (2.40)$$

$$p_{12} = \frac{\beta}{T} \sigma_v^2 \quad (2.41)$$

$$p_{22} = \frac{\beta}{T^2} \frac{\alpha - \beta/2}{1 - \alpha} \sigma_v^2 \quad (2.42)$$

De l'équation (2.40) on déduit que le facteur de réduction du bruit α est le même que le gain optimale de la position. Pour qu'il y ait réduction du bruit on doit avoir $0 \leq \alpha \leq 1$.

2. Variance de l'innovation

La variance de l'innovation se déduit de (2.17), (2.18) et (2.28) :

$$S = \frac{\sigma_v^2}{1 - \alpha} \quad (2.43)$$

3. Cas d'un faible indice de manœuvrabilité

Dans le cas de faible valeur de l'indice de manœuvrabilité λ (jusqu'à 0.1), on obtient les simplifications suivantes :

$$\alpha \approx \sqrt{2\lambda} \quad (2.44)$$

$$\beta \approx \lambda \quad (2.45)$$

2.3.4 Paramètres du filtre $\alpha\beta\gamma$

On considère dans cette partie un modèle cinématique DWPA, à deux dimensions. Les équations d'état et de la mesure pour la composante x sont données par :

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \dot{x}_{k+1} \\ \ddot{x}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T & \frac{T^2}{2} \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \dot{x}_k \\ \ddot{x}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \\ 1 \end{bmatrix} w_k^x \quad (2.46)$$

$$z_k = \mathbf{H} \begin{bmatrix} x_k \\ \dot{x}_k \\ \ddot{x}_{k+1} \end{bmatrix} + v_k, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Le coefficient de manœuvrabilité λ est défini de la même façon que (2.37). Le gain du filtre $\alpha\beta\gamma$ est :

$$\mathbf{W} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{W}_k \triangleq \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \end{bmatrix}' \triangleq \begin{bmatrix} \alpha & \beta/T & \gamma/2T^2 \end{bmatrix}' \quad (2.48)$$

Les paramètres α , β et γ sont donnés (pour la composante x) par les équations suivantes [3] :

$$\alpha_x = 1 - s^2$$

$$\beta_x = 2(1 - s)^2 \quad (2.49)$$

$$\gamma_x = 2\lambda_x s$$

avec :

$$s = z - \frac{p}{3z} - \frac{b}{3}$$

$$b = \frac{\lambda_x}{2} - 3$$

$$c = \frac{\lambda_x}{2} + 3$$

$$p = c - \frac{b^2}{3}$$

$$q = \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} - 1$$

$$z = -\sqrt[3]{\frac{1}{2} \left(q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^2}{27}} \right)}$$

Des équations similaires sont valables pour la composante y . La figure 2.3 illustre la relation entre les paramètres α, β et γ pour le modèle DWPA.

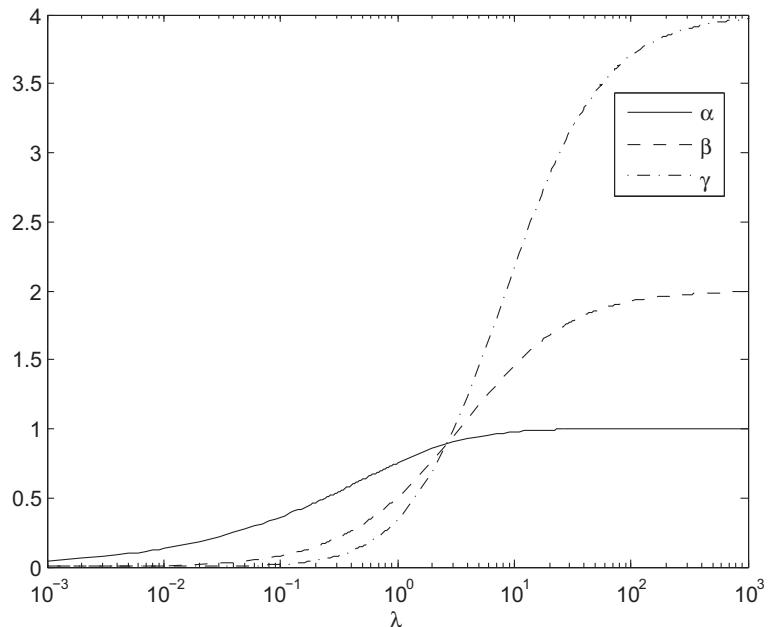


FIGURE 2.3: Les coefficients α, β, γ du gain statique pour le modèle DWPA.

2.4 Variantes du filtre $\alpha\beta$

Les simulations du filtre $\alpha\beta$ montrent que l'utilisation des paramètres optimaux engendre une large erreur en régime transitoire ; pour cette raison, Kalata [22] a introduit une alternative technique qui tire profit du caractère récursif de ce filtre, mais qui consomme d'avantage de temps de calcul. Bien que le processus de filtrage engendre une combinaison linéaire entre le passé de l'estimé et l'observation actuelle, le calcul du gain est un processus non linéaire. Cependant il a été montré que le gain dépend uniquement du coefficient de manœuvrabilité, ainsi :

$$\mathbf{K}_{k+1} = B(k, \lambda) \quad (2.50)$$

Pour définir la valeur du gain \mathbf{K}_{k+1} , deux versions sont proposées.

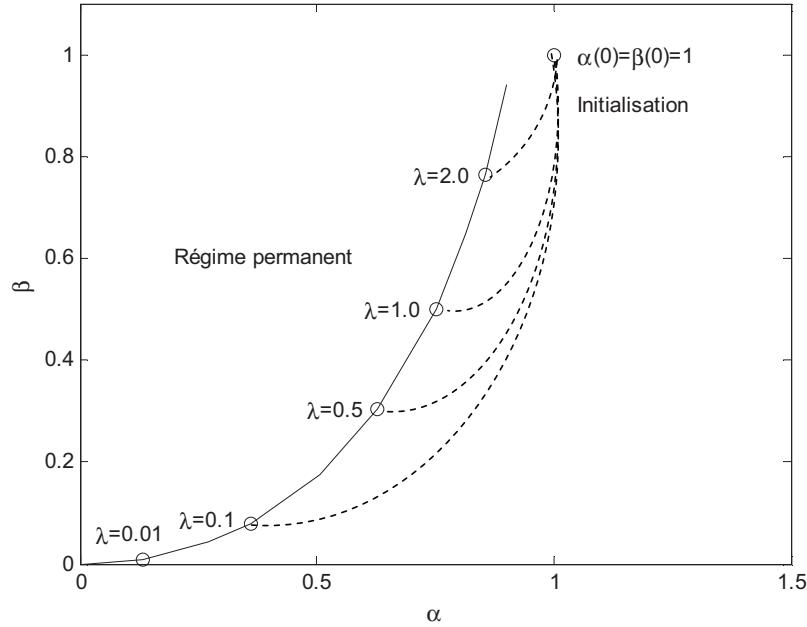
2.4.1 Approximation d'ordre un

L'idée alors est de considérer que le gain passe d'une valeur initiale à une valeur finale qui est égale à la valeur optimale. En fait, si on utilise la technique d'initialisation par les deux points, on peut s'apercevoir qu'initialement les paramètres du gain valent 1, c'est-à-dire $\alpha_0 = \beta_0 = 1$. En examinant la figure 2.4, on peut alors envisager une décroissance en exponentielle avec une certaine constante de temps. Les paramètres du gain pendant la transition sont donnés par :

$$\alpha \stackrel{\Delta}{=} \alpha^* + (1 - \alpha^*) / e^{\tau_\alpha k} \quad (2.51)$$

$$\beta \stackrel{\Delta}{=} \beta^* + (1 - \beta^*) / e^{\tau_\beta k} \quad (2.52)$$

où α^* et β^* désigne les valeurs optimales, e le népérien, et τ_α et τ_β représentent les constantes de temps.

FIGURE 2.4: Initialisation du filtre $\alpha\beta$ à paramètres optimaux.

2.4.2 Approximation récursive

En se basant sur l'approximation d'ordre un, on peut envisager [22] une équation aux différences d'ordre un ; Les formes récursives des deux équations (2.51) et (2.52) peuvent alors être données par :

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k + G_\alpha (\alpha^* - \alpha_k) \quad (2.53)$$

$$\beta_{k+1} = \beta_k + G_\beta (\beta^* - \beta_k) \quad (2.54)$$

avec :

$$G_\alpha = 1 - \exp(-1/\tau_\alpha) \quad (2.55)$$

$$G_\beta = 1 - \exp(-1/\tau_\beta) \quad (2.56)$$

où τ_α et τ_β représentent les constantes de temps.

2.5 Critères de performances

La consistance d'un estimateur pour le problème d'estimation d'un paramètre constant est définie comme étant la convergence de l'estimée vers la vraie valeur. Cela signifie, au sens de *Fisher*, qu'il y-a un accroissement monotone de l'information sur ce paramètre ; ce qui tend à annuler l'incertitude sur la vraie valeur [3]. L'estimation de l'état d'un système dynamique ne conduit pas, en général, à une convergence de l'estimée. Cependant on dispose en plus de l'estimé $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ à l'instant k , de sa matrice de covariance $\mathbf{P}_{k|k}$. Sous l'hypothèse de la linéarité et de la Gaussieneté, la densité de probabilité conditionnelle de l'état \mathbf{x}_k à l'instant k est donnée par :

$$p[\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}^k] = \frac{1}{\sqrt{2\pi |\mathbf{P}_{k|k}|}} \exp \left[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k})' \mathbf{P}_{k|k}^{-1} (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}) \right] \quad (2.57)$$

La caractérisation statistique de l'erreur d'estimation est souvent limitée aux moments d'ordre un et deux, cela signifie qu'on se contente de remplacer la probabilité conditionnelle (2.50) par les deux moments de l'erreur [3] :

$$E[\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}] \triangleq E[\tilde{\mathbf{x}}_{k|k}] = 0 \quad (2.58)$$

$$E[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k})(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k})'] \triangleq E[\tilde{\mathbf{x}}_{k|k}\tilde{\mathbf{x}}'_{k|k}] = \mathbf{P}_{k|k} \quad (2.59)$$

La condition (2.58) traduit l'exigence d'annuler le biais, tandis que l'équation (2.59) traduit la correspondance entre l'erreur quadratique moyenne $E[\tilde{\mathbf{x}}_{k|k}\tilde{\mathbf{x}}'_{k|k}]$ et la covariance calculée par le filtre $\mathbf{P}_{k|k}$. La détermination du gain de Kalman repose sur le calcul de la matrice de covariance de l'erreur, cela signifie que la consistance est nécessaire pour l'optimalité du filtre, autrement dit, une covariance erronée engendre un mauvais gain. Pour cette raison la consistance doit être vérifiée lors de la conception d'un filtre.

2.5.1 L'erreur d'estimation quadratique normalisée (NEES)

L'une des mesures statistiques de la consistance du filtre est l'erreur d'estimation quadratique normalisée de l'état, '*Normalized (state) Estimation Error Squared*' (NEES). Cette quantité est donnée à l'instant k pour la réalisation d'indice i de la manière suivante :

$$\varepsilon_{i,k} = \tilde{\mathbf{x}}'_{i,k|k} \mathbf{P}_{i,k|k}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_{i,k|k} \quad (2.60)$$

Sous l'hypothèse que le filtre est consistant, la quantité $\varepsilon_{i,k}$ est distribuée suivant la densité chi-carrée $\chi^2_{n_x}$ avec n_x degrés de liberté, ainsi :

$$E [\varepsilon_{i,k}] = n_x \quad (2.61)$$

On définit aussi l'erreur d'estimation quadratique moyenne normalisée de l'état, '*Average Normalized (state) Estimation Error Squared* (ANEES)', à l'instant k par :

$$\varepsilon_k = \frac{1}{n_x N} \sum_{i=1}^N \varepsilon_{i,k} \quad (2.62)$$

Avec N le nombre de réalisations, le filtre est d'autant crédible où consistant si cette erreur s'approche de 1. Cette quantité permet aussi de comparer des estimateurs dont la dimension du vecteur d'état est différente [23].

2.5.2 Le carré normalisé de l'innovation (NIS)

Sous l'hypothèse que le filtre est consistant, on définit de manière similaire que le NEES, le carré normalisé de l'innovation, '*Normalized Innovation Square* (NIS)', à l'instant k pour la réalisation d'indice i par :

$$\varepsilon_{i,k}^{\hat{s}} = \hat{s}'_{i,k} \mathbf{S}_{i,k}^{-1} \hat{s}_{i,k} \quad (2.63)$$

2.5.3 La racine carrée de l'erreur quadratique moyenne (RMSE)

On cherche toujours à avoir un filtre optimal, qui a de très bonnes performances. Celles-ci peuvent être évaluées par le calcul de la Racine Carrée de l'Erreur Quadratique Moyenne (RCEQM), '*Root Mean Squared Errors (RMSE)*', en position, vitesse, ou accélération. L'expression du RMSE pour la composante x du vecteur d'état évaluée en moyennant sur N simulations de *Monte Carlo*, à l'instant k est donnée par la formule :

$$\text{RCEQM}_{x,k} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{x}_{i,k}^2} \quad (2.64)$$

On peut aussi définir l'erreur quadratique moyenne conjointe entre les deux composantes (x, y) par :

$$\text{RCEQM}_{p,k} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\tilde{x}_{i,k}^2 + \tilde{y}_{i,k}^2)} \quad (2.65)$$

De la même façon, nous pouvons calculer la RCEQM conjointe en vitesse :

$$\text{RCEQM}_{v,k} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\tilde{v}_{i,x,k}^2 + \tilde{v}_{i,y,k}^2)} \quad (2.66)$$

2.6 Applications

Dans cette simulation, on effectue une comparaison entre le filtre de Kalman et le filtre $\alpha\beta$, le critère choisi est la RCEQM seulement suite à l'indisponibilité des matrices de covariance prédictive de l'état et la matrice de covariance de l'innovation pour le filtre $\alpha\beta$. Le scénario considéré est une cible qui se déplace dans le plan sans effectuer de manœuvres. Ainsi le système est représenté par la formule décrivant un système dynamique linéaire, voir l'équation (2.1). En partant d'une position initiale située à $(10km, 10km)$, la cible se déplace à une vitesse égale à $20m/s$ avec

un cap de 45° . La figure 2.5 illustre la trajectoire suivie par le mobile durant 200s. A l'origine se trouve un radar fournissant des mesures décorrelées correspondant à la position du mobile dans le plan (x, y) , avec un même écart type de l'erreur de mesure dans les deux directions, qui vaut 50m.

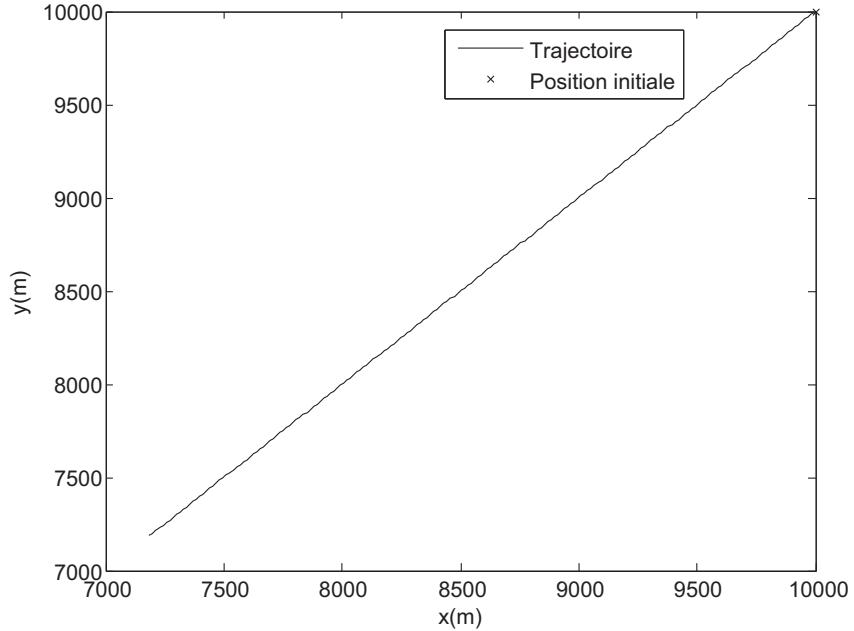


FIGURE 2.5: Trajectoire de la cible

2.6.1 Comparaison entre le KF et le filtre $\alpha\beta$

Sur la figure 2.6 on présente la racine carrée des erreurs quadratiques moyennes RCEQM en position (a) et en vitesse (b) obtenues en moyennant 250 réalisations pour un bruit de système dont l'écart type est $\sigma_w = 0.1m/s^2$ et un temps de mise à jour égale à 1s. L'initialisation est effectuée en utilisant la technique des deux points, soit :

$$\hat{\mathbf{x}}_{0|0} = E[\mathbf{x}_0] = \left[x_0, \frac{x_0 - x_{(-1)}}{T}, y_0, \frac{y_0 - y_{(-1)}}{T} \right]' \quad (2.67)$$

$$\mathbf{P}_{0|0} = E \left[(x_0 - \hat{x}_{0|0}) (x_0 - \hat{x}_{0|0})' \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(1,1) & \frac{\mathbf{R}(1,1)}{T} & 0 & 0 \\ \frac{\mathbf{R}(1,1)}{T} & 2\frac{\mathbf{R}(1,1)}{T^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{R}(2,2) & \frac{\mathbf{R}(2,2)}{T} \\ 0 & 0 & \frac{\mathbf{R}(2,2)}{T} & 2\frac{\mathbf{R}(2,2)}{T^2} \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

Par convention, on considère que la poursuite commence à l'instant T ; pour cette raison on considère que les deux premières mesures sont acquises dans l'ordre suivant : la première à l'instant $-T$ et la deuxième à l'instant 0, d'où l'écriture $x_0, x_{(-1)}, y_0$ et $y_{(-1)}$.

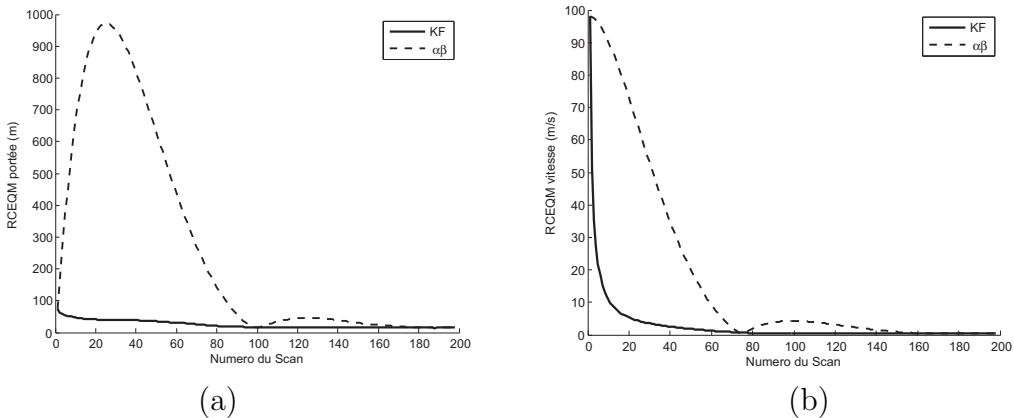


FIGURE 2.6: RCEQM en (a) position et (b) vitesse, des deux filtres $\alpha\beta$ et KF pour $\sigma_w = 0.1m/s^2$.

En examinant la figure 2.6 on remarque le filtre de Kalman converge vers un état d'équilibre après une transition ne dépassant pas les 40 scans (dans cette simulation 40s car $T = 1$). Le filtre $\alpha\beta$ converge lui aussi vers la solution du régime permanent du filtre de Kalman mais cela avec une certaine latence.

Sur la figure 2.7 on a rapporté les résultats de simulation pour un bruit de système plus petit que le premier, de valeur $\sigma_w = 0.03m/s^2$. On remarque que le temps de convergence augmente, il dépasse les 180 scans, en plus un dépassement plus important apparaît pendant la transition. Ce comportement est dû la valeur attribuée à l'indice de manœuvrabilité λ voir l'équation (2.37). Cet indice devient plus petit indiquant ainsi que l'incertitude de la mesure est relativement plus importante que dans le premier cas. Pour cette raison, le filtre $\alpha\beta$ nécessite plus de temps pour converger vers la solution optimale donnée par le filtre de Kalman.

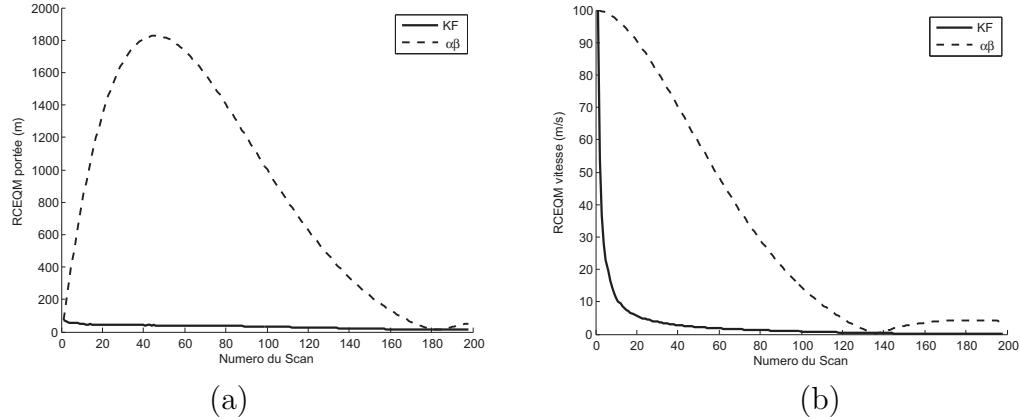


FIGURE 2.7: RCEQM en (a) position et (b) vitesse, des deux filtres $\alpha\beta$ et KF pour $\sigma_w = 0.03m/s^2$.

Pour mieux illustrer ce comportement on a augmenté le temps de poursuite à 500s pour la simulation précédente, de la figure 2.8 (a) on remarque que la convergence s'effectue après 300s. La figure 2.8 (b) représente un zoom en fin de poursuite de la figure 2.8 (a), il apparait clairement que le filtre $\alpha\beta$ converge vers le régime statique du filtre de Kalman.

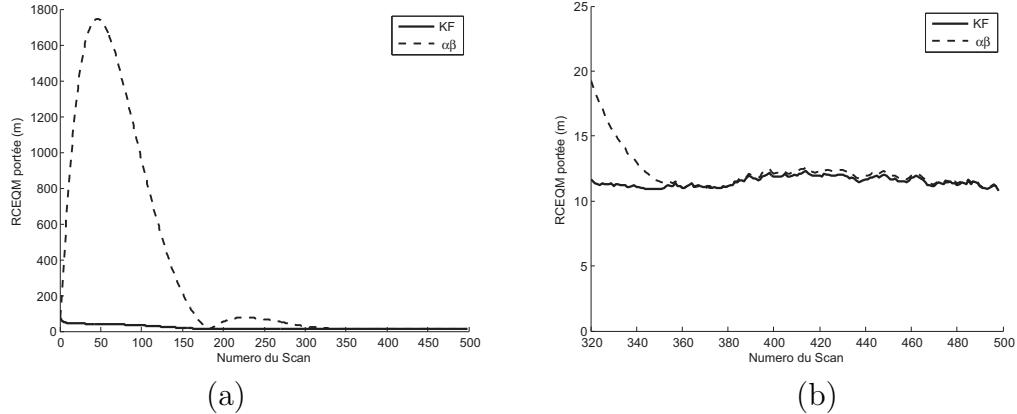


FIGURE 2.8: RCEQM (a) en position, des deux filtres $\alpha\beta$ et KF pour $\sigma_w = 0.03 m/s^2$, (b) zoom en régime statique de (a).

2.6.2 Utilisation du filtre $\alpha\beta$ adaptatif

Comme il est indiqué à la section 2.4 du présent chapitre, le filtre $\alpha\beta$ adaptatif agit dans la phase de transition on remarque à partir des deux figures 2.9 et 2.10 que le temps de convergence est amélioré par rapport à celui du filtre $\alpha\beta$. D'après les mêmes figures, le filtre $\alpha\beta$ adaptatif engendre un dépassement nettement inférieur à celui du filtre $\alpha\beta$. Cependant, le temps de calcul du filtre adaptatif, pour cette simulation a augmenté de 200%. Cette augmentation peut être acceptable car elle ne représente en fait que 50% du temps consommé par le filtre de Kalman.

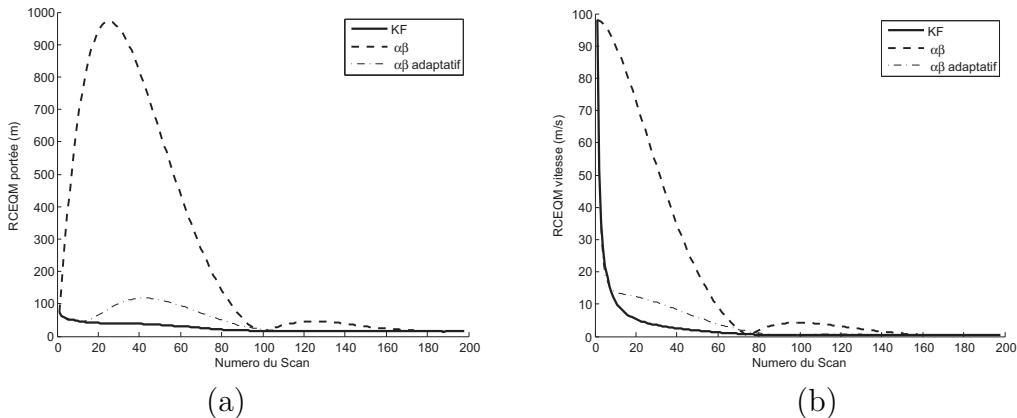


FIGURE 2.9: RCEQM en (a) position et (b) vitesse, des deux filtres $\alpha\beta$, KF et $\alpha\beta$ adaptatif pour $\sigma_w = 0.1 m/s^2$.

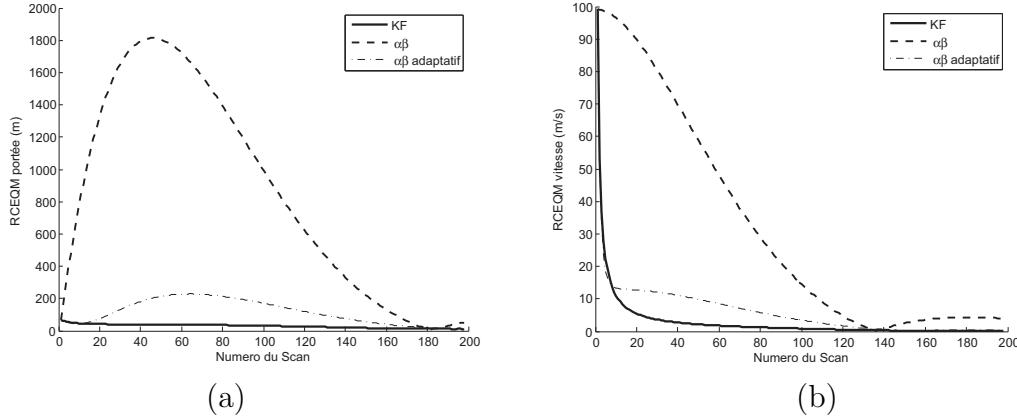


FIGURE 2.10: RCEQM en (a) position et (b) vitesse, des deux filtres $\alpha\beta$, KF et $\alpha\beta$ adaptatif pour $\sigma_w = 0.03m/s^2$.

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre on a présenté le filtre de Kalman élaboré en 1960, et qui demeure à ce temps parmi les techniques les plus utilisées dans différentes applications. Ce filtre fournit la solution optimale, au sens de la minimisation de l'erreur quadratique moyenne, lorsque les équations du système et de la mesure sont linéaires et les bruits correspondants sont Gaussiens. Il a été démontré que ce filtre converge vers un état statique, pour cette raison une version nettement plus rapide et plus simple à implémenter baptisée filtre $\alpha\beta$ a été introduite par Kalata en 1984. Pour remédier à la latence intrinsèque au filtre $\alpha\beta$ et au dépassement important, Kalata a proposé dans le même travail des alternatives de la version de base donnant un temps de réponse plus court et des dépassements acceptables. Cependant, ces versions requièrent un temps de calcul plus important.

Dans ce même chapitre on a présenté aussi certains critères de performance qui permettent d'évaluer et de comparer les différents estimateurs. Le plus utilisé de ces critères est la Racine Carrée de l'Erreur Quadratique Moyenne (RCEQM) ; ce critère ne sert qu'à la simulation, car il requiert la connaissance de la valeur exacte du vecteur d'état du processus étudié.

Chapitre 3

Extension du filtre de Kalman au cas non linéaire

3.1 Introduction

L'avantage majeur du filtre de Kalman, réside dans le fait que les équations du filtre et l'évaluation des performances ainsi que le calcul du gain sont découplés, cela permet de calculer le gain ainsi que les performances du filtre en différé '*off line*' [12]. L'estimée filtrée et la mesure de performance sont la moyenne et la matrice de covariance de la densité de probabilité à postériori qui est supposée Gaussienne. Par comparaison avec le filtrage linéaire optimal, le filtrage non linéaire est loin d'être précis et on devra faire d'énormes efforts pour obtenir des performances meilleures [12]. Le problème d'estimation appliqué à un système stochastique non linéaire est étroitement lié au calcul de la densité de probabilité de l'état \mathbf{x}_k connaissant toutes les informations à l'instant k , à savoir : les informations apriori de l'état initial, les entrées intervenant dans le système et l'ensemble des mesures jusqu'à l'instant k .

L'application la plus fréquente du filtre de Kalman pour les systèmes non linéaires est le filtre de Kalman étendu, '*Extended Kalman Filter (EKF)*'. En supposant que toutes les transformations sont quasi-linéaires, l'EKF effectue la linéarisation

de toutes les transformations non linéaires, autour des états estimé et prédit, et substitue les *Jacobiens* correspondants dans les équations du filtre de Kalman linéaire [14]. Il est important de remarquer que la convergence de ce filtre n'est pas garantie [12], sauf sous certaines conditions. En effet, si le passage d'une estimation à une autre tend à sortir de la zone de linéarité, alors le modèle obtenu après linéarisation n'est plus valable et il est possible que le filtre diverge [8].

Suite aux limites intrinsèques à l'EKF, certains chercheurs se sont consacrés à développer des versions plus fiables de ce filtre. Premièrement on s'intéresse aux techniques utilisant un nombre déterministe de points pondérés, qui sont propagés à chaque itération et forment ainsi un nuage avec lequel on peut estimer l'état, la moyenne pondérée de ces points, ainsi que la matrice de covariance correspondante. Particulièrement on présentera les filtres nommés le filtre de Kalman Unscented, '*Unscented Kalman Filter (UKF)*' et le filtre de Kalman Quadrature, '*Quadrature Kalman Filter (QKF)*'. Ces techniques sont appelées aussi techniques pseudo Monte Carlo, puisqu'elles propagent un nombre de points moins important et générés de façon déterministe [8].

La quatrième variante présentée dans ce chapitre est le filtre de Kalman à mesure convertie, '*Converted Measurement Kalman Filter (CMKF)*'. Ce filtre est appliqué en poursuite lorsque le système est linéaire alors que la mesure est non linéaire. Le principe de ce filtre consiste à convertir la mesure en coordonnées cartésiennes ; on crée ainsi des composantes corrélées. Cette corrélation engendre un biais d'estimation du vecteur d'état. Le rôle de ce filtre est la minimisation de l'effet de ce biais. L'avantage de ce filtre c'est qu'on peut utiliser directement les équations du filtre de Kalman linéaire, sauf qu'il faut recalculer à chaque itération la matrice de covariance de la mesure.

Toutes les techniques décrites dans ce chapitre sont des techniques sous optimales. Alors avant d'entamer la description de ces filtres, on présentera le problème général de l'estimation optimale et on montrera la contrainte qui nous amène à se contenter en pratique des versions sous optimales.

3.2 L'estimateur optimal

Considérons le cas général où les équations du système et de la mesure sont données respectivement par (1.3) et (1.4) du premier chapitre. On définit alors l'ensemble d'informations disponibles jusqu'à l'instant k par :

$$\mathbf{I}^k = \{\mathbf{Z}^k, \mathbf{U}^{k-1}\}, \quad (3.1)$$

où $\mathbf{Z}^k \triangleq \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_k\}$ est l'ensemble de mesures jusqu'à l'instant k et \mathbf{U}^{k-1} est l'ensemble connu des commandes antérieurs à l'instant k soit $\mathbf{U}^{k-1} \triangleq \{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{k-1}\}$. L'ensemble d'informations défini par l'équation (3.1) s'élargit avec le temps ; alors il est préférable de trouver une *information d'état* appropriée, englobant le passé et dont la taille ne dépend pas du temps. Pour un système stochastique, l'information d'état est une fonction de toutes les informations disponibles qui résume l'historique du système au sens probabiliste. Il est démontré que la densité de probabilité conditionnelle définie par [3] :

$$p_k \triangleq p [\mathbf{x}_k | \mathbf{I}^k] \quad (3.2)$$

représente bien une information d'état si les deux séquences de bruit (processus et mesure) sont blanches et mutuellement indépendantes. Dans ce cas, l'estimateur optimal est donné par la forme récurrente suivante :

$$p_{k+1} = \frac{1}{c} p [\mathbf{z}_{k+1} | \mathbf{x}_{k+1}] \int p [\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k] p_k d\mathbf{x}_k, \quad (3.3)$$

où l'intégrale est calculée sur tout le domaine de variation de la variable \mathbf{x}_k et c une constante de normalisation.

Remarques

- L'implémentation de l'équation (3.3) nécessite la sauvegarde de la densité de probabilité qui est dans le cas général représentée par un vecteur de dimension

infinie. L'autre problème qui s'ajoute c'est qu'on doit calculer numériquement cette intégrale.

- En dépit de ces deux difficultés, l'utilisation de l'information d'état a les avantages suivants :
 - + Cette densité peut être approximée par une grille de points ou par une fonction analytique par morceaux.
 - + Cette densité procure directement l'estimé au sens de l'erreur quadratique moyenne minimale, à savoir la moyenne conditionnelle, et toute autre information correspondant à l'état courant, comme par exemple la variance conditionnelle.
- Pour un système linéaire avec des bruits Gaussiens et un état initial aussi Gausien, l'équation (3.3) devient le filtre de Kalman. Dans ce cas, on a une statistique suffisante et à dimension finie de la moyenne conditionnelle qui englobe de façon intégrale le passé au sens probabiliste.
- Si un système est linéaire mais les bruits et/ou l'état initial ne sont pas Gaussiens, alors en général, il n'y-a pas une forme statistique simple et on doit passer par l'équation (3.3) pour calculer l'estimateur au sens de l'erreur quadratique moyenne minimale.

Parce que l'implémentation de l'estimateur optimal n'est pas en général évidente, on doit recourir aux estimateurs sous optimaux ; le filtre le plus connu est le filtre de Kalman étendu, qui sera présenté dans la section suivante.

3.3 Le Filtre de Kalman étendu (EKF)

Le filtre de Kalman étendu, '*Extended Kalman Filter (EKF)*', est devenu un standard ces cinq dernières décennies. Ce filtre effectue une linéarisation des équations non linéaires autour des estimées les plus récentes de l'état. Dans le présent contexte, on considère que le système est régi par les équations déterministes et non linéaires (1.3) et (1.4) données dans le premier chapitre et reproduites ici :

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k) + \mathbf{w}_k \quad (3.4)$$

$$\mathbf{z}_k = h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k \quad (3.5)$$

On a considéré dans les équations (3.4) et (3.5) que les fonctions $f(\cdot)$ et $h(\cdot)$ sont indépendantes du temps et qu'il n'y-a pas de commande, cela n'a pour but que d'alléger l'écriture des équations. Les bruits de mesure et du système sont toujours considérés comme des séquences : additives, blanches, Gaussiennes et centrées, de matrices de covariance \mathbf{Q} et \mathbf{R} , respectivement. Ce filtre comporte principalement deux étapes :

3.3.1 Etape de prédiction

Prédiction de l'état Afin d'obtenir l'état prédit $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$, on a recours au développement en série de Taylor de la fonction $f(\cdot)$, autour de la plus récente estimée soit $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$. Le développement du premier ordre de (3.4) donne [16] :

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}) + \mathbf{F}_{\mathbf{x}}[\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}] + HOT + \mathbf{w}_k \quad (3.6)$$

où : $\mathbf{F}_{\mathbf{x}}$: présente le Jacobien de $f(\mathbf{x})$, soit :

$$\mathbf{F}_{\mathbf{x}} \triangleq [\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})']' \Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k}} \triangleq \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k}} \quad (3.7)$$

HOT : désigne les moments d'ordres supérieurs, qui sont considérés négligeables.

Remarques

- Le développement en série de Taylor du premier ordre des fonctions $f(\cdot)$ et $h(\cdot)$ engendre l'EKF du premier ordre, tandis que le développement du second ordre engendre l'EKF du second ordre. Il s'est avéré en pratique que ce dernier ne présente pas un grand intérêt comparé au premier [3].
- Etant donné une mesure \mathbf{z}_k , la quantité $\mathbf{F}_{\mathbf{x}}$ est déterministe ; de ce fait, uniquement \mathbf{x}_k et \mathbf{w}_k sont aléatoires. Cette remarque sert lors de l'évaluation des moyennes conditionnelles.

L'état prédit à l'instant $k + 1$ à partir de l'instant k est obtenu par la moyenne de (3.6) conditionnellement à la mesure \mathbf{z}_k , en négligeant les *HOT* on obtient :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = f(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}) \quad (3.8)$$

Si on soustrait (3.8) de (3.6) on obtient l'erreur commise sur l'état prédit :

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \mathbf{F}_{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{x}}_{k|k} + \mathbf{w}_k \quad (3.9)$$

où :

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k|k} = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k} \quad (3.10)$$

et

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} - \mathbf{x}_{k+1} \quad (3.11)$$

Le calcul de la matrice de covariance prédite est obtenu en multipliant (3.9) par sa transposée, puis en prenant la moyenne conditionnellement à la mesure \mathbf{z}_k . Après certaines manipulations on obtient :

$$\mathbf{P}_{k+1|k} = \mathbf{F}_{\mathbf{x}} \mathbf{P}_{k|k} \mathbf{F}'_{\mathbf{x}} + \mathbf{Q} \quad (3.12)$$

Prédiction de la mesure D'une manière similaire, la mesure prédite et sa matrice de covariance sont données par :

$$\hat{\mathbf{z}}_{k+1|k} = h(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) \quad (3.13)$$

$$\mathbf{S}_{k+1|k} = \mathbf{H}_{\mathbf{x}} \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{H}'_{\mathbf{x}} + \mathbf{R} \quad (3.14)$$

où $\mathbf{H}_{\mathbf{x}}$ désigne le Jacobien de $h(\mathbf{x})$, défini par :

$$\mathbf{H}_{\mathbf{x}} \triangleq [\nabla_{\mathbf{x}} h(\mathbf{x})']'|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}} \triangleq \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}} \quad (3.15)$$

3.3.2 Etape de mise à jour

Les équations de l'étape de mise à jour sont similaires à celles de la même étape du filtre de Kalman c'est-à-dire identiques aux équations (2.8) à (2.12) du chapitre 2. Pour plus de détails sur le développement des équations de l'EKF voir [3]. L'organigramme d'un cycle de ce filtre est présenté à la figure 3.1.

3.3.3 Remarques

- L'augmentation dans la matrice de covariance d'état engendre l'augmentation du gain ce qui donne plus d'importance aux données récentes (la mesure). A l'opposé, l'augmentation de la matrice de covariance de mesure, engendre l'augmentation de la matrice de covariance de l'innovation ce qui diminue le gain [16].
- Les équations qui donnent le gain sont couplées avec les équations du filtre, cela est du au fait que les quantités \mathbf{F}_x et \mathbf{H}_x dépendent de $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ et $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$, respectivement ; la même remarque peut être faite sur la matrice de covariance prédictive $\mathbf{P}_{k+1|k}$. Cela implique que le calcul de ses deux quantités ne peut être réalisé en hors ligne. Il existe d'autres versions de filtres où le découplage entre le gain et les équations est réalisé [12].
- Le passage du modèle non linéaire au modèle linéaire est d'autant plus précis que les quantités $\|\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}\|^2$ et $\|\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}\|^2$ sont plus petites. Ces quantités représentent en fait la trace des matrices $\mathbf{P}_{k|k}$ et $\mathbf{P}_{k+1|k}$, respectivement. Ainsi on peut dire que dans le cas d'un grand rapport signal sur bruit, '*Signal to Noise Ratio (SNR)*', l'application de l'EKF devient plus difficile [3]. Une autre quantité peut être utilisée pour voir si l'application de l'EKF est plus au moins exacte. Cette quantité est la pseudo-innovation. Le filtre est d'autant plus optimal que cette quantité est d'autant plus blanche.
- Parce qu'il maintient l'élégance et la forme récursive du filtre de Kalman, l'EKF est l'algorithme le plus sollicité pour l'estimation d'état d'un système non linéaire. Cependant, on peut énumérer les limitations suivantes le concernant :

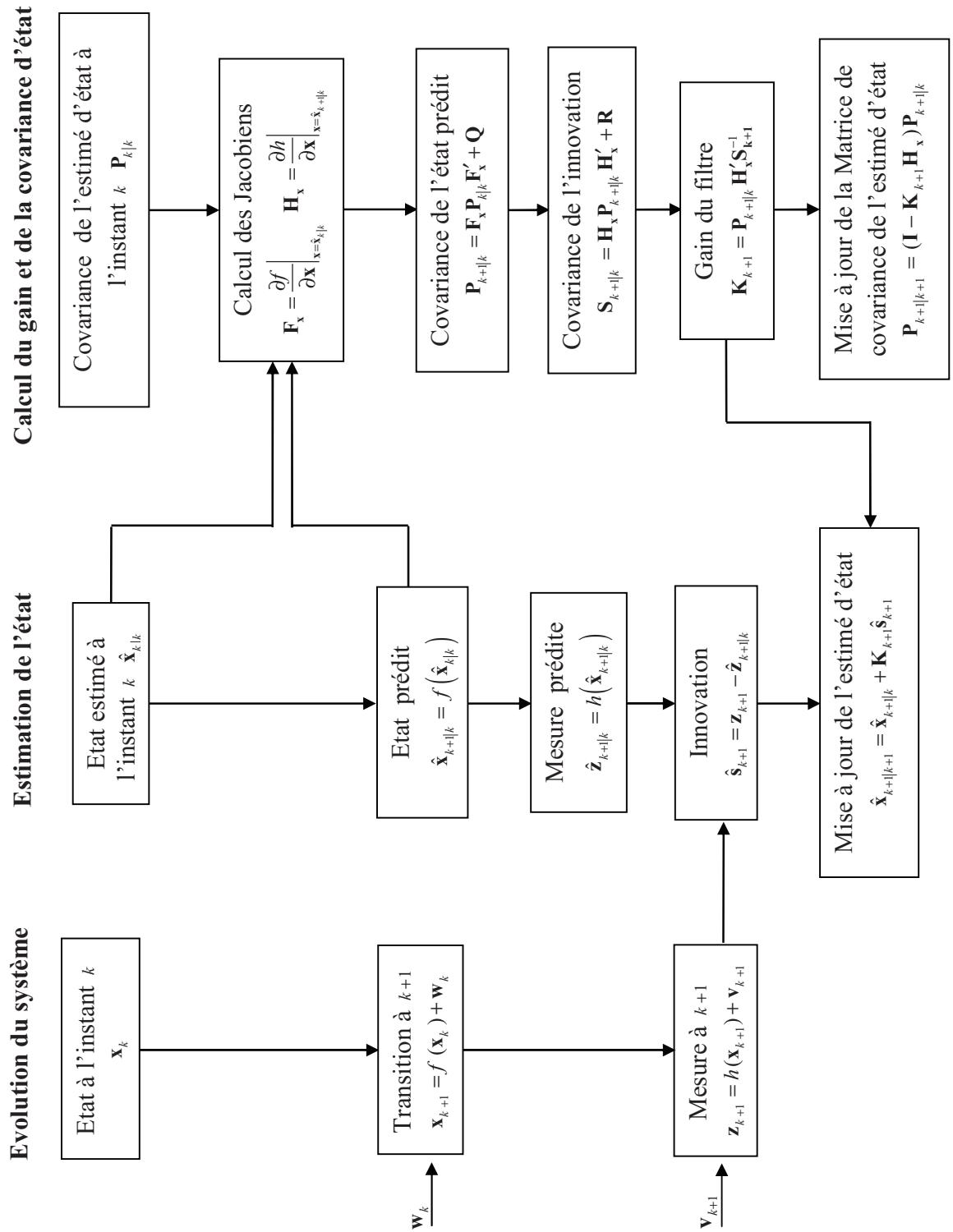


FIGURE 3.1: Un cycle du filtre de Kalman Etendu (EKF)

- + Lorsque la non-linéarité est trop importante, l'EKF devient difficile à mettre au point et donne souvent des résultats peu fiables. Cela est dû aux approximations effectuées qui sont dans ce cas grossières.
- + On ne peut pas faire confiance à la transformation linéarisée que si la propagation de l'erreur est approximée par des fonctions linéaires. La détermination de la validité de cette supposition est difficile car elle dépend à la fois de : la transformation elle-même, de l'estimée courante de l'état et de l'ampleur de la covariance [14].
- + Le calcul du Jacobien peut être une lourde tâche, et ne peut pas ainsi être inséré dans des systèmes à haut niveau d'intégrité [14].

3.4 Le filtre de Kalman Unscented (UKF)

Le filtre de Kalman unscented, '*Unscented Kalman Filter (UKF)*', est classé parmi les estimateurs non linéaires récursifs basés sur la minimisation de l'erreur quadratique moyenne [24]. Contrairement à l'EKF, le filtre UKF n'approxime pas les fonctions non linéaires mais les utilise directement. Cependant, dans ce filtre on approxime la densité de probabilité de la variable d'état, en utilisant un ensemble minimal de points déterministes qui servent à calculer la moyenne et la covariance réelles de la variable aléatoire Gaussienne. Ces mêmes points lorsqu'ils sont propagés, permettent d'approximer la moyenne et la covariance à posteriori jusqu'au moment du deuxième ordre. Le filtre UKF se base sur la transformation unscented décrite dans la section suivante.

3.4.1 Les transformations unscented

La transformation unscented¹ est une transformation qui permet de calculer les statistiques d'une variable aléatoire ayant subie une transformation non linéaire

1. Bien que la traduction littérale du terme *unscented* soit non parfumée, cette appellation reste sans explication et devin à ce jour pour les gens qui l'utilise une énigme! [25]

[25]. Cette transformation est basée sur les deux principes fondamentaux suivants [4] :

- Il est plus simple d'obtenir la transformation non linéaire d'un point, que de procéder à la transformation d'une densité de probabilité.
- Il n'est pas très difficile d'obtenir un ensemble de points dans l'espace d'état dont la densité de probabilité de l'ensemble se rapproche de la vraie densité de probabilité du vecteur d'état.

Dans ce paragraphe, on donne un résumé de la transformée unscented pour une transformation non linéaire. Pour plus de détail voir [4, 14]. Soit un ensemble de points $\{\mathbf{x}\}$ dont la moyenne et la covariance sont données par $\bar{\mathbf{x}}$ et \mathbf{P} , respectivement. La dimension du vecteur \mathbf{x} étant n . Ces points subissent une transformation non linéaire notée $\mathbf{y} = h(\mathbf{x})$. Le calcul de la moyenne et de la covariance de la nouvelle variable aléatoire s'effectue comme suit :

1. On calcul les points sigma $\mathbf{x}^{(i)}$:

$$\mathbf{x}^{(i)} = \bar{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}^{(i)}, \quad i = 1, \dots, 2n \quad (3.16)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(i)} = \left(\sqrt{n\mathbf{P}} \right)'_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.17)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(n+i)} = - \left(\sqrt{n\mathbf{P}} \right)'_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.18)$$

où $\sqrt{\mathbf{A}}$ est la racine carrée de la matrice \mathbf{A} telle que : $(\sqrt{\mathbf{A}})' (\sqrt{\mathbf{A}}) = \mathbf{A}$ et $(\sqrt{\mathbf{A}})_i$ est la ligne i de la matrice $\sqrt{\mathbf{A}}$.

2. On effectue la transformation non linéaire des points sigma :

$$\mathbf{y}^{(i)} = h(\mathbf{x}^{(i)}), \quad i = 1, \dots, 2n \quad (3.19)$$

3. L'approximation de la moyenne et de la covariance de la variable transformée sont données par les relations :

$$\bar{\mathbf{y}}_u = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{y}^{(i)} \quad (3.20)$$

$$\mathbf{P}_u = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} (\mathbf{y}^{(i)} - \mathbf{y}_u) (\mathbf{y}^{(i)} - \mathbf{y}_u)' \quad (3.21)$$

Retenant l'exemple de la [section 1.6.1 du chapitre 1](#), où nous considérons deux variables aléatoires indépendantes r et θ , uniformément distribuées dans 1 ± 0.01 et $\frac{\pi}{2} \pm 0.35 \text{ rad}$, respectivement. La figure 3.2 montre l'effet de la transformation non linéaire $h(\cdot)$ sur la moyenne et la covariance des deux variables aléatoires r et θ . Dans cette figure on montre aussi la moyenne et la covariance estimées en utilisant la transformation unscented et celle estimées en utilisant la linéarisation. Les résultats reportés sur cette figure, montrent clairement que la moyenne et la covariance estimées par cette transformation sont très proches des vraies valeurs, calculées théoriquement pour cet exemple. La déformation de la densité de la variable aléatoire après avoir subie une transformation non linéaire est illustrée à la figure 3.3. On remarque aussi que les points sigma suivent la déformation et s'adaptent au nuage de points après transformation. Pour une démonstration théorique et comparative entre les performances de la linéarisation et les paramètres réels, le lecteur est invité à consulter [26] et [4].

Remarque La transformation unscented présentée dans cette section, n'est en fait que la version de base, d'autres versions seront présentées dans la section 3.4.3. Pour ne pas disperser l'attention du lecteur on a préféré de montrer, dans la section suivante, l'application directe de cette transformation dans l'algorithme UKF.

3.4.2 Algorithme du filtre UKF

L'algorithme du filtre UKF est classé parmi les méthodes pseudo Monte Carlo, car il utilise un ensemble déterministe de points et non pas aléatoire [26]. Cet algorithme intègre l'efficacité de la transformée unscented tout en exploitant l'élégance et la simplicité de la structure du filtre de Kalman linéaire. Pour décrire cet algorithme, supposant qu'on dispose d'un système non linéaire discret modélisé par les équations suivantes :

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k) + \mathbf{w}_k \quad (3.22)$$

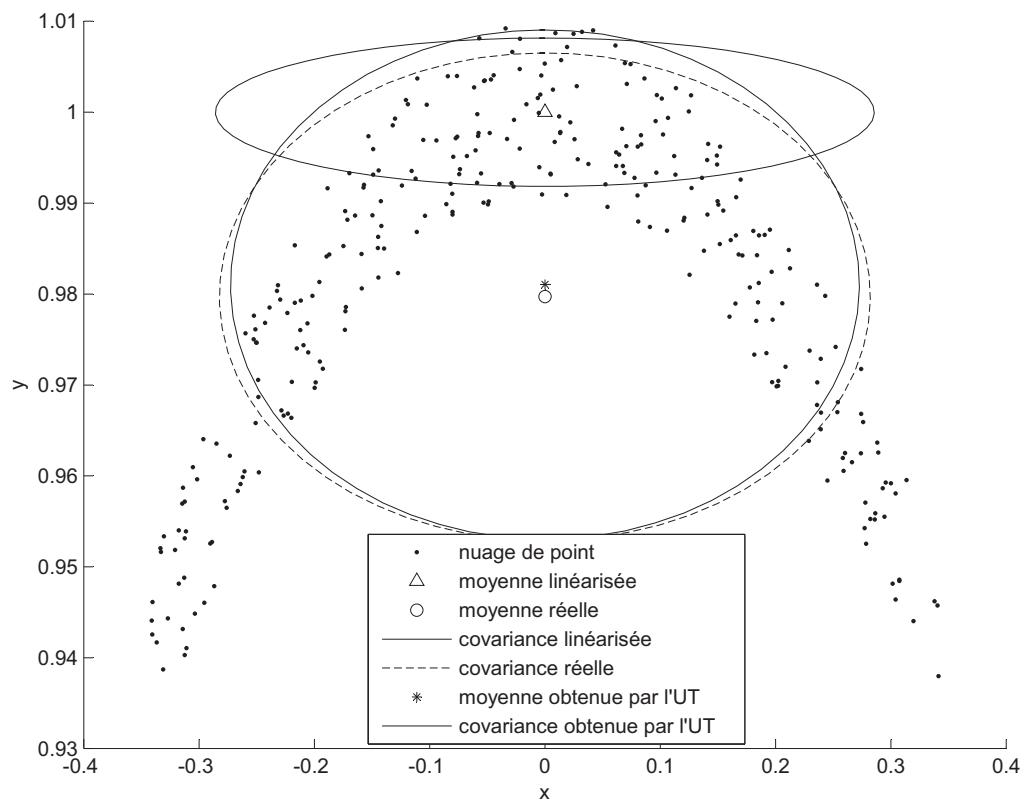


FIGURE 3.2: Estimation de la moyenne et de la covariance par la transformation unscented.

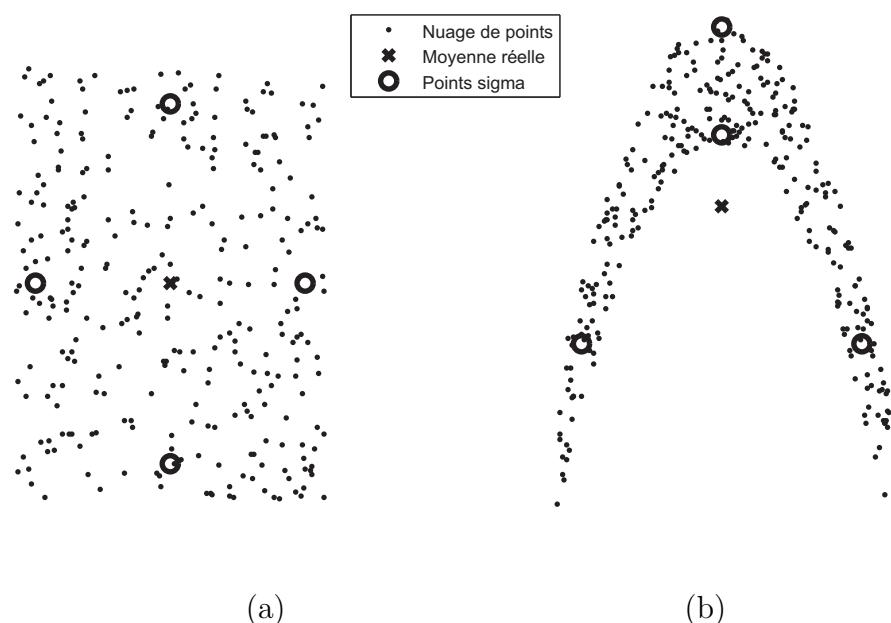


FIGURE 3.3: Comportement des points sigma avant (a) et après (b) transformation.

$$\mathbf{z}_k = h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k \quad (3.23)$$

$$\mathbf{w}_k \sim (0, \mathbf{Q}) \quad (3.24)$$

$$\mathbf{v}_k \sim (0, \mathbf{R}) \quad (3.25)$$

L'UKF est initialisé de la même façon que l'EKF, voir les équations (3.26) et (3.27) :

$$\hat{\mathbf{x}}_{0|0} = E(\mathbf{x}_0) \quad (3.26)$$

$$\mathbf{P}_{0|0} = E \left[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_{0|0}) (\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_{0|0})' \right] \quad (3.27)$$

Ce filtre comprend aussi les deux étapes classiques, à savoir l'étape de prédiction et l'étape de l'estimation ou mise à jour :

a. Prédiction de l'état La propagation de l'estimée du vecteur d'état ainsi que sa covariance se déroule comme suit :

1. On choisit les points sigma $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(i)}$ comme dans l'équation (3.16), en considérant que la meilleure moyenne et la meilleure covariance sont, respectivement, $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ et $\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{x}, k|k}$:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(i)} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k} + \tilde{\mathbf{x}}^{(i)}, \quad i = 1, \dots, 2n \quad (3.28)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(i)} = (\sqrt{n\mathbf{P}_{\mathbf{x}, k|k}})'_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.29)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(n+i)} = -(\sqrt{n\mathbf{P}_{\mathbf{x}, k|k}})'_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.30)$$

2. Les points sigma obtenus sont ensuite propagés par l'équation du système $f(\cdot)$ pour obtenir leurs prédictifs respectifs :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^{(i)} = f(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(i)}) \quad (3.31)$$

3. La moyenne des ces derniers points donne l'estimée à priori de l'état à l'instant $k + 1$:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^{(i)} \quad (3.32)$$

4. La covariance de l'erreur apriori correspondante est alors :

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x},k+1|k} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \left[(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) (\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k})' \right] + \mathbf{Q} \quad (3.33)$$

b. Prédiction de la mesure Après la prédiction de l'état on passe à la prédiction de la mesure :

1. on choisit de nouveaux points sigma $\mathbf{x}_{k+1|k}^{(i)}$, en considérant que la meilleure moyenne et la meilleure covariance sont, respectivement, $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$ et $\mathbf{P}_{\mathbf{x},k+1|k}$ données par (3.32) et (3.33)

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^{(i)} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \tilde{\mathbf{x}}^{(i)}, \quad i = 1, \dots, 2n \quad (3.34)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(i)} = (\sqrt{n\mathbf{P}_{\mathbf{x},k+1|k}})'_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.35)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(n+i)} = -(\sqrt{n\mathbf{P}_{\mathbf{x},k+1|k}})'_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.36)$$

Cette étape peut être omise, c'est-à-dire qu'au lieu de générer de nouveaux points on peut se contenter des points sigma (3.31), obtenus lors de la prédiction de l'état. Cela va réduire un peu la complexité de calcul, mais en revanche on perdra un peu en performances.

2. Utiliser la fonction non linéaire de mesure $h(\cdot)$ afin d'obtenir les mesures prédites $\hat{\mathbf{z}}_{k+1|k}^{(i)}$ correspondant aux points sigma $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^{(i)}$:

$$\hat{\mathbf{z}}_{k+1|k}^{(i)} = h(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^{(i)}), \quad i = 1, \dots, 2n \quad (3.37)$$

3. La mesure prédite globale sera la moyenne de toutes ces mesures :

$$\hat{\mathbf{z}}_{k+1|k} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k}^{(i)} \quad (3.38)$$

4. La matrice de covariance correspondant à la mesure prédictive globale est donnée par :

$$\mathbf{P}_{\mathbf{z},k+1|k} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \left[\left(\hat{\mathbf{z}}_{k+1|k}^{(i)} - \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k} \right) \left(\hat{\mathbf{z}}_{k+1|k}^{(i)} - \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k} \right)' \right] + \mathbf{R} \quad (3.39)$$

c. Etape d'estimation

1. Estimer la matrice d'inter-covariance entre $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$ et $\hat{\mathbf{z}}_{k+1|k}$ par :

$$\mathbf{P}_{\mathbf{xz},k+1|k} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \left(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} \right) \left(\hat{\mathbf{z}}_{k+1|k}^{(i)} - \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k} \right)' \quad (3.40)$$

2. L'estimée de l'état à l'instant $k + 1$ est donnée par les équations classiques de Kalman [3, 26] :

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{\mathbf{xz},k+1|k} \mathbf{P}_{\mathbf{z},k+1|k}^{-1} \quad (3.41)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{z}_{k+1} - \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k}) \quad (3.42)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x},k+1|k+1} = \mathbf{P}_{\mathbf{x},k+1|k} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{P}_{\mathbf{z},k+1|k} \mathbf{K}'_{k+1} \quad (3.43)$$

Parmi les avantages de cet algorithme en comparaison avec la linéarisation, on cite :

- Il n'est pas nécessaire de calculer le Jacobien ou de procéder à une quelconque approximation des deux fonctions $f(\cdot)$ ou $h(\cdot)$.
- L'étape de prédiction correspond à des opérations de calcul algébrique linéaires standards.
- Certaines contraintes peuvent être ajoutées en correspondance avec les points sigma. Cela permet de développer d'autres versions de ce filtre.

On note en dernier lieu que : le nombre d'opérations augmente avec la dimension des vecteurs comme pour le cas de la linéarisation.

3.4.3 Variantes de la transformation unscented

Il est clair que la transformée unscented est plus précise en comparaison avec la linéarisation, en plus, cette transformée est plus flexible et offre la possibilité d'exploiter des informations autres que la moyenne et la covariance [4, 14]. Dans cette section on montre qu'il est possible de choisir un ensemble de points qui peut exploiter des informations concernant la distribution associée à l'estimée. A la différence de l'ancienne version, les nouvelles versions propagent $2n + 1$ points en attribuant à chacun d'eux un poids, calculé de façon à adapter la moyenne et la covariance calculées par l'UT afin qu'elles coïncident avec les vraies valeurs. On ne présente ici que les versions les plus connues. Pour plus d'informations concernant d'autres versions voir [4, 27, 28].

Première version de la transformation unscented Considérons un ensemble de points ayant subis une transformation non linéaire suivant l'équation (3.19). Si on ajoute un nouveau point qui est égal à la moyenne, alors la moyenne globale n'est pas affectée, cependant la covariance change [14]. Pour garder la même covariance, les points doivent être mis à l'échelle, on obtient ainsi un nouvel ensemble de points sigma disposant des mêmes moments d'ordre un et deux mais dont les moments d'ordre supérieur ne sont pas les mêmes. Par convention on considère que le point moyen est pondéré par le poids $W^{(0)}$. L'insertion de ce point et l'ajustement des poids conduit au résultat [14] :

$$\mathbf{x}^{(0)} = \bar{\mathbf{x}} \quad (3.44)$$

$$\mathbf{x}^{(i)} = \bar{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}^{(i)}, \quad i = 1, \dots, 2n \quad (3.45)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(i)} = \left(\sqrt{\frac{n}{1 - W^{(0)}}} \mathbf{P} \right)'_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.46)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(n+i)} = - \left(\sqrt{\frac{n}{1 - W^{(0)}}} \mathbf{P} \right)'_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.47)$$

$$W^{(i)} = \frac{1 - W^{(0)}}{2n}, \quad i = 1, \dots, 2n \quad (3.48)$$

La valeur du poids $W^{(0)}$ correspondant au point central contrôle la façon de positionner les autres points, si $W^{(0)} > 0$ les points ont tendance à s'éloigner de l'origine, au contraire lorsque le poids² $W^{(0)} < 0$ les points se rapprochent de l'origine. On s'aperçoit sans difficulté que lorsque ce poids est nul, on revient au cas de l'ensemble présenté dans la section 3.4.1 du présent chapitre.

Deuxième version de la transformation unscented Cette deuxième version est connue sous l'appellation, '*General Unscented Transformations* (GUT)', la disposition des points est contrôlée par la constante κ [29]. Cette constante dépend de la nature de la variable aléatoire en question et n'a aucun effet ni sur la moyenne ni sur la covariance associée, elle est utilisée uniquement pour affiner la précision des moments d'ordre supérieur [26] :

$$\mathbf{x}^{(0)} = \bar{\mathbf{x}} \quad (3.49)$$

$$W^{(0)} = \frac{\kappa}{n + \kappa} \quad (3.50)$$

$$\mathbf{x}^{(i)} = \bar{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}^{(i)}, \quad i = 1, \dots, 2n \quad (3.51)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(i)} = \left(\sqrt{(n + \kappa) \mathbf{P}} \right)'_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.52)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(i)} = - \left(\sqrt{(n + \kappa) \mathbf{P}} \right)'_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.53)$$

$$W^{(i)} = \frac{1}{2(n + \kappa)}, \quad i = 1, \dots, 2n \quad (3.54)$$

Autres versions de la transformation unscented Dans la littérature d'autres versions ont été proposées afin d'affiner davantage l'approximation des moments d'ordre supérieur. D'autres variantes cherchent à remédier à certaines erreurs dues aux calculs telle que la non négativité des matrices de covariance. Pour résoudre ce problème [27] propose une mise à l'échelle de la transformation unscented, '*Scaled Unscented Transformation* (SUT)'. Le problème de réduction de la complexité ainsi

2. Prendre un poids négatif ne présente aucun problème car l'UT n'est pas une densité de probabilité et n'a donc pas la contrainte de non négativité.

que la stabilité numérique pour certaines applications sont évoquées dans certains travaux comme celui de Merwe et Wan [28].

3.4.4 Le filtre de Kalman Cubature (CKF)

Parmi les méthodes pseudo Monte Carlo permettant de déterminer les statistiques d'ordre 1 et 2 d'une variable aléatoire après une transformation non linéaire, on trouve la transformation cubature. L'idée de base est d'approximer l'intégrale multidimensionnelle permettant de calculer l'espérance mathématique d'une variable aléatoire en utilisant les sigmas points cubatures [30]. Le filtre de Kalman Cubature, '*Cubature Kalman Filter (CKF)*', a été proposé en 2009 [31] et s'appuie sur une base mathématique très solide ; cependant d'autres travaux qui ont suivi son apparition, ont montré que ce dernier n'est qu'un cas particulier du filtre UKF [32]. Pour cette raison ce filtre ne sera pas détaillé dans le présent mémoire. La dérivation théorique complète du CKF peut être trouvée dans la référence [31].

3.5 Le filtre de Kalman Quadrature (QKF)

Lorsqu'on veut calculer l'intégrale d'une fonction intégrable après qu'elle soit pondérée par une autre fonction positive, il est possible d'utiliser la technique d'intégration de Gauss-Hermite [33]. [34] fut le premier travail où les auteurs ont proposé l'utilisation de cette intégration numérique dans un problème de filtrage non linéaire. Le filtre obtenu fut appelé le filtre Gauss-Hermite, '*Gauss-Hermite Filter (GHF)*'. On se basant sur ce filtre, Arasaratnam et al. [35] ont développé une version plus simple et plus pratique qu'ils ont baptisée le filtre de Kalman Quadrature, '*Quadrature Kalman Filter (QKF)*'. Ce filtre se base sur le calcul de l'estimée d'une intégrale récursive de Bayes sous les hypothèses de la Gaussien-neté et de la régression linéaire statistique, '*Statistical Linear Regression (SLR)*'. Comme le filtre UKF décrit précédemment, le filtre QKF propage un ensemble

de points appelés les points Quadratures de Gauss-Hermite, '*Gauss-Hermite Quadrature points*'. Le nombre de points est choisi de façon à obtenir une approximation acceptable. Désignons par $\{\xi_i\}_{i=1}^m$ l'ensemble des points quadratures et par $\{W^{(i)}\}_{i=1}^m$, l'ensemble des poids qui leurs sont associés. L'algorithme du filtre QKF est comme suit :

3.5.1 Etape de prédiction

Dans cette étape sont calculées la moyenne $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$ et la matrice de covariance correspondante $\mathbf{P}_{\mathbf{x}, k+1|k}$.

1. On suppose qu'à l'instant $k+1$ on dispose de la densité a posteriori $N(\mathbf{x}_{1:k}, \mathbf{z}_{1:k}) = p(\hat{\mathbf{x}}_{k|k} | \mathbf{P}_{\mathbf{x}, k|k})$. On factorise alors la matrice $\mathbf{P}_{\mathbf{x}, k|k}$:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}, k|k} = \sqrt{\mathbf{P}_{\mathbf{x}, k|k}} (\sqrt{\mathbf{P}_{\mathbf{x}, k|k}})' \quad (3.55)$$

2. Evaluer les points quadratures par :

$$\mathbf{X}_{i,k|k} = \sqrt{\mathbf{P}_{\mathbf{x}, k|k}} \xi_i + \hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.56)$$

3. Propager les points quadratures par l'équation du système :

$$\mathbf{X}_{i,k+1|k} = f(\mathbf{X}_{i,k|k}), \quad i = 1, \dots, m \quad (3.57)$$

4. Calculer l'état prédit $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$ et la matrice de covariance correspondante

$\mathbf{P}_{\mathbf{x}, k+1|k}$:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \sum_{i=1}^m W^{(i)} \mathbf{X}_{i,k+1|k} \quad (3.58)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}, k+1|k} = \sum_{l=1}^m (W^{(l)} \mathbf{X}_{i,k+1|k} \mathbf{X}'_{i,k+1|k}) - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} \hat{\mathbf{x}}'_{k+1|k} + \mathbf{Q} \quad (3.59)$$

3.5.2 Etape de mise à jour

1. Factoriser la matrice $\mathbf{P}_{\mathbf{x}, k+1|k}$:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}, k+1|k} = \sqrt{\mathbf{P}_{\mathbf{x}, k+1|k}} (\sqrt{\mathbf{P}_{\mathbf{x}, k+1|k}})' \quad (3.60)$$

2. Calculer les nouveaux points quadratures par :

$$\mathbf{X}_{i,k+1|k} = \sqrt{\mathbf{P}_{\mathbf{x}, k+1|k}} \xi_i + \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.61)$$

3. Calculer les mesures prédictes issues de ces points quadratures :

$$\mathbf{Z}_{i,k+1|k} = h(\mathbf{X}_{i,k+1|k}), \quad i = 1, \dots, m \quad (3.62)$$

4. Calculer la mesure prédictive globale et sa matrice de covariance :

$$\hat{\mathbf{z}}_{k+1|k} = \sum_{i=1}^m W^{(i)} \mathbf{Z}_{i,k+1|k} \quad (3.63)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{zz}, k+1|k} = \sum_{i=1}^m (W^{(i)} \mathbf{Z}_{i,k+1|k} \mathbf{Z}'_{i,k+1|k}) - \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k} \hat{\mathbf{z}}'_{k+1|k} + \mathbf{R} \quad (3.64)$$

5. Evaluer la matrice de covariance croisée :

$$\mathbf{P}_{\mathbf{xz}, k+1|k} = \sum_{i=1}^m (W^{(i)} \mathbf{X}_{i,k+1|k} \mathbf{Z}'_{i,k+1|k}) - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} \hat{\mathbf{z}}'_{k+1|k} \quad (3.65)$$

6. Utiliser la formule classique pour le calcul du gain de Kalman :

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{\mathbf{xz}, k+1|k} \mathbf{P}_{\mathbf{zz}, k+1|k}^{-1} \quad (3.66)$$

7. Déterminer l'état estimé et sa matrice de covariance

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{z}_{k+1} - \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k}) \quad (3.67)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}, k+1|k+1} = \mathbf{P}_{\mathbf{x}, k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{P}_{\mathbf{zz}, k+1|k} \mathbf{K}'_{k+1} \quad (3.68)$$

A la fin de cette étape on dispose de la densité a posteriori $p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{z}_{1:k+1}) = N(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}, \mathbf{P}_{\mathbf{x}, k+1|k+1})$ qui sera réinjectée dans l'étape de prédiction.

3.6 Simulations

3.6.1 Evaluation des performances

Dans ces simulations, nous allons comparer les trois filtres, EKF, UKF et QKF appliqués à la poursuite d'une cible, à partir de mesures bruitées exprimées dans le repère polaire. La cible se trouve initialement à une portée de $54km$ avec un azimut de 68.2° . Elle se déplace vers l'origine du repère à une vitesse constante de $300m/s$. La trajectoire de la cible est montrée à la figure 3.4. La durée du scan est $T = 0.1s$. Le bruit de système est pris dans tous les filtres égale à $\sigma_w = 0.001m/s^2$.

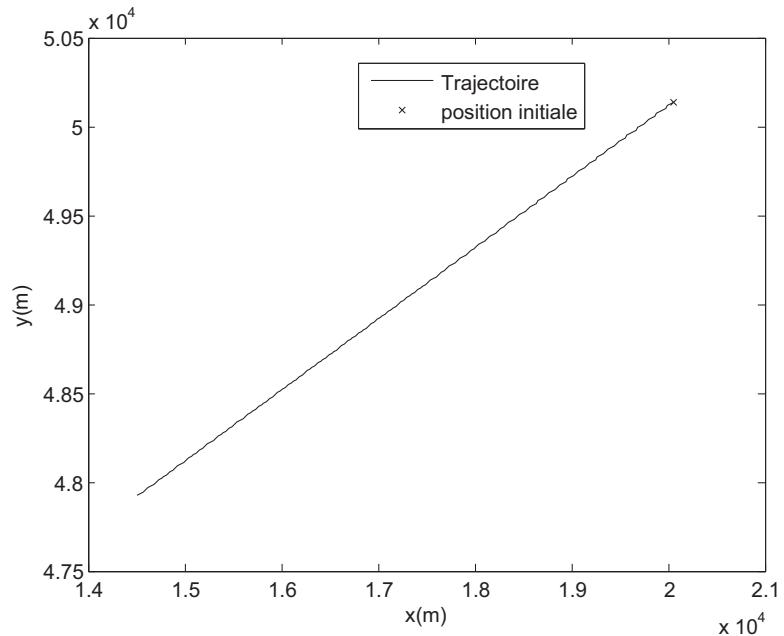


FIGURE 3.4: Trajectoire de la cible

D'après nos simulations, l'effet de l'erreur sur la portée n'influence pas beaucoup les performances des estimateurs. Pour cette raison dans les simulations qui suivent on ne présente que celles où l'on fait varier la variance de l'azimut.

Pour les petites variances du bruit de l'azimut ($\sigma_\theta < 1.5^\circ$), les trois filtres ont presque les mêmes performances en termes de la RCEQM et ANIS, voir figure 3.5 (a),(b) et (d). Pour le ANEES (c), il apparaît que l'EKF présente une légère dégradation, cela implique que la matrice de covariance calculée par ce filtre ne correspond pas parfaitement à la matrice de covariance réelle, contrairement aux deux autres filtres où l'ANEES s'approche de l'unité. Lorsque le niveau du bruit devient plus important ($\sigma_\theta = 3^\circ$), voir figure 3.6, l'EKF présente des performances moins bonnes que celles de l'UKF et du QKF. Pour la figure 3.6 (c) on ne présente pas le ANEES de l'EKF car il a une très grande valeur. Comparé au QKF, l'UKF apparaît plus fiable car la RCEQM correspondante est plus petit, (a) et (b) ; aussi ce filtre est plus consistant, (c) et (d).

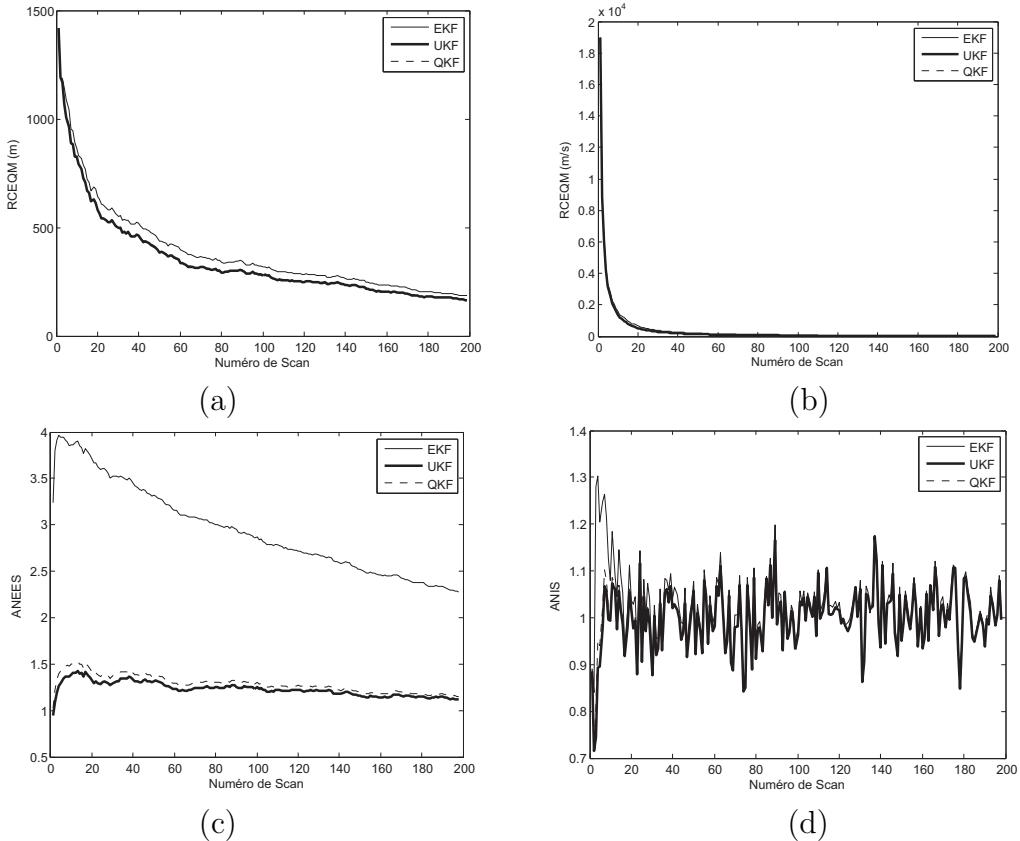


FIGURE 3.5: Evaluations des performances des trois estimateurs en termes de (a) RCEQM position, (b) RCEQM vitesse, (c) ANEES et (d) ANIS, pour $\sigma_r = 50m$ et $\sigma_\theta = 1.5^\circ$.

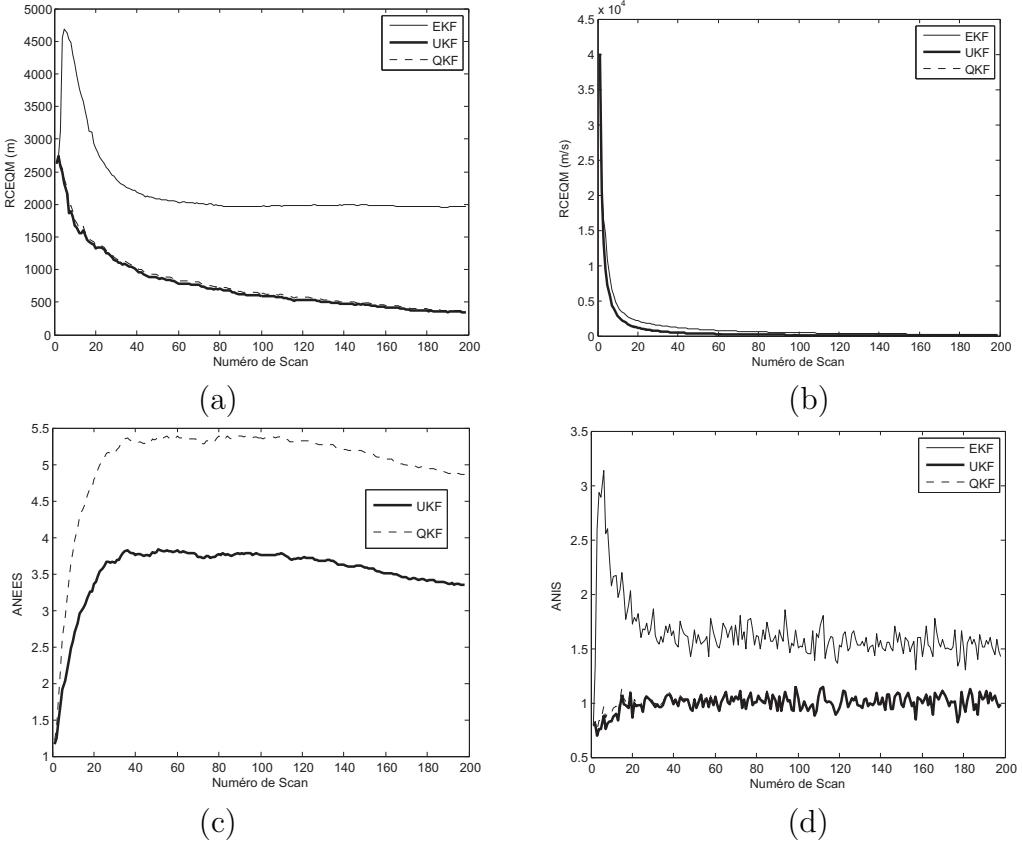


FIGURE 3.6: Evaluations des performances des trois estimateurs en termes de (a) RCEQM position, (b) RCEQM vitesse, (c) ANEES et (d) ANIS, pour $\sigma_r = 50m$ et $\sigma_\theta = 3^\circ$.

3.6.2 Effet des paramètres en régime statique

Dans ces simulations on considère la RCEQM du dernier scan uniquement, en fonction de trois paramètres : l'écart type de l'azimut σ_θ , le temps de mise à jour T et l'écart type du bruit de système σ_w . Ce choix est justifié par la convergence des trois filtres vers un régime statique. Les figures 3.7, 3.8 et 3.9 montrent que la RCEQM de l'EKF a une tendance à augmenter plus rapidement comparativement aux deux autres filtres.

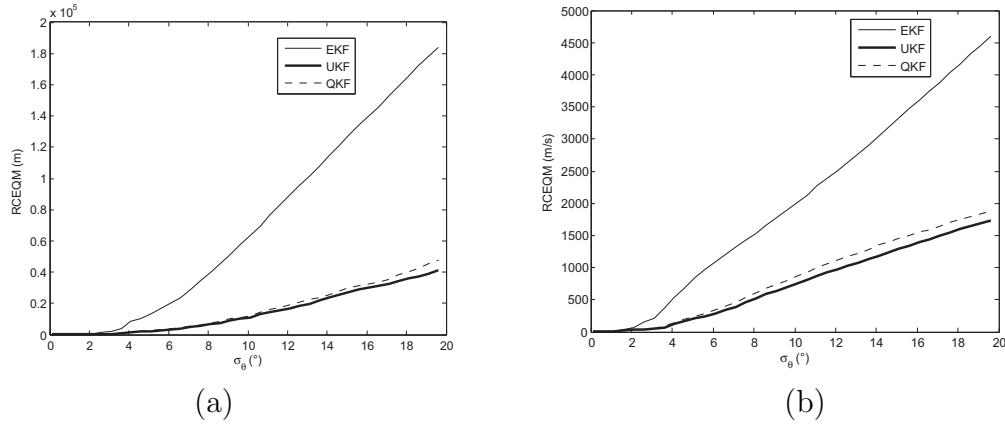


FIGURE 3.7: RCEQM en position (a) et en vitesse (b) du dernier scan en fonction de l'écart type en azimut σ_θ .

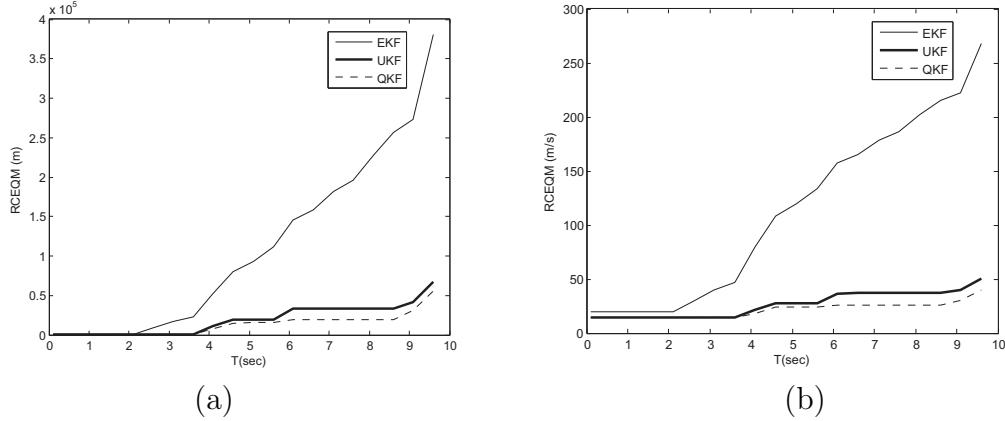


FIGURE 3.8: RCEQM en position (a) et en vitesse (b) du dernier scan en fonction du temps de mise à jour T .

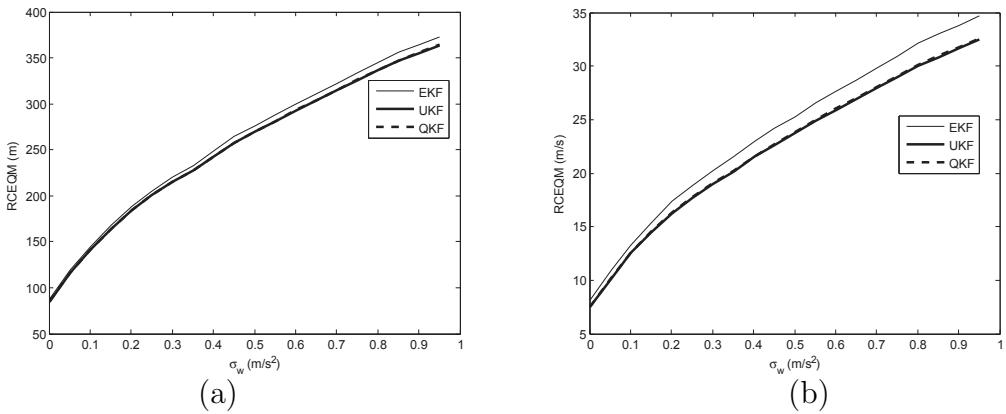


FIGURE 3.9: RCEQM en position (a) et en vitesse (b) du dernier scan en fonction de l'écart type du bruit de système σ_w .

3.6.3 Robustesse des filtres vis-à-vis de l'erreur croisée

En dernier lieu on va étudier l'effet de l'erreur croisée, '*Cross Range Error (CRE)*', définie dans la [section 1.6.2 du premier chapitre](#). Pour ce faire on prend le point initial du scénario précédent et on le fait translater le long d'une droite, on obtient ainsi plusieurs trajectoires. Les erreurs de mesure correspondant aux trajectoires qui sont proches de l'origine sont plus petites en comparaison avec celles correspondant aux trajectoires qui en sont éloignés. Dans la présente simulation on a utilisé 56 trajectoires dont les six premières plus proches de l'origine sont représentées à la figure 3.10.

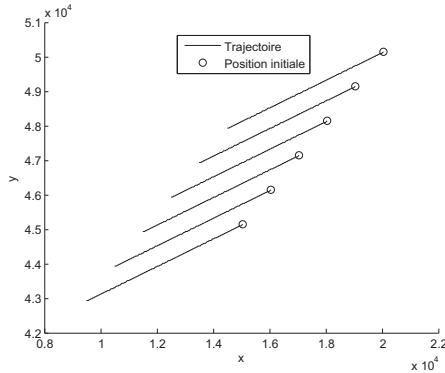


FIGURE 3.10: Présentation des six scénarios les plus proches de l'origine.

La figure 3.11 (a) montre la dégradation de la RCEQM en position suivant la précision du capteur en fonction de l'erreur croisée. Ces résultats sont obtenus par le calcul de la RCEQM du dernier scan de chaque trajectoire. Cette dégradation est due à la dilution géométrique de la précision, '*Geometric Dilution Of Precision (GDOP)*', illustrée sur figure 3.11 (b) ; elle est évaluée par l'équation (3.69) [3]. Une grande valeur du GDOP indique une mauvaise géométrie. On note que l'estimation est d'autant plus précise que cette quantité est petite.

$$GDOP = \frac{RCEQM \text{ position}}{r \sin(\sigma_\theta)} \quad (3.69)$$

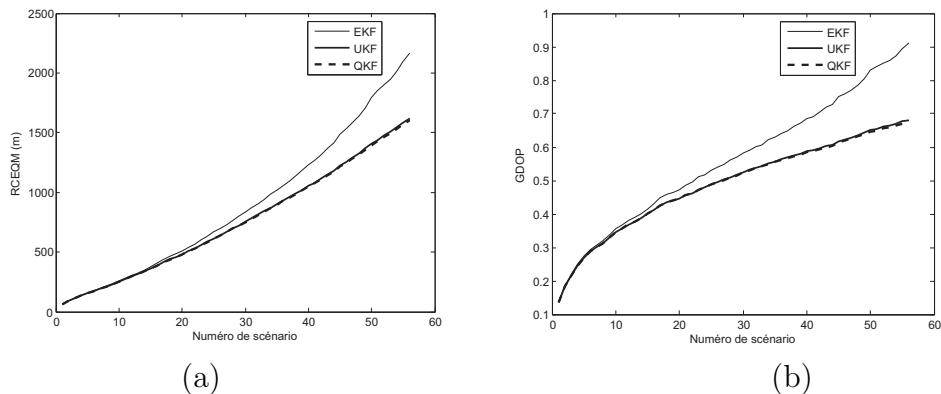


FIGURE 3.11: La RCEQM en position (a) et le GDOP (b) pour le dernier scan des 56 trajectoires.

3.7 Le filtre de Kalman à mesure convertie (CMKF)

Plusieurs travaux ont été réalisés afin d'exploiter les mesures, en coordonnées polaires, en conjonction avec le filtre de Kalman linéaire. Ceci requiert la conversion de ces mesures en coordonées cartésiennes. Cependant, la précision de la mesure convertie dépend de la géométrie (portée et azimut) ainsi que de la précision de la mesure originale, et en particulier celle de l'azimut (voir paragraphe 1.6 du chapitre 1 du présent mémoire). La première approche est basée sur le développement en séries de Taylor de la mesure convertie autour de l'estimée de l'état. Les limites de validité de cette technique sont $\sigma_\theta \ll 1^\circ$ et $\sigma_r \ll r_k$ [12] ; ainsi elle est conçue uniquement pour de faibles valeurs de l'erreur croisée, '*Cross-Range Error (CRE)*', définie par le produit de la portée et l'erreur sur l'azimut.

En 1993, le travail de Lerro et Bar-Shalom [9] fut le premier qui a invoqué la notion du biais de la mesure convertie, en se basant sur les statistiques d'ordre un et deux de l'erreur engendrée par la mesure originale. Dans ce travail les auteurs montrent que le biais est aditif et que la moyenne de l'erreur suit la CRE, ils stipulent aussi que pour un certain niveau du CRE, le filtrage requiert l'élimination de ce biais ; enfin ils développent le filtre de Kalman à mesure convertie débiaisée, '*Debiased Converted Measurement Kalman Filter (DCMKF)*'. Longbin et al. ont évoqué la nature multiplicative du biais et ont introduit ainsi un facteur de compensation [36] ; la mesure obtenue est nominée cette fois-ci mesure convertie non-biaisée, '*Unbiased Converted Measurement (UCM)*'. Ce travail fut

complété dans [10] où le filtre de Kalman à mesure convertie non-biaisée a été introduit, '*Unbiased Converted Measurement Kalman Filter* (UCMKF)'. Duan et al. [11] ont soulevé le problème d'incompatibilité dont souffre le UCMKF, et ont proposé comme alternative le filtre '*Modified Unbiased Converted Measurement Kalman Filter* (MUCMKF)'. Il a été démontré dans [37] que la RCEQM du filtre MUCMKF est toujours inférieure à celle du filtre UCMKF. En se basant sur ces deux conversions, plusieurs travaux sont apparus ; parmi les plus importants on cite : la combinaison du découplage des coordonnées et la mesure convertie [38], la dé-corrélation entre le bruit de la mesure convertie et la matrice de covariance de mesure [37]. Mei et al. [39], ont conçu le filtre ICMKF qui utilise la mesure convertie dans le filtre de Kalman itéré, '*Iterated Kalman Filter* (IKF)'.

3.7.1 Analyse de l'erreur de mesure (notion du biais aditif)

La mesure fournie par le capteur à l'instant k est donnée par la relation (1.35), recopiée ici :

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} r_m \\ \theta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r + \tilde{r} \\ \theta + \tilde{\theta} \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

Le passage du repère polaire au repère cartésien donne :

$$\begin{bmatrix} x_m \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_m \cos(\theta_m) \\ r_m \sin(\theta_m) \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

Supposons que les vraies valeurs dans le repère cartésien sont (x, y) , et définissons les erreurs correspondantes par :

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_m \\ \tilde{y}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_m - x \\ y_m - y \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

En remplaçant (3.70) et (3.71) dans (3.72), on trouve :

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_m \\ \tilde{y}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \theta.(\cos \tilde{\theta} - 1) - \tilde{r} \sin \theta. \sin \tilde{\theta} - r. \sin \theta. \sin \tilde{\theta} + \tilde{r}. \cos \theta. \cos \tilde{\theta} \\ r \sin \theta.(\cos \tilde{\theta} - 1) + \tilde{r} \cos \theta. \sin \tilde{\theta} + r. \cos \theta. \sin \tilde{\theta} + \tilde{r}. \sin \theta. \cos \tilde{\theta} \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

Ces deux erreurs ne sont pas indépendantes, et sont fonction des vraies valeurs r et θ ainsi que de leurs erreurs respectives \tilde{r} et $\tilde{\theta}$. En considérant uniquement le cas particulier où \tilde{r} et $\tilde{\theta}$ sont des erreurs indépendantes, Gaussiennes et centrées, la moyenne et la variance réelles de (3.72) sont données par (voir annexe A) :

$$\mu_t(r, \theta) \triangleq \begin{bmatrix} E[\tilde{x}_m/r, \theta] \\ E[\tilde{y}_m/r, \theta] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(e^{-\sigma_\theta^2/2} - 1) \cos \theta \\ r(e^{-\sigma_\theta^2/2} - 1) \sin \theta \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

D'après les équations (3.73) et (3.74), lorsque l'erreur croisée, 'Cross Range Error (CRE)', définie par le produit $r\tilde{\theta}$, devient significative, c'est à dire pour une longue portée et/ou une grande erreur sur l'azimut, la mesure convertie est sujette à un large biais. A son tour la matrice de covariance réelle de la mesure convertie est donnée par :

$$\mathbf{R}_{t,d} \triangleq \begin{bmatrix} E[\tilde{x}_m^2/r, \theta] & E[\tilde{x}_m \tilde{y}_m/r, \theta] \\ E[\tilde{y}_m \tilde{x}_m/r, \theta] & E[\tilde{y}_m^2/r, \theta] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{t,d}^x & R_{t,d}^{xy} \\ R_{t,d}^{yx} & R_{t,d}^y \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

avec :

$$R_{t,d}^x = r^2 e^{-\sigma_\theta^2} [\sin^2 \theta [\cosh(\sigma_\theta^2) - 1] + \cos^2 \theta \sinh(\sigma_\theta^2)] + \sigma_r^2 e^{-\sigma_\theta^2} [\sin^2 \theta \cosh(\sigma_\theta^2) + \cos^2 \theta \sinh(\sigma_\theta^2)]$$

$$R_{t,d}^y = r^2 e^{-\sigma_\theta^2} [\cos^2 \theta [\cosh(\sigma_\theta^2) - 1] + \sin^2 \theta \sinh(\sigma_\theta^2)] + \sigma_r^2 e^{-\sigma_\theta^2} [\cos^2 \theta \cosh(\sigma_\theta^2) + \sin^2 \theta \sinh(\sigma_\theta^2)]$$

$$R_{t,d}^{xy} = R_{t,d}^{yx} = \text{cov}(\tilde{x}, \tilde{y}/r, \theta) = \cos \theta \sin \theta e^{-2\sigma_\theta^2} [\sigma_r^2 + r^2 (1 - e^{\sigma_\theta^2})]$$

Dans la pratique, on ne dispose pas des vraies valeurs de r et θ , par conséquent on ne peut pas utiliser les expressions du biais (3.74) et de la matrice de covariance (3.75). La contribution du travail de Bar-Shalom et al. [16] était d'exploiter ces deux équations en calculant leurs moyennes conditionnellement aux positions

mesurées r_m et θ_m :

$$E [\mu_{t,d} (r, \theta) / r_m, \theta_m] = \mu_d \quad (3.76)$$

$$E [\mathbf{R}_{t,d} (r, \theta) / r_m, \theta_m] = \mathbf{R}_d \quad (3.77)$$

Le développement des expressions (3.76) et (3.77) en prenant en compte l'équation (3.72) donne le biais μ_d , et la matrice de covariance \mathbf{R}_d :

$$\mu_d = \begin{bmatrix} (e^{-\sigma_\theta^2} - e^{-\sigma_\theta^2/2}) r_m \cos(\theta_m) \\ (e^{-\sigma_\theta^2} - e^{-\sigma_\theta^2/2}) r_m \sin(\theta_m) \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

$$\mathbf{R}_d = \begin{bmatrix} R_d^x & R_d^{xy} \\ R_d^{yx} & R_d^y \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

avec :

$$R_d^x = r_m^2 e^{-2\sigma_\theta^2} [\cos^2(\theta_m) [\cosh(2\sigma_\theta^2) - \cosh(\sigma_\theta^2)] + \sin^2(\theta_m) [\sinh(2\sigma_\theta^2) - \sinh(\sigma_\theta^2)]] + \sigma_r^2 e^{-2\sigma_\theta^2} [\cos^2(\theta_m) [2 \cosh(2\sigma_\theta^2) - \cosh(\sigma_\theta^2)] + \sin^2(\theta_m) [2 \sinh(2\sigma_\theta^2) - \sinh(\sigma_\theta^2)]]$$

$$R_d^y = r_m^2 e^{-2\sigma_\theta^2} [\sin^2(\theta_m) [\cosh(2\sigma_\theta^2) - \cosh(\sigma_\theta^2)] + \cos^2(\theta_m) [\sinh(2\sigma_\theta^2) - \sinh(\sigma_\theta^2)]] + \sigma_r^2 e^{-2\sigma_\theta^2} [\sin^2(\theta_m) [2 \cosh(2\sigma_\theta^2) - \cosh(\sigma_\theta^2)] + \cos^2(\theta_m) [2 \sinh(2\sigma_\theta^2) - \sinh(\sigma_\theta^2)]]$$

$$R_d^{xy} = R_d^{yx} = \sin(\theta_m) \cos(\theta_m) e^{-4\sigma_\theta^2} [\sigma_r^2 + (r_m^2 + \sigma_r^2) (1 - e^{\sigma_\theta^2})]$$

Il est à remarquer que la covariance moyenne (3.79) est plus grande que la covariance (3.75) conditionnellement aux positions réelles ; cela tient compte des erreurs supplémentaires dues à son évaluation à la position mesurée et cela s'avère très important pour l'étude de la consistance. Le biais (3.78) et l'augmentation dans la variance (3.79) ne sont significatifs que dans le cas d'une erreur croisée importante (c'est-à-dire, longue portée et/ou grande erreur azimutale). En conclusion de cette analyse, la nouvelle mesure qui sera utilisée est qualifiée de '*dé-biaisée*' et donnée

par :

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_m^d &= \begin{bmatrix} x_m^d \\ y_m^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_m \cos(\theta_m) \\ r_m \sin(\theta_m) \end{bmatrix} - \mu_d \\ &= \begin{bmatrix} (1 - e^{-\sigma_\theta^2} + e^{-\sigma_\theta^2/2})r_m \cos(\theta_m) \\ (1 - e^{-\sigma_\theta^2} + e^{-\sigma_\theta^2/2})r_m \sin(\theta_m) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.80)$$

Il est démontré que le filtre CMKF est consistant, c'est-à-dire que l'erreur d'estimation est compatible avec la matrice de covariance calculée [9].

3.7.2 Analyse de l'erreur de mesure (notion du biais multiplicatif)

Sous l'hypothèse que la densité de probabilité du bruit de mesure sur l'azimut est symétrique, la moyenne de l'équation (3.71) donne :

$$\begin{bmatrix} E[x_m] \\ E[y_m] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E[r_m \cos(\theta_m)] \\ E[r_m \sin(\theta_m)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos(\theta) \lambda_\theta \\ r \sin(\theta) \lambda_\theta \end{bmatrix}\quad (3.81)$$

où $\lambda_\theta = E[\cos(\tilde{\theta})]$ est le facteur de compensation du biais [10]. D'après cette équation, la conversion donnée par (3.71) est biaisée pour $\lambda_\theta \neq 1$. Cependant, pour une densité uni-modale ou même pour une distribution uniforme dans l'intervalle $[-a, a]$ et ($a < \pi$), une conversion non biaisée peut être introduite pour $\lambda_\theta \neq 0$. La dérivation de la matrice de covariance réelle donne :

$$\mathbf{R}_{t,mu} = \begin{bmatrix} R_{t,mu}^x & R_{t,mu}^{xy} \\ R_{t,mu}^{yx} & R_{t,mu}^y \end{bmatrix}\quad (3.82)$$

où on utilise l'indice *mu* pour désigner '*Modified Unbiased*' et :

$$R_{t,mu}^x = \text{var}(x_m^{mu}/r, \theta) = \lambda_\theta^{-2} (r^2 + \sigma_r^2) E[\cos^2(\theta_m)] - r^2 \cos^2(\theta)$$

$$R_{t,mu}^y = \text{var}(y_m^{mu}/r, \theta) = \lambda_\theta^{-2} (r^2 + \sigma_r^2) E[\sin^2(\theta_m)] - r^2 \sin^2(\theta)$$

$$\begin{aligned} R_{t,mu}^{xy} &= R_{t,mu}^{yx} = \text{cov}(x_m^{mu}, y_m^{mu} / r, \theta) \\ &= \lambda_\theta^{-2} (r^2 + \sigma_r^2) E[\cos(\theta_m) \sin(\theta_m)] - r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \end{aligned}$$

Comme il a été mentionné auparavant, cette covariance ne peut être exploitée directement car elle est calculée conditionnellement aux vraies valeurs de la portée et de l'azimut. Plusieurs approches ont été proposées pour approximer cette matrice, l'une de ces méthodes est de calculer la matrice de covariance conditionnellement à la mesure prédictive, une autre méthode consiste à prendre la moyenne de cette covariance conditionnement à la mesure $E[\mathbf{R}_{t,mu}(r, \theta) / r_m, \theta_m] = \mathbf{R}_{mu}$, ce qui engendre en général une matrice plus large [9]. Dans cette section on présente une deuxième approche jugée être plus simple [10], mais les équations dans cette référence présentent une incompatibilité selon [11]. Pour cette raison, la suite du développement est extraite de cette dernière référence. L'équation de la mesure non-biaisée, qui suppose que le bruit est multiplicatif, est donnée par :

$$\begin{bmatrix} x_m^{mu} \\ y_m^{mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_\theta^{-1} r_m \cos(\theta_m) \\ \lambda_\theta^{-1} r_m \sin(\theta_m) \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

Si on écrit cette mesure non-biaisée sous la forme :

$$\begin{aligned} x_m^{mu} &= \tilde{x}_m^{mu} + x \\ y_m^{mu} &= \tilde{y}_m^{mu} + y \end{aligned} \quad (3.84)$$

alors la moyenne correspondante à l'erreur commise conditionnellement à la mesure devient :

$$\begin{aligned} E[\tilde{x}_m^{mu} / r_m, \theta_m] &= (\lambda_\theta^{-1} - \lambda_\theta) r_m \cos(\theta_m) \\ E[\tilde{y}_m^{mu} / r_m, \theta_m] &= (\lambda_\theta^{-1} - \lambda_\theta) r_m \sin(\theta_m) \end{aligned} \quad (3.85)$$

C'est à ce niveau qu'apparaît la différence entre ce travail et celui de [9] où le bruit était aditif. La matrice de covariance de cette erreur est donnée par :

$$\mathbf{R}_{mu} = \begin{bmatrix} R_{mu}^x & R_{mu}^{xy} \\ R_{mu}^{yx} & R_{mu}^y \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

avec :

$$R_{mu}^x = \text{var} [\tilde{x}_m^{mu} / r_m, \theta_r] = -\lambda_\theta^2 r_m^2 \cos^2 (\theta_m) + \frac{1}{2} (r_m^2 + \sigma_r^2) (1 + \lambda'_\theta \cos (2\theta_m))$$

$$R_{mu}^y = \text{var} [\tilde{y}_m^{mu} / r_m, \theta_r] = -\lambda_\theta^2 r_m^2 \sin^2 (\theta_m) + \frac{1}{2} (r_m^2 + \sigma_r^2) (1 - \lambda'_\theta \cos (2\theta_m))$$

$$\begin{aligned} R_{mu}^{xy} &= R_{mu}^{yx} = \text{cov} [\tilde{x}_m^{mu}, \tilde{y}_m^{mu} / r_m, \theta_r] \\ &= -\lambda_\theta^2 r_m^2 \cos (\theta_m) \sin (\theta_m) + \frac{1}{2} (r_m^2 + \sigma_r^2) \lambda'_\theta \sin (2\theta_m) \end{aligned}$$

Dans le cas Gaussien, on a $\lambda_\theta = e^{-\sigma_\theta^2/2}$ et $\lambda'_\theta = \lambda_\theta^4$, ainsi la mesure non-biaisée est donnée par :

$$\mathbf{Z}_m^{mu} = \begin{bmatrix} x_m^{mu} \\ y_m^{mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\sigma_\theta^2/2} r_m \cos(\theta_m) \\ e^{\sigma_\theta^2/2} r_m \sin(\theta_m) \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

La différence entre la mesure dé-biaisée (3.80) et la mesure non-biaisée (3.87) n'est significative que si σ_θ est trop important [10]. Effectivement pour les coefficients multiplicatifs dans ces deux équations on peut faire, pour σ_θ petit, l'approximation suivante :

$$(1 - e^{-\sigma_\theta^2} + e^{-\sigma_\theta^2/2}) \approx 1 + \sigma_\theta^2/2 \approx e^{\sigma_\theta^2/2} \quad (3.88)$$

La figure 3.12 représente les tracées de ces deux coefficients, et montre que l'écart entre eux devient plus important lorsque $\sigma_\theta \geq 23^\circ$.

La moyenne de l'erreur de mesure en x pour différents valeurs de la portée est représentée à la figure 3.13. Il apparaît clairement que la conversion non-biaisée est nettement meilleurs.

3.7.3 Implémentation du filtre de Kalman à mesure convertie

L'implémentation du filtre de Kalman à mesure convertie se déroule comme suit :

- L'initialisation reste inchangée et est la même que dans le filtre KF.
- La prédiction de l'état et sa matrice de covariance restent inchangées voir équations (2.5) et (2.6).

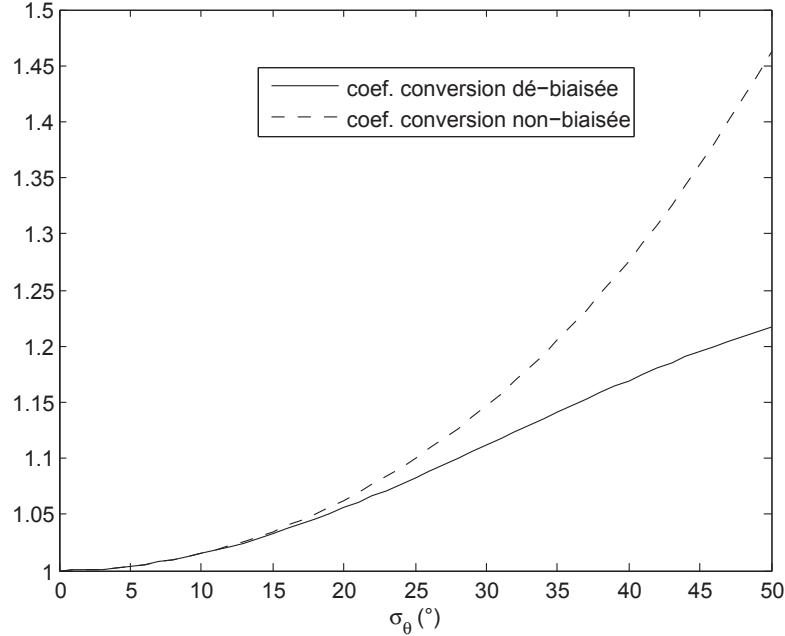


FIGURE 3.12: Coefficients de pondération des conversions dé-biaisée et non-biaisée.

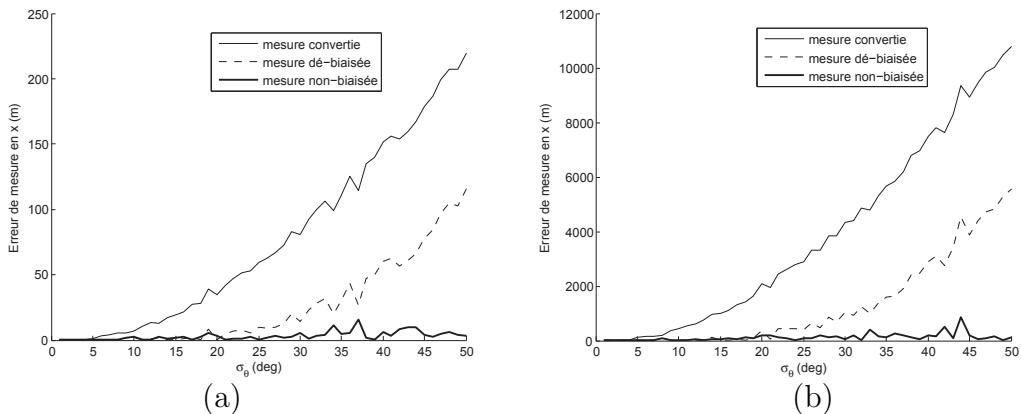


FIGURE 3.13: Moyenne sur 10000 réalisations de l'erreur de mesure en x pour : (a) $-(x, y) = (1000m, 1000m)$, (b) $-(x, y) = (50000m, 50000m)$ en fonction de σ_θ .

- La mesure reçue est remplacée par \mathbf{z}_m^d dans le cas du DCMKF, et par \mathbf{z}_m^{mu} dans le cas du MUCMKF.
- Evaluer l’expression de l’innovation (2.8) avec les nouvelles mesures.
- Mettre à jour la matrice de covariance du bruit de mesure : prendre $\mathbf{R}_{k+1} = \mathbf{R}_{d,k+1}$ dans le cas du DCMKF et prendre $\mathbf{R}_{k+1} = \mathbf{R}_{mu,k+1}$ dans le cas du MUCMKF.
- Reprendre les équations (2.9) à (2.12)

3.7.4 Remarques pour l'implémentation

- Les matrices $\mathbf{R}_{d,k+1}$ et $\mathbf{R}_{mu,k+1}$ sont fonction de la portée et de l'azimut ainsi que de leurs erreurs respectives. La portée et l'azimut utilisées pour évaluer cette matrice doivent être les meilleures parmi les disponibles à l'instant $k + 1$ (mesurées ou prédictes). En général on les obtient à partir de l'état prédit à l'instant $k + 1$ en utilisant la fonction inverse de (3.71), sauf au début de la poursuite où l'on utilise la portée et l'azimut mesurés parce qu'ils sont plus précis. On peut aussi effectuer le test suivant $\det(\mathbf{H}\mathbf{P}_{k+1|k}\mathbf{H}') \geq \det(\mathbf{R}_{d,k+1})$. Si ce test est positif, on utilise alors la mesure.
- Lors de l'utilisation de la mesure convertie en poursuite, deux sortes de biais doivent être évalués et éliminés [37]. Le premier est dû à la conversion elle-même, et le second apparaît lorsque l'estimée de la covariance de la mesure est corrélée avec le bruit de la mesure convertie [37]. Dans ce sens, le filtre UCMKF décorrélé, ‘Decorreltaed Unbiaised Converted Measurement Kalman Filter (DUCMKF)’ ; a été proposé comme solution du problème du biais induit, en cas de corrélation, par le MUCMKF. Cette étude n'est pas prise en compte dans le présent mémoire. Le lecteur est invité à consulter aussi la référence [40].

3.7.5 Comparaison entre les différentes versions du CMKF

Dans cette section, on effectue une comparaison entre le filtre de Kalman à mesure convertie de base CMKF, et les deux versions les plus connues à savoir le filtre de Kalman à mesure convertie dé-biaisée DCMKF et le filtre de Kalman à mesure non-biaisée modifié MUCMKF. Le scénario considéré est le déplacement d'une cible dans le plan sans effectuer de manœuvres. Ainsi le système est représenté par l'équation (2.1), décrivant un système dynamique linéaire. La mesure constituée de la portée et de l'azimut, est issue d'un radar situé à l'origine. Initialement, la cible se trouve à la position $(10km, 10km)$; d'où elle se déplace avec une vitesse égale à $20m/s$ et un cap de 45° durant $500s$. La figure 3.14 illustre la trajectoire parcourue par la cible. Sur les figures 3.15, 3.16 et 3.17, en présente les graphes des racines carrées des erreurs quadratiques moyennes (RCEQM) en position et en

vitesse, obtenues en moyennant 250 réalisations, pour un écart type de la portée égale à $50m$. Le bruit de système utilisé a comme écart type $\sigma_w = 0.1m/s^2$, et le temps d'échantillonnage (ou période du scan) est $T = 1s$. Dans ces simulations on a considéré différentes valeurs de l'écart type de l'azimut σ_θ soit : $0.1^\circ, 5^\circ$ et 10° .

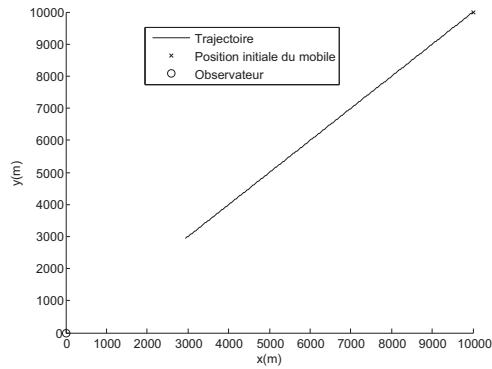


FIGURE 3.14: Trajectoire de la cible.

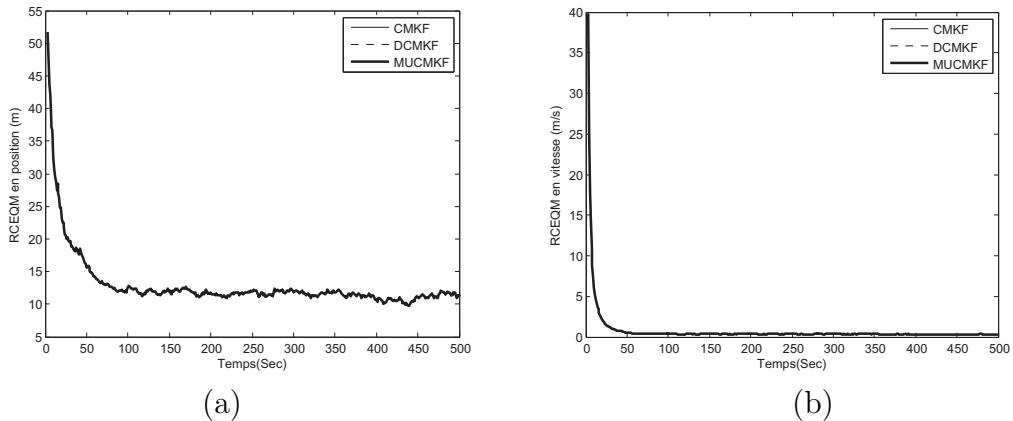


FIGURE 3.15: La RCEQM en (a) position et (b) vitesse pour $\sigma_v = 0.1^\circ$.

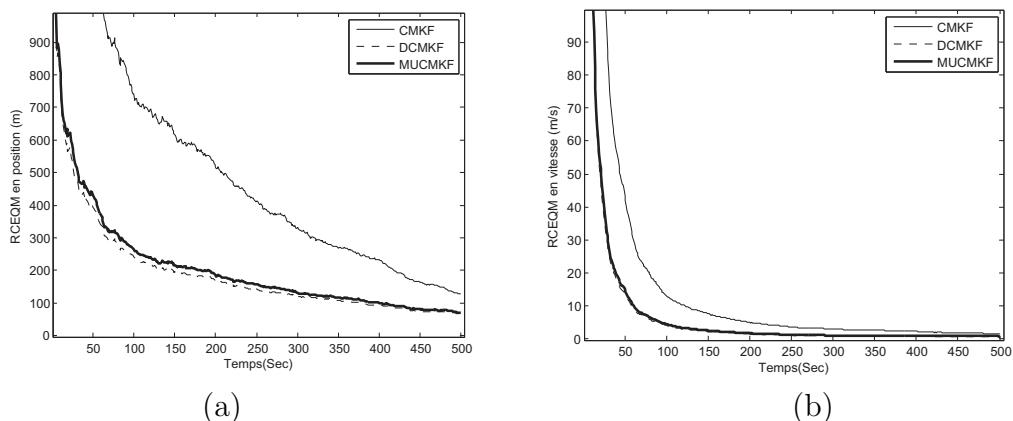


FIGURE 3.16: La RCEQM en (a) position et (b) vitesse pour $\sigma_v = 5^\circ$.

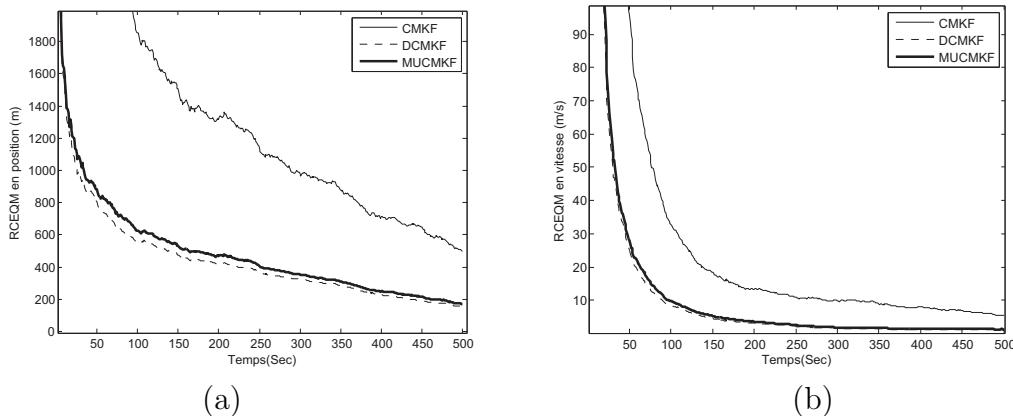


FIGURE 3.17: La RCEQM en (a) position et (b) vitesse pour $\sigma_v = 10^\circ$.

Les trois filtres se comportent de la même façon pour des faibles valeurs de l'écart type σ_θ figure 3.15. Pour des valeurs plus importantes de l'écart type σ_θ , les versions améliorées du CMKF à savoir les filtres DCMKF et MUCMKF, présentent des RCEQM plus petites, avec une légère avance du filtre DCMKF figures 3.16 et 3.17. En dernier lieu, on note que les trois filtres ont presque le même temps d'exécution.

3.8 Conclusion

Pour les systèmes linéaires et Gaussiens, le filtre de Kalman procure l'estimée optimale au sens de la minimisation de l'erreur quadratique moyenne. Cependant, en pratique ces deux hypothèses ne sont pas toujours satisfaites. Ce chapitre présente l'extension du filtre de Kalman au cas non linéaire. En premier lieu on a présenté la version la plus utilisée connue sous l'appellation filtre de Kalman étendu, '*Extended Kalman Filter (EKF)*'. Cette version a l'avantage d'être moins coûteuse en temps de calcul, cependant elle ne peut pas être appliquée dans toutes les situations. Dans nos simulations, on a montré que lorsque le bruit est trop fort l'EKF présente certaines limites. La même conclusion peut être tirée lorsque les équations du système et/ou de la mesure présentent une forte non linéarité [14].

Pour remédier à certaines limites de l'EKF plusieurs alternatives ont été proposées dans la littérature ces dernières décennies. Parmi les filtres les plus répandus on

a présenté le filtre de Kalman Unscented, '*Unscented Kalman Filter (UKF)*' et le filtre de Kalman Quadrature, '*Quadrature Kalman Filter (QKF)*'. Ces deux filtres utilisent un certain nombre de points pour approximer la moyenne et la covariance de l'état estimée, et présentent dans la quasi majorité des cas les mêmes performances, avec un léger avantage pour l'UKF.

En pistage, on parle souvent du problème de poursuite d'une cible qui se déplace dans le plan (x, y) alors que la mesure est fournie en coordonnées polaires (r, θ) . Beaucoup de travaux publiés dans la littérature traitent ce problème. Parmi les solutions proposées figure le filtre de Kalman à mesure convertie, '*Converted Measurement Kalman Filter (CMKF)*'. Vu son intérêt, ce filtre ainsi que ses variantes ont été présentés dans ce chapitre en détails. Une comparaison entre ces différentes versions a été également effectuée à l'aide de simulations.

Les filtres présentés dans ce chapitre se basent sur l'hypothèse de la Gaussienneté. Cette hypothèse n'est pas toujours satisfaite en pratique. Pour traiter ce cas, une méthode sera examinée dans le chapitre suivant à savoir le filtre à somme Gaussiennes, '*Gaussian Sum Filter (GSF)*'.

Chapitre 4

Extension du filtre de Kalman au cas non Gaussien

4.1 Introduction

Un système dynamique est géré par deux équations, la première équation (4.1) décrit le modèle d'évolution du processus tandis que la deuxième équation (4.2) montre comment la mesure est liée à l'état caché¹ du système.

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k) + \mathbf{w}_k \quad (4.1)$$

$$\mathbf{z}_k = h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k \quad (4.2)$$

A l'instant k on veut estimer le vecteur d'état \mathbf{x}_{k+1} connaissant le vecteur de mesure \mathbf{z}_{k+1} . Dans l'approche de Bayes, lorsqu'on calcule la densité à posteriori, en utilisant le théorème de Bayes, on obtient une description statistique complète de la variable d'état. La densité à postériori est déterminée récursivement en utilisant l'estimée précédente et la mesure la plus récente, en utilisant l'équation (4.3).

$$p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{Z}_{k+1}) = \frac{p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{Z}_k) p(\mathbf{z}_{k+1} | \mathbf{x}_{k+1})}{p(\mathbf{z}_{k+1} | \mathbf{Z}_k)} \quad (4.3)$$

1. Le terme caché signifie, dans ce contexte, noyé dans le bruit.

avec

$$p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{Z}_k) = \int p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_k) p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k) d\mathbf{x}_k, \quad (4.4)$$

où $\mathbf{Z}_{k+1} = \{\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{k+1}\}$ représente l'ensemble des mesures jusqu'à l'instant $k+1$ et $p(\mathbf{z}_{k+1} | \mathbf{Z}_k)$ est la constante de normalisation donnée par :

$$p(\mathbf{z}_{k+1} | \mathbf{Z}_k) = \int p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{Z}_k) p(\mathbf{z}_{k+1} | \mathbf{x}_{k+1}) d\mathbf{x}_{k+1} \quad (4.5)$$

Lorsque l'état initial et/ou les séquences de bruit ne sont pas Gaussiens, $p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{z}_{k+1})$ n'est pas Gaussienne et il est en général impossible d'associer une forme compacte à cette densité [35]. Deux approches principales ont été proposées dans la littérature pour résoudre le problème d'estimation d'état non-linéaire/non-Gaussien [41] : le filtre à somme Gaussiennes, '*Gaussian Sum Filter (GSF)*' [17], et le filtre particulier, '*Particle Filter (PF)*' [42]. Ce dernier requiert un effort de calcul important puisqu'il se base sur les simulations de Monte Carlo, et souvent nécessite la propagation d'un nombre important de points, appelés particules, d'où son appellation. Cette charge de calcul devient encore plus importante lorsqu'on traite un problème de dimension élevée.

Le filtre à somme Gaussiennes, connu aussi sous l'appellation mixture de Gaussiennes, a été initialement proposé par Sorenson et Alspach [17, 43]. Ces travaux traitent le cas général du problème de filtrage non linéaire et/ou non-Gaussien. Les auteurs ont exploité la théorie de Bayes pour approximer une densité quelconque par un ensemble de densités Gaussiennes. Le filtre conçu peut être vu comme étant un ensemble, ou banc, de filtres de Kalman qui fonctionnent en parallèle.

Avant d'élaborer le filtrage à somme Gaussiennes, on présente la théorie relative à l'approximation d'une densité quelconque par une somme de Gaussiennes. Dans ce chapitre on présente d'abord le filtre à somme Gaussiennes appliqué dans le cas linéaire et non Gaussien. Après on enchaînera par l'application de ce filtre dans le cas de la poursuite lorsque la mesure est donnée en coordonnées polaires ; ainsi ce cas représente l'extension à un cas non linéaire non Gaussien.

Le dernier filtre présenté dans ce chapitre est le filtre qu'on a baptisé $\alpha\beta$ -GSF. Ce filtre représente en fait la version en régime permanent du filtre GSF puisqu'il est conçu en intégrant dans ce dernier le filtre $\alpha\beta$ discuté dans le chapitre 2. En dernier lieu on présentera les résultats de certaines simulations qui sont menées afin de comparer les performances des filtres étudiés

4.2 Approximation d'une densité par une somme de Gaussiennes

Soit $p(x)$ une densité de probabilité dont les propriétés sont :

- La densité $p(x)$ est définie et continue partout dans un certain nombre d'intervalle,
- $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$,
- $p(x) \geq 0, \quad \forall x$.

La présente étude considère x comme une variable aléatoire scalaire. La généralisation à un vecteur ne pose pas de problème, mais complique la compréhension. Le problème de l'approximation de $p(x)$ peut être effectué par le biais d'une certaine classe de fonction appelée *familles delta de type positive* [17]. Ce sont des familles de fonctions qui convergent vers l'impulsion, lorsque les paramètres caractéristiques de la famille convergent vers leurs valeurs limites. Plus précisément, soit l'ensemble de fonctions $\{\delta_\lambda\}$ définies sur $]-\infty, +\infty[$ et intégrables sur tout intervalle. Cet ensemble est appelé une famille de delta positive s'il satisfait les trois conditions suivantes :

- $\int_{-a}^a \delta_\lambda(x)dx$ tend vers 1, lorsque λ tend vers un certain λ_0 , pour une valeur de a donnée,
- $\forall \gamma > 0, \delta_\lambda(x)$ tend vers 0 uniformément pour $\gamma \leq |x| < \infty$, lorsque λ tend vers λ_0 ,
- $\delta_\lambda(x) \geq 0, \quad \forall x$, et $\forall \lambda$.

Cette famille de fonctions, permet l'utilisation de la propriété très intéressante donnée par le théorème suivant :

4.2.1 Théorème

La séquence $p_\lambda(x)$ formée par la convolution de δ_λ et $p(x)$:

$$p_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(u)\delta_\lambda(x-u)du \quad (4.6)$$

converge uniformément vers $p(x)$ dans tout sous intervalle de $]-\infty, +\infty[$.

Lorsque $p(x)$ contient un nombre fini de discontinuités, le théorème reste valide sur tout le domaine de définition à l'exception de ces points. Si en plus, la famille $\{\delta_\lambda\}$ satisfait la condition :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\lambda(x)dx = 1, \quad (4.7)$$

il s'ensuit de l'équation (4.6) que $p_\lambda(x)$ forme une densité de probabilité quelle que soit la valeur attribuée au coefficient λ . Dans le cas où le bruit est Gaussien, la densité de probabilité de l'état conditionnelle (4.3) reste Gaussienne et le filtre de Kalman permet de déterminer d'une manière très simple l'estimée optimale de l'état, d'où l'idée d'utiliser une famille de fonctions Gaussiennes pour l'approximation d'une densité de probabilité quelconque. On prend dans ce cas $\lambda = \sigma$, on obtient :

$$\delta_\lambda(x) \triangleq N_\sigma(x) = N(x, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad (4.8)$$

On peut facilement démontrer que $N_\sigma(x)$ représente une famille de delta positive lorsque $\sigma \rightarrow 0$. Autrement dit, lorsque la variance tend vers zéro la densité de probabilité Gaussienne tend vers la fonction delta. Ainsi l'équation (4.6) devient :

$$p_\sigma(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(u)N_\sigma(x-u)du \quad (4.9)$$

Bien que l'équation (4.9) représente la base de l'approximation par la somme de fonctions Gaussiennes, elle n'est pas directement exploitable. Cependant, il est claire que $p(u)N_\sigma(x-u)$ est intégrable sur $]-\infty, +\infty[$ et elle est, au minimum, continue par morceau. Ainsi, $p_\sigma(x)$ peut être elle-même approximée dans n'importe quel intervalle par les sommes de Riemann[44]. En particulier, considérons une

approximation de $p_\sigma(x)$ dans un intervalle $[a, b]$ donnée par :

$$p_{n,\sigma}(x) = \frac{1}{c} \sum_{i=1}^n p(x_i) N_\sigma(x - x_i)[\xi_i - \xi_{i-1}] \quad (4.10)$$

L'intervalle $[a, b]$ est divisé en n sous intervalles $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ tels que $a = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_n = b$. Le théorème de la moyenne [44], permet de choisir le point x_i dans un sous intervalle tel que :

$$p(x_i)[\xi_i - \xi_{i-1}] = \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} p(x) dx \quad (4.11)$$

La constante de normalisation c , garantie que $p_{n,\sigma}(x)$, demeure une densité de probabilité c'est à dire l'intégrale est égale à l'unité soit :

$$c = \int_a^b p_{n,\sigma}(x) dx \quad (4.12)$$

Pour un intervalle assez grand, on peut considérer que $c = 1$, il s'ensuit :

$$\frac{1}{c} \sum_{i=1}^n p(x_i)[\xi_i - \xi_{i-1}] = 1 \quad (4.13)$$

Alors $p_{n,\sigma}(x)$ est une combinaison de densités de probabilités Gaussiennes $N_\sigma(x)$.

4.2.2 Implémentation de l'approximation

L'étude précédente montre que, pour toute densité de probabilité $p(x)$ qui a un nombre fini de points de discontinuité, on peut, trouver une approximation de la forme $p_{n,\sigma}(x)$, donnée par (4.10), et ceci dans tout l'intervalle et même au voisinage des points de discontinuité. En pratique, il est impératif que $p(x)$ soit approximée avec une certaine tolérance, en utilisant un nombre relativement réduit de termes. Cela représente un nouvel aspect du problème, qu'il faut considérer. Dans ce qui suit, on écrit l'approximation sous la forme [18] :

$$p_n(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i N_{\sigma_i}(x - \mu_i), \quad (4.14)$$

où $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, avec $\alpha_i \geq 0 \forall i$. Contrairement à l'équation (4.10) où toutes les Gaussiennes partagent la même variance σ^2 , l'équation (4.14) stipule que chaque terme peut avoir sa propre variance. Cette considération est très pratique car elle engendre une plus grande flexibilité; essentiellement lorsqu'on utilise un nombre réduit de termes. Le problème est donc de déterminer les valeurs des paramètres α_i, μ_i et σ_i afin d'obtenir la meilleure approximation $p_n(x)$ de la densité de probabilité $p(x)$. En considérant la norme L^m , la distance entre $p(x)$ et $p_n(x)$, peut être définie par :

$$\|p - p_n\|^m = \int_{-\infty}^{\infty} \left| p(x) - \sum_{i=1}^n \alpha_i N_{\sigma_i}(x - \mu_i) \right|^m dx \quad (4.15)$$

Alors, les paramètres α_i, μ_i et σ_i , sont choisis de telle sorte qu'ils minimisent cette distance; il s'agit enfin de compte d'un problème de résolution d'un système d'équations non linéaires [33]. On prend souvent la norme quadratique, c'est à dire $m = 2$ [17].

Pour résoudre un tel problème on préfère utiliser une méthode alternative, qui s'avère être plus pratique, à savoir l'algorithme de maximisation de la moyenne, '*Expectation Maximization (EM) algorithm*' [45]. Cet algorithme fournit les estimées des paramètres de la mixture selon le critère du maximum de vraisemblance. La figure 4.1 représente l'approximation de la densité de Rayleigh de paramètre d'échelle $b = 2$, en utilisant deux composantes Gaussiennes dont les paramètres sont estimés par l'algorithme EM.

4.3 Les filtres à somme Gaussiennes (GSF)

L'application du filtre à somme Gaussiennes dans le cas non linéaire et non Gaussien est détaillé dans [17, 43] et se base sur les deux concepts principaux suivants : l'approximation de la densité à posteriori par une somme de Gaussiennes et la procédure de linéarisation effectuée par l'EKF. La version de base de cet algorithme souffre du problème d'accroissement exponentiel du nombre de Gaussiennes au fil

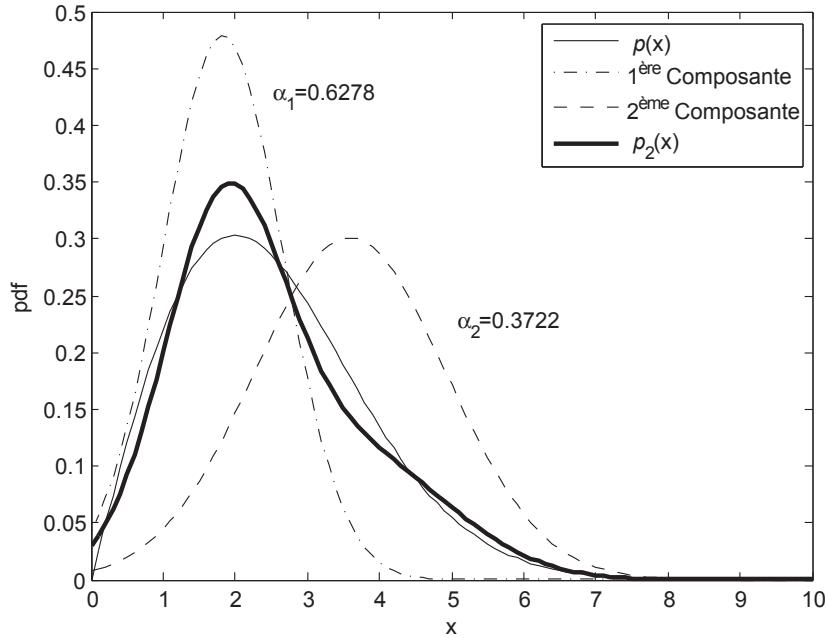


FIGURE 4.1: Approximation de la densité de Rayleigh de paramètre d'échelle $b = 2$ par la somme de deux Gaussiennes.

du temps. Plusieurs techniques ont été proposées dans la littérature pour réduire ce nombre. Dans cette section on s'intéresse à l'application du filtre à somme Gaussienne dans le cas de la poursuite en présence d'un bruit non Gaussien. Le modèle du système considéré est le DWNA (voir section 2.1. du chapitre 1). Pour la mesure, deux cas sont envisagés : Dans le premier cas l'équation de mesure est linéaire et la mesure est les deux coordonnées cartésiennes (x, y) . Tandis que dans le second cas l'équation de mesure est non linéaire et la mesure est la portée et l'azimut (r, θ) . A la fin de ce chapitre on donnera la description détaillée de notre propre contribution, qui consiste à combiner le filtre $\alpha\beta$ avec le filtre GSF ; ce qui permet de gagner en temps de calcul. Ce filtre nous l'avons baptisé $\alpha\beta$ -GSF [46].

4.3.1 Application du GSF pour le cas linéaire non Gaussien

Dans cette partie on s'intéresse à l'application du filtre GSF à la poursuite d'une cible dont le système et la mesure sont linéaires et le bruit du système est Gaussien alors que le bruit affectant la mesure est non Gaussien. On choisit le modèle

DWNA pour caractériser le système voir équations (1.17) à (1.20). Les équations correspondant à la mesure sont (1.31) et (1.32). Etant donné que le bruit de mesure \mathbf{v}_k est non Gaussien, on propose d'approximer sa densité de probabilité par n Gaussiennes :

$$p_n(\mathbf{v}_k) = \sum_{i=1}^n \gamma_i N(\mathbf{v}_k - \eta_i, \mathbf{R}_i) \quad (4.16)$$

où :

$$\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} \sigma_{\mathbf{v},x,i}^2 & \sigma_{\mathbf{v},xy,i} \\ \sigma_{\mathbf{v},yx,i} & \sigma_{\mathbf{v},y,i}^2 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Dans ce cas on va suivre la démarche suivante : (a) à chaque Gaussienne de l'équation (4.16) est dédié un filtre de Kalman, (b) l'estimé de la densité a posteriori $p(\mathbf{z}_{k+1} | \mathbf{Z}_k)$ est fournie en se basant sur les estimées fournies de chaque filtre de Kalman ; ainsi les deux premiers moments sont utilisés pour le prochain cycle. (c) on calcule puis on normalise les poids de chaque constante de la somme Gaussiennes en utilisant l'innovation ainsi que sa matrice de covariance, (d) on remplace la mixture de Gaussiennes résultante par une seule Gaussienne qui représente l'approximation optimale au sens de la minimisation de l'erreur quadratique moyenne. Après une étape d'initialisation, l'algorithme considéré comprend :

1. La prédiction de l'état global

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}_{k|k} \quad (4.18)$$

$$\mathbf{P}_{k+1|k} = \mathbf{F}\mathbf{P}_{k|k}\mathbf{F}' + \mathbf{Q} \quad (4.19)$$

2. L'estimation des états partiels

Pour chaque composante i ($i = 1, \dots, n$), on calcule la mesure prédictive (4.20), la covariance de l'innovation (4.21), les poids normalisés (4.23), le gain de Kalman correspondant (4.24), l'estimée d'état partielle (4.25) et enfin la matrice de covariance correspondante (4.26) :

$$\hat{\mathbf{z}}_{i,k+1|k} = \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \eta_i \quad (4.20)$$

$$\mathbf{S}_{i,k+1|k} = \mathbf{H}\mathbf{P}_{k+1|k}\mathbf{H}' + \mathbf{R}_i \quad (4.21)$$

$$c_{i,k+1} = \frac{\gamma_i}{|2\pi \mathbf{S}_{i,k+1|k}|} \exp \left(-\frac{1}{2} (\mathbf{z}_{k+1} - \hat{\mathbf{z}}_{i,k+1|k}) \mathbf{S}_{i,k+1|k}^{-1} (\mathbf{z}_{k+1} - \hat{\mathbf{z}}_{i,k+1|k})' \right) \quad (4.22)$$

$$\psi_{i,k+1} = \frac{c_{i,k+1}}{\sum_{j=1}^n c_{j,k+1}} \quad (4.23)$$

$$\mathbf{K}_{i,k+1} = \mathbf{P}_{i,k+1|k} \mathbf{H}' \mathbf{S}_{i,k+1|k}^{-1} \quad (4.24)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{i,k+1|k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{i,k+1|k} + \mathbf{K}_{i,k+1} (\mathbf{z}_{k+1} - \hat{\mathbf{z}}_{i,k+1|k}) \quad (4.25)$$

$$\mathbf{P}_{i,k+1|k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{i,k+1} \mathbf{H}) \mathbf{S}_{i,k+1|k}^{-1} \quad (4.26)$$

3. L'estimation de l'état global

L'estimée global ainsi que sa matrice de covariance sont données par [4, 47] :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} = \sum_{i=1}^n \psi_{i,k+1} \hat{\mathbf{x}}_{i,k+1|k+1} \quad (4.27)$$

$$\mathbf{P}_{k+1|k+1} = \sum_{i=1}^n \psi_{i,k+1} \left(\mathbf{P}_{i,k+1|k+1} + (\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{i,k+1|k+1}) (\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{i,k+1|k+1})' \right) \quad (4.28)$$

4.3.2 Application du GSF dans le cas d'une mesure non linéaire

Supposons que la densité conditionnelle $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_k)$ est Gaussienne de moyenne $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$, et de matrice de covariance $\mathbf{P}_{k|k}$. Suivant l'équation (4.4), la densité de probabilité conditionnelle prédite à l'instant $k+1$, $p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{Z}_k)$ est aussi Gaussienne ayant pour moyenne $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$ et pour matrice de covariance $\mathbf{P}_{k+1|k}$ telle que :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \mathbf{F} \hat{\mathbf{x}}_{k|k} \quad (4.29)$$

$$\mathbf{P}_{k+1|k} = \mathbf{F} \mathbf{P}_{k|k} \mathbf{F}' + \mathbf{Q} \quad (4.30)$$

Une fois la densité a priori $p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{Z}_k)$ acquise, on peut à partir de l'équation (4.3) en déduire la densité a posteriori $p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{Z}_{k+1})$ et ainsi obtenir l'estimée optimale

$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}$. Malheureusement la densité conditionnelle (4.4) ne peut pas être évaluée facilement car la densité $p(\mathbf{z}_{k+1} | \mathbf{x}_{k+1})$ n'est pas une fonction Gaussienne de \mathbf{x}_{k+1} . C'est à ce stade qu'on introduit la somme Gaussiennes pour approximer la densité conditionnelle $p(\mathbf{z}_{k+1} | \mathbf{x}_{k+1})$, afin de rendre le calcul de l'intégrale plus simple. Ainsi on peut dire que l'estimée optimale $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}$ peut être considérée comme étant la somme pondérée des estimées obtenues à partir d'un banc de filtres de Kalman. Ce principe a été utilisé dans l'algorithme du filtre à somme Gaussiennes adaptative, '*Adaptive Gaussian Sum Filter (AGSF)*', dont nous allons décrire les quatre principales étapes d'implémentation [18] :

1. Initialisation

On suppose que la densité de probabilité du bruit de mesure $p(\mathbf{v}_{k+1})$ est approximée par la somme de fonctions Gaussiennes :

$$p_n(\mathbf{v}_{k+1}) = \sum_{i=1}^n \tilde{\alpha}_{i,k+1} N\left(\mathbf{v}_{k+1} - \tilde{\mathbf{m}}_{i,k+1}, \tilde{\mathbf{B}}_{i,k+1}\right) \quad (4.31)$$

où :

- n : le nombre de Gaussiennes,
- $\tilde{\alpha}_{i,k+1}$: les poids normalisés des Gaussiennes $\left(\sum_{i=1}^n \tilde{\alpha}_{i,k+1} = 1\right)$,
- $\tilde{\mathbf{m}}_{i,k+1}$: la moyenne de la Gausienne i ,
- $\tilde{\mathbf{B}}_{i,k+1}$: la matrice de covariance de la Gausienne i .

2. Mise à jour des paramètres de l'approximation

Une fois une nouvelle mesure \mathbf{z}_{k+1} acquise, on met à jour les paramètres $\alpha_{i,k+1}$, $\mathbf{m}_{i,k+1}$ et $\mathbf{B}_{i,k+1}$ de manière à ce que (voir annexe B) :

$$p(\mathbf{z}_{k+1} | \mathbf{x}_{k+1}) \approx \sum_{i=1}^n \alpha_{i,k+1} N(\mathbf{m}_{i,k+1} - \mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{B}_{i,k+1}) \quad (4.32)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{i,k+1} &= h^{-1}(\mathbf{z}_{k+1} - \tilde{\mathbf{m}}_{i,k+1}) \\ \mathbf{B}_{i,k+1} &= \left(J'_h(\mathbf{m}_{i,k+1}) \tilde{\mathbf{B}}_{i,k+1}^{-1} J_h(\mathbf{m}_{i,k+1}) \right)^{-1} \\ \alpha_{i,k+1} &= \tilde{\alpha}_{i,k+1} |J_h(\mathbf{m}_{i,k+1})|^{-1} \end{aligned}$$

$$J_h(\mathbf{m}_{i,k+1}) = \left. \frac{\partial h(\mathbf{x}_{k+1})}{\partial \mathbf{x}_{k+1}} \right|_{\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{m}_{i,k+1}}$$

3. Calcul des estimées partielles

En remplaçant la somme (4.32) dans l'équation (4.3), et après certaines manipulations, on obtient :

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{Z}^{k+1}) &= \frac{p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{Z}^k) p(\mathbf{z}_{k+1} | \mathbf{x}_{k+1})}{\int p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{Z}^k) p(\mathbf{z}_{k+1} | \mathbf{x}_{k+1}) d\mathbf{x}_{k+1}} \\ &= \frac{N(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \mathbf{P}_{k+1|k}) \sum_{i=1}^n \alpha_{i,k+1} N(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{m}_{i,k+1}, \mathbf{B}_{i,k+1})}{\int N(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \mathbf{P}_{k+1|k}) \sum_{i=1}^n \alpha_{i,k+1} N(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{m}_{i,k+1}, \mathbf{B}_{i,k+1}) d\mathbf{x}_{k+1}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \tilde{\gamma}_{i,k+1} N(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{i,k+1|k+1}, \mathbf{P}_{i,k+1|k+1})}{\sum_{i=1}^n \tilde{\gamma}_{i,k+1}} \end{aligned} \quad (4.33)$$

Soit en fin :

$$p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{Z}^{k+1}) = \sum_{i=1}^n \gamma_{i,k+1} N(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{i,k+1|k+1}, \mathbf{P}_{i,k+1|k+1}) \quad (4.34)$$

où :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{i,k+1|k+1} &= \left(\mathbf{D}' \mathbf{B}_{i,k+1}^{-1} \mathbf{D} + \mathbf{P}_{k+1|k}^{-1} \right)^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{i,k+1|k+1} &= \mathbf{P}_{i,k+1|k+1} \left(\mathbf{D}' \mathbf{B}_{i,k+1}^{-1} \mathbf{m}_{i,k+1} + \mathbf{P}_{k+1|k}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} \right) \\ \gamma_{i,k+1} &= \frac{\tilde{\gamma}_{i,k+1}}{\sum_{i=1}^n \tilde{\gamma}_{i,k+1}} \\ \tilde{\gamma}_{i,k+1} &= \alpha_{i,k+1} \frac{\sqrt{|\mathbf{P}_{i,k+1|k+1}|}}{\sqrt{|\mathbf{B}_{i,k+1}|}} \exp \left(-\frac{1}{2} \varphi_{i,k+1} \right) \\ \varphi_{i,k+1} &= \hat{\mathbf{x}}'_{k+1|k} \mathbf{P}_{k+1|k}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \mathbf{m}'_{i,k+1} \mathbf{B}_{i,k+1}^{-1} \mathbf{m}_{i,k+1} - \hat{\mathbf{x}}'_{i,k+1|k+1} \mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{i,k+1|k+1} \\ \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4. Calcul de l'estimée globale

On calcule l'état estimé à l'instant $k+1$ et la matrice de covariance associée

par :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} = \sum_{i=1}^n \gamma_{i,k+1} \hat{\mathbf{x}}_{i,k+1|k+1} \quad (4.35)$$

$$\mathbf{P}_{k+1|k+1} = \sum_{i=1}^n \gamma_{i,k+1} \left(\mathbf{P}_{i,k+1|k+1} + (\mathbf{x}_{i,k+1|k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}) (\mathbf{x}_{i,k+1|k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1})' \right) \quad (4.36)$$

Tant que la poursuite n'est pas terminée revenir à l'étape (1).

4.4 Description du filtre $\alpha\beta$ -GSF appliqué au cas linéaire et un bruit non Gaussien

L'approximation d'une densité de bruit d'une forme complexe nécessite l'utilisation d'un grand nombre de composantes pour obtenir la précision souhaitée, cependant le GSF devient trop lourd pour un nombre de Gaussiennes assez élevé. Pour le cas linéaire, on peut tirer profit de la rapidité du filtre $\alpha\beta$ qui est connu comme étant un excellent outil pour l'estimation de la position et la vitesse d'un mobile [48]. Le filtre issu de la combinaison du filtre $\alpha\beta$ avec le filtre GSF est baptisé filtre $\alpha\beta$ à somme Gaussiennes, ' $\alpha\beta$ Gaussian Sum Filter ($\alpha\beta$ -GSF)' . Il permet un gain de temps de calcul important comparativement au filtre GSF de base. D'un autre point de vue on peut dire que le filtre $\alpha\beta$ -GSF représente le régime permanent du filtre GSF de base. Les équations du filtre $\alpha\beta$ correspondant à la composante i de la somme Gaussiennes sont :

$$\hat{\mathbf{x}}_{i,k+1|k} = \mathbf{F} \hat{\mathbf{x}}_{i,k|k} \quad (4.37)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{i,k+1|k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{i,k+1|k} + \mathbf{K}_{i,0} \hat{\mathbf{s}}_{i,k+1} \quad (4.38)$$

$$\hat{\mathbf{s}}_{i,k+1} = \mathbf{z}_{k+1} - \hat{\mathbf{z}}_{i,k+1|k} \quad (4.39)$$

$$\mathbf{K}_{i,0} = \begin{bmatrix} \alpha_{x,i} & \frac{\beta_{x,i}}{T} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{y,i} & \frac{\beta_{y,i}}{T} \end{bmatrix}' \quad (4.40)$$

$$\hat{\mathbf{z}}_{i,k+1|k} = \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_{i,k+1|k} + \eta_i \quad (4.41)$$

L'indice '0' dans $\mathbf{K}_{i,0}$ signifie que le gain ne change pas le long de la poursuite et de ce fait se calcule hors ligne. Les valeurs des paramètres pour ce calcul sont données par les équations (2.38) et (2.39) du chapitre 2. L'algorithme correspondant au filtre $\alpha\beta$ -GSF est donné ci-après :

1. Initialisation

- Prendre $\psi_{i,0} = \gamma_i$ défini dans (4.23), pour $i = 1, \dots, n$,
- Calculer le gain $\mathbf{K}_{i,0}$ pour $i = 1, \dots, n$ en utilisant l'équation (4.40),
- Evaluer la matrice de covariance de l'innovation $\mathbf{S}_{i,k+1|k}$, utilisée dans le GSF pour mettre à jour le poids de la Gaussienne i . Dans le filtre $\alpha\beta$ cette matrice n'est pas disponible; pour cette raison nous l'avons remplacée dans un travail antérieur [49], voir aussi [3], par l'équation (2.42). Dans le cas de la poursuite dans le plan (x, y) cela donne [46] :

$$\mathbf{S}_{i,k+1|k} = \mathbf{S}_{i,0} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{i,\mathbf{w},x}^2}{1-\alpha_{i,x}} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_{i,\mathbf{w},y}^2}{1-\alpha_{i,y}} \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

2. Filtrage

A chaque itération on calcule :

- L'état prédit et estimé en utilisant les équations (4.37) et (4.38), respectivement, pour chaque indice i .
- L'ensemble des poids normalisés, par :

$$\psi_{i,k+1} = \frac{c_{i,k+1}}{\sum_{j=1}^n c_{j,k+1}}, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.43)$$

$$c_{i,k+1} = \frac{\gamma_i}{|2\pi\mathbf{S}_{i,0}|} \exp\left(-\frac{1}{2} (\mathbf{z}_{k+1} - \hat{\mathbf{z}}_{i,k+1|k}) \mathbf{S}_{i,0}^{-1} (\mathbf{z}_{k+1} - \hat{\mathbf{z}}_{i,k+1|k})'\right) \quad (4.44)$$

- On évalue l'estimée globale par :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} = \sum_{i=1}^n \psi_{i,k+1} \hat{\mathbf{x}}_{i,k+1|k+1} \quad (4.45)$$

- Pour l'étape suivante on prend pour toutes les valeurs de i :

$$\hat{\mathbf{x}}_{i,k+1|k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.46)$$

L'équation (4.46) permet d'éviter l'augmentation du nombre de Gaussiennes [18, 47]. Dans la figure 4.2 on donne le schéma d'un cycle de l'algorithme proposé.

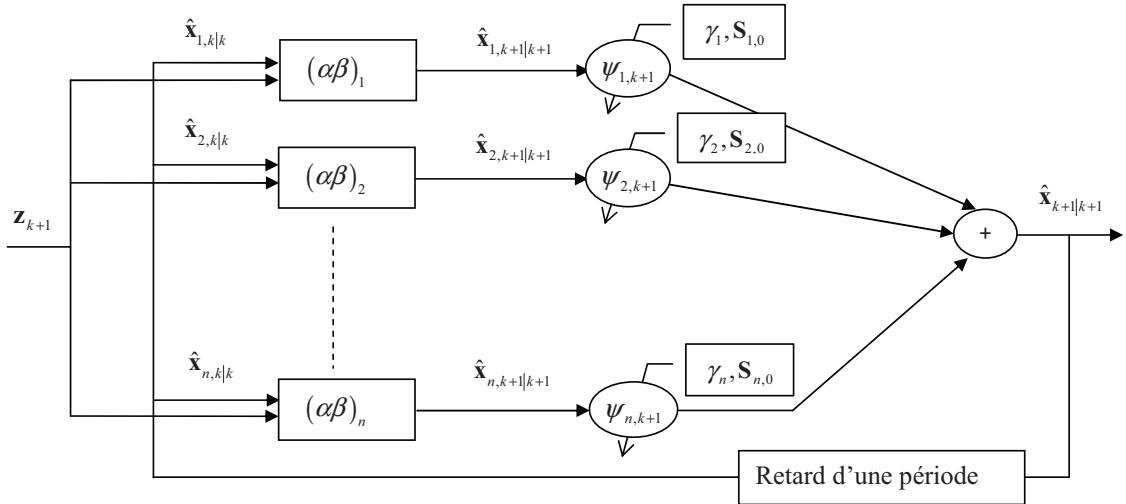


FIGURE 4.2: Architecture de l'algorithme $\alpha\beta$ -GSF.

4.5 Simulations

Trois types de simulations sont présentés dans cette partie. Dans la première on effectue une mise en œuvre du filtre de Kalman en présence d'un bruit non Gaussien. Dans la seconde simulation une comparaison est effectuée entre le filtre de Kalman étendu et le filtre à somme Gaussiennes appliqués à la poursuite d'une cible avec une mesure non linéaire, en présence d'un bruit de mesure Gaussien et non Gaussien. Dans la troisième simulation on montre l'avantage apporté par le filtre qu'on a proposé, à savoir le $\alpha\beta$ -GSF et ses limites.

Dans toutes ces simulations on considère le scénario décrit dans la section 2.6 du deuxième chapitre, et repris ici. La cible se déplace dans le plan sans effectuer de manœuvres. Ainsi le système est représenté par la formule décrivant un système dynamique linéaire, équation (2.1) du deuxième chapitre. Initialement, la cible se trouve à la position (10km, 10km) ; elle se déplace ensuite à une vitesse égale à $20m/s$, avec un cap de 45° . La figure 4.3 illustre la trajectoire parcourue par la cible durant 200s. A l'origine se situe un radar fournissant des mesures qui dans le cas linéaire correspondent à la position de la cible dans le plan (x, y) et dans le cas non linéaire à la portée et l'azimut (r, θ). Le bruit de système est choisis Gaussien avec un écart type $\sigma_w = 0.1m/s^2$, et le temps d'échantillonnage est $T = 1s$.

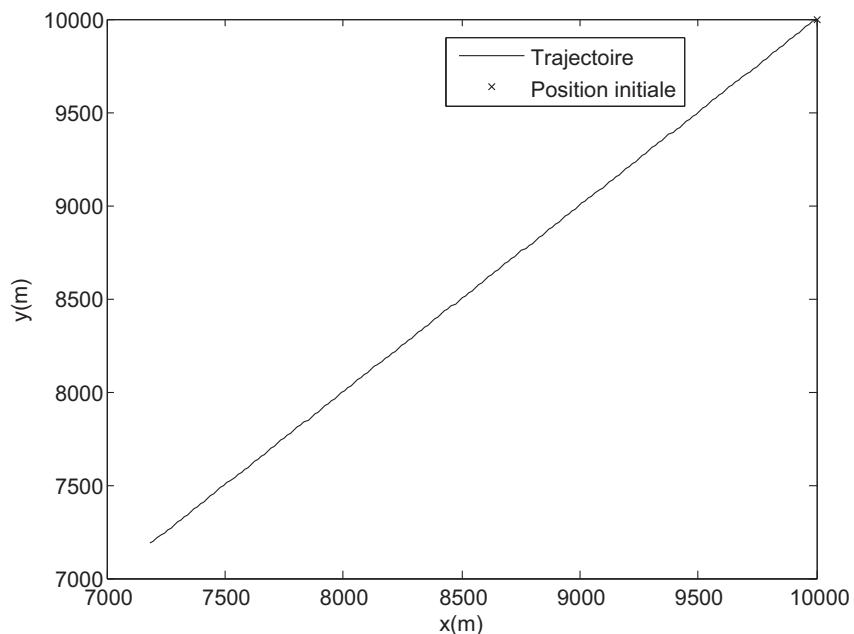


FIGURE 4.3: Trajectoire de la cible.

4.5.1 Types du bruit non Gaussien

Le premier type de bruit non Gaussien considéré dans ces simulations est un bruit Gaussien '*contaminé*' par un autre bruit connu sous le nom bruit des reflets, '*glint noise*'. Il est représenté par exemple par deux Gaussiennes concentriques, la première ayant une variance petite alors que la variance de la deuxième est beaucoup plus grande ; le facteur de proportionnalité entre les deux est noté ρ^2 .

On attribue à chacune de ces Gaussiennes un poids. La densité dont la variance est petite est considérée comme la plus probable. La deuxième densité représente les reflets et est considérée comme étant une *contamination* de la première avec une probabilité égale à ε . En pratique ce facteur est pris dans l'intervalle $[0, 0.25]$ [47]. La probabilité de la première Gaussienne est égale à $1 - \varepsilon$.

La figure 4.4 illustre ce type de bruit dans le cas où il est composé de deux densités : la première densité est de probabilité égale à 0.75 et de variance égale à 4, alors que le deuxième est d'une variance égale à 16. La densité de probabilité résultante à la forme :

$$p(x) = (1 - \varepsilon) N(0, \sigma^2) + \varepsilon N(0, (\rho\sigma)^2) \quad (4.47)$$

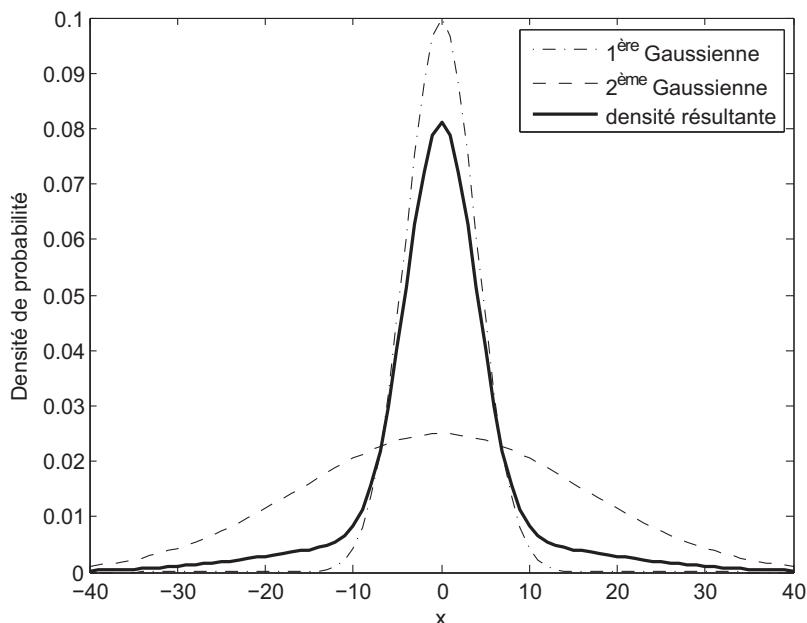


FIGURE 4.4: Illustration d'un bruit Gaussien contaminé par un bruit des reflets.

Le deuxième type de bruit est le bruit uniforme. À la différence du premier, ce type de bruit présente une forte discontinuité aux extrémités. La figure 4.5 montre une densité uniformément distribuée sur l'intervalle $[-0.5, +0.5]$ et les approximations correspondant à différentes valeurs du nombre de composantes. On remarque que la mixture de Gaussiennes s'approche de la vraie densité au fur et à mesure que le nombre de composantes augmente. Cette mixture de Gaussiennes est obtenue en utilisant la fonction '*gmdistribution.fit*' du logiciel *Matlab* avec un nombre variable

de composantes Gaussiennes dont les variances sont forcées à être identique et cela en utilisant les options de cette fonction. Notons que cette fonction utilise principalement l'algorithme EM et la notion de vraisemblance pour estimer les paramètres de la mixture.

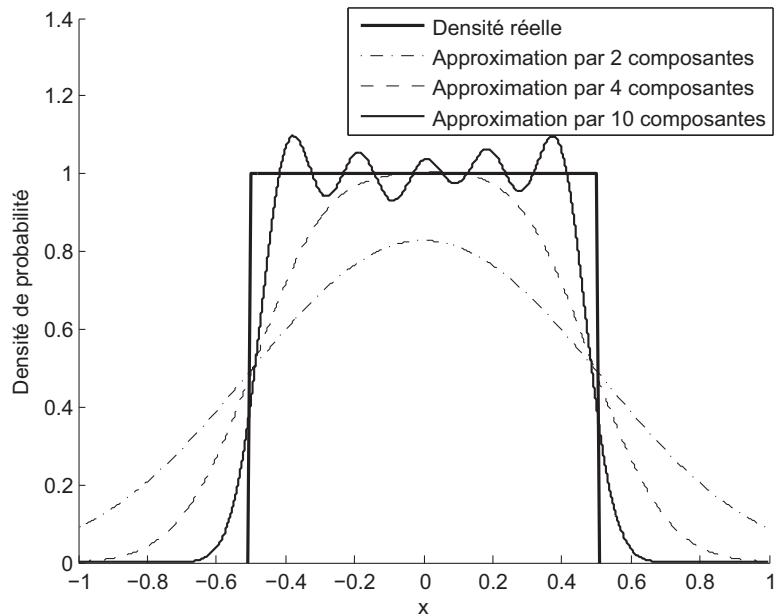


FIGURE 4.5: Approximation d'une densité uniforme par une mixture à 2, 4 et 10 composantes Gaussiennes.

4.5.2 Limites du filtre de Kalman en présence d'un bruit non Gaussien

Le bruit de mesure dans ce cas est constitué de deux Gaussiennes centrées, la principale a une matrice de covariance égale à \mathbf{R}_1 , alors que celle des reflets est $\mathbf{R}_2 = \rho^2 \mathbf{R}_1$, avec :

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 2500m^2 & 0 \\ 0 & 2500m^2 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

Les filtres sont initialisés par un vecteur aléatoire Gaussien centré autour de la valeur réelle de l'état avec une matrice de covariance égale à $\mathbf{P}_{0|0}$, avec :

$$\mathbf{P}_{0|0} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_0 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

où :

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} 100^2 m^2 & 0 \\ 0 & 10^2 m^2/s^2 \end{bmatrix}$$

La figure 4.6 représente la RCEQM du filtre de Kalman pour ρ fixe et ε variable, tandis que dans la figure 4.7 on fixe ε et on fait varier ρ . On note que le cas d'une seule Gaussienne se manifeste indifféremment pour $\rho = 0$ ou $\varepsilon = 0$. D'après ces deux figures, on remarque que la RCEQM du filtre de Kalman augmente avec l'augmentation du facteur ρ et du facteur de contribution des bruits de reflets ε . Comme conclusion on peut dire que la RCEQM du filtre de Kalman augmente d'autant plus que le bruit s'éloigne de la forme Gaussienne.

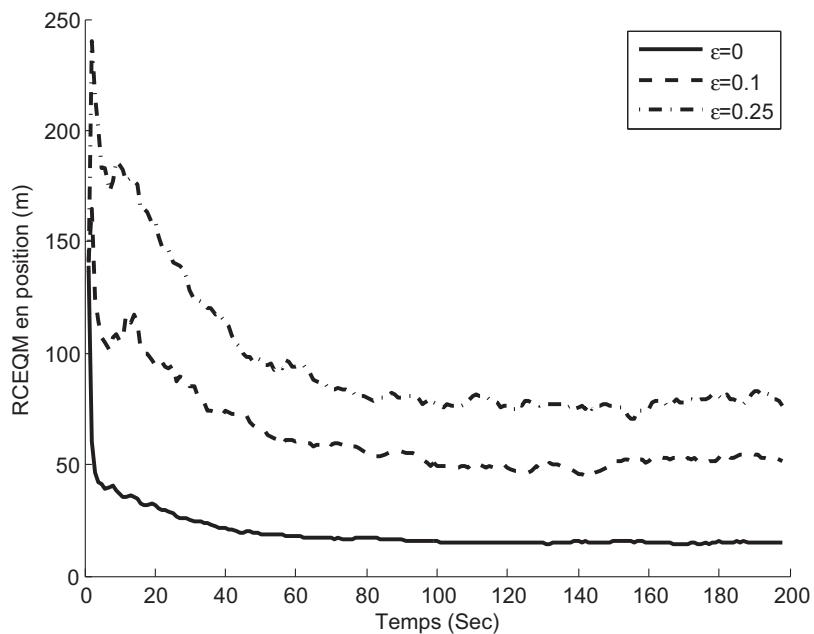
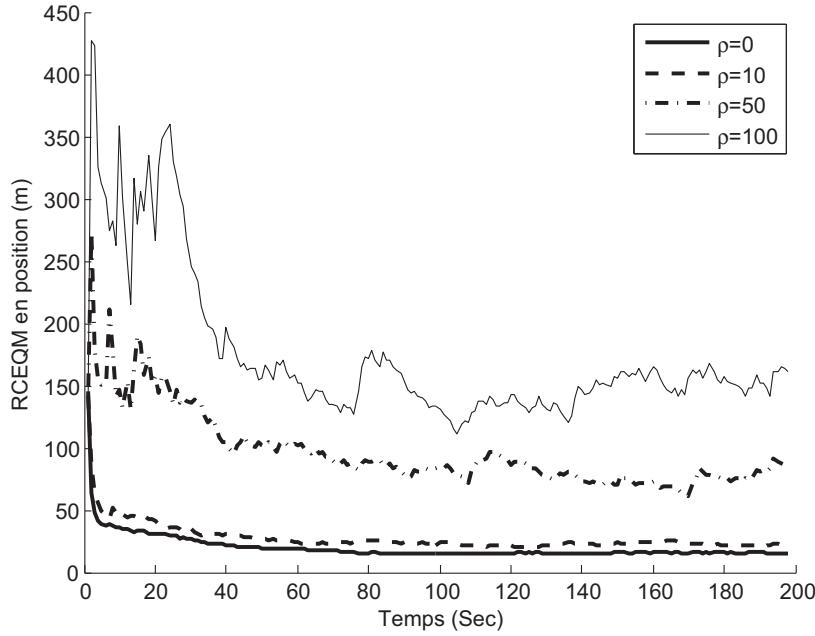


FIGURE 4.6: RCEQM en position du filtre de Kalman pour $\rho = 10$.

FIGURE 4.7: RCEQM en position du filtre de Kalman pour $\varepsilon = 0.01$.

4.5.3 Comparaison entre l'EKF et l'AGSF

Dans cette simulation le système est non linéaire et le bruit de mesure est non Gaussien. Comme il peut être attendu, les deux filtres EKF et AGSF présentent les mêmes performances en termes de RCEQM lorsque les variances des bruits de mesures sont petites figures 4.8. Pour des variances plus importantes, l'AGSF prend l'avantage sur l'EKF figure 4.9. Dans les deux cas le filtre AGSF semble être plus consistant car la valeur de son ANEES est plus proche de 1. On note aussi que si les composantes du bruit de mesure ne sont pas centrées, l'EKF présente un biais d'estimation alors que l'AGSF n'en est pas affecté. Dans ce cas, les matrices de covariance du bruit de mesure sont données par :

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} \sigma_{R_1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta_1}^2 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} \sigma_{R_2}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta_2}^2 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

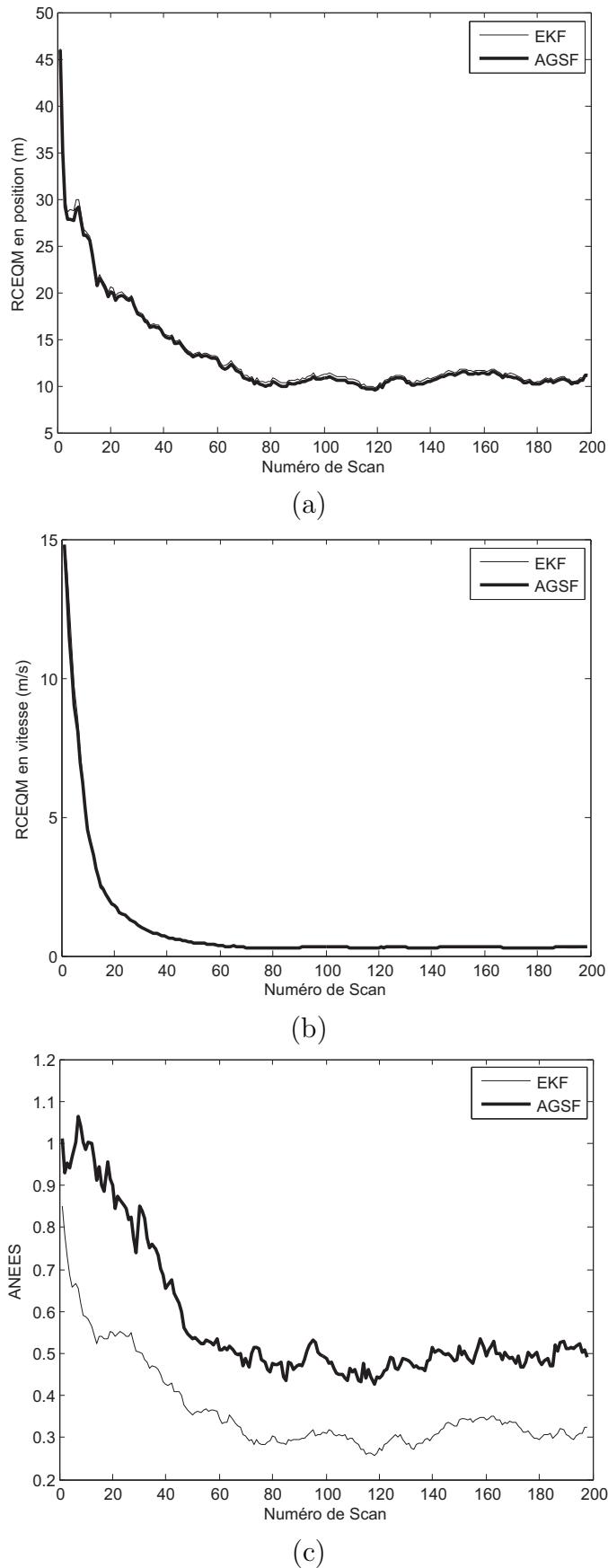


FIGURE 4.8: La RCEQM en (a) position, (b) vitesse et (c) ANEES des filtres EKF et AGSF, pour $\varepsilon = 0.25$, $\sigma_{\theta_1} = 0.01^\circ$, $\sigma_{\theta_2} = 0.1^\circ$, $\sigma_{R_1} = \sigma_{R_2} = 50m$.

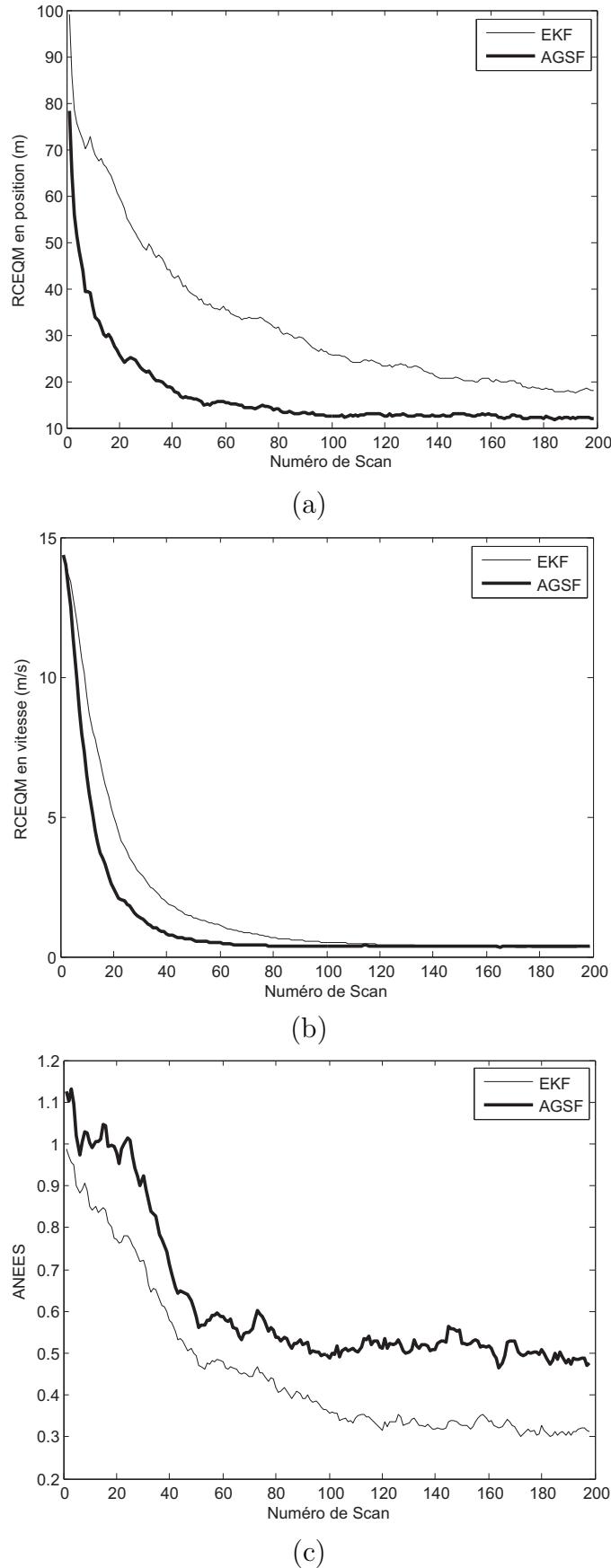


FIGURE 4.9: La RCEQM en (a) position, (b) vitesse et (c) ANEES des filtres EKF et AGSF, pour $\varepsilon = 0.25$, $\sigma_{\theta_1} = 0.1^\circ$, $\sigma_{\theta_2} = 1^\circ$, $\sigma_{R_1} = \sigma_{R_2} = 50m$.

4.5.4 Comparaison entre l'GSF et le $\alpha\beta$ -GSF

A la figure 4.10 on compare les RCEQM en position et en vitesse obtenues par les filtres GSF et $\alpha\beta$ -GSF, pour une faible contribution des bruits de reflets $\varepsilon = 0.01$ et différentes valeur de ρ . Les performances du filtre $\alpha\beta$ -GSF sont très satisfaisantes et le gain en temps qu'il procure est presque égale à 3.5.

En faisant augmenter la contribution des bruits de reflets le filtre GSF conserve presque les mêmes performances, tandis que celles du filtre $\alpha\beta$ -GSF se dégradent de façon significative pour les cas limites figures 4.11 et 4.12. En conclusion, nos simulations montrent que le filtre proposé converge vers l'état statique du GSF pour $\varepsilon < 0.07$ et $\rho < 50$ et que, pour des valeurs modérées du coefficient $\varepsilon \sim 0.1$, le filtre donne de bons résultats pour $\rho < 20$.

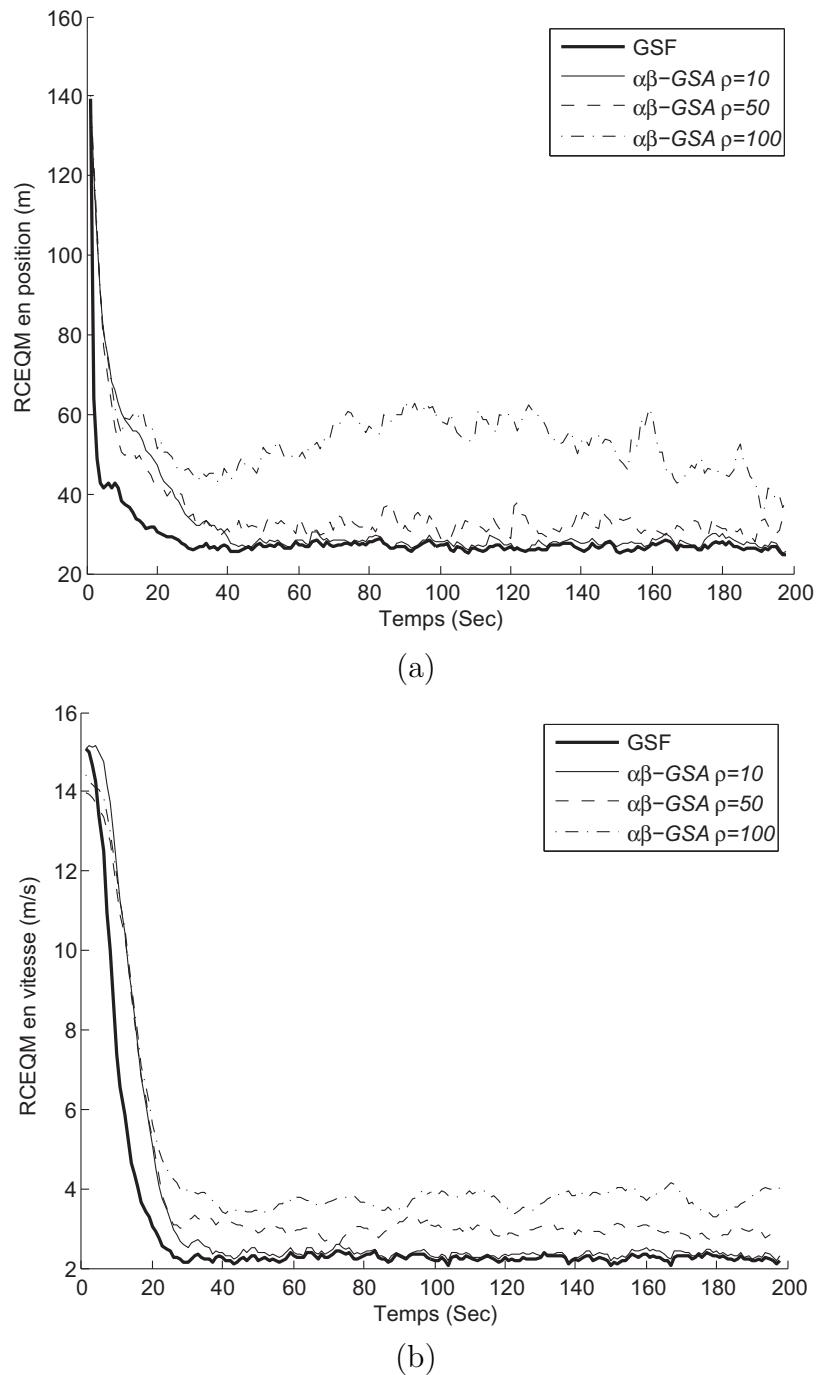


FIGURE 4.10: Les RCEQM en (a) position et (b) vitesse des filtres GSF et $\alpha\beta$ -GSF pour $\varepsilon = 0.01$.

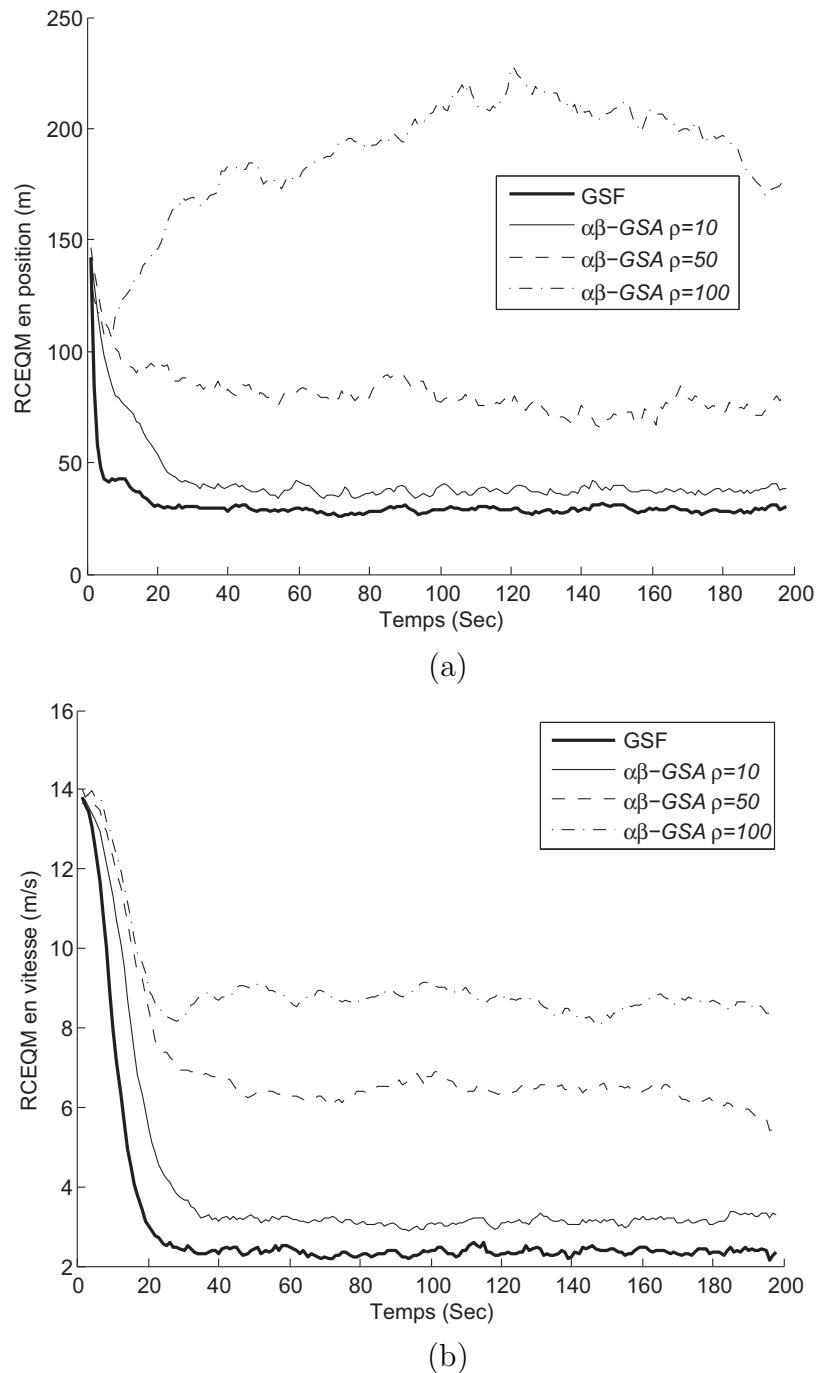


FIGURE 4.11: Les RCEQM en (a) position et (b) vitesse des filtres GSF et $\alpha\beta$ -GSF pour $\varepsilon = 0.1$.

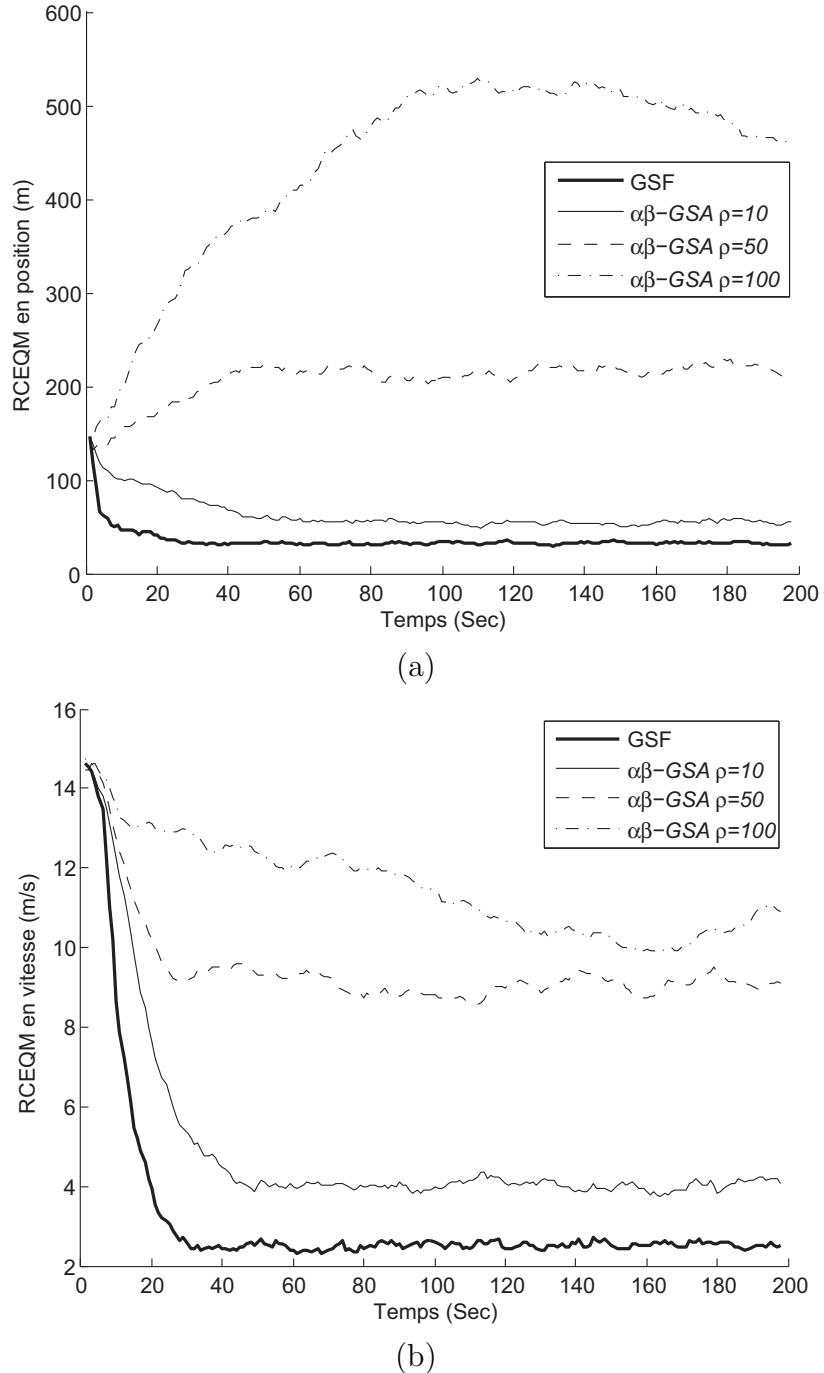


FIGURE 4.12: Les RCEQM en (a) position et (b) vitesse des filtres GSF et $\alpha\beta$ -GSF pour $\varepsilon = 0.25$.

Pour voir l'effet de l'approximation de la densité du bruit de mesure par une somme Gaussiennes, on choisit un bruit distribué uniformément sur l'intervalle $[-200m, +200m]$. Cela a pour objectif d'une part de montrer l'efficacité de notre filtre vis-à-vis d'un bruit non Gaussien par nature et d'autre part de voir l'effet du nombre de Gaussienne sur la RCEQM.

La figure 4.13 présente les résultats du filtre $\alpha\beta$ -GSF en fonction du nombre de composantes utilisées pour l'approximation de la densité uniforme. D'après ces résultats, la RCEQM diminue autant plus que la précision de l'approximation augmente. Au-delà d'un certain nombre de composantes, la précision reste presque inchangée. On remarque par exemple qu'il n'y a presque pas de différence entre les RCEQM correspondant à 20 et 50 composantes. Il est donc inutile de choisir un nombre de composantes trop élevé, car ceci ne ferait qu'alourdir le filtre.

L'avantage majeur du filtre proposé par rapport au GSF est le gain en temps de calcul. Pour voir comment évolue ce gain lorsque le nombre de composantes augmente, on a tracé à la figure 4.14 le rapport entre les temps d'exécution de ces deux filtres. On remarque que le filtre $\alpha\beta$ -GSF est nettement plus rapide. En effet il peut réaliser le filtrage dans un temps qui est inférieur à un quart de celui requis par le filtre GSF, lorsque le nombre de composantes dépasse 5.

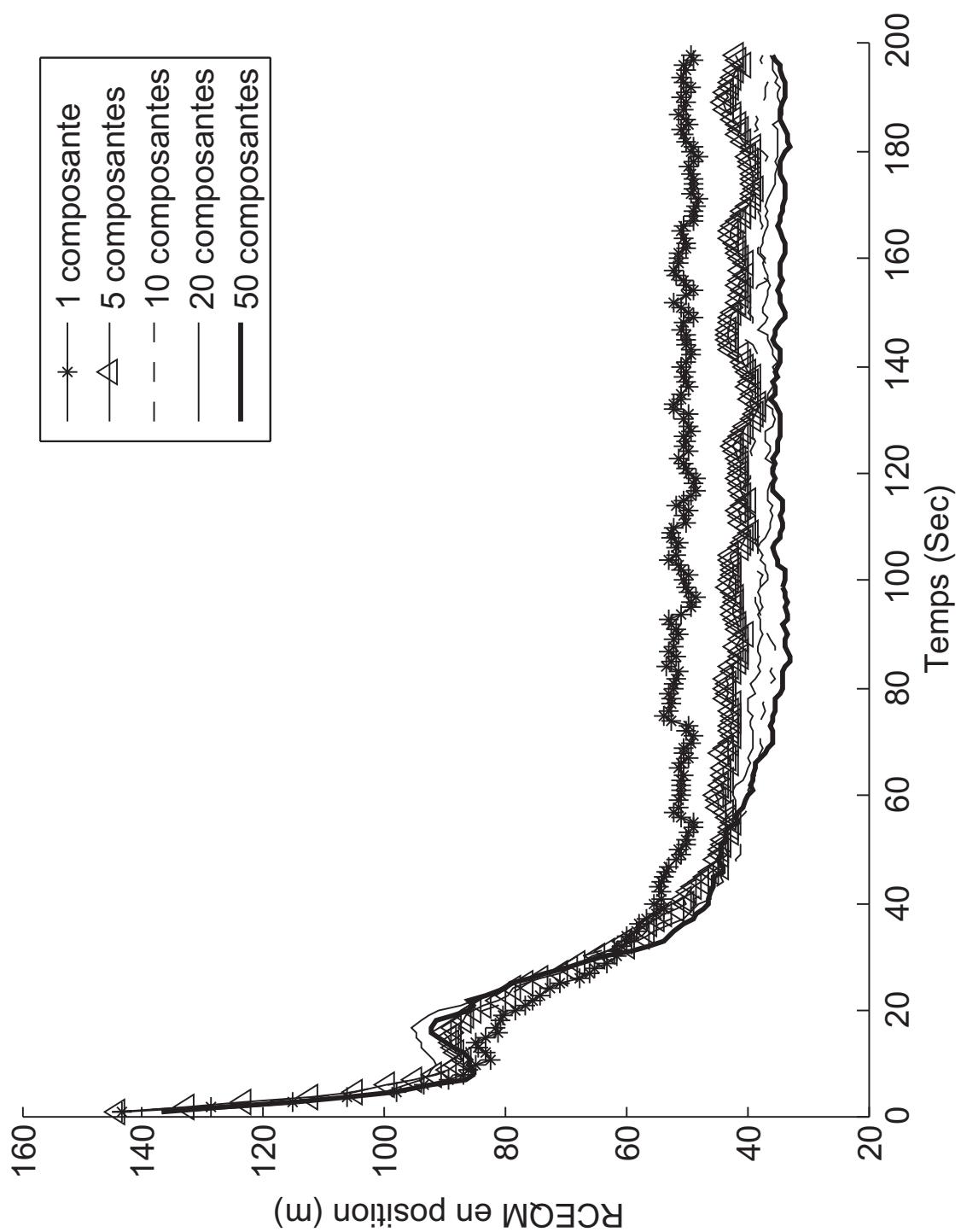


FIGURE 4.13: La RCEQM en position du filtre $\alpha\beta$ -GSF en fonction du nombre de composantes.

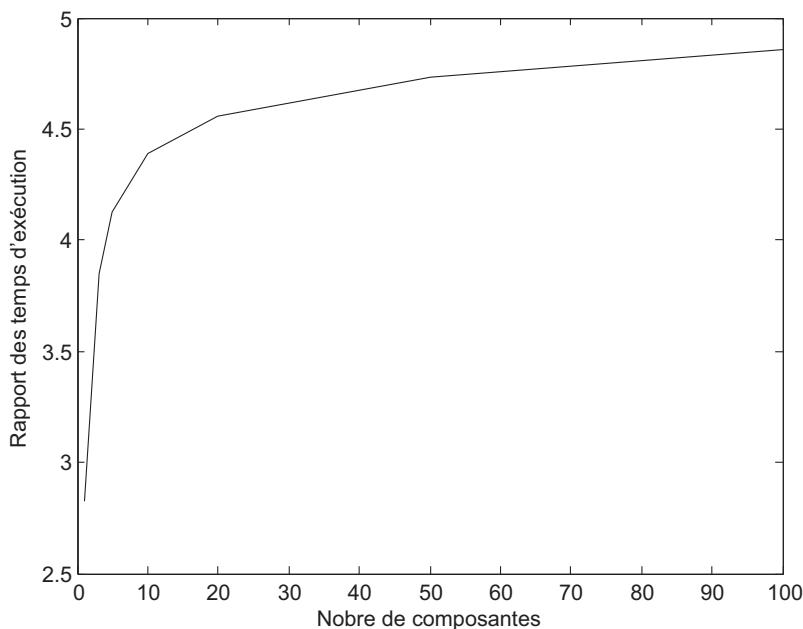


FIGURE 4.14: . Rapport entre les temps d'exécution des filtres GSF et $\alpha\beta$ -GSF en fonction du nombre de composantes.

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté l'extension du filtre de Kalman aux problèmes non linéaire et/ou non Gaussiens en appliquant le filtre à somme Gaussiennes, '*Gaussian Sum Filter (GSF)*'. Ce filtre a comme principe de décomposer une densité de probabilité quelconque en une somme Gaussiennes, et de dédier à chaque composante un filtre de Kalman. Ainsi on dispose d'un ensemble de filtres de Kalman qui se déroulent en parallèle où chacun est pondéré par un poids calculé à partir de la vraisemblance issue de chaque filtre.

Vue le temps de calcul pris par le filtre GSF, et qui devient plus onéreux lorsque le nombre de composantes devient plus important ; pour remédier à ce problème, nous avons présenté en dernier lieu dans ce chapitre notre première contribution baptisée le filtre $\alpha\beta$ à somme Gaussiennes ($\alpha\beta$ -GSF) [46]. Ce filtre bénéficie de la rapidité du filtre $\alpha\beta$ et de la robustesse du filtre GSF vis-à-vis de la nature des bruits non Gaussiens. Enfin, toutes ses constatations ont été démontré à l'aide de simulations.

Chapitre 5

Application du filtre de Kalman au cas de cible manœvrante

5.1 Introduction

Dans les chapitres précédents on a supposé que le bruit dont on connaît les statistiques, est la seule source d'incertitude. Dans ce chapitre on va étendre notre problème aux cas où une entrée inconnue apparaît subitement. Cette entrée est une commande qui engendre une manœuvre de la cible. Plusieurs travaux ont traité le problème de poursuite des cibles manœuvrantes. Certains proposent d'intégrer un détecteur de manœuvre afin d'améliorer la qualité de la poursuite [50]. Singer [51] considère que la manœuvre est de nature aléatoire et modélise l'accélération par un processus aléatoire avec une autocorrélation exponentielle. Cependant, l'analyse des performances de cet algorithme montre que la précision s'améliore pendant la poursuite d'une cible manœuvrante et se dégrade lors de la poursuite d'une cible non manœuvrante. Castella [52] proposa alors un algorithme qui effectue un ajustement continu du niveau du bruit de processus. Toutefois, cet algorithme présente un retard lors de la détection du début et de la fin de la manœuvre. D'autres travaux suggèrent le recours à des estimateurs à plusieurs modèles, 'Multiple Model (MM)' [1, 53–55].

On présente brièvement au début de ce chapitre, les techniques de poursuite d'une cible manœuvrante en utilisant un seul modèle. On parlera alors des suppositions faites à savoir, la considération que la manœuvre est soit une entrée fixe à déterminer soit un processus aléatoire obéissant à une certaine loi. On abordera ensuite les techniques qui se basent sur les estimateurs à plusieurs modèles, en insistant sur l'algorithme le plus connu qui est nommé modèles multiples interagissant, '*Interacting Multiple Model* (IMM)'. Enfin on présentera les résultats de simulations portant sur un scénario d'ATC, où on effectue la poursuite d'une cible manœuvrante par un seul filtre et par l'algorithme IMM.

5.2 Poursuite de cible manœuvrante par un algorithme à modèle unique

Dans la littérature, plusieurs méthodes ont été proposées pour la poursuite d'une cible manœuvrante en utilisant un seul filtre. Les solutions proposées peuvent être classées en deux grandes familles [3] :

5.2.1 Méthodes basées sur la détection de la manœuvre

L'entrée inconnue est constamment estimée, on considère dans ce cas que l'entrée est constante pendant un intervalle de temps. L'estimation peut être faite en utilisant le critère des moindres carrés, et le résultat est soit utilisé pour corriger l'état estimé, soit considéré comme étant une composante du vecteur d'état augmenté, et par conséquent sera ré-estimé séquentiellement. Parmi les méthodes les plus connues dans cette classe on cite :

1. Estimation de l'entrée (IE)

Cette première approche est une technique d'estimation de l'entrée, '*Input Estimation* (IE)', proposée initialement par chan et al. [56]. L'amplitude de la manœuvre qui est supposée être déterministe et constante durant une

certaine période de temps, est estimée par la méthode des moindres carrés en utilisant une fenêtre glissante. Un filtre de Kalman du deuxième ordre est utilisé si l'entrée estimée est non significative, autrement, l'état de ce filtre est corrigé en utilisant l'estimée de l'entrée. D'autres travaux ont succédé à ce travail, en cherchant à améliorer ses performances [57–59].

2. Vecteur d'état à dimension variable (VSD)

Cette seconde approche est appelée algorithme d'état à dimension variable, 'Variable State Dimension (VSD)' [60]. Deux modèles y-sont utilisés : l'un est approprié pour un mobile qui évolue à vitesse constante et l'autre à un mobile qui manœuvre. La transition d'un modèle à un autre à lieu au début et à la fin de la manœuvre. L'inconvénient de cette approche est l'augmentation soudaine de la charge de calcul, due à la nécessité de réinitialiser les filtres au moment de la transition [50].

5.2.2 Modélisation de la manœuvre par un bruit

Dans ce cas on traite la manœuvre comme étant un bruit de processus supplémentaire, ce qui peut nécessiter le recours à un vecteur d'état augmenté. Cependant, considérer que la manœuvre est de nature aléatoire n'est pas toujours réaliste¹. Dans cette catégorie, les modèles peuvent être classés suivant les propriétés statistiques du processus qui modélise la manœuvre, qui peut être un bruit blanc : soit un processus de Markov soit encore un processus semi-Markov [7]. Lorsque la manœuvre se limite à une accélération, deux modèles peuvent être envisagés :

1. L'accélération est un bruit blanc discret (DWNA)

C'est le cas le plus simple. Il se base sur le modèle non manœuvrant c'est-à-dire que le vecteur d'état est du deuxième ordre, mais avec un bruit de système qui représente l'accélération. En pratique, l'écart type du bruit du système σ_w doit être choisi dans l'intervalle $[0.5a_{\max}, a_{\max}]$, où a_{\max} représente l'accélération maximale pendant l'intervalle de mise à jour [3].

1. Les pilotes, dans le cas de l'ATC, effectuent des manœuvres (accélération ou rotation) à amplitude constante, connue et qui durent un certain moment.

2. L'accélération est un processus de Wiener (DWPA)

Il est connu aussi sous l'appellation modèle à accélération constante, '*Constant-Acceleration model* (CA)', ou plus précisément, modèle à accélération quasi-constante, '*Nearly Constant Acceleration model* (NCA)' [3]. On utilise un modèle du troisième ordre avec un bruit de système qui représente l'incrément de l'accélération entre deux scans, ce bruit est supposé être blanc. En pratique, l'écart type du bruit du système est choisi dans l'intervalle $[0.5\Delta a_{\max}, \Delta a_{\max}]$, où Δa_{\max} représente l'accroissement de l'accélération maximal possible pendant l'intervalle de mise à jour [3].

Remarque Lorsque le bruit est coloré, c'est-à-dire lorsque l'entrée n'est pas considérée comme étant un bruit blanc, l'état ne représente plus une séquence de Markov, alors on ne peut pas appliquer les techniques d'estimation standards. Dans ce cas, on doit reformuler le problème, par exemple augmenter le vecteur d'état par le bruit de processus, puis considérer une autre séquence blanche qui gouverne le nouveau système. De cette façon, on obtient un nouvel état qui représente une séquence de Markov. Dans le présent manuscrit on ne traite pas ce cas.

5.3 Poursuite de cible manœuvrante par un algorithme à modèles multiples (MM)

L'algorithme à modèles multiples, '*Multiple Model* (MM)', suppose qu'à un instant donnée le système suit un modèle parmi plusieurs, on dit qu'il est à un certain *mode*. Les modèles diffèrent en termes de structure ou encore en termes de niveau de bruit. Un tel système est appelé *hybride*, car à la fois, il possède une structure/paramètres discrète et il a des incertitudes continues (bruits additifs). On attribue initialement, à chaque modèle une probabilité à priori qu'il soit *correct*, ensuite on met à jour, la probabilité du filtre correspondant en utilisant l'approche de Bayes [3]. La prise en compte du mode dans les équations du système et de mesure, nécessite l'introduction d'une variable $s(t)$ dite le mode du système ou

l'état modale, '*model state*'. Ainsi les équations du système et celle de la mesure pour un système hybride se généralisent par :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), s(t), \mathbf{w}(t), t) \quad (5.1)$$

$$\mathbf{z}(t) = h(\mathbf{x}(t), s(t), \mathbf{v}(t), t) \quad (5.2)$$

Le comportement de la variable $s(t)$ est décrit par une fonction en escalier, c'est-à-dire elle reste constante ou effectue un saut. On note aussi que cette fonction est continue à droite, cela signifie que l'instant de début de la manœuvre est l'instant du saut, voir figure 5.1.

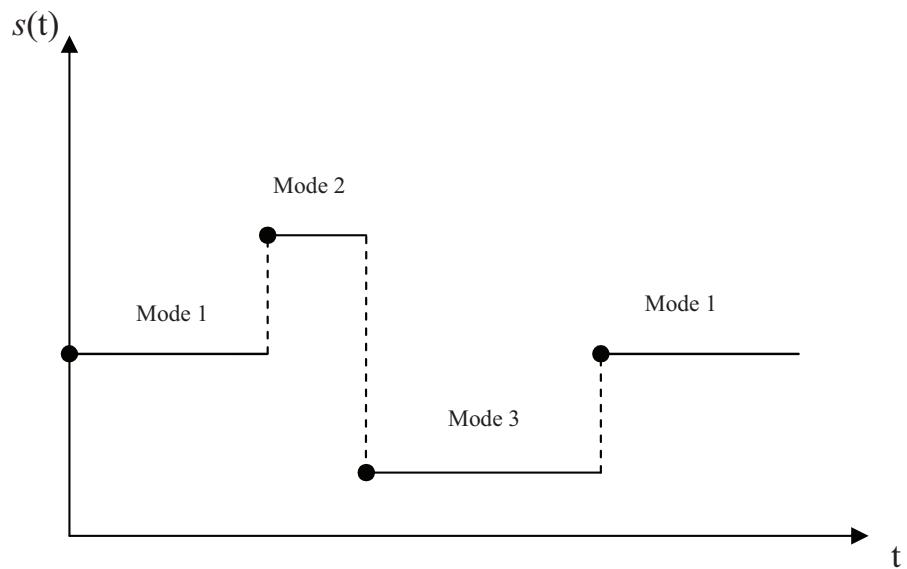


FIGURE 5.1: Exemple de la fonction $s(t)$ à trois modes.

5.3.1 Structure d'un algorithme MM

L'algorithme à modèles multiples comporte principalement 4 étages [2] :

1. La détermination de l'ensemble des modèles

Cela englobe à la fois les modèles définis hors ligne comme les modèles qui peuvent être adaptés en ligne.

2. La stratégie de coopération

Se base sur les mesures prises en compte pour s'adapter aux incertitudes discrètes relatives aux choix du modèle, et principalement celles relatives aux hypothèses faites sur les séquences des modèles, cela inclut :

- l'élimination des séquences peu probables,
- la fusion des séquences '*similaires*',
- le choix de la séquence la plus probable,
- la mise en place des stratégies itératives, par exemple celles qui se basent sur l'algorithme de maximisation de la moyenne, '*Expectation Maximisation* (EM)'.

3. Le filtrage conditionnel

Cette étape est similaire à l'estimation d'état dans le cas des systèmes conventionnels. Dans ce cas aussi les filtres peuvent être récursifs ou batch.

4. La génération de l'estimée globale

On utilise les mesures ainsi que les estimées émanant de tous les filtres, soit en effectuant la fusion soit en prenant la sortie du '*mieux*' filtre.

La structure générale de l'algorithme MM est illustrée à la figure 5.2 pour le cas de deux modes seulement. Les flèches bouclées entre les filtres et le bloc de coopération représentent les solutions possibles qui nécessitent le multi scan. Les flèches verticales entre les filtres et le bloc de coopération désignent la coopération et l'interaction pour une seule boucle.

5.3.2 Variantes de l'algorithme MM

La génération de la sortie, la stratégie de coopération et l'adaptation de l'ensemble des modèles sont les principaux points qui ont donné naissance aux algorithmes de base suivants :

1. Magil en 1965 [53] a proposé une approche adaptative au problème d'estimation d'une variable aléatoire, stochastique, discrète et qui suit un processus

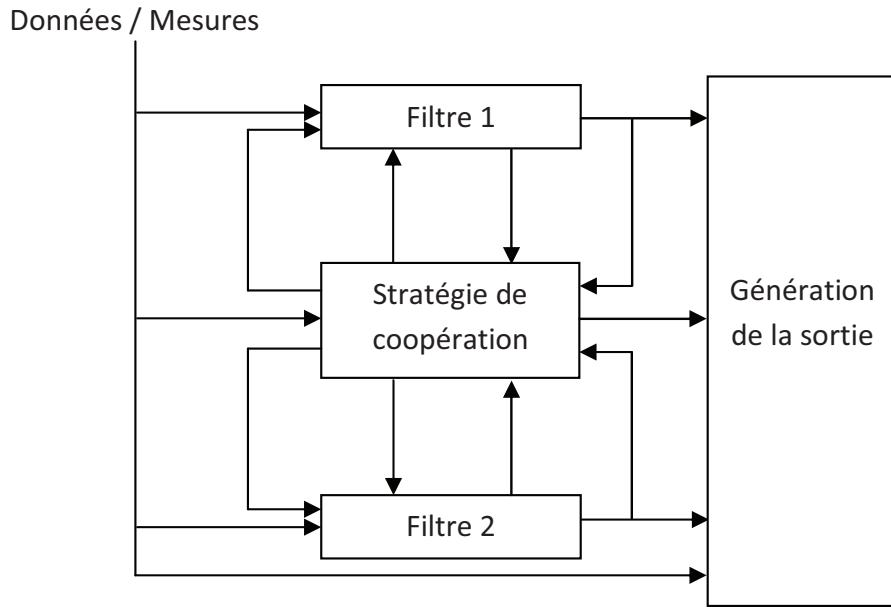


FIGURE 5.2: Structure générale d'un algorithme MM à deux modes.

aléatoire Gaussien dont les paramètres (vecteur initial et/ou matrice de covariance) sont inconnus mais qui appartiennent à un ensemble connu et fini ; l'estimée est donc constituée à partir d'estimées pondérées issues de plusieurs filtres indépendants. Ces techniques ont connu plusieurs appellations la plus commune est : les algorithmes multi-modèles autonomes, '*Autonomous Multiple Model* (AMM)'. Par exemple, soit un système de réception de données où on ne peut pas garantir qu'il y a eu transmission, alors on peut considérer qu'on à deux matrices de covariances de la mesure, l'une qui est du bruit seulement et l'autre correspondant à l'ensemble bruit plus signal utile.

2. D'autres versions sous optimales de l'algorithme MM ont été proposées dans la littérature. Parmi ces versions on cite : l'estimateur à modèles multiples statique, '*Static Multiple Models*' (SMM), l'estimateur à modèles multiples dynamique, '*Dynamic Multiple Models*' (DMM), l'estimateur pseudo Bayésien généralisé du premier ordre, '*Generalized Pseudo-Bayesian estimator of first order*' (GPB1) et celui du deuxième ordre (GPB2) [3].
3. Blom a mis au point en 1985 l'algorithme connu sous l'appellation : algorithme à modèles multiples interagissant, '*Interacting Multiple Model* (IMM)'. Cet algorithme est une version sous optimale de l'algorithme MM qui a connu

un grand succès, après les travaux réalisés par Bar-Shalom et al. [1, 54], spécialement dans le domaine de la poursuite. Ce succès est du au fait que l'IMM réalise un très bon compromis entre complexité et performances, ce qui fait de lui un très bon candidat en pratique. De ce fait, uniquement cet algorithme fera l'objet de la suite du présent chapitre.

5.4 Description de l'algorithme à modèles multiples interagissant (IMM)

La version sous optimale la plus connue de l'algorithme MM est l'algorithme à modèles multiples interagissant, '*Interacting Multiple Model* (IMM)'. Il a été montré que cet estimateur hybride d'état est l'un parmi les plus attractifs [55]. Dans l'IMM, r filtres s'exécutent en parallèle, où r étant le nombre de modes possibles pour la cible, on note donc que chaque filtre est dédié à un mode du système. Les principales étapes de l'IMM sont [55] :

- 1. Interaction et mixage '*Interaction/Mixing*'**

Les dernières estimées issues de chaque filtre sont combinées pour générer les conditions initiales de chaque filtre pour le cycle actuel. Ainsi l'estimée initiale de chaque filtre est calculée par la combinaison des estimées précédentes fournies par les différents filtres.

- 2. Le filtrage '*Filtering*'**

Les r filtres correspondant aux différents modes opèrent en parallèle.

- 3. Evaluation des probabilités des différents modes '*Mode probability evaluation*'**

La probabilité de chaque mode est calculée en se basant sur la vraisemblance correspondante.

- 4. Combinaison '*Combination*'**

Dans cette dernière étape, l'estimée globale de l'état est calculée en sommant les estimées fournies par les différents filtres, pondérées par les probabilités des modes correspondants.

La caractéristique qui rend l'IMM la version la plus attractive parmi les algorithmes MM sous optimaux, est la première phase, où les estimées des différents filtres sont combinées, qui est justement le point commun entre cet estimateur et l'estimateur MM optimal [61]. A titre d'illustration, la figure 5.3 présente l'organigramme d'un cycle de l'algorithme IMM à deux modes. Nous allons dans ce qui

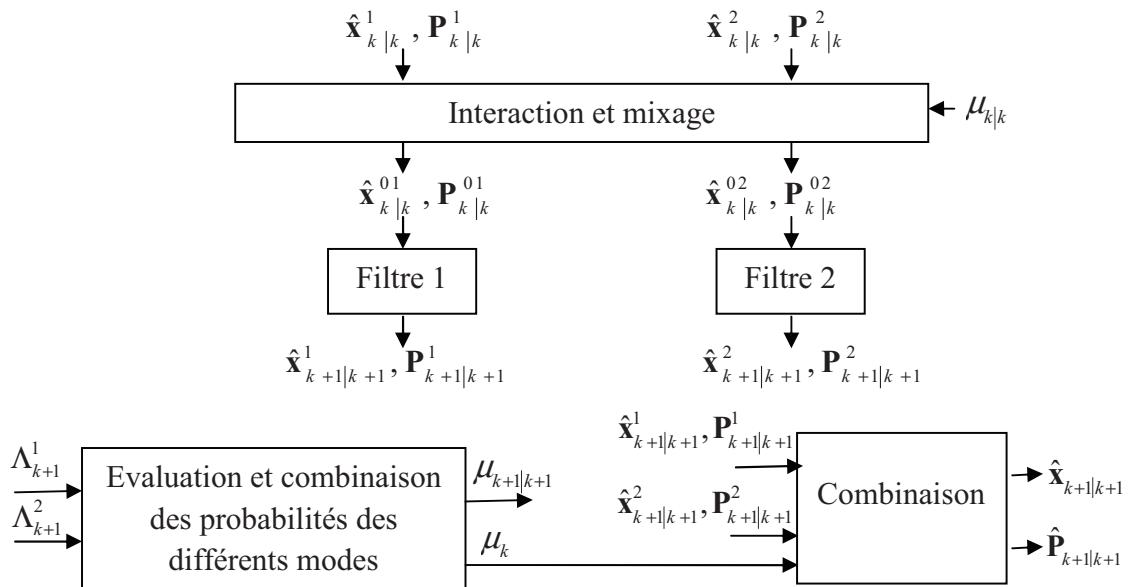


FIGURE 5.3: Un cycle de l'algorithme IMM à deux modes.

suit détailler les étapes de l'algorithme IMM pour r modes [50] :

1. Calcul des probabilités de mélange des modèles

La probabilité que le modèle M^i était effectif à l'instant k , étant donné que le modèle M^j est effectif à l'instant $k + 1$ et conditionnellement aux mesures \mathbf{Z}^k reçues jusqu'à l'instant k est calculée à partir de :

$$\begin{aligned}
 \mu_{k|k}^{i/j} &= P(M_k^i | M_{k+1}^j, \mathbf{Z}^k) \\
 &= \frac{1}{\bar{c}_j} P(M_{k+1}^j | M_k^i, \mathbf{Z}^k) P(M_k^i | \mathbf{Z}^k) \\
 &= \frac{1}{\bar{c}_j} p_{ij} \mu_k^i, \quad i, j = 1, \dots, r
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

où :

p_{ij} : La probabilité à priori de transition du modèle M^i au modèle M^j ,

μ_k^i : la probabilité que le modèle M^i soit effectif à l'instant k ,

r : le nombre de modèles en interaction,

\bar{c}_j : constante de normalisation calculée à partir de

$$\bar{c}_j = \sum_{i=1}^r p_{ij} \mu_k^i \quad (5.4)$$

2. Mélange des états estimés à l'instant précédent

A partir de l'état estimé $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^j$ basé sur le modèle M_{k+1}^j , de sa covariance $\hat{\mathbf{P}}_{k|k}^j$ et de la probabilité $\mu_{k|k}^{i/j}$, l'estimée initiale $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{0j}$ et sa covariance $\hat{\mathbf{P}}_{k|k}^{0j}$ pour le filtre correspondant au modèle M_{k+1}^j sont calculées selon :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{0j} = \sum_{i=1}^r \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^j \mu_{k|k}^{i/j}, \quad j = 1, \dots, r \quad (5.5)$$

et

$$\hat{\mathbf{P}}_{k|k}^{0j} = \sum_{i=1}^r \mu_{k|k}^{i/j} \left[\hat{\mathbf{P}}_{k|k}^i + \hat{\mathbf{P}}_{k|k}^{0ij} \right] \quad (5.6)$$

où :

$$\hat{\mathbf{P}}_{k|k}^{0ij} = \left(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^j - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{0j} \right) \left(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^j - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{0j} \right)', \quad i, j = 1 \dots r \quad (5.7)$$

3. Filtrage conditionnel aux modèles

En utilisant l'état estimé initial, sa covariance et les mesures reçues, les estimées $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}^j$ conditionnelles aux modèles et leurs covariances $\hat{\mathbf{P}}_{k+1|k+1}^j$ sont calculées via les filtres correspondants.

4. Calcul des fonctions de vraisemblance

La fonction de vraisemblance Λ_{k+1}^j du modèle M_{k+1}^j est calculée à partir de :

$$\begin{aligned}\Lambda_{k+1}^j &= P \left| \mathbf{z}_{k+1} \mid M_{k+1}^j, \mathbf{Z}^k \right| \\ &= P \left[\mathbf{z}_{k+1} \mid M_{k+1}^j, \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{0j}, \hat{\mathbf{P}}_{k|k}^{0j} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{|2\pi \mathbf{S}_{k+1}^j|}} \exp \left(-0.5 (\mathbf{v}_{k+1}^j)' (\mathbf{S}_{k+1}^j)^{-1} \mathbf{v}_{k+1}^j \right), j = 1, \dots, r \quad (5.8)\end{aligned}$$

où :

$$\mathbf{v}_{k+1}^j = \mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1}^j \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{0j} \quad (5.9)$$

est l'innovation du filtre dédié au modèle M_{k+1}^j et \mathbf{S}_{k+1}^j est sa covariance.

5. Mise à jour des probabilités des modèles

La probabilité que le modèle M_{k+1}^j soit effectif à l'instant $k + 1$ est calculée à partir de :

$$\begin{aligned}\mu_{k+1}^j &= P(M_{k+1}^j \mid \mathbf{Z}^{k+1}) \\ &= \frac{1}{c} \Lambda_{k+1}^j \bar{c}_j, \quad j = 1, \dots, r \quad (5.10)\end{aligned}$$

où \bar{c}_j est défini en (5.5) et c est la constante de normalisation des μ_{k+1}^j , donnée par :

$$c = \sum_{j=1}^r \Lambda_{k+1}^j \bar{c}_j \quad (5.11)$$

6. Combinaison des estimées de l'état conditionnelles aux différents modèles

Les estimées de l'état basées sur chaque modèle et leurs covariances sont combinées pour obtenir l'état estimé global $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}$ et sa covariance $\hat{\mathbf{P}}_{k+1|k+1}$:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} = \sum_{j=1}^r \mu_{k+1}^j \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}^j \quad (5.12)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{k+1|k+1} = \sum_{j=1}^r \mu_{k+1}^j \left(\hat{\mathbf{P}}_{k+1|k+1}^j + \hat{\mathbf{P}}_{k+1|k+1}^{0j} \right) \quad (5.13)$$

où :

$$\hat{\mathbf{P}}_{k+1|k+1}^{0j} = (\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}^j - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}) (\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}^j - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1})' \quad (5.14)$$

5.5 Paramètres de l'algorithme IMM

L'IMM est un algorithme récursif, modulaire et possédant un taux de calcul fixe par cycle, contrairement à certaines versions MM. Cependant, pour obtenir de bonnes performances, on doit répondre à certaines exigences :

1. La précision dans l'estimation en position et en vitesse doit faire l'objet d'un compromis entre le pic d'erreur en début de manœuvre et/ou en fin de manœuvre et les erreurs durant le mouvement uniforme.
2. Le retard de détection du début de manœuvre et de fin de manœuvre doit être très acceptable.
3. La complexité d'implémentation doit être réduite.

A cet effet on doit satisfaire certaines conditions élémentaires pour la conception d'un estimateur IMM :

5.5.1 Choix des modèles décrivant la dynamique du mobile

Dans le cas de la poursuite, on doit considérer le modèle à vitesse constante CV pour modéliser le cas non manœuvrant, et choisir un ou un ensemble de modèles pour décrire toutes les manœuvres possibles. Cependant, il est à noter que l'augmentation du nombre des sous modèles (qui couvre certains comportements des mobiles de manœuvrabilité accrue) surcharge le système (temps de calcul) sans garantir de meilleures performances, à cause de la compétition entre les modèles [50]. A titre d'exemple, les mouvements des avions civils dans le système de contrôle du trafic aérien ATC, sont soit un mouvement rectiligne avec une vitesse constante, soit manœuvrant, dû à une rotation ou une montée/descente.

5.5.2 Détermination des intensités des bruits de processus intervenant dans chaque modèle

L'écart type du bruit de processus joue un rôle capital dans le comportement des filtres vis-à-vis de la détection des manœuvres. Il est souvent déterminer en se basant sur les perturbations et les amplitudes maximales des manœuvres possibles. Considérons par exemple un IMM à deux filtres, le premier est un filtre de Kalman du deuxième ordre avec un bruit de système important, le second est un filtre de Kalman du troisième ordre avec un bruit de système choisi comme indiqué dans le paragraphe (5.2.2). Lorsque la cible effectue une accélération, le filtre de Kalman du second ordre concurrencera celui du troisième ordre et tente de suivre cette manœuvre, ce qui dégrade les performances de l'IMM. En dernier lieu on note que le concepteur devra faire un compromis dans son choix des paramètres, car un bon lissage (niveau bas du bruit) pendant la phase de mouvement uniforme conduit à un pic d'erreur important durant la phase de manœuvre et vice versa [3].

5.5.3 Sélection de la matrice de transition

Les transitions entre les différents modes de l'IMM sont supposées être gouvernées par une chaîne de Markov. Ces transitions sont représentées dans une matrice de transition de dimension égale au nombre de modes possibles que peut suivre la cible. Cette matrice comporte deux types de probabilités : la première est celle du maintien, qui représente la probabilité pour la cible de rester dans le même mode entre deux instants successifs. Les probabilités de maintien correspondent aux éléments diagonaux de la matrice. Le deuxième type de probabilité représente les probabilités de passer d'un modèle à un autre entre deux instants successifs. Les éléments de la matrice de transition sont choisis selon l'expertise du concepteur ou selon les résultats des simulations mises en œuvre.

Une procédure pour le choix de la probabilité de maintien d'un mode consiste à la relier à sa durée moyenne. Ainsi la probabilité de maintien du mode i peut être

estimée par :

$$p_{ii} = 1 - \frac{T}{E[\tau_i]} \quad (5.15)$$

où τ_i est la durée du mode M^i . Les probabilités de transitions p_{ij} pour $i \neq j$ peuvent être choisies en utilisant le théorème de probabilité globale :

$$\sum_{i \neq j} p_{ij} = 1 - p_{ii} \quad (5.16)$$

Pour plus de détail sur le choix de la matrice de transition, on peut consulter [3, 59, 62]. Le concepteur doit prendre en considération qu'une probabilité de transition élevée produit de petit pics d'erreurs durant la manœuvre au dépens d'un lissage faible et d'erreurs plus importantes durant les phases de mouvement non manœuvrant. Aussi, dans ce cas les transitions d'un modèle à un autre sont rapidement détectables.

5.6 L'algorithme FastIMM

Dans cette partie on présente l'une de nos contributions à savoir l'algorithme FastIMM Dahmani et al. [30, 49]. Dans cet algorithme, nous avons remplacé les différents filtres constituant l'algorithme IMM par leurs homologues à gains fixes (le filtre $\alpha\beta$ et le filtre $\alpha\beta\gamma$). Le diagramme de cet algorithme est plus simple que celui de l'IMM, voir figure 5.4. Les équations mises en jeu dans le FastIMM sont semblables à celles de l'IMM standard, sauf celle qui calcule la vraisemblance, où on a remplacé la matrice de covariance de l'innovation \mathbf{S}_k^j , pour le modèle M^j , avec une matrice fixe, donnée par :

$$\mathbf{S}_k^j = \mathbf{S}_0^j = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{j,\mathbf{w},x}^2}{1-\alpha_{j,x}} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_{j,\mathbf{w},y}^2}{1-\alpha_{j,y}} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Pour ne pas alourdir le contenu de ce chapitre, on renvoie le lecteur à la référence [30] où une évaluation des performances de l'algorithme FastIMM et leur comparaison avec celles de l'IMM est donnée.

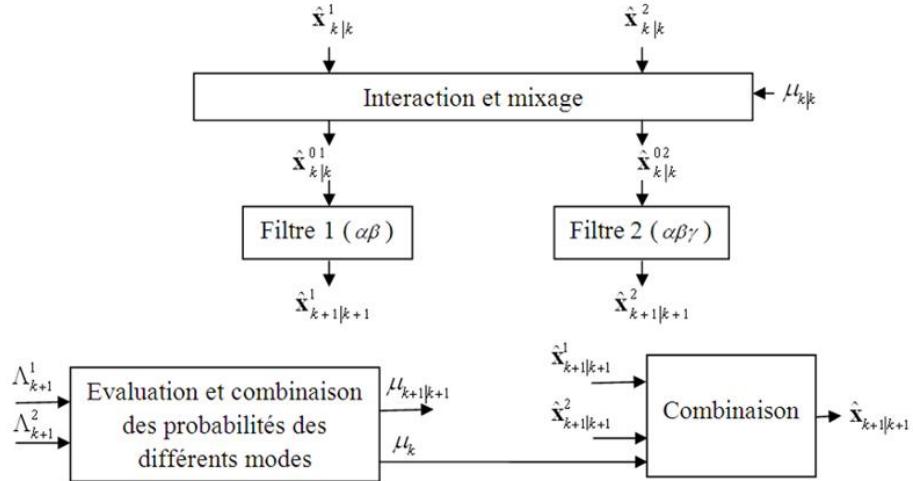


FIGURE 5.4: Diagramme de l'algorithme FastIMM à deux modes.

5.7 Simulations

5.7.1 Description du scénario

Dans ces simulations on considère un problème générique de poursuite en ATC. On envisage de montrer l'effet du choix des modèles dans l'IMM et l'intérêt de ce dernier. Le scénario suivant est considéré [3] : la cible poursuivie se trouve initialement à la position $(25000m, 10000m)$, elle se déplace à une vitesse constante de $120m/s$ et se dirige vers l'ouest, en effectuant les mouvements suivants :

- De $0s$ à $125s$: mouvement rectiligne à une vitesse constante de $120m/s$,
- De $125s$ à $215s$: mouvement circulaire à $\omega = 1^\circ/s$, soit une accélération nominale de $0.2g$,
- De $215s$ à $340s$: mouvement rectiligne à une vitesse constante de $120m/s$,
- De $340s$ à $370s$: mouvement circulaire à $\omega = -3^\circ/s$, soit une accélération nominale de $0.6g$,
- De $370s$ à $495s$: mouvement rectiligne à une vitesse constante de $120m/s$.

A l'origine du plan, se trouve un radar qui délivre chaque $T = 5s$ un vecteur de mesure correspondant aux deux coordonnées cartésiennes de la cible. Les mesures sont supposées être affectées d'un bruit blanc Gaussien d'écart type $\sigma_w = 100m$

pour les deux axes x et y . La trajectoire correspondant à ce scénario est illustrée à la figure 5.5.

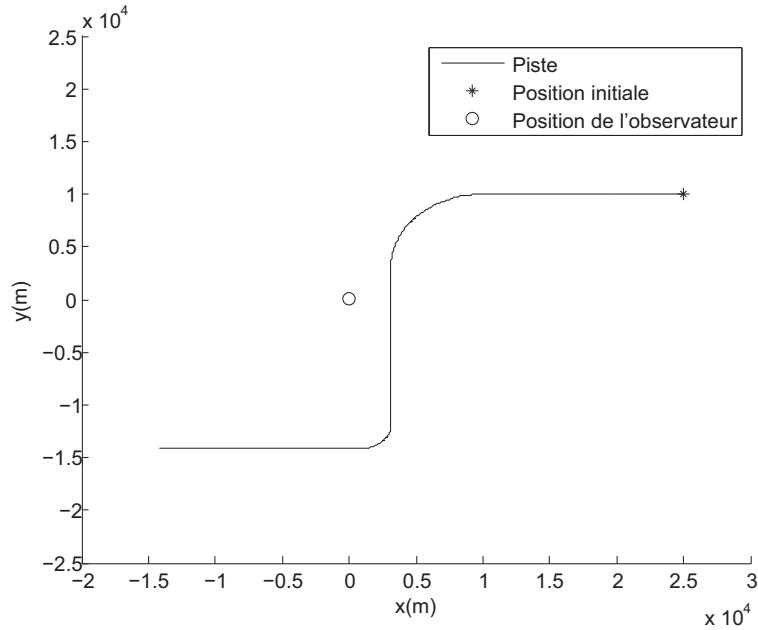


FIGURE 5.5: Trajectoire de la cible.

5.7.2 Poursuite à l'aide d'un seul filtre

L'écart type du bruit de système σ_w est l'un des paramètres les plus importants lors de la poursuite d'une cible manœuvrante. La figure 5.6 illustre la RCEQM en position et en vitesse du filtre de Kalman du second ordre (CV) pour trois valeurs de l'écart type du bruit de système, soit $\sigma_w = 1, 1.5$ et $2m/s^2$. On constate d'après cette figure qu'une petite valeur de σ_w procure une petite erreur en absence de manœuvre, par contre en présence d'une manœuvre elle engendre une très grande erreur tant en position qu'en vitesse.

Dans la figure 5.7 on présente la RCEQM du filtre de Kalman où à chaque tranche du mouvement de la cible on a utilisé une valeur appropriée pour l'écart type du bruit de système, en l'occurrence on a pris $\sigma_w = 1m/s^2$ dans le cas non manœuvrant, $\sigma_w = 1.5m/s^2$ pour la première manœuvre et $\sigma_w = 2m/s^2$ pour la seconde manœuvre. Les résultats obtenus dans ce cas sont plus performants que celles obtenus par les trois filtres précédents.

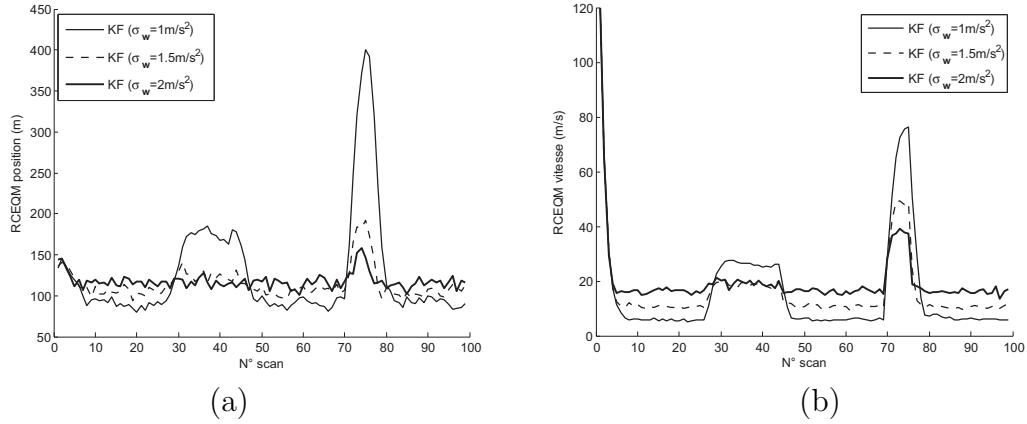


FIGURE 5.6: RCEQM en (a) position et (b) vitesse du filtre de Kalman pour différentes valeurs de l'écart type du bruit de système σ_w .

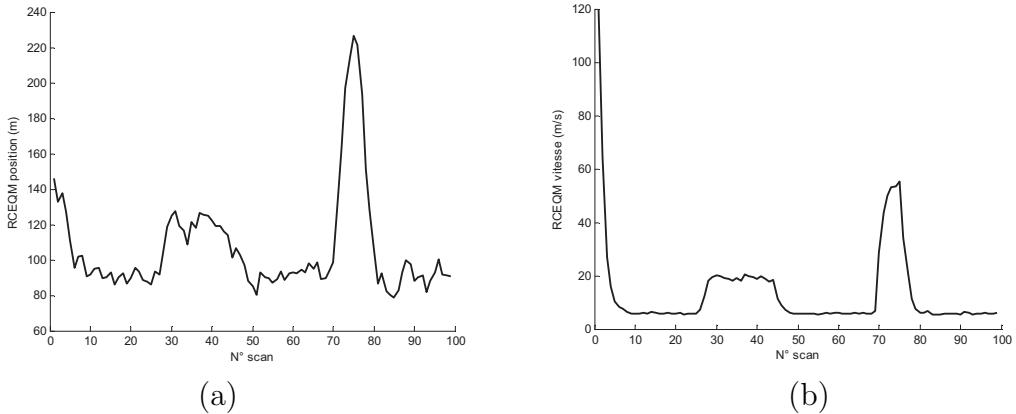


FIGURE 5.7: RCEQM en (a) position et (b) vitesse du filtre de Kalman avec différentes valeurs de l'écart type du bruit de système σ_w attribuées à chaque tranche d'intervalle.

Le problème majeur qui rend cette simulation obsolète en pratique réside dans le fait qu'on ne connaît ni les instants du début/fin ni l'ampleur de la manœuvre. Pour remédier à ce problème on doit : soit utiliser un détecteur de manœuvre tel qu'il est implanté dans l'algorithme IE, soit recourir aux algorithmes à modèles multiples.

5.7.3 Utilisation de l'IMM pour la poursuite d'une cible manœuvrante

Dans cette simulation on a choisi les trois estimateurs suivants :

- Le premier estimateur, qu'on note IMM_L, est un IMM avec deux filtres de Kalman du second ordre DWNA, ayant des niveaux de bruit de système différents. Le premier filtre (KF1) à un bruit de système faible dont l'écart type est égale à $0.1m/s^2$, ce filtre est dédié au mouvement à vitesse constante. Le second filtre (KF2) est utilisé lorsque la cible manœuvre, on lui a attribué par conséquent un bruit de système plus important d'écart type égale à $2m/s^2$. La matrice de transition utilisée est :

$$p = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

- Le second estimateur, qu'on note IMM_CT, est un IMM à deux filtres de Kalman le premier est de type DWNA, c'est un filtre du second ordre, destiné pour la poursuite durant la phase non manœuvrante, le bruit de système y est par conséquent faible, soit un écart type de $0.1m/s^2$. Pour la phase manœuvrante on a choisi un filtre de Kalman étendu à vitesse de rotation constante mais inconnue, le modèle correspondant est donné dans la section 1.4.2 du premier chapitre. Les écarts types du bruit de système sont $0.5m/s^2$ pour la partie linéaire et $0.2^\circ/s^2$ pour la partie modélisant la rotation. La matrice de transition utilisée est la même que celle donnée par l'équation (5.18).
- Le troisième estimateur, noté IMM_CT2, est un IMM à trois filtres de Kalman : le premier est toujours de type DWNA les deux autres filtres sont des filtres de Kalman étendus, EKF1 et EKF2, à modèle CT, où la vitesse de rotation est supposée être connue et est égale à $1^\circ/s$ et $-3^\circ/s$, respectivement. On a attribué à ces trois filtres un bruit de système d'écart type $0.1m/s^2$. La matrice de transition choisie est :

$$p = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.025 & 0.025 \\ 0.1 & 0.9 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.9 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Les résultats obtenus sont présentés aux figures 5.8 et 5.9. La première figure présente la RCEQM en position et en vitesse des trois estimateurs, tandis que la seconde figure présente les probabilités d'action des modes utilisés dans les trois estimateurs.

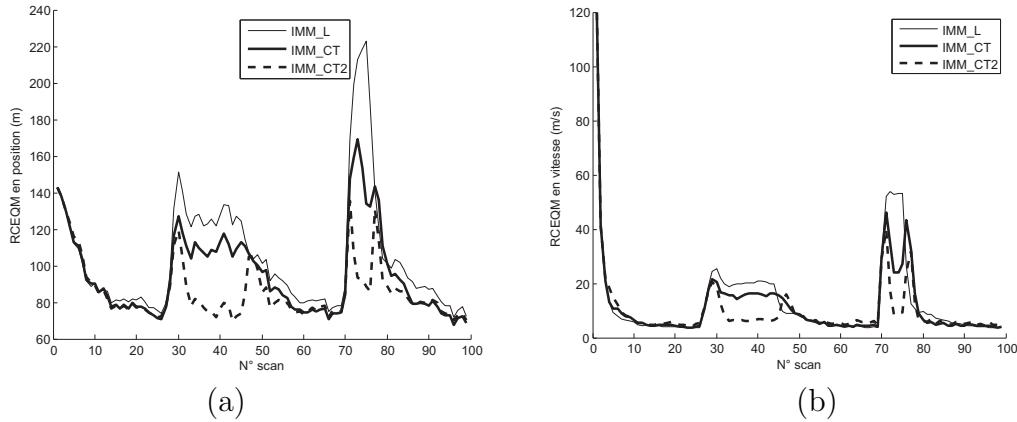


FIGURE 5.8: RCEQM en (a) position et (b) vitesse des trois estimateurs IMM.

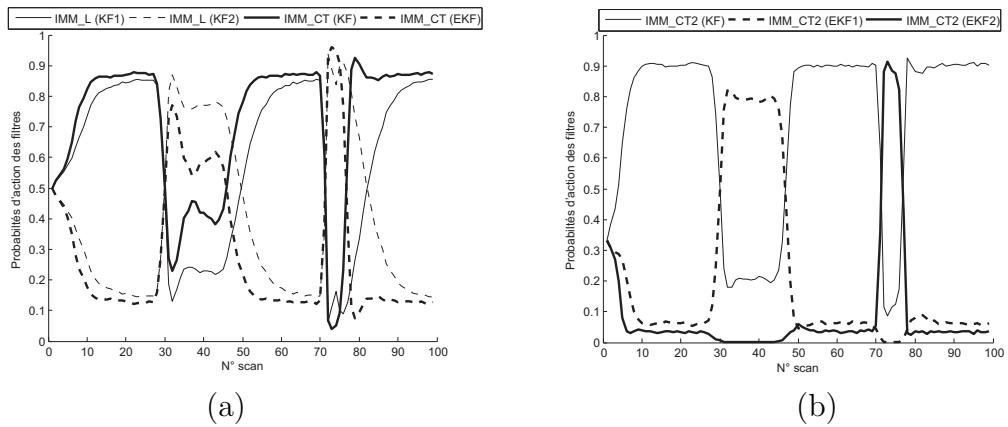


FIGURE 5.9: Probabilités d'action des trois estimateurs (a) IMM_L, IMM_CT et (b) IMM_CT2.

Ces résultats montrent que le choix du niveau du bruit de système affecté à chaque modèle et le choix de la matrice des probabilités de transition $p(\cdot)$ conditionnent les performances des différents estimateurs. En examinant la figure 5.8 on peut faire les remarques suivantes :

- En régime non manœuvrant, les trois estimateurs IMM donnent presque les mêmes RCEQM, cela peut être justifié par la présence du filtre de Kalman DWNA, qui est dédié à un tel mode.
- En présence de la manœuvre, l'estimateur IMM_CT2 procure les meilleures performances, on note cependant que ces dernières ne sont obtenues que sous l'hypothèse d'une connaissance exacte des vitesses de rotation. Les erreurs engendrées par l'IMM_L sont les plus importantes, car la manœuvre est modélisée par un bruit aditif uniquement.

- L'estimateur IMM_CT, où la vitesse angulaire est estimée séquentiellement, traite le problème de poursuite de façon plus élégante. Ses performances se situent entre celles des estimateurs IMM_L et l'IMM_CT2, et cela en n'utilisant qu'un seul filtre pour modéliser la manœuvre.
- Les instants de transition présentent les plus grandes erreurs, cela est dû principalement à la valeur attribuée à la probabilité de maintien de chaque modèle. Pour améliorer l'erreur à ces instants on peut opter pour un changement adaptatif de la matrice de transition.

Concernant la figure 5.9 on peut faire les remarques suivantes :

- Initialement, tous les filtres du même estimateur ont la même probabilité d'action, soit 1/2 pour les IMM à deux modèles et 1/3 pour l'IMM à trois modèles.
- Pour l'IMM_L, les probabilités d'action des deux filtres sont discernables, cela est dû aux deux niveaux des bruits de système dont le rapport est 20, en termes d'écart type.
- Dans la phase de non manœuvre, la probabilité d'action du KF dans l'estimateur IMM_CT est plus grande que celle du filtre KF1 dans l'estimateur IMM_L, cela explique la légère différence en termes de la RCEQM.
- Pour l'IMM_CT et en présence d'une manœuvre modérée, les probabilités d'action des deux filtres sont proches, cela signifie que les deux filtres peuvent prendre en charge cette manœuvre et coopèrent donc pour le faire.
- La probabilité d'action du filtre EKF2 pour l'estimateur IMM_CT2, est importante durant la phase de la deuxième manœuvre, ceci s'explique par le fait que les modèles de mouvement de la cible durant cette phase est très proche du mode de ce filtre.

5.8 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons dans un premier temps abordé le problème de poursuite d'une cible manœuvrante, en utilisant le filtre de Kalman à différents niveaux de bruits. On a constaté que la poursuite par un seul filtre requiert une adaptation du niveau du bruit de système à l'amplitude de la manœuvre, ce qui nécessite la

détection de cette manœuvre et l'estimation de son amplitude. Ceci, malheureusement, ne peut être accompli qu'avec un certain retard, qui engendre de larges erreurs d'estimation au début et à la fin de chaque manœuvre. Pour remédier à cela on peut recourir à l'estimateur IMM, qui utilise plusieurs filtres, chacun étant associé à un mode particulier du mouvement de la cible.

On a constaté que les performances de l'estimateur à modèles multiples interagissant (IMM) reposent essentiellement sur le bon choix des modèles décrivant la dynamique de la cible, et le niveau du bruit de système correspondant.

Chapitre 6

Application du filtre de Kalman à la détection de voies

6.1 Introduction

Depuis la commercialisation massive de la voiture en 1917 par Ford, le nombre d'accidents sur les routes ne cesse d'augmenter. Il s'est avéré qu'un bon nombre de ces accidents sont causés par le facteur humain [63]. En conséquence, les concepteurs de voitures nouvelles intègrent de plus en plus des systèmes sophistiqués, rendant ainsi ces véhicules d'avantage sécurisés et confortables. Ces voitures sont qualifiées de voitures intelligentes.

Dans ce chapitre on abordera un aspect de la sécurité des véhicules. Pour cela, on se focalisera sur la perception visuelle, qui joue un rôle très important lors de la conduite. En effet, les panneaux de signalisation, les feux de signalisation et les marquages sur la chaussée , représentent un langage de communication visuel pour les conducteurs [64]. Les systèmes installés au bord des véhicules ont pour but de maintenir le véhicule dans la voie et de parvenir à détecter à l'avance une éventuelle collision. D'autres parts, les véhicules à guidage autonome, '*Autonomous Guided Vehicle (AVG)*', doivent faire confiance au système de vision installé à leur bord,

pour une navigation non supervisé. Pour ces deux systèmes, il est très important d'obtenir des informations fiables concernant les bordures de la voie [65].

La détection des voies de la route est la première étape pour un système d'aide à la conduite [66] ; elle consiste à définir ou détecter les deux bordures de la voie, que le conducteur est supposé maintenir. Les techniques qui ont été proposées dans la littérature pour traiter ce problème se divisent en deux grandes catégories [67]. La première catégorie est celle des approches basées sur les caractéristiques '*feature based approach*'. Dans cette catégorie sont classées les techniques traditionnelles de segmentation d'images [67–70]. La deuxième catégorie représente les approches basées sur les modèles '*model based approach*'. La détection de la voie y est considérée alors comme un problème d'estimation de paramètres. Parmi les modèles proposés on peut citer le modèle polynomiale [66, 71–73] où l'allure de la voie est approximée par un polynôme dont il faut définir le degré et les coefficients. La détection des bordures de la voie est généralement affectée par les problèmes suivants [65] :

- L'ombre : les arbres, les immeubles et les autres véhicules ont leurs ombres dans la voie, qui peuvent créer de fausses bordures.
- La position du soleil : les rayons du soleil peuvent saturer l'image.
- Le climat : les phénomènes naturels tels que le brouillard, la pluie et la neige peuvent dégrader la qualité de l'image.
- L'occlusion : les autres véhicules peuvent causer une occlusion partielle ou complète du marquage routier.

La détection de la chaussée peut être effectuée soit en '*inter-trame*', ce qui correspond à une reconnaissance de la géométrie tridimensionnelle de la chaussée, soit en '*intra-trame*', on effectue alors un traitement d'image afin de détecter les régions et les bordures dans une trame. On peut également combiner ces deux techniques.

La méthode que nous proposons pour la détection de voie se classe dans la catégorie des approches basées sur les modèles, et effectue un traitement à la fois intra-trame et inter-trame. Elle consiste à utiliser le filtre IMM utilisant deux filtres de Kalman basés, respectivement, sur les modèles CV et CT, décrits dans le premier chapitre.

Par ailleurs, on suppose que les seules perturbations qui affectent l'acquisition des trames sont l'ombre et l'occlusion.

Ce chapitre est organisé comme suit : après une brève description des systèmes de transports intelligents et des systèmes d'aide à la conduite, on présente le principe de modélisation des marquages routier. Ensuite on décrira notre algorithme, qui se compose de trois étapes, à savoir l'initialisation, la détection et le lissage. Finalement, on présentera les résultats de simulations, qui montrent l'intérêt de la solution que nous avons proposée.

6.2 Les systèmes de transport intelligents

Les systèmes de transport intelligents, '*Intelligent Transportation Systems* (ITS)', couvrent plusieurs disciplines technologiques, incluant le développement des cellules de combustible, des systèmes d'information et de communication ainsi que les fonctions intelligentes des véhicules. Lorsqu'on aborde les systèmes ITS, on parle aussi des [69] :

- Réseaux routiers avancés, '*Advanced Highway System* (AHS)'.
- Systèmes de navigation des véhicules, '*Car Navigation System* (CNS)'.
- Systèmes de commande avancées des véhicules, '*Advanced Vehicle Control System* (AVCS)'.

Deux principales approches peuvent être envisagées lors de la conception des ITS : soit on conçoit un système ITS qui s'adapte avec l'infrastructure actuelle des routes, soit on conçoit un système ITS qui incorpore de nouvelles infrastructures et technologies qui seraient installées dans les routes du futur. La figure 6.1 présente certains aspects des véhicules intelligents¹.

1. http://www.immervision.com/fr/rd_services/rd_services_marketapp/rd_services_marketapp_2.php

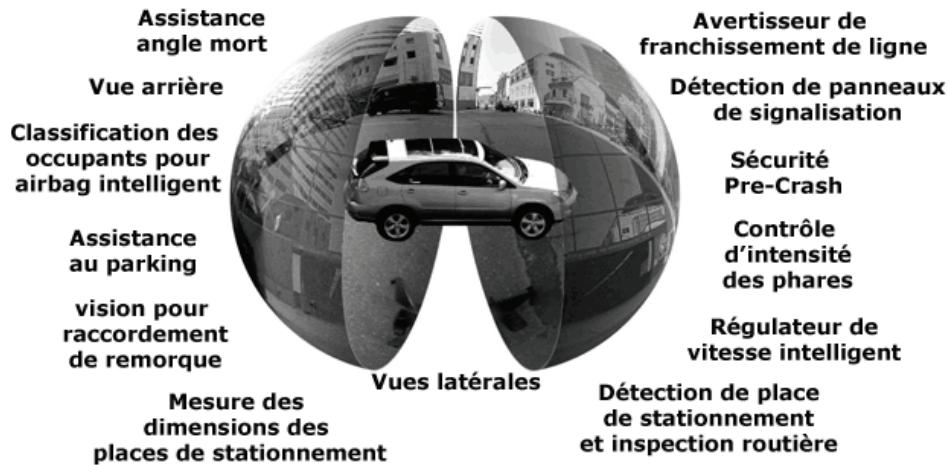


FIGURE 6.1: Certaines fonctionnalités des véhicules intelligents.

6.3 Les systèmes d'aide à la conduite

On présente dans cette section certaines technologies des véhicules intelligents qui permettent d'assister le conducteur [74], certains systèmes ont été réalisés et d'autres sont encore au stade de la recherche :

6.3.1 Affichage frontal

L'affichage frontal, '*Head Up Displays (HUDs)*' consiste à projeter toute les informations nécessaires pour le conducteur sur le pare-brise, dans le but de garder l'œil du conducteur sur la route. Ces informations peuvent contenir la vitesse, la distance du véhicule en face, la température, ...etc.

6.3.2 Régulation adaptative de vitesse

La régulation adaptative de vitesse, '*Adaptive Cruise Control (ACC)*', permet de maintenir une vitesse constante sans l'intervention du conducteur. Cette fonction aussi prévoit les collisions en réduisant la vitesse afin de maintenir une distance de sécurité avec le véhicule de devant.

6.3.3 Système de surveillance du conducteur

Les systèmes de surveillance du conducteur, '*Driver Monitoring Systems (DMS)*', permettent de détecter la fatigue ou la distraction visuelle du conducteur.

6.3.4 Les systèmes de détection de voie

Initialement, ces systèmes visaient le maintien de la voie par le conducteur, ainsi, une fois le véhicule sort de son couloir une alarme se déclenche. Ensuite, leur utilisation a été étendue aux systèmes de direction automatique et aux systèmes d'autonomie urbaine.

6.3.5 Autres systèmes

Certains concepteurs optent pour que le véhicule soit sécurisé du côté du conducteur comme du côté du piéton, ainsi ils intègrent des systèmes de détection des piétons et des obstacles, qui généralement par l'installation des airbags internes et externes. Pour rendre le véhicule plus rassuré, d'autres concepteurs optent pour que le système des airbags soit intelligent ; à cet effet, des capteurs sont mis en place pour détecter la présence des passagers, leurs tailles et le degré de l'impact, cela permet de mieux orienter le flux de gonflage des airbags.

6.3.6 Perspectives

L'idéal pour un conducteur est d'indiquer au véhicule uniquement la destination et de le laisser prendre le contrôle total pour se rendre au point d'arrivée. Ce système nécessite une multitude de technologies incluant la cartographie GPS, la reconnaissance vocale, la poursuite et le maintien de la voie, la détection des obstacles et des piétons, ainsi que les systèmes de conduite et de contrôle avancés. Ces véhicules sont au stade de prototypes.

6.4 Caractéristiques de la voie

Sous l'hypothèse que la voie soit un objet structuré, elle présente certaines caractéristiques qui la rendent distinguable par rapport au reste de la scène [74] :

- La majorité des voies semi-structurées sont localement plates et présentent des courbures continues. Les discontinuités des marquages sont généralement présentes dans les points de jonctions tels que les carrefours et les intersections ; ce cas peut être traité séparément.
- Les textures sont très variées d'une voie à une autre, cependant pour une voie donnée la texture est homogène et est différente vis-à-vis de ce qui l'entoure.
- De façon similaire, la couleur qui varie d'une voie à une autre est la même pour une voie donnée, malgré la présence de l'ombre qui agit sur sa luminosité.
- La limite qui sépare la voie et le reste de la chaussée présente souvent une bordure.
- La caractéristique commune entre les différentes voies est la présence du marquage routier.

On note que la majorité des travaux qui visent la détection de voie, utilisent l'une de ces caractéristiques comme indice pour faire la différence entre la voie et le reste de la trame. Notre travail consiste à utiliser la dernière caractéristique qui est le marquage routier comme indice pour la détection de la voie.

6.5 La modélisation du marquage routier

6.5.1 Définition des repères

Le modèle du marquage joue un rôle très important pour la détection des bordures de la voie. Par la suite on suppose que le marquage routier est formé de deux bordures délimitant la zone allouée au véhicule. La figure 6.2 représente le marquage routier dans le plan réel (la voie) (a) et le plan de la trame (b). Si on suppose que la distance entre les deux marquages droit et gauche dans le plan réel est constante, soit $D = x_g^r - x_d^r$, alors la distance dans le plan de la trame, qu'on

note $d = x_g - x_d$, est fonction de plusieurs paramètres à savoir : La longueur du focal de la caméra λ , la hauteur de la caméra par rapport au sol H , la position de la ligne horizontale du point d'intersection entre les deux marquages dans le plan de la trame h , l'ordonnée y , et la distance D . La distance d est donnée par l'équation suivante [67] :

$$d = \zeta (y - h) \quad (6.1)$$

avec :

$$\zeta = \frac{\lambda^2 D}{H(\lambda^2 + h^2)} \quad (6.2)$$

On note que :

- Le paramètre ζ peut être estimé en utilisant l'image sans recourir à la détermination des paramètres de la caméra [67].
- Dans cette section on présente les repères en 2D, cependant d'autres travaux optent pour la représentation en 3D et parlent ainsi des systèmes de coordonnées réel '*World Coordinate System (WCS)*' et celui de la caméra '*Camera Coordinate System (CCS)*' [69, 75].

D'après la figure 6.2, le marquage routier peut être représenté par un polynôme dont le degré et les coefficients doivent être déterminés. Les auteurs dans [66] proposent de diviser le marquage dans le plan de l'image en plusieurs segments, ensuite ils utilisent un modèle linéaire pour approximer chaque segment. Un modèle polynomiale à degré adaptatif a été proposé dans [73]. Jung et Kelber [65, 76] divisent les trames en deux zones, et attribuent un modèle linéaire au marquage de la zone la plus proche du système de vision, et un modèle du deuxième ordre au marquage de la seconde zone. Wang et al. [67] proposent l'utilisation de la technique *B-Spline*. Cette technique a l'avantage de procurer un modèle qui s'adapte à n'importe quelle forme du marquage, cependant elle est très coûteuse en temps de calcul.

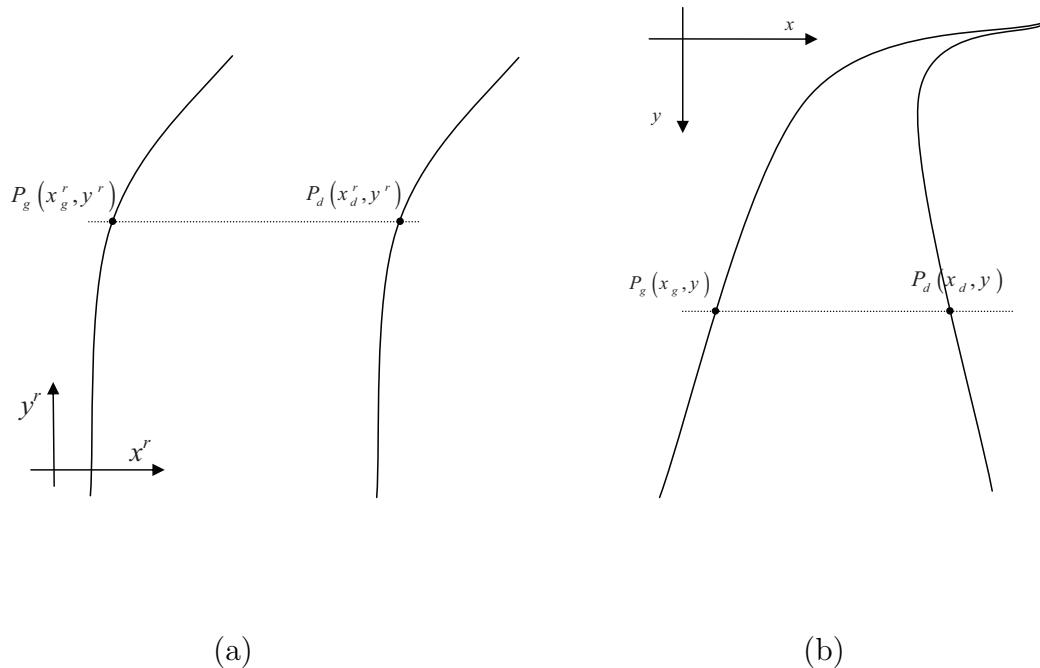


FIGURE 6.2: Marquage dans les repaires réel (a) et celui de la trame (b).

6.5.2 Modèle du marquage routier

Dans le cas général, le modèle du marquage est représenté par une Clothoïde, qui est une courbe dans le plan \$(x, y)\$ dont la courbure dépend linéairement d'un paramètre \$t\$ [77]. Ce modèle général n'est pas pris en compte dans notre travail. Jung et Kelber [76], ont supposé que le marquage se compose de deux régions séparées par une ligne horizontale divisant la trame en deux. Pour notre cas on adopte cette supposition mais on considère que la position qui divise les deux zones n'est pas constante, mais plutôt fonction de la courbure présente dans la trame courante. Cette méthode présente l'avantage de mieux approximer le marquage lorsque ce dernier a une linéarité le long de la voie mais présente une courbure sévère vers l'horizon.

Vue la particularité du problème et pour des raisons de simplification, on considère que le degré du polynôme est inférieur ou égale à deux [65, 78]. Ainsi on décompose le marquage en deux zones, la première est la partie inférieure qui est considérée

comme étant linéaire, tandis que la deuxième présente une certaine courbure fonction, de la géométrie de la voie.

$$f(x) = \begin{cases} a + bx, & \text{zone linéaire} \\ c + dx + ex^2, & \text{zone de courbure} \end{cases} \quad (6.3)$$

6.6 Détection de voies par les techniques de poursuite

L'application des techniques de poursuite pour la détection du marquage routier a été introduite initialement par Boumediene et al. [78]. Dans leur article, les auteurs ont considéré le marquage routier comme étant une '*cible fictive*' (figure 6.3 [78]), qui se déplace le long de la voie. La détection se déroule à chaque trame ou image

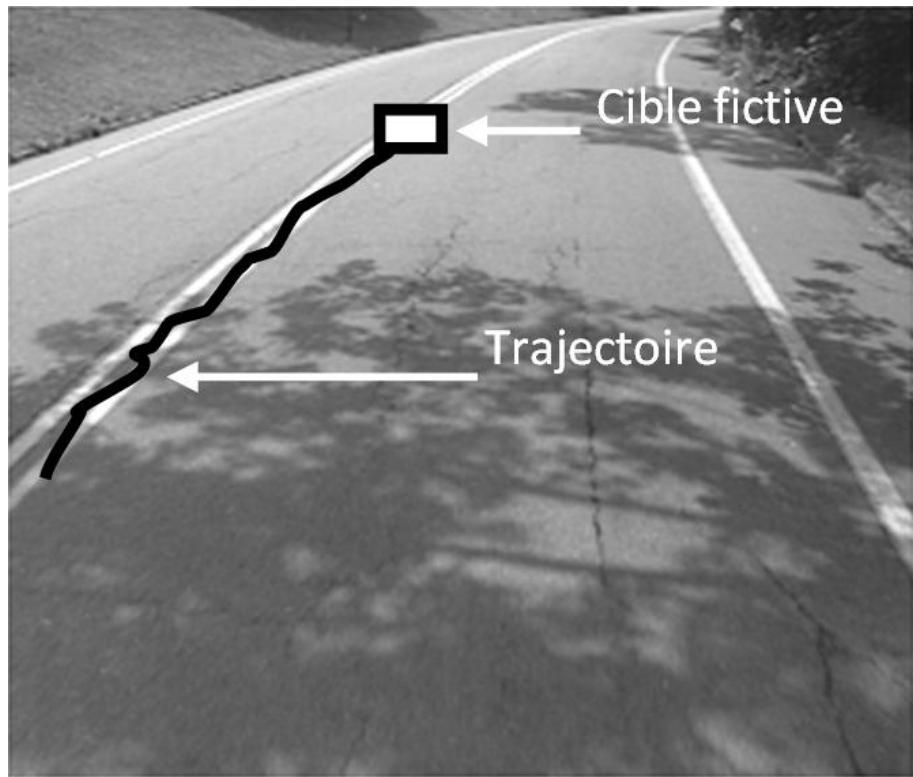


FIGURE 6.3: Représentation des voies de la route par des cibles fictives en déplacement.

de la séquence vidéo. Dans chaque image on cherche à détecter les marquages blancs sur le sol de la voie. Pour des raisons de simplification, on considère qu'il

existe uniquement deux marquages continus situés initialement sur les deux cotés de la voiture. Alors le problème peut être formulé comme suit :

- On considère les deux marquages sur la voie comme étant deux cibles fictives en mouvement, dont les positions doivent être estimées par le biais d'une certaine technique telle que le filtre de Kalman.
- On suppose que le long de la voie, les deux marquages sont complètement discernables, c'est-à-dire qu'ils ne se chevauchent pas ; le problème devient alors un problème de poursuite de deux cibles dans un environnement dense c'est-à-dire en présence du fouillis 'clutter'. Le fouillis dans ce cas représente tous les pixels blancs qui n'appartiennent pas au marquage, et qui doivent par conséquent être considérés comme étant des fausses mesures.
- Le marquage est divisé en deux catégories, celui qui se trouve en bas de l'image, ou en d'autres termes qui est proche de la voiture. Ce marquage est représenté toujours par une ligne droite. Pour le marquage distant de la voiture, si aucune courbure n'est présente alors on le représente par une ligne droite, dans le cas contraire, on le représente par un polynôme de degré n , pour des raisons de simplification nous avons pris $n = 2$.

6.6.1 Utilisation de l'IMM pour la détection de voies et de virages

Comme on l'a mentionné précédemment, l'IMM est un algorithme très connu dans le domaine de la poursuite, voir chapitre 5. A notre connaissance, suite à une recherche bibliographique, on peut affirmer que l'utilisation de l'IMM dans les systèmes d'aide à la conduite, '*Driver's Assistance System (DAS)*', s'est limitée à la navigation et au positionnement. Moreo et al. [79] ont traité le problème de positionnement en se basant sur la fusion de plusieurs informations issues de différents capteurs par le biais d'un IMM à base du filtre de Kalman étendu EKF. Vers l'an 2000, l'équipe de recherche de la firme Volkswagen a conçu un système d'aide à la conduite en se basant sur la fusion de mesures multiples issues d'organes de perception de l'environnement. Ce système a été conçu autour du filtre de

Kalman. Weiss et al. [80] ont développé ce système de poursuite en intégrant un IMM ; cela a permis une bonne stabilité pendant les courbures et a procuré la possibilité de détection du changement de voie. En se basant sur un système de positionnement global, '*Global Positioning System (GPS)*', et une unité de mesure inertielle, '*Inertial Measurement Unit (IMU)*', et d'autres capteurs, les auteurs de [81] ont introduit l'IMM pour la prédition du changement de voie. Par ailleurs dans [82] l'IMM est utilisé pour garantir une bonne estimation de la position du véhicule.

6.7 L'algorithme proposé

L'algorithme proposé est représenté à la figure 6.4. Il comporte trois principales étapes :

- L'initiation de la trajectoire.
- La détection du marquage et de la courbure.
- Le lissage du marquage estimé.

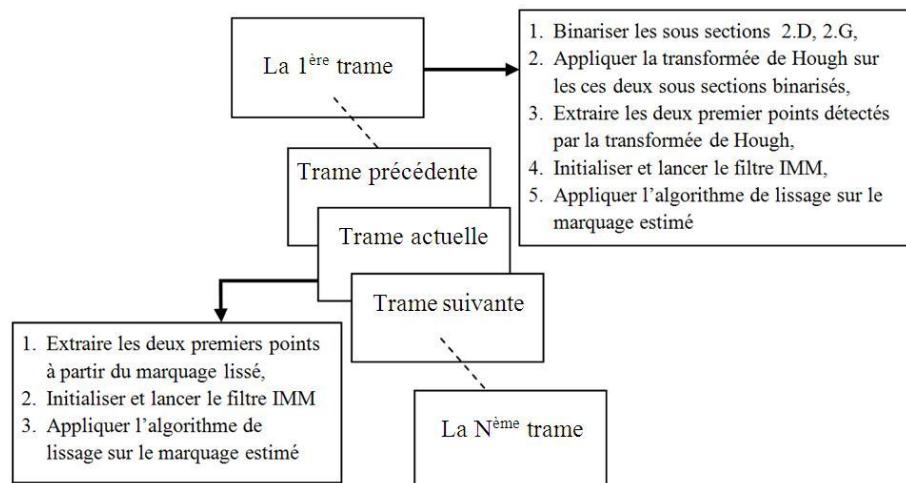


FIGURE 6.4: Algorithme proposé pour la détection des voies.

6.7.1 Initialisation de la trajectoire

Cette étape se déroule uniquement lors de la première trame de la séquence ou en cas de réinitialisation de l'algorithme ; l'initialisation est similaire à celle de la

technique des deux points présentée dans les chapitres précédents. Les deux points sont choisis comme suit :

- On décompose la trame acquis en quatre zones (figure 6.5), dont la première et la dernière ne sont pas considérées dans le présent travail.
- La deuxième zone est ensuite décomposée en trois sous zones. La zone du milieu, (2.C), n'est pas considérée suite à l'hypothèse faite. On effectue la binarisation des deux sous zones droite (2.D) et gauche (2.G) où la présence du marquage est le plus probable. Ces deux étapes permettent d'accélérer l'initialisation.
- On applique la transformée de Hough [65] sur ces deux sous zones, uniquement, afin de déterminer les deux lignes représentant les deux marquages, celui de droite et celui de gauche. On note que la transformée de Hough est une méthode très connue en traitement d'image, qui a été aussi utilisée en poursuite pour l'initiation de pistes en présence de fouillis dense [50]. Cette transformée est très couteuse en temps de calcul, néanmoins l'appliquer pour une petite portion de l'image ne pose pas de problème.
- De ces deux lignes on prend les deux points qui sont les plus proches du véhicule c'est à dire ceux du bas de la seconde zone, comme indiquée à la figure 6.5.
- Ces deux points sont ensuite utilisés pour initialiser les filtres de Kalman qui composent l'IMM. Le processus de filtrage commence du début de la deuxième zone jusqu'à la fin de la troisième zone. Dans un travail ultérieur on considérera le prolongement de la détection du marquage jusqu'à la fin de la trame (vers l'horizon).
- On effectue un lissage de la trajectoire issue du processus de filtrage. La courbe obtenue sera utilisée dans les trames suivantes pour déterminer la meilleure zone de recherche de la mesure.

6.7.2 Détection du marquage et localisation du début de virage

On applique pour chaque marquage un algorithme IMM dédié. L'estimation s'effectue depuis le début du marquage estimé dans la trame précédente. La mesure est choisie parmi un ensemble de $2m + 1$ pixels centrés sur le pixel de la trajectoire

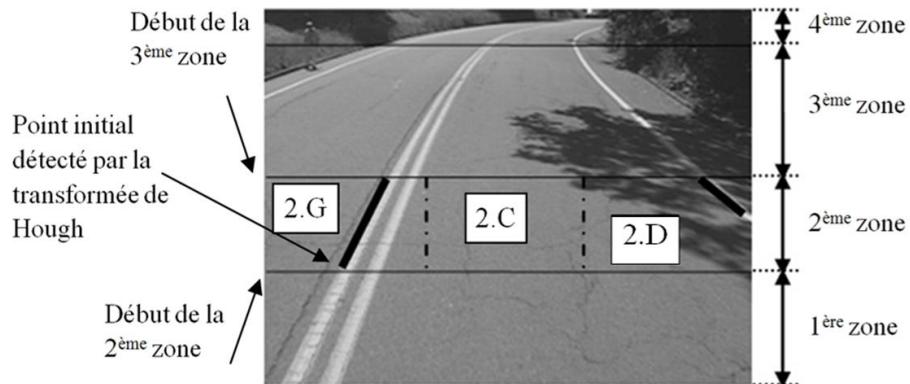


FIGURE 6.5: Décomposition de la première trame en quatre zones, et choix des points pour l'initialisation.

lissée dans la trame précédente. Chaque IMM est composé de deux filtres : le premier sert pour la détection de la partie rectiligne du marquage, c'est un filtre de Kalman basé sur le modèle CV. Le second filtre est utilisé pour la détection des courbures, c'est un filtre de Kalman étendu utilisant le modèle CT. Ainsi lorsque la probabilité d'action du second filtre dépasse un certain seuil on peut affirmer la présence d'un virage.

6.7.3 Lissage de la trajectoire estimée

6.7.3.1 Principe

La trajectoire issue de chaque IMM présente des fluctuations (figure 6.6) qui sont souvent indésirables. Afin de lisser cette courbe nous avons opté pour la méthode de lissage présentée dans [65]. Dans cette méthode, le marquage est divisé en deux parties. La première est représentée par une fonction linéaire et se situe en bas de l'image c'est-à-dire proche de la voiture. La seconde partie est celle du marquage situé en haut de l'image, à une certaine distance de la voiture ; elle est approximée par une fonction parabolique. La relation entre les paramètres de ces deux fonctions est obtenue en considérant leur dérivabilité et continuité au point commun. On montre que ceci se ramène à un problème de minimisation au sens des moindres carrés [69].

Le point de jonction entre les deux parties du marquage routier est généralement supposé être au milieu de la trame. Cela se traduit dans certaines situations par un décalage entre la courbe estimée et le marquage réel, due à la présence de la courbure assez loin du milieu de l'image. Dans notre méthode, ce point n'est pas fixe et est automatiquement estimé par l'IMM.



FIGURE 6.6: Trajectoires estimées des cibles fictives et détection des débuts des virages.

6.7.3.2 Algorithme de lissage

Le modèle du marquage utilisé est donné par [65] :

$$f(x) = \begin{cases} a + bx, & \text{si } x > x_m \\ c + dx + ex^2, & \text{si } x \leq x_m, \end{cases} \quad (6.4)$$

où x_m représente la limite entre les deux régions. Le problème consiste donc à déterminer les cinq paramètres a, b, c et e . On peut réduire le nombre des inconnues en imposant la continuité et la différentiabilité de la fonction $f(x)$ de la façon suivante :

$$f(x_m^+) = f(x_m^-) \quad (6.5)$$

$$f'(x_m^+) = f'(x_m^-) \quad (6.6)$$

Ces conditions donnent :

$$a + bx_m = c + dx_m + ex_m^2 \quad (6.7)$$

$$b = d + 2ex_m \quad (6.8)$$

En résolvant les équations 6.6 et 6.7 pour les inconnues c et e on obtient :

$$c = a + \frac{x_m}{2} (b - d) \quad (6.9)$$

$$e = \frac{1}{2x_m} (b - d) \quad (6.10)$$

En remplaçant 6.8 et 6.9 dans 6.3 on obtient un problème de détermination de trois paramètres uniquement : a , b et d . Pour la détermination de ces paramètres on passe par la technique des moindres carrés. Le marquage estimé présente un ensemble de points $(x_{n,i}, y_{n,i})_{i=1:m}$ pour la zone proche et $(x_{f,j}, y_{f,j})_{j=1:n}$ pour la zone éloignée. En remplaçant ces points dans l'équation 6.3 et on obtient :

$$\begin{cases} y_{n,i} = a + bx_{n,i}, & i = 1 : m \\ y_{f,j} = a + \frac{x_m}{2} (b - d) + dx_{f,j} + \frac{1}{2x_m} (b - d) x_{f,j}^2, & j = 1 : n \end{cases} \quad (6.11)$$

Les équations 6.10 présentent un système linéaire de $m+n$ équations et 3 inconnues. Il s'agit d'un système surdéterminé qui ne possède pas une solution unique. On peut cependant obtenir la solution en minimisant la quantité suivante :

$$E = \sum_{i=1}^m (y_{n,i} - f(x_{n,i}))^2 + \sum_{j=1}^n (y_{f,j} - f(x_{f,j}))^2 \quad (6.12)$$

On montre facilement que la solution peut être obtenue en résolvant le système linéaire suivant :

$$A'A\Psi = A'\Phi \quad (6.13)$$

où :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1^n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m^n & 0 \\ 1 & \frac{1}{2x_m} (x_{f,1}^2 + x_m^2) & -\frac{1}{2x_m} (x_{f,1} - x_m)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{1}{2x_m} (x_{f,n}^2 + x_m^2) & -\frac{1}{2x_m} (x_{f,n} - x_m)^2 \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} a \\ b \\ d \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} y_{n,1} \\ \vdots \\ y_{n,m} \\ y_{f,1} \\ \vdots \\ y_{f,n} \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

On note que la matrice $A'A$ est symétrique ce qui permet de diminuer la charge de calcul et l'espace de stockage.

6.8 Résultats d'expérimentations

Dans les paragraphes précédents, nous avons vu que la détection du marquage routier se base essentiellement sur l'algorithme IMM. Pour chaque trame et pour les deux marquages séparément, le programme de détection développé effectue trois principales tâches, à savoir :

1. L'initialisation de la trajectoire.
2. Le maintien et la détection du marquage ainsi que la détection des courbures.
3. Le lissage des courbes obtenues.

Pour les expérimentations on a utilisé les bases de données disponibles sur les sites suivants :

- http://vasc.ri.cmu.edu/idb/html/road/may30_90/index.html
- <http://gateway.path.berkeley.edu/zuhan/lanedetection/index.html>

La figure 6.7 présente les résultats d'expérimentation pour une trame où la présence d'un virage est détectée. Dans cette trame, le marquage est bien visible, aucune ombre n'est présente. Dans ces conditions, on peut affirmer que notre algorithme détecte de façon précise le marquage et la présence éventuelle des virages. On remarque aussi que le début de la courbure, mentionné par la ligne horizontale dans la figure 6.7.a, n'est pas au milieu de la trame comme dans [65], mais coïncide avec le début du virage.

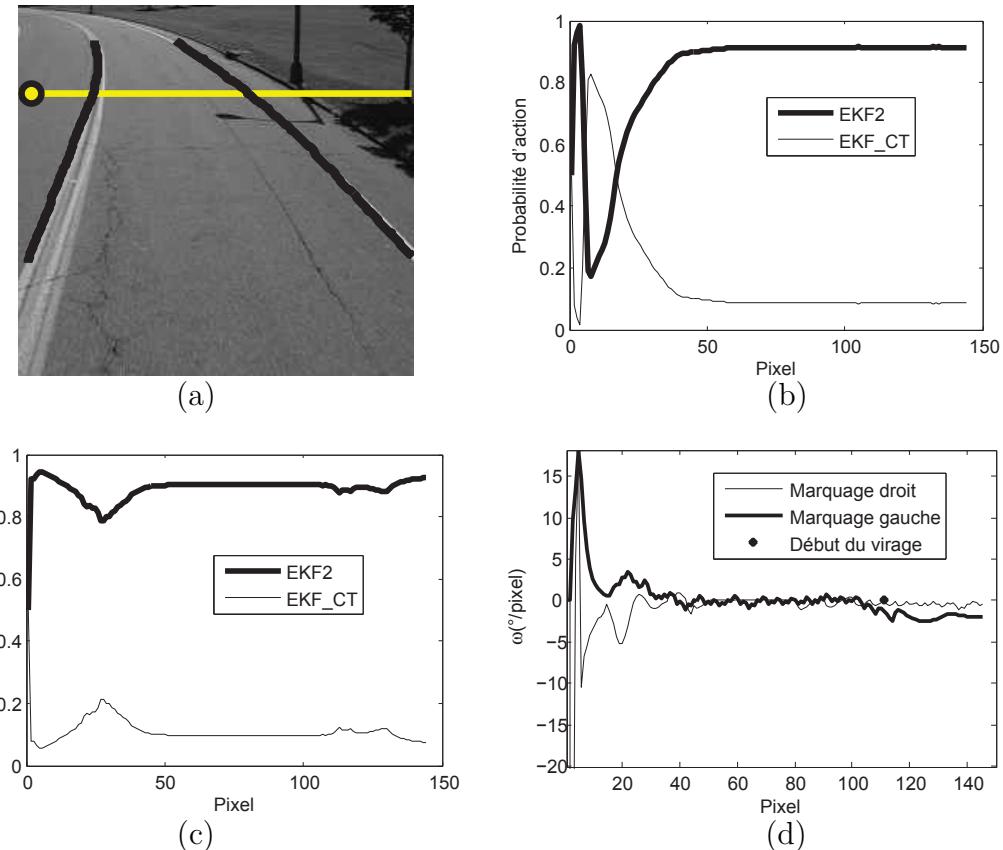


FIGURE 6.7: Le marquage estimé et ses paramètres : (a) les bordures et la courbure détectées, (b) probabilités d'action pour la trajectoire de droite, (c) probabilités d'action pour la trajectoire de gauche, (d) vitesse de rotation de la cible fictive.

La détection de la présence du virage s'effectue par le biais du filtre CT, lorsque la probabilité d'action de ce filtre dépasse un certain seuil pour trois points successifs appartenant à la troisième zone, on confirme alors la présence du début d'un virage. Le seuil doit être ajusté selon l'application. Dans notre cas, vu que ce système a

pour but d'indiquer au conducteur la présence d'un éventuel virage, on a fixé ce seuil à une petite valeur soit 0.1.

La figure 6.7.b représente la probabilité d'action des deux filtres pour le marquage droit de la trame. On remarque que la probabilité d'action du filtre CT, pour la troisième zone, est juste inférieure à 0.1, ce qui signifie l'absence d'un virage. Ce faux résultat est une conséquence de la perspective et de l'orientation de la caméra et du véhicule par rapport à la chaussée.

La figure 6.7.c représente la probabilité d'action des deux filtres pour le marquage gauche. On remarque que la probabilité d'action du filtre CT dépasse le seuil 0.1 dans la deuxième zone. Ce dépassement qui n'est pas pris en compte est dû à la présence d'un marquage épais dans cette zone. Par ailleurs, la probabilité d'action se manifeste dans la troisième zone de façon significative indiquant la présence du virage. Dans une pareille situation, où les deux IMM donnent des résultats différents, l'un détectant le virage tandis que l'autre non ; et vu que notre système vise à alerter le conducteur, on a opté pour déclencher la présence d'un virage même s'il n'est pas réellement présent, car le conducteur peut ignorer cette alerte s'il juge qu'elle n'est pas justifiée.

La figure 6.7.d illustre la '*vitesse de rotation*' de la cible fictive en ($^{\circ}$ /pixel). Le virage est d'autant plus dangereux que cette vitesse de rotation est plus grande. Le signe de la vitesse indique le sens de rotation, un virage à gauche est déclaré si la vitesse de rotation est négative et vice versa.

Remarques

- Le pixel zéro représente le premier pixel en bas de la deuxième zone.
- Dans la majorité des cas, les deux IMM donnent deux positions différentes pour le début du virage. On choisit alors celle qui est la plus proche du véhicule.
- Le cercle dans la figure 6.7.a indique le sens du virage.

L'algorithme proposé est appliqué dans trois cas différents. Le premier cas représente un ensemble de trames de la première séquence où le marquage routier est continu et bien dessiné, sans la présence de l'ombre (figure 6.8). Ces résultats montrent

clairement que l'algorithme détecte de façon précise les deux marquages gauche et droit ainsi que le début et l'orientation du virage. Signalons que dans ce cas, le taux de détection des vrais virages de notre algorithme est égal à 100%.

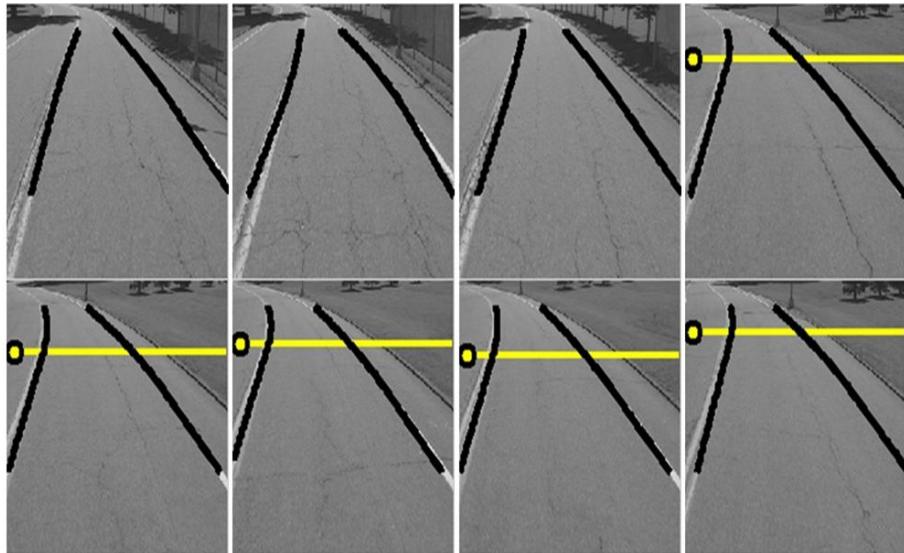


FIGURE 6.8: Résultats d'estimation des marquages et détection des virages en absence de l'ombre.

Dans le second, cas on utilise un autre ensemble de trame de la première séquence toujours, mais cette fois-ci certains marquages sont camouflés par la présence de l'ombre (figure 6.9). Dans ce cas aussi les résultats sont dans l'ensemble satisfaisants. Les résultats erronés sont dus essentiellement à la présence de l'ombre. Le troisième cas représente un ensemble d'images de la deuxième séquence qui présentent des marquages incomplets dans certaines zones de l'image (figure 6.10). Les résultats obtenus dans ce cas sont aussi satisfaisants. On remarque que pour certaines trames où le marquage dans certaines zones de l'image est totalement absent, l'algorithme proposé permet de bien localiser le marquage, grâce à la prédiction réalisée par le filtre de Kalman.

Le tableau 6.1 donne les taux de détection des vrais virages et leurs directions, obtenus en appliquant notre algorithme aux deux bases de données. On remarque que statistiquement, notre algorithme présente un taux de détection supérieur à 92% pour les deux bases. Pour la première base on note que les erreurs de détection sont dûes à la présence de l'ombre, tandis que pour la seconde séquence elles sont dûes à l'absence du marquage routier.

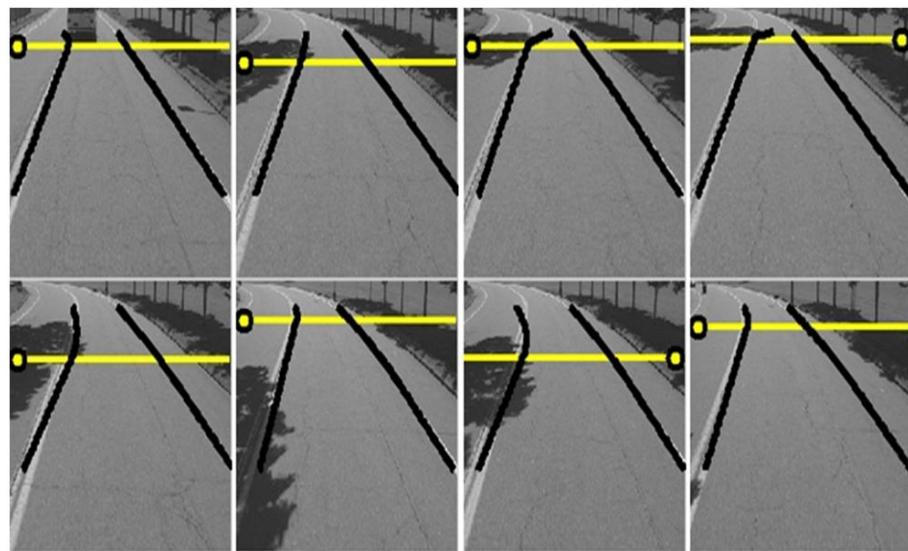


FIGURE 6.9: Résultats d'estimation des marquages et de détection des virages en présence de l'ombre.

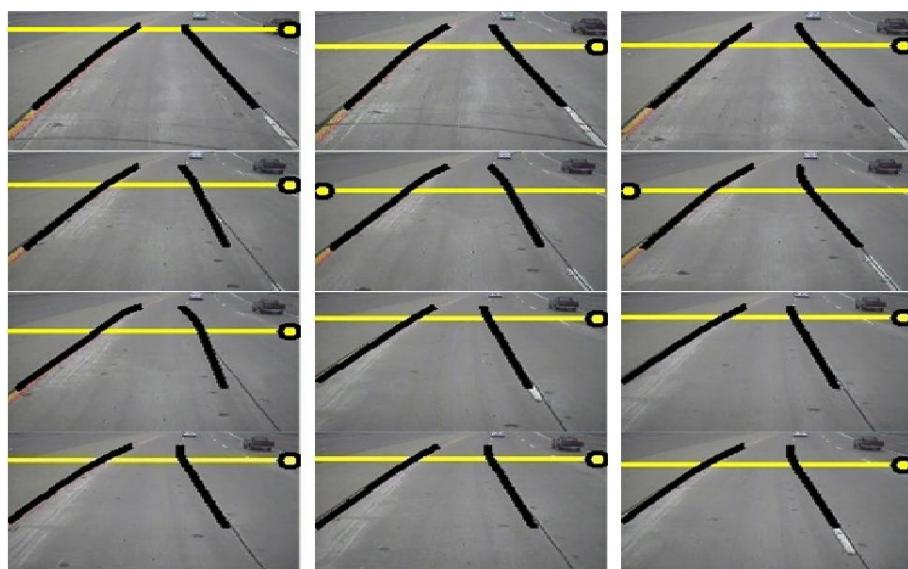


FIGURE 6.10: Résultats d'estimation des marquages et de détection des virages en l'absence partielle du marquage routier.

	Séquence 1	Séquence 2
Nombre de trames	67	80
Nombre de détection des vrais virages et leurs directions	62	75
Pourcentage de détection des vrais virages et leurs directions	92.54	93.75

TABLE 6.1: Statistiques des taux de détections des vrais virages et leurs directions obtenus par l'algorithme proposé.

6.9 Conclusion

Dans ce chapitre on a présenté succinctement les différentes technologies utilisées dans les véhicules qualifiés d'intelligents. Ensuite nous nous sommes intéressés à la détection du marquage routier, qui est une étape très essentielle pour le maintien d'un véhicule dans sa voie. Pour cela, on a mis le point sur certains aspects de la modélisation du marquage routier, et on a présenté une nouvelle méthode qui permet de détecter les bordures du marquage routier, les virages et leurs sens ainsi que leur degré de la courbure.

Par analogie avec les techniques de poursuite, on considère les pixels qui marquent la bordure d'une voie comme étant une cible fictive qui se déplace le long d'une trajectoire superposée au marquage. Cette technique se base sur l'algorithme à modèles multiples interagissant IMM, utilisant deux filtres de Kalman appropriés. Le premier filtre de Kalman se base sur le modèle CV et permet de détecter les bordures qui sont quasi rectiligne. Le deuxième est le filtre de Kalman étendu utilisant le modèle CT et permet ainsi de détecter les marquages qui présentent des courbures. Pour les bases de données utilisées, le taux de détection des vrais virages obtenu par notre algorithme a dépassé 92%, et cela pour différents situations : en présence de l'ombre et en l'absence de marquage dans certaines régions de la chaussée.

Conclusion générale et perspectives

Pour que les systèmes de surveillance aériens, '*Air Traffic Control (ATC)*', effectuent leurs tâche convenablement, ils requièrent la connaissance des caractéristiques cinématiques de la cible. Dans ce mémoire, on s'est intéressé principalement à la détermination de ces caractéristiques en estimant le vecteur d'état du mobile. Cette estimation effectuée à intervalles réguliers est appelé poursuite, pistage ou encore '*tracking*'. Par ailleurs le problème de pistage est un problème d'estimation hybride. En effet, l'estimation nécessite le traitement de deux types d'incertitudes. Les incertitudes continues représentées par des bruits, et qui sont liées à la dynamique du système ainsi qu'à la mesure et les incertitudes discrètes qui caractérisent le mode d'évolution du mobile.

Nous avons présenté trois types de modèles du vecteur d'état décrivant la dynamique d'une cible, le modèle à vitesse constante, à accélération constante et à vitesse de rotations constante. Souvent, les mesures sont données en coordonnées polaires alors que le vecteur d'état est donné en coordonnées cartésiennes. Le passage du repère polaire au repère cartésien est limité par l'erreur croisée, qui est définie comme étant le produit entre la portée et l'erreur commise sur l'azimut.

Dans le cas le plus simple, la poursuite représente l'estimation de l'état d'un système linéaire affecté par un bruit blanc Gaussien. Le filtre de Kalman dans ce cas procure l'estimée optimale au sens de la minimisation de la variance de l'erreur d'estimation. Dans ce contexte, le filtre de Kalman atteint toujours un

régime permanent. Il a été démontré que pour un filtre de Kalman du second ordre, les coefficients représentant le gain du filtre en régime permanent correspondent à ceux du filtre nommé $\alpha\beta$. Nous avons confirmé cela par simulations. En pratique, plusieurs problèmes sont formulés par des équations non linéaires. Le filtre le plus connu pour résoudre ces problèmes est le filtre de Kalman étendu, '*Extended Kalman Filter (EKF)*'. Nous avons constaté par simulations que l'EKF donne des résultats très satisfaisants dans certaines situations (bruit faible, faible non linéarité), mais lorsque le bruit est trop fort il présente des limites. Comme alternative à cet estimateur on a étudié les deux filtres non linéaires qui sont apparus récemment, le filtre de Kalman unscented, '*Unscented Kalman Filter (UKF)*', et le filtre de Kalman Quadrature, '*Quadrature Kalman Filter (QKF)*'. Ces deux filtres utilisent un certain nombre de points pour approximer la moyenne et la covariance de l'état estimée, et présentent dans la quasi majorité des cas les mêmes performances. Nous avons traité par la suite un cas particulier où l'état est donnée dans le plan (x, y) alors que la mesure est fournie en coordonnées polaires (r, θ) . Le filtre adapté à un tel problème est le filtre de Kalman à mesure convertie, '*Converted Measurement Kalman Filter (CMKF)*'. Ce filtre et ses variantes, ont fait l'objet d'une étude approfondie.

Le deuxième problème traité dans ce mémoire est le problème d'estimation dans le cas non Gaussien. En effet, l'hypothèse de Gaussienneté n'est pas toujours satisfaite en pratique. Dans la littérature, plusieurs techniques ont été proposées pour résoudre ce problème. Notre étude a portée sur le filtre de Kalman. A cet effet nous avons commencé par l'étude du filtre à somme Gaussiennes, '*Gaussian Sum Filter (GSF)*'. Dans ce filtre, plusieurs filtres de Kalman fonctionnent en parallèle, formant ainsi un banc de filtres de Kalman, où chacun fournit en plus de l'estimée de l'état et sa matrice de covariance, un poids quantifiant sa contribution. On a constaté que ce filtre est consistant, et que sa convergence vers la solution optimale dépend du nombre de filtres qui le compose. Le problème qui se pose avec ce filtre est le temps de calcul qui augmente exponentiellement avec le nombre de filtres Kalman utilisés. Comme première contribution on a pu économiser jusqu'à 80% de temps de calcul en remplaçant les filtres de Kalman dans le GSF par leurs

homologues $\alpha\beta$. Par simulations nous avons montré que le filtre obtenu, baptisé $\alpha\beta$ -GSF, présente des performances très acceptables dans beaucoup de situations.

Un autre problème rencontré en poursuite est le fait que la cible puisse effectuer des manœuvres, en prenant de l'accélération ou en effectuant des rotations. Beaucoup de solutions ont été proposées pour traiter ce problème. Notre intérêt s'est porté sur l'algorithme à modèles multiples interagissant, '*Interacting Multiple Model* (IMM)', dans lequel plusieurs filtres coopèrent, chacun étant dédié à un type de mouvement qu'on appelle mode. Notre seconde contribution dans ce mémoire a consisté à utiliser les techniques de poursuite et en particulier l'IMM pour la détection des bordures délimitant les voies dans la chaussée, ainsi que les virages et leurs degrés de courbure. L'application de notre algorithme sur certaines bases de données nous a permis d'atteindre un taux de détection, des vrais virages, supérieur à 92%. Cet algorithme peut être intégré dans un système d'aide à la conduite.

Parmi les perspectives envisagées pour notre travail on cite :

- La généralisation du filtre $\alpha\beta$ -GSF pour qu'il couvre les cas non linéaires.
- L'utilisation $\alpha\beta$ -GSF dans d'autres domaines tel que les réseaux de télécommunications.
- La conception d'un algorithme d'aide à la conduite qui s'appuie sur l'algorithme qu'on a développé, et qui permet de prévenir les collisions en détectant les piétons et les autres véhicules.

Annexe A

Moments d'une variables aléatoire Gaussienne après transformation non linéaire

L'équation (3.74) peut être démontrée facilement en prenant en compte les propriétés suivantes :

$$E \left[\cos \tilde{\theta} \right] = e^{-\sigma_{\theta}^2/2} \quad (\text{A.1})$$

$$E \left[\sin \tilde{\theta} \right] = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$E \left[\cos^2 \tilde{\theta} \right] = \frac{1}{2} \left(1 + e^{-2\sigma_{\theta}^2} \right) \quad (\text{A.3})$$

$$E \left[\sin^2 \tilde{\theta} \right] = \frac{1}{2} \left(1 - e^{-2\sigma_{\theta}^2} \right) \quad (\text{A.4})$$

$$E \left[\sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\theta} \right] = 0 \quad (\text{A.5})$$

Démontrons l'expression $E[\cos x] = e^{-\sigma^2/2}$ où : x est une variable aléatoire Gaussienne centrée et de variance σ^2 . Soit $p(x)$ la densité de probabilité associée à x .

Par définition on a :

$$E[\cos(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(u)p_x(u)du \quad (\text{A.6})$$

après l'introduction du développement limité de la fonction $\cos(x)$ on obtient :

$$\begin{aligned} E[\cos(x)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2} dx \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2i} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2} dx \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

D'après la définition des moments pairs d'ordre $2i$, d'une variable aléatoire Gaussienne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2i} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2} dx = E[x^{2i}] = \frac{(2i)!}{2^i i!} \sigma^{2i} \quad (\text{A.8})$$

on obtient après remplacement de (A.7) dans (A.8) :

$$\begin{aligned} E[\cos(x)] &= \sum_{i=0}^{+\infty} \left(-\frac{\sigma^2}{2} \right)^i / i! \\ &= e^{-\frac{\sigma^2}{2}} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Pour calculer $E[\sin(x)]$, on a la propriété des moment d'ordres impaires d'une variable aléatoire Gaussiennes qui sont nuls $E[x^{2i+1}] = 0$. Les autres propriétés se déduisent facilement en appliquant les règles trigonométriques usuelles et en exploitant les moments des variables aléatoires $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Annexe B

dérivation des équations du filtre AGSF

B.1 Dérivation de l'équation (4.32)

$$p(\mathbf{z}_{k+1}/\mathbf{x}_{k+1}) \approx \sum_{i=1}^N \alpha_{i,k+1} N(\mathbf{m}_{i,k+1} - \mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{B}_{i,k+1}) \quad (\text{B.1})$$

De l'équation de la mesure (4.2) on a $\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{z}_{k+1} - h(\mathbf{x}_{k+1})$, alors :

$$p(\mathbf{z}_{k+1}/\mathbf{x}_{k+1}) = p_{\mathbf{v}}(\mathbf{z}_{k+1} - h(\mathbf{x}_{k+1})) \quad (\text{B.2})$$

or

$$p_{\mathbf{v}}(\mathbf{z}_{k+1} - h(\mathbf{x}_{k+1})) \approx \sum_{i=1}^N \tilde{\alpha}_{i,k+1} N(\bar{\mathbf{m}}_{i,k+1} - h(\mathbf{x}_{k+1}), \tilde{\mathbf{B}}_{i,k+1}) \quad (\text{B.3})$$

avec

$$N(\bar{\mathbf{m}}_{i,k+1} - h(\mathbf{x}_{k+1}), \tilde{\mathbf{B}}_{i,k+1}) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(\bar{\mathbf{m}}_{i,k+1} - h(\mathbf{x}_{k+1}))' \tilde{\mathbf{B}}_{i,k+1}^{-1} (\bar{\mathbf{m}}_{i,k+1} - h(\mathbf{x}_{k+1}))\right)}{\sqrt{2\pi \tilde{\mathbf{B}}_{i,k+1}}} \quad (\text{B.4})$$

et

$$-\bar{\mathbf{m}}_{i,k+1} = \mathbf{z}_{k+1} - \tilde{\mathbf{m}}_{i,k+1}$$

– $\tilde{\alpha}_{i,k+1}$, $\tilde{\mathbf{m}}_{i,k+1}$ et $\tilde{\mathbf{B}}_{i,k+1}$ sont les paramètres qui donnent la meilleure approximation de la densité $p_{\mathbf{v}}(\cdot)$, obtenue après la résolution de l'équation (4.31).

L'expression $N\left(\bar{\mathbf{m}}_{i,k+1} - h(\mathbf{x}_{k+1}), \tilde{\mathbf{B}}_{i,k+1}\right)$ est non gaussienne en fonction de \mathbf{x}_{k+1} , soit $F_i(\mathbf{x}_{k+1})$ le paramètre de l'exponentiel de cette expression :

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{x}_{k+1}) = -\frac{1}{2} (\bar{\mathbf{m}}_{i,k+1} - h(\mathbf{x}_{i,k+1}))' \tilde{\mathbf{B}}_{i,k+1}^{-1} (\bar{\mathbf{m}}_{i,k+1} - h(\mathbf{x}_{i,k+1})) \quad (B.5)$$

Le développement en série de Taylor de (B.5) donne :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i(\mathbf{x}_{k+1}) &= \mathbf{F}_i(\mathbf{m}_{i,k+1}) - \mathbf{J}_{\mathbf{F}_i}(\mathbf{m}_{k+1})(\mathbf{D}\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{m}_{i,k+1}) + \\ &\quad \frac{1}{2}(\mathbf{D}\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{m}_{i,k+1})' \mathbf{H}_{\mathbf{F}_i}(\mathbf{m}_{k+1})(\mathbf{D}\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{m}_{i,k+1}) + HOT \end{aligned} \quad (B.6)$$

où :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\mathbf{F}_i}(\mathbf{m}_{i,k+1}) &= \left. \frac{\partial \mathbf{F}_i(\mathbf{x}_{k+1})}{\partial \mathbf{x}_{k+1}} \right|_{\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{m}_{i,k+1}} \\ &= \mathbf{J}_h(\mathbf{m}_{i,k+1})' \tilde{\mathbf{B}}_{i,k+1}^{-1} (\bar{\mathbf{m}}_{i,k+1} - h(\mathbf{m}_{i,k+1})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\mathbf{F}_i}(\mathbf{m}_{i,k+1}) &= \left. \frac{\partial^2 \mathbf{F}_i(\mathbf{x}_{k+1})}{\partial \mathbf{x}_{k+1} \partial \mathbf{x}'_{k+1}} \right|_{\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{m}_{i,k+1}} \\ &= \mathbf{H}'_h(\mathbf{m}_{i,k+1}) \tilde{\mathbf{B}}_{i,k+1}^{-1} (\bar{\mathbf{m}}_{i,k+1} - h(\mathbf{m}_{i,k+1})) - \mathbf{J}_h(\mathbf{m}_{i,k+1})' \tilde{\mathbf{B}}_{i,k+1}^{-1} \mathbf{J}_h(\mathbf{m}_{i,k+1}) \end{aligned}$$

$$\mathbf{J}_h(\mathbf{m}_{i,k+1}) = \left. \frac{\partial h(\mathbf{x}_{k+1})}{\partial \mathbf{x}_{k+1}} \right|_{\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{m}_{i,k+1}}$$

$$\mathbf{H}_h(\mathbf{m}_{i,k+1}) = \left. \frac{\partial^2 h(\mathbf{x}_{k+1})}{\partial \mathbf{x}_{k+1} \partial \mathbf{x}'_{k+1}} \right|_{\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{m}_{i,k+1}}$$

Si on choisit $\mathbf{m}_{i,k+1} = h^{-1}(\bar{\mathbf{m}}_{i,k+1})$ et en ignorant les *HOT* on obtient :

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{x}_{k+1}) \approx \frac{1}{2}(\mathbf{D}\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{m}_{i,k+1})' \left[\mathbf{J}_h(\mathbf{m}_{i,k+1})' \tilde{\mathbf{B}}_{i,k+1}^{-1} \mathbf{J}_h(\mathbf{m}_{i,k+1}) \right] (\mathbf{D}\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{m}_{i,k+1}) \quad (B.7)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (B.8)$$

si on note : $\mathbf{B}_{i,k+1}^{-1} = \mathbf{J}'_h(\mathbf{m}_{i,k+1})\tilde{\mathbf{B}}_{i,k+1}^{-1}\mathbf{J}_h(\mathbf{m}_{i,k+1})$, et en multipliant et en division (B.4) par $|\mathbf{J}_h(\mathbf{m}_{i,k+1})|^{-1}$ on obtient :

$$N\left(\bar{\mathbf{m}}_{i,k+1} - h(\mathbf{x}_{k+1}), \tilde{\mathbf{B}}_{i,k+1}\right) \approx \frac{|\mathbf{J}_h(\mathbf{m}_{i,k+1})|^{-1}}{\sqrt{2\pi (\mathbf{J}_h^{-1}(\mathbf{m}_{i,k+1}))' \tilde{\mathbf{B}}_{i,k+1} \mathbf{J}_h^{-1}(\mathbf{m}_{i,k+1})}} \times \exp\left(-\frac{1}{2} (\mathbf{D}\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{m}_{i,k+1})' \mathbf{B}_{i,k+1}^{-1} (\mathbf{D}\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{m}_{i,k+1})\right) \quad (\text{B.9})$$

soit enfin :

$$N\left(\bar{\mathbf{m}}_{i,k+1} - h(\mathbf{x}_{k+1}), \tilde{\mathbf{B}}_{i,k+1}\right) \approx \frac{N(\mathbf{D}\mathbf{x}_{k+1} - h(\mathbf{m}_{i,k+1}), \mathbf{B}_{i,k+1})}{|\mathbf{J}_h(\mathbf{m}_{i,k+1})|} \quad (\text{B.10})$$

en remplaçant (B.10) dans (B.3) on obtient l'équation (B.1) où :

$$\alpha_{i,k+1} = \tilde{\alpha}_{i,k+1} |\mathbf{J}_h(\mathbf{m}_{i,k+1})|^{-1} \quad (\text{B.11})$$

B.2 Démonstration de l'équation (4.33)

$$p(\mathbf{x}_n/\mathbf{Z}^n) = \sum_{i=1}^N \gamma_{n,i} N\left(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_{n|n,i}, \mathbf{P}_{n|n,i}\right) \quad (\text{B.12})$$

on a :

$$p(\mathbf{x}_{k+1}/\mathbf{Z}^{k+1}) = \frac{p(\mathbf{x}_{k+1}/\mathbf{Z}^k) p(\mathbf{Z}^{k+1}/\mathbf{x}_{k+1})}{\int p(\mathbf{x}_{k+1}/\mathbf{Z}^k) p(\mathbf{Z}^{k+1}/\mathbf{x}_{k+1}) d\mathbf{x}_{k+1}} \quad (\text{B.13})$$

d'après l'équation (4.31)

$$p(\mathbf{x}_{k+1}/\mathbf{Z}^k) p(\mathbf{Z}^{k+1}/\mathbf{x}_{k+1}) = N(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \mathbf{P}_{k+1|k}) \times \sum_{i=1}^N \alpha_{i,k+1} N(\mathbf{D}\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{m}_{i,k+1}, \mathbf{B}_{i,k+1}) \quad (\text{B.14})$$

on a :

$$\begin{aligned} N(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \mathbf{P}_{k+1|k})N(\mathbf{D}\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{m}_{i,k+1}, \mathbf{B}_{i,k+1}) = \\ \frac{1}{2\pi\sqrt{|\mathbf{P}||\mathbf{B}|}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left\{(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k})' \mathbf{P}_{k+1|k}^{-1} (\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) + \right.\right. \\ \left.\left.(\mathbf{D}\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{m}_{i,k+1})' \mathbf{B}_{i,k+1}^{-1} (\mathbf{D}\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{m}_{i,k+1})\right\}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

soit \mathbf{F}_i la puissance de l'exponentielle dans (B.15) alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i = -\frac{1}{2} \left\{ \left(\mathbf{x}'_{k+1} \mathbf{P}_{k+1|k}^{-1} \mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}'_{k+1|k} \mathbf{P}_{k+1|k}^{-1} \mathbf{x}_{k+1} \right) - \right. \\ \left(\mathbf{x}'_{k+1} \mathbf{P}_{k+1|k}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} - \hat{\mathbf{x}}'_{k+1|k} \mathbf{P}_{k+1|k}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} \right) + \\ \left(\mathbf{x}'_{k+1} \mathbf{D}' \mathbf{B}_{i,k+1}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{m}'_{i,k+1} \mathbf{B}_{i,k+1}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{x}_{k+1} \right) - \\ \left. \left(\mathbf{x}'_{k+1} \mathbf{D}' \mathbf{B}_{i,k+1}^{-1} \mathbf{m}_{i,k+1} - \mathbf{m}'_{i,k+1} \mathbf{B}_{i,k+1}^{-1} \mathbf{m}_{i,k+1} \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

après réarrangement on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i = -\frac{1}{2} \left\{ \hat{\mathbf{x}}'_{k+1|k} \mathbf{P}_{k+1|k}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \mathbf{m}'_{i,k+1} \mathbf{B}_{i,k+1}^{-1} \mathbf{m}_{i,k+1} \right\} - \\ \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{x}'_{k+1} \left(\mathbf{P}_{k+1|k}^{-1} + \mathbf{D}' \mathbf{B}_{i,k+1}^{-1} \mathbf{D} \right) \mathbf{x}_{k+1} - \right. \\ \left. \mathbf{x}'_{k+1} \left(\mathbf{P}_{k+1|k}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \mathbf{D}' \mathbf{B}_{i,k+1}^{-1} \mathbf{m}_{i,k+1} \right) - \right. \\ \left. \left(\hat{\mathbf{x}}'_{k+1|k} \mathbf{P}_{k+1|k}^{-1} + \mathbf{m}'_{i,k+1} \mathbf{B}_{i,k+1}^{-1} \mathbf{D} \right) \mathbf{x}_k \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

sachant que :

$$\mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^{-1} = \left(\mathbf{P}_{k+1|k}^{-1} + \mathbf{D}' \mathbf{B}_{i,k+1}^{-1} \mathbf{D} \right) \quad (\text{B.18})$$

alors

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i = -\frac{1}{2} \left\{ \hat{\mathbf{x}}'_{k+1|k} \mathbf{P}_{k+1|k}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \mathbf{m}'_{i,k+1} \mathbf{B}_{i,k+1}^{-1} \mathbf{m}_{i,k+1} \right\} - \\ \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{x}'_{k+1} \mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^{-1} \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}'_{k+1} \mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^{-1} \mathbf{P}_{i,k+1|k+1} \left(\mathbf{P}_{k+1|k}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \mathbf{D}' \mathbf{B}_{i,k+1}^{-1} \mathbf{m}_{i,k+1} \right) - \right. \\ \left. \left(\hat{\mathbf{x}}'_{k+1|k} \mathbf{P}_{k+1|k}^{-1} + \mathbf{m}'_{i,k+1} \mathbf{B}_{i,k+1}^{-1} \mathbf{D} \right) \mathbf{P}_{i,k+1|k+1} \mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^{-1} \mathbf{x}_{k+1} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

soit :

$$\hat{\mathbf{x}}_{i,k+1|k+1} = \mathbf{P}_{i,k+1|k+1} \left(\mathbf{P}_{k+1|k}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \mathbf{D}' \mathbf{B}_{i,k+1}^{-1} \mathbf{m}_{i,k+1} \right) \quad (\text{B.20})$$

étant donné que mes matrice $\mathbf{P}_{k+1|k}$ et $\mathbf{B}_{i,k+1}$ sont symétriques, alors on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_i = & -\frac{1}{2} \left\{ \hat{\mathbf{x}}'_{k+1|k} \mathbf{P}_{k+1|k}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \mathbf{m}'_{i,k+1} \mathbf{B}_{i,k+1}^{-1} \mathbf{m}_{i,k+1} \right\} \\ & -\frac{1}{2} \left\{ \mathbf{x}'_{k+1} \mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^{-1} - \mathbf{x}'_{k+1} \mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{i,k+1|k+1} - \hat{\mathbf{x}}'_{i,k+1|k+1} \mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^{-1} \mathbf{x}_{k+1} \right\}\end{aligned}\quad (\text{B.21})$$

on ajoute et on retranche $\mathbf{x}_{i,k+1|k+1} \mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^{-1} \mathbf{x}_{i,k+1|k+1}$ on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_i = & -\frac{1}{2} \left\{ \hat{\mathbf{x}}'_{k+1|k} \mathbf{P}_{k+1|k}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \mathbf{m}'_{i,k+1} \mathbf{B}_{i,k+1}^{-1} \mathbf{m}_{i,k+1} - \mathbf{x}_{i,k+1|k+1} \mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^{-1} \mathbf{x}_{i,k+1|k+1} \right\} - \\ & \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{x}'_{k+1} \mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^{-1} - \mathbf{x}'_{k+1} \mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{i,k+1|k+1} - \hat{\mathbf{x}}'_{i,k+1|k+1} \mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^{-1} \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{x}_{i,k+1|k+1} \mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^{-1} \mathbf{x}_{i,k+1|k+1} \right\}\end{aligned}\quad (\text{B.22})$$

Le second terme peut être réécrit sous la forme :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2} \left\{ \mathbf{x}'_{k+1} \mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^{-1} - \mathbf{x}'_{k+1} \mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{i,k+1|k+1} - \hat{\mathbf{x}}'_{i,k+1|k+1} \mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^{-1} \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{x}_{i,k+1|k+1} \mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^{-1} \mathbf{x}_{i,k+1|k+1} \right\} = \\ -\frac{1}{2} (\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{i,k+1|k+1})' \mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^{-1} (\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{i,k+1|k+1})\end{aligned}\quad (\text{B.23})$$

pour alléger l'écriture on met :

$$e_{i,k+1} = \exp \left(-\frac{1}{2} \left\{ \hat{\mathbf{x}}'_{k+1|k} \mathbf{P}_{k+1|k}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \mathbf{m}'_{i,k+1} \mathbf{B}_{i,k+1}^{-1} \mathbf{m}_{i,k+1} - \hat{\mathbf{x}}'_{i,k+1|k+1} \mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{i,k+1|k+1} \right\} \right) \quad (\text{B.24})$$

$$\begin{aligned}N_{i,k+1}(\mathbf{x}_{k+1}) &= N(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{i,k+1|k+1}, \mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^{-1}) \\ &= \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{i,k+1|k+1})' \mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^{-1} (\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{i,k+1|k+1})\right)}{\sqrt{2\pi |\mathbf{P}_{i,k+1|k+1}|}}\end{aligned}\quad (\text{B.25})$$

l'équation (B.13) devient :

$$\begin{aligned}p(\mathbf{x}_{k+1}/\mathbf{Z}^{k+1}) &= \frac{\alpha_{i,k+1} \frac{\sqrt{|\mathbf{P}_{i,k+1|k+1}|}}{\sqrt{2\pi |\mathbf{P}_{k+1|k}| |\mathbf{B}_{i,k+1}|}} e_{i,k+1} N_{i,k+1}(\mathbf{x}_{k+1})}{\sum_{i=1}^N \alpha_{i,k+1} \int \frac{\sqrt{|\mathbf{P}_{i,k+1|k+1}|}}{\sqrt{2\pi |\mathbf{P}_{k+1|k}| |\mathbf{B}_{i,k+1}|}} e_{i,k+1} N_{i,k+1}(\mathbf{x}_{k+1}) d\mathbf{x}_{k+1}} \\ &= \frac{\alpha_{i,k+1} \frac{\sqrt{|\mathbf{P}_{i,k+1|k+1}|}}{\sqrt{|\mathbf{B}_{i,k+1}|}} e_{i,k+1} N_{i,k+1}(\mathbf{x}_{k+1})}{\sum_{i=1}^N \alpha_{i,k+1} \frac{\sqrt{|\mathbf{P}_{i,k+1|k+1}|}}{\sqrt{|\mathbf{B}_{i,k+1}|}} e_{i,k+1} \int N_{i,k+1}(\mathbf{x}_{k+1}) d\mathbf{x}_{k+1}}\end{aligned}\quad (\text{B.26})$$

où $\int N_{i,k+1}(\mathbf{x}_{k+1})d\mathbf{x}_{k+1} = 1$. Si on considère :

$$\gamma_{i,k+1} = \frac{\alpha_{i,k+1} \frac{\sqrt{|\mathbf{P}_{i,k+1|k+1}|}}{\sqrt{|\mathbf{B}_{i,k+1}|}} e_{i,k+1}}{\sum_{i=1}^N \alpha_{i,k+1} \frac{\sqrt{|\mathbf{P}_{i,k+1|k+1}|}}{\sqrt{|\mathbf{B}_{i,k+1}|}} e_{i,k+1}} \quad (\text{B.27})$$

on obtient en fin :

$$p(\mathbf{x}_{k+1}/\mathbf{Z}^{k+1}) = \sum_{i=1}^N \gamma_{i,k+1} N\left(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{i,k+1|k+1}, \mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^{-1}\right) \quad (\text{B.28})$$

où les paramètres $\hat{\mathbf{x}}_{i,k+1|k+1}$, $\mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^{-1}$ et $\gamma_{i,k+1}$ sont donnés respectivement par les équations (B.20), (B.18) et (B.27).

Bibliographie

- [1] Y. Bar-Shalom. *Multitarget-Multisensor Tracking : Applications and Advances*, volume II. Artech House, 1992.
- [2] X.R. Li and V.P. Jilkov. Survey of maneuvering target tracking. part v : Multiple-model methods. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 41(4) :1255–1321, October 2005.
- [3] Y. Bar-Shalom, X. R. Li, and T. Kirubarajan. *Estimation with application to Tracking and Navigation : Theory, Algorithms and Software*. John Wiley & Sons, New York, 2001.
- [4] D. Simon. *Optimal State Estimation*. John Wiley and Sons, first edition, 2006.
- [5] M. Dahmani. *Poursuite de cible en utilisant des mesures angulaires seulement*. thèse de magister, Laboratoire Signaux et Images, dpartement d'électronique, université USTO-MB Oran, Algérie, Mars 2004.
- [6] D. Lerro and Y. Bar-Shalom. Bias compensation for improved recursive bearings-only target state estimation. *IEEE Proceeding of the American Control Conference*, 1 :648–652, June 1995.
- [7] X.R. Li and V.P. Jilkov. Survey of maneuvering target tracking. part i : Dynamic models. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 39(4) :1333–1364, October 2003.
- [8] A. Meche. *Méthodes de filtrage non linéaires pour la poursuite de cibles*. thèse de magister, Laboratoire Signaux et Images, département d'électronique, université USTO-MB Oran, Algérie, Mars 2004.
- [9] D. Lerro and Y. Bar-Shalom. Tracking with debiased consistent converted measurements versus ekf. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 29(3) :1015–1022, July 1993.
- [10] M. Longbin, S. Xiaoquan, Z. Yiyu, S.Z. Kang, and Y. Bar-Shalom. Unbiased converted measurements for tracking. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 34 : 1023–1027, Jul 1998.

- [11] Z. Duan, C. Han, and X.R. Li. Comments on unbiased converted measurements for tracking. *IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems*, 40(4) :1374–1377, October 2004.
- [12] B.D.O. Anderson and J.B. Moore. *Optimal filtering*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1979.
- [13] T.C. Wang and P.K. Varshney. Measurement preprocessing for nonlinear target tracking. *IEE Proceedings-F*, 140 :316–322, October 1993.
- [14] S.J. Julier and J.K. Uhlmann. Unscented filtering and nonlinear estimation. *Proceeding IEEE*, 92(3) :401–422, March 2004.
- [15] R.E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME- Journal of Basic Engineering*, 82-D :35–45, 1960.
- [16] Y. Bar-Shalom and X. R. Li. *Estimation and Tracking, Principles, Techniques, and Software*. Artech House Boston London, 1993.
- [17] H.W. Sorenson and D.L. Alspach. Recursive bayesian estimation using gaussian sums. *Automatica*, 7 :465–479, 1971.
- [18] I.T. Wing, K.N. Plataniotis, and D. Hatzinakos. An adaptive gaussian sum algorithm for radar tracking. *Signal Processing*, 77 :85–104, 1999.
- [19] J.R. Schoenberg, M. Campbell, and I. Miller. Localization with multi-modal vision measurements in limited gps environments using gaussian sum filters. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 1423–1428, May 2009.
- [20] P.R. Kalata. $\alpha\beta$ target tracking systems : A survey. *CC/WM12*, pages 832–836, 1992.
- [21] T.R. Benedict and G.W. Bordner. Synthesis of an optimal set of radar track-while-scan smoothing equations. *IRE Transaction on Automatic Control*, (8) :27–32, August 1962.
- [22] P.R. Kalata. The tracking index a generalized parameter for $\alpha\beta$ and $\alpha\beta\gamma$ target trackers. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, AES-20 :174–182, Marsh 1984.
- [23] Y. Bar-Shalom, K. C. Chang, and H.A.P. Blom. Tracking a maneuvering target using input estimation versus the interacting multiple model algorithm. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, AES-25(2) :396–300, 1989.
- [24] S. J. Julier and J. K. Uhlmann. A new extension of the kalman filter to nonlinear systems. *in Proc. AeroSense : 11th International Symposium on Aerospace Defense Sensing, Simulation and Controls*, pages 182–193, 1997.

- [25] R.V.D. Merwe. *Sigma-point Kalman Filters for Probabilistic Inference in Dynamic state-space Models*. Phd thesis, OGI School of Science and Engineering at Oregon Health and Science University, <http://speech.bme.ogi.edu/publications/ps/merwe04.pdf>, April 2004.
- [26] S.J. Julier and J.K. Uhlmann. A general method for approximating nonlinear transformations of probability distributions. *document electronique tlchargeable via le lien*, page <http://www.smpp.northwestern.edu/savedLiterature/JulierUhlmannUnscented.pdf>, March 1996.
- [27] S.J. Julier and J.K. Uhlmann. The scaled unscented transformation. *in Proc. Amer. Control Conf.*, pages 4555–4559, 2002.
- [28] R. V. D. Merwe and E. A. Wan. The square-root unscented kalman filter for state and parameter-estimation. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, 6 :3461–3464, 2001.
- [29] S.J. Julier, J. Uhlman, and H.F. Durrant-Whyte. A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(3) :477–482, 2000.
- [30] M. Dahmani. *Application du filtre de Kalman linéaire et non linéaire et ses dérives à la poursuite d'une cible manœuvrante*. thèse de doctorat, Laboratoire Signaux et Images, dpartement d'électronique, université USTO-MB Oran, Algérie, Mars 2012.
- [31] I. Arasaratnam and S. Haykin. Cubature kalman filters. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 54 :1254–1269, June 2009. URL http://soma.mcmaster.ca/papers/ckf_2009.pdf.
- [32] A. Solin. *Cubature integration methods in non-linear Kalman filtering and smoothing*. PhD thesis, Bachelors thesis, Aalto University School Of Science And Technology, Faculty of Information and Natural Sciences, 2010.
- [33] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical Recipes in C*. Cambridge, U.K. : Cambridge Univ. Press, 2nd edition, 1992.
- [34] K. Ito and K. Xiong. Gaussian filters for nonlinear filtering problems. *IEEE Transactions on Automation and Control*, 45(1) :910–927, May 2000.
- [35] I. Arasaratnam, S. Haykin, and R. J. Elliott. Discrete-time nonlinear filtering algorithms using gauss-hermite quadrature. *Proc. IEEE*, 95(5) :953–977, May 2007.
- [36] M. Longbin, S. Xiaoquan, Z. Yiyu, and S.Z. Kang. Unbiased converted measurements for target tracking. *Aerospace and Electronics Conference, 1997. NAECON 1997., Proceedings of the IEEE 1997 National*, 2 :1039–1041, Jul 1998.

- [37] S.V. Bordonaro, P. Willett, and Y. Bar-Shalom. Unbiased tracking with converted measurements. *IEEE Radar Conference (RADAR)*, pages 741–745, May 2012.
- [38] B.D. Kim and J.S. Lee. Decoupled tracking filter with modified unbiased converted measurements. *IEEE International Conference on Radar*, pages 1–4, October 2006.
- [39] W. Mei, Z. He, and G. Liang. Iterated debiased kalman filter for target tracking with converted measurements. *IEEE International Conference on Information Science and Technology*, pages 185–189, March 2012.
- [40] W. Mei and Y. Bar-Shalom. Unbiased kalman filter using converted measurements : Revisit. *Signal and Data Processing of Small Targets, SPIE*, 7445 :1–9, January 2009.
- [41] X. Luo, I.M. Moroza, and I. Hoteit. Scaled unscented transform gaussian sum filter : Theory and application. *Elsevier, Physica D* 239, pages 684–701, 2010.
- [42] N.J. Gordon, D.J. Salmond, and A.F.M. Smith. Novel approach to nonlinear/non-gaussian bayesian state estimation. *IEE Proceedings-F*, 140(2) :107–113, April 1993.
- [43] D.L. Alspach and H.W. Sorenson. Nonlinear bayesian estimation using gaussian sum approximations. *IEEE transactions on Automatic Control*, AC-17(4) :439–448, 1972. URL <http://link.aip.org/link/?RSI/62/1/1>.
- [44] N. Piskounov. *Calcul différentiel et intégral*, volume 1. Edition MIR. Moscou, 8 edition, 1980.
- [45] V. Melnykov and R. Maitra. Finite mixture models and model-based clustering. *Statistics Surveys*, 4 :80–116, 2010.
- [46] A. Meche, M. Dahmani, M. Keche, and A. Ouamri. A simplified $\alpha\beta$ based gaussian sum filter. *AEU - International Journal of Electronics and Communications*, 67(4) :313–318, April 2013.
- [47] K.N. Plataniotis and A.N. Venetsanopoulos. State estimation in the presence of non-gaussian noise. *Adaptive Systems for Signal Processing, Communications and Control Symposium*, pages 230–235, October 2000.
- [48] E.L. Ting, P.S. Juhng, W.Y. Ker, H.H. Kuo, and C.W. Chun. Design of an alpha-beta filter by combining fuzzy logic with evolutionary methods. *International Symposium on Computer Communication Control and Automation*, pages 270–273, May 2010.
- [49] M. Dahmani, M. Keche, A. Ouamri, and A. Meche. A new imm algorithm using fixed coefficients filters (fastimm). *AEU - International Journal of Electronics and Communications*, 64 :1123–1127, December 2010.

- [50] H. Benoudnine. *Poursuite adaptative multicibles applications radars et réseaux sans fil mobile*. thèse de doctorat, Laboratoire Signaux et Images, dpartement d'électronique, université USTO-MB Oran, Algérie, 2008.
- [51] R. A. Singer. Estimating optimal tracking filter performance for manned maneuvering targets. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, AES-6(4) :473–483, July 1970.
- [52] F. R. Castella. An adaptive two dimensional kalman tracking filter. *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, 16 :822–829, 1980.
- [53] D.T. Magill. Optimal adaptive estimation of sampled stochastic processes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 10 :434–439, 1965.
- [54] H.A.P. Blom and Y. Bar-Shalom. The interacting multiple model algorithm for systems with markovian switching coefficients. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33 :780–783, July 1988.
- [55] E. Daeipour, Y. Bar-Shalom, and X. R. Li. Adaptive beam pointing control of a phased array radar using an imm estimator. *Proceeding of the American Control Conference*, pages 2093–2097, June 1994.
- [56] Y. T. Chan, A. G. C. Hu, and J. B. Plant. A kalman filter based tracking scheme with input estimation. *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, AES-15 :237–244, March 1979.
- [57] T.C. Wang and P.K. Varshney. A tracking algorithm for manoeuvring targets. *EEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, 29 :910–924, 1993.
- [58] T. Kawase, H. Tsurunosono, N. Ehara, and I. Sasase. Alpha-beta tracking filter combined with ellipsoidal prediction using generalized hough transform. *IEE Conference Publication Radar 97*, pages 609–613, October 1997.
- [59] S. J. Shin and T. L. Song. Input estimation with multiple model for maneuvering target tracking. *Elsivier, Control Engineering Practice*, 10 :1385–1391, May 1971.
- [60] Y. Bar-Shalom and K. Birmiwal. Variable dimension filter for maneuvering target tracking. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, AES-18(5) :621–629, September 1982.
- [61] Y. Bar-Shalom, S. Challa, and H.A.P. Blom. Imm estimator versus optimal estimator for hybrid systems. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 41(3) :986–991, July 2005.

- [62] Y. Bar-Shalom and X. R. Li. *Multitarget-Multisensor Tracking : Principles and Techniques*. Storrs, CT : YBS Publishing, 1995.
- [63] J. C. McCall and M. M. Trivedi. Video-based lane estimation and tracking for driver assistance : survey, system, and evaluation. *IEEE Transaction on Intelligent Transportation System*, 7 :20–37, March 2006.
- [64] M. Aoki. Image processing in its. *IEEE International Conference on Intelligent Vehicles*, pages 3–8, 1998.
- [65] C.R. Jung and C.R. Kelber. A robust linear-parabolic model for lane following. *IEEE Intelligent Vehicles Symposium*, pages 72–79, October 2004.
- [66] X.Youchun, W.Rongben, Libing, and J.Shouwen. A vision navigation algorithm based on linear lane model. *IEEE Proceedings on Intelligent Vehicles Symposium*, pages 240–245, October 2000.
- [67] Y.Wanga, E.K. Teoha, and D. Shen. Lane detection and tracking using b-snake. *Image and Vision Computing*, 22 :269–280, 2004.
- [68] A. Broggi. Robust real-time lane and road detection in critical shadow conditions. *IEEE Proceedings on International Symposium on Computer Vision*, pages 353–358, 1995.
- [69] S. G. Jeong, C. S. Kim, D. Y. Lee, S. K. HA, D. H. Lee, M. H. Lee, and M. H. Lee. Real-time lane detection for autonomous vehicle. *IEEE Proceedings on Intelligent Transportation Systems*, 3 :1466–1471, 2001.
- [70] Y. Xuan, B. Serge, and B. Michel. Road tracking, lane segmentation and obstacle recognition by mathematical morphology. *IEEE Proceedings on Intelligent Vehicles Symposium*, page 166170, 1992.
- [71] R. Risack, N. Mohler, and W. Enkelmann. A video-based lane keeping assistant. *IEEE Proceedings on Intelligent Vehicles Symposium*, pages 356–361, October 2000.
- [72] K.A.Redmill, S.Upadhyya, A. Krishnamurthy, and U. Ozguner. A lane tracking system for intelligent vehicle applications. *IEEE Proceedings on Intelligent Transportation Systems*, pages 273–279, October 2001.
- [73] P. Katsande and P. Liatsis. Adaptive order explicit polynomials for road edge tracking. *International Conference on Advanced Driver Assistance Systems*, pages 63–67, September 2001.

- [74] N. E. Apostoloff. *Vision based lane tracking using multiple cues and particle filtering*. Master of philosophy, Department of Systems Engineering, Research School of Information Sciences and Engineering, Australian National University, February 2005.
- [75] Y. Chen and M. He. Sharp curve lane boundaries projective model and detection. *IEEE International Conference on Industrial Informatics (INDIN)*, pages 1188–1193, July 2012.
- [76] C.R. Jung and C.R. Kelber. A lane departure warning system based on a linear-parabolic lane model. *IEEE Proceedings on Computer Graphics and Image Processing*, pages 891–895, June 2004.
- [77] M. Thuy and F. P. León. Lane detection and tracking based on lidar data. *Metrology & Measurement Systems XVII*, pages 311–322, 2010.
- [78] M. Boumediene, A. Ouamri, and N. Dahnoun. Lane boundary detection and tracking using nnf and hmm approaches. *IEEE proceedings on Intelligent Vehicles Symposium*, pages 1107–1111, June 2007.
- [79] R. T. Moreo, M. Z. Izquierdo, B. Ú. Minarro, and A. G. Skarmeta. High-integrity imm-ekf-based road vehicle navigation with low-cost gps/sbas/ins. *IEEE Transaction on Intelligent Transportation Systems*, 8 :491–511, 2007.
- [80] K. Weiss, N. Kaempchen, and A. Kirchner. Multiple-model tracking for the detection of lane change maneuvers. *IEEE Proceedings on Intelligent Vehicles Symposium*, pages 937–942, 2004.
- [81] R. T. Moreo and M. Z. Izquierdo. Imm-based lane change prediction in highways with low-cost gps/ins. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 10 :180–158, 2009.
- [82] E. Pollard and D. Gingras. Improved low cost gps localization by using communicative vehicles. *International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision, ICARCV*, September 2012.

ملخص

في هذه الرسالة قدّمنا المرشح المعروف بإسم مُصممٌه 'كالمان'، وقد إستعملناه لِتتبع هدف مُتحرك في مستوى بِإسْتِعْمَال قياسات يوفرها الرادار. بعد ذلك أعطينا نبذة عن المعيقات التي تعترض التطبيق الفعلي لأساليب التتبع و قدّمنا بعض الحلول المقترحة التي تفي بجملة من المتطلبات العملية. إن النظم العملية غالباً ما تكون غير خطية و يكون تشويشها غير طبيعي. علاوة على ذلك، يمكن للمتحرك أن يُغيّر نمط سيره، فتارة يتسارع و يقوم بالدوران تارة أخرى. للتعامل مع كل هذه المتطلبات، إستعملنا مرشحات مُنبثقة من مرشح 'كالمان' كما بيّنا عن طريق المحاكاة مدى نجاعتها. أخيراً و إقتباساً من طرق أساليب التتبع، إستطعنا تحديد الرواق المخصص للعربة أثناء سيرها و رصد المنعطفات الموجودة أمامها قصد تتبّيه السائق و ذلك إستناداً على العلامات المرسومة على الأرضية.

Résumé

Dans ce mémoire nous avons présenté le filtre de Kalman, ce filtre est appliqué à la poursuite d'une cible qui se déplace dans le plan en utilisant les positions comme mesures fournies par un radar. Ensuite, on soulève certains problèmes posés en pratique et on présente les solutions envisagées pour répondre à leurs exigences. Effectivement, en pratique, les systèmes sont souvent non linéaires et le bruit est, en général, non Gaussien. A ces deux problèmes il se peut qu'il s'ajoute le problème du mode d'évolution de la dynamique de la cible. Pour remédier à tous ces problèmes, nous avons exposé certaines variantes du filtre de Kalman, les performances de ces techniques sont évaluées par des simulations. Enfin, et en s'inspirons de la formulation du problème de la poursuite, nous avons proposé une technique qui permet de détecter les voies ainsi que les virages en utilisant les marquages routiers.